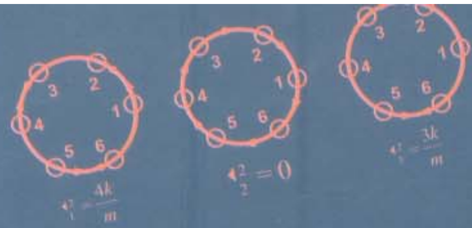


$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - \dot{r}\dot{\theta}^2 \sin^2\theta) = F_r,$$
$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\theta - r\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta) = F_\theta,$$
$$m(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta) = F_\varphi$$

Bài tập và lời giải của các
Trường Đại học nổi tiếng Hoa Kỳ
Major American Universities Ph.D. Qualifying Questions and Solutions

BÀI TẬP VÀ LỜI GIẢI CƠ HỌC

PROBLEMS AND SOLUTIONS ON MECHANICS

Biên soạn:
Trường Đại học Khoa học
và Công nghệ Trung Hoa

Chủ biên:
Yung-Kuo Lim

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

BÀI TẬP & LỜI GIẢI

CƠ HỌC

(Tái bản lần thứ nhất)

Người dịch:

ĐẶNG LÊ MINH

NGUYỄN NGỌC ĐỈNH

ĐẶNG VĂN SỬ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung:
Phó Tổng biên tập NGÔ ÁNH TUYẾT
Giám đốc Công ty Sách dịch và Từ điển Giáo dục NGUYỄN NHƯ Ý

Biên tập lần đầu:
PHẠM VĂN THIỀU
ĐỖ THỊ TỐ NGA

Biên tập tái bản:
ĐẶNG VĂN SỬ

Xử lý bìa:
HOÀNG ANH TUẤN

Sửa bản in:
CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH DỊCH VÀ TỪ ĐIỂN GIÁO DỤC

Chế bản:
NGUYỄN HỮU ĐIỂN

Problems and Solutions on Mechanics

BÀI TẬP VÀ LỜI GIẢI CƠ HỌC

Mã số: 8Z074z0-SBQ - Mã số CXB: 114-2010/CXB/45-129/GD.
In 1000 cuốn (QĐ: 3395/QĐ-GD), khổ 16x24cm,
tại Công ty CP In Phúc Yên – Đường Trần Phú, TX. Phúc Yên
In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2010

LỜI NHÀ XUẤT BẢN

*Bộ sách **Bài tập và lời giải Vật lý** gồm bảy cuốn:*

1. *Cơ học*
2. *Cơ học Lượng tử*
3. *Quang học*
4. *Nhiệt động lực học & Vật lý thống kê*
5. *Điện từ học*
6. *Vật lý Nguyên tử, Hạt nhân và Các hạt cơ bản*
7. *Vật lý chất rắn, Thuyết tương đối & Các vấn đề liên quan*

Đây là tuyển tập gồm 2550 bài tập được lựa chọn kĩ lưỡng từ 3100 đề thi vào đại học và thi tuyển nghiên cứu sinh chuyên ngành vật lý của 7 trường đại học nổi tiếng ở Mỹ (Đại học California ở Berkeley, Đại học Columbia, Đại học Chicago, Viện Công nghệ Massachusetts (MIT), Đại học Bang New York ở Buffalo, Đại học Princeton, Đại học Wiscosin). Trong số này còn có các đề thi trong chương trình CUSPEA và các đề thi do nhà vật lý đoạt giải Nobel người Mỹ gốc Trung Quốc C. C Ting (CCT) soạn để tuyển chọn sinh viên Trung Quốc đi du học ở Hoa Kỳ. Những đề thi này được xuất bản kèm theo lời giải của hơn 70 nhà vật lý có uy tín của Trung Quốc và 20 nhà vật lý nổi tiếng kiểm tra, hiệu đính. Tất cả các cuốn sách trên đã được tái bản, riêng cuốn Điện từ học đã được tái bản 6 lần.

Điểm đáng lưu ý về bộ sách này là nó bao quát được mọi vấn đề của vật lý học, từ cổ điển đến hiện đại. Bên cạnh những bài tập đơn giản nhằm khắc sâu những khái niệm cơ bản của Vật lý học, không cần những công cụ toán học phức tạp cũng giải được, bộ sách còn có những bài tập khó và hay, đòi hỏi phải có kiến thức và tư duy vật lý sâu sắc với các phương pháp và kĩ thuật toán học phức tạp hơn mới giải được. Có thể nói đây là một tài liệu bổ sung vô giá cho sách giáo khoa và giáo trình đại học ngành vật lý, phục vụ một phạm vi đối tượng rất rộng, từ các giáo viên vật lý phổ thông, giảng viên các trường đại học cho đến học sinh các lớp chuyên lý, sinh viên khoa vật lý và sinh viên các lớp tài năng của các trường đại học khoa học tự nhiên, đặc biệt là cho những ai muốn du học ở Mỹ.

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam trân trọng giới thiệu bộ sách tới độc giả.

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

LỜI NÓI ĐẦU

Làm bài tập là một việc tất yếu và quan trọng trong quá trình học Vật lý nhằm củng cố lý thuyết đã học và trau dồi kĩ năng thực hành. Trong cuốn ***Cơ học*** *có 410 bài tập và lời giải: cơ học Newton (272 bài), cơ học giải tích (84 bài), thuyết tương đối hẹp (54 bài). Hầu hết các bài chọn đưa vào cuốn sách này đều phù hợp với chương trình vật lý bậc đại học và sau đại học của chuyên ngành Cơ học. Ngoài ra, một số kết quả nghiên cứu gần đây cũng được đưa vào cuốn sách này, nhằm giúp người học không chỉ nắm bắt lý thuyết cơ bản mà còn có thể vận dụng kiến thức cơ bản một cách sáng tạo vào việc học tập và nghiên cứu.*

MỤC LỤC

PHẦN I

Cơ học Newton

1. ĐỘNG HỌC CHẤT ĐIỂM (1001–1108)

1001

Một người có trọng lượng w đứng trên thang máy cũng có trọng lượng w. Thang máy chạy lên với gia tốc a và ở một thời điểm có vận tốc V.

(a) Trọng lượng biểu kiến của người đó là bao nhiêu?

(b) Người trèo bậc thang trên thang máy vận tốc tương đối là v so với thang máy. Hỏi tốc độ tiêu hao năng lượng (công suất)?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Trọng lượng biểu kiến của người là

$$F = w + \frac{w}{g}a = w\left(1 + \frac{a}{g}\right) ,$$

g là gia tốc trọng trường.

(b) Tốc độ tiêu tốn năng lượng

$$Fv_t = w\left(1 + \frac{a}{g}\right)(V + v) .$$

1002

Tìm điểm trên mặt đất sao cho khi quan sát trạm quỹ đạo không gian luôn luôn ở trên đỉnh đầu? Mô tả quỹ đạo trạm quan sát hoàn hảo nhất có thể?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Người quan sát phải đứng ở xích đạo. Quỹ đạo trạm không gian là vòng tròn lớn trong mặt phẳng xích đạo có tâm ở tâm trái đất. Bán kính của quỹ đạo có thể tính được khi sử dụng chu kì quay là 24 giờ [1] như sau: Cho bán kính quỹ đạo là R bán kính quả đất là R_0.

Ta có

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} ,$$

[1] Đối với tính toán chính xác hơn, ta phải lấy chu kì quay là 23 giờ 56 phút 4 giây.

ở đây v là tốc độ của trạm không gian, G là hằng số phổ biến, m và M tương ứng là khối lượng của trạm và trái đất, từ đó

$$v^2 = \frac{GM}{R}.$$

Vì

$$mg = \frac{GMm}{R_0^2}.$$

ta có

$$GM = R_0^2 g.$$

Bởi vậy

$$v^2 = \frac{R_0^2 g}{R}.$$

Chuyển động quay với vận tốc v không đổi, chu kì quay là

$$T = \frac{2\pi R}{v}.$$

Bởi vậy

$$\frac{4\pi^2 R^2}{T^2} = \frac{R_0^2 g}{R}$$

và

$$R = \left(\frac{R_0^2 T^2 g}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 4,2 \times 10^4 \text{ km}.$$

1003

Ở công viên có một trò chơi là một đĩa quay. Một em bé có thể ngồi lên nó ở một vị trí có bán kính nào đó (hình 1.1). Khi đĩa bắt đầu quay, em bé có thể ngã nếu không đủ lực ma sát. Em bé nặng 50 kg và hệ số ma sát là 0,4. Tốc độ góc là 2 rad/s. Tìm bán kính cực đại mà ở đó em bé có thể ngồi mà không bị ngã?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

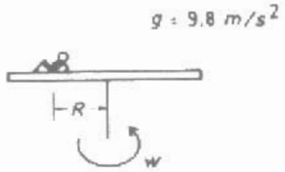
Điều kiện tới hạn em bé có thể ngã là

$$mR\omega^2 = \mu mg.$$

Vậy

$$R = \frac{\mu g}{\omega^2} = \frac{0,4 \times 9.8}{2^2} = 0.98 \text{ m} .$$

Vì lực ly tâm tỉ lệ với bán kính, nên đó là bán kính cực đại mà em bé không bị ngã.



Hình 1.1

1004

Trên một ròng rọc có treo một vật ở một đầu nặng 9 kg và ở đầu kia vật nặng 7 kg (hình 1.2). Xác định gia tốc và lực căng dây?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Bỏ qua momen quán tính của ròng rọc, ta nhận được phương trình chuyển động

$$m_1\ddot{x} = m_1 g - F$$

và

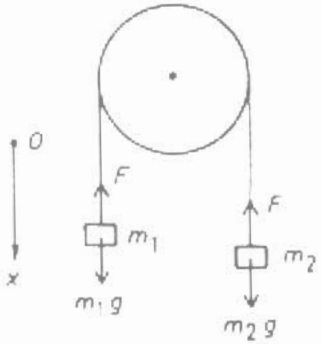
$$m_2\ddot{x} = F - m_2 g .$$

Lực căng dây và gia tốc lần lượt là

$$F = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = 77.2 \text{ N}$$

và

$$\ddot{x} = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2} = \frac{2g}{16}$$
$$= 1.225 \text{ m/s}^2 .$$

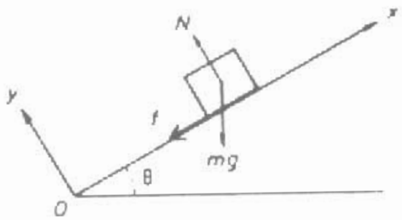


Hình 1.2

1005

Một viên gạch trượt với vận tốc ban đầu là 5 ft/s trên mặt phẳn nghiêng có góc nghiêng là 30° với phương nằm ngang. Hệ số ma sát (trượt hay tĩnh) là $\mu = \sqrt{3}/12$. Sau 0,5 s, hòn gạch trượt được bao xa kể từ điểm ban đầu? Cho $g = 32$ ft/s^2.

(*Wisconsin*)



Hình 1.3

Lời giải:

Chọn hệ tọa độ Descartes như hình vẽ 1.3. Vì $\dot{x} > 0$, nên phương trình chuyển động của viên gạch là

$$m\ddot{x} = -mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta\ ,$$

từ đó

$$\ddot{x} = -g(\sin\theta + \mu\cos\theta) = -\frac{5g}{8}\ .$$

Thời gian chuyển động của viên gạch là

$$t_1 = \frac{\dot{x}_0}{-\ddot{x}} = 5/(5g/8) = 0,25 \text{ s}$$

và độ dịch chuyển của viên gạch là

$$x_1 = \dot{x}_0 t_1 + \frac{1}{2}\ddot{x}t_1^2 = \frac{5}{8} \text{ ft} .$$

Vì $t > t_1$, $\dot{x} < 0$ nên phương trình chuyển động trở thành

$$m\ddot{x} = -mg\sin\theta + \mu mg\cos\theta$$

hay

$$\ddot{x} = -g(\sin\theta - \mu\cos\theta) = -\frac{3g}{8} .$$

Độ dịch chuyển trong khoảng thời gian từ $t_1 = 0,25$ s đến $t_2 = 0,5$ s là

$$\Delta x = \ddot{x}\frac{t^2}{2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{3g}{8}\cdot\frac{1}{16} = -\frac{3}{8} \text{ ft} .$$

Khoảng cách mà viên gạch dịch chuyển so với điểm ban đầu tại $t = 0,5$ s là

$$S = x_1 + \Delta x = 5/8 - 3/8 = 0,25 \text{ ft}.$$

1006

Một người nặng 80 kg nhảy từ độ cao 1 m xuống dưới mặt đất mà quên gập đầu gối. Thân người anh ta chỉ chậm dần từ khoảng cách 1 cm. Hãy tính lực tổng tác dụng lên chân anh ta trong quá trình chậm dần.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

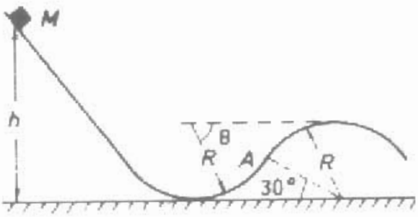
Người có cơ năng $E_1 = mg(h+s)$ ngay trước khi tiếp đất. Công anh ta sản ra khi chậm dần là $E_2 = fs$, ở đây f là lực tổng tác dụng lên chân. Khi $E_1 = E_2$, ta có

$$f = \frac{mgh}{s} + mg = \left(\frac{80\times 1}{0,01} + 80\right)g = 8080g \text{ N}.$$

1007

Vật có khối lượng M trượt không ma sát trên đường trượt như hình 1.4. Phần đường trượt có bán kính cong là R. Vật bắt đầu trượt từ độ cao h. Tại một độ cao nào đó, vật bắt đầu trượt ra khỏi đường trượt (không tiếp xúc với đường trượt). Hãy chỉ ra, tại đâu trên đường trượt xảy ra hiện tượng đó và độ cao h ít nhất bằng bao nhiêu?

(*Wisconsin*)



Hình 1.4

Lời giải:

Trước điểm uốn của đường trượt A, phản lực pháp tuyến tác dụng lên vật N là

$$N = \frac{mv^2}{R} + mg\sin\theta \ .$$

v là vận tốc của vật. Sau điểm uốn

$$N + \frac{mv^2}{R} = mg\sin\theta \ .$$

trong đó $\sin\theta = \frac{R}{2R}$, hay $\theta = 30°$.

Vật rời khỏi đường trượt (không tiếp xúc với đường trượt) khi $N \leq 0$. Điều đó chỉ xảy ra ở phần thứ hai của đường trượt khi và chỉ khi

$$\frac{mv^2}{R} > mg\sin\theta \ .$$

Vì bảo toàn cơ năng

$$mg[h - (R - R\sin\theta)] = \frac{1}{2}mv^2$$

Khi đó đòi hỏi

$$h - R + R\sin\theta \geq \frac{R\sin\theta}{2} \ .$$

hay

$$h \geq R - \frac{R\sin\theta}{2} .$$

Điểm sớm nhất mà vật rời khỏi đường trượt là tại điểm A ở đó $\theta = 30°$. Vì vậy độ cao h ít nhất phải là $\frac{3R}{4}$.

1008

Xét sự quay của một hành tinh nào đó. Vận tốc tại một điểm trên xích đạo của nó là V. Ảnh hưởng của sự quay làm cho g ở xích đạo chỉ bằng 1/2 g ở cực. Vậy vận tốc thoát khỏi hành tinh đối với một vật ở cực phải bằng bao nhiêu lần V?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Đặt g và g' tương ứng là gia tốc trọng trường ở cực và ở xích đạo và xét vật có khối lượng m trên bề mặt hành tinh có khối lượng M. Tại cực

$$mg = \frac{GMm}{R^2} ,$$

cho ta

$$GM = gR^2 .$$

Tại xích đạo, ta có

$$\frac{mV^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} - mg' = mg - \frac{mg}{2} = \frac{mg}{2} .$$

Vì vậy $g = 2V^2/R$.

Nếu ta xét thế năng trọng trường ở vô cùng tính từ bề mặt hành tinh thì vật thể sẽ có thế năng

$$-\int_{\infty}^{R} -\frac{GMm}{r^2}dr = -\frac{GMm}{R} .$$

Lưu ý rằng dấu âm đứng trước trọng lực là tính đến sự hút của nó. Vật có năng lượng toàn phần ở cực là

$$E = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{GMm}{R} .$$

Đối với nó, để thoát khỏi hành tinh năng lượng toàn phần của nó ít nhất phải bằng năng lượng cực tiểu của vật thể ở vô cùng, có nghĩa là bằng 0. Vì vậy vận tốc thoát v khỏi hành tinh phải sao cho

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = 0 ,$$

hay

$$v^2 = \frac{2GM}{R} = 2gR = 4V^2 ,$$

có nghĩa là

$$v = 2V .$$

1009

Một vật nhỏ khối lượng m nằm ở rìa của một cái đĩa phẳng nằm ngang bán kính R, hệ số ma sát tĩnh giữa vật và đĩa là μ. Đĩa quay xung quanh trục của nó với vận tốc góc sao cho vật văng ra khỏi đĩa và rơi xuống đất từ độ cao h mét. Tìm quãng đường nằm ngang mà vật đi được khi bắt đầu văng ra khỏi đĩa cho tới điểm trước khi rơi xuống sàn.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Lực ma sát tĩnh cực đại giữa đĩa và vật là $f = \mu mg$. Khi vật nhỏ rời khỏi đĩa, vận tốc ngang v được cho bởi biểu thức

$$\frac{mv^2}{R} = \mu mg .$$

Như vậy

$$v = \sqrt{\mu Rg} .$$

Thời gian cần để vật rơi từ độ cao h

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} .$$

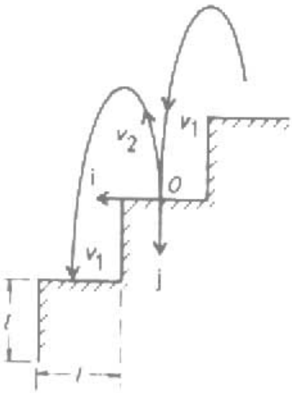
Vì vậy quãng đường ngang mà vật đi được khi văng ra trước khi bắt đầu rơi xuống sàn là bằng

$$vt = \sqrt{2\mu Rh} .$$

1010

Một hòn bi lăn xuống theo cầu thang theo cách là rơi từng bậc một ở cùng một vị trí ở từng bậc và nẩy lên cùng một độ cao (hình 1.5). Chiều cao của từng bậc như nhau và cho biết hệ số hồi phục là e. Hãy tìm vận tốc ngang cần thiết và chiều cao nẩy lên (hệ số hồi phục được định nghĩa là $e = -v_f/v_i$, ở đây v_f và v_i tương ứng là vận tốc đứng ngay trước và sau khi nẩy).

(*Wisconsin*)



Hình 1.5

Lời giải:

Sử dụng vectơ đơn vị **i**, **j** như chỉ ra ở hình 1.5 và vận tốc ngang của viên bi là v_h. Vận tốc ngay trước và sau nẩy tương ứng là

$$\mathbf{v}_1 = v_h\mathbf{i} - v_i\mathbf{j}$$

và

$$\mathbf{v}_2 = v_h\mathbf{i} + v_f\mathbf{j} \, .$$

Khi các điều kiện ở mỗi bước giữ như nhau thì v_i, v_f và v_h là hằng số. Định luật bảo toàn cơ năng

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgl$$

cho ta

$$v_i^2 = v_f^2 + 2gl \, .$$

Như đã định nghĩa e, ta có

$$v_f = -ev_i \, ,$$

như ở trên cho ta

$$v_1^2 = \frac{2gl}{1-e^2} .$$

Thời gian đòi hỏi cho mỗi bước nẩy là

$$t = \frac{v_1 - v_f}{g} = \frac{l}{v_h} .$$

từ đó

$$v_h = \frac{gl}{v_1 - v_f} = \frac{gl}{(1+e)v_1} = \sqrt{\frac{gl}{2}\frac{1-e}{1+e}} .$$

đó chính là vận tốc ngang cần thiết. Chiều cao nẩy H được cho bởi biểu thức biến đổi cơ năng

$$\frac{mv_f^2}{2} = mgH .$$

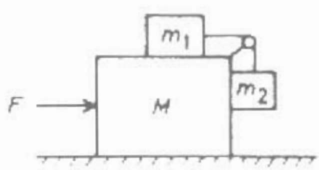
Vì vậy,

$$H = \frac{v_f^2}{2g} = \frac{e^2}{2g}\frac{2gl}{1-e^2} = \frac{e^2 l}{1-e^2} .$$

1011

Giả thiết bề mặt không ma sát và bỏ qua quán tính của con lăn và dây (hình 1.6). Hãy tìm lực ngang cần thiết để ngăn cản bất kì chuyển động tương đối nào của m_1, m_2 và M.

(*Wisconsin*)



Hình 1.6

Lời giải:

Lực f_1, F và mg được chỉ ra ở hình 1.7. Gia tốc của m_1, m_2 và M là như nhau khi chúng không chuyển động tương đối với nhau. Phương trình chuyển động dọc theo trục x là

$$(M + m_1 + m_2)\ddot{x} = F ,$$

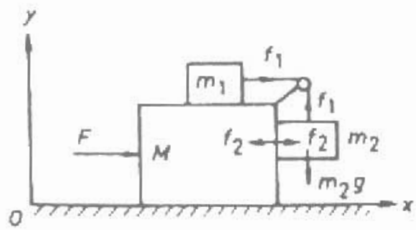
$$m_1\ddot{x} = f_1$$

Khi không có chuyển động tương đối của m_2 dọc theo trục y thì

$$f_1 = m_2 g\ .$$

Kết hợp các phương trình lại với nhau, ta nhận được

$$F = \frac{m_2(M + m_1 + m_2)g}{m_1}\ .$$



Hình 1.7

1012

Mặt trời cách tâm của ngân hà khoảng 25.000 năm ánh sáng và chuyển động gần như tròn với chu kì là 170.000.000 năm. Trái đất cách mặt trời 8 phút ánh sáng. Từ các số liệu đó, hãy tìm khối lượng hấp dẫn gần đúng của ngân hà theo đơn vị khối lượng mặt trời. Ta thừa nhận rằng trọng lực trên mặt trời có thể tính gần đúng bằng việc thừa nhận toàn bộ khối lượng của ngân hà tập trung ở tâm của nó.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Chuyển động của trái đất xung quanh mặt trời

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Gmm_s}{r^2}\ ,$$

r là khoảng cách từ trái đất đến mặt trời, v là vận tốc của trái đất, m và m_s tương ứng là khối lượng của trái đất và mặt trời.

Chuyển động của mặt trời quanh tâm ngân hà là

$$\frac{m_s V^2}{R} = \frac{Gm_s M}{R^2}\ ,$$

R là khoảng cách từ mặt trời đến tâm ngân hà, V là vận tốc của mặt trời và M là khối lượng của ngân hà.

Vậy

$$M = \frac{RV^2}{G} = \frac{R}{r}\left(\frac{V}{v}\right)^2 m_s .$$

Sử dụng biểu thức $V = 2\pi R/T$, $v = 2\pi r/t$, T và t tương ứng là chu kì quay của mặt trời và trái đất, ta có

$$M = \left(\frac{R}{r}\right)^3 \left(\frac{t}{T}\right)^2 m_s .$$

Với các số liệu đã cho ta nhận được

$$M = 1,53 \times 10^{11} m_s .$$

1013

Một vận động viên Olempic, khối lượng m, nhảy cầu từ độ cao 10 m với vận tốc ban đầu bằng không.

(a) Tính vận tốc V_0 khi chạm vào mặt nước và thời gian từ lúc nhảy đến khi chạm mặt nước.

Giả thiết rằng lực nổi của nước cân bằng với trọng lực tác dụng lên người nhảy và lực nhớt tác dụng lên người nhảy là bv^2.

(b) Xác lập phương trình chuyển động thẳng đứng trong nước của người nhảy. Tìm vận tốc V như là hàm của độ sâu x dưới nước và đặt điều kiện biên là $V = V_0$ ở $x = 0$.

(c) Nếu $b/m = 0,4\ \text{m}^{-1}$, tính độ sâu ở đó $V = V_0/10$.

(d) Tìm độ sâu (chiều thẳng đứng) $x(t)$ của người nhảy ở dưới nước theo thời gian ở dưới nước.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a)

$$V_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9,8 \times 10} = 14\ \text{m/s} .$$

Thời gian từ lúc nhảy đến khi chạm mặt nước là

$$t = \frac{V_0}{g} = \frac{14}{9,8} = 1,43\ \text{s} .$$

(b) Khi trọng lượng của người nhảy cân bằng với lực nổi thì phương trrình chuyển động của người nhảy trong nước là

$$m\ddot{x} = -b\dot{x}^2 ,$$

hay, sử dụng $\ddot{x} = \dot{x}d\dot{x}/dx$,

$$\frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -\frac{b}{m}dx .$$

Tích phân, với $\dot{x} = V_0$ tại $x = 0$, ta nhận được

$$V \equiv \dot{x} = V_0 e^{-\frac{b}{m}x} .$$

(c) Khi $V = V_0/10$, thì

$$x = \frac{m}{b}\ln 10 = \frac{\ln 10}{0,4} = 5,76 \text{ m} .$$

(d) Khi $dx/dt = V_0 e^{-\frac{b}{m}x}$,

$$e^{\frac{b}{m}x}dx = V_0 dt .$$

Tích phân, với $x = 0$ tại $t = 0$, ta nhận được

$$\frac{m}{b}(e^{\frac{b}{m}x} - 1) = V_0 t ,$$

hay

$$x = \frac{m}{b}\ln\left(1 + bV_0\frac{t}{m}\right) .$$

1014

Sức cản của không khí và ma sát tác dụng lên người đi xe đạp một lực $F = aV$, V là vận tốc của người và $a = 4$ niutơn-s/m. Với cố gắng cực đại, người đi xe đạp có thể sản ra một công là 600 W. Hãy tính tốc độ cực đại trên mặt đất không có gió.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Khi đạt được tốc độ cực đại, lực đạp cân bằng với sức cản. Cho F là lực đạp, khi đó

$$F = aV \qquad \text{và} \qquad FV = 600 \text{ W} .$$

Khử F, ta có

$$V^2 = \frac{600}{a} - 150 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

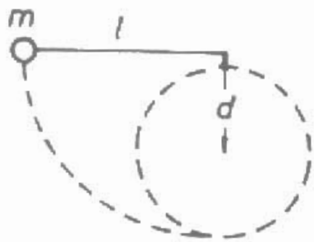
và tốc độ cực đại trên mặt đất không gió là

$$v = \sqrt{150} = 12,2 \text{ m/s} .$$

1015

Một con lắc có khối lượng m và chiều dài l chuyển động từ trạng thái nghỉ nằm ngang. Một cái đinh được đóng ở vị trí phía dưới chốt một khoảng cách d, làm cho quả nặng m chuyển động theo đường đứt nét. Hãy tìm khoảng cách d theo l sao cho quả nặng sẽ chuyển động một vòng tròn như chỉ ra trên hình 1.8.

(*Wisconsin*)



Hình 1.8

Lời giải:

Xem quả nặng m như một chất điểm. Ở thời điểm con lắc chạm vướng vào đinh, m có vận tốc $v = \sqrt{2gl}$. Xung lượng góc của quả nặng ứng với điểm ở đó có đinh được bảo toàn trong suốt quá trình va chạm. Sau đó vận tốc quả nặng vẫn là v ở khoảng cách sau khi va chạm và chuyển động của quả nặng là xung quanh đinh. Dưới những điều kiện tới hạn, quả nặng phải chuyển động một vòng hoàn chỉnh quanh đinh, trọng lực bằng lực hướng tâm khi quả nặng ở trên đỉnh vòng tròn. Gọi vận tốc của quả nặng ở khoảng cách đó là v_1, ta có

$$\frac{mv_1^2}{l-d} = mg ,$$

hay

$$v_1^2 = (l-d)g .$$

Phương trình năng lượng sẽ là

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + 2mg(l-d) ,$$

hay

$$2gl = (l-d)g + 4(l-d)g$$

Khoảng cách cực tiểu là

$$d = \frac{3l}{5} .$$

1016

Quả nặng khối lượng m chuyển động tròn trên mặt phẳng "mềm" nằm ngang với vận tốc v_0 với bán kính R_0. Quả nặng được gắn với một đoạn dây luồn qua một lỗ "nhẵn" trong mặt phẳng như được chỉ ra ở hình 1.9 ("nhẵn" có nghĩa là không ma sát).

(a) Tìm lực căng dây?

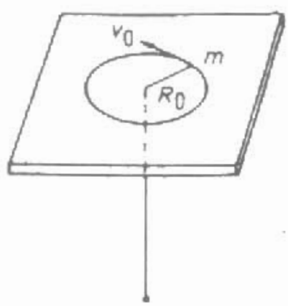
(b) Tìm xung lượng góc của m?

(c) Tìm động năng của m?

(d) Lực căng dây tăng đều và cuối cùng quả nặng m chuyển động theo vòng tròn bán kính $R_0/2$. Tìm giá trị cuối cùng của động năng?

(e) Giải thích một điều quan trọng là tại sao dây bị kéo từ từ?

(*Wisconsin*)



Hình 1.9

Lời giải:

(a) Lực căng dây phải đảm bảo lực hướng tâm đủ lớn để có chuyển động tròn, vì vậy $F = mv_0^2/R_0$.

(b) Xung lượng góc của quả nặng m là $J = mv_0R_0$.

(c) Động năng của m là $T = mv_0^2/2$.

(d) Bán kính chuyển động tròn của quả nặng m giảm khi lực căng dây giảm dần. Xung lượng góc của quả nặng m bảo toàn vì nó chuyển động dưới tác dụng của lực hướng tâm. Như vậy

$$mv_0R_0 = mv_1\left(\frac{R_0}{2}\right),$$

hay

$$v_1 = 2v_0 .$$

Động năng cuối cùng là

$$T_1 = \frac{mv_1^2}{2} = \frac{m(2v_0)^2}{2} = 2mv_0^2 .$$

(e) Lý do làm cho dây bị kéo dần dần là vận tốc hướng tâm của quả nặng cần phải giữ đủ nhỏ sao cho vận tốc của quả nặng được xem như vận tốc tiếp tuyến. Vận tốc tiếp tuyến như là hàm của R có thể tính toán được từ sự bảo toàn xung lượng góc.

1017

Một ô tô 5000 lb đang chạy ở 60 mph (dặm/giờ) trên đường thì đột nhiên cần số được đưa về số 0 (xe chạy theo quán tính). Tốc độ giảm theo biểu thức sau

$$V = \frac{60}{1+\left(\frac{t}{60}\right)}\ \text{mph}\,;$$

t là thời gian tính bằng giây. Hãy tìm công suất cần để lái xe chạy ở 30 mph trên cùng đường đó.
Sử dụng các hằng số $g = 22$ mph/s, 1 H.P (sức ngựa) = 550 ft.lb/s, 60 mph = 88 ft/s.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Cho $V_0 = 60$ mph, khi đó

$$\frac{t}{60} = \frac{V_0}{V} - 1 .$$

Vì thế

$$\frac{dV}{dt} = \frac{-V^2}{60V_0},$$

và lực cản tác dụng lên xe là $F = mV^2/(60V_0)$, m là khối lượng xe. Lực đẩy phải bằng lực cản F' ở tốc độ $V' = 30$ mph để giữ tốc độ trên cùng con đường. Công suất cần thiết là

$$P' = F'V' = \frac{mV'^3}{60V_0} = 37500\frac{\text{mph}^2.\text{lb.}}{\text{s}}$$

$$= \frac{37500}{g}\frac{\text{mph}^2.\text{lb wt}}{\text{s}} = \frac{37500}{22}\ \text{mph.lb wt}$$

$$= \frac{37500}{22}\cdot\frac{88}{60}\frac{\text{ft.lb wt}}{\text{s}}$$

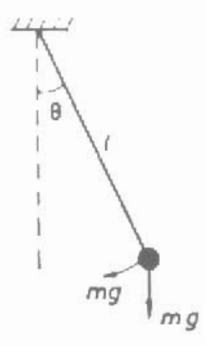
$$= 2500\frac{\text{ft.lb wt}}{\text{s}} = 4,5\ \text{H.P.}$$

Lưu ý pao trọng lượng (lb wt) là đơn vị lực và 1 lb wt $= g$ ft.lb/s^2. Công suất tính bằng sức ngựa được xác định bằng 550 ft.lb wt/s.

1018

Một em bé có khối lượng m ngồi trong cái xích đu khối lượng bỏ qua được treo bằng một sợi dây chiều dài l. Giả thiết kích thước em bé bỏ qua so với chiều dài l. Bố em bé kéo em bé đến khi sợi dây tạo với phương thẳng đứng một góc 1 rađian. Sau đó đẩy với lực $F = mg$ dọc theo cung tròn cho tới khi sợi dây thẳng đứng và ngừng đu. Xác định thời gian mà bố em bé đã đẩy cái đu? Giả thiết có thể viết gần đúng $\sin\theta \approx \theta$ với $\theta < 1$.

(*Wisconsin*)



Hình 1.10

Lời giải:

Theo hình 1.10, phương trình chuyển động của em bé là

$$ml\ddot{\theta} = -mg - mg\sin\theta ,$$

hay

$$\ddot{\theta} + (\frac{g}{l})\sin\theta = \frac{-g}{l} \qquad (\theta \geq 0) .$$

Với $\omega^2 = g/l$, $\sin\theta \approx \theta$, biểu thức trên trở thành

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = -\omega^2 .$$

Nghiệm của phương trình là $\theta = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) - 1$, ở đây hằng số A và B được tìm từ điều kiện ban đầu $\theta = 1$, $\dot{\theta} = 0$ ở $t = 0$ là $A = 2$, $B = 0$. Vì vậy

$$\theta = 2\cos(\omega t) - 1 .$$

Khi $\theta = 0$,

$$\cos(\omega t_1) = \frac{1}{2} ,$$

cho

$$\omega t_1 = \frac{\pi}{3} ,$$

nghĩa là

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{l}{g}} .$$

Đó là quãng thời gian mà bố em bé đẩy cái đu.

1019

Một hạt khối lượng m chịu hai lực: lực hướng tâm $\mathbf{f}_1$ và lực ma sát $\mathbf{f}_2$, với

$$\mathbf{f}_1 = \frac{\mathbf{r}}{r}f(r),$$

$$\mathbf{f}_2 = -\lambda\mathbf{v} \qquad (\lambda > 0) ,$$

ở đây $\mathbf{v}$ là vận tốc hạt. Nếu ban đầu hạt có xung lượng góc $\mathbf{J}_0$ ở $r = 0$, hãy tìm xung lượng góc theo thời gian.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Viết ra phương trình chuyển động của hạt theo toạ độ cực

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f(r) - \lambda\dot{r} ,$$
$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = -\lambda r\dot{\theta} ,$$

hay

$$\frac{1}{r}\frac{d(mr^2\dot{\theta})}{dt} = -\lambda r\dot{\theta} .$$

Đặt $J = mr^2\dot{\theta}$, ta viết biểu thức cuối cùng như sau

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{-\lambda J}{m} .$$

Tích phân và sử dụng xung lượng góc ban đầu J_0, ta nhận được

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 e^{-\frac{\lambda}{m}t} .$$

1020

(a) Một vật thể cầu quay với vận tốc góc ω. Nếu lực ngăn cản sự rã văng ly tâm của vật thể là trọng lực thì mật độ cực tiểu vật thể phải bằng bao nhiêu? Sử dụng số liệu đó đánh giá mật độ của punxa Con Cua, nó quay 30 lần trong một giây (đó là tàn dư của sao siêu mới năm 1054 sau công nguyên, nó đã được quan sát rất kĩ ở Trung Quốc!)

(b) Nếu khối lượng của punxa cỡ khối lượng 1 mặt trời ($\sim 2 \times 10^{30}$ kg hay $\sim 3 \times 10^5 M_{\text{trái đất}}$), hãy tính bán kính cực đại của punxa.

(c) Thực tế mật độ gần với mật độ vật chất hạt nhân. Vậy bán kính punxa là bao nhiêu?

(CUSPEA)

Lời giải:

(a) Xét trường hợp giới hạn punxa Con Cua gần phân rã. Khi đó lực hướng tâm tác dụng lên vật thử nằm ở xích đạo của punxa Con Cua nhỏ hơn trọng lực

$$\frac{mv^2}{R} = mR\omega^2 \leq \frac{GmM}{R^2} ,$$

hay

$$\frac{M}{R^3} \geq \frac{\omega^2}{G} ,$$

m và M lần lượt là khối lượng vật thử và của punxa Con Cua, R là bán kính punxa, v là tốc độ vật thử, G là hằng số hấp dẫn. Từ đó ta tính được mật độ cực tiểu của punxa là

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \geq \frac{3\omega^2}{4\pi G} = \frac{3(2\pi \times 30)^2}{4\pi \times 6,7 \times 10^{-11}} \sim 1,3 \times 10^{14} \text{ kg/m}^3 .$$

(b) Vì $\frac{3M}{4\pi R^3} \geq \rho_{\min}$,

$$R \leq \left(\frac{3M}{4\pi\rho_{\min}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{6 \times 10^{30}}{4\pi \times 1,3 \times 10^{14}}\right)^{\frac{1}{3}} = 1,5 \times 10^5 \text{ m} = 150 \text{ km} .$$

(c) Mật độ hạt nhân được cho bởi biểu thức sau

$$\rho_{\text{hạt nhân}} \approx \frac{m_p}{4\pi R_0^3/3} ,$$

m_p là khối lượng proton và gần đúng bằng khối lượng m_H của nguyên tử hydro, nó được tính như sau

$$m_p \approx m_H = \frac{2 \times 10^{-3}}{2 \times 6,02 \times 10^{23}} = 1,7 \times 10^{-27} \text{ kg} .$$

Với

$$R_0 \approx 1,5 \times 10^{-15} \text{ m} ,$$

ta nhận được

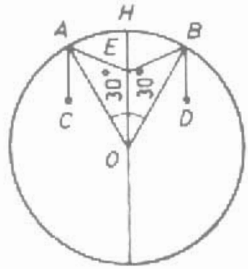
$$\rho_{\text{hạt nhân}} \approx 1,2 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3 .$$

$\rho = \rho_{\text{hạt nhân}}$, punxa sẽ có bán kính là

$$R \approx \left(\frac{6 \times 10^{30}}{4\pi \times 1,2 \times 10^{17}}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 17 \text{ km} .$$

1021

Hai vòng không trọng lượng trượt trên một dây tròn, nhẵn, trơn mà trục nằm trong mặt phẳng nằm ngang. Một dây trơn xỏ qua các vòng và mang các vật nặng ở hai đầu và ở điểm giữa các vòng. Nếu có cân bằng khi các vòng ở điểm 30° cách điểm cao nhất của đường tròn như được chỉ ra ở hình 1.11, hãy tìm quan hệ giữa ba trọng vật đó.



Hình 1.11

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

Giả thiết dây không trọng lượng. Khi không có ma sát, lực căng T tác dụng lên các phần dây AC và AE của dây là như nhau. Để vòng A nằm yên trong vòng nhẫn, hợp lực tác dụng lên nó phải dọc theo AO, O là tâm của vòng kín, mặt khác sẽ có thành phần tiếp tuyến với vòng. Vì thế

$$\angle OAE = \angle OAC = \angle AOE = 30^\circ .$$

Với phần BD và BE cũng lý luận như thế. Do đối xứng, điểm E, ở đó dây mang trọng vật thứ ba phải nằm trên bán kính HO, H là điểm cao nhất của vòng, và lực tác dụng lên phần BD và BE cũng là T.

Xét điểm E. Một trong ba lực tác dụng lên nó, ở trạng thái cân bằng, tạo góc 120° với lực bên cạnh. Vì hai lực có giá trị là T, lực thứ ba cũng là T. Vì vậy ba trọng vật mà dây mang là bằng nhau.

1022

Hãy tính tỉ số mật độ của trái đất và mặt trời từ các số liệu gần đúng sau:

θ = đường kính góc của mặt trời khi quan sát từ trái đất = $\frac{1}{2}^\circ$.

l = chiều dài của vĩ độ 1° trên bề mặt trái đất = 100 km.

t = một năm = 3×10^7 s.

$g = 10$ ms^{-2}.

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

Đặt r là khoảng cách giữa mặt trời và trái đất, M_e và M_s lần lượt là khối lượng và R_e và R_s là bán kính của trái đất và mặt trời, G là hằng số hấp dẫn. Khi đó ta có

$$\frac{GM_eM_s}{r^2} = M_e r\omega^2 ,$$

$$\frac{2R_s}{r} = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{360} \text{ rad} ,$$

có nghĩa là

$$r = \frac{720R_s}{\pi} .$$

Từ trên ta có

$$\frac{GM_s}{(720R_s/\pi)^3} = \omega^2 ,$$

hay

$$\frac{GM_s}{R_s^3} = \left(\frac{720}{\pi}\right)^3 \left(\frac{2\pi}{3\times 10^7}\right)^2 .$$

Với trọng vật m trên mặt đất

$$\frac{GmM_e}{R_e^2} = mg ,$$

cho ta

$$\frac{GM_e}{R_e^3} = \frac{g}{R_e} = \frac{g}{\left(\frac{360\times 100}{2\pi}\right)} = \frac{g\pi}{18\times 10^3} .$$

Vì thế

$$\frac{\rho_e}{\rho_s} = \frac{g\pi}{18\times 10^3}\left(\frac{720}{\pi}\right)^{-3}\left(\frac{2\pi}{3\times 10^7}\right)^{-2} = 3,31 .$$

1023

Một người nhảy dù từ độ cao 3000 m. Trước khi mở dù tốc độ đạt 30 m/s.

(a) Giả thiết lực cản của không khí tỉ lệ với tốc độ, hỏi bao lâu thì người đó đạt được tốc độ đó?

(b) Quãng đường trên không là bao nhiêu để đạt được tốc độ đó?
Sau khi mở dù, tốc độ của người đó giảm đến 3 m/s. Khi chạm đất người đó cong đầu gối để giảm sóc.

(c) Mất bao nhiêu thời gian để người đó có thể gập đầu gối lại nhằm làm giảm gia tốc xuống còn $10g$? Giả thiết rằng đầu gối người đó giống như một lò xo với lực kháng tỉ lệ với độ dịch chuyển.

(d) Giả thiết trở lực của không khí tỉ lệ với tốc độ có lý hay không? Chứng minh rằng điều đó có hay không trong trường hợp sử dụng các chứng cứ định tính?

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Chọn hướng nhảy xuống là hướng dương theo trục x. Tích phân phương trình vi phân của chuyển động

$$\frac{dv}{dt} = g - \alpha v ,$$

ở đây α là hằng số, ta nhận được

$$v = \frac{g}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) .$$

Lời giải này chỉ ra rằng v gần với giá trị cực đại của nó, số hạng g/α, khi $t \to \infty$.

(b) Tích phân biểu thức trên ta có

$$x = \frac{gt}{\alpha} + \frac{ge^{-\alpha t}}{\alpha^2} .$$

Như vậy $x \to \infty$ khi $t \to \infty$. Điều đó có nghĩa rằng khi người nhảy dù đạt đến tốc độ giới hạn thì người đó đã vượt qua một khoảng cách vô hạn.

(c) Khi tốc độ chỉ là 3 m/s, thì ta có thể bỏ qua trở lực của không khí sau khi người đó tiếp đất với tốc độ này. Biến đổi cơ năng cho ta biểu thức sau

$$\frac{k\xi^2}{2} = mg\xi + \frac{mv^2}{2} ,$$

ở đây ξ là khoảng cách của đầu gối gập xuống và v là tốc độ khi tiếp đất, xem đầu gối như một lò xo có hằng số k. Lấy gia tốc là $-10g$ như là cực đại cho phép, ta có

$$mg - k\xi = -10mg ,$$

nghĩa là

$$\xi = 11mg/k .$$

Phương trình năng lượng khi đó có thể viết

$$\xi = \frac{v^2}{9g} = \frac{3^2}{9 \times 9,8} = 0,102 \text{ m} .$$

(d) Ta thấy rằng nếu trở lực không khí tỉ lệ với vận tốc thì thời gian đạt đến giá trị vận tốc tới hạn là ∞ và khoảng cách dịch chuyển được cũng là ∞. Tuy nhiên, khoảng cách đã vượt qua thực tế không quá 3000 m và thời gian rơi là có hạn trước khi người nhảy dù đạt đến tốc độ 30 m/s. Vì thế, việc thừa nhận trở lực không khí tỉ lệ với vận tốc là không có lý.

1024

Một vệ tinh trên quỹ đạo tĩnh ở một điểm phía trên xích đạo phải truyền năng lượng về trạm mặt đất bằng chùm vi sóng kết hợp có bước sóng mét từ một cái gương 1 km.

(a) Quỹ đạo tĩnh như thế phải ở độ cao bao nhiêu?

(b) Thử đánh giá kích thước cần thiết của trạm tiếp nhận ở mặt đất?

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) Vận tốc góc ω của vệ tinh đồng bộ là bằng vận tốc góc tự quay của trái đất và cho bởi công thức

$$m(R+h)\omega^2 = \frac{GMm}{(R+h)^2} .$$

Từ đó độ cao của quỹ đạo tĩnh là

$$h = \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{3}} - R = 3,59 \times 10^4 \text{ km} ,$$

trong đó $G = 6,67 \times 10^{-11}$ $\text{Nm}^2\text{kg}^{-2}$, $M = 5,98 \times 10^{24}$ kg , $R = 6,37 \times 10^4$ km .

(b) Vì có hiện tượng nhiễu xạ nên kích thước tuyến tính của trạm tiếp nhận là khoảng

$$\frac{\lambda h}{D} = 1 \times \left(\frac{3,59 \times 10^4}{1}\right) = 3,59 \times 10^4 \text{ m} .$$

1025

Một mặt phẳng nghiêng khối lượng M nằm trên mặt sàn nhám có hệ số ma sát tĩnh μ. Một vật khối lượng m_1 được treo bởi một sợi dây vắt qua một ròng rọc nhẵn ở đầu phía trên mặt phẳng nghiêng và nối với vật khối lượng m_2 trên mặt phẳng nghiêng, nó có thể trượt không ma sát trên mặt phẳng nghiêng. Mặt phẳng nghiêng tạo với mặt nằm ngang một góc θ.

(a) Tìm gia tốc của m_1, m_2 và lực căng dây khi μ rất lớn.

(b) Tìm hệ số ma sát nhỏ nhất để mặt phẳng nghiêng còn đứng yên.

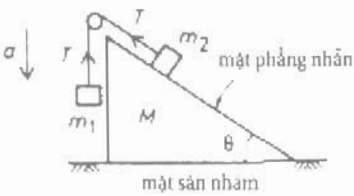
(*Columbia*)

Lời giải:

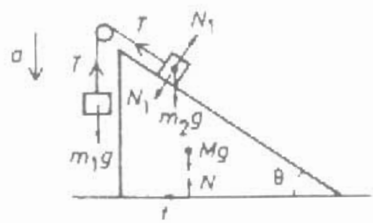
(a) Khi μ đủ lớn mặt phẳng nghiêng còn đứng yên. Phương trình chuyển động của m_1 và m_2 là (xem hình 1.12)

$$m_1 g - T = m_1 a ,$$

$$T - m_2 g \sin\theta = m_2 a .$$



Hình 1.12



Hình 1.13

Ta có

$$a = \frac{(m_1 - m_2 \sin\theta)g}{m_1 + m_2} ,$$

$$T = \frac{m_1 m_2 (1 + \sin\theta) g}{m_1 + m_2} .$$

(b) Mặt phẳng nghiêng chịu lực thẳng đứng và nằm ngang (xem hình 1.13) với

$$f = T\cos\theta - N_1 \sin\theta ,$$

$$N = N_1 \cos\theta + Mg + T(1 + \sin\theta) ,$$

$$N_1 = m_2 g \cos\theta .$$

Để mặt phẳng nghiêng đứng yên, ta phải có

$$f \leq \mu N .$$

Hệ số ma sát nhỏ nhất để mặt phẳng nghiêng còn đứng yên là

$$\mu_{\min} = \frac{f}{N}$$

$$= \frac{m_2 \cos\theta (m_1 - m_2 \sin\theta)}{M(m_1 + m_2) + m_1 m_2 (1 + \sin\theta)^2 + (m_1 + m_2) m_2 \cos^2\theta} .$$

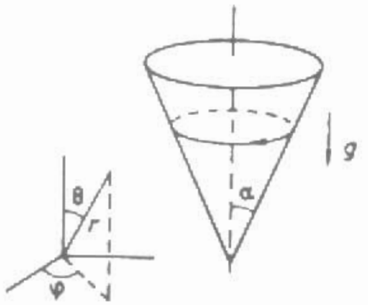
1026

Một hạt khối lượng m được chuyển động trên bề mặt bên trong không ma sát của một cái nón có bán góc α, như hình 1.14.

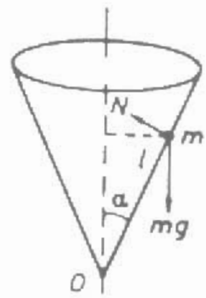
(a) Hãy tìm những ràng buộc trên các điều kiện ban đầu sao cho hạt chuyển động vòng tròn xung quanh trục thẳng đứng.

(b) Hãy xác định quỹ đạo nào là bền vững?

(Princeton)



Hình 1.14



Hình 1.15

Lời giải:

(a) Trong toạ độ cầu (r, θ, φ), phương trình chuyển động của hạt là

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) = F_r , \tag{1}$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta) = F_\theta ,$$

$$m(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta) = F_\varphi .$$

Khi hạt bắt buộc phải chuyển động trên mặt trong của nón,

$$\theta = \text{ constant } = \alpha .$$

Khi $\dot{\theta} = 0$, $F_r = -mg\cos\alpha$, và phương trình (1) trở thành

$$m(\ddot{l} - l\dot{\varphi}^2 \sin^2\alpha) = -mg\cos\alpha , \tag{2}$$

ở đây l là khoảng cách từ chóp nón O (xem hình 1.15). Để chuyển động tròn xung quanh trục thẳng đứng $\dot{l} = \ddot{l} = 0$. Với $l = l_0$, phương trình (2) trở thành

$$l_0\dot{\varphi}^2 \sin^2\alpha = g\cos\alpha . \tag{3}$$

Vế phải của phương trình (3) là hằng số do đó $\dot{\varphi} =$ constant $= \dot{\varphi}_0$. Hạt có vận tốc v_0 tiếp tuyến với quỹ đạo được cho bởi $v_0 = l_0\dot{\varphi}_0 \sin\alpha$. Phương trình (3) khi đó là

$$v_0^2 = gl_0 \cos\alpha \ ,$$

đó là điều kiện ban đầu v_0 và l_0 cần phải thoả mãn.

(b) Giả thiết có nhiễu loạn nhỏ tác dụng lên hạt, chẳng hạn l_0 trở thành $l_0 + \Delta l$, $\dot{\varphi}_0$ trở thành $\dot{\varphi}_0 + \Delta\dot{\varphi}$. Phương trình (2) bây giờ là

$$\frac{d^2(l_0 + \Delta l)}{dt^2} - (l_0 + \Delta l)(\dot{\varphi}_0 + \Delta\dot{\varphi})^2 \sin^2\alpha = -g\cos\alpha \ ,$$

hay

$$\Delta\ddot{l} - 2l_0\dot{\varphi}_0\Delta\dot{\varphi}\sin^2\alpha - \Delta l\dot{\varphi}_0^2\sin^2\alpha - l_0\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha = -g\cos\alpha \ ,$$

ở đây $\Delta\ddot{l}$ là viết tắt đối với $d^2(\Delta l)/dt^2$, bỏ qua số hạng bậc cao hơn bậc một của đại lượng Δl và $\Delta\dot{\varphi}$. Khi vế phải của biểu thức này bỏ qua khi tính phương trình (3) ta có

$$\Delta\ddot{l} - 2l_0\dot{\varphi}_0\Delta\dot{\varphi}\sin^2\alpha - \Delta l\dot{\varphi}_0^2\sin^2\alpha = 0 \ . \qquad (4)$$

Không có lực tiếp tuyến với quỹ đạo tác dụng lên hạt, do đó không có momen xoắn theo trục thẳng đứng và xung lượng góc của hạt xung quanh trục là hằng số

$$mlv\sin\alpha = ml^2\dot{\varphi}\sin^2\alpha = \text{constant} = k.$$

hay

$$l^2\dot{\varphi} = \frac{k}{m\sin^2\alpha} \ . \qquad (5)$$

Khi thay $l = l_0 + \Delta l$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 + \Delta\dot{\varphi}$ vào phương trình (5) và bỏ qua số hạng bậc hai hay cao hơn, ta có

$$l_0\Delta\dot{\varphi} + 2\Delta l\dot{\varphi}_0 = 0 \ . \qquad (6)$$

Khử $\Delta\dot{\varphi}$ khỏi các phương trình (4) và (6), ta nhận được

$$\Delta\ddot{l} + (3\dot{\varphi}_0^2\sin^2\alpha)\Delta l = 0 \ .$$

Khi thừa số trong ngoặc là thực và dương thì đó là phương trình của "dao động tử điều hòa đơn giản" và vì vậy quỹ đạo là bền.

1027

Ba chất điểm có khối lượng m_1, m_2 và m_3 tương tác với nhau thông qua trọng lực.

(a) Hãy viết phương trình chuyển động.

(b) Hệ có thể quay trong mặt phẳng của nó với các khoảng cách bằng nhau và không đổi của các cặp khối lượng. Hãy xác định tần số góc của chuyển động quay khi các chất điểm cách xa nhau một khoảng cách là d.

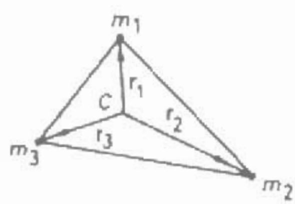
(c) Với $m_1 \gg m_3$ và $m_2 \gg m_3$, hãy xác định điều kiện bền của chuyển động của m_3 xung quanh vị trí dừng. Chỉ xét chuyển động trong mặt phẳng quỹ đạo.

(*MIT*)

Lời giải:

Lấy tâm khối của hệ là C làm gốc toạ độ và đặt các vectơ vị trí của m_1, m_2, m_3 tương ứng là $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ như chỉ ra ở hình 1.16. Ghi nhận:

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \qquad (i, j = 1, 2, 3) \ .$$



Hình 1.16

(a) Chuyển động của hạt thứ i được cho bởi

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = -\sum_{j \neq i}^{3} \frac{G m_i m_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij} \ ,$$

hay

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -\sum_{j \neq i}^{3} \frac{G m_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij} \qquad (i = 1, 2, 3) \ . \tag{1}$$

Chú ý rằng dấu âm chỉ ra lực là lực hút.

(b) Với điều kiện đã cho $r_{ij} = d$, biểu thức (1) được viết lại như sau

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{r}}_i &= \frac{G}{d^3}\sum_{j\neq i}^{3} m_j(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \\
&= \frac{G}{d^3}\left[-\sum_{j\neq i}^{3} m_j\mathbf{r}_i + \sum_{j\neq i}^{3} m_j\mathbf{r}_j\right] \\
&= \frac{G}{d^3}\left[-\sum_{j\neq i}^{3} m_j\mathbf{r}_i - m_i\mathbf{r}_i + \sum_{j=1}^{3} m_j\mathbf{r}_j\right] \\
&= \frac{G}{d^3}\left[-\mathbf{r}_i\sum_{j=1}^{3} m_j + \sum_{j=1}^{3} m_j\mathbf{r}_j\right] \\
&= -\frac{GM}{d^3}\mathbf{r}_i\ ,
\end{aligned}$$

ở đây $M = m_1 + m_2 + m_3$. Chú ý rằng việc chọn khối tâm như là gốc tọa độ làm cho $\sum m_j\mathbf{r}_j$ bị khử bỏ. Như vậy lực tác dụng lên các chất điểm hướng về tâm khối của hệ và là lực điều hòa. Với d là hằng số, hệ quay quanh C với tần số góc

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{d^3}}\ .$$

(c) Với $m_3 \ll m_1$ và $m_3 \ll m_2$, phương trình chuyển động của m_1 và m_2 có thể được viết như sau

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{r}}_i &= -\frac{G(m_1 + m_2)}{d^3}\mathbf{r}_i \\
&= -\frac{G(m_1 + m_2)}{r_{12}^3}\mathbf{r}_i, \qquad i = 1, 2\ .
\end{aligned}$$

Với khoảng cách giữa m_1 và m_2 không đổi, hệ quay quanh khối tâm với tần số góc không đổi

$$w = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{r_{12}^3}}\ .$$

Sử dụng hệ toạ độ quay với gốc là khối tâm của hệ và tần số góc là ω và đặt các đại lượng $\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}$ quy chiếu về hệ tọa độ quay đó. Xét chuyển động của hạt m_3 trong hệ phòng thí nghiệm, ta có

$$m_3(\ddot{\mathbf{r}}_3 - \omega^2\mathbf{r}_3) = -\frac{Gm_3m_1}{r_{31}^3}\mathbf{r}_{31} - \frac{Gm_3m_2}{r_{32}^3}\mathbf{r}_{32} - 2m_3\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_3\ ,$$

hay

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = -\frac{Gm_1}{r_{31}^3}\mathbf{r}_{31} - \frac{Gm_2}{r_{32}^3}\mathbf{r}_{32} + \omega^2\mathbf{r}_3 - 2\omega \times \dot{\mathbf{r}}_3 \,.$$

Nếu m_3 tĩnh thì, $\ddot{\mathbf{r}}_3 = \dot{\mathbf{r}}_3 = 0$ và biểu thức trên thành

$$\frac{Gm_1}{r_{31}^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) + \frac{Gm_2}{r_{32}^2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) + \omega^2\mathbf{r}_3 = 0 \,.$$

Với $m_1, m_2 \gg m_3$, $\sum m_j\mathbf{r}_j = 0$ cho ta $m_1\mathbf{r}_1 \approx -m_2\mathbf{r}_2$ và biểu thức trên thành

$$-G\left(\frac{m_1}{r_{31}^3} + \frac{m_2}{r_{32}^3}\right)\mathbf{r}_3 + G\left(\frac{m_1}{r_{31}^3} - \frac{m_1}{r_{32}^3}\right)\mathbf{r}_1 + \omega^2\mathbf{r}_3 = 0 \,.$$

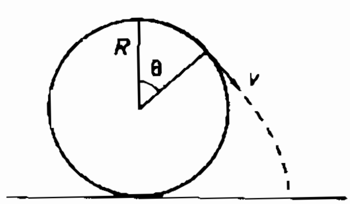
Quan hệ này chỉ ra rằng $\mathbf{r}_3$ song song với $\mathbf{r}_1$ và như vậy vị trí tĩnh của m_3 nằm trên đường nối m_1 và m_2. Tại vị trí này, lực hút của m_1 và m_2 cân bằng.

Bây giờ ta xét sự dịch chuyển nhỏ đặt vào m_3 tại vị trí tĩnh này. Nếu sự dịch chuyển dọc theo đường nối m_1 và m_2, ta nói nó hướng về m_1, thì sự hút bởi m_1 được tăng cường và sự hút bởi m_2 bị giảm đi. Khi đó m_3 sẽ liên tục chuyển tới m_1 và sự cân bằng bị phá vỡ. Mặt khác, nếu sự dịch chuyển vuông góc với đường nối m_1 và m_2, cả hai lực hút bởi m_1 và m_2 sẽ có thành phần hướng tới vị trí tĩnh và sẽ giữ cho m_3 trở về vị trí này. Như vậy hệ cân bằng. Vì vậy sự cân bằng là bền vững trước nhiễu loạn ngang nhưng không bền trước nhiễu loạn dọc.

1028

Một quả cầu nhẵn nằm trên mặt phẳng ngang. Một chất điểm trượt không ma sát từ trên quả cầu xuống bắt đầu từ đỉnh. Đặt R là bán kính cầu. Hãy mô tả quãng đường nó trượt tới mặt phẳng ngang (hình 1.17).

(*Chicago*)



Hình 1.17

Lời giải:

Như chỉ ra trên hình 1.17 định luật bảo toàn năng lượng cho

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR(1 - \cos\theta) .$$

Lực xuyên tâm tác dụng lên hạt khi trượt trên quả cầu là

$$F = mg\cos\theta - \frac{mv^2}{R} .$$

Khi $F = 0$, hạt không còn tiếp xúc với quả cầu nữa và hạt rời khỏi quả cầu. Tại thời điểm đó ta có

$$\frac{v^2}{R} = g\cos\theta ,$$

$$v^2 = 2gR(1 - \cos\theta) ,$$

và cho ta

$$\cos\theta = \frac{2}{3}, \qquad \text{hay } \theta = 48,2^\circ ,$$

$$v = \sqrt{\frac{2gR}{3}} .$$

Hạt rời khỏi quả cầu với vận tốc $v = \sqrt{2gR/3}$ tại góc $\theta = 48,2^\circ$. Sau khi rời quả cầu, hạt rơi xuống theo quỹ đạo parabon cho tới khi chạm mặt phẳng nằm ngang.

1029

Điện tích điểm trong trường đơn cực từ.

Phương trình chuyển động của điện tích điểm e, khối lượng m, trong trường đơn cực cường độ g tại gốc là

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -ge\frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r}}{r^3} .$$

Đơn cực có thể xem như nặng vô cùng.

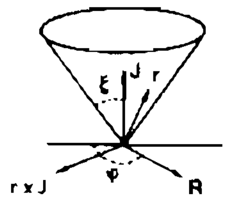
(a) Chứng minh rằng động năng $T = m\dot{\mathbf{r}}^2/2$ là hằng số của chuyển động.

(b) Chứng minh rằng $\mathbf{J} = \mathbf{L} + eg\mathbf{r}/r$ cũng là hằng số của chuyển động, ở đây $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$.

(c) Sử dụng phần (b) để chứng minh rằng điện tích điểm chuyển động trên bề mặt hình nón tròn thẳng góc mở ξ cho bởi

$$\cos\xi = \frac{eg}{|\mathbf{J}|} ,$$

với J như là trục đối xứng (xem hình 1.18) [Gợi ý: Xét $\mathbf{r}\cdot\mathbf{J}$.]



Hình 1.18

Định nghĩa biến số mới R bởi

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\sin\xi}\hat{\mathbf{J}} \times (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{J}}) = \frac{1}{\sin\xi}[\mathbf{r} - \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{J}})] ,$$

ở đây $\hat{\mathbf{J}} = \mathbf{J}/|\mathbf{J}|$. R nằm trong mặt vuông góc với J, nhưng với $|\mathbf{R}| \equiv R = |\mathbf{r}|$ để R có thể nhận được bằng cách quay r như chỉ ra trên hình vẽ. Ta có thể sử dụng biểu thức $m\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{J}$.

(d) Tìm phương trình chuyển động của R.

(e) Giải phương trình chuyển động phần (d) bằng cách tìm thế hiệu dụng $V_{\text{eff}}(R)$, và mô tả tất cả khả năng chuyển động có thể của R.

(MIT)

Lời giải:

(a) $$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2\right) = m\dot{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}\cdot\left(-ge\frac{\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{r}}{r^3}\right) = 0 .$$

Vì thế T là hằng số của chuyển động

(b) $$\begin{aligned}\dot{\mathbf{J}} &= \frac{d}{dt}\left(m\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} + \frac{eg\mathbf{r}}{r}\right) \\ &= m\mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{r}} + m\dot{\mathbf{r}}\times\dot{\mathbf{r}} + \frac{eg\dot{\mathbf{r}}}{r} + \left(-\frac{eg\mathbf{r}}{r^2}\right)\frac{\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}}{r} \\ &= m\mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{r}} + \left[\frac{eg\dot{\mathbf{r}}}{r} - \frac{eg\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}})}{r^3}\right] \\ &= -ge\frac{\mathbf{r}\times(\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{r})}{r^3} + ge\frac{\mathbf{r}\times(\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{r})}{r^3} = 0 .\end{aligned}$$

Vì thế $\mathbf{J}$ là hằng số của chuyển động. Lưu ý rằng ở trên ta đã sử dụng

$$\begin{aligned}\dot{r} &\equiv \frac{d}{dt}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})^{\frac{1}{2}}\\ &= \dot{\mathbf{r}}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}\,,\\ \mathbf{r}\times(\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{r}) &= \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}})\,.\end{aligned}$$

(c) Đặt ξ là góc giữa $\mathbf{r}$ và $\mathbf{J}$ và xét

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{J} = r|\mathbf{J}|\cos\xi = \mathbf{r}\cdot\left(m\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} + \frac{eg\mathbf{r}}{r}\right) = egr\,.$$

Khi

$$\cos\xi = \frac{eg}{|\mathbf{J}|} = \text{constant}\,,$$

điện tích điểm chuyển động trên mặt phẳng hình nón tròn thẳng góc mở ξ.

(d) Khi $\mathbf{J}$ và ξ là hằng số của chuyển động, ta có, khi sử dụng

$$\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{L}}{m},\qquad \mathbf{L} = \mathbf{J} - eg\frac{\mathbf{r}}{r},\qquad m\ddot{\mathbf{r}} = -ge\frac{\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{r}}{r^3}\,,$$

$$\begin{aligned}m\ddot{\mathbf{R}} &= \frac{m}{\sin\xi}\hat{\mathbf{J}}\times(\ddot{\mathbf{r}}\times\hat{\mathbf{J}})\\ &= \frac{1}{\sin\xi}\hat{\mathbf{J}}\times\left[\frac{ge}{mr^3}\left(\mathbf{J} - eg\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\times\hat{\mathbf{J}}\right]\\ &= \frac{1}{\sin\xi}\hat{\mathbf{J}}\times\left[-\frac{g^2e^2}{mr^4}\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{J}}\right]\\ &= -\frac{e^2g^2}{mr^4}\mathbf{R}\,.\end{aligned}$$

Đó là phương trình chuyển động của $\mathbf{R}$.

(e) Đặt φ là góc giữa $\mathbf{R}$ và trục cố định trong mặt phẳng của $\mathbf{R}$ và $\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{J}}$. Phương trình trên có thể được viết như sau

$$m(\ddot{R} - R\dot{\varphi}^2) = -\frac{e^2g^2}{mR^3}\,, \tag{1}$$

$$m(R\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\dot{R}) = 0\,. \tag{2}$$

Phương trình (2) có thể viết như sau

$$m(R^2\ddot{\varphi} + 2R\dot{R}\dot{\varphi}) = \frac{d}{dt}(mR^2\dot{\varphi}) = 0\,.$$

Vì thế

$$mR^2\dot{\varphi} = \text{ constant } .$$

Khi

$$\begin{aligned}\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} &= R\mathbf{i}_R \times (\dot{R}\mathbf{i}_R + R\dot{\varphi}\mathbf{i}_\varphi)\\ &= R^2\dot{\varphi}\mathbf{i}_R \times \mathbf{i}_\varphi .\\ mR^2\dot{\varphi} &= |m\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}| = J .\end{aligned}$$

Phương trình (1) khi đó có thể được viết như sau

$$m\ddot{R} = -\frac{e^2g^2}{mR^3} + \frac{J^2}{mR^3} = -\frac{d}{dR}V_{\text{eff}}(R) , \tag{3}$$

với

$$\begin{aligned}V_{\text{eff}}(R) &= \frac{1}{2mR^2}(J^2 - e^2g^2)\\ &= \frac{e^2g^2}{2mR^2}\left(\frac{1}{\cos^2\xi} - 1\right)\\ &= \frac{e^2g^2}{2mR^2}\text{tg}^2\xi = \frac{K}{R^2} ,\end{aligned}$$

khi đó $K = e^2g^2\text{tg}^2\xi/2m$. Sử dụng $\ddot{R} = \dot{R}d\dot{R}/dR = d\dot{R}^2/2dR$, phương trình (3) có thể được tích phân để có

$$\frac{1}{2}m\dot{R}^2 + \frac{K}{R^2} = E ,$$

ở đây E là hằng số. Khi đó ta có

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{\dot{R}}{\dot{\varphi}} = \pm\frac{mR^2}{J}\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{K}{R^2}\right)} .$$

Khi tích phân ta nhận được

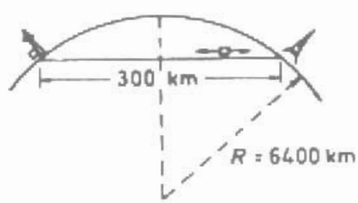
$$\begin{aligned}\pm\left(\text{tg}^{-1}\sqrt{\frac{E}{K}R^2 - 1} - \text{tg}^{-1}\sqrt{\frac{E}{K}R_0^2 - 1}\right) &= \frac{\sqrt{2mK}}{J}(\varphi - \varphi_0)\\ &= (\varphi - \varphi_0)\sin\xi ,\end{aligned}$$

nó cho quỹ đạo của đỉnh của $\mathbf{R}$. Lưu ý rằng nếu $J \gg eg$ thì chuyển động là không bị hạn chế với bất kì trạng thái ban đầu nào, và nếu $J < eg$ chuyển động bị hạn chế khi $E < 0$ và không bị hạn chế khi $E \geq 0$.

1030

Pari và Luân Đôn được nối với nhau bằng đường hầm thẳng (xem hình 1.19). Một con tầu chạy giữa hai thành phố chỉ bằng trọng lực của trái đất. Hãy tính tốc độ cực đại của tầu và thời gian cần thiết cho hành trình Luân Đôn - Pari. Khoảng cách giữa hai thành phố là 300 km và bán kính trái đất là 6400 km. Bỏ qua ma sát.

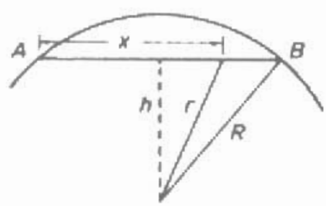
(*MIT*)



Hình 1.19

Lời giải:

Các đại lượng x, h, r như ở hình 1.20 và giả thiết trái đất là quả cầu tĩnh đồng nhất bán kính R. Nếu lấy bề mặt trái đất như mức để so sánh thì thế năng hấp dẫn của tầu tại x là



Hình 1.20

$$V = \int_R^r \frac{GmM}{R^3} r dr = \frac{GmM}{2R^3}(r^2 - R^2),$$

ở đây m, M tương ứng là khối lượng của tầu và trái đất. Khi tầu khởi hành từ trạng thái nghỉ trên bề mặt trái đất, định luật bảo toàn cơ năng cho

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{GmM(r^2 - R^2)}{2R^3} = 0\,.$$

hay

$$v^2 = \frac{g(R^2 - r^2)}{R} ,$$

ở đây $g = GM/R^2$ là gia tốc trọng trường trên bề mặt trái đất. Khi đó

$$r^2 = h^2 + (150 - x)^2 = (R^2 - 150^2) + (150 - x)^2 = R^2 - 300x + x^2 ,$$

$$v^2 = \frac{gx(300 - x)}{R} .$$

v cực đại khi $x = 150$ km

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{9.8 \times 150 \times 150 \times 1000}{6400}} = 185,6 \text{ m/s} .$$

Thời gian từ Luân Đôn tới Pari là

$$T = \int_0^{300} \frac{dx}{v} = \int_0^{300} \sqrt{\frac{R}{g}} \frac{dx}{\sqrt{x(300 - x)}}$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{R}{g}} \frac{dt}{\sqrt{t(1 - t)}} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 42,3 \text{ phút} .$$

1031

Ba nguồn điểm cố định được sắp xếp cách đều quanh chu vi đường tròn bán kính a, tâm ở gốc tọa độ (hình 1.21). Lực mỗi nguồn tác dụng lên một chất điểm khối lượng m là lực hút $\mathbf{F} = -k\mathbf{R}$, ở đây $\mathbf{R}$ là vectơ vẽ từ nguồn tới chất điểm. Chất điểm được đặt trong trường lực ở thời điểm $t = 0$ với điều kiện ban đầu $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_0$.

(a) Xác định tọa độ thích hợp và viết biểu thức lực tác dụng lên chất điểm ở mỗi thời điểm.

(b) Sử dụng định luật Newton II và giải phương trình chuyển động với điều kiện ban đầu đã cho, cụ thể tìm $\mathbf{r}(t)$ theo $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}_0$ và các thông số của hệ.

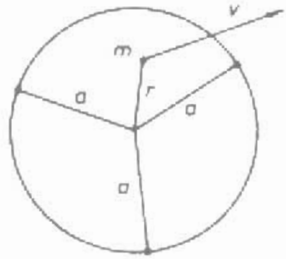
(c) Dưới điều kiện nào thì quỹ đạo là tròn?

(MIT)

Lời giải:

(a) Đặt $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ là các vectơ vị trí của ba nguồn chất điểm cố định. Khi chúng nằm cách đều nhau trên đường tròn ta có

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = 0 .$$



Hình 1.21

Lực tác dụng lên chất điểm m là

$$\mathbf{F} = -k(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) - k(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) - k(\mathbf{r} - \mathbf{r}_3) = -3k\mathbf{r} .$$

(b) Phương trình chuyển động của chất điểm là

$$m\ddot{\mathbf{r}} + 3k\mathbf{r} = 0 ,$$

với nghiệm tổng quát là

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) + \mathbf{b}\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) ,$$

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ là vectơ hằng số.
Sử dụng điều kiện ban đầu $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$, $\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_0$, ta tìm được

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}_0, \qquad \mathbf{b} = \sqrt{\frac{m}{3k}}\mathbf{v}_0 ,$$

và vì vậy

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) + \sqrt{\frac{m}{3k}}\mathbf{v}_0\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) .$$

(c) Dễ thấy nếu $\mathbf{r}_0 \perp \mathbf{v}_0$ và $\sqrt{m/3k}v_0 = r_0$, thì quỹ đạo chuyển động là một đường tròn.

1032

Mâm xoay máy hát quay trong mặt xy với vận tốc góc không đổi ω xung quanh gốc. Một vật nhỏ trượt trên mâm đĩa hát có vị trí $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), 0)$.

Ở đây x và y được đo trong một hệ quán tính, hệ phòng thí nghiệm. Có hai lực trong hệ phòng thí nghiệm: lực đàn hồi độ lớn $k|\mathbf{x}|$ hướng về gốc, và lực ma sát $-c(\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{v})$, ở đây c là hằng số và $\mathbf{v}$ là vận tốc của mâm đĩa xoay tại vị trí của vật thể.

(a) Nếu vật được quan sát tại một điểm ngoài tâm mâm xoay (có nghĩa là đứng yên so với mâm xoay), k bằng bao nhiêu?

(b) Lấy k là giá trị tìm được ở phần (a). Giải để tìm $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$ với điều kiện ban đầu chung.

(c) Trong (b), tìm $\mathbf{x}(t)$. Mô tả $\mathbf{x}(t)$ bằng lời và/hoặc bằng vẽ phác.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Vật thể có vận tốc góc ω quay quanh gốc để $m\omega^2|\mathbf{x}| = k|\mathbf{x}|$, cho ta $k = m\omega^2$.

(b) Trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm phương trình chuyển động của vật nhỏ là

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{x}} &= -k\mathbf{x} - c(\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{v}) \\ &= -m\omega^2\mathbf{x} - c(\dot{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \, . \end{aligned}$$

Đặt $x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}$ là các tọa độ, các thành phần vận tốc và gia tốc trong hệ quy chiếu quay gắn với mâm xoay. Trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm ta có

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= (\dot{x} - y\omega)\mathbf{i} + (\dot{y} + x\omega)\mathbf{j} \, , \\ \ddot{\mathbf{x}} &= (\ddot{x} - 2\dot{y}\omega - x\omega^2)\mathbf{i} + (\ddot{y} + 2\dot{x}\omega - y\omega^2)\mathbf{j} \, , \\ -k\mathbf{x} &= -kx\mathbf{i} - ky\mathbf{j} \, , \\ -c(\dot{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) &= -c\dot{x}\mathbf{i} - x\dot{y}\mathbf{j} \, . \end{aligned}$$

Lưu ý rằng trong các biểu thức trên ta đã sử dụng $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} = \omega\mathbf{j}$, $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j} = -\omega\mathbf{i}$. Phương trình chuyển động trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm khi đó được viết như sau

$$m(\ddot{x} - 2\dot{y}\omega - x\omega^2) = -kx - c\dot{x} \, , \tag{1}$$

$$m(\ddot{y} + 2\dot{x}\omega - y\omega^2) = -ky - c\dot{y} \, . \tag{2}$$

Nhân phương trình (2) với $i \equiv \sqrt{-1}$, thêm nó vào phương trình (1) và đặt $z = x + iy$, ta nhận được

$$m\ddot{z} + (2m\omega i + c)\dot{z} = 0 \, .$$

Tích phân một lần ta tìm được

$$\dot{z} = \dot{z}_0 e^{-ct/m} e^{-i2\omega t}, \tag{3}$$

cụ thể ta có

$$\dot{x} = [\dot{x}_0 \cos(2\omega t) + \dot{y}_0 \sin(2\omega t)] e^{-ct/m}, \tag{4}$$

$$\dot{y} = [-\dot{x}_0 \sin(2\omega t) + \dot{y}_0 \cos(2\omega t)] e^{-ct/m}. \tag{5}$$

Bằng cách tích phân trực tiếp phương trình (4) và (5) hay bằng việc tích phân (3) và sau đó sử dụng $z = x + iy$, ta nhận được

$$\begin{aligned} x = x_0 &+ \frac{m(c\dot{x}_0 + 2m\omega\dot{y}_0)}{c^2 + 4m^2\omega^2} \\ &- \left[\frac{m(c\dot{x}_0 + 2m\omega\dot{y}_0)}{c^2 + 4m^2\omega^2}\cos(2\omega t) - \frac{m(2m\omega\dot{x}_0 - c\dot{y}_0)}{c^2 + 4m^2\omega^2}\sin(2\omega t)\right] e^{-ct/m}, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} y = y_0 &- \frac{m(2m\omega\dot{x}_0 - c\dot{y}_0)}{c^2 + 4m^2\omega^2} \\ &+ \left[\frac{m(2m\omega\dot{x}_0 - c\dot{y}_0)}{c^2 + 4m^2\omega^2}\cos(2\omega t) + \frac{m(c\dot{x}_0 + 2m\omega\dot{y}_0)}{c^2 + 4m^2\omega^2}\sin(2\omega t)\right] e^{-ct/m}. \end{aligned} \tag{7}$$

Trong phần trên, $\dot{x}_0, \dot{y}_0$ là các thành phần vận tốc của vật thể nhỏ tại $t = 0$ trong hệ quay.

(c) Phương trình (6) và (7) đơn giản là với vật thể trên mâm xoay, ngay cả khi x, y có thể đôi khi đầu tiên tăng do các điều kiện ban đầu xác định, thời gian trôi đi vận tốc của nó trong hệ quy chiếu gắn với mâm xoay sẽ giảm và vật thể dừng lại tại điểm cố định trên mâm xoay, với tọa độ
$((x_0 + m(c\dot{x}_0 + 2m\omega\dot{y}_0))/(c^2 + 4m^2\omega^2), (y_0 - m(2m\omega\dot{x}_0 - c\dot{y}_0))/(c^2 + 4m^2\omega^2))$.

1033

Một dao động tử phi tuyến có thế cho bởi

$$U(x) = \frac{kx^2}{2} - \frac{m\lambda x^3}{3}, \qquad \text{với } \lambda \text{ nhỏ.}$$

Tìm phương trình chuyển động bậc một theo λ, giả thiết $x = 0$ tại $t = 0$.

(Princeton)

Lời giải:

Phương trình chuyển động của dao động tử phi tuyến

$$\frac{md^2x}{dt^2} = \frac{-dU(x)}{dx} = -kx + m\lambda x^2.$$

Bỏ qua số hạng $m\lambda x^2$, ta nhận được nghiệm bậc không của phương trình

$$x_{(0)} = A\sin(\omega t + \varphi) ,$$

ở đây $\omega = \sqrt{k/m}$ và A là hằng số tùy ý. Vì $x = 0$ ở $t = 0$, $\varphi = 0$ và ta có

$$x_{(0)} = A\sin(\omega t) .$$

Giả sử nghiệm bậc một có dạng $x_{(1)} = x_{(0)} + \lambda x_1$. Khi thay nó vào phương trình chuyển động và bỏ qua các số hạng bậc cao hơn λ, ta có

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= x_{(0)}^2 \\ &= \frac{A^2}{2}[1 - \cos(2\omega t)] .\end{aligned}$$

Để giải phương trình này, lấy tích phân riêng phần

$$x_1 = B + C\cos(2\omega t) .$$

Thay vào ta có

$$-3\omega^2 C\cos(2\omega t) + \omega^2 B = \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2}\cos(2\omega t) .$$

So sánh các hệ số cho

$$B = \frac{A^2}{2\omega^2}, \qquad C = \frac{A^2}{6\omega^2} .$$

Phương trình đồng nhất

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = 0$$

có nghiệm

$$x_1 = D_1\sin(\omega t) + D_2\cos(\omega t) .$$

Vậy ta có nghiệm đầy đủ

$$x_{(1)} = (A + \lambda D_1)\sin(\omega t) + \lambda\left[\frac{A^2}{2\omega^2} + D_2\cos(\omega t) + \frac{A^2}{6\omega^2}\cos(2\omega t)\right] .$$

Điều kiện ban đầu $x = 0$ tại $t = 0$ cho ta

$$D = -\frac{2A^2}{3\omega^2}$$

và

$$x_{(1)} = A' \sin(\omega t) + \frac{\lambda A^2}{\omega^2}\left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\cos(\omega t) + \frac{1}{6}\cos(2\omega t)\right] ,$$

ở đây A' là hằng số tuỳ ý. Để xác định A' và A, ta phải biết thêm thông tin, thí dụ biên độ và vận tốc tại $t = 0$.

1034

Một vệ tinh khối lượng 950 kg được tàu vũ trụ dắt đưa vào không gian. Hai phi thuyền được nối với nhau bằng một sợi dây đều dài 50m khối lượng dài là 1 kg/m. Tàu không gian tăng tốc trong một đoạn đường thẳng với gia tốc 5 m/s ^{2}.

(a) Lực con tàu tác dụng vào dây?

(b) Tính sức căng của dây?

(c) Do mệt phi hành đoàn ngủ thiếp đi, một mạch điều khiển bị chập mạch làm cho con tàu thay đổi gia tốc thành độ giảm tốc còn1 m/s^2. Mô tả chi tiết hậu quả của rủi ro này.

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

(a)

$$\begin{aligned} F &= (m_{\text{dây}} + m_{\text{vệ tinh}}) \cdot a \\ &= (950 + 50) \times 5 = 5 \times 10^3 \text{ N}. \end{aligned}$$

(b) Chọn điểm ở đó dây gắn với vệ tinh như gốc tọa độ và trục x dọc theo dây tới con tàu sức căng dọc theo dây khi đó là

$$\begin{aligned} F(x) &= (m_{\text{vệ tinh}} + m_{\text{dây}}(x)) \cdot a \\ &= [950 + 1 \times (50 - x)] \times 5 \\ &= 5 \times 10^3 - 5x \text{ N}. \end{aligned}$$

(c) Sau rủi ro, con tàu chuyển động với vận tốc ban đầu v_0 và độ giảm tốc 1 m/s^2, trong khi vệ tinh chuyển động với tốc độ đều v_0. Sau rủi ro hai tàu sẽ va vào nhau tại thời điểm t cho bởi

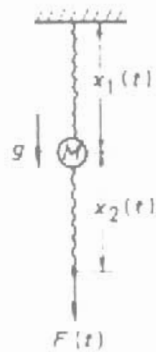
$$v_0 t = 50 + v_0 t - \frac{a}{2} t^2 ,$$

hay

$$t = \sqrt{\frac{100}{1}} = 10 \text{ s} .$$

1035

Một quả bóng khối lượng M được treo trên trần bằng một lò xo không trọng lượng với hằng số đàn hồi k và chiều dài nghỉ bằng 0. Lò xo sẽ bị đứt nếu nó bị kéo đến chiều dài tới hạn l_c ($l_c > Mg/k$). Một lò xo như thế treo ở dưới quả bóng (hình 1.22). Nếu người ta từ từ kéo ở đầu dưới ở lò xo dưới, lò xo trên sẽ đứt. Nếu người ta kéo lò xo dưới quá nhanh, lò xo dưới sẽ đứt. Vấn đề của bài toán này là xác định lực $F(t)$ đặt vào đầu lò xo dưới, sẽ làm cho hai lò xo đứt đồng thời.



Hình 1.22

(a) Tìm biểu thức tích phân liên quan của chiều dài $x_1(t)$ của lò xo trên với lực đặt vào $F(t)$.

(b) Sử dụng bất kì kĩ thuật nào, hãy tìm $x_1(t)$ và $x_2(t)$ với $t > 0$ khi $F(t)$ có dạng riêng sau

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \alpha t, & t > 0 \end{cases},$$

ở đây α là hằng số.

(c) Sử dụng một sơ đồ tỉ mỉ trong các nghiệm của bạn để chứng minh rằng nếu α là quá nhỏ thì lò xo trên sẽ đứt. Tương tự, chứng minh rằng nếu α quá lớn, khi đó lò xo dưới sẽ đứt đầu tiên.

(d) Chứng minh rằng cả hai lò xo cùng đứt đồng thời khi α là nghiệm của phương trình

$$\sin\left(\frac{kl_c}{\alpha}\sqrt{\frac{k}{M}}\right) = \frac{Mg}{\alpha}\sqrt{\frac{k}{M}}.$$

(MIT)

Lời giải:

(a) Phương trình chuyển động của quả bóng và lò xo dưới là

$$M\ddot{x}_1 = Mg - kx_1 + kx_2 \, ,$$
$$kx_2 = F(t) \, .$$

Khử x_2, ta có

$$M\ddot{x}_1 + kx_1 = F(t) + Mg \, . \tag{1}$$

Để khử bỏ số hạng hằng số, đặt $x_1 = x + Mg/k$. Phương trình (1) khi đó trở thành

$$M\ddot{x} + kx = F(t) \, .$$

Đặt $x = e^{i\omega t}y(t)$, ở đây $\omega = \sqrt{k/M}$. Phương trình trên trở thành

$$\ddot{y} + 2i\omega\dot{y} = \frac{F(t)}{M}e^{-i\omega t} \, . \tag{2}$$

Phần thuần nhất của phương trình trên

$$\ddot{y} + 2i\omega\dot{y} = 0 \, ,$$

có thể được giải bằng cách đặt $y = C_1e^{\alpha t}$, ở đây C_1 và α là các hằng số. Thay thế vào ta có $\alpha = -2i\omega$.

Nghiệm riêng của (2) nhận được bằng cách đặt $\dot{y} = e^{-2i\omega t}f(t)$, ta có

$$\frac{df}{dt} = \frac{F(t)}{M}e^{i\omega t} \, ,$$

hay

$$\dot{y} = e^{-2i\omega t}\int\frac{F(t)}{M}e^{i\omega t}dt \, .$$

Vì vậy nghiệm tổng quát của (2) là

$$\dot{y} = e^{-2i\omega t}\left[\int\frac{F(t)}{M}e^{i\omega t}dt + C_1\right] \, .$$

cho

$$y = \int e^{-2i\omega t}\left[\int\frac{F(\tau)}{M}e^{i\omega t}d\tau + C_1\right]dt + C_2$$

và

$$x_1 = e^{i\omega t}\left\{\int e^{-2i\omega t}\left[\int \frac{F(\tau)}{M}e^{i\omega\tau}d\tau + C_1\right]dt + C_2\right\} + \frac{Mg}{k}\,, \tag{3}$$

ở đây C_1, C_2 là các hằng số tích phân. Để có thể ứng dụng vào bài toán, hoặc là phần thực hay phần ảo của biểu thức cuối cùng được dùng như nghiệm tổng quát.

(b) Phương trình chuyển động là

$$M\ddot{x}_1 + kx_1 = Mg \tag{4}$$

với $t < 0$, và

$$M\ddot{x}_1 + kx_1 = \alpha t + Mg \tag{5}$$

với $t > 0$. Trước hết ta giải (4) khi đặt $F(t) = 0$ trong (3). Điều đó cho ta

$$x_1 = iC_1' e^{-i\omega t} + C_2 e^{i\omega t} + \frac{Mg}{k}\,.$$

ở đây C_1' là hằng số tích phân thay cho C_1. Lấy phần thực, ta có

$$x_1 = C_1' \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t) + \frac{Mg}{k}\,.$$

Nghiệm của (5) là nghiệm của (4) cộng với nghiệm riêng $\alpha t/k$

$$x_1 = C_1' \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t) + \frac{\alpha t}{k} + \frac{Mg}{k}\,.$$

Tại $t = 0$, $x_1 = Mg/k$, $x_2 = 0$, $\dot{x}_1 = 0$, do đó $C_2 = 0$, $C_1' = -\alpha/k\omega$. Vì vậy

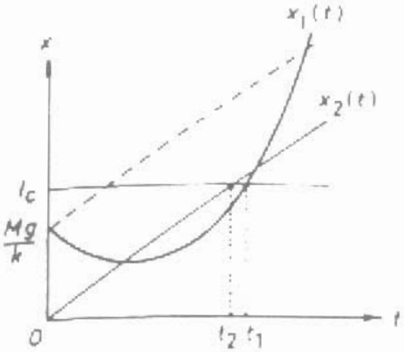
$$x_1(t) = \frac{\alpha t}{k} + \frac{Mg}{k} - \frac{\alpha}{k\omega}\sin(\omega t)\,,$$
$$x_2(t) = \frac{\alpha t}{k}$$

(c) Trong các hình 1.23 (với α lớn) và 1.24 (với α nhỏ) là các đường cong cho x_1 và x_2. Thấy rằng đường cho x_1 được cho bởi đường thẳng $x = Mg/k + \alpha t/k$, chúng song song với đường trừ đi số hạng dao động $\alpha\sin(\omega t)/k\omega$, biên độ của nó tỉ lệ với α. Vì vậy, nếu t_1 và t_2 là các thời điểm x_1 và x_2 đạt tới l_c, chiều dài tới hạn, ta có, với α lớn, $t_2 < t_1$, nghĩa là lò xo dưới đứt đầu tiên, và đối với α nhỏ, $t_1 < t_2$, nghĩa là lò xo trên đứt đầu tiên.

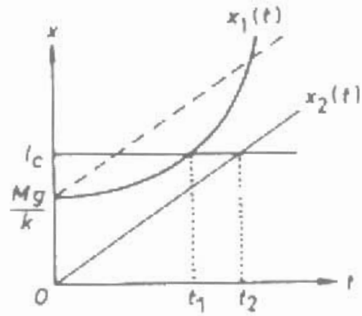
(d) Để hai lò xo đứt gẫy đồng thời, tại thời điểm $t = t_0$, đòi hỏi

$$x_2(t_0) = l_c = \frac{\alpha t_0}{k}\,,$$

hay



Hình 1.23



Hình 1.24

$$t_0 = \frac{kl_c}{\alpha} ,$$

và

$$x_1(t_0) = l_c = \frac{Mg}{k} + l_c - \frac{\alpha}{\omega k}\sin\left(\frac{\omega k l_c}{\alpha}\right) .$$

hay

$$\sin\left(\frac{\omega k l_c}{\alpha}\right) = \frac{Mg\omega}{\alpha} ,$$

ở đây $\omega = \sqrt{k/M}$.

1036

Một con lắc, tạo nên bởi một quả cầu nặng M được treo vào chốt xoay trên trần bằng sợi dây chiều dài L, dao động tự do trong mặt phẳng thẳng đứng (xem hình 1.25). Yếu tố nào làm cho biên độ dao động thay đổi nếu dây bị ngắn lại từ từ đi một nửa?

(Chicago)

Lời giải: *Phương pháp 1*

Đối với hệ tuần hoàn với một tham số có sự thay đổi từ từ, lực tác dụng J là bất biến đoạn nhiệt.

$$J = \oint P_\theta d\theta ,$$

Hình 1.25

ở đây $P_\theta = ML^2\dot{\theta}$, nghĩa là

$$\begin{aligned} J &= \oint ML^2\dot{\theta}\cdot\dot{\theta}dt = ML^2\langle\dot{\theta}^2\rangle\frac{2\pi}{\omega} \\ &= ML^2\cdot\frac{\omega^2\theta_0^2}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega} = \pi ML^2\theta_0^2\omega \\ &= \pi Mg^{1/2}\theta_0^2L^{3/2}\,. \end{aligned}$$

Khi ta sử dụng $T = 2\pi/\omega$, với $\omega = \sqrt{g/l}$, cho chu kì, và

$$\langle\dot{\theta}^2\rangle = \langle[-\theta_0\omega\sin(\omega t + \varphi_0)]^2\rangle = \frac{\omega^2\theta_0^2}{2}$$

bằng cách lấy $\theta = \theta_0\cos(\omega t + \varphi_0)$. Khi đó, vì J là bất biến đoạn nhiệt, nên

$$\theta_0 \propto L^{-3/4}\,.$$

Khi

$$L \to L/2, \qquad \theta_0 \to 1,68\theta_0\,.$$

nghĩa là biên độ dao động tăng lên 1,68 lần.

Phương pháp 2

Trong khi thảo luận trong một cuộc họp, Einstein đã sử dụng thí dụ sau để minh hoạ bất biến đoạn nhiệt là gì. Ông chứng minh như sau

$$\begin{aligned} \text{Sức căng dây} &= Mg\langle\cos\theta\rangle + \left\langle\frac{ML^2\dot{\theta}^2}{L}\right\rangle \\ &= Mg\left(1 - \frac{\langle\theta^2\rangle}{2}\right) + ML\langle\dot{\theta}^2\rangle \\ &= Mg\left(1 + \frac{\theta_0^2}{4}\right)\,. \end{aligned}$$

Giả thiết rằng sau một chu kì, chiều dài của dây gần như không thay đổi và góc θ nhỏ.

Khi L bị ngắn lại từ từ, công thực hiện ở dao động tử là $-\langle N\rangle\Delta L$, ở đây N là là lực căng dây, $-\Delta L$ là độ dịch chuyển của dao động tử. Sử dụng biểu thức trên, ta nhận được công đã thực hiện

$$-Mg\Delta L - Mg\cdot\frac{\theta_0^2}{4}\cdot\Delta L\,.$$

Dưới tác dụng của ngoại lực, sự thay đổi năng lượng của dao động tử là

$$\begin{aligned}\Delta(-MgL\cos\theta_0) &= \Delta\left[-MgL\left(1-\frac{\theta_0^2}{2}\right)\right]\\ &= -Mg\Delta L + \frac{1}{2}Mg\Delta(L\theta_0^2)\\ &= -Mg\Delta L + \frac{1}{2}Mg\theta_0^2\Delta L + MgL\theta_0\Delta\theta_0\,.\end{aligned}$$

Công thực hiện và độ tăng năng lượng phải cân bằng, cho ta

$$L\theta_0\Delta\theta_0 + \frac{3\theta_0^2\Delta L}{4} = 0\,,$$

hay

$$L\theta_0^2\Delta\ln(\theta_0 L^{3/4}) = 0\,.$$

ta rút ra

$$\theta_0 L^{3/4} = \text{ hằng số }\,,$$

hay

$$\theta_0 \propto L^{-3/4}\,.$$

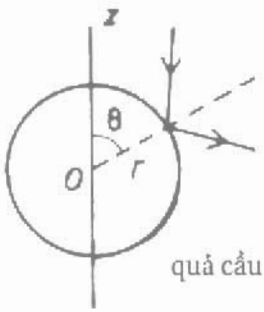
Khi đó

$$L\to\frac{L}{2},\qquad \theta_0\to 1,68\theta_0\,.$$

1037

Một quả cầu phản xạ hoàn toàn bán kính r và mật độ $\rho = 1$ bị hút bởi mặt trời bằng trọng lực, và bị đẩy bởi tia ánh sáng mặt trời phản xạ trên bề mặt. Tính giá trị r để không có hiện tượng đó. Độ sáng của mặt trời là $I_s = 4\times 10^{33}$ ec/s và khối lượng của nó là $M_s = 2\times 10^{33}$ g. Kết quả tính ra cm (coi mặt trời là chất điểm).

(UC, Berkeley)



Hình 1.26

Lời giải:

Đặt N_ν là số photon tần số ν đi qua một đơn vị diện tích bề mặt vuông góc với hướng truyền trong một đơn vị thời gian, I_ν là năng lượng của ánh sáng mặt trời tần số ν bức xạ bởi mặt trời trong một đơn vị thời gian, và R là khoảng cách từ mặt trời đến quả cầu. Khi $R \gg r$, các tia mặt trời coi như song song và ngược hướng với trục z như chỉ ra ở hình 1.26. Khi đó

$$I_s = \int I_\nu d\nu, \qquad N_\nu = \frac{I_\nu}{4\pi R^2 h\nu}.$$

Các photon va chạm đàn hồi và phản xạ toàn phần trên bề mặt. Trong khoảng thời gian Δt, với phân tố bề mặt ΔS tại góc phương vị θ, xung lượng của photon tần số ν dọc theo trục z là

$$\Delta P_{\nu z} = N_\nu \left[\frac{h\nu}{c} + \frac{h\nu}{c}\cos(2\theta)\right] \cos\theta \Delta S \Delta t .$$

Từ đó làm xuất hiện lực có giá trị

$$\Delta F_{\nu z} = \frac{\Delta P_{\nu z}}{\Delta t} = \frac{2h\nu}{c} N_\nu \cos^3\theta \Delta S .$$

Khi đó tổng lực tác dụng lên trên quả cầu bởi ánh sáng tần số ν là

$$F_{\nu z} = \int dF_{\nu z} = \frac{2h\nu}{c} \cdot \frac{I_\nu}{4\pi R^2 h\nu} \int_0^{\pi/2} 2\pi \cos^3\theta \cdot \sin\theta \cdot r^2 d\theta = \frac{I_\nu r^2}{4R^2 c} .$$

Vì vậy tổng lực đẩy bởi ánh sáng là

$$F_z = \int F_{\nu z} d\nu = \frac{I_s r^2}{4R^2 c} .$$

Lực hút mặt trời trên quả cầu là

$$F_g = \frac{GM_s m}{R^2} ,$$

ở đây $m = \rho \cdot (4/3)\pi r^3 = (4/3)\pi r^3$ là khối lượng quả cầu. Khi hai lực cân bằng, ta có

$$\frac{I_s r^2}{4R^2 c} = \frac{4GM_s \pi r^3}{3R^2} ,$$

hay

$$\begin{aligned} r &= \frac{3I_s}{16\pi c G M_s} \\ &= \frac{3 \times 4 \times 10^{33}}{16 \times 3,14 \times 3 \times 10^{10} \times 6,67 \times 10^{-8} \times 2 \times 10^{33}} \\ &= 5,97 \times 10^{-5} \text{ cm} . \end{aligned}$$

1038

Một hạt có khối lượng m chuyển động theo quỹ đạo cho bởi phương trình $x = x_0 \cos\omega_1 t$, $y = y_0 \sin\omega_2 t$.

(a) Tìm thành phần x và y của lực. Trong điều kiện nào thì lực là lực hướng tâm?

(b) Tìm thế năng như hàm của x và y.

(c) Xác định động năng của hạt. Chỉ ra rằng tổng năng lượng của hạt được bảo toàn.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Đạo hàm theo thời gian, ta được

$$\dot{x} = -x_0\omega_1 \sin(\omega_1 t), \qquad \ddot{x} = -x_0\omega_1^2 \cos(\omega_1 t) ,$$
$$\dot{y} = y_0\omega_2 \cos(\omega_2 t), \qquad \ddot{y} = -y_0\omega_2^2 \sin(\omega_2 t) .$$

Theo định luật hai Newton ta có

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= m(\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j}) = -m[x_0\omega_1^2 \cos(\omega_1 t)\mathbf{i} + y_0\omega_2^2 \sin(\omega_2 t)\mathbf{j}] \\ &= -m(\omega_1^2 x\mathbf{i} + \omega_2^2 y\mathbf{j}) . \end{aligned}$$

Thành phần x và y của lực là

$$F_x = -m\omega_1^2 x\,,$$
$$F_y = -m\omega_2^2 y\,.$$

Nếu $\omega_1 = \omega_2$, $\mathbf{F}$ là lực hướng tâm $\mathbf{F} = -m\omega_1^2\mathbf{r}$.

(b) Từ

$$\mathbf{F} = -\nabla V\,,$$

có nghĩa là

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}\,,$$

ta nhận được thế năng

$$V = \frac{1}{2}m(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2)\,.$$

Lưu ý rằng ta lấy thế năng ở gốc tọa độ là 0.

(c) Động năng của hạt là

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m[x_0^2\omega_1^2\sin^2(\omega_1 t) + y_0^2\omega_2^2\cos^2(\omega_2 t)]\,.$$

Tổng năng lượng là

$$\begin{aligned} E &= T + V \\ &= \frac{1}{2}m[x_0^2\omega_1^2\sin^2(\omega_1 t) + y_0^2\omega_2^2\cos^2(\omega_2 t)] \\ &\quad + \omega_1^2 x_0^2\cos^2(\omega_1 t) + \omega_2^2 y_0^2\sin^2(\omega_2 t) \\ &= \frac{1}{2}m(x_0^2\omega_1^2 + y_0^2\omega_2^2) \\ &= \text{hằng số.} \end{aligned}$$

Vì thế nó được bảo toàn.

1039

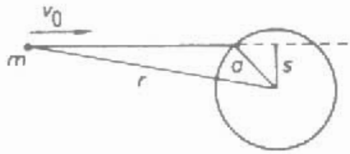
Một hạt khối lượng m chuyển động với vận tốc v_0 hướng về tâm tán xạ cố định, tâm này tạo ra lực đẩy $\mathbf{F} = (mv_1^2/2)\delta(r-a)\hat{\mathbf{r}}$, ở đây $\hat{\mathbf{r}}$ là vectơ đơn vị dọc theo bán kính từ tâm lực, a là bán kính cố định tại đó có lực tác dụng, v_1 là hằng số có thứ nguyên vận tốc. Thông số va chạm là s, như chỉ ra ở hình 1.27.

(a) Tìm thế năng.

(b) Chứng minh rằng nếu $v_0 < v_1$, hạt không đi vào quả cầu $r = a$, mà sượt qua quả cầu và góc tới bằng góc phản xạ.

(c) Vẽ cẩn thận quỹ đạo nếu bạn hi vọng $v_0 > v_1$, $s = a/2$.

(*Wisconsin*)



Hình 1.27

Lời giải:

(a) Lực **F** là lực xuyên tâm, được bảo toàn. Khi đó thế năng có thể viết

$$V(\mathbf{r}) = -\int_{\infty}^{r} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = \frac{1}{2}mv_1^2 \int_{r}^{\infty} \delta(r' - a)dr'$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{2}mv_1^2 & \text{với } r < a \,, \\ 0 & \text{với } r > a \,. \end{cases}$$

Đó là thế năng của hạt trong trường lực.

(b) Tổng năng lượng $T + V$ của hạt được bảo toàn

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 \,,$$

có nghĩa là $v_0^2 - v_1^2 = v'^2$, ở đây v' là tốc độ của hạt bên trong quả cầu $r = a$. Nếu hạt đi vào quả cầu thì v' phải là thực, có nghĩa là phải đòi hỏi $v_0 > v_1$.

Nếu $v_0 < v_1$, thì hạt không thể đi vào quả cầu $r = a$ được. Khi đó lực là lực xuyên tâm quả cầu, thành phần xuyên tâm của xung lượng hạt sẽ đổi ngược hướng nhưng giá trị không đổi, trong khi thành phần tiếp tuyến với quả cầu giữ không đổi. Vì vậy, góc tới và góc phản xạ được xác định bằng tỉ số của giá trị thành phần tiếp tuyến và của thành phần xuyên tâm, bằng nhau. Lưu ý rằng khi tính sự bảo toàn cơ năng, thì giá trị của xung lượng hạt sẽ không thay đổi khi va chạm.

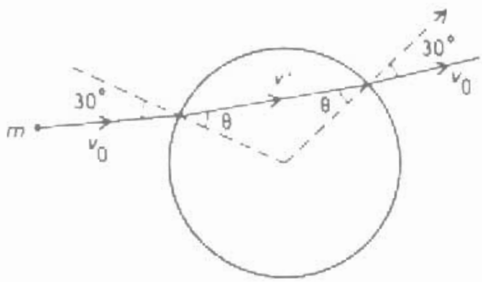
(c) Với $v_0 > v_1$ và $s = a/2$, hạt sẽ tới chạm vào quả cầu r = a với góc tới $r = a$ với góc phản xạ $\theta_0 = \arcsin[(a/2)/a] = 30°$, và đi vào quả cầu. Nếu góc nó tạo với hướng bán kính là θ. Khi đó sự bảo toàn thành phần tiếp tuyến của xung lượng hạt đòi hỏi

$$v' \sin\theta = v_0 \sin 30^\circ = \frac{v_0}{2}\,,$$

do đó θ được cho bởi

$$\theta = \arcsin\left(\frac{v_0}{2\sqrt{v_0^2 - v_1^2}}\right)\,.$$

Do V là hằng số (không có lực nào tác dụng) bên trong hình cầu, quỹ đạo chuyển động của hạt là đường thẳng cho tới khi hạt rời khỏi hình cầu. Tại vị trí hạt rời khỏi hình cầu $r = a$, một lần nữa quả cầu bị khúc xạ và bên ngoài hình cầu hạt phải có vận tốc là v_0 và góc giữa vận tốc của hạt và bán kính hình cầu là 30°, hình 1.28.



Hình 1.28

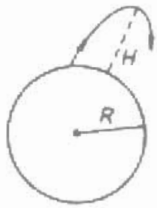
1040

Một tên lửa tầm xa phóng đi tại một điểm trên bề mặt trái đất (bán kính R) với vận tốc $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta)$ (hình 1.29). Bỏ qua sức cản của không khí và sự quay của trái đất (nhưng có kể đến sự thay đổi của trường hấp dẫn), tìm phương trình xác định độ cao cực đại H của tên lửa. Giải tới bậc bé nhất của (H/R) và kiểm nghiệm lại kết quả quen thuộc khi tên lửa được phóng thẳng đứng lên trên.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Cả xung lượng góc lẫn cơ năng của tên lửa được bảo toàn trong trường hấp dẫn của trái đất một trường lực xuyên tâm. Ta cần quan tâm tới trạng thái



Hình 1.29

ban đầu và trạng thái cuối của tên lửa là trạng thái tên lửa đạt độ cao cực đại. Ta có

$$mRv_\theta = m(R + H)v'_\theta \,,$$
$$\frac{1}{2}m(v_\theta^2 + v_r^2) - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv_\theta'^2 - \frac{GMm}{R+H}\,,$$

trong đó dấu phết liên hệ với trạng thái cuối tại đó thành phần xuyên tâm của tên lửa bằng không, m và M lần lượt là khối lượng của tên lửa và trái đất. Kết hợp hai phương trình trên ta có

$$\frac{1}{2}m(v_\theta^2 + v_r^2) - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}m\left(\frac{R}{R+H}\right)^2 v_\theta^2 - \frac{GMm}{R+H}\,,$$

phương trình này cho thấy độ cao cực đại H. Loại bỏ thành phần bậc lớn hơn một của H/R, ta có

$$\frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\theta^2) - \frac{GMm}{R} \approx \frac{1}{2}m\left(1 - \frac{2H}{R}\right)v_\theta^2 - \frac{GMm}{R}\left(1 - \frac{H}{R}\right)\,.$$

và do vậy

$$H \approx \frac{v_r^2 R}{2\left(\frac{GM}{R} - v_\theta^2\right)}\,.$$

Cho trường hợp phóng tên lửa thẳng đứng, $v_\theta = 0$, $v_r = v$, và nếu H/R nhỏ ta có thể coi g là hằng số với giá trị $g = GM/R^2$. Từ đó ta có thể rút ra công thức quen thuộc

$$H \approx \frac{v^2}{2\left(\frac{GM}{R^2}\right)} = \frac{v^2}{2g}\,.$$

1041

Tàu Mariner 9 được phóng tại Cape Kenedy trong chiến dịch chinh phục sao Hỏa. Coi tàu được phóng lên một quỹ đạo hình elip quanh mặt trời có điểm gần mặt trời (điểm cận nhật) là trái đất, điểm xa mặt trời nhất là sao Hỏa (xem hình.1.30).

(a) Tìm giá trị của λ và ε trong phương trình quỹ đạo $r = \lambda(1+\varepsilon)/(1+\varepsilon\cos\theta)$ và vẽ hình quỹ đạo đó.

(b) Dùng định luật Kepler III để tính thời gian của chuyến bay trên quỹ đạo đó.

(c) Chiều phóng nào từ trái đất sẽ có chi phí nhiên liệu ít hơn.

Khoảng cách trung bình từ mặt trời tới sao Hỏa là = 1,5 A.U (đơn vị thiên văn).

Khoảng cách trung bình từ mặt trời tới trái đất là = 1 A.U.

(*Wisconsin*)

Hình 1.30

Lời giải:

(a) Gọi R_1 khoảng cách từ mặt trời tới trái đất và R_2 là khoảng cách từ mặt trời tới sao Hỏa. Ta có

$$R_1 = \frac{\lambda(1+\varepsilon)}{1+\varepsilon} = \lambda\,,$$

$$R_2 = \frac{\lambda(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon}\,.$$

Giải hệ phương trình trên ta có $\lambda = R_1 = 1$ A.U., $\varepsilon = 0,2$.

(b) Gọi T_1 và T lần lượt là chu kì của trái đất và tàu Mariner 9. Theo định luật Kepler III, $T^2/a^3 =$ hằng số,

$$\frac{T^2}{\left(\frac{R_1+R_2}{2}\right)^3} = \frac{T_1^2}{R_1^3} ;$$

hay

$$T = \left(\frac{R_1+R_2}{2R_1}\right)^{3/2} T_1 = \left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)^{3/2} T_1 = 1,25^{3/2} T_1 = 1,40 \text{ năm} .$$

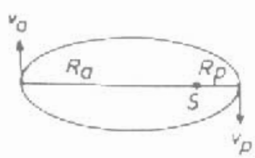
Chuyến bay tới sao Hỏa của tàu kéo dài 0,70 năm.

(c) Để tiết kiệm nhiên liệu, tàu phải phóng theo tiếp tuyến của quỹ đạo trái đất và cùng chiều với chiều quay của trái đất.

1042

Một sao chổi chuyển động trên quỹ đạo quanh Mặt Trời với vận tốc 10 km/s tại điểm xa Mặt Trời và 80 km/s tại điểm gần Mặt Trời (hình 1.31). Nếu biết vận tốc của Trái Đất trên một quỹ đạo tròn là 30 km/s và bán kính quỹ đạo là 1.5×10^8 km, tìm bán kính R_a của điểm xa Mặt Trời của sao chổi.

(*Wisconsin*)



Hình 1.31

Lời giải:

Gọi v là vận tốc của Trái Đất, R là bán kính quỹ đạo của Trái Đất, m và m_s lần lượt là khối lương của Trái Đất và Mặt Trời. Do đó

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{Gmm_s}{R^2} ,$$

hoặc

$$Gm_s = Rv^2 .$$

Do sự bảo toàn của cơ năng và xung lượng góc (hay momen động lượng) của sao chổi ta có thể suy ra

$$\frac{-Gm_cm_s}{R_a} + \frac{m_cv_a^2}{2} = \frac{Gm_cm_s}{R_p} + \frac{m_cv_p^2}{2} .$$

$$m_cR_av_a = m_cR_pv_p ,$$

trong đó m_c là khối lượng của sao chổi, v_a và v_p lần lượt là vận tốc của sao chổi tại điểm xa mặt trời và điểm gần mặt trời. Suy ra

$$R_a = \frac{2Gm_s}{v_a(v_a+v_p)} = \frac{2Rv^2}{v_a(v_a+v_p)} = 3 \times 10^8 \text{ km} .$$

1043

Một hạt cổ điển có năng lượng là E_0 và momen động lượng L quanh điểm O tiến tới một vùng trong đó có một trường thế hấp dẫn xuyên tâm $V = -G(r)$ với tâm là điểm O. Hạt đó bị tán xạ bởi thế đó.

(a) Giả thiết năng lượng và momen động lượng được bảo toàn, tìm phương trình vi phân cho $dr/d\theta$ theo E_0, L, $G(r)$, r (và khối lượng hạt m).

(b) Tìm phương trình của khoảng cách cực tiểu giữa hạt và tâm tán xạ $r_{\min}$, biết E, L, $G(r_{\min})$, và m.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a)

$$E_0 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - G(r) ,$$

$$L = mr^2\dot{\theta} .$$

trong đó θ là góc mô tả trên hình 1.32. Do đó

$$\dot{r}^2 = \frac{2(E_0+G)}{m} - \frac{L^2}{m^2r^2} .$$

Do

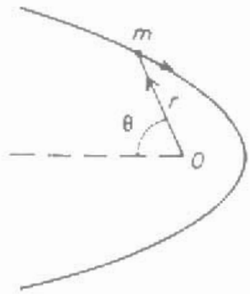
$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{dr}{d\theta}, \qquad \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} ,$$

Nên có thể viết lại phương trình trên như sau

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{m^2r^4}{L^2}\left[\frac{2(E_0+G)}{m} - \frac{L^2}{m^2r^2}\right] .$$

dẫn đến

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm\sqrt{\frac{2m(E_0+G)r^4}{L^2} - r^2} .$$



Hình 1.32

(b) Tại điểm gần tâm tán xạ nhất $r = r_{\min}$, $\dot{r} = 0$. Do đó

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{1}{2}mr_{\min}^2\dot{\theta}^2 - G(r_{\min}) \\ &= \frac{1}{2}mr_{\min}^2 \cdot \frac{L^2}{m^2r_{\min}^4} - G(r_{\min}) \\ &= \frac{L^2}{2mr_{\min}^2} - G(r_{\min}) . \end{aligned}$$

hay

$$r_{\min} = \frac{L}{\sqrt{2m[E_0 + G(r_{\min})]}} .$$

Kết quả cũng có thể tìm ra bằng cách đặt $dr/d\theta = 0$.

1044

Một sao chổi di chuyển tới mặt trời với vận tốc ban đầu là v_0. Khối lương mặt trời là M và bán kính là R. Tìm tiết diện toàn phần σ để xảy ra va chạm với mặt trời. Coi mặt trời đứng yên và bỏ qua ảnh hưởng của các hành tinh.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Gọi tham số va chạm của sao chổi là b. Tại khoảng cách ngắn nhất tới mặt trời (r tính từ tâm mặt trời), áp dụng định luật bảo toàn cơ năng và momen động lượng ta có

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{mV^2}{2} - \frac{GMm}{r} ,$$
$$mbV_0 = mrV ,$$

trong đó m là khối lượng của sao chổi và V là vận tốc của nó tại điểm gần mặt trời nhất. Từ đó suy ra

$$b = r\sqrt{1 + \frac{2GM}{V_0^2 r}} .$$

Nếu $r < R$, sao chổi sẽ va chạm với mặt trời. Do đó tiết diện toàn phần σ để xảy ra va chạm là

$$\sigma = \pi[b(R)]^2 = \pi R^2 \left(1 + \frac{2GM}{V_0^2 R}\right) .$$

1045

Một hạt chuyển động trên một quỹ đạo tròn có bán kính r dưới tác dụng của lực hút xuyên tâm. Chỉ ra rằng quỹ đạo ổn định nếu

$$f(r) > -\left(\frac{r}{3}\right) \frac{\partial f}{\partial r}\bigg|_r ,$$

trong đó $f(r)$ là độ lớn của lực tại khoảng cách r so với tâm.

(*CUSPEA*)

Lời giải:

Với chuyển động của một hạt dưới tác động của lực xuyên tâm ta có

$$mr^2\dot{\theta} = \text{hằng số} = L, \text{ chẳng hạn,}$$

$$m\ddot{r} = -f + mr\dot{\theta}^2 .$$

Xét hạt chuyển động trong một quỹ đạo tròn có bán kính r với thăng giáng nhỏ của bán kính và góc δr, $\delta\theta$

$$r(t) = r + \delta r(t), \qquad \theta = \omega t + \delta\theta(t) ,$$

trong đó ω là tần số góc của hạt trên quỹ đạo tròn bán kính r cho bởi $m\omega^2 r = f(r)$. Do

$$\begin{aligned} \Delta L &\approx mr^2\delta\dot{\theta} + 2mr\dot{\theta}\delta r , \\ m\delta\ddot{r} &\approx -\frac{df}{dr}\delta r + m\dot{\theta}^2\delta r + 2mr\dot{\theta}\delta\dot{\theta} , \\ \dot{\theta} &\approx \omega + \delta\dot{\theta} , \end{aligned}$$

ta có

$$\begin{aligned} m\delta\ddot{r} &\approx -\frac{df}{dr}\delta r + m\omega^2\delta r + 2\omega\frac{\Delta L - 2mr\omega\delta r}{r} \\ &= \left(-\frac{df}{dr} - 3\frac{f(r)}{r}\right)\delta r + \frac{2\omega\Delta L}{r} . \end{aligned}$$

Trong công thức trên ta chỉ giữ lại thành phần bậc nhất của đại lượng nhỏ δr, $\delta\theta$.

Quỹ đạo tròn sẽ ổn định chỉ khi δr là biến thiên điều hòa đơn giản. Nói cách khác, điều kiện ổn định của quỹ đạo chuyển động là hệ số của δr âm

$$-\left[\frac{dt}{dr}\right]_r - \frac{3f(r)}{r} < 0 ,$$

hay

$$f(r) > -\frac{r}{3}\left[\frac{dt}{dr}\right]_r .$$

1046

Một hạt khối lượng m chuyển động từ xa vô cực có vận tốc ban đầu V_0, đường kéo dài của vectơ vận tốc có khoảng cách b so với tâm cố định của trường lực đẩy có độ lớn tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách (độ lớn k/r^2, ở đây k là hằng số). Tìm:

(a) Khoảng cách gần nhất của hạt so với tâm trường lực.

(b) Góc lệch của hạt.

(c) Đạo hàm của mặt tán xạ $d\sigma/d\Omega$ cho dòng hạt đồng nhất tán xạ bởi tâm tán xạ trên.

(*CUSPEA*)

Lời giải:

(a) Khi hạt tại vị tri gần tâm tán xạ nhất $\dot{r} = 0$. Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{k}{R} + \frac{mV^2}{2} ,$$

trong đó R là khoảng cách gần nhất và V $(= R\dot{\theta})$ là vận tốc của hạt tại đó nó đạt tới điểm cận tâm hút. Từ định luật bảo toàn momen động lượng suy ra

$$J = V_0 mb = mVR ,$$

hay

$$V = \frac{V_0 b}{R} .$$

Do đó

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{k}{R} + \frac{m}{2}\frac{V_0^2 b^2}{R^2} ,$$

hay

$$R^2 - \frac{2kR}{mV_0^2} - b^2 = 0 ,$$

Rút ra khoảng cách gần nhất là

$$R = \frac{k}{mV_0^2} + \sqrt{\left(\frac{k}{mV_0^2}\right)^2 + b^2} .$$

(b) Quỹ đạo của hạt được mô tả trên hình 1.33. Xung lực của lực $\mathbf{F}$ tác dụng lên hạt là

$$\int_{\infty}^{\infty} \mathbf{F} dt = m\Delta\mathbf{V} ,$$

Trong đó $\Delta\mathbf{V} = \mathbf{V}_f - \mathbf{V}_i$ với $|\mathbf{V}_f| = |\mathbf{V}_i| = V_0$. Chỉ quan tâm tới thành phần theo phương $\mathbf{V}_i$ của xung lực ta có

$$\begin{aligned} -\int_{-\infty}^{\infty} F\cos\theta' \frac{dt}{d\theta'} d\theta' &= \frac{m}{v_0}(\mathbf{V}_f \cdot \mathbf{V}_i - V_i^2) \\ &= mV_0(\cos 2\theta - 1) . \end{aligned}$$

Do $F = \frac{k}{r^2}$, $mr^2\dot{\theta}' = J$, vế trái của phương trình là

$$-\frac{mk}{J}\int_0^{\pi-2\theta}\cos\theta' d\theta' = -\frac{mk}{J}\sin 2\theta \ .$$

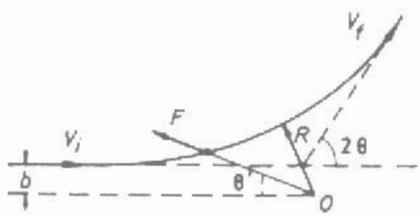
Do đó

$$\frac{2mk}{J}\sin\theta\cos\theta = 2mV_0\sin^2\theta \ ,$$

hay

$$\cot\theta = \frac{JV_0}{k} = \frac{mV_0^2 b}{k} = \frac{2Eb}{k}$$

với $E = \frac{1}{2}mV_0^2$, cho góc lệch 2θ.



Hình 1.33

(c) Tiết diện tương ứng với các tham số va chạm trong khoảng b và $b + db$ là $d\sigma = 2\pi b db$.

Do $b = \frac{k}{2E}\text{cotg}\theta$, nên

$$db = \frac{k}{2E}\csc^2\theta d\theta$$

dùng giá trị tuyệt đối. Suy ra

$$d\sigma = 2\pi\left(\frac{k}{2E}\right)^2\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}d\theta \ .$$

Sau đó, do góc tán xạ là 2θ nên

$$d\Omega = 2\pi\sin 2\theta d(2\theta) = 8\pi\cos\theta\sin\theta d\theta \ ,$$

và

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4}\left(\frac{k}{2E}\right)^2\frac{1}{\sin^4\theta} \ ,$$

Đây chính là công thức tán xạ Rutherford.

1047

Xét một hành tinh có khối lượng m quay quanh mặt trời có khối lượng M. Giả sử không gian quanh mặt trời có một lượng bụi phân bố đều, mật độ ρ.

(a) Chỉ ra rằng tác động của bụi là cộng vào một lực hút xuyên tâm.

$$F' = -mkr, \quad \text{trong đó} \quad k = \frac{4\pi\rho G}{3}, \qquad G = \text{ là hằng số hấp dẫn.}$$

Bỏ qua lực cản của lớp bụi đối với hành tinh.

(b) Xét một chuyển động tròn của hành tinh tương ứng với momen động lượng L. Tìm phương trình của bán kính chuyển động r_0 theo L, G, M, m và k (không cần giải phương trình).

(c) Giả sử F' là nhỏ so với lực hút của mặt trời và xét quỹ đạo chỉ lệch một chút so với quỹ đạo ở phần (b). Bằng cách xét các tần số của chuyển động xuyên tâm và chuyển động quay hãy chứng minh rằng quỹ đạo là elip tuế sai và tính tần số góc của chuyển động tuế sai ω_ρ theo r_0, ρ, G và M.

(d) Trục của elip tiến động cùng chiều hay ngược chiều với tần số góc của chuyển động quỹ đạo?

(CUSPEA)

Lời giải:

(a) Khối lượng của bụi trong hình cầu bán kính r tâm là tâm của mặt trời là

$$M_{\text{bui}} = \frac{4\pi r^3\rho}{3} .$$

Nếu r là khoảng cách giữa hành tinh và mặt trời, lực hấp dẫn đặt lên hành tinh gây ra bởi lực hút của bụi (có tính đến tính tỉ lệ với nghịch đảo bình phương khoảng cách) như thể là tất cả lượng bụi đó đều nằm tại tâm hình cầu. Nói cách khác

$$F' = \frac{-M_{\text{bui}} mG}{r^2} = \frac{-4\pi r^3\rho}{3}\frac{mG}{r^2} = \frac{-4\pi\rho Gmr}{3} = -mkr .$$

(b) Hành tinh có gia tốc $(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2,\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$ trong hệ tọa độ cực. Phương trình chuyển động của hành tinh là

$$m\ddot{r} = \frac{-GMm}{r^2} - mkr + mr\dot{\theta}^2 , \tag{1}$$

$$mr\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} = 0 . \tag{2}$$

Nhân hai vế của (2) với r ta có

$$\frac{d(mr^2\dot{\theta})}{dt} = 0 ,$$

hay

$$mr^2\dot{\theta} = L ,$$

Trong đó L là hằng số. Do đó momen động lượng L là hằng số chuyển động. Viết lại

$$mr\dot{\theta}^2 = \frac{L^2}{mr^3} ,$$

phương trình xuyên tâm trở thành

$$m\ddot{r} = \frac{-GMm}{r^2} - mkr + \frac{L^2}{mr^3} .$$

Đối với trường hợp chuyển động quỹ đạo tròn, $\ddot{r} = 0$, và ta suy ra phương trình cho bán kính quỹ đạo tròn r_0

$$\frac{-GMm}{r_0^2} - mkr_0 + \frac{L^2}{mr_0^3} = 0 .$$

(c) Gọi η là độ lệch của bán kính quanh r_0, $\eta = r - r_0$, (1) trở thành

$$\begin{aligned}
m\ddot{\eta} &= -\frac{GMm}{(\eta + r_0)^2} - mk(\eta + r_0) + \frac{L^2}{m(r_0 + \eta)^3} \\
&= -\frac{GMm}{r_0^2\left(1 + \frac{\eta}{r_0}\right)^2} - mkr_0\left(1 + \frac{\eta}{r_0}\right) + \frac{L^2}{mr_0^3\left(1 + \frac{\eta}{r_0}\right)^3} \\
&\approx -\frac{GMm}{r_0^2}\left(1 - \frac{2\eta}{r_0}\right) - mkr_0\left(1 + \frac{\eta}{r_0}\right) + \frac{L^2}{mr_0^3}\left(1 - \frac{3\eta}{r_0}\right) ,
\end{aligned}$$

Do $\eta \ll r_0$. Dùng kết quả của chuyển động tròn, ta có thể viết lại phương trình trên như sau

$$\begin{aligned}
m\ddot{\eta} &= \frac{2\eta}{r_0}\left(\frac{GMm}{r_0^2}\right) - \frac{3\eta}{r_0}\frac{L^2}{mr_0^3} - mk\eta \\
&= -\eta\left[\frac{L^2}{mr_0^4} + mk + \frac{2}{r_0}\left(-\frac{GMm}{r_0^2} + \frac{L^2}{mr_0^3}\right)\right] \\
&= -\eta\left[\frac{L^2}{mr_0^4} + 3km\right] ,
\end{aligned}$$

hay

$$\ddot{\eta} = -\left(\frac{L^2}{m^2 r_0^4} + 3k\right)\eta \,.$$

Đây là phương trình của dao động tử điều hòa với tần số góc

$$\omega_r = \sqrt{\frac{L^2}{m^2 r_0^4} + 3k} \,.$$

Do tần số dao động của bán kính hơi lớn hơn tần số quay (vuông góc với bán kính) $\frac{L}{mr_0^2}$, quỹ đạo là một elip tiến động.

Với ρ bậc một, tần số dao động theo phương vuông góc không bị ảnh hưởng bởi bụi

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr_0^2} = \omega_0 \,.$$

Tần số tuế sai là

$$\begin{aligned}
\omega_p &= \omega_r - \omega_0 \\
&= \sqrt{\frac{L^2}{m^2 r_0^4} + 3k} - \frac{L}{mr_0^2} \\
&= \frac{L}{mr_0^2}\left(\sqrt{1 + \frac{3km^2 r_0^4}{L^2}} - 1\right) \\
&\approx \frac{L}{mr_0^2} \cdot \frac{3}{2}\frac{km^2 r_0^2}{L^2} \\
&= \frac{3}{2}\frac{mkr_0^2}{L} \,.
\end{aligned}$$

Để có thể tìm biểu thức của ω_p theo ρ, G, m và r_0, sử dụng công thức của L cho $k = 0$ (sai số là thành phần bậc hai trong ω_p)

$$L = \sqrt{GMm^2 r_0} \,.$$

Do đó

$$\omega_p = \frac{3}{2}m \cdot \frac{4\pi}{3}\rho G \frac{r_0^2}{\sqrt{GMm^2 r_0}} = 2\pi\rho\left(\frac{r_0^3 G}{M}\right)^{1/2} .$$

(d) Do dao động trong mặt phẳng bán kính nhanh hơn chuyển động xoay theo quỹ đạo, nên trục elip chuyển động tuế sai ngược chiều so với vận tốc góc theo quỹ đạo như chỉ ra trên hình 1.34.

Hình 1.34

1048

Một thiên thạch có khối lượng $1,6 \times 10^3$ kg chuyển động quanh trái đất theo quỹ đạo tròn ở độ cao $4,2 \times 10^6$ m so với mặt đất. Thiên thạch đó bất ngờ va chạm trực diện với một thiên thạch khác có khối lượng bé hơn nhiều và bị mất 2,0% động năng nhưng không bị lệch hướng chuyển động và giữ nguyên khối lượng.

(a) Nguyên lý vật lý nào áp dụng cho chuyển động của thiên thạch sau khi va chạm?

(b) Mô tả hình dạng quỹ đạo thiên thạch sau va chạm.

(c) Tìm khoảng cách ngắn nhất của quỹ đạo thiên thạch sau va chạm so với trái đất.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Nguyên lý bảo toàn cơ năng và momen động lượng được áp dụng cho thiên thạch nặng sau khi va chạm.

(b) Để ban đầu thiên thạch chuyển động tròn thì $E < 0$, như vậy sau khi va chạm ta vẫn có $E < 0$. Sau khi mất 2,0% động năng, thiên thạch lớn sẽ chuyển động trên quỹ đạo elip.

(c) Từ

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GmM}{r^2} ,$$

ta có động năng của thiên thạch trước va chạm là

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GmM}{2r} = \frac{mgR^2}{2r}$$

$$= \frac{m \times 9,8 \times 10^3 \times 6400^2}{2(6400 + 4200)} = 1,89 \times 10^7 m \text{ jun} ,$$

Trong đó m là khối lượng của thiên thạch theo đơn vị kg. Thế năng của thiên thạch trước va chạm là

$$-\frac{GmM}{r} = -mv^2 = -3,78 \times 10^7 m \text{ jun} .$$

Trong quá trình va chạm, thế năng của thiên thạch lớn không thay đổi, trong khi động năng đột ngột giảm xuống

$$1,89 \times 10^7 m \times 98\% = 1,85 \times 10^7 m \text{ jun}.$$

Do đó, cơ năng tổng cộng của thiên thạch sau va chạm là

$$E = (1,85 - 3,78) \times 10^7 m = -1,93 \times 10^7 m \text{ jun}.$$

Từ

$$E = \frac{-GmM}{2a} = \frac{-mR^2 g}{2a} ,$$

Ta tìm được trục chính của elip có phương trình

$$2a = \frac{R^2 g}{1,93 \times 10^7} = \frac{(6400 \times 10^3)^2 \times 9,8}{1,93 \times 10^7}$$

$$= 2,08 \times 10^7 \text{ m} = 2,08 \times 10^4 \text{ km} .$$

Do sau khi va chạm, vận tốc của thiên thạch lớn vẫn vuông góc với vectơ bán kính từ tâm trái đất, nên thiên thạch ở điểm viễn địa của quỹ đạo elip. Khoảng cách giữa điểm viễn địa và tâm trái đất lúc đó là 6400 + 4200 = 10600 km và khoảng cách của cận điểm tới tâm của trái đất là

$$r_{\min} = 20800 - 10600 = 10200 \text{ km} .$$

Do đó khoảng cách cực tiểu giữa thiên thạch và trái đất sau khi va chạm là 10200 − 6400 = 3800 km.

Từ những tính toán trên, ta thấy rằng kết quả không phụ thuộc vào khối lượng của thiên thạch.

• 1049

Biết rằng vệ tinh ở gần bề mặt trái đất có chu kì là 90 phút và gần bề mặt mặt trăng cũng có chu kì khoảng 90 phút. Kết luận thú vị gì có thể rút ra về thành phần cấu tạo của mặt trăng?

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

Từ phương trình $mr\omega^2 = GmM/r^2$ cho vật khối lượng m quay quanh vật có khối lượng M dưới tác dụng của lực hấp dẫn, ta suy ra

$$r^3\omega^2 = GM.$$

Nếu lại có M_e, M_m là khối lượng và r_e, r_m là bán kính tương ứng của trái đất và mặt trăng, thêm vào có chu kì của vệ tinh trái đất và mặt trăng gần như nhau ta có

$$\frac{r_m^3}{r_e^3} = \frac{M_m}{M_e} ,$$

hay

$$\frac{M_e}{V_e} = \frac{M_m}{V_m} ,$$

Trong đó V_e và V_m lần lượt là thể tích của trái đất và mặt trăng. Như vậy khối lượng riêng của trái đất và mặt trăng là giống nhau.

1050

Tương tác giữa nguyên tử và iôn tại khoảng cách lớn hơn tiếp điểm được cho bởi công thức thế năng sau $V(r) = -Cr^{-4}$. ($C = e^2P_a^2/2$, trong đó e là điện tích và P_a là độ phân cực của nguyên tử).

(a) Vẽ đường cong thế năng hiệu dụng như là hàm của r.

(b) Nếu năng lượng tổng cộng của iôn vượt quá giá trị V_0, là giá trị lớn nhất của thế năng hiệu dụng, iôn có thể va chạm với nguyên tử. Tìm V_0 theo momen động lượng L.

(c) Tìm tiết diện để ion có thể va chạm với nguyên tử (xuyên tới $r = 0$) theo vận tốc ban đầu v_0 của nó. Giả sử iôn nhẹ hơn nhiều so với nguyên tử.

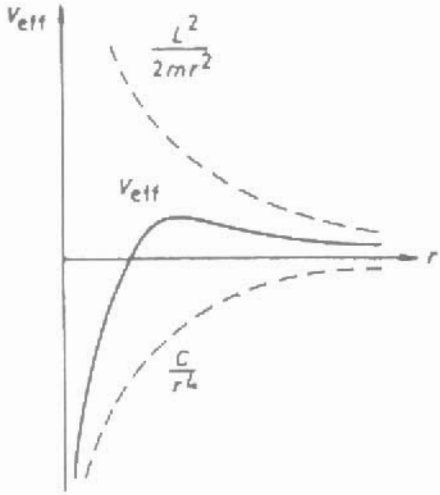
(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

(a) Thế năng hiệu dụng phụ thuộc vào r là

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{-C}{r^4} + \frac{L^2}{2mr^2} .$$

Trong đó L là momen động lượng của iôn quanh nguyên tử và m là khối lượng của iôn. Biến thiên của thế năng theo r được mô tả trên hình 1.35.



Hình 1.35

(b) Để tìm giá trị cực đại của V_{eff}, V_0, ta đặt

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = \frac{4C}{r^5} - \frac{L^2}{mr^3} = \left(\frac{4C}{r^2} - \frac{L^2}{m}\right)\frac{1}{r^3} = 0 .$$

Nghiệm của phương trình trên là

$$r_1 = \infty, \qquad r_2 = \frac{2}{L}\sqrt{Cm} .$$

Xét

$$\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2} = \frac{-20C}{r^6} + \frac{3L^2}{mr^4} .$$

Thế r_1 và r_2 vào phương trình trên ta có

$$\left.\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2}\right|_{r=r_1} = 0, \qquad \left.\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2}\right|_{r=r_2} < 0 .$$

Do đó tại $r = \frac{2}{L}\sqrt{Cm}$, V_{eff} đạt giá trị cực đại $V_0 = \frac{L^4}{16Cm^2}$.

(c) Biểu diễn theo năng lượng toàn phần là

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V ,$$

ta có thể viết $m\dot{r} = \sqrt{2m(E-V) - \frac{L^2}{r^2}}$. Theo momen động lượng L ta có thể viết $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$. Do

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{r}\frac{d\theta}{dr},$$

ta có

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}} = \frac{L}{mr^2\dot{r}} = \frac{L}{r^2\sqrt{2m(E-V) - \frac{L^2}{r^2}}}.$$

Ta có thể tìm được dịch chuyển góc của iôn so với nguyên tử khi di chuyển từ vô cực về vị trí gần nhất $r_{\min}$ so với nguyên tử

$$\theta_1 = L\int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{2m(E-V) - \frac{L^2}{r^2}}}.$$

Do

$$E = V_0 = \frac{L^4}{16m^2C}, \qquad V = -\frac{C}{r^4},$$

$$\theta_1 = L\int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\left(\frac{L^4}{8mC} - \frac{L^2}{r^2} + \frac{2mC}{r^4}\right)^{1/2}}$$

$$= \sqrt{8mC}\int \frac{d(Lr)}{(L^2r^2 - 4mC)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{(Lr - 2\sqrt{mC})}{(Lr + 2\sqrt{mC})}\Bigg|_{r_{\min}}^{\infty}.$$

$r_{\min}$, khoảng cách cực tiểu từ iôn tới nguyên tử có thể nhận được nhờ cho $\frac{dr}{d\theta} = 0$,

$$2m(E-V) - \frac{L^2}{r^2} = 0,$$

hay

$$2mEr^4 - L^2r^2 + 2mC = 0.$$

Do đó

$$r_{\min}^2 = \frac{L^2 \pm \sqrt{L^4 - 16m^2EC}}{4mE} = \frac{L^2}{4mE} = \frac{4mC}{L^2}.$$

hay

$$r_{\min} = \frac{2}{L}\sqrt{mC}.$$

Thế $r_{\min}$ vào biểu thức của θ_1 ta có

$$\theta_1 = \infty \, .$$

Tại sao θ_1 lại không hữu hạn? Nguyên nhân bởi $E = V_0 = \frac{L^4}{16Cm^2}$, khi $\dot{r} \to 0$ hay $r \to r_{\min}$, thành phần vuông góc của vận tốc $r\dot{\theta} = \frac{L}{mr} \to \frac{L}{mr_{\min}}$, là một hằng số, do vậy trong một khoảng thời gian vô hạn quỹ đạo mới tiến tới đường tròn bán kính $r_{\min}$ và không xảy ra va chạm.

Nếu $E > V_0$, $r_{\min}$ có giá trị phức thể hiện rằng không có khoảng cách cực tiểu của iôn và nguyên tử. Một cách vật lý có thể thấy rằng khi iôn tới vị trí mà $V_{\text{eff}} = V_0$, $\dot{r} \neq 0$ và iôn tiếp tục tiến tới nguyên tử. Do L bảo toàn, vận tốc của iôn, $(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2)^{1/2} = \left(\frac{L^2}{m^2r^2} + \dot{r}^2\right)^{1/2}$, sẽ ngày càng lớn khi tiến tới gần nguyên tử (với điều kiện phương trình thế năng, $V(r) = -\frac{C}{r^4}$ vẫn không đổi).

Giả sử iôn tiến tới nguyên tử với thừa số va chạm b và vận tốc ban đầu v_0. Để xảy ra va chạm ta phải có

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 > V_0 = \frac{L^4}{16Cm^2} = \frac{m^2v_0^4b^4}{16C} \, ,$$

hay

$$b^4 < \frac{8C}{mv_0^2} \, .$$

Do đó tiết diện để iôn có thể va chạm với nguyên tử là

$$\sigma = \pi b^2 = \frac{2\pi}{v_0}\sqrt{\frac{2C}{m}} \, .$$

1051

Xét mô hình cổ điển của một nguyên tử triti có điện tích hạt nhân +1 và một electron di chuyển trên một quỹ đạo tròn bán kính r_0, quanh hạt nhân. Hạt nhân đó đột nhiên phát xạ ra một negatron và điện tích chuyển thành +2. (Hạt negatron phát xạ thoát khỏi rất nhanh và không ảnh hưởng tới hệ sau khi đã thoát khỏi hạt nhân). Electron đang di chuyển trên quỹ đạo đột nhiên có trạng thái khác.

(a) Tìm tỉ số năng lượng của electron sau khi và trước khi phát xạ negatron (lấy gốc năng lượng là động năng bằng không tại điểm vô cùng).

(b) Mô tả một cách định tính quỹ đạo mới.

(c) Tìm khoảng cách gần nhất và xa nhất của quỹ đạo mới theo r_0.

(d) Tìm trục lớn và trục nhỏ của quỹ đạo elip mới theo r_0.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Khi negatron rời khỏi hạt nhân một cách tức thời, ta có thể coi quá trình đó không làm ảnh hưởng tới vị trí cũng như động năng của electron trên quỹ đạo.

Từ mối liên hệ về lực

$$\frac{mv_0^2}{r_0} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}, \tag{1}$$

ta có thể tìm thế năng của nó

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0}$$

và cơ năng tổng cộng trước khi phát xạ negatron là

$$E_1 = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = \frac{-e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0}$$

Sau quá trình phát xạ, động năng của electron không đổi $\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0}$ trong khi thế năng thay đổi thành

$$\frac{-2e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = -\frac{-e^2}{2\pi\varepsilon_0 r_0}.$$

Như vậy, sau khi phát xạ, năng lượng tổng cộng của electron là

$$E_2 = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = \frac{-3e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0},$$

từ đó suy ra

$$\frac{E_2}{E_1} = 3.$$

Nói cách khác, năng lượng tổng cộng của electron trên quỹ đạo sau phát xạ sẽ lớn hơn 3 lần so trước khi phát xạ.

(b) Do $E_2 = \frac{-3e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0}$, phương trình điều kiện (1) của chuyển động tròn đều không thỏa mãn, vì vậy quỹ đạo mới sẽ là một elip.

(c) Bảo toàn năng lượng cho ta

$$\frac{-3e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0} = \frac{-e^2}{2\pi\varepsilon_0 r} + \frac{m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)}{2}.$$

Tại vị trí mà electron quỹ đạo có khoảng cách gần nhất và xa nhất so với hạt nhân, ta có $\dot{r} = 0$,

$$\frac{-3e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0} = \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2} - \frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 r} .$$

khi đó với

$$L^2 = m^2 v_0^2 r_0^2 = \frac{me^2 r_0}{4\pi\varepsilon_0}$$

phương trình trở thành

$$3r^2 - 4r_0 r + r_0^2 = 0 ,$$

nghiệm của nó là

$$r = \frac{r_0}{3}, \qquad r = r_0 .$$

Do đó khoảng cách gần nhất và xa nhất của quỹ đạo mới lần lượt là

$$r_{\min} = \frac{1}{3}, \qquad r_{\max} = 1$$

Đơn vị là r_0.

(d) Đặt $2a$ và $2b$ là trục lớn và trục nhỏ của quỹ đạo elip, $2c$ là khoảng cách giữa hai tiêu điểm. Ta có

$$2a = r_{\min} + r_{\max} = \frac{4r_0}{3} ,$$

$$2c = r_{\max} - r_{\min} = \frac{2r_0}{3} ,$$

$$2b = 2\sqrt{a^2 - c^2} = \frac{2\sqrt{3}r_0}{3} .$$

1052

Một vệ tinh được phóng lên từ trái đất theo quỹ đạo xuyên tâm so với mặt trời để thoát khỏi hệ mặt trời với vận tốc vừa đủ. Nó được tính toán sao cho sẽ tới quỹ đạo của sao Mộc tại điểm có khoảng cách b đằng sau sao Mộc. Dưới ảnh hưởng của trường hấp dẫn của sao Mộc, vệ tinh sẽ bị lệch một góc 90°, so với phương ban đầu, có nghĩa là sau đó vệ tinh sẽ có vận tốc có phương tiếp tuyến với quỹ đạo sao Mộc (hình 1.36). Trong quá trình đó, sao Mộc nhận được bao nhiêu năng lượng? Bỏ qua ảnh hưởng của mặt trời tại thời điểm tương tác này và giả thiết thời gian tương tác là nhỏ so với chu kì của sao Mộc.

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

Đặt r là khoảng cách từ sao Mộc tới mặt trời, v_i là vận tốc của vệ tinh so với mặt trời tại thời điểm cắt quỹ đạo sao Mộc một khoảng b sau nó mà chưa bị ảnh hưởng của sao Mộc và m và M_s lần lượt là khối lượng của vệ tinh và mặt trời. Do vệ tinh có năng lượng vừa đủ để thoát khỏi mặt trời nên ta có

$$\frac{mv_i^2}{2} = \frac{GmM_s}{r} ,$$

suy ra

$$\begin{aligned} v_i &= \sqrt{\frac{2GM_s}{r}} = \sqrt{\frac{2 \times 4,01 \times 10^{14} \times 3,33 \times 10^5}{7,78 \times 10^{11}}} \\ &= 1,85 \times 10^4 \text{ m/s} = 18,5 \text{ km/s} , \end{aligned}$$

trong đó sử dụng $M_s = 3,33 \times 10^5 M_e$ (M_e là khối lượng của trái đất), $GM_e = gR^2$ (R là bán kính của trái đất) $= 4,01 \times 10^{14}$ m^3/s^2, $r = 7,78 \times 10^{11}$ m.

Vận tốc v_J của sao Mộc so với mặt trời là

$$\frac{v_J^2}{r} = \frac{GM_s}{r^2} ,$$

nghĩa là

$$v_J = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \frac{v_i}{\sqrt{2}} = 13,1 \text{ km/s}.$$

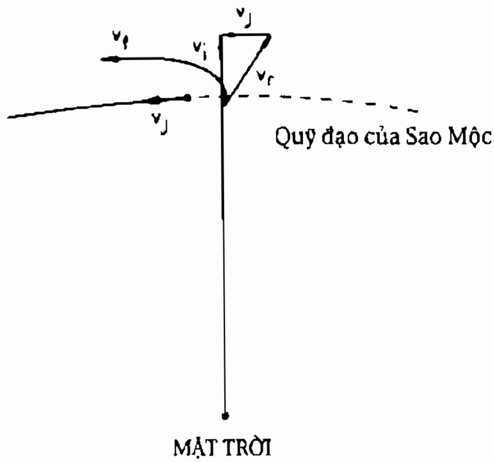
Khi vệ tinh vừa vào trường hấp dẫn của sao Mộc, vận tốc của nó trong hệ tọa độ của sao Mộc là

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_J ,$$

hay

$$v_r = \sqrt{18,5^2 + 13,1^2} = 22,67 \text{ km/s}.$$

Nếu b không đổi khi tương tác, sự bảo toàn momen động lượng của vệ tinh trong hệ quy chiếu sao Mộc cho biết vận tốc của vệ tinh trong hệ quy chiếu sao Mộc khi nó rời trường hấp dẫn của sao Mộc. Sau quá trình tương tác, vệ tinh rời khỏi trường hấp dẫn của sao Mộc với vận tốc (trong hệ quy chiếu mặt



Hình 1.36

trời) có phương tiếp tuyến với quỹ đạo sao Mộc. Do đó vận tốc của vệ tinh so với mặt trời là

$$v_f = v_r + v_J = 22,67 + 13,1 = 35,77 \text{ km/s} .$$

Năng lượng thu được trên một đơn vị khối lượng của vệ tinh trong quá trình tương tác này là

$$\frac{35,77^2 - 18,5^2}{2} = 468,6 \times 10^6 \text{ J/kg} .$$

1053

Bằng những lập luận nào và sử dụng những đại lượng đo được nào người ta có thể xác định được những đại lượng sau với độ chính xác cao?

(a) Khối lượng của trái đất.

(b) Khối lượng của mặt trăng.

(c) Khoảng cách từ trái đất tới mặt trời.

(Columbia)

Lời giải:

(a) Một vật trên trái đất là nặng hay nhẹ là do lực hút hấp dẫn của trái đất quy định. Ta có

$$mg = \frac{Gm_e m}{R^2} ,$$

từ đó khối lượng của trái đất là

$$m_e = \frac{gR^2}{G} ,$$

Trong đó g là gia tốc trọng trường, R là bán kính trái đất, và G là hằng số hấp dẫn, đều là những đại lượng đo được.

(b) Xét hệ hai vật có khối lượng m_1, m_2, cách nhau một khoảng r, và dưới tác dụng của tương tác hấp dẫn. Phương trình lực là

$$\frac{Gm_1m_2}{r^2} = \left(\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\right) r\omega^2 ,$$

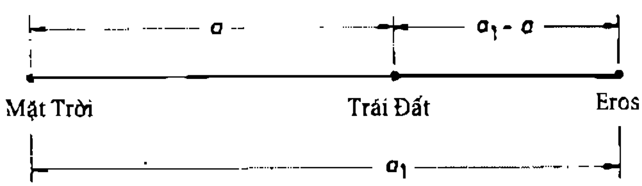
hoặc

$$G(m_1+m_2) = \frac{4\pi^2r^3}{T^2} .$$

Trong đó $m_1m_2/(m_1+m_2)$ khối lượng rút gọn của hệ. Áp dụng cho hệ trái đất - mặt trăng ta có

$$G(m_m+m_e) = \frac{4\pi a^3}{T^2} ,$$

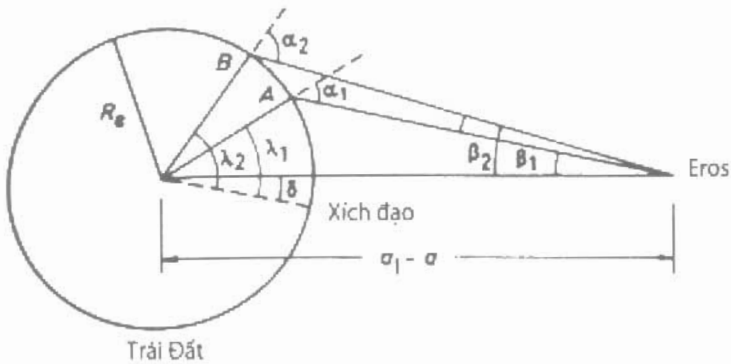
trong đó m_m, a và T tương ứng là khối lượng, bán trục chính và chu kì của mặt trăng. Nếu biết m_e trong câu (a) với a và T xác định bằng quan sát thiên văn, có thể nhận được m_m.



Hình 1.37

(c) Mô tả dưới đây là một phương pháp mang tính lịch sử dùng để xác định khoảng cách giữa mặt trời và trái đất thông qua tiểu hành tinh Eros. Khi mặt trời, trái đất và Eros nằm thẳng hàng như trên hình 1.37, hai người quan sát tại A và B ở vĩ độ λ_1 và λ_2 trên cùng mặt phẳng chứa Eros và mặt trời đo góc α_1 và α_2 như trên hình 1.38. Do

$$\alpha_2 = \lambda_2 - \delta + \beta_2, \qquad \alpha_1 = \lambda_1 - \delta + \beta_1 ,$$



Hình 1.38

dẫn tới

$$\beta_2 - \beta_1 = \alpha_2 - \alpha_1 - \lambda_2 + \lambda_1 ,$$

và

$$\frac{R_e}{\sin \beta_2} = \frac{a_1 - a}{\sin \alpha_2}, \qquad \frac{R_e}{\sin \beta_1} = \frac{a_1 - a}{\sin \alpha_1} ,$$

suy ra

$$\beta_2 - \beta_1 \approx \sin \beta_2 - \sin \beta_1 = \frac{R_e}{a_1 - a}(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) ,$$

ta có

$$a_1 - a \approx \frac{R_e(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)}{\alpha_2 - \alpha_1 - \lambda_2 + \lambda_1} .$$

Áp dụng định luật Kepler III

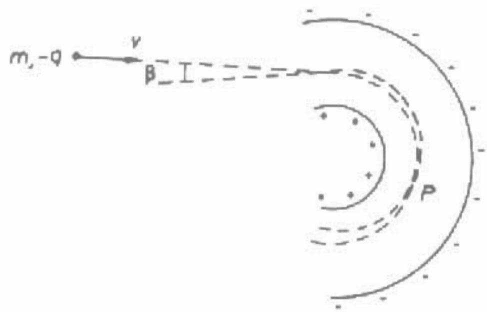
$$\frac{a^3}{a_1^3} = \frac{T^2}{T_1^2} .$$

Trong đó T và T_1 lần lượt là chu kì quay của trái đất và Eros xung quanh mặt trời. Hai phương trình cuối cùng cho phép ta xác định được a.

Tuy nhiên, phương pháp này không chính xác do quỹ đạo chuyển động của Eros và trái đất là elip, không phải là tròn (tâm sai của quỹ đạo Eros = 0.228), và góc giữa hai mặt phẳng quỹ đạo lớn hơn 10°. Hiện tại có rất nhiều cách khác có thể đo được khoảng cách tới mặt trời chính xác hơn nhưng không phải là phương pháp cơ học.

1054

Hai nửa hình trụ đồng trục dài với mặt cắt ngang mô tả trên hình 1.39, mang điện tích với phân bố để tạo ra điện trường xuyên tâm $\mathbf{E} = k\mathbf{e}_r/r$ ở giữa chúng. Một hạt có khối lượng m, vận tốc $\mathbf{v}$ và mang điện tích âm $-q$ đi vào trong vùng giữa hai nửa hình trụ đó từ bên trái và có phương vuông góc với trục của chúng và vuông góc với phương xuyên tâm (như hình vẽ). Do vận tốc không có thành phần hướng theo trục của hai nửa hình trụ, ta chỉ xét chuyển động của hạt trong mặt phẳng hình vẽ.



Hình 1.39

(a) Nếu hạt chuyển động theo một hình tròn khi ở bên trong hai nửa hình trụ, thì bán kính r của chuyển động phải thỏa mãn điều kiện nào?

(b) Tiếp theo, xét quỹ đạo chuyển động của hạt tại điểm bắt đầu khi đi vào vùng không gian giữa hai bản tụ có cùng khoảng cách tới trục của hai nửa trụ và có cùng tốc độ như trên câu (a), nhưng nghiêng một góc β nhỏ so với phương ban đầu. Với một góc nhỏ β bất kì thì điểm P, tại đó hai quỹ đạo lại cắt nhau một lần nữa, không phụ thuộc góc β. Tìm vị trí của điểm P đó. (Chỉ xét trong mặt phẳng hình vẽ).

(c) Lời giải của câu (a) thay đổi thế nào nếu thay điện trường bằng một từ trường đều hướng dọc theo trục của hai nửa hình trụ?

(Columbia)

Lời giải:

(a) Khi hạt chuyển động trên một quỹ đạo tròn, ta có

$$\frac{mv^2}{r} = qE = \frac{qk}{r},$$

hay

$$v^2 = \frac{qk}{m}.$$

Miễn là vận tốc v của hạt thỏa mãn điều kiện trên, nó sẽ chuyển động theo một hình tròn với bán kính bằng với khoảng cách của đường thẳng ban đầu tại điểm bắt đầu vào miền không gian giữa hai nửa hình trụ tới trục của hai nửa hình trụ đó.

(b) Hạt chuyển động vào bên trong hai nửa trụ tại điểm có khoảng cách r_0 và tốc độ v bằng với câu (a), nhưng nghiêng một góc β so với phương ban đầu. Nguyên lý bảo toàn momen động lượng và năng lượng cho ta

$$mr^2\dot{\theta} = mr_0 v\,, \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + qk\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = \frac{1}{2}mv^2\,. \tag{2}$$

Khi quỹ đạo mới lệch với quỹ đạo cũ một lượng nhỏ, ta đặt

$$\begin{aligned} r &= r_0 + \delta r\,, \\ \dot{r} &= \frac{d}{dt}(\delta r)\,, \\ \dot{\theta} &= \omega_0 + \delta\dot{\theta}\,, \end{aligned}$$

trong đó ω_0 là vectơ vận tốc góc của quỹ đạo tròn ban đầu, và δr, $\delta\dot{\theta}$ là các đại lượng nhỏ. Thay vào (1) ta có

$$\dot{\theta} = \frac{r_0 v}{r^2} = \frac{v}{r_0}\frac{1}{\left(1+\frac{\delta r}{r_0}\right)^2}\,,$$

hay

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^2 &= \left(\frac{v}{r_0}\right)^2 \Big/ \left(1+\frac{\delta r}{r_0}\right)^4 \\ &= \left(\frac{v}{r_0}\right)^2 \cdot \left[1 - 4\frac{\delta r}{r_0} + 10\left(\frac{\delta r}{r_0}\right)^2\right]\,. \end{aligned}$$

Một cách gần đúng ta có

$$\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = \ln\left(1+\frac{\delta r}{r_0}\right) = \frac{\delta r}{r_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta r}{r_0}\right)^2\,.$$

Ta cũng có thể viết

$$r^2 = (r_0 + \delta r)^2 = r_0^2\left[1 + 2\frac{\delta r}{r_0} + \left(\frac{\delta r}{r_0}\right)^2\right]\,.$$

Do vậy (2) cũng có thể viết lại, bỏ qua các thành phần vi phân có bậc lớn hơn 2:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{d\delta r}{dt}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\frac{mv^2}{r_0^2}-\frac{qk}{2r_0^2}\right)(\delta r)^2+\left(\frac{qk}{r_0}-\frac{mv^2}{r_0}\right)\delta r=0\ ,$$

hay (chú ý $qk=mv^2$),

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\delta r}{dt}\right)^2+\left(\frac{v}{r_0}\right)^2(\delta r)^2=0\ .$$

Sau đó lấy đạo hàm theo thời gian cả hai vế ta có

$$\frac{d^2\delta r}{dt^2}+2\left(\frac{v}{r_0}\right)^2\delta r=0\ ,$$

với nghiệm là

$$\delta r=A\sin\left(\sqrt{2}\frac{v}{r_0}t+\varphi\right)\ ,$$

Trong đó A và φ là các hằng số tích phân. Với điều kiện ban đầu là

$$r(0)=r_0,\qquad \dot{r}(0)=v\sin\beta\ ,$$

hay

$$\delta r=0,\qquad \frac{d}{dt}\delta r=v\sin\beta\quad \text{tại } t=0\ ,$$

suy ra

$$\varphi=0,\qquad A=\frac{r_0}{\sqrt{2}}\sin\beta\ .$$

Do vậy

$$\delta r=\frac{r_0}{\sqrt{2}}\sin\beta\sin\left(\sqrt{2}\frac{v}{r_0}t\right)\ .$$

Tại điểm cắt của hai quỹ đạo, $\delta r=0$. Điểm cắt thứ hai xảy ra tại thời gian t sau đó được cho bởi

$$\sqrt{2}\frac{v}{r_0}t=\pi,\quad \text{hoặc}\quad t=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{r_0}{v}\ ,$$

và vị trí của P được cho bởi

$$\theta=\dot{\theta}t\approx\omega_0t=\frac{v}{r_0}t=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\ ,$$

vậy vị trí P không phụ thuộc vào β.

(c) Nếu có một từ trường đều tác dụng vào hệ dọc theo trục hai nửa hình trụ thay cho điện trường thì ta có

$$\frac{mv^2}{r} = qvB \ .$$

Bán kính của hình tròn sẽ là

$$r = \frac{mv}{qB} \ .$$

1055

Quỹ đạo chuyển động của một hạt chuyển động dưới tác dụng của một lực xuyên tâm là $r\theta =$ hằng số. Xác định phương trình thế năng theo r.

(*Columbia*)

Lời giải:

Xét lực xuyên tâm $\mathbf{F} = \mathbf{r}F(r)$ tác dụng lên hạt có khối lượng m. Áp dụng định luật hai Newton ta có

$$F = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \ , \qquad (1)$$

$$0 = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \qquad (2)$$

trong hệ tọa độ cực. Phương trình hai suy ra

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \ ,$$

hay

$$r^2\dot{\theta} = \text{ hằng số } = h \ , \text{ chẳng hạn,}$$

hay

$$\dot{\theta} = hu^2$$

bằng cách đặt

$$r = \frac{1}{u} \ .$$

Khi đó do

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \dot{\theta}\frac{dr}{d\theta} = hu^2\frac{dr}{d\theta} = -h\frac{du}{d\theta} ,$$

$$\ddot{r} = \dot{\theta}\frac{d\dot{r}}{d\theta} = hu^2\frac{d}{d\theta}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right) = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} ,$$

$$r\dot{\theta}^2 = \frac{1}{u}h^2u^4 = h^2u^3 ,$$

phương trình (1) trở thành

$$F = -mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) ,$$

Phương trình này thường được gọi là công thức Binet.

Trong bài toán này, coi $r = \frac{1}{u}$ và viết phương trình quỹ đạo dưới dạng

$$u = C\theta ,$$

trong đó C là hằng số. Công thức Binet suy ra

$$F = -mh^2u^3 = \frac{-mh^2}{r^3} .$$

Thế năng theo định nghĩa là

$$V = -\int_\infty^r F(r)dr = \int_\infty^r \frac{mh^2}{r^3}dr = \left[\frac{-mh^2}{2r^2}\right]_\infty^r = \frac{-mh^2}{2r^2} ,$$

với mốc thế năng tại vô cực bằng không.

1056

Tàu Mariner 4 được thiết kế để du hành từ trái đất lên sao Hỏa trên một quỹ đạo hình elip với cận nhật của nó là trái đất và sao Hỏa là điểm viễn nhật. Giả thiết là quỹ đạo của trái đất và sao Hỏa là hai quỹ đạo tròn có bán kính lần lượt là R_E và R_M. Bỏ qua ảnh hưởng với trường hấp dẫn của các hành tinh đến tàu.

(a) Với vận tốc nào so với trái đất tàu Mariner 4 phải rời khỏi trái đất và theo phương nào?

(b) Sau bao lâu tàu tới sao Hỏa?

(c) Khi tới quỹ đạo sao Hỏa tàu có vận tốc là bao nhiêu so với sao Hỏa? (Thời điểm Mariner 4 rời trái đất phải được chọn chính xác nếu nó phải tới sao Hỏa. Giả sử điều này đã được thực hiện.)

(*Columbia*)

Lời giải:

Do tác dụng của lực hấp dẫn lên tàu Mariner 4, là một lực xuyên tâm, là một lực thế nên ta có

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{GmM}{r} + \frac{mh^2}{2r^2},$$

Trong đó m và M tương ứng là khối lượng của Mariner 4 và mặt trời, G là hằng số hấp dẫn, và $h = r^2\dot{\theta}$ là hằng số. Tại điểm cận nhật và viễn nhật của quỹ đạo elip, $\dot{r} = 0$, $r = R_E$ và $r = R_M$. Do đó

$$E = \frac{-GmM}{R_M} + \frac{mh^2}{2R_M^2} = \frac{-GmM}{R_E} + \frac{mh^2}{2R_E^2},$$

suy ra

$$h = \sqrt{\frac{2GMR_MR_E}{R_M + R_E}}.$$

Tại điểm cận nhật, vận tốc so với mặt trời là

$$v = \frac{h}{R_E} = \sqrt{\frac{2GMR_M}{R_E(R_M + R_E)}}.$$

Giả sử Mariner 4 được phóng theo hướng cùng chiều chuyển động của trái đất quanh mặt trời. Vận tốc của Mariner 4 rời trái đất so với trái đất là

$$v_r = v - v_E = \sqrt{\frac{2GMR_M}{R_E(R_M + R_E)}} - \sqrt{\frac{GM}{R_E}},$$

trong đó v_E là vận tốc chuyển động của trái đất. Tương tự ta có vận tốc tại điểm viễn nhật so với sao Hỏa là

$$v_r' = v' - v_M = \sqrt{\frac{2GMR_E}{R_M(R_M + R_E)}} - \sqrt{\frac{GM}{R_E}}.$$

Áp dụng định luật Kepler 3 ta có chu kì T của Mariner 4 quay quanh mặt trời là

$$T^2 = T_E^2\left(\frac{R_E + R_M}{2}\right)^3 R_E^{-3},$$

Trong đó T_E = là chu kì quay của trái đất bằng 1 năm. Do đó thời gian để Mariner tới sao hỏa là (đơn vị là năm)

$$t = \frac{T}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{R_E + R_M}{2R_E}\right)^{\frac{3}{2}} .$$

1057

Hạt pion mang điện tích (π^+ hoặc π^-) có động năng phi tương đối tính là T. Một hạt nhân nặng có điện tích Ze và bán kính hiệu dụng b. Xét một cách cổ điển, hạt pion va chạm với hạt nhân nếu khoảng cách giữa chúng là b hoặc nhỏ hơn b. Bỏ qua ảnh hưởng của lớp sự giật lùi hạt nhân (và các ảnh hưởng của vỏ điện tử), chỉ ra rằng tiết diện va chạm của pion là

$$\sigma = \frac{\pi b^2(T - V)}{T}, \qquad \text{đối với } \pi^+ ,$$

và

$$\sigma = \frac{\pi b^2(T + V)}{T}, \qquad \text{đối với } \pi^- ,$$

trong đó

$$V = \frac{Ze^2}{b} .$$

(*Columbia*)

Lời giải:

Gọi d là thông số va chạm của pion khi tới gần hạt nhân. Pion có vận tốc ban đầu là $\sqrt{\frac{2T}{m}}$ và momen xung lượng là $\sqrt{2Tm}d$, trong đó m là khối lượng của pion. Tại điểm gần nhất của hai hạt, vận tốc theo phương tới hạt nhân của pion bằng không, tức là $v_r = 0$, $v = b\dot{\theta}$. Áp dụng định luật bảo toàn momen xung lượng ta có

$$\sqrt{2Tm}d = mb^2\dot{\theta}$$

hay

$$d = \sqrt{\frac{m}{2T}}b^2\dot{\theta} .$$

Bảo toàn năng lượng cho

$$T = V + \frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}^2 ,$$

Khi đưa thế năng vào phương trình, hay

$$b\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2(T-V)}{m}} \, .$$

Tiết diện va chạm của pion là

$$\sigma = \pi d^2 = \frac{m}{2T}\frac{2(T-V)}{m}\pi b^2 = \pi b^2\left(\frac{T-V}{T}\right) \, .$$

Thay $V = \frac{Ze^2}{b}$, đối với π^+ ta có

$$\sigma = \pi b^2\left(\frac{T-V}{T}\right) \, ,$$

và đối với π^-, $V = -\frac{Ze^2}{b}$ ta có

$$\sigma = \pi b^2\left(\frac{T+V}{T}\right) \, .$$

1058

Ước lượng độ lớn của một tiểu hành tinh mà bạn có thể thoát ra được nhờ một cú nhảy.

(Columbia)

Lời giải:

Nói chung, trước khi nhảy, người ta luôn khuỵu khớp gối để hạ thấp trọng tâm khoản 50 cm và sau đó mới nhảy. Độ cao thông thường của một người có thể nhảy là khoảng 60 cm cao hơn chiều cao của anh ta. Trong quá trình này, công sinh ra là $(0,5+0,6)mg$, trong đó m là khối lượng của anh ta và g là gia tốc trọng trường.

Có thể coi khi nhảy trên một tiểu hành tinh khối lượng M và bán kính R ta phải tốn cùng năng lượng như trên trái đất. Do đó để thoát khỏi tiểu hành tinh bằng một cú nhảy ta cần có

$$1,1mg = \frac{GMm}{R} \,.$$

Nếu giả thiết mật độ của tiểu hành tinh và trái đất là như nhau ta có

$$\frac{M}{M_E} = \frac{R^3}{R_E^3} \,,$$

Trong đó M_E và R_E lần lượt là khối lượng và bán kính của trái đất. Do $g = GM_E/R_E^2$, ta có

$$R = \frac{GM}{1,1g} = \frac{R^3}{1,1R_E} \,,$$

hay

$$R = \sqrt{1,1R_E} = \sqrt{1,1 \times 6400 \times 10^3} = 2,7 \times 10^3 \text{ m} \,.$$

1059

Bạn biết rằng gia tốc gây ra bởi trọng lực trên bề mặt trái đất bằng 9,8 m/s^2, và chiều dài vòng tròn lớn nhất quanh trái đất là 4×10^7 m. Bạn được biết rằng tỉ lệ bán kính và khối lượng của trái đất so với mặt trăng lần lượt là

$$\frac{D_m}{D_e} = 0,27 \qquad \text{và} \qquad \frac{M_m}{M_e} = 0,0123$$

(a) Tính vận tốc tối thiểu để thoát khỏi trường hấp dẫn của mặt trăng từ bề mặt của nó.

(b) So sánh tốc độ này với tốc độ chuyển động nhiệt của các phân tử oxy tại nhiệt độ của mặt trăng có thể đạt 100°C.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Gọi vận tốc để thoát khỏi trường hấp dẫn của mặt trăng là $v_{\min}$, ta có

$$\frac{mv_{\min}^2}{2} = \frac{GM_m m}{r_m} \,,$$

suy ra

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{2GM_m}{r_m}} = \sqrt{\left(\frac{0,0123}{0,27}\right)\left(\frac{GM_e}{r_e^2}\right)2r_e}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{0,0123}{0,27}\right)\cdot g\cdot D_e} = 2,38\times 10^3\ \mathrm{m/s}$$

có sử dụng $g = GM_e/r_e^2$, $D_m/D_e = 0,27$ và $M_m/M_e = 0,0123$.

(b) Động năng trung bình của chuyển động nhiệt của phân tử oxy tại nhiệt độ 100°C là $3kT/2$:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT\,.$$

Do đó

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3\times 1,38\times 10^{-23}\times 373}{32\times 1,67\times 10^{-27}}} = 538\ \mathrm{m/s}\,.$$

v, vận tốc chuyển động nhiệt của oxy trên mặt trăng tại nhiệt độ cao nhất của nó nhỏ hơn vận tốc $v_{\min}$, vận tốc để thoát khỏi mặt trăng.

1060

Một vật có khối lượng là một đơn vị khối lượng chuyển động trong một trường thế có thế năng $U(r)$. Quỹ đạo của nó là $r = ae^{-b\theta}$, trong đó θ là góc phương vị đo trong mặt phẳng quỹ đạo. Tìm $U(r)$ chính xác tới một hằng số nhân.

(*MIT*)

Lời giải:

Đặt

$$u = \frac{1}{r} = \frac{e^{b\theta}}{a}\,.$$

Do đó

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{b^2e^{b\theta}}{a} = b^2u\,,$$

và công thức Binet (Bài **1055**)

$$F = -mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)$$

đối với $m = 1$ cho

$$F = h^2(b^2+1)u^3 = \frac{h^2(b^2+1)}{r^3} = -\frac{dU(r)}{dr}\,.$$

Lấy tích phân và lấy gốc thế năng $U(r)$ tại vô cực $r \to \infty$, ta có

$$U(r) = \frac{-h^2}{2}\cdot\frac{b^2+1}{r^2}\,.$$

trong đó $h = r^2\dot{\theta}$ là momen động lượng được bảo toàn của vật khi chuyển động quanh tâm của lực và được xác định bởi các điều kiện ban đầu.

1061

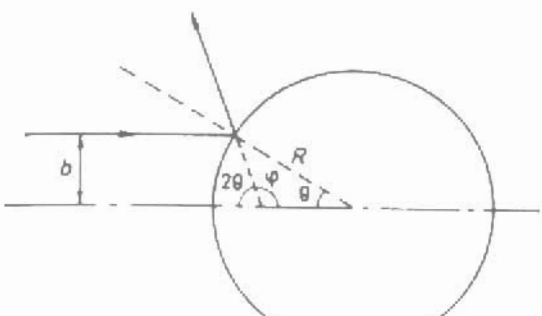
Tán xạ trên hình cầu cứng:

Chỉ ra rằng tiết diện cổ điển đối với tán xạ đàn hồi của những chất điểm từ một hình cầu nặng vô cùng bán kính R là đẳng hướng.

(*MIT*)

Lời giải:

Với tán xạ đàn hồi, góc tới bằng góc phản xạ. Khi đó góc tán xạ $\varphi = 2\theta$ (hình 1.40).



Hình 1.40

Nếu b là tham số va chạm, ta có

$$b = R\sin\theta\,.$$

và

$$db = R\cos\theta d\theta \, .$$

Đạo hàm của tiết diện tán xạ theo góc đặc $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ là

$$2\pi b db = 2\pi R^2 \sin\theta\cos\theta d\theta = \frac{d\sigma}{d\Omega} 2\pi\sin\varphi d\varphi \, ,$$

hay

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2}\frac{R^2\sin 2\theta d\theta}{\sin\varphi d\varphi}$$

$$= \frac{R^2}{4}\frac{\sin\varphi d\varphi}{\sin\varphi d\varphi} = \frac{R^2}{4} \, .$$

Như vậy tiết diện vi sai cổ điển độc lập với góc tán xạ. Nói cách khác, tán xạ là đẳng hướng.

1062

Tìm phân bố góc và tiết diện tán xạ toàn phần của những viên bi nhỏ khối lượng m, bán kính r trên một quả bóng bi-a khối lượng M, bán kính R ($m \ll M$). Coi tán xạ là đàn hồi và không có lực ma sát.

(*Columbia*)

Lời giải:

Do $m \ll M$, quả bóng bi-a nặng sẽ không bị dịch chuyển trong quá trình tán xạ. Do tán xạ là dàn hồi (hình 1.41), góc tán xạ Θ liên hệ với góc tới qua biểu thức

$$\Theta = \pi - 2\theta \, ,$$

trong đó θ được cho bởi

$$(R + r)\sin\theta = b \, .$$

Tiết diện tán xạ vi sai là

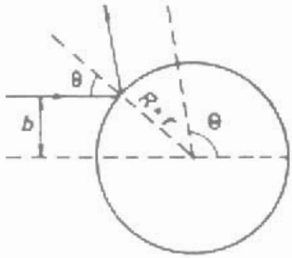
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|2\pi b db|}{d\Omega} = \frac{2\pi|\sin\theta\cos\theta\cdot(R+r)^2 d\theta|}{2\pi d\cos\Theta}$$

$$= \frac{|\frac{1}{4}(R+r)^2\sin\Theta d\Theta|}{d\cos\Theta} = \frac{\frac{1}{4}(R+r)^2 d\cos\Theta}{d\cos\Theta}$$

$$= \frac{1}{4}(R+r)^2 \, .$$

Do $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ là đẳng hướng, tiết diện toàn phần là

$$\sigma_t = 4\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} = \pi(R+r)^2 \ .$$



Hình 1.41

1063

Một tàu vũ trụ đang bay trên một quỹ đạo tròn bán kính r_0 quanh vì sao có khối lượng M. Động cơ phản lực của tàu phát động để thay đổi vận tốc của nó (ngay lập tức) một lượng $\Delta\mathbf{v}$. Góc phụt của động cơ phản lực θ là góc giữa vectơ vận tốc v và vectơ từ đuôi tới mũi của tàu vũ trụ (xem hình 1.42). Để tiết kiệm nhiên liệu trong N lần phụt, động cơ phải tối thiểu hóa $\Delta V = \sum_{i=1}^{N} |\Delta \mathbf{v}_i|$. ΔV được gọi là xung lực riêng.

Hình 1.42

(a) Giả sử ta muốn dùng động cơ của tên lửa để thoát khỏi ngôi sao. Xung lực riêng tối thiểu của tàu phải bằng bao nhiêu nếu động cơ phụt một lần duy nhất trong khoảng thời gian rất ngắn? Và phụt theo hướng nào?

(b) Giả sử ta muốn thăm một hành tinh có quỹ đạo là hình tròn bán kính $r_1 > r_0$. Xung lực riêng tối thiểu của tàu là bao nhiêu để tới được quỹ đạo của hành tinh trên, và phải phụt theo phương nào nếu một lần nữa động cơ chỉ phụt một lần duy nhất trong thời gian rất ngắn?

Giả sử ta muốn sử dụng động cơ của tàu để làm cho nó đâm vào vì sao (giả thiết bán kính của vì sao có thể bỏ qua). Tính xung lực riêng tối thiểu của tàu trong cả hai trường hợp sau:

(c) Phụt một lần trong một thời gian ngắn với góc $\theta = 180^\circ$.

(d) Phụt một lần trong một thời gian ngắn với góc $\theta = 0^\circ$ và rồi phụt lần thứ hai với góc $\theta = 180^\circ$ sau đó. Thời gian lần phụt thứ hai và cường độ của mỗi lần phụt được chọn để tối thiểu hóa xung lực riêng tổng cộng.

(*MIT*)

Lời giải:

(a) Gọi v_0 là vận tốc của tàu vũ trụ trên quỹ đạo tròn bán kính r_0, và v_{0e} là vận tốc thoát khỏi quỹ đạo đó. Do đó

$$\frac{mv_0^2}{r_0} = \frac{GMm}{r_0^2}, \qquad \frac{mv_{0e}^2}{2} = \frac{GMm}{r_0},$$

hay

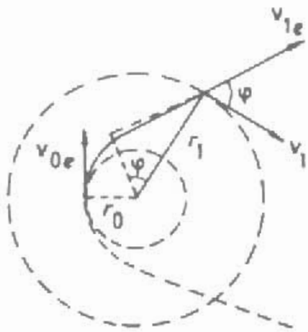
$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}, \qquad v_{0e} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}.$$

Do

$$v_{0e} = v_0 + |\Delta \mathbf{v}| \cos\theta = v_0 + \Delta V \cos\theta ,$$

xung lực riêng cần thiết để thoát khỏi vì sao là thấp nhất khi $\theta = 0$, có nghĩa là vận tốc ban đầu của con tàu và xung lực cùng chiều, và được cho bởi

$$\Delta V = v_{0e} - v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}(\sqrt{2} - 1) .$$



Hình 1.43

(b) Sau lần phụt đầu tiên, tàu vũ trụ thoát ra khỏi quỹ đạo tròn xung quanh vì sao và di chuyển trên một quỹ đạo parabon. Khi tàu tiếp cận quỹ đạo của hành tinh có bán kính $r = r_1$ động cơ tàu một lần nữa hoạt động (xem hình 1.43). Để tàu di chuyển trên quỹ đạo tròn bán kính r_1, vận tốc của nó là

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}} .$$

Đặt v_{1e} là vận tốc của tàu khi nó đến quỹ đạo của hành tinh và trước khi động cơ hoạt động. Bảo toàn momen động lượng đòi hỏi

$$v_{0e} r_0 = v_{1e} r_1 \cos\varphi$$

hay

$$v_{1e} \cos\varphi = \frac{r_0 v_{0e}}{r_1} .$$

Bảo toàn năng lượng suy ra

$$\frac{1}{2} m v_{1e}^2 = \frac{GMm}{r_1} ,$$

hay

$$v_{1e} = \sqrt{\frac{2GM}{r_1}} .$$

Khi đó xung lực riêng tối thiểu cần thiết là

$$\Delta V = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{1e}|$$

hay

$$\begin{aligned}(\Delta V)^2 &= v_{1e}^2 + v_1^2 - 2 v_{1e} v_1 \cos\varphi \\ &= \frac{2GM}{r_1} + \frac{GM}{r_1} - 2\frac{r_0}{r_1} v_{0e} v_1 \\ &= \frac{3GM}{r_1} - 2\frac{r_0}{r_1}\sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \cdot \sqrt{\frac{GM}{r_1}} \\ &= \frac{GM}{r_1}\left(3 - 2\sqrt{\frac{2r_0}{r_1}}\right) .\end{aligned}$$

Nên

$$\Delta V = \sqrt{\frac{GM}{r_1}\left(3 - 2\sqrt{\frac{2r_0}{r_1}}\right)} .$$

(c) Với một lần phụt nhanh với góc $\theta = 180°$, xung lực riêng nhỏ nhất là xung lực làm cho vận tốc của tàu $v' = v_0 - \Delta V = 0$, do đó nó sẽ rơi xuống vì sao. Do vậy, xung lực tối thiểu cần thiết là

$$\Delta V = v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}} .$$

(d) Nếu sau lần phụt đầu tiên với góc $\theta = 0°$, tàu đạt được vận tốc thoát $v_{0e} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$, hay $\Delta V_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}(\sqrt{2} - 1)$, nó có thể thoát khỏi quỹ đạo. Vận tốc v của tàu được cho bởi

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \text{ hằng số} .$$

Khi $r \to \infty$, $v \to 0$. Lần phụt thứ hai có thể thực hiện khi $v \approx 0$ theo góc $\theta = 180°$ để quay đầu về phía vì sao với xung lực riêng $\Delta V_2 \approx 0$; Xung lực tổng cộng là

$$\Delta V \approx \Delta V_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}(\sqrt{2} - 1) .$$

Xung lực tổng cộng tối thiểu nhận được như sau

Giả sử lần phụt đầu tiên với góc $\theta = 0°$ là

$$\Delta V_1 \le v_{0e} - v_0 ,$$

Sau đó tàu vũ trụ di chuyển theo quỹ đạo elip. Vận tốc của nó sẽ cực tiểu tại điểm viễn nhật. Tại đó động cơ phụt lần thứ hai với góc bằng $\theta = 180°$ để tối thiểu hóa ΔV_2. Giả sử rằng tại điểm viễn nhật, tàu cách vì sao khoảng r_2 và có vận tốc v_2, do đó ΔV_1 nhận được bằng phương trình năng lượng

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r_2} = \frac{1}{2}m(v_0 + \Delta V_1)^2 - \frac{GMm}{r_0}$$

Và phương trình momen động lượng

$$mr_2v_2 = mr_0(v_0 + \Delta V_1) .$$

Rút gọn r_2 ở phương trình trên ta có

$$v_2^2 - \frac{2GMv_2}{r_0(v_0 + \Delta V_1)} + \frac{2GM}{r_0} - (v_0 + \Delta V_1)^2 = 0 ,$$

suy ra

$$v_2 = \frac{GM}{r_0(v_0 + \Delta V_1)} \pm \left[\frac{GM}{r_0(v_0 + \Delta V_1)} - (v_0 + \Delta V_1)\right] ,$$

trong đó dấu bên dưới tương ứng với vận tốc tại điểm cận nhật và dấu bên trên ứng với vận tốc ở điểm viễn nhật. Tại điểm viễn nhật

$$v_2 = \frac{2GM}{r_0(v_0 + \Delta V_1)} - (v_0 + \Delta V_1) .$$

Lần phụt thứ hai $\Delta \mathbf{v}_2$ phải bằng $\mathbf{v}_2$ về độ lớn nhưng ngược chiều để dừng tàu và tàu sẽ rơi xuống vì sao, nghĩa là $\mathbf{v}_2 + \Delta \mathbf{v}_2 = 0$. Do đó

$$\Delta V_2 = |\Delta \mathbf{v}_2| = v_2 = \frac{2GM}{r_0(v_0 + \Delta V_1)} - v_0 - \Delta V_1,$$

hay

$$\Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{2GM}{r_0(v_0 + \Delta V_1)} - v_0 .$$

Ta thấy rằng giá trị của ΔV_1 càng lớn thì xung lực riêng $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$ càng nhỏ, với điều kiện

$$\Delta V_1 \leq v_{1e} - v_0 .$$

Do đó để cực tiểu hoá xung lượng, lần phụt đầu tiên sẽ thực hiện một xung lực $\Delta V_1 = \sqrt{GM/r_0}(\sqrt{2} - 1)$ và sau thời gian dài vô cùng, động cơ phụt lần thứ hai với xung lực vô cùng nhỏ là ΔV_2.

1064

"Các viên đạn giữa các vì sao" được coi như là những đám mây khí đặc chuyển động như các hạt xung kích đi qua đám mây khí mật độ thấp hơn. Xét một đám mây hình cầu đồng nhất bán kính R, khối lượng M, và "viên đạn" bán kính $\ll R$ và khối lượng $m \ll M$. Bỏ qua các tương tác phi hấp dẫn.

(a) Hãy viết biểu thức lực $\mathbf{F}(r)$, $0 < r < \infty$, chịu bởi viên đạn theo khoảng cách r từ tâm đám mây, và với thế năng $V(r)$, $0 < r < \infty$. Vẽ $V(r)$.

(b) Viên đạn có momen xung lượng $L = m(GMR/32)^{1/2}$ quanh $r = 0$ và tổng năng lượng là $E = -5GMm/4R$. Tìm (các) điểm ngoặt của quỹ đạo. Viên đạn ở trong hay ngoài, hoặc lúc trong lúc ngoài đám mây?

(c) Với L và E như trong phần (b), viết biểu thức đối với góc quỹ đạo vi sai $d\theta$ theo dr, r và R.

(d) Viết phương trình quỹ đạo $r(\theta, R)$ bằng cách tích phân lời giải phần (c), có thể sử dụng

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{-2cx - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}, \qquad c < 0 .$$

Tìm các điểm ngoặt r_1 và phác hoạ quỹ đạo.

(*MIT*)

Lời giải:

(a) Lực $\mathbf{F}$ tác dụng lên viên đạn là

$$\mathbf{F} = \begin{cases} -\dfrac{GMm}{R^3}\mathbf{r} & (0 < r \le R)\,, \\ -\dfrac{GMm}{r^3}\mathbf{r} & (R \le r < \infty)\,. \end{cases}$$

Từ định nghĩa thế năng $V(r)$, $\mathbf{F} = -\nabla V(r)$, ta có

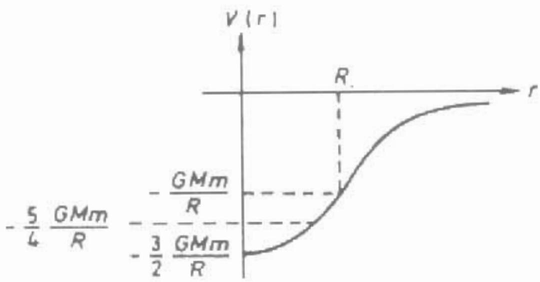
$$V(r) = -\int_\infty^R \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_R^r \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \qquad (0 < r \le R)\,,$$

$$V(r) = -\int_\infty^r \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \qquad (R \le r < \infty)\,.$$

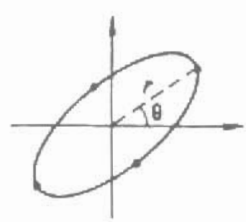
Khi thay thế vào biểu thức gần đúng với $\mathbf{F}$ và tích phân, ta tìm được

$$V(r) = \begin{cases} -\dfrac{GMm}{2R^3}(3R^2 - r^2) & (0 < r \le R)\,, \\ -\dfrac{GMm}{r} & (R \le r < \infty)\,. \end{cases}$$

Hình vẽ phác $V(r)$ như ở hình 1.44.



Hình 1.44



Hình 1.45

(b) Như trong hình 1.44, với tổng năng lượng $E = -5GMm/4R$, viên đạn chỉ có thể chuyển động bên trong đám mây khí trong vùng được bao bởi các điểm ngoặt. Tại các điểm ngoặt, $\dot{r} = 0$, $v = v_\theta$. Do đó

$$rmv_\theta = m\sqrt{\frac{GMR}{32}}\,,$$

$$\frac{GMm}{2R^3}(r^2 - 3R^2) + \frac{mv_\theta^2}{2} = \frac{-5GMm}{4R}\,.$$

Khử v_θ, , ta có, với khoảng cách ngoặt r

$$32\left(\frac{r}{R}\right)^4 - 16\left(\frac{r}{R}\right)^2 + 1 = 0\,,$$

chúng có nghiệm

$$\left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{8}\,,$$

suy ra

$$r_\pm = \sqrt{\frac{2 \pm \sqrt{2}}{8}}R\,.$$

(c) Bảo toàn năng lượng và momen xung lượng cho ta

$$E = V(r) + \frac{m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)}{2}\,,$$
$$L = mr^2\dot{\theta}\,.$$

Thay vào biểu thức trên

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}\,,$$
$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{dr}{d\theta} = \frac{L}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}\,,$$

ta có

$$-\frac{5}{4}\frac{GMm}{R} = \frac{GMm}{2R^3}(r^2 - 3R^2) + \frac{1}{2}m\left[\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right]\frac{GMR}{32}\,,$$

hay

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = r^2\left[-32\left(\frac{r}{R}\right)^4 + 16\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 1\right]\,,$$

nghĩa là

$$d\theta = \left[-32\left(\frac{r}{R}\right)^4 + 16\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 1\right]^{-1/2}\frac{dr}{r}\,.$$

(d) Để lấy tích phân biểu thức cuối cùng, đặt $x = (r/R)^{-2}$ và viết lại phương trình như sau

$$-2d\theta = \frac{dx}{\sqrt{-32 + 16x - x^2}} .$$

Tích phân, ta nhận được

$$\alpha - 2\theta = \arcsin \frac{2x - 16}{8\sqrt{2}}$$

hay

$$x = 8 + 4\sqrt{2}\sin(\alpha - 2\theta) = 8 + 4\sqrt{2}\cos(2\theta + \beta) ,$$

nghĩa là

$$\left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{1}{4[2 + \sqrt{2}\cos(2\theta + \beta)]} ,$$

ở đây β là hằng số tích phân. Bằng việc chọn hệ tọa độ thích hợp, ta có thể cho $\beta = 0$. Tại điểm quay, r hoặc cực đại hoặc cực tiểu, nghĩa là $\cos\theta = \pm 1$. Do đó các điểm quay cho bởi

$$\frac{r_\pm}{R} = \pm\sqrt{\frac{1}{4(2 \pm \sqrt{2})}} = \pm\sqrt{\frac{2 \mp \sqrt{2}}{8}} .$$

Như vậy có tất cả 4 điểm quay như chỉ ra ở hình 1.45.

1065

Một chùm hạt nhỏ có khối lượng m chuyển động song song bay về phía mặt trăng với vận tốc ban đầu V_0 .

(a) Va chạm giữa chùm hạt với bề mặt mặt trăng là va chạm gì? Biểu diễn sự va chạm σ giữa bán kính R, vận tốc khi rời khỏi bề mặt mặt trăng V_{esc} và V_0. Bỏ qua sự xuất hiện của trái đất và mặt trời.

(b) Nếu bạn không thể suy ra từ công thức, một phần lý luận sẽ đưa ra một công thức tốt dựa vào sự phân tích kích thước hạt và căn cứ vào hai điều kiện giới hạn V_0 tiến đến 0 và V_0 tiến đến vô cùng.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Hằng số va chạm lớn nhất là b_{max}. Các hạt sẽ va chạm với mặt trăng nếu khoảng cách giữa chúng xấp xỉ b_{max} hoặc nhỏ hơn. Sự biến thiên năng lượng và momen xung lượng được tính

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{mV^2}{2} - \frac{GMm}{R} \,. \tag{1}$$

$$mV_0 b_{\max} = mVR \,. \tag{2}$$

Từ phương trình (1) chúng ta có thể tính được

$$V^2 = V_0^2 + \frac{2GM}{R} = V_0^2 + V_{\rm esc}^2 \,.$$

Từ phương trình (2) suy ra

$$b_{\max}^2 = \frac{V^2R^2}{V_0^2} = R^2 + \frac{V_{\rm esc}^2 R^2}{V_0^2} \,.$$

Ở đây diện tích bề mặt va chạm của các hạt với mặt trăng là

$$\sigma = \pi b_{\max}^2 = \pi R^2 \left(1 + \frac{V_{\rm esc}^2}{V_0^2}\right) \,.$$

(b) Đối với hai trường hợp giới hạn, chúng ta có

$$\sigma \to \infty \qquad \text{đối với } V_0 \to 0 \,,$$
$$\sigma \to \pi R^2 \qquad \text{đối với } V_0 \to \infty \,.$$

Các kết quả này có thể hiểu như sau. Với V_0 rất nhỏ, tất cả các hạt sẽ va chạm với mặt trăng, chúng ta có thể bỏ qua tác động của trái đất và mặt trời. Đối với vận tốc lớn, những hạt tới mặt trăng sẽ chuyển động đến với sự bỏ qua thế năng do sức hút của mặt trăng không đáng kể so với động năng tác dụng.

Để áp dụng phương pháp phân tích kích thước, chúng ta đưa ra diện tích bề mặt sẽ là bề mặt hình học của mặt trăng với thừa số kích thước bao gồm V_0 và V_{esc}

$$\sigma = \pi R^2 \left[1 + b\left(\frac{V_{\rm esc}}{V_0}\right)^a\right] \,,$$

ở đây a và b là hằng số chưa biết mà không thể xác định bằng phương pháp này. Hệ số a phải dương thỏa mãn hai điều kiện giới hạn.

1066

Giả sử mặt trời chuyển động quanh bởi một đám mây bụi mở rộng ra xa nhỏ hơn bán kính của trái đất. Mặt trời cho biểu thức thế năng quen thuộc $V = -GMm/r$, và của đám bụi là $V = kr^2/2$. Trái đất chuyển động tròn theo elip với bán kính trung bình r_0. Tác dụng của đám bụi có thể là nguyên nhân chuyển động gần với elip. Tìm biểu thức gần đúng (gần đúng bậc một đối với k) tốc độ tiến động và chiều của nó so với chiều quay.

Gợi ý: Xét dao động nhỏ xung quanh r_0.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Trong phương trình chuyển động theo tia của vật dưới tác dụng của các lực xuyên tâm thế năng hiệu dụng là

$$U(r) = \frac{-GMm}{r} + \frac{kr^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} \,.$$

Trái đất sẽ chuyển động với quỹ đạo kín bán kính r_0 nếu $U(r_0)$ là giá trị vô cùng, nghĩa là

$$\left(\frac{dU(r)}{dr}\right)_{r=r_0} = 0 \,, \tag{1}$$

hoặc

$$\frac{GMm}{r_0^2} + kr_0 - \frac{L^2}{mr_0^3} = 0 \,,$$

từ đó có thể xác định được r_0.

Khai triển $U(r)$ theo chuỗi Taylor

$$\begin{aligned} U(r) &= U(r_0) + \left(\frac{dU}{dr}\right)_{r=r_0} (r - r_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2U}{dr^2}\right)_{r=r_0} (r - r_0)^2 + \cdots \\ &\approx U(r_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2U}{dr^2}\right)_{r=r_0} (r - r_0)^2 \,, \end{aligned}$$

vì $(\frac{dU}{dr})_{r=r_0} = 0$ chỉ còn lại những số hạng chủ yếu. Phương trình năng lượng có thể viết được với $r - r_0 = x$ như

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2U}{dr^2}\right)_{r=r_0} x^2 = \text{ hằng số} \,.$$

Lấy vi phân hai vế của phương trình trên theo thời gian ta được

$$m\ddot{x} + \left(\frac{d^2U}{dr^2}\right)_{r=r_0} x = 0 \,.$$

Ở đây dao động nhỏ quanh r_0 với tần số góc

$$\omega_r = \sqrt{\frac{U''(r_0)}{m}} ,$$

trong đó

$$U''(r_0) = \frac{-2GMm}{r_0^3} + k + \frac{3L^2}{mr_0^4} = 3k + \frac{L^2}{mr_0^4} .$$

Sử dụng phương trình (1). Đối với chuyển động gần tròn $L = mr_0^2\omega_0$, và chúng ta tìm được

$$U''(r) = 3k + m\omega_0^2 ,$$

ω_0 là vận tốc góc của chuyển động quanh mặt trời. Tính gần đúng bậc một theo k, chúng ta có

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{3k}{m}} \approx \omega_0 + \frac{3k}{2m\omega_0} ,$$

và tốc độ tiến động là

$$\omega_p = \omega_r - \omega_0 = \frac{3k}{2m\omega_0} .$$

Khi $\omega_r > \omega_0$, nghĩa là thời gian chu kì dao động theo tia nhỏ hơn so với chu kì quay, hướng tiến động là ngược với hướng quay.

1067

Một hạt có khối lượng m nảy lên với thế năng bậc nhất $U = kr$.

(a) Xác định năng lượng và mômen xung lượng đối với quỹ đạo tròn bán kính là r?

(b) Xác định tần số của chuyển động này?

(c) Nếu hạt lệch khỏi chuyển động tròn ở mức độ không đáng kể, tần số của dao động nhỏ này là bao nhiêu?

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Lực tác dụng lên hạt này là

$$\mathbf{F} = -\frac{dU}{dr}\hat{\mathbf{r}} = -k\hat{\mathbf{r}} .$$

(a) Nếu hạt chuyển động tròn với bán kính r, chúng ta có

$$m\omega^2 r = k\ ,$$

nghĩa là

$$\omega^2 = \frac{k}{mr}\ .$$

Năng lượng của hạt được xác định là

$$E = kr + \frac{mv^2}{2} = kr + \frac{m\omega^2 r^2}{2} = \frac{3kr}{2}$$

và momen xung lượng quanh gốc tọa độ của hạt là

$$L = m\omega r^2 = mr^2\sqrt{\frac{k}{mr}} = \sqrt{mkr^3}\ .$$

(b) Tần số góc của chuyển động tròn này là $\omega = \sqrt{\frac{k}{mr}}$.

(c) Thế hiệu dụng là

$$U_{\text{eff}} = kr + \frac{L^2}{2mr^2}\ .$$

Bán kính r_0 của chuyển động tròn ổn định được xác định bởi

$$\left(\frac{dU_{\text{eff}}}{dr}\right)_{r=r_0} = k - \frac{L^2}{mr_0^3} = 0\ ,$$

nghĩa là

$$r_0 = \left(\frac{L^2}{mk}\right)^{1/3}\ .$$

Vì

$$\left(\frac{d^2U_{\text{eff}}}{dr^2}\right)_{r=r_0} = \frac{3L^2}{mr^4}\bigg|_{r=r_0} = \frac{3L^2}{m}\left(\frac{mk}{L^2}\right)^{4/3} = 3k\left(\frac{mk}{L^2}\right)^{1/3}\ ,$$

tần số góc của dao động theo tia nhỏ quanh r_0, nếu nó hơi lệch so với chuyển động tròn ổn định, là (bài tập **1066**)

$$\begin{aligned}\omega_r &= \sqrt{\frac{1}{m}\left(\frac{d^2U_{\text{eff}}}{dr^2}\right)_{r=r_0}} = \sqrt{\frac{3k}{m}\left(\frac{mk}{L^2}\right)^{1/3}} \\ &= \sqrt{\frac{3k}{mr_0}} = \sqrt{3}\omega_0\ ,\end{aligned}$$

ở đây ω_0 là tần số góc của chuyển động tròn ổn định.

1068

Một hành tinh chuyển động tròn xung quanh một ngôi sao có khối lượng M. Ngôi sao bị nổ lớp vỏ, bắn ra bên ngoài với vận tốc lớn hơn nhiều so với vận tốc chuyển động của hành tinh, dẫn đến sự giảm khối lượng ngay tức khắc. Phần còn lại của ngôi sao có khối lượng M' lớn hơn nhiều so với khối lượng của hành tinh. Xác định tâm sai của quỹ đạo của hành tinh ngay sau khi nổ. (Bỏ qua lực thủy động lực tác dụng lên hành tinh bởi sự mở rộng ra của lớp vỏ. Tâm sai được xác định liên quan đến năng lượng E và momen xung lượng L bởi

$$e^2 = 1 + \frac{2EL^2}{M_p K^2},$$

ở đây M_p là khối lượng của hành tinh và độ lớn của lực hấp dẫn giữa ngôi sao và hành tinh là K/r_0^2.)

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Trước khi vụ nổ xảy ra, hành tinh chuyển động tròn với bán kính R quanh ngôi sao. Vì tâm sai e của quỹ đạo bằng không nên từ phương trình xác định e ta có

$$E = \frac{-M_p K^2}{2L^2}.$$

Vì

$$\frac{M_p v^2}{R} = \frac{K}{R^2}, \qquad L = M_p R v.$$

chúng ta có

$$R = \frac{L^2}{M_p K}.$$

Gọi L' và E' lần lượt là momen xung lượng và năng lượng toàn phần của hành tinh sau khi nổ. Khi đó

$$L' = L,$$

$$E' = E + \frac{G(M - M')M_p}{R}.$$

Với $K = GMM_p$ và $K' = GM'M_p$ chúng ta có đối với tâm sai e của quỹ đạo sau vụ nổ

$$
\begin{aligned}
e^2 &= 1 + \frac{2E'L'^2}{M_pK'^2} \\
&= 1 + \frac{2\left[-\frac{M_pK^2}{2L^2} + \frac{M_pK}{L^2}G(M-M')M_p\right]L^2}{M_pK'^2} \\
&= 1 + \left(\frac{M}{M'}\right)^2\left(1 - \frac{2M'}{M}\right),
\end{aligned}
$$

từ đó ta có

$$
e = \sqrt{1 + \left(\frac{M}{M'}\right)^2\left(1 - \frac{2M'}{M}\right)}\,.
$$

1069

Một vệ tinh nhân tạo chuyển động quanh trái đất với quỹ đạo elip dưới tác dụng bởi hai thành phần nhiễu loạn:

(a) Một thành phần không xuyên tâm của trường hấp dẫn trái đất do độ dẹt cực của trái đất.

(b) Lực cản không khí mà do sự giảm áp suất nhanh theo độ cao nên tập trung gần điểm cận địa.

Đưa ra lý luận định tính để chỉ ra những nhiễu loạn này sẽ thay đổi hình dạng và hướng của quỹ đạo chuyển động Kepler.

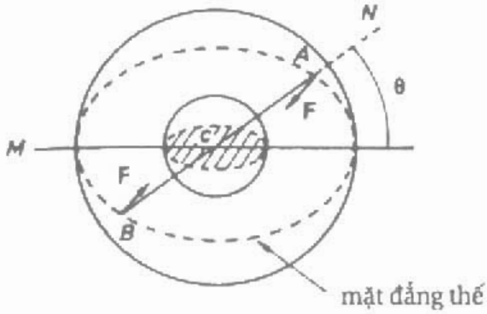
(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

(a) Do độ dẹt cực của trái đất (phần gạch gạch chéo trong hình 1.46), mặt đẳng thế ở khoảng không gian lân cận là một quả cầu dẹt (elipsoi đứt nét).

Giả sử mặt phẳng quỹ đạo N của vệ tinh tạo một góc θ với mặt phẳng xích đạo M của trái đất.

Vì mặt đẳng thế lệch so với mặt cầu, lực trọng trường của trái đất tác dụng lên vệ tinh, vốn vuông góc với mặt đẳng thế, không còn hướng thẳng về tâm của trái đất (như lực tác dụng lên vệ tinh tại A và B hình 1.46). Vì lực này là khá nhỏ, quỹ đạo của vệ tinh vẫn có thể xấp xỉ được coi như hình tròn. Hiệu ứng của thành phần lực không xuyên tâm tự triệt tiêu qua một chu kì, nhưng momen quay của nó đối với tâm của trái đất thì lại không. Momen quay "tương đương" này hướng vào mặt phẳng của tờ giấy và vuông góc với momen



Hình 1.46

xung lượng quỹ đạo L của vệ tinh vốn vuông góc với mặt phẳng quỹ đạo N và nằm trong mặt phẳng của tờ giấy. Nó là nguyên nhân làm vectơ momen xung lượng toàn phần tiến động quanh L.

(b) Bởi vì lực cản của không khí là tập trung gần điểm cận địa, nó làm cho vệ tinh chuyển động chậm dần về điểm cận địa và làm giảm năng lượng và momen xung lượng của vệ tinh ở mọi lúc nó đi qua điểm cận địa. Điều này sẽ làm cho điểm viễn địa của quỹ đạo vệ tinh trở nên gần hơn với trái đất và cuối cùng quỹ đạo trở thành đường tròn với bán kính bằng với khoảng cách giữa điểm cận địa với tâm của trái đất. Tác dụng tiếp của lực cản sẽ làm giảm đi hơn nữa khoảng cách của nó với trái đất cho đến khi nó rơi xuống trái đất.

1070

Một hạt có khối lượng m chuyển động dưới tác dụng của lực hấp dẫn xuyên tâm $f(r)$.

(a) Hãy lựa chọn điều kiện ban đầu để có thể quỹ đạo chuyển động là đường tròn.

Quỹ đạo chuyển động tròn là với giả thiết nhiễu loạn xuyên tâm nhỏ.

(b) Xác định mối liên hệ giữa các đại lượng $f(r)$, r và $\partial f/\partial r$ để quỹ đạo chuyển động này ổn định.

Cho biểu thức của f(r) có dạng $f(r) = -K/r^n$.

(c) Xác định giá trị lớn nhất của n để quỹ đạo chuyển động tròn ổn định.

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Thế hiệu dụng của hạt là

$$V^* = \frac{J^2}{2mr^2} + V(r) \,,$$

trong đó J là hằng số và V liên hệ với f bởi $f = \frac{-dV}{dr}$, khi đó năng lượng tổng cộng sẽ là

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + V^* \,.$$

Chuyển động có thể coi như là một chiều và dọc theo hướng bán kính. Chuyển động tròn của hạt trong trường V tương tự như hạt chuyển động quanh vị trí cân bằng trong trường V^*.

Ở vị trí cân bằng $r = r_0$,

$$\frac{\partial V^*}{\partial r} = 0,$$

hoặc

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{J^2}{mr^3} \,. \tag{1}$$

Nếu điều kiện ban đầu thỏa mãn đẳng thức trên và $E = V^*(r_0)$, thì quỹ đạo chuyển động là quỹ đạo tròn.

(b) Để quỹ đạo tròn bền, V^* phải nhỏ nhất tại $r = r_0$. Điều này đòi hỏi

$$\left(\frac{\partial^2 V^*}{\partial r^2}\right)_{r=r_0} > 0 \,,$$

tức là

$$\frac{3J^2}{mr^4} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} > 0, \qquad \text{hay} \qquad \frac{3J^2}{mr^4} - \frac{\partial f}{\partial r} > 0 \,,$$

tại $r = r_0$.

(c) Nếu $f = -K/r^n$, thì $\partial f/\partial r = nK/r^{n+1}$ và (1) cho ta được

$$J^2 = mK/r_0^{n-3} \,.$$

Điều kiện ở đây là

$$\frac{3J^2}{mr^4} - \frac{\partial f}{\partial r} > 0 \,,$$

nghĩa là

$$\frac{3K}{r^{n+1}} - \frac{nK}{r^{n+1}} > 0 \,,$$

đòi hỏi rằng $n < 3$ để quỹ đạo chuyển động là bền.

1071

Xét hành tinh khối lượng m chuyển động trong quỹ đạo gần tròn bán kính R xung quanh ngôi sao khối lượng M. Ngoài lực hấp dẫn có lực đẩy lên hành tinh tỉ lệ với khoảng cách r từ ngôi sao, $\mathbf{F} = A\mathbf{r}$. Tính vận tốc góc của quá trình tiến động của điểm cận tinh (điểm gần nhất với ngôi sao).

(*Princeton*)

Lời giải:

Lực tác dụng lên hành tinh là

$$f = \frac{-GMm}{r^2} + Ar\,.$$

Với $u = \frac{1}{r}$, công thức Binet (bài 1055) cho phương trình quỹ đạo

$$-mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = -GMmu^2 + \frac{A}{u}\,.$$

với quỹ đạo gần tròn ta đặt $u = u_0 + \delta u$, ở đây δu là đại lượng nhỏ. Phương trình trên khi đó cho ta, chỉ giữ lại đại lượng bậc thấp nhất

$$mh^2\left[\frac{d^2(\delta u)}{d\theta^2} + u_0 + \delta u\right] = GMm - \frac{A}{u_0^3\left(1 - \frac{\delta u}{u_0}\right)^3}$$

$$\approx GMm - \left(\frac{A}{u_0^3}\right)\left(1 - \frac{3\delta u}{u_0}\right)\,. \qquad (1)$$

Nếu quỹ đạo đúng tròn, $u = u_0$, $\delta u = 0$, biểu thức trên trở thành

$$mh^2u_0 = GMm - \frac{A}{u_0^3}\,. \qquad (2)$$

Sử dụng phương trình vào (1) ta nhận được

$$mh^2\left[\frac{d^2(\delta u)}{d\theta^2} + \delta u\right] = \frac{3A}{u_0^4}\delta u\,,$$

hay

$$\frac{d^2(\delta u)}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{3A}{mh^2u_0^4}\right)\delta u = 0\,. \qquad (3)$$

Chọn tọa độ thích hợp ta có thể viết lời giải như sau

$$\delta u = B\sin(a\theta) ,$$

ở đây

$$a = \sqrt{1 - \frac{3A}{mh^2u_0^4}} = \sqrt{1 - \frac{3AR^3}{GMm - AR^3}}$$

khi $h^2u_0 = GM - A/mu_0^3$, $u_0 = 1/R$. Khi đó nếu θ_1 và θ_2 là góc của hai điểm cận tinh kế tiếp, ta có

$$a\theta_2 - a\theta_1 = 2\pi .$$

hay

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{a} .$$

Khi $a < 1$, góc tiến động là

$$\Delta\theta_p = \Delta\theta - 2\pi = \frac{2\pi(1-a)}{a} .$$

Thời gian đòi hỏi để đường nối điểm cận tinh và sao bắt đầu quay một góc $\Delta\theta_p$ là

$$\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\dot\theta} = \frac{2\pi}{a\dot\theta} .$$

Do đó vận tốc góc tiến động là

$$\omega_p = \frac{\Delta\theta_p}{\Delta t} = (1-a)\dot\theta .$$

Vì vận tốc góc quay của hành tinh được xác định bởi h

$$\dot\theta = \frac{h}{R^2} = \sqrt{\frac{GM}{R^3} - \frac{A}{m}} ,$$

ta có

$$\omega_p = \sqrt{\frac{GM}{R^3} - \frac{A}{m}} - \sqrt{\frac{GM}{R^3} - \frac{4A}{m}} .$$

1072

(a) Một hành tinh khối lượng m quay quanh ngôi sao khối lượng M. Hành tinh chịu một lực kéo nhẹ $\mathbf{F} = -\alpha\mathbf{v}$ gây ra do chuyển động qua khí quyển đậm đặc của ngôi sao. Thừa nhận quỹ đạo là tròn với bán kính $r = r_0$ tại $t = 0$, tính quan hệ phụ thuộc thời gian của bán kính.

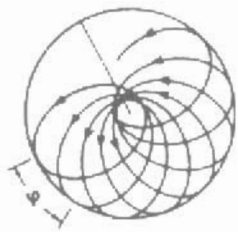
(b) Bây giờ bỏ qua lực kéo. Thừa nhận rằng có thêm thế hấp dẫn Newton, hành tinh chịu thế nhỏ để thế năng thực là

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{\varepsilon}{r^2},$$

ở đây ε là hằng số nhỏ.

Tính tốc độ tiến động của điểm cận nhật của hành tinh, để bậc ε nhỏ nhất. Ta có thể công nhận rằng quỹ đạo gần như tròn. Nói cách khác, ta phải tính góc φ được phác hoạ trong hình 1.47.

(*Princeton*)



Hình 1.47

Lời giải:

(a) Khi lực kéo F nhỏ, nó có thể được xem như một nhiễu loạn nhỏ cho chuyển động của hành tinh dưới trọng lực của ngôi sao. Phương trình năng lượng không bị nhiễu loạn là

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GMm}{r}.$$

Nếu quỹ đạo tròn với bán kính r, ta có

$$\dot{r} = 0, \qquad mr\dot{\theta}^2 = \frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}.$$

và như vậy

$$E = -\frac{GMm}{2r}.$$

Lực kéo gây nên tổn hao năng lượng với tốc độ

$$-\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \alpha v^2 = \frac{\alpha GM}{r}.$$

Nó cần phải bằng

$$-\frac{dE}{dt} = -\frac{GMm\dot{r}}{2r^2} ,$$

làm xuất hiện

$$\dot{r} = -\frac{2\alpha}{m}r ,$$

tích phân nó cho ta

$$r = r_0 e^{-\frac{2\alpha t}{m}} ,$$

ở đây ta đã sử dụng $r = r_0$ tại $t = 0$.

(b) Hành tinh bây giờ chuyển động trong thế xuyên tâm $V(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{\varepsilon}{r^2}$ và năng lượng tổng của nó là

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2mr^2} + V(r) ,$$

ở đây J là momen xung lượng được bảo toàn, $J = mr^2\dot{\varphi}$.

Vì

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\frac{dr}{d\varphi} ,$$

ta có

$$dr = \sqrt{2m(E-V) - \frac{J^2}{r^2}} \cdot \left(\frac{r^2}{J}\right) d\varphi ,$$

hay

$$\varphi = \int \frac{Jdr}{r^2\sqrt{2m(E-V) - \frac{J^2}{r^2}}} + \text{const.}$$

Trong trường không bị nhiễu loạn $V_0 = -GMm/r$, quỹ đạo nói chung là elip. Tuy nhiên, trong trường bị nhiễu loạn V, quỹ đạo không khép kín. Trong suốt thời gian trong đó r thay đổi từ r_{min} tới r_{max} và lại thay đổi đến r_{min}, vectơ bán kính quay đi một góc $\Delta\varphi$ được cho bởi

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{Jdr}{r^2\sqrt{2m(E-V) - \frac{J^2}{r^2}}}$$

$$= -2\frac{\partial}{\partial J}\int_{r_{min}}^{r_{max}} \sqrt{2m(E-V) - \frac{J^2}{r^2}}\, dr .$$

Khi viết $V = \frac{-GMm}{r} + \frac{\varepsilon}{r^2} = V_0 + \delta V$, ta khai triển theo chuỗi Taylor theo mũ của δV

$$f(V) = f(V_0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_{V=V_0} \delta V + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{2V^2}\right)_{V=V_0} (\delta V)^2 + \cdots .$$

Số hạng bậc không cho ta 2π ứng với quỹ đạo là elip. Số hạng bậc một cho ta

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial J}\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{2m\delta V dr}{\sqrt{2m(E - V_0) - \frac{J^2}{r^2}}} ,$$

góc được chỉ ra ở hình 1.47.

Biến phải lấy tích phân theo có thể thay đổi theo cách sau. Ta có

$$\dot{r} = \dot{\varphi}\frac{dr}{d\varphi} = \frac{J}{mr^2}\frac{dr}{d\varphi} ,$$

nghĩa là

$$\frac{1}{m}\sqrt{2m(E - V_0) - \frac{J^2}{r^2}} = \frac{J}{mr^2}\frac{dr}{d\varphi} .$$

Do đó tích phân sau cùng có thể được viết như sau

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial J}\left[\frac{2m}{J}\int_0^{\pi} r^2 \delta V d\varphi\right] .$$

Với $\delta V = \varepsilon/r^2$ ta nhận được

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial J}\left[\frac{2m}{J}\int_0^{\pi} \varepsilon d\varphi\right] = -\frac{2\pi\varepsilon m}{J^2} .$$

1073

(a) Tìm lực xuyên tâm đưa đến quỹ đạo sau đây của một hạt

$$r = a(1 + \cos\theta) .$$

(b) Hạt khối lượng m bị tác dụng bởi lực hút mà thế của nó là $U \propto r^{-4}$. Tìm tiết diện bắt tổng đối với hạt đến từ vô cùng với vận tốc ban đầu V_∞. Lưu ý: Phần (a) và (b) có thể dựa vào các lực khác nhau.

(Princeton)

Lời giải:

(a) Trong trường lực xuyên tâm, phương trình chuyển động của hạt là

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r) . \qquad (1)$$

$$r^2\dot{\theta} = \text{ hằng số } = h, \text{ chẳng hạn .}$$

Khi đó

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}, \qquad \ddot{\theta} = \frac{d}{dt}\left(\frac{h}{r^2}\right) = \frac{-2h\dot{r}}{r^3} .$$

Với $r = a(1 + \cos\theta)$, ta cũng có

$$\dot{r} = -a\dot{\theta}\sin\theta ,$$

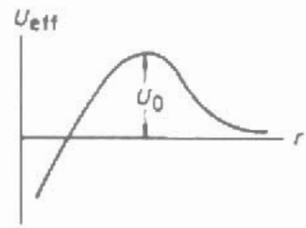
$$\ddot{r} = -a(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) = -\frac{ah^2}{r^4}\left(\frac{2\sin^2\theta}{1+\cos\theta} + \cos\theta\right)$$

$$= \frac{-ah^4}{r^4}(2 - \cos\theta) = h^2\left(\frac{r-3a}{r^4}\right) .$$

Sử dụng biểu thức trên ta có thể viết (1) như sau

$$F(r) = m\left[\frac{h^2(r-3a)}{r^4} - r\left(\frac{h}{r^2}\right)^2\right] = -\frac{3mh^2a}{r^4} ,$$

nó là lực hướng tâm đòi hỏi.



Hình 1.48

(b) Vì $U = -\frac{\alpha}{r^4}$, thế hiệu dụng là

$$U_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r^4} ,$$

ở đây $L = mbV_\infty$ là momen xung lượng, nó được bảo toàn trong trường lực xuyên tâm, b là thông số va chạm. Để tìm cực đại của U_{eff}, xét

$$\frac{dU_{eff}}{dr} = \frac{-L^2}{mr^3} + \frac{4\alpha}{r^5} = 0 .$$

nó cho

$$r_0 = \sqrt{\frac{4m\alpha}{L^2}}$$

như khoảng cách ở đó U_{eff} là cực đại. Khi đó

$$(U_{\text{eff}})_{\max} \equiv U_0 = \frac{L^4}{16m^2\alpha} .$$

Dạng của U_{eff} được chỉ ra ở hình 1.48. Thấy rằng chỉ các hạt với năng lượng tổng $E > U_0$ sẽ rơi vào tâm lực. Như vậy thông số va chạm cực đại để bắt được cho bởi $E = U_0$, hay

$$\frac{m^4 b^4 V_\infty^4}{16m^2\alpha} = \frac{1}{2} m V_\infty^2 ,$$

cho ta

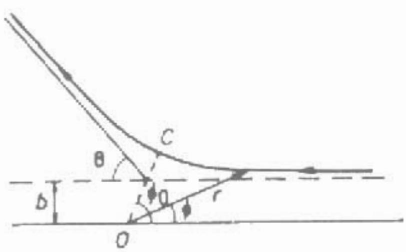
$$b_{\max} = \left(\frac{8\alpha}{mV_\infty^2} \right)^{1/4} .$$

Vì vậy tiết diện bắt tổng là

$$\sigma = \pi b_{\max}^2 = 2\pi \sqrt{\frac{2\alpha}{mV_\infty^2}} .$$

1074

(a) Một hạt khối lương m chuyển động trong thế $V(r) = k/r^2$, $k > 0$. Xét chuyển động trong mặt X–Y, khi cho r và ϕ là toạ độ cực trong mặt phẳng, và cho lời giải với r như hàm của ϕ, momen xung lượng l và năng lượng E (hình 1.49).



Hình 1.49

(b) Sử dụng kết quả của phần (a) để thảo luận tán xạ (cổ điển) trong thế đó. Đặt θ là góc tán xạ. Liên hệ thông số va chạm với θ và năng lượng E và từ đó tính tiết diện vi sai như hàm của θ và E.

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Lực tác dụng lên hạt là

$$F = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2k}{r^3} \, .$$

Công thức Brinet (Bài 1055) khi đó trở thành

$$h^2u^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + u\right) = -\frac{F}{m} = -\frac{2k}{m}u^3 \, ,$$

hay

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \left(1 + \frac{2k}{mh^2}\right) u = 0 \, ,$$

ở đây $h = r^2\dot{\phi}$, $u = 1/r$. Nghiệm của nó là

$$u = A\sin(\omega\phi + \psi) \, ,$$

ở đây $\omega^2 = 1 + 2k/mh^2$, và A và ψ là các hằng số của tích phân được xác định từ điều kiện ban đầu.

Có thể thấy từ hình 1.49 rằng đối với $r \to \infty$, có nghĩa là $u \to 0$, $\phi \to 0$. Vì vậy $\psi = 0$. Cũng với $r \to \infty$, $\dot{r} \to \dot{r}_\infty$ được cho bởi $E = \frac{1}{2}m\dot{r}_\infty^2$, có nghĩa là $\dot{r}_\infty = -\sqrt{\frac{2E}{m}}$, ở đây dấu âm được chọn vì tia tới r giảm với sự tăng t. Khi đó

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\phi}\dot{\phi} = \frac{dr}{d\phi}\frac{h}{r^2} = -h\frac{du}{d\phi} = -Ah\omega\cos(\omega\phi) \, ,$$

ta có, với $l = hm$,

$$A = \frac{1}{l\omega}\sqrt{2mE}$$

và vì

$$\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{2mE}}{l\omega}\sin(\omega\phi) \, ,$$

ở đây ω được cho bởi

$$\omega^2 = 1 + \frac{2mk}{l^2} \, .$$

(b) Từ kết quả trên có thể thấy rằng r là cực tiểu khi $\omega\phi = \frac{\pi}{2}$, nghĩa là ở $\phi = \phi_0 = \frac{\pi}{2\omega}$. Đó là khoảng cách của tiếp cận gần nhất OC được chỉ ra trên hình 1.49. Do tính đối xứng của tán xạ, góc tán xạ là

$$\theta = \pi - 2\phi_0 = \pi\left(1 - \frac{1}{\omega}\right) .$$

Khi đó vì $l^2 = m^2 b^2 \dot{r}_\infty^2 = 2b^2 mE$, ta có

$$1 - \frac{\theta}{\pi} = \left(1 + \frac{2mk}{l^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{k}{b^2E}\right)^{\frac{1}{2}} ,$$

có nghĩa là

$$\frac{\theta^2}{\pi^2} - \frac{2\theta}{\pi} = -\frac{k}{b^2E + k} .$$

cho

$$b^2 = \frac{k}{E}\frac{(\pi-\theta)^2}{(2\pi-\theta)\theta}$$

như là quan hệ giữa θ và b.

Các hạt với các thông số va chạm giữa b và $b + db$ sẽ bị tán xạ trong góc giữa θ và $\theta + d\theta$, có nghĩa là trong góc đặc $d\Omega = 2\pi\sin\theta d\theta$. Do đó tiết diện vi sai tại góc tán xạ θ trên một đơn vị góc đặc là

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \left|\frac{2\pi b db}{2\pi\sin\theta d\theta}\right| = \left|\frac{b}{\sin\theta}\frac{db}{d\theta}\right| \\ &= \frac{k}{E\sin\theta}\frac{\pi^2(\pi-\theta)}{(2\pi-\theta)^2\theta^2} .\end{aligned}$$

1075

Đưa ra công thức và tính toán các giá trị của (a) gia tốc trọng trường tại bề mặt mặt trăng, và (b) tốc độ thoát từ mặt trăng.

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

(a) Đặt M và R lần lượt là khối lượng và bán kính của mặt trăng. Từ định luật hấp dẫn vũ trụ và định nghĩa gia tốc hấp dẫn tại bề mặt mặt trăng, ta có

$$\frac{GMm}{R^2} = mg ,$$

ở đây m là khối lượng của một vật thể trên mặt trăng. Quan hệ đó cho gia tốc hấp dẫn tại bề mặt mặt trăng như sau

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{6,67 \times 10^{-11} \times 7,35 \times 10^{22}}{(1,74 \times 10^6)^2} = 1,62 \text{ m/s}^2 .$$

(b) Thế năng của tên lửa khối lượng m tại khoảng cách vô cùng từ mặt trăng $\rho \to \infty$ là

$$-\frac{GmM}{\rho} = -\frac{mgR^2}{\rho} \to 0 .$$

Động năng của nó, một đại lượng dương, ít nhất là bằng zero. Bởi vì để tên lửa có thể tới vô cùng từ mặt trăng, tổng cơ năng của nó ít nhất phải bằng zero, bởi định luật bảo toàn năng lượng.

Tại bề mặt mặt trăng, tên lửa có tổng năng lượng

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgR .$$

Nếu v_0 là tốc độ thoát, ta đòi hỏi $E = 0$, hay

$$v_0 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \times 1,62 \times 1,74 \times 10^6} = 2,37 \times 10^3 \text{ m/s} .$$

1076

Xét chuyển động của hạt khối lượng m dưới ảnh hưởng của lực $\mathbf{F} = -K\mathbf{r}$, K là hằng số dương và $\mathbf{r}$ là vectơ vị trí của hạt.

(a) Chứng minh rằng chuyển động của hạt nằm trong một mặt phẳng.

(b) Hãy tìm vị trí của hạt như là hàm của thời gian, thừa nhận rằng tại $t = 0$, $x = a$, $y = 0$, $V_x = 0$, $V_y = V$.

(c) Hãy chứng minh rằng quỹ đạo là elip.

(d) Hãy tìm chu kì.

(e) Chuyển động của hạt có tuân theo định luật Kepler về chuyển động của hành tinh?

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

(a) Đối với lực hướng tâm $\mathbf{F} = -K\mathbf{r}$,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = K\mathbf{r} \times \mathbf{r} = 0 .$$

Khi $\mathbf{F} = m d\mathbf{V}/dt$ ta có

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{V}}{dt} = 0 ,$$

hay

$$\frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{V})}{dt} = \mathbf{V} \times \mathbf{V} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{V}}{dt} = 0 .$$

Tích phân ta nhận được

$$\mathbf{r} \times \mathbf{V} = \mathbf{h} .$$

một vectơ không đổi

Từ đó suy ra

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{V} = \mathbf{r} \times \mathbf{r} \cdot \mathbf{V} = 0 .$$

điều này cho thấy rằng $\mathbf{r}$ vuông góc với vectơ không đổi $\mathbf{h}$, tức là $\mathbf{r}$ nằm trong mặt phẳng vuông góc với $\mathbf{h}$. Điều đó chứng tỏ chuyển động của hạt bị giam trong một mặt phẳng. Ta chọn mặt phẳng là mặt phẳng xy với gốc tọa độ ở tâm lực.

(b) Phương trình chuyển động của hạt là

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -K\mathbf{r} .$$

hay trong hệ tọa độ Descartes

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$
$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 ,$$

trong đó $\omega^2 = K/m$. Nghiệm tổng quát của hệ phương trình trên là

$$x = A_1 \sin(\omega t + \phi_1) ,$$
$$y = A_2 \sin(\omega t + \phi_2) .$$

Với điều kiện ban đầu đã cho, tức là

$$x = A_1 \sin\phi_1 = a ,$$
$$y = A_2 \sin\phi_2 = 0 ,$$
$$\dot{x} = A_1\omega\cos\phi_1 = 0 ,$$
$$\dot{y} = A_2\omega\cos\phi_2 = V_0 ,$$

ta tìm được $\phi_1 = \pi/2$, $\phi_2 = 0$, $A_1 = a$, $A_2 = V_0/\omega = \sqrt{m/K}V_0$. Từ đó

$$x = a\sin\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\,t + \frac{\pi}{2}\right) ,$$

$$y = \sqrt{\frac{m}{K}}V_0\sin\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\,t\right) .$$

(c) Hệ phương trình cuối mô tả một elip khử tham số t ta thu được phương trình chuẩn cho một elip

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 ,$$

với

$$b = \sqrt{\frac{m}{K}}V_0 .$$

(d) (x, y) trở về cùng các giá trị khi t tăng lượng T sao cho

$$\sqrt{\frac{K}{m}}T = 2\pi .$$

Từ đó chu kì là

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} .$$

(e) Định luật Kepler thứ ba nói rằng tỉ số bình phương chu kì quay của một hành tinh trên lập phương chiều dài bán trục lớn của quỹ đạo của nó là một hằng số. Do đó ta có

$$\frac{(\text{chu kì})^2}{(\text{chiều dài bán trục lớn})^3} = \begin{cases} \dfrac{4\pi^2 m}{Ka^3} & \text{nếu } a > b ,\\[2ex] \dfrac{4\pi^2}{V_0^3}\sqrt{\dfrac{K}{m}} & \text{nếu } a < b . \end{cases}$$

Vì tỉ số này phụ thuộc vào m và a hoặc m và V_0 nên định luật Kepler thứ ba không được tuân thủ.

1077

(a) Một hạt có khối lượng m chuyển động trong một trường xuyên tâm với thế năng là $U(r)$. Phương trình quỹ đạo thu được là không thay đổi. Biểu diễn góc cực φ vào tham số r.

(b) Nếu hạt chuyển động từ vô cực ra xa với vận tốc ban đầu V_0, hằng số va chạm b, và tán xạ theo phương riêng θ, xác định vi phân tiết diện vi sai theo thông số b.

(c) Tính tiết diện vi sai và toàn phần đối với tán xạ từ một quả cầu cứng.

(*SUNY, Buffalo*)

Lời giải:

(a) Nếu một hạt có khối lượng m chuyển động trong trường lực xuyên tâm với thế năng $U(r)$, cơ năng E và momen xung lượng đối với tâm lực mh của nó là những đại lượng bảo toàn. Như vậy

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = E ,$$

$$r^2\dot{\varphi} = h, \qquad \text{hay} \qquad \dot{\varphi} = \frac{h}{r^2} .$$

Vì chúng ta cũng có

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\frac{dr}{d\varphi} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} ,$$

nên phương trình năng lượng trở thành

$$\frac{1}{2}m\left[\frac{h^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + r^2\frac{h^2}{r^4}\right] + U(r) = E ,$$

tức là

$$d\phi = \frac{hdr}{r\sqrt{\dfrac{2r^2}{m}[E - U(r)] - h^2}} ,$$

hoặc

$$\phi = \int \frac{hdr}{r\sqrt{\dfrac{2r^2}{m}[E - U(r)] - h^2}} ,$$

biểu diễn góc ϕ theo tham số r.

(b) Quỹ đạo của hạt trong trường lực xuyên tâm là đối xứng đối với đường thẳng nối tâm điểm đặt của lực với điểm tiếp cận gần nhất (OA trong hình 1.50). Góc tán xạ của hạt là

$$\theta = \pi - 2\varphi_0$$

với φ_0 xác định bởi

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{h dr}{r\sqrt{\frac{2r^2}{m}[E - U(r)] - h^2}} ,$$

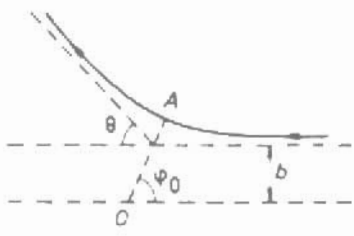
ở đây $r_{\min}$ là khi $\dot{r} = 0$ trong phương trình năng lượng hoặc $E = U(r) + \frac{mh^2}{2r^2}$. Theo định luật bảo toàn

$$E = \frac{mV_0^2}{2}, \qquad mh = mbV_0 ,$$

khi đó

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{b dr}{r^2\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{mV_0^2}}} .$$

Góc tán xạ θ có thể xác định được.



Hình 1.50

Gọi dN là số hạt tán xạ trong 1 đơn vị thời gian trên một góc khối tương ứng với góc tán xạ θ và $\theta + d\theta$, và n là số hạt xuyên qua trong một đơn vị diện tích thiết diện ngang của chùm trong 1 đơn vị thời gian. Tiết diện vi sai được định nghĩa như sau

$$d\sigma = \frac{dN}{n} .$$

Với góc tán xạ θ có liên quan với hằng số va chạm duy nhất b, chúng ta có

$$dN = 2\pi nbdb ,$$

tức là

$$d\sigma = 2\pi bdb .$$

Chúng ta có thể viết lại biểu thức trên

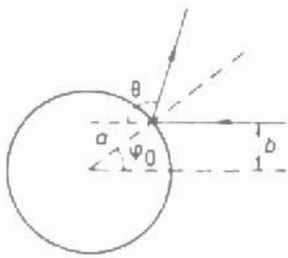
$$d\sigma = 2\pi b\left|\frac{db}{d\theta}\right|d\theta = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right|d\Omega\,.$$

ở đây $d\Omega$ là góc khối giữa 2 hình nón tròn thẳng với các góc mở θ và $\theta + d\theta$

$$d\Omega = 2\pi\sin\theta d\theta\,.$$

Chú ý $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ ở đây chính là thiết diện vi sai trên đơn vị góc khối.

(c) Một hạt chuyển động tự do trước khi va chạm vào quả cầu cứng. Do chúng không thể xuyên vào phía bên trong của quả cầu, sự bảo toàn động lượng đòi hỏi góc tới và góc phản xạ được biểu diễn như hình 1.51.



Hình 1.51

Khi đó

$$b = a\sin\varphi_0 = a\sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) = a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\,.$$

Từ đó

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{ba}{2\sin\theta}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{a^2}{4}\,.$$

Vì đại lượng này không phụ thuộc vào góc tán xạ, tổng thiết diện tán xạ là $\sigma = 4\pi\frac{d\sigma}{d\Omega} = \pi a^2$, và bằng với thiết diện hình học của quả cầu cứng.

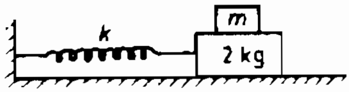
1078

Một vật có khối lượng 2 kg như hình 1.52 khi dịch chuyển và thả ra ta sẽ dao động không ma sát trên mặt phẳng nằm ngang với chu kì $\pi/6$ giây.

(a) Xác định lực tác dụng để vật dịch chuyển được 2 cm khỏi vị trí cân bằng?

(b) Nếu có một vật nhỏ đặt trên vật 2 kg, và hệ số ma sát giữa 2 vật là 0,1, biên độ dao động cực đại là bao nhiêu để cho vật nhỏ không trượt ra? (Với giả thiết chu kì không bị ảnh hưởng khi thêm vật nhỏ lên trên).

(*Wisconsin*)



Hình 1.52

Lời giải:

Gọi k là hằng số của lò xo. Phương trình chuyển động của vật là

$$2\ddot{x} + kx = 0 ,$$

hay

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 ,$$

ở đây x là độ dịch chuyển của vật ra khỏi vị trí cân bằng, và $\omega^2 = \frac{k}{2}$. Nghiệm tổng quát của phương trình là

$$x = A\cos(\omega t + \phi) .$$

Chu kì của dao động là

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{k}} = \frac{\pi}{6} ,$$

từ đó cho $\omega = 12\ \mathrm{s}^{-1}$, $k = 288\ \mathrm{Nm}^{-1}$. Nếu $x = x_0$ ở $t = 0$, thì $\phi = 0$, $A = x_0$ và nghiệm là $x = x_0\cos(12t)$.

(a) Lực tác dụng cần thiết là

$$f = kx = 288 \times 2 \times 10^{-2} = 5,76\ \mathrm{N} .$$

(b) Nếu vật nhỏ dịch chuyển cùng với vật 2 kg, nó sẽ có cùng gia tốc như vật 2 kg, tức là $\ddot{x} = -144x_0\cos(12t)$. Gọi khối lượng của nó là m. Khi nó bắt đầu trượt, lực nằm ngang lớn nhất tác dụng lên nó vượt quá lực ma sát tĩnh

$$0,1 \times mg = 144mx_0 ,$$

ta có

$$x_0 = \frac{0,98}{144} = 6,8 \times 10^{-3}\ \text{m}\ .$$

Nếu x_0 vượt quá giá trị trên thì m sẽ trượt. Do đó là biên độ lớn nhất để cho nó không trượt.

1079

Hai âm thoa đồng bộ cùng tần số và âm lượng tạo ra cường độ bằng không tại một điểm A nào đó. Tuy nhiên, nếu chỉ có một trong hai nguồn, âm lượng I tới điểm nghe được ở A. Giải thích tại sao theo định luật bảo toàn năng lượng.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Gọi s_1 và s_2 là khoảng cách từ 1 điểm trong không gian tới 2 nguồn âm thoa. Mỗi một nguồn âm thoa cho điểm này một phương trình dao động

$$y_1 = I_1 \sin\left[\omega\left(t - \frac{s_1}{c}\right)\right]\ ,$$

và

$$y_2 = I_2 \sin\left[\omega\left(t - \frac{s_2}{c}\right)\right]\ ,$$

c là tốc độ âm thanh.

Nếu s_1 và s_2 cùng lớn hơn nhiều so với khoảng cách giữa 2 nguồn, chúng ta có thể coi I_1 và I_2 xấp xỉ nhau, tức là $I_1 \approx I_2 \approx I_0$. Dao động tổng hợp là

$$\begin{aligned} y = y_1 + y_2 &= I_0\left\{\sin\left[\omega\left(t - \frac{s_1}{c}\right)\right] + \sin\left[\omega\left(t - \frac{s_2}{c}\right)\right]\right\} \\ &= 2I_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{s_1 + s_2}{2c}\right)\right] \cos\left[\omega\left(\frac{s_2 - s_1}{2c}\right)\right]\ . \end{aligned}$$

Ở đây $y = 0$ nếu

$$\frac{\omega(s_2 - s_1)}{2c} = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots\ .$$

Kết quả của dao động tổng hợp là 0 nếu tại điểm mà $s_2 - s_1$ là số lẻ lần nửa bước sóng $\lambda/2$. Điều này không vi phạm định luật bảo toàn năng lượng và là hiển nhiên khi chúng ta tính toán đến năng lượng được bảo quản ở trong trường chứa sóng. Mặc dù biên độ và năng lượng của dao động là bằng không ở nút, còn ở bụng sóng biên độ của dao động là gấp đôi và năng lượng sẽ lớn gấp 4 lần giá trị riêng lẻ. Tính toán cụ thể sẽ thấy năng lượng của dao động tổng hợp bằng tổng năng lượng của các dao động riêng lẻ.

1080

Một vật có khối lượng m ở trong một mặt phẳng chuyển động tròn đều với tần số góc ω. Lực hướng tâm được sinh ra bởi một lò xo mà hằng số lực là K (bỏ qua trọng lực). Một xung lực rất nhỏ tác dụng vào vật. Tìm tần số của dao động xuyên tâm.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Trong hệ tọa độ cực, hệ phương trình chuyển động của vật là

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -K(r - r_0) ,$$
$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 .$$

Từ phương trình (2) ta có

$$r^2\theta = \text{const.}$$

Gọi R là bán kính của chuyển động tròn đều của vật. Chúng ta có

$$mR\omega^2 = K(R - r_0), \qquad r^2\dot{\theta} = R^2\omega .$$

Gọi $r' = r - R$ là độ lệch so với chuyển động tròn đều. Ta có thể viết phương trình theo tia như sau

$$\ddot{r} - \frac{r^4\dot{\theta}^2}{r^3} = \ddot{r}' - \frac{R^4\omega^2}{(R + r')^3} = -\frac{K}{m}(r' + R - r_0) .$$

Nếu xung lực xuyên tâm nhỏ, $r' \ll R$ và phương trình trên trở thành

$$\ddot{r}' - R\omega^2\left(1 - \frac{3r'}{R}\right) = \frac{-Kr'}{m} - \frac{K(R - r_0)}{m} ,$$

hoặc

$$\ddot{r}' + \left(3\omega^2 + \frac{K}{m}\right) r' = 0 .$$

Do đó tần số của dao động xuyên tâm là $\omega' = \sqrt{3\omega^2 + \frac{K}{m}}$.

1081

Một hạt có khối lượng m chuyển động dưới tác dụng của lực hồi phục $-Kx$ và lực cản $-Rv$, trong đó x là độ lệch khỏi vị trí cân bằng và v là vận tốc của hạt. Khi K cố định và điều kiện ban đầu tùy ý, tìm giá trị $R = R_c$ cho chuyển động nhanh nhất ở xung quanh vị trí cân bằng. Có thể xác định điều kiện ban đầu (ngoài $x = v = 0$) sao cho chuyển động là nhanh hơn đối với $R > R_c$ và $R < R_c$? Giải thích.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Phương trình chuyển động là $m\ddot{x} + R\dot{x} + Kx = 0$. Với giả thiết $x = Ae^{\alpha t}$, chúng ta thu được phương trình $m\alpha^2 + R\alpha + K = 0$, với

$$\alpha = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4Km}}{2m} .$$

Nhìn chung, nếu $R = R_c = 2\sqrt{Km}$ (tắt dần tới hạn), vật tiến tới vị trí cân bằng nhanh nhất. Tuy nhiên, nếu $R > R_c$, vật có thể tiếp cận vị trí cân bằng thậm chí nhanh hơn dưới điều kiện đặc biệt nào đó. Do đó, nghiệm tổng quát của phương trình có dạng

$$x = A \exp\left(\frac{-R + \sqrt{R^2 - 4Km}}{2m}\right) t + B \exp\left(\frac{-R - \sqrt{R^2 - 4Km}}{2m}\right) t$$

Chúng ta có thể chọn điều kiện ban đầu sao cho $A = 0$. Số hạng còn lại có hệ số tắt dần là

$$-\alpha = \frac{R + \sqrt{R^2 - 4Km}}{2m} = \frac{R + \sqrt{R^2 - R_c^2}}{2m} > \frac{R_c}{2m} ,$$

do đó sự tiến tới cân bằng thậm chí còn nhanh hơn đối với tắt dần tới hạn.

Nếu $R < R_c$, chúng ta có

$$\alpha = \frac{-R \pm i\sqrt{R_c^2 - R^2}}{2m} ,$$

do đó nghiệm tổng quát là

$$x = A \exp\left(-\frac{Rt}{2m}\right) \exp\left(\frac{i\sqrt{R_c^2 - R^2}t}{2m}\right) + B \exp\left(-\frac{Rt}{2m}\right) \exp\left(\frac{-i\sqrt{R_c^2 - R^2}t}{2m}\right) .$$

Khi đó sự tiến tới trạng thái cân bằng là một dao động với hệ số tắt dần

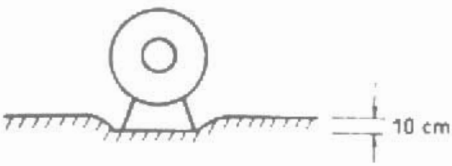
$$\frac{R}{2m} < \frac{R_c}{2m} .$$

Chuyển động tiến tới cân bằng là luôn luôn chậm hơn so với tắt dần tới hạn.

1082

Một động cơ chạy tự do trên một đệm cao su dày để cho bớt dao động (hình1.53). Động cơ lún xuống đệm cao su 10 cm. Ước tính tốc độ quay (vòng trên phút) khi mà động cơ sẽ dao động thẳng đứng lớn nhất.

(*UC, Berkeley*)



Hình 1.53

Lời giải:

Gọi hệ số đàn hồi của đệm cao su là k. Khi đó $kx = mg$, trong đó m là khối lượng của động cơ. Với $x - 0,1$ m, $\frac{k}{m} = \frac{g}{x} = 98$ s^{-2}. Khi đó tần số dao động tự do của hệ vật là

$$\omega - \sqrt{\frac{k}{m}} = 9,9 \text{ s}^{-1}.$$

Ở đây, khi động cơ quay với tốc độ

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{60 \times 9,9}{2\pi} = 94,5 \text{ vg/ph} ,$$

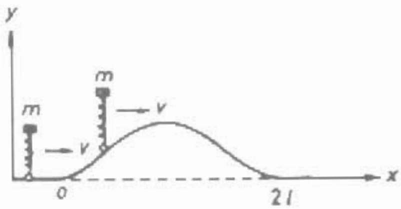
cộng hưởng với đệm cao su sẽ xảy ra và động cơ sẽ biểu thị dao động thẳng đứng lớn nhất.

1083

Một ô tô chuyển động theo hướng x và với vận tốc nằm ngang không đổi v. Xe ô tô chuyển động ở nơi đoạn đường nhô lên có dạng mô tả bởi

$y_0 = A[1 - \cos(\pi x/l)]$ với $0 \le x \le 2l$; $y_0 = 0$ (hình 1.54). Xác định chuyển động của tâm khối của xe trong khi đi qua quãng đường nhô lên đó. Hãy coi xe như một vật nặng m vào một lò xo không khối lượng có chiều dài hồi phục l_0 và hệ số đàn hồi k. Bỏ qua lực ma sát và cho rằng lò xo luôn thẳng đứng trong suốt quá trình.

(*MIT*)



Hình 1.54

Lời giải:

Gọi tọa độ của vật phụ thuộc vào thời gian t là (x, y). Chọn gốc tọa độ sao cho $x(0) = 0$. Khi đó $x(t) = vt$. Khi đó phương trình chuyển động của vật theo trục y là

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= -k(y - y_0 - l_0) - mg \\ &= -k\left(y - A - l_0 + \frac{mg}{k}\right) - kA\cos\left(\frac{\pi vt}{l}\right) . \end{aligned}$$

Đặt $Y = y - A - l_0 + mg/k$, chúng ta có thể viết lại phương trình dưới dạng

$$m\ddot{Y} + kY = -kA\cos\left(\frac{\pi vt}{l}\right) .$$

Đây là phương trình miêu tả chuyển động của một dao động điều hòa. Thử một nghiệm riêng của phương trình có dạng $Y = B\cos(\frac{\pi vt}{l})$, chúng ta có

$$-mB\left(\frac{\pi v}{l}\right)^2 + kB = -kA ,$$

tức là

$$B = \frac{kl^2 A}{m\pi^2 v^2 - kl^2} .$$

Ở đây, nghiệm tổng quát của phương trình chuyển động của vật nặng là

$$y = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t) + B\cos\left(\frac{\pi vt}{l}\right) + A + l_0 - \frac{mg}{k} ,$$

với $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Điều kiện ban đầu $y(0) = l_0 - mg/k$, $\dot{y}(0) = 0$, cho $C_2 = 0$, $C_1 = -(B + A) = m\pi^2 v^2 A/(kl^2 - m\pi^2 v^2)$. Do đó, chuyển động của khối tâm của xe ô tô được miêu tả bởi

$$y(t) = C_1 \cos(\omega t) + B \cos\left(\frac{\pi v t}{l}\right) + A + l_0 - \frac{mg}{k}$$

với $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $C_1 = -\frac{m\pi^2 v^2 A}{m\pi^2 v^2 - kl^2}$, $B = \frac{kl^2 A}{m\pi^2 v^2 - kl^2}$.

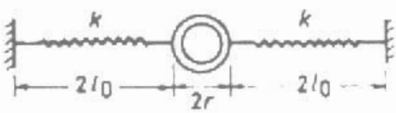
1084

Một cái vòng nhỏ có khối lượng M và bán kính r trên một cái bàn không ma sát. Chiếc vòng được nén bởi 2 cái lò xo giãn giống nhau với chiều dài hồi phục l_0 ($l_0 \gg r$) và hệ số đàn hồi k như trên hình 1.55.

(a) Mô tả các kiểu chuẩn của dao động nhỏ và tần số của hệ.

(b) Các đại lượng của hệ thay đổi như thế nào nếu chiều dài của lò xo là $2l_0$?

(*MIT*)



Hình 1.55

Lời giải:

(a) Với $l_0 \gg r$, sự xoay bất kì của chiếc vòng là nguyên nhân gây ra sự thay đổi không đáng kể chiều dài của lò xo nên lực đàn hồi xuất hiện cũng không đáng kể. Theo định luật 2 Newton ta có

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= -k[\sqrt{(2l_0 + x)^2 + y^2} - l_0] \frac{2l_0 + x}{\sqrt{(2l_0 + x)^2 + y^2}} \\ &\quad + k[\sqrt{(2l_0 - x)^2 + y^2} - l_0] \frac{2l_0 - x}{\sqrt{(2l_0 - x)^2 + y^2}}, \\ M\ddot{y} &= -k[\sqrt{(2l_0 + x)^2 + y^2} - l_0] \frac{y}{\sqrt{(2l_0 + x)^2 + y^2}} \end{aligned}$$

$$-k[\sqrt{(2l_0-x)^2+y^2}-l_0]\frac{y}{\sqrt{(2l_0-x)^2+y^2}}\ ,$$

trong đó x, y mô tả vị trí tâm của chiếc vòng so với vị trí cân bằng. Bỏ qua số hạng bậc cao hơn bậc nhất đối với đại lượng nhỏ x, y, chúng ta có

$$\sqrt{(2l_0\pm x)^2+y^2}\approx\sqrt{4l_0^2\pm 4l_0x}\approx 2l_0\left(1\pm\frac{x}{2l_0}\right)\approx 2l_0\pm x\ .$$

Phương trình trở thành

$$m\ddot{x}=-2kx\ ,$$
$$m\ddot{y}=-ky\ ,$$

với nghiệm

$$x=A_x\cos(\omega_x t+\varphi_x)\ ,$$
$$y=A_y\cos(\omega_y t+\varphi_y)\ ,$$

trong đó $\omega_x=\sqrt{\frac{2k}{M}}$, $\omega_y=\sqrt{\frac{k}{M}}$, và hằng số A_x, A_y, φ_x, φ_y được xác định từ các điều kiện ban đầu. Đó là hai kiểu chuẩn của các dao động nhỏ.

(b) Với chiều dài của lò xo tăng lên thành $2l_0$, trong suốt quá trình dao động, một lò xo được giãn ra trong khi đó lò xo còn lại sẽ bị nén lại. Lò xo bị nén sẽ tác dụng một lực đàn hồi vào chiếc vòng ngược với lực khi giãn ra. Do đó hệ số lò xo là giống nhau khi giãn cũng như khi nén, phương trình chuyển động sẽ là

$$\begin{aligned}
M\ddot{x}&=-k[\sqrt{(2l_0+x)^2+y^2}-2l_0]\frac{2l_0+x}{\sqrt{(2l_0+x)^2+y^2}}\\
&\quad-k[\sqrt{(2l_0-x)^2+y^2}-2l_0]\frac{2l_0-x}{\sqrt{(2l_0-x)^2+y^2}}\\
&\approx -2kx\ ,\\
M\ddot{y}&=-k[\sqrt{(2l_0+x)^2+y^2}-2l_0]\frac{y}{\sqrt{(2l_0+x)^2+y^2}}\\
&\quad+k[\sqrt{(2l_0-x)^2+y^2}-2l_0]\frac{y}{\sqrt{(2l_0-x)^2+y^2}}\\
&\approx -\frac{kxy}{l_0}\ ,
\end{aligned}$$

chỉ giữ lại những số hạng bậc thấp nhất của đại lượng nhỏ x, y. Có thể thấy rằng chuyển động của chiếc vòng theo trục x tương tự như ở phần (a) trong khi đó chuyển động trong theo phương y, mặc dù là khá phức tạp song với bậc cao hơn.

1085

Hai hạt được nối với nhau bởi một lò xo có hằng số đàn hồi K và ở vị trí cân bằng. Mỗi hạt có khối lượng m và tích điện dương q. Một điện trường nằm ngang không đổi $\mathbf{E} = E_0\mathbf{i}$ tác dụng. Chỉ có lực Culông tác dụng, bỏ qua các hiệu ứng từ, bức xạ, ...Các hạt không va chạm nhau.

(a) Nếu các hạt chuyển động không ma sát dọc theo trục x trên một thanh, khoảng cách giữa chúng là d không đổi, xác định d.

(b) Tìm gia tốc của khối tâm của hệ trong trường hợp (a).

(c) Trong trường hợp (a), cho khoảng cách $d(t)$ chịu tác dụng bởi dao động nhỏ quanh vị trí cân bằng. Xác định tần số dao động của hệ?

(d) Cho hạt chuyển động dọc không ma sát trên một bàn nằm ngang thay vì trên một thanh. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình chuyển động. Bạn có thể để nghiệm dưới dạng tích phân.

(*MIT*)

Lời giải:

(a) Xét lực tác dụng vào hai hạt như hình 1.56, chúng ta thu được phương trình chuyển động

$$qE + k(x_2 - x_1) - F_c = m\ddot{x}_1 , \tag{1}$$

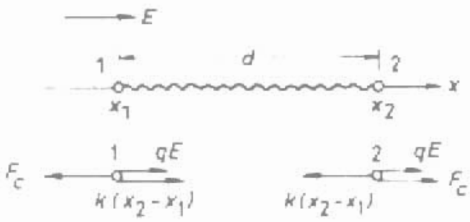
$$qE + k(x_1 - x_2) + F_c = m\ddot{x}_2 , \tag{2}$$

Trong đó F_c là lực tương tác Culông giữa 2 hạt

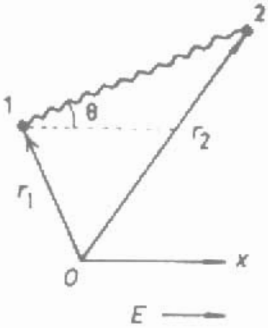
$$F_c = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(x_2 - x_1)^2} .$$

Với $x_2 - x_1 = d$, là một hằng số, $\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1$. Lấy (1) trừ (2) chúng ta thu được

$$2kd = 2F_c = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{d^2} ,$$



Hình 1.56



Hình 1.57

hoặc

$$d = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{k}\right)^{1/3} .$$

(b) Cộng (1) với (2) chúng ta có

$$2qE = m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) ,$$

hoặc

$$\ddot{x}_0 = \frac{qE}{m} ,$$

ở đây $x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ là khối tâm của hệ vật.

(c) Lấy (2) trừ (1) ta thu được

$$m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) + 2k(x_2 - x_1) = \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0(x_2 - x_1)^2} .$$

Đặt $x_2 - x_1 = d + \Delta d$, ở đây $\Delta d \ll d$, phương trình trên sẽ trở thành

$$m(\Delta\ddot{d}) + 2k(d + \Delta d) = \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0(d + \Delta d)^2} ,$$

ở đây $\Delta\ddot{d} \equiv \frac{d^2\Delta d}{dt^2}$. Với $d^3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{k}$ và $\Delta d \ll d$, chúng có thể viết lại như sau

$$m\Delta\ddot{d} + 6k\Delta d = 0$$

chỉ giữ lại số hạng có hệ số bậc một $\frac{\Delta d}{d}$. Do đó tần số góc của dao động nhỏ là

$$\omega = \sqrt{\frac{6k}{m}} \, .$$

(d) Với $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ và θ như hình 1.57, chúng ta có thể viết phương trình chuyển động 2 chiều của hệ

$$m\ddot{\mathbf{r}}_1 = qE\mathbf{i} + k(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - \mathbf{F}_c \, , \tag{3}$$

$$m\ddot{\mathbf{r}}_2 = qE\mathbf{i} + k(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \mathbf{F}_c \, , \tag{4}$$

với

$$\mathbf{F}_c = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \, .$$

Cộng (3) với (4) chúng ta thu được

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 + \ddot{\mathbf{r}}_2 = \left(\frac{2qE}{m}\right)\mathbf{i} \, ,$$

tương đương với hai phương trình vô hướng

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = \frac{2qE}{m} \, ,$$

$$\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 = 0 \, .$$

Lấy tích phân ta được

$$x_1 + x_2 = \frac{qEt^2}{m} + C_1 t + C_2 \, , \tag{5}$$

$$y_1 + y_2 = D_1 t + D_2 \, , \tag{6}$$

ở đây C_1, C_2, D_1, D_2 là các hằng số tích phân. Lấy (4) trừ (3) chúng ta thu được

$$m(\ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1) = 2\mathbf{F}_c - 2k(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \, .$$

Đặt $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}$ và viết lại phương trình như sau

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m}\left(\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 r^2} - 2kr\right)\mathbf{e}_r \, .$$

Trong hệ tọa độ cực ta có

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta \, ,$$

nên

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0\,,$$

cho ta

$$r^2\dot{\theta} = \text{ hằng số } = H, \quad \text{chẳng hạn}\,.$$

Chúng ta cũng có

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 m r^2} - \frac{2kr}{m}\,.$$

Với

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \dot{r}\frac{d\dot{r}}{dr} = \frac{1}{2}\frac{d}{dr}(\dot{r}^2), \qquad r\dot{\theta}^2 = \frac{H^2}{r^3}\,,$$

nó có thể được viết lại như

$$\frac{d}{dr}(\dot{r}^2) = \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 m r^2} + \frac{2H^2}{r^3} - \frac{4kr}{m}\,.$$

Lấy tích phân chúng ta thu được

$$\dot{r}^2 = F - \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 m r} - \frac{2kr^2}{m} - \frac{H^2}{r^2}\,,$$

trong đó F là hằng số. Lại lấy tích phân, chúng ta thu được

$$\int^r \frac{dr}{\sqrt{F - \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 m r} - \frac{2kr^2}{m} - \frac{H^2}{r^2}}} = t + W\,, \tag{7}$$

trong đó W là hằng số. Cũng thế, khi

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

chúng ta thu được

$$H = r^2\dot{\theta} = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]\frac{d}{dt}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)\right]\,,$$

hoặc

$$Ht + V = \int [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] d\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)\right]\,, \tag{8}$$

trong đó V là hằng số.

Từ bốn phương trình từ 5, 6, 7, 8 chúng ta tìm được x_1, x_2, y_1 và y_2 là hàm theo t. Chú ý rằng các hằng số tích phân $C_1, C_2, D_1, D_2, H, V, F$ và W được xác định từ các điều kiện ban đầu.

1086

Một bộ điều khiển ở cơ cấu định thời sử dụng một vật nặng dao động ở phía cuối của một trục nằm ngang kích bởi một bánh đà quay đều như hình 1.58. Một lò xo lá có hệ số đàn hồi K và có thể không xoắn mà cũng không uốn cong ngoại trừ một phương vuông góc với phía phẳng (hồi phục) của nó. Vận tốc góc của trục quay là ω dẫn động từ bên ngoài, dần dần tăng cho đến khi cộng hưởng xuất hiện (cộng hưởng ở đây tức là vật nặng chuyển động theo quỹ đạo tròn). Lực cản không khí (tỉ lệ với vận tốc của vật nặng) triệt tiêu năng lượng đưa vào và điều đó giới hạn cộng hưởng với biên độ hữu hạn. Bạn có thể cho rằng biên độ dao động của lò xo nhỏ và lò xo luôn luôn ở chế độ thẳng. Đối với vấn đề này, bạn dứt khoát không cần tính đến lực cản của không khí.

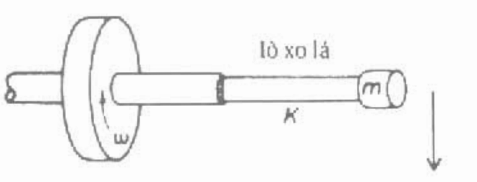
(a) Hãy chỉ ra cho biết có hai tần số góc khác nhau khi xuất hiện ở một cộng hưởng. Tần số đó là gì?

(b) Mô tả quỹ đạo chuyển động của vật nặng đối với một trong hai tần số cộng hưởng (chẳng hạn như vẽ một bức tranh của vấn đề này).

(c) Ở tần số cộng hưởng thấp, viết một phương trình momen đối với trục quay ổn định như là một hàm của ω và thời gian.

(d) Chỉ ra rằng có một giới hạn trên đối với momen của trục quay tại cộng hưởng dưới. Điều gì xảy ra nếu lò xo dẫn động đồng hồ sinh ra momen quay lớn hơn giới hạn trên này?

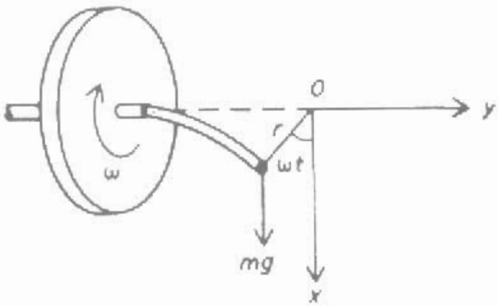
(UC, Berkeley)



Hình 1.58

Lời giải:

(a) Khi bánh đà quay với vận tốc góc ω, vật m phải chuyển động dưới ba chiều. Tuy nhiên, dao động dọc của lò xo là nhỏ, chúng ta có thể coi như vật không chuyển động theo chiều của trục. Lò xo chỉ có thể uốn cong theo một hướng, gọi r là ly độ của vật m theo chiều đó như hình 1.59. Vận tốc góc là không đổi khi cộng hưởng xảy ra và chúng ta có thể coi như đó là phương trình chuyển động vào lúc cộng hưởng.



Hình 1.59

Lực đàn hồi là $-Kr$ và thành phần của trọng lực tác dụng theo hướng r là $mg\cos(\omega t)$, chúng ta có thể bỏ qua lực cản của không khí, khi đó phương trình dao động của vật nặng là

$$mg\cos(\omega t) - Kr = m(\ddot{r} - r\omega^2)\ ,$$

tức là

$$\ddot{r} + \lambda^2 r = g\cos(\omega t)\ .$$

trong đó

$$\lambda^2 = \frac{K}{m} - \omega^2\ .$$

Nghiệm riêng của phương trình có dạng $r = A\cos(\omega t)$, chúng ta tìm $A = \frac{g}{\lambda^2 - \omega^2}$. Phương trình thuần nhất $\ddot{r} + \lambda^2 r = 0$ có nghiệm tổng quát là

$$r = B\cos(\lambda t) + C\sin(\lambda t)\ .$$

Khi đó giả sử điều kiện ban đầu $r(0) = a$, $\dot{r}(0) = b$, ta thu được nghiệm tổng quát

$$r = a\cos(\lambda t) + \frac{b}{\lambda}\sin(\lambda t) + \frac{g}{\omega^2 - \lambda^2}[\cos(\lambda t) - \cos(\omega t)]\ . \qquad (1)$$

Một chuyển động tròn có bán kính R có thể được mô tả bởi phương trình trong hệ tọa độ cực là

$$r = 2R\cos\theta \ .$$

Phương trình (1) có thể được viết dưới dạng này với điều kiện riêng biệt như sau. Nếu chúng ta thay λ trong (1) bằng 0, ta thu được

$$r = a + bt + \frac{g}{\omega^2}(1 - \cos\omega t) \ .$$

Nếu chúng ta đặt

$$a + bt + \frac{g}{\omega^2} = 0 \ ,$$

Chúng ta thu được phương trình quỹ đạo chuyển động tròn

$$r = -\frac{g}{\omega^2}\cos(\omega t) \ .$$

Nghiệm của phương trình này với điều kiện ban đầu $a = -\frac{g}{\omega^2}$, $b = 0$, và với vận tốc góc ω thỏa mãn $\lambda = 0$, hoặc

$$\omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}} \ ,$$

đó là một trong các tần số cộng hưởng.

Một cộng hưởng khác thu được nếu chúng ta đặt $\lambda = \omega$ vào (1), sẽ trở thành

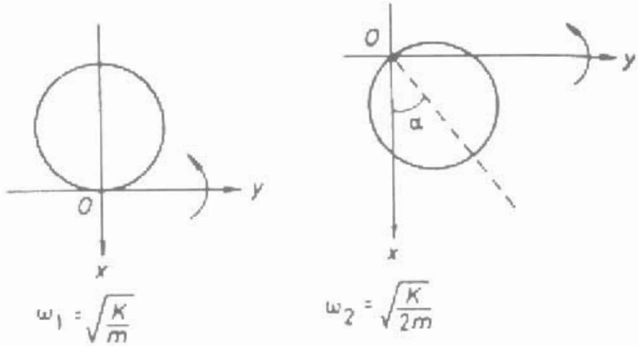
$$r = a\cos(\omega t) + \frac{b}{\omega}\sin(\omega t) + \frac{gt}{2\omega}\sin(\omega t) \ .$$

Số hạng cuối cùng ở vế bên phải của phương trình có biên độ phân kì theo thời gian. Tuy nhiên, lực cản của không khí sẽ làm mất đi năng lượng đưa vào và giới hạn cộng hưởng tới một biên độ hữu hạn. Số hạng này có thể tiến đến 0 (có thể coi như bởi một hệ số tắt dần $-\beta\dot{r}$ trong phương trình). Bỏ qua số hạng cuối cùng chúng ta thu được

$$r = a\cos(\omega t) + \frac{b}{\omega}\sin(\omega t) = A\cos(\omega t - \alpha) \ ,$$

đó chính là phương trình mô tả chuyển động quỹ đạo tròn. Tần số cộng hưởng tương ứng thu được là $\lambda = \omega$, hoặc

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K}{2m}} \ .$$



Hình 1.60

(b) Quỹ đạo tương ứng khi cộng hưởng như hình 1.60. Với cộng hưởng ở ω_1, điều kiện ban đầu phải được chọn hợp lý. Mặt khác, cộng hưởng tại ω_2 có thể xuất hiện dưới bất kì điều kiện ban đầu nào để xác định biên độ A và góc α. Do đó ω_2 là tần số cộng hưởng thực tế.

(c) Phương trình chuyển động ngang của vật nặng là

$$F - mg\sin(\omega t) = m(r\dot{\omega} + 2\omega\dot{r}) .$$

Với cộng hưởng thấp, $r = A\cos(\omega t - \alpha)$, chúng ta có $\dot{\omega} = 0$, $\dot{r} = -\omega A\sin(\omega t - \alpha)$, nên

$$F = m[-2A\omega^2\sin(\omega t - \alpha) + g\sin(\omega t)] ,$$

và momen quay là

$$\tau = Fr = mA\cos(\omega t - \alpha)[-2A\omega^2\sin(\omega t - \alpha) + g\sin(\omega t)] .$$

(d) Không mất tính tổng quát khi chúng ta đặt $\alpha = 0$. Khi đó

$$\tau = mA\left(\frac{g}{2} - A\omega^2\right)\sin(2\omega t) .$$

ở đây $\tau \le mA(\frac{g}{2} - A\omega^2)$ đối với cộng hưởng thấp. Nếu momen quay sinh ra bởi bánh xe lò xo là lớn hơn giới hạn trên đó, ω sẽ tăng và trạng thái cộng hưởng sẽ không giữ lâu hơn.

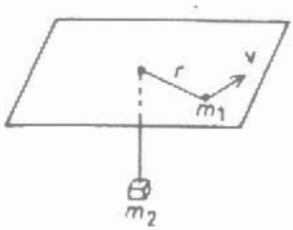
1087

Một vật m_1 chuyển động quanh một lỗ trống trên mặt phẳng của cái bàn nằm ngang không ma sát. Vật được nối với một lò xo xuyên qua lỗ. Một vật m_2 bị buộc vào đầu kia của cái lò xo (hình 1.61).

(a) Biết vị trí ban đầu $\mathbf{R}_0$ và vận tốc $\mathbf{V}_0$ trên mặt phẳng của cái bàn và vật m_1 và m_2, tìm phương trình xác định bán kính quỹ đạo lớn nhất và nhỏ nhất.

(b) Tìm tần số dao động của bán kính quỹ đạo khi quỹ đạo chỉ hơi lệch so với vòng tròn.

(*Princeton*)



Hình 1.61

Lời giải:

(a) Phương trình chuyển động của m_1 và m_2 là

$$m_1(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -T \,, \quad (1)$$

$$m_1 r^2\dot{\theta} = m_1 h \,, \quad (2)$$

$$T - m_2 g = m_2\ddot{r} \,, \quad (3)$$

trong đó $m_1 h$ là momen xung lượng, là hằng số. Khử T từ (1) và (3) chúng ta thu được

$$(m_1 + m_2)\ddot{r} - m_1 r\dot{\theta}^2 + m_2 g = 0 \,. \quad (4)$$

Kết hợp phương trình (2) và (4) ta được

$$(m_1 + m_2)\ddot{r} - \frac{m_1 h^2}{r^3} = -m_2 g \,. \quad (5)$$

Với $\ddot{r} = \dot{r}\frac{d\dot{r}}{dr} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{r}^2}{dr}$, lấy tích phân biểu thức trên ta có

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{r}^2 + \frac{m_1 h^2}{2r^2} = -m_2 g r + C \,. \quad (6)$$

Ở $t = 0$, $r = R_0$, $\dot{r} = V_0\cos\phi$, $r\dot{\theta} = V_0\sin\phi$, ta có $h = R_0 V_0\sin\phi$, ở đây ϕ là góc giữa $\mathbf{R}_0$ và $\mathbf{V}_0$. Hằng số tích phân C có thể xác định được

$$C = \frac{1}{2}[(m_1 + m_2)V_0^2\cos^2\phi + m_1 V_0^2\sin^2\phi] + m_2 g R_0 \,.$$

Để r có cực trị, $\dot{r} = 0$, phương trình (6) trở thành

$$2m_2gr^3 - 2Cr^2 + m_1h^2 = 0\ ,$$

mà nghiệm sẽ cho giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của bán kính r.

(b) Khi quỹ đạo của m_1 là đường tròn, $\ddot{r} = 0$, và (5) trở thành

$$h^2 = \frac{m_2gr_0^3}{m_1}\ , \tag{7}$$

với r_0 là bán kính quỹ đạo tròn. Khi quỹ đạo hơi lệch so với tròn, đặt $r = r_0 + x$, trong đó $x \ll r_0$. Phương trình (5) sẽ trở thành

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} - m_1h^2/(r_0 + x)^3 = -m_2g\ .$$

Với

$$(r_0 + x)^{-3} = r_0^{-3}\left(1 + \frac{x}{r_0}\right)^{-3} \approx r_0^{-3}\left(1 - \frac{3x}{r_0}\right)\ ,$$

Phương trình trên trở thành

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} - m_1h^2(r_0^{-3} - 3xr_0^{-4}) = -m_2g\ .$$

Sử dụng (7) chúng ta có

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + \frac{3m_2gx}{r_0} = 0\ .$$

Điều này cho thấy x dao động điều hòa đơn giản với tần số

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3m_2g}{(m_1 + m_2)r_0}}\ .$$

1088

(a) Cho một dao động tử điều hòa tắt dần (trong 1 chiều) với phương trình chuyển động

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2x - \gamma\dot{x} + A\cos(\omega t)\ .$$

Tốc độ tiêu hao năng lượng trung bình theo thời gian là bao nhiêu?

(b) Cho dao động tử điều hòa với phương trình chuyển động

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2x + \alpha x^2 + A\cos(\omega t)\ ,$$

trong đó α là hằng số nhỏ.

Vào thời điểm $t = 0$, $x = 0$ và $\dot{x} = 0$. Giải đối với chuyển động sau đó, bao gồm các số hạng bậc 1 của α.

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Phương trình chuyển động là phần thực của

$$m\ddot{z} + m\omega_0^2 z + \gamma\dot{z} = Ae^{i\omega t} .$$

Với nghiệm trạng thái ổn định, ta thử $z = z_0 e^{i\omega t}$. Thay vào ta có

$$z_0 = \frac{A}{m(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega} = Be^{-i\phi} ,$$

với

$$B = \frac{A}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}, \qquad \phi = \text{arctg}\frac{\gamma\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} .$$

Tốc độ thực hiện công bởi lực $F = Re(Ae^{i\omega t})$ là

$$\begin{aligned} P &= ReF \cdot Re\dot{z} = \frac{1}{4}(F + F^*)(\dot{z} + \dot{z}^*) \\ &= \frac{1}{4}(F\dot{z} + F^*\dot{z}^* + F^*\dot{z} + F\dot{z}^*) = \frac{1}{4}(F^*\dot{z} + F\dot{z}^*) , \end{aligned}$$

Khi lấy trung bình trong một chu kì thì $F\dot{z}$ và $F^*\dot{z}^*$ mỗi số hạng mang một hệ số thời gian $e^{\pm 2i\omega t}$. Như vậy công trung bình được thực hiện là bị triệt tiêu như lấy tích phân trong một chu kì

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{i\omega AB}{4}(e^{-i\varphi} - e^{i\varphi}) = \frac{\omega AB}{2}\sin\varphi \\ &= \frac{\omega AB}{2}\frac{B}{A}\gamma\omega = \frac{\gamma\omega^2 B^2}{2} = \frac{\gamma\omega^2 A^2}{2[m^2(\omega_0^2 - \omega^2) + \gamma^2\omega^2]} . \end{aligned}$$

Ở trạng thái dừng, đó là tốc độ tiêu tán năng lượng của dao động tử, nó được cho bởi công thực hiện đối với số hạng tiêu tán, tức là

$$\langle P' \rangle = \gamma(Re\dot{z})^2 = \gamma\frac{\dot{z}\dot{z}^*}{2} = \gamma\frac{\omega^2 B^2}{2} .$$

Như đã lưu ý, hai cách tiếp cận cho cùng kết quả.

(b) Phương trình chuyển động bây giờ là

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x - A\cos(\omega t) = \alpha x^2 . \qquad (1)$$

Với α là một số nhỏ, chúng ta có thể viết lại nghiệm như sau

$$x = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \cdots \approx x_0 + \alpha x_1$$

trong xấp xỉ bậc một. x_0 là nghiệm đối với $\alpha = 0$, tức là nghiệm của

$$m\ddot{x}_0 + m\omega_0^2 x_0 = A\cos(\omega t) .$$

Một nghiệm riêng của phương trình thu được bằng cách đặt $x_0 = B'\cos(\omega t)$. Thế vào cho ta $B' = \frac{A}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$. Nghiệm tổng quát của phần thuần nhất của phương trình là dao động điều hòa. Nghiệm tổng quát đầy đủ là

$$x_0 = C\cos(\omega_0 t + \psi) + B'\cos(\omega t) .$$

Với điều kiện ban đầu $x_0 = \dot{x}_0 = 0$ ở $t = 0$ cho $\psi = 0$, $C = -B'$, hay

$$x_0 = B'[\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)] .$$

Thay thế $x = x_0 + \alpha x_1$ vào (1) và bỏ qua các số mũ của α bậc cao hơn 1, chúng ta có

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 &\approx \frac{x_0^2}{m} \\
&= \frac{B'^2}{m}[\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)]^2 \\
&= \frac{B'^2}{m}\left\{1 + \frac{1}{2}\cos(2\omega t) + \frac{1}{2}\cos(2\omega_0 t) - \cos[(\omega_0 - \omega)t] - \cos[(\omega_0 + \omega)t]\right\} ,
\end{aligned}$$

hoặc ở trong dạng phức

$$\ddot{z}_1 + \omega_0^2 z_1 \approx \frac{B'^2}{m}\left[1 + \frac{1}{2}e^{i2\omega t} + \frac{1}{2}e^{i2\omega_0 t} - e^{i(\omega_0 - \omega)t} - e^{i(\omega_0 + \omega)t}\right] . \qquad (2)$$

với một nghiệm riêng hãy thử

$$z_1 = a + be^{i2\omega t} + ce^{i2\omega_0 t} + de^{i(\omega_0 - \omega)t} + fe^{i(\omega_0 + \omega)t} .$$

Thay vào ta được

$$a = \frac{B'^2}{m\omega_0^2}, \qquad b = \frac{B'^2}{2m(\omega_0^2 - 4\omega^2)}, \qquad c = -\frac{B'^2}{6m\omega_0^2} ,$$
$$d = \frac{B'^2}{m(\omega^2 - 2\omega\omega_0)}, \qquad f = \frac{B'^2}{m(\omega^2 + 2\omega\omega_0)} .$$

Nghiệm tổng quát của (1) với bậc 1 của α, là

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha x_1 \\ &= B'[\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)] \\ &\quad + \alpha\{D\cos(\omega_0 t + \theta) + a + b\cos(2\omega t) + c\cos(2\omega_0 t) \\ &\quad + d\cos[(\omega_0 - \omega)t] + f\cos[(\omega_0 + \omega)t]\} \,. \end{aligned}$$

Với điều kiện ban đầu $x = \dot{x} = 0$ ở $t = 0$ ta có $\theta = 0$ và

$$D = -(a + b + c + d + f) = \frac{10B'^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{3m\omega_0^2(\omega^2 - 4\omega_0^2)(\omega_0^2 - 4\omega^2)} \,.$$

Do đó, chuyển động của dao động tử điều hòa được mô tả xấp xỉ bởi

$$\begin{aligned} x \approx\ & \frac{A[\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)]}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} + \frac{10\alpha A^2 \cos(\omega_0 t)}{3m^3\omega_0^2(\omega^2 - 4\omega_0^2)(\omega_0^2 - 4\omega^2)} + \frac{\alpha A^2}{m^3(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \\ & \times \left\{\frac{1}{\omega_0^2} + \frac{\cos(2\omega t)}{2(\omega_0^2 - 4\omega^2)} - \frac{\cos(2\omega_0 t)}{6\omega_0^2} + \frac{\cos[(\omega_0 - \omega)t]}{\omega^2 - 2\omega\omega_0} + \frac{\cos[(\omega_0 + \omega)t]}{\omega^2 + 2\omega\omega_0}\right\} \,. \end{aligned}$$

1089

Như đã biết, nếu ta khoan một kênh nhỏ qua trái đất rắn không quay mật độ đồng nhất từ Buffalo đi qua tâm trái đất và đến Olaffub ở phía bên kia, và thả 1 hòn đá vào lỗ, ta sẽ thấy nó ở Olaffub sau một thời gian $T_1 = \frac{\pi}{\omega_0}$, ở đây ω_0 là hằng số. Bây giờ, thay vì đánh rơi hòn đá, ta ném nó vào lỗ với vận tốc ban đầu v_0. v_0 là bao nhiêu để hòn đá xuất hiện ở Olaffub sau khoảng thời gian $T_2 = T_1/2$? Giá trị đó tính theo ω_0 và R, bán kính trái đất.

(*Princeton*)

Lời giải:

Gọi r là khoảng cách giữa viên đá, có khối lượng m, với tâm của trái đất. Lực hấp dẫn tác dụng lên nó là $F = -\frac{Gm4\pi r^3\rho}{3r^2} = -\omega_0^2 mr$, ở đây $\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi G\rho}{3}}$, ρ là mật độ của trái đất đồng đều. Phương trình chuyển động của viên đá khi đó là

$$\ddot{r} = -\omega_0^2 r \,.$$

Viên đá thực hiện dao động điều hòa đơn giản với một chu kì $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Nếu viên đá bắt đầu từ vị trí Buffalo, nó sẽ đến Olaffub sau một thời gian $T_1 = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_0}$.

Nghiệm của phương trình chuyển động là

$$r = A\cos(\omega t + \varphi)\ .$$

Viên đá bắt đầu tại $r = R$ với vận tốc ban đầu $\dot{r} = -v_0$. Chúng ta có

$$R = A\cos\varphi, \qquad -v_0 = -A\omega_0 \sin\varphi\ ,$$

cho

$$\varphi = \text{arctg}\left(\frac{v_0}{R\omega_0}\right), \qquad A = \sqrt{R^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}\ .$$

Để đến Olaffub tại $t = \frac{T_1}{2} = \frac{\pi}{2\omega_0}$, ta quy định

$$-R = \sqrt{R^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sqrt{R^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}\sin\varphi\ .$$

Với $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, chúng ta được

$$\frac{R^2}{R^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} + \frac{R^2}{R^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} = 1\ ,$$

cho ta

$$v_0 = R\omega_0\ .$$

1090

(a) Một hạt có khối lượng m chuyển động dưới tác dụng của thế năng $V(x) = cx/(x^2 + a^2)$, trong đó c và a là hằng số dương. Tìm vị trí trạng thái cân bằng bền và chu kì dao động nhỏ quanh đó.

(b) Nếu hạt bắt đầu từ điểm đó với vận tốc v, tìm khoảng giá trị của v mà nó (1) dao động, (2) thoát đến $-\infty$, (3) thoát tới $+\infty$.

(Princeton)

Lời giải:

(a) Tại vị trí cân bằng, $F = -dV/dx = 0$, nghĩa là

$$\frac{dV}{dx} = \frac{c(a^2 - x^2)}{(x^2 + a^2)^2} = 0\ .$$

Do đó, có hai vị trí cân bằng, $x_1 = a$, $x_2 = -a$. Vậy

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{2cx(x^2 - 3a^2)}{(x^2 + a^2)^3} .$$

Chúng ta có

$$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x_1} < 0, \qquad \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x_2} > 0 .$$

Tiếp theo, x_1 là vị trí trạng thái cân bằng không bền, và x_2 là vị trí cân bằng bền.

Với dao động nhỏ quanh vị trí cân bằng bền, đặt $x = -a + x'$, ở đây $x' \ll a$. Phương trình chuyển động trở thành

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = -\frac{cx'(2a - x')}{[(x' - a)^2 + a^2]^2} \approx -\frac{cx'}{2a^3} .$$

Do đó, chu kì của dao động nhỏ tại $x = -a$ là

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2ma^3}{c}} = 2\pi a\sqrt{\frac{2ma}{c}} .$$

(b) Năng lượng tổng cộng của hạt là

$$E = \frac{mv^2}{2} + V(-a) = \frac{mv^2}{2} - \frac{c}{2a} .$$

(1) Với hạt bị hạn chế quanh một vùng, chúng ta có $E < 0$, tức là

$$v < \sqrt{\frac{c}{ma}} .$$

(2) Với $E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x)$, đối với hạt chuyển động đến $x = -\infty$, chúng ta có $E > V(-\infty) = 0$, nghĩa là

$$v > \sqrt{\frac{c}{ma}} .$$

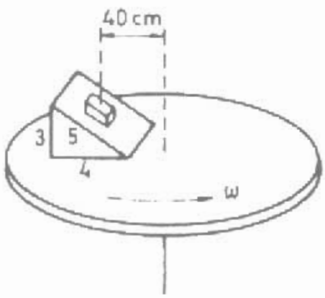
(3) Để thoát đến $+\infty$, hạt phải đi qua điểm $x_2 = +a$, tại đó thế năng là cực đại. Do đó ta đòi hỏi $E > V(a) = \frac{c}{2a}$, nghĩa là

$$v > \sqrt{\frac{2c}{ma}} .$$

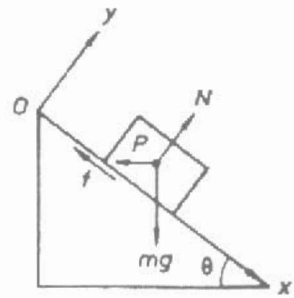
1091

Một mặt phẳng nghiêng 3-4-5 được đặt cố định trên một đĩa tròn có thể quay được. Trên mặt phẳng nghiêng có một vật được đặt tự do và hệ số ma sát nghỉ giữa nó và mặt phẳng nghiêng là $\mu_s = 1/4$. Vật được giữ tại vị trí 40 cm so với tâm quay của đĩa (hình 1.62). Tìm vận tốc góc ω nhỏ nhất để giữ vật khỏi bị trượt xuống mặt phẳng (về phía tâm quay).

(SUNY, Buffalo)



Hình 1.62



Hình 1.63

Lời giải:

Như trình bày trên hình 1.63, các lực tác động lên vật là trọng lực mg, phản lực theo pháp tuyến N, lực ma sát nghỉ f, và lực ly tâm $f = \mu_s N$, $P = m\omega^2 r$. Như vậy, điều kiện để cân bằng là

$$mg\sin\theta = P\cos\theta + \mu_s N \ ,$$
$$N = mg\cos\theta + P\sin\theta \ .$$

Từ đó

$$mg\sin\theta = P\cos\theta + \mu_s mg\cos\theta + \mu_s P\sin\theta \ ,$$

cho

$$P = \left(\frac{\sin\theta - \mu_s\cos\theta}{\cos\theta + \mu_s\sin\theta}\right) mg = m\omega^2 r \ ,$$

hay

$$\omega^2 = \left(\frac{\sin\theta - \mu_s\cos\theta}{\cos\theta + \mu_s\sin\theta}\right)\frac{g}{r} = \left(\frac{\frac{3}{5} - \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}}{\frac{4}{5} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}}\right)\cdot\frac{9,8}{0,4} = 10,3 \ ,$$

nghĩa là

$$\omega = 3,2 \text{ rad/s} \ .$$

1092

Một vật khối lượng m treo cân bằng bởi một lò xo được kéo với một lực $F = -K(x - l)$, trong đó x là độ dài của lò xo và l là độ dài của nó khi thả lỏng. Tại thời điểm $t = 0$ điểm gắn lò xo ở trên cùng bắt đầu dao động lên xuống theo dạng sin với biên độ A, tần số góc ω như trên hình 1.64. Thiết lập và giải phương trình chuyển động cho $x(t)$.

(SUNY, Buffalo)

Hình 1.64

Lời giải:

Coi điểm trên cùng của lò xo, P, là gốc của trục tọa độ, vật m có tọa độ x. Tại $t = 0$, P bắt đầu dao động dưới dạng sin, như vậy, khoảng cách giữa điểm P và điểm đỡ cố định là $A\sin(\omega t)$. Do đó, vật m có phương trình chuyển động

$$m\frac{d^2}{dt^2}[x + A\sin(\omega t)] = mg - K(x - l) .$$

Đặt $y = x - l - \frac{mg}{K}$, $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$. Phương trình trên có thể được viết là

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \omega^2 A\sin(\omega t) .$$

Thử nghiệm đặc biệt $y = B\sin(\omega t)$. Thay thế cho

$$B = \frac{\omega^2 A}{\omega_0^2 - \omega^2} .$$

Ta có nghiệm tổng quát là

$$y = C\cos(\omega_0 t) + D\sin(\omega_0 t) + \frac{\omega^2 A\sin(\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2} .$$

Sử dụng điều kiện ban đầu

$$mg = K(x - l), \text{ tức là } x = \frac{mg}{K} + l, \text{ hay } y = 0$$

Và $\dot{y} = 0$, chúng ta được

$$C = 0, \qquad D = \frac{\omega^3 A}{\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Và ta có

$$x(t) = \frac{\omega^2 A}{\omega_0^2 - \omega^2}\left[\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\right] + \frac{mg}{K} + l\,.$$

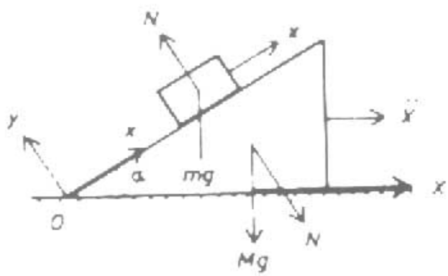
1093

Một vật khối lượng m trượt không ma sát trên một mặt phẳng nghiêng có khối lượng M, mặt phẳng nghiêng lại có thể trượt tự do không ma sát trên mặt bàn nằm ngang (hình 1.65). Viết các phương trình đầy đủ để tìm chuyển động của vật và mặt phẳng nghiêng. Không cần phải giải những phương trình đó.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Như trên hình 1.65, đặt x, y là hệ tọa độ gắn với mặt phẳng nghiêng, trục tọa độ nằm ngang của nó trên hệ tọa độ phòng thí nghiệm được biểu thị là X. Các lực tác động lên vật và mặt phẳng nghiêng được trình bày trên biểu đồ.



Hình 1.65

Chúng ta có phương trình cho mặt phẳng nghiêng

$$M\ddot{X} = N\sin\alpha\,,$$

cho chuyển động của vật dọc theo phương x

$$m(\ddot{x} + \ddot{X}\cos\alpha) = -mg\sin\alpha\,,$$

và cho chuyển động của vật dọc theo phương y

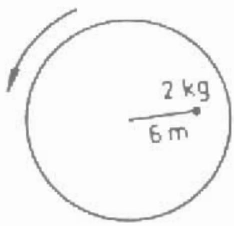
$$-m\ddot{X}\sin\alpha = N - mg\cos\alpha\,.$$

Ba phương trình cho ba ẩn số N, x và X đó có thể được giải để tìm chuyển động của hệ.

1094

Một vòng quay ngựa gỗ (thứ thường thấy trong công viên) bắt đầu quay từ lúc nghỉ với gia tốc góc không đổi là 0,02 vòng trên giây bình phương. Một người ngồi trên ghế cách trục quay 6 m cầm một quả bóng nặng 2 kg (xem hình 1.66). Tính độ lớn và chiều của lực người đó cần dùng để giữ quả bóng 5 giây sau khi vòng quay bắt đầu quay. Chỉ rõ chiều so với bán kính của ghế mà người đó ngồi.

(*Wisconsin*)



Hình 1.66

Lời giải:

Xét hai hệ tọa độ L, R với cùng một gốc. L được cố định với phòng thí nghiệm, và R quay với vận tốc góc ω. Các đạo hàm theo thời gian của vectơ $\mathbf{A}$ trong hai hệ liên hệ với nhau bởi

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_L = \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_R + \omega \times \mathbf{A}\,.$$

Tiếp đó, cho một điểm có bán kính vectơ $\mathbf{r}$ có gốc là gốc tọa độ ta có

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_L = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_R + \omega \times \mathbf{r}\,,$$

và

$$\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_L = \left(\frac{d}{dt}\right)_L \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_R + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_L + \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_L \times \mathbf{r} .$$

Hay

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_L \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_R + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_R ,$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_L = \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_R + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) .$$

Đặt

$$\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_R = \mathbf{a}', \qquad \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_R = \mathbf{v}', \qquad \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_L = \dot{\boldsymbol{\omega}} ,$$

ta có

$$\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_L = \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} .$$

Trong hệ quay gắn với vòng quay ngựa, phương trình chuyển động của quả bóng $\mathbf{F} = m\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)_L$ khi đó cho

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + m\omega^2\mathbf{r} - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' ,$$

vì $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{r}$ do vậy $\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -\omega^2\mathbf{r}$. Vì bóng được giữ ổn định so với vòng quay ngựa, $\mathbf{a}' = 0$, $\mathbf{v}' = 0$, và

$$\mathbf{F} = -m\omega^2\mathbf{r} + m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} .$$

Với hệ quay R, đặt trục z dọc theo trục quay và trục x từ tâm quay hướng ra ghế, ta có

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\omega}\mathbf{k}, \qquad \mathbf{r} = r\mathbf{i} .$$

Lực $\mathbf{F}$ tác động lên bóng là lực tổng hợp của lực $\mathbf{f}$ do người giữ và trọng lực

$$\mathbf{F} = \mathbf{f} - mg\mathbf{k} .$$

Ta có

$$\mathbf{f} = -m\omega^2 r\mathbf{i} + m\dot{\omega}r\mathbf{j} + mg\mathbf{k} .$$

Với $\dot{\omega} = 0,02 \times 2\pi$ rad/s^2, $\omega = 5\dot{\omega}$, $m = 2$ kg, $r = 6$ m, ta có

$$\mathbf{f} = -4,74\mathbf{i} + 1,51\mathbf{j} + 19,6\mathbf{k} \text{ N} ,$$

với độ lớn = 20,2 N.

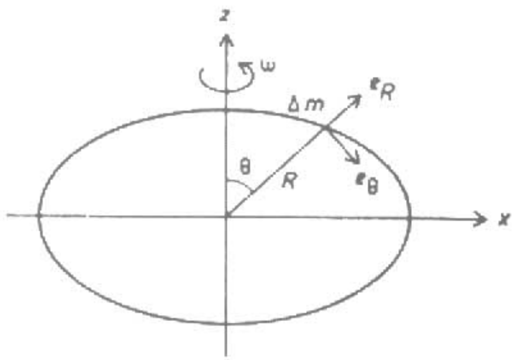
1095

Một hành tinh có mật độ đồng nhất quay quanh một trục cố định với vận tốc góc ω. Do có chuyển động quay này, bán kính xích đạo R_E lớn hơn một chút so với bán kính cực của nó R_P như được mô tả bởi tham số $\varepsilon = (R_E - E_P)/R_E$. Kết quả nhiễu loạn đó đóng góp vào thế hấp dẫn là

$$\Phi(R,\theta) = \frac{2GM_e\varepsilon R_E^2 P_2(\cos\theta)}{5R^3} ,$$

trong đó θ là góc cực và $P_2(\cos\theta) = \frac{3\cos^2\theta}{2} - \frac{1}{2}$. Nêu rõ điều kiện cân bằng khả dĩ của bề mặt hành tinh và tính giá trị của ε theo tham số $\lambda = \frac{\omega^2 R_E}{g}$, trong đó g là gia tốc hấp dẫn. Ước lượng trị số ε của trái đất.

(*Wisconsin*)



Hình 1.67

Lời giải:

Các lực tác dụng lên một phần tử khối lượng Δm trên bề mặt của hành tinh là lực hấp dẫn, lực ly tâm và lực ràng buộc bởi phần còn lại của hành tinh. Điều kiện cân bằng của bề mặt là hợp lực của lực hấp dẫn và lực ly tâm vuông góc với bề mặt, có nghĩa là không có thành phần tiếp tuyến.

Giả sử bề mặt của hành tinh là một elipsoit tròn xoay với trục z là trục đối xứng như trên hình 1.67. Đường giao của elipsoit tròn xoay với mặt phẳng xz là một hình elip

$$z = R_P\cos\alpha, \qquad x = R_E\sin\alpha ,$$

trong đó α là tham số. Góc cực θ của một điểm trên elip cho bởi

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{x}{z} = \frac{R_E}{R_P}\mathrm{tg}\alpha .$$

Đơn vị của tiếp tuyến τ với elip tại điểm này là

$$\begin{aligned}\tau &\propto \mathbf{i}dx + \mathbf{k}dz = \left(\mathbf{i}\frac{dx}{d\alpha} + \mathbf{k}\frac{dz}{d\alpha}\right)d\alpha \\ &= (\mathbf{i}R_E\cos\alpha - \mathbf{k}R_P\sin\alpha)d\alpha = \frac{\cos\alpha}{R_E}(\mathbf{i}R_E^2 - \mathbf{k}R_P^2\mathrm{tg}\theta)d\alpha\ .\end{aligned}$$

Lực ly tâm $\mathbf{f}_1$ tác động lên Δm là

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{i}\Delta mR\omega^2\sin\theta$$

và lực hấp dẫn tác động lên nó là

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_2 &= -\nabla V = \nabla\left[\frac{GM_e\Delta m}{R} + \frac{2GM_e\varepsilon R_E^2\Delta m}{5R^3}P_2(\cos\theta)\right] \\ &= GM_e\Delta m\left(-\frac{1}{R^2} - \frac{6\varepsilon R_E^2}{5R^4}P_2(\cos\theta)\right)\mathbf{e}_r - \frac{6GM_e\varepsilon R_E^2\Delta m}{5R^4}\sin\theta\cos\theta\mathbf{e}_\theta\ .\end{aligned}$$

Với

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= \mathbf{i}\sin\theta + \mathbf{k}\cos\theta\ , \\ \mathbf{e}_\theta &= \mathbf{i}\cos\theta - \mathbf{k}\sin\theta\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_2 &= GM_e\Delta m\left[-\frac{\sin\theta}{R^2} - \frac{6\varepsilon R_E^2}{5R^4}\sin\theta P_2(\cos\theta) - \frac{6\varepsilon R_E^2}{5R^4}\sin\theta\cos^2\theta\right]\mathbf{i} \\ &\quad + GM_e\Delta m\left[-\frac{\cos\theta}{R^2} - \frac{6\varepsilon R_e^2}{5R^4}\cos\theta P_2(\cos\theta) + \frac{6\varepsilon R_E^2}{5R^4}\sin^2\theta\cos\theta\right]\mathbf{k} \\ &= GM_e\Delta m\left\{\mathbf{i}\left[-\frac{1}{R^2} - b\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2} + \cos^2\theta\right)\right]\sin\theta\right. \\ &\quad \left. + \mathbf{k}\left[-\frac{1}{R^2} - b\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2} - \sin^2\theta\right)\right]\cos\theta\right\}\ ,\end{aligned}$$

với $b = 6\varepsilon R_E^2/5R^4$.

Điều kiện cân bằng của bề mặt là

$$(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2)\cdot\tau = 0\ ,$$

đưa đến $R \approx R_P \approx R_E$

$$R_E^3\omega^2\sin\theta - R_E^2bGM_e\sin\theta \approx 0\ .$$

Ta có

$$\varepsilon = \frac{5R_E^2 b}{6} \approx \frac{5R_E^3\omega^2}{6GM_e} = \frac{5R_E\omega^2}{6g} = \frac{5\lambda}{6}$$

với $g = \frac{GM_e}{R_E^2}$. Cho trái đất, $R_E = 6378 \times 10^3$ m, $\omega = \frac{2\pi}{24\times 3600}$ rad/s, $g = 9.8$ m/s^2, ta có

$$\varepsilon \approx 2.9 \times 10^{-3} .$$

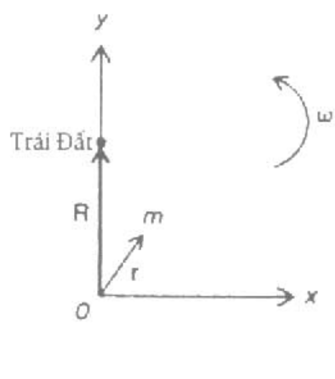
1096

Một vệ tinh chuyển động với quỹ đạo tròn quanh trái đất. Bên trong nó, một phi hành gia cầm một vật nhỏ và hạ thấp nó xuống một khoảng Δr so với khối tâm của vệ tinh về phía trái đất. Nếu vật được thả ra khỏi trạng thái nghỉ (được nhìn bởi phi hành gia), mô tả chuyển động tiếp theo được nhìn bởi phi hành gia trong hệ quy chiếu gắn với vệ tinh.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Vệ tinh quay quanh trái đất với vận tốc góc ω. Ta giả thiết rằng một mặt của vệ tinh luôn hướng về phía trái đất, có nghĩa vận tốc góc quay của nó cũng là ω. Chọn hệ tọa độ gắn với vệ tinh, điểm gốc là tâm khối của vệ tinh và tâm của trái đất ở trên trục y như trên hình 1.68, trong đó R là khoảng cách từ vệ tinh đến tâm trái đất.



Hình 1.68

Phương trình chuyển động của vật nhỏ có khối lượng m trong hệ vệ tinh cho bởi phương trình (Bài 1094)

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= m\ddot{\mathbf{r}} + m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} \\ &= m\ddot{\mathbf{r}} - m\omega^2\mathbf{r} + 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} \,.\end{aligned}$$

vì $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$, $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r} = 0$, ta có

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + m\omega^2\mathbf{r} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} \,.$$

Theo trên, **F** là lực hấp dẫn do trái đất

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \frac{GMm}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3}(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \approx \frac{GMm}{R^3}\frac{(\mathbf{R} - \mathbf{r})}{\left(1 - \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{R}}{R^2}\right)^3} \\ &\approx \frac{GMm}{R^3}\left(1 + \frac{3y}{R}\right)(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \\ &\approx \frac{GMm}{R^3}\mathbf{R} - \frac{GMm}{R^3}\mathbf{r} + \frac{3GMmy}{R^3}\mathbf{e}_y \,,\end{aligned}$$

trong đó $m\omega^2\mathbf{r}$ là lực hướng tâm và

$$\begin{aligned}-2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} &= -2m\omega\mathbf{e}_z \times (\dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + \dot{z}\mathbf{e}_z) \\ &= -2m\omega(\dot{x}\mathbf{e}_y - \dot{y}\mathbf{e}_x)\end{aligned}$$

là lực Coriolis.

Như ban đầu, $\mathbf{r} = \Delta r\mathbf{e}_y$, và tất cả các lực trên mặt phẳng xy vật luôn chuyển động trên mặt phẳng này. Do đó $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$. Nếu vệ tinh có khối lượng m', ta có

$$\frac{GMm'}{R^2} = m'R\omega^2 \,,$$

Hay $\omega^2 = \frac{GM}{R^3}$. Vậy số hạng thứ 2 của **F** khử lực ly tâm. Số hạng thứ nhất của **F** tác động lên vệ tinh và nói chung là ta không quan tâm. Vì vậy, phương trình chuyển động trở thành

$$\ddot{x}\mathbf{e}_x + \ddot{y}\mathbf{e}_y = 3\omega^2 y\mathbf{e}_y - 2\omega(\dot{x}\mathbf{e}_y - \dot{y}\mathbf{e}_x)$$

hay dưới dạng,

$$\ddot{y} = 3\omega^2 y - 2\omega\dot{x} \,, \tag{1}$$

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y} \,. \tag{2}$$

Tích phân (2) và dùng điều kiện ban đầu $\dot{x} = 0$, $y = \Delta r$ ở $t = 0$, ta tìm được

$$\dot{x} = 2\omega(y - \Delta r) . \tag{3}$$

Thay thế trong (1) cho

$$\ddot{y} = -\omega^2 y + 4\omega^2 \Delta r ,$$

Nghiệm tổng quát của nó là $y = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + 4\Delta r$, A, B là hằng số. Với điều kiện ban đầu $y = \Delta r$, $\dot{y} = 0$ tại $t = 0$, ta tìm được

$$y = -3\Delta r\cos(\omega t) + 4\Delta r .$$

Phương trình (3) trở thành

$$\dot{x} = 6\omega\Delta r[1 - \cos(\omega t)] .$$

Tích phân và áp dụng điều kiện ban đầu $x = 0$ tại $t = 0$, ta thu được

$$x = 6\Delta r[\omega t - \sin(\omega t)] ,$$

Do đó, chuyển động tiếp theo được nhìn bởi phi hành gia trong hệ quy chiếu vệ tinh được mô tả bởi

$$x = 6\Delta r[\omega t - \sin(\omega t)] ,$$
$$y = \Delta r[4 - 3\cos(\omega t)] .$$

1097

Xét một vòng tròn bán kính quay a trong một mặt phẳng thẳng đứng với vận tốc góc ω quanh đường kính thẳng đứng. Xét một hạt có khối lượng m trượt không ma sát trên vòng tròn như trên hình 1.69.

(a) Dưới điều kiện cụ thể nào hạt đó sẽ cân bằng bền ở $\theta = 0$?

(b) Tìm giá trị khác của θ mà trong một số điều kiện, hạt sẽ cân bằng bền. Chỉ ra giá trị của ω xảy ra điều kiện cân bằng ổn định.

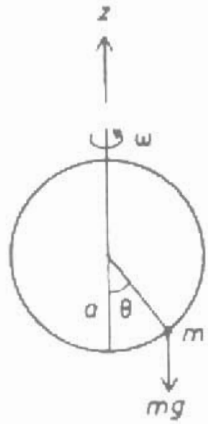
(c) Giải thích câu trả lời với sự hỗ trợ của đồ thị thích hợp của thế năng theo θ được đo trong hệ tọa độ quay.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Xét hệ tọa độ (r, θ) gắn với vòng và dùng kết quả thu được từ bài toán **1094**. Với ω là hằng số, trong hệ quay ta có

$$\mathbf{g} = \ddot{\mathbf{r}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) .$$



Hình 1.69

Với

$$\begin{aligned}
\mathbf{g} &= -g\mathbf{e}_z = g\cos\theta\mathbf{e}_r - g\sin\theta\mathbf{e}_\theta\ ,\\
\ddot{\mathbf{r}} &= -a\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r + a\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta\\
\boldsymbol{\omega} &= \omega\mathbf{e}_z = -\omega\cos\theta\mathbf{e}_r + \omega\sin\theta\mathbf{e}_\theta\ ,\\
\mathbf{r} &= a\mathbf{e}_r\ ,
\end{aligned}$$

ta có phương trình chuyển động của hạt theo chiều $\mathbf{e}_\theta$ trong hệ quay là

$$a\ddot{\theta} = -g\sin\theta + a\omega^2\sin\theta\cos\theta\ . \tag{1}$$

Để tìm các vị trí cân bằng, giả sử $\ddot{\theta} = 0$. Ở trên cho điều kiện cân bằng, $\theta = 0$ và $\cos\theta = \frac{g}{a\omega^2}$.

(a) Khi θ gần bằng không,

$$\sin\theta \approx \theta, \qquad \cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}\ .$$

Ta có thể xấp xỉ (1)

$$\begin{aligned}
&\ddot{\theta}\left(\frac{g}{a} - \omega^2\right)\theta = 0 && \text{nếu} \quad \frac{g}{a} - \omega^2 \neq 0\ ,\\
&\ddot{\theta} + \frac{\omega^2}{2}\theta^3 = 0 && \text{nếu} \quad \frac{g}{a} - \omega^2 = 0\ .
\end{aligned}$$

Rõ ràng là nếu và chỉ nếu $\omega^2 \leq g/a$, trong trường hợp như vậy hợp lực tác dụng lên hạt luôn hướng về vị trí cân bằng, tại $\theta = 0$ sẽ là cân bằng ổn định.

(b) Giá trị khác của θ cho hạt cân bằng ổn định là

$$\theta_0 = \arccos\left(\frac{g}{a\omega^2}\right) .$$

Đặt $\theta = \theta_0 + \delta\theta$, trong đó $\delta\theta \ll \theta_0$. Khi đó

$$\sin\theta = \sin(\theta_0 + \delta\theta) \approx \sin\theta_0 + \cos\theta_0\delta\theta ,$$
$$\cos\theta = \cos(\theta_0 + \delta\theta) \approx \cos\theta_0 - \sin\theta_0\delta\theta .$$

Thay thế trong (1) cho

$$\frac{d^2\delta\theta}{dt^2} + \left(1 - \frac{g^2}{a^2\omega^4}\right)\omega^2\delta\theta = 0 .$$

Do đó, điều kiện cân bằng ổn định là

$$1 - \frac{g^2}{a^2\omega^4} > 0, \qquad \text{hay} \qquad \omega > \sqrt{\frac{g}{a}} .$$

(c) Thế năng của hạt trong hệ quay gồm 2 phần, nghĩa là thế năng hấp dẫn V_1 và thế năng ly tâm V_2, cho bởi

$$-\frac{\partial V_1}{\partial z} = -mg ,$$

nghĩa là

$$V_1 = mgz = mga(1 - \cos\theta) ,$$
$$-\frac{\partial V_2}{\partial r} = mr\omega^2 ,$$

nghĩa là

$$V_2 = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = -\frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2\theta .$$

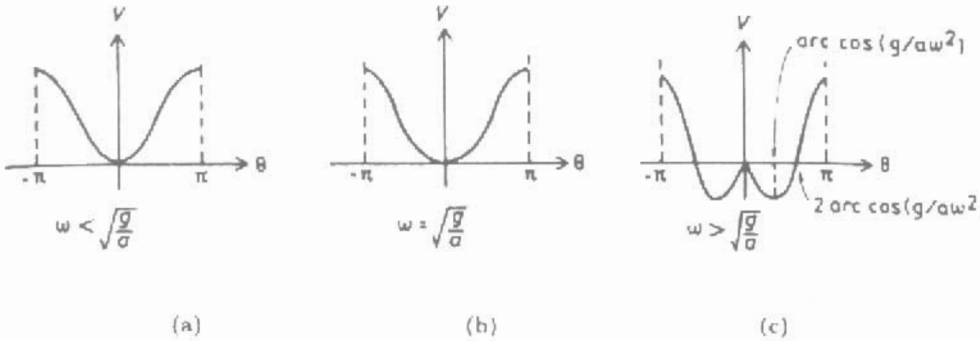
Do đó

$$V = V_1 + V_2 = mga(1 - \cos\theta) - \frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2\theta .$$

Hai vị trí cân bằng cho bởi $\frac{\partial V}{\partial\theta} = 0$

$$\sin\theta = 0, \qquad \text{hay} \qquad \theta = 0 ,$$
$$\cos\theta = \frac{g}{a\omega^2}, \qquad \text{hay} \qquad \theta = \arccos\left(\frac{g}{a\omega^2}\right) .$$

Hình 1.70 (a), (b) và (c) là các đồ thị của thế năng theo θ được đo trong hệ quay tương ứng với $\omega < \sqrt{g/a}$, $\omega = \sqrt{g/a}$ và $\omega > \sqrt{g/a}$.



Hình 1.70

Thế năng V phải là nhỏ nhất để cân bằng là ổn định. Đây là trường hợp $\theta = 0$ trên hình (a) và (b) và $\theta = \arccos(\frac{g}{a\omega^2})$ trên hình (c). Điểm $\theta = 0$ trên hình (c) là một vị trí cân bằng nhưng là không ổn định vì V là lớn nhất ở đây.

1098

Một đĩa nằm ngang có bề mặt trơn hoàn toàn quay với vận tốc góc ω quanh một trục thẳng đứng đi qua tâm của nó. Một người ở trên đĩa cách một khoảng R so với điểm gốc bắn một đồng xu nhẵn hoàn toàn có khối lượng m (kích thước bỏ qua) về phía điểm gốc. Việc đó cung cấp một vận tốc tương đối ban đầu V so với đĩa. Chỉ ra rằng sự chuyển động theo thời gian t, đã bỏ qua thành phần $(\omega t)^2$ được quan sát bởi người trên đĩa là một parabon, đưa ra phương trình của parabon này.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Dùng hệ tọa độ Descartes gắn với đĩa, như vậy trục z dọc theo trục quay và trục x ngược hướng với vận tốc ban đầu V của đồng xu, cả hai trục x, y đều nằm trên mặt phẳng đĩa. Trong hệ quay này, ta có (xem bài toán 1094),

$$\frac{m d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{m d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} .$$

Vì không có lực tác động ngang lên đồng xu sau khi bắn và $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$, $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$, từ trên ta có

$$\ddot{x} = \omega^2 x + 2\omega\dot{y}\,, \tag{1}$$
$$\ddot{y} = \omega^2 y - 2\omega\dot{x}\,. \tag{2}$$

Đặt $z = x + iy$. Khi đó (1) + (2) $\times\, i$ cho phương trình

$$\ddot{z} + 2i\omega\dot{z} - \omega^2 z = 0\,. \tag{3}$$

Đặt $z = e^{\gamma t}$, ta có phương trình đặc trưng

$$\gamma^2 + 2i\omega\gamma - \omega^2 = (\gamma + i\omega)^2 = 0\,.$$

Phương trình này có nghiệm kép $\gamma = -i\omega$, vậy, nghiệm tổng quát của phương trình (3) là

$$z = (A + iB)e^{-i\omega t} + (C + iD)te^{-i\omega t}\,.$$

Các điều kiện ban đầu là $x = R$, $y = 0$, $\dot{x} = -V$, $\dot{y} = 0$, hay $z = R$, $\dot{z} = -V$, tại $t = 0$, ta có

$$R = A + iB, \qquad -V = \omega B + C + i(D - \omega A)\,,$$

hay

$$A = R, \quad B = 0, \quad C = -V, \quad D = \omega R\,.$$

Do đó

$$z = [(R - Vt) + iR\omega t]e^{-i\omega t}\,,$$

hay

$$x = (R - Vt)\cos(\omega t) + R\omega t\sin(\omega t)\,,$$
$$y = -(R - Vt)\sin(\omega t) + R\omega t\cos(\omega t)\,.$$

Bỏ qua số hạng $(\omega t)^2$, từ trên ta có

$$x \approx R - Vt\,,$$
$$y \approx -(R - Vt)\omega t + R\omega t = V\omega t^2\,.$$

Do vậy, quỹ đạo có dạng là một parabon $y = \frac{\omega}{V}(R - x)^2$.

1099

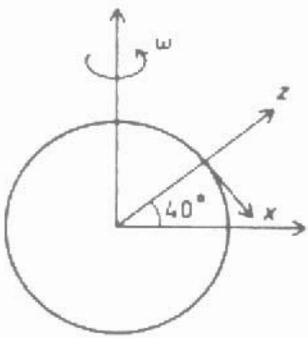
Một vật bắt đầu rơi từ độ cao h so với bề mặt trái đất tại vĩ độ 40 độ Bắc. Với $h = 100$ m, tính độ dịch chuyển ngang của điểm va chạm gây bởi lực Coriolis.

(Columbia)

Lời giải:

Nếu vật có khối lượng m, trong hệ chuyển động quay của trái đất, lực Coriolis $-2m\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}}$ được coi là lực tác động lên vật. Ta chọn hệ quy chiếu với gốc đặt tại điểm ở trên bề mặt trái đất phía dưới điểm bắt đầu rơi của vật, với trục x hướng về phía Nam, trục y hướng về phía Đông và trục z hướng lên trên theo phương thẳng đứng (hình 1.71). Như vậy, phương trình chuyển động của vật trong hệ quy chiếu trái đất là

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}} &= -mg\mathbf{k} - 2m\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}} \\ &= -mg\mathbf{k} - 2m\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\omega\cos 40^\circ & 0 & \omega\sin 40^\circ \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} . \end{aligned}$$



Hình 1.71

Từ trên ta có thể thu được các biểu thức cho $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ và $\ddot{z}$, từ đó tích phân cho ra $\dot{x}$, $\dot{y}$ và $\dot{z}$. Các kết quả đó sau lại được dùng trong biểu thức cho $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ và $\ddot{z}$. Vì thời gian rơi của vật đủ ngắn so với chu kì quay của trái đất, chúng ta có thể bỏ qua số hạng bậc ω^2 và viết như sau

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 0 , \\ \ddot{y} &= 2gt\omega\cos 40^\circ , \\ \ddot{z} &= -g . \end{aligned}$$

Tích phân hai lần và dùng điều kiện ban đầu ta thu được

$$x = 0 ,$$
$$y = \frac{1}{3} g t^2 \omega \cos 40^\circ ,$$
$$z = h - \frac{g t^2}{2} .$$

Phương trình cuối cho thời gian đến bề mặt trái đất của vật khi $z = 0$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} .$$

Tiếp đó, độ dịch chuyển ngang của vật khi va chạm là

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8h^3}{g}}\,\omega \cos 40^\circ = 0,017 \text{ m} .$$

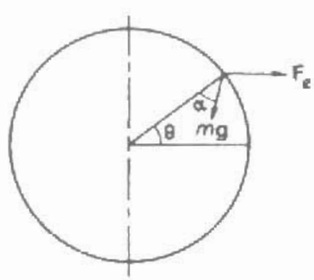
1100

(a) Độ lớn và chiều lệch của quả dọi treo từ đỉnh tới đáy của tháp Sather (Companile) do sự quay của trái đất là bao nhiêu?

(b) Điểm va chạm của môt vật rơi từ đỉnh tháp xuống là thế nào?

Giả thiết rằng Berkeley ở θ° vĩ độ Bắc và tháp có độ cao là L m. Đưa ra các giá trị số cho (a) và (b) dựa theo các ước lượng L và θ.

(Columbia)



Hình 1.72

Lời giải:

(a) Trên hình 1.72, $\mathbf{F}_e$ là lực ly tâm tưởng tượng, α là góc tạo bởi trọng lực biểu kiến $m\mathbf{g}$, theo hướng về tâm trái đất. Trọng lực $m\mathbf{g}_0$ đối với trái đất không quay quan hệ với các đại lượng trên theo công thức

$$m\mathbf{g} = m\mathbf{g}_0 + \mathbf{F}_e \ .$$

Theo tam giác lực, ta có

$$\frac{\mathbf{F}_e}{\sin\alpha} = \frac{mg}{\sin\theta} \ ,$$

hay

$$\sin\alpha = \frac{F_e \sin\theta}{mg} = \frac{mR\omega^2\cos\theta\sin\theta}{mg} = \frac{R\omega^2\sin 2\theta}{2g} \ .$$

Do đó, độ lệch của quả dọi là

$$L\alpha = L\arcsin\left(\frac{R\omega^2\sin 2\theta}{2g}\right) \ .$$

(b) Độ dịch sang bên của vật rơi từ độ cao L ở phía bắc bán cầu do lực Coriolis là về phía Đông có độ lớn (bài toán 1099)

$$\delta = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8L^3}{g}}\omega\cos\theta \ .$$

1101

Dưới điều kiện đặc biệt thuận lợi, một dòng biển tuần hoàn ngược chiều kim đồng hồ khi được nhìn trực tiếp từ trên cao đã được phát hiện trong một lớp rất biệt lập phía dưới bề mặt. Chu kì quay là 14h. Tại vĩ độ nào trên bán cầu nào dòng đó được phát hiện?

(*Columbia*)

Lời giải:

Ta chọn hệ tọa độ gắn với trái đất có gốc tọa độ đặt tại điểm trên bề mặt trái đất nơi có dòng biển, trục x hướng về phía Nam, trục y chỉ về phía Đông và trục z chỉ theo phương thẳng đứng hướng lên trên. Hoàn lưu trên đại dương là do lực Coriolis gây ra bởi gia tốc bổ sung (bài 1094).

$$\mathbf{a} = -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \ ,$$

trong đó, $\omega = \omega\cos\theta\mathbf{i} + \omega\sin\theta\mathbf{k}$ là vận tốc góc của trái đất, θ là vĩ độ và v là vận tốc của dòng biển. Ta có

$$\mathbf{a} = -2\omega\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\cos\theta & 0 & \sin\theta \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} .$$

Thành phần nằm ngang của gia tốc ảnh hưởng tới lưu thông của dòng biển là

$$\mathbf{a}_H = -2\omega\sin\theta(-v_y\mathbf{i} + v_x\mathbf{j}) = -2\omega_z\mathbf{k}\times\mathbf{v} .$$

vì $\mathbf{a}_H$ luôn vuông góc với v, nó không làm thay đổi độ lớn của v mà chỉ làm đổi hướng. Nó khiến cho dòng lưu thông theo đường tròn. Đặt Ω là vận tốc góc của chuyển động tròn. Khi

$$|\mathbf{a}_H| = 2\omega v\sin\theta = \frac{v^2}{r} = v\Omega ,$$

trong đó, r là bán kính của vòng tròn, ta có

$$\sin\theta = \frac{\Omega}{2\omega} = \frac{2\pi}{14}\cdot\frac{24}{4\pi} = \frac{6}{7} ,$$

hay

$$\theta = 59^\circ .$$

Nếu dòng biển ở trên phía Bắc bán cầu, $\omega_z\mathbf{k}$ chỉ về hướng cực Bắc và $\mathbf{a}_H$ luôn chỉ về bên phải của vận tốc v. Điều này làm v hướng về phải và làm dòng lưu thông theo chiều kim đồng hồ. Tương tự vậy, với bán cầu Nam, lực Coriolis gây ra hoàn lưu ngược chiều kim đồng hồ. Do đó, dòng biển tuần hoàn được phát hiện tại vĩ độ 59° Nam.

1102

Một thiên thể nhỏ ở trên trời được giữ chỉ bởi lực hấp dẫn của nó và có thể bị phá vỡ bởi lực triều tạo bởi một thiên thể lớn khác nếu nó. Với một thiên thể có đường kính 1km và mật độ 2g/cm^3, tìm khoảng cách tới hạn từ trái đất (giới hạn Roche).

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Giả sử trái đất được giữ cố định trong không gian và quỹ đạo của thiên thể nhỏ quanh trái đất luôn cách một khoảng l như trên hình 1.73. Gọi M là khối lượng của trái đất, m và ρ tương ứng là khối lượng và mật độ của thiên thể nhỏ đó. Xét một đơn vị khối lượng của thiên thể trên đoạn OC cách C một khoảng x. Ta có từ điều kiện cân bằng lực trên nó

$$(l-x)\omega^2 = \frac{GM}{(l-x)^2} - \frac{G(\frac{4}{3})\pi x^3\rho}{x^2} .$$

Ta cũng có đối với thiên thể

$$ml\omega^2 = \frac{GMm}{l^2} ,$$

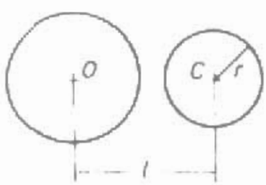
Nó cho ω^2 được dùng trong biểu thức trên. Vì với $\frac{x}{l} \ll 1$, chỉ giữ lại bậc thấp nhất trong $\frac{x}{l}$, ta có

$$l = \left(\frac{9M}{4\pi\rho}\right)^{\frac{1}{3}} .$$

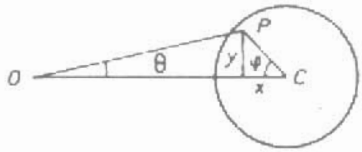
Với $M = 6 \times 10^{27}$ g, $\rho = 2$ g/cm^3, ta tìm được

$$l = 1,29 \times 10^9 \text{ cm} = 1,29 \times 10^4 \text{ km} .$$

Nếu l nhỏ hơn giá trị trên, lực hấp dẫn của trái đất trở thành quá lớn nên thiên thể không giữ được đơn vị khối lượng và nó bị rã ra.



Hình 1.73



Hình 1.74

Nếu đơn vị khối lượng nằm phía bên phải của C trên đường kéo dài OC, x là âm nhưng kết quả trên vẫn đúng. Chúng ta cũng có thể xét một đơn vị khối lượng ở vị trí ngoài OC như điểm P trên hình 1.74. Ta có

$$\sqrt{(l-x)^2+y^2}\,\omega^2\cos\theta = \frac{GM}{(l-x)^2+y^2}\cos\theta - \frac{4}{3}\pi\rho G\sqrt{x^2+y^2}\cos\varphi ,$$

với

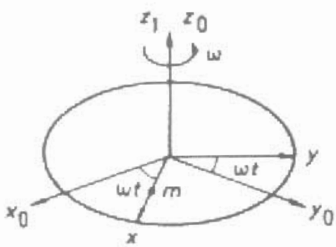
$$\cos\theta = \frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2+y^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} .$$

Vì $x/l \ll 1$, $y/l \ll 1$, và chỉ giữ lại các số hạng bậc 1, ta cũng thu được kết quả tương tự.

1103

Một vòng quay ngựa gỗ (vòng quay) có sơn hai trục (x, y) vuông góc và quay trên trái đất (giả thiết là một hệ quy chiếu quán tính x_0, y_0, z_0) với vận tốc góc không đổi ω quanh trục thẳng đứng. Một con bọ có khối lượng m đang bò mà không bị trượt hướng ra ngoài dọc theo trục x với vận tốc không đổi v_0 (hình 1.75). Tổng lực $\mathbf{F}_b$ do vòng quay tác động lên con bọ là bao nhiêu? Chỉ ra tất cả các thành phần của $\mathbf{F}_b$ trong hệ quy chiếu trái đất x_0, y_0, z_0 của con bọ.

(UC, Berkeley)



Hình 1.75

Lời giải:

Trong hệ tọa độ quay (x, y, z), con bọ bò với vận tốc không đổi v_0 dọc theo trục x không có gia tốc, như vậy, lực ngang tác động lên con bọ bởi vòng quay là (bài toán 1094)

$$\mathbf{F} = 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) ,$$

trong đó $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$, $\mathbf{v}' = v_0 \mathbf{e}_x$, $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x$. Con bọ có trọng lượng $-mg\mathbf{e}_z$, như vậy vòng quay tác dụng một phản lực $mg\mathbf{e}_z$ tác động lên con bọ. Ta có tổng lực vòng quay tác dụng lên con bọ là

$$\mathbf{F}_b = 2mv_0\omega \mathbf{e}_y - m\omega^2 x\mathbf{e}_x + mg\mathbf{e}_z .$$

Chọn hệ quy chiếu trái đất (x_0, y_0, z_0) sao cho tại $t = 0$, các trục tương ứng trùng với trục của hệ tọa độ quay. Tiếp đó, biểu thị các vectơ đơn vị dọc theo

x_0, y_0, z_0 tương ứng là $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Ta có

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_x &= \cos(\omega t)\mathbf{i} + \sin(\omega t)\mathbf{j} ,\\ \mathbf{e}_y &= -\sin(\omega t)\mathbf{i} + \cos(\omega t)\mathbf{j} ,\\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{k} .\end{aligned}$$

Để đơn giản, giả sử con bọ ở điểm gốc tại $t = 0$, ta có $x = v_0 t$. Trong hệ quy chiếu trái đất, $\mathbf{F}_b$ có thể được viết như sau

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_b = &-mv_0\omega[2\sin(\omega t) + \omega t\cos(\omega t)]\mathbf{i}\\ &+ mv_0\omega[2\cos(\omega t) - \omega t\sin(\omega t)]\mathbf{j} + mg\mathbf{k} .\end{aligned}$$

1104

Xét một số các hạt cơ bản tích điện có cùng tỉ số điện tích/khối lượng (e/m), tương tác với nhau qua các lực xuyên tâm được bảo toàn. Chứng minh rằng chuyển động của các hạt này trong một từ trường nhỏ $\mathbf{B}$ giống với khi không có từ trường khi được xem xét trong một hệ tọa độ quay với một vận tốc góc ω được chọn một cách thích hợp (định lý Larmor). Giá trị thích hợp của ω là bao nhiêu, và như thế nào được coi là nhỏ?

(Chicago)

Lời giải:

Giả thiết từ trường là đều và gọi lực xuyên tâm tác dụng lên một hạt là $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Xét hai hệ tọa độ L và R với các gốc là tâm của lực sao cho R quay với vận tốc góc ω quanh điểm gốc chung. Bài toán 1094 cho phương trình chuyển động (trong đơn vị SI).

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) + e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = m\mathbf{a} \tag{1}$$

trong L và

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) + e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = m\mathbf{a}' + 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{2}$$

trong R. Vì $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, (2) có thể được viết là

$$\begin{aligned}m\mathbf{a}' &= \mathbf{F}(\mathbf{r}) + e\mathbf{v} \times \mathbf{B} - 2m\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\\ &= \mathbf{F}(\mathbf{r}) + \mathbf{v} \times (e\mathbf{B} + 2m\boldsymbol{\omega}) + m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) .\end{aligned}$$

nếu R được chọn với

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{e\mathbf{B}}{2m}$$

và nếu số hạng ly tâm $m\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$ có thể bỏ qua, phương trình trên trở thành

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m\mathbf{a}' ,$$

nghĩa là, chuyển động của hạt khi được nhìn trong hệ quy chiếu quay là giống như khi không có từ trường.

Kết luận này áp dụng cho một hệ các hạt có cùng tỉ số e/m và chịu các lực xuyên tâm có cùng một tâm. Các hạt sẽ chuyển động như thể không có từ trường nhưng hệ xét về toàn bộ tiến động trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm với vận tốc góc ω.

Chúng ta đã giả thiết rằng đối với mỗi trong hệ,

$$m|\omega \times (\omega \times \mathbf{r})| \ll 2m|\omega \times \mathbf{v}| ,$$

nghĩa là

$$\omega \ll \frac{2v}{r} ,$$

hay

$$B \ll \frac{4mv}{er} ,$$

biểu thức này giới hạn cường độ của từ trường.

1105

Tâm quay của một con lắc cứng bị dao động theo phương thẳng đứng với phương trình $\eta(t) = \eta_0 \cos(\omega t)$. Con lắc này bao gồm một thanh không có khối lượng với chiều dài L và vật có khối lượng m gắn ở một đầu.

(a) Tìm phương trình chuyển động cho θ, trong đó θ là góc của con lắc theo như trên hình 1.76. Giả thiết $\theta \ll 1$ và $\eta_0 \ll L$.

(b) Giải phương trình bậc nhất với η_0 với các điều kiện ban đầu:

(i) $\theta = a$, $\dot{\theta} = 0$, và

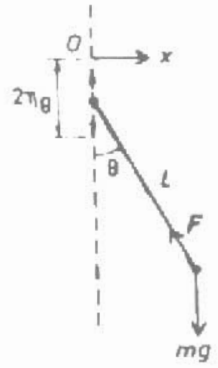
(ii) $\theta = 0$, $\dot{\theta} = a\sqrt{\frac{g}{L}}$.

(c) Ước lượng các nghiệm cho (i) và (ii) khi cộng hưởng và mô tả sự khác biệt giữa hai trường hợp.

(MIT)

Lời giải:

(a) Dùng hệ tọa độ Descartes với gốc đặt tại O như trên hình 1.76, trục x



Hình 1.76

nằm ngang và trục y thẳng đứng hướng xuống dưới. Ta có

$$x = L\sin\theta, \qquad y = L\cos\theta + \eta_0[1 - \cos(\omega t)],$$
$$m\ddot{x} = -F\sin\theta, \qquad m\ddot{y} = mg - F\cos\theta$$

Với $\theta \ll 1$ rad, ta có thể bỏ qua số hạng bậc θ^2 và coi $\cos\theta \approx 1$, $\sin\theta \approx \theta$. Ta có

$$\ddot{x} \approx -L\theta\dot{\theta}^2 + L\ddot{\theta}, \qquad \ddot{y} \approx -L\theta\ddot{\theta} + \eta_0\omega^2\cos(\omega t) .$$

và phương trình chuyển động cho θ là

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{L}[g - \eta_0\omega^2\cos(\omega t)]\theta = 0 . \tag{1}$$

(b) Đối với nghiệm gần đúng bậc nhất với $\alpha = \frac{\eta_0}{L}$, đặt

$$\theta = \varphi + \alpha\xi(t) .$$

trong đó, φ thỏa mãn phương trình $\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$, với $\omega_0^2 = \frac{g}{L}$, có điều kiện ban đầu giống như cho θ.

(i) Với các điều kiện ban đầu $\theta = a$, $\dot{\theta} = 0$, ta có

$$\varphi = a\cos(\omega_0 t) .$$
$$\theta = a\cos(\omega_0 t) + \alpha\xi(t) .$$

Thế vào (1) và chỉ giữ lại số hạng bậc 1 của α,

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2\xi = a\omega^2\cos(\omega_0 t)\cos(\omega t) = \frac{a\omega^2}{2}\{\cos[(\omega_0 + \omega)t] + \cos[(\omega_0 - \omega)t]\} .$$

Phương trình này có nghiệm riêng

$$\xi = \frac{a\omega}{2}\left\{-\frac{\cos[(\omega_0+\omega)t]}{2\omega_0+\omega}+\frac{\cos[(\omega_0-\omega)t]}{2\omega_0-\omega}\right\} ,$$

do đó nghiệm tổng quát là

$$\xi = C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t) - \frac{a\omega\cos[(\omega_0+\omega)t]}{2(2\omega_0+\omega)} + \frac{a\omega\cos[(\omega_0-\omega)t]}{2(2\omega_0-\omega)} .$$

Các điều kiện ban đầu $\xi = 0$, $\dot{\xi} = 0$ tại $t = 0$ cho

$$C_1 = \frac{-a\omega^2}{(2\omega_0+\omega)(2\omega_0-\omega)}, \qquad C_2 = 0 ,$$

và

$$\begin{aligned}\theta &= a\cos(\omega_0 t)\\ &+ \frac{\eta_0}{L}\left\{-\frac{a\omega^2\cos(\omega_0 t)}{(2\omega_0+\omega)(2\omega_0-\omega)} - \frac{a\omega\cos[(\omega_0+\omega)t]}{2(2\omega_0+\omega)} + \frac{a\omega\cos[(\omega_0-\omega)t]}{2(2\omega_0-\omega)}\right\} .\end{aligned}$$

(ii) Đối với điều kiện ban đầu $\theta = 0$, $\dot{\theta} = a\sqrt{\frac{g}{L}} = a\omega_0$, đặt

$$\begin{aligned}\varphi &= a\sin(\omega_0 t) ,\\ \theta &= a\sin(\omega_0 t) + \alpha\xi(t) .\end{aligned}$$

Thế vào (1) cho ta

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} + \omega_0^2\xi &= a\omega^2\cos(\omega t)\sin(\omega_0 t)\\ &= \frac{a\omega^2}{2}\{\sin[(\omega_0+\omega)t] + \sin[(\omega_0-\omega)t]\} ,\end{aligned}$$

nó cho nghiệm tổng quát

$$\xi = D_1\cos(\omega_0 t) + D_2\sin(\omega_0 t) - \frac{a\omega\sin[(\omega_0+\omega)t]}{2(2\omega_0+\omega)} + \frac{a\omega\sin[(\omega_0-\omega)t]}{2(2\omega_0-\omega)} .$$

Các điều kiện ban đầu $\xi = 0$, $\dot{\xi} = 0$ tại $t = 0$ cho

$$D_1 = 0, \qquad D_2 = \frac{a\omega^2}{(2\omega_0+\omega)(2\omega_0-\omega)}$$

và do đó

$$\theta = a\sin(\omega_0 t) + \frac{\eta_0}{L}\left\{\frac{a\omega^2\sin(\omega_0 t)}{(2\omega_0+\omega)(2\omega_0-\omega)} - \frac{a\omega\sin[(\omega_0+\omega)t]}{2(2\omega_0+\omega)} + \frac{a\omega\sin[(\omega_0-\omega)t]}{2(2\omega_0-\omega)}\right\} .$$

(c) Cộng hưởng xảy ra tại $\omega = 2\omega_0$. Với $\omega \approx 2\omega_0$, ta có với trường hợp (i)

$$\theta = a\cos(\omega_0 t) - \frac{\eta_0 a}{4L}\cos(3\omega_0 t) = a\left[1 + \frac{3\eta_0}{4L} - \frac{\eta_0}{L}\cos^2(\omega_0 t)\right]\cos(\omega_0 t) ,$$

và đối với trường hợp (ii)

$$\theta = a\sin(\omega_0 t) - \frac{\eta_0 a}{4L}\sin(3\omega_0 t) = a\left[1 - \frac{3\eta_0}{4L} + \frac{\eta_0}{L}\sin^2(\omega_0 t)\right]\sin(\omega_0 t) .$$

Ta thấy biên độ cộng hưởng bị giới hạn tới $\approx a$ trong cả hai trường hợp. Tuy nhiên, hai cộng hưởng xảy ra tại các pha lệch nhau $\frac{\pi}{2}$.

1106

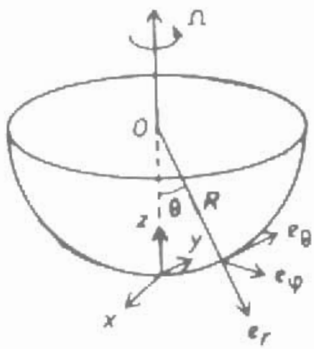
Một cái bát hình bán cầu có bán kính R quay quanh một trục thẳng đứng với vận tốc góc không đổi Ω. Một hạt khối lượng M chuyển động trên bề mặt phía trong của bát dưới tác dụng của lực hấp dẫn (hình 1.77). Thêm vào đó, hạt còn chịu một lực ma sát $\mathbf{F} = -k\mathbf{V}_{\text{rel}}$, trong đó k là hằng số và $\mathbf{V}_{\text{rel}}$ là vận tốc của hạt so với bát.

(a) Nếu hạt ở đáy bát ($\theta = 0$), rõ ràng nó ở trong cân bằng. Chỉ ra rằng nếu $\Omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$, thì có giá trị θ cân bằng thứ hai và xác định giá trị đó.

(b) Giả sử, hạt cân bằng ở đáy bát. Để mô tả chuyển động của hạt trong lân cận của điểm cân bằng, ta xây dựng một hệ tọa độ Descartes quán tính cục bộ (x, y, z) và bỏ qua độ cong của bát trừ trong tính toán lực hồi phục hấp dẫn. Chỉ ra rằng với $|x| \ll R$, $|y| \ll R$, vị trí của hạt thỏa mãn $x = Re(x_0 e^{\lambda t})$, $y = Re(y_0 e^{\lambda t})$, trong đó

$$\left(\lambda^2 + \frac{k\lambda}{M} + \frac{g}{R}\right)^2 + \left(\frac{k}{M}\right)^2\Omega^2 = 0 .$$

(c) Tìm vận tốc góc, Ω_0, của bát mà tại đó hạt chuyển động tuần hoàn.



Hình 1.77

(d) Có một sự chuyển trạng thái từ ổn định sang không ổn định tại $\Omega = \Omega_0$. Bằng cách xét các tần số lân cận Ω_0, chứng minh rằng chuyển động ổn định với $\Omega < \Omega_0$ và không ổn định với $\Omega > \Omega_0$.

(*MIT*)

Lời giải:

Trong hệ tọa độ quay với vận tốc góc $\mathbf{\Omega}$, phương trình chuyển động của một hạt khối lượng M theo bài toán 1094 là

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a}' + 2M\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}' + M\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) + M\dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r} ,$$

trong đó, $\mathbf{a}'$, $\mathbf{v}'$ là gia tốc và vận tốc trong hệ quay.

Với hệ quay, chọn hệ tọa độ cầu (r, θ, φ) gắn với bát với gốc O tại tâm bát, ta có $\dot{\mathbf{\Omega}} = 0$. Trong hệ tọa độ cầu, ta có

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{e}}_r &= \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{\theta}_\varphi ,\\
\dot{\mathbf{e}}_\theta &= -\dot{\theta}\mathbf{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\mathbf{e}_\varphi ,\\
\dot{\mathbf{e}}_\varphi &= -\dot{\varphi}\sin\theta\mathbf{e}_r - \dot{\varphi}\cos\theta\mathbf{e}_\theta .
\end{aligned}$$

Do đó, với một hạt tại $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$, vận tốc là

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\mathbf{e}_\varphi ,$$

và gia tốc là

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} = {} & (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\mathbf{e}_r\\
& + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)\mathbf{e}_\theta\\
& + (r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)\mathbf{e}_\varphi .
\end{aligned}$$

(a) Với hạt chuyển động trong bát đang quay, ta có

$$\mathbf{\Omega} = -\Omega\cos\theta\mathbf{e}_r + \Omega\sin\theta\mathbf{e}_\theta ,$$

$$\mathbf{r} = R\mathbf{e}_r, \qquad \dot{r} = \ddot{r} = 0, \qquad \mathbf{V}_{\text{rel}} = R\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + R\dot{\varphi}\sin\theta\mathbf{e}_\varphi ,$$

$$\mathbf{F} = M\mathbf{g} + \mathbf{N} - k\mathbf{V}_{\text{rel}}$$

trong đó,

$$M\mathbf{g} = Mg\cos\theta\mathbf{e}_r - Mg\sin\theta\mathbf{e}_\theta ,$$
$$\mathbf{N} = -N\mathbf{e}_r .$$

Do đó, phương trình chuyển động của hạt trong hệ đang quay theo chiều e_θ và e_φ tương ứng là,

$$\begin{aligned} &MR\ddot{\theta} - MR\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta \\ &= -Mg\sin\theta - kR\dot{\theta} - 2MR\Omega\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta + MR\Omega^2\sin\theta\cos\theta , \end{aligned}$$

và

$$MR\ddot{\varphi}\sin\theta + 2MR\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta = -kR\dot{\varphi}\sin\theta + 2MR\Omega\dot{\theta}\cos\theta .$$

Lúc cân bằng, $\dot{\theta} = 0$, $\dot{\varphi} = 0$, $\ddot{\theta} = 0$, $\ddot{\varphi} = 0$, và ta thu được

$$-Mg\sin\theta + MR\Omega^2\sin\theta\cos\theta = 0 ,$$

từ đó cho

$$\sin\theta = 0, \qquad \text{hay} \qquad \cos\theta = \frac{g}{R\Omega^2} .$$

Do đó, $\theta = 0$ là một vị trí cân bằng. Nếu $\Omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$ có một vị trí cân bằng khác là

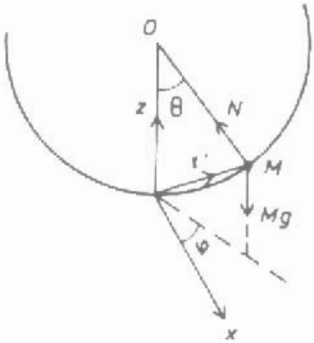
$$\theta = \arccos\left(\frac{g}{R\Omega^2}\right) .$$

(b) Dùng tọa độ Descartes (x, y, z) với hệ quán tính cục bộ có gốc tại $\theta = 0$ ở đáy bát và trục z dọc theo trục quay. Trong hệ này, vectơ vị trí của hạt gần đáy bát là

$$\mathbf{r}' = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \approx x\mathbf{i} + y\mathbf{j} ,$$

bỏ qua độ cong của bát và phương trình chuyển động của nó là

$$M\ddot{\mathbf{r}}' = M\mathbf{g} - k\mathbf{V}_{\text{rel}} + \mathbf{N} .$$



Hình 1.78

Như trên hình 1.78, thành phần lực N dọc theo r xấp xỉ 0 và thành phần Mg dọc theo r là

$$-Mg\sin\theta\cos\varphi\mathbf{i} - Mg\sin\theta\sin\varphi\mathbf{j} \approx -\frac{Mgx}{R}\mathbf{i} - \frac{Mgy}{R}\mathbf{j}$$

với $\sin\theta \approx \frac{r'}{R}$, $\cos\varphi \approx \frac{x}{r'}$, $\sin\varphi \approx \frac{y}{r'}$. Cũng với $\dot{\mathbf{r}}' = \mathbf{V}_{\text{rel}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}'$,

$$\begin{aligned} -k\mathbf{V}_{\text{rel}} &= -k\dot{\mathbf{r}}' + k\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}' \\ &= -k(\dot{x} + y\Omega)\mathbf{i} - k(\dot{y} - x\Omega)\mathbf{j} \,. \end{aligned}$$

Đặt $x = x_0e^{\lambda t}$, $y = y_0e^{\lambda t}$ ở trên trở thành

$$\begin{cases} \left(\lambda^2 + \dfrac{k}{M}\lambda + \dfrac{g}{R}\right)x_0 + \dfrac{k\Omega}{M}y_0 = 0 \,. \\ -\dfrac{k\Omega}{M}x_0 + \left(\lambda^2 + \dfrac{k}{M}\lambda + \dfrac{g}{R}\right)y_0 = 0 \,. \end{cases}$$

Với nghiệm khác 0, ta cần

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + \dfrac{k}{M}\lambda + \dfrac{g}{R} & \dfrac{k\Omega}{M} \\ \dfrac{k\Omega}{M} & \lambda^2 + \dfrac{k\lambda}{M} + \dfrac{g}{R} \end{vmatrix} = \left(\lambda^2 + \frac{k\lambda}{M} + \frac{g}{R}\right)^2 + \left(\frac{k\Omega}{M}\right)^2 = 0 \,. \quad (1)$$

Do đó, nếu có điều kiện này, ta có thể mô tả vị trí của hạt bởi

$$x = Re(x_0e^{\lambda t}), \qquad y = Re(y_0e^{\lambda t}) \,.$$

Kết luận này chỉ hợp lệ chỉ với $|x| \ll R$, $|y| \ll R$ vì ta đã bỏ qua độ cong và xem như hạt chuyển động trên mặt phẳng nằm ngang.

(c) Vế bên trái của (1) có thể phân tích thành thừa số và chứng minh rằng có các nghiệm

$$\lambda^2 + \frac{k\lambda}{M} + \frac{g}{R} = \pm i\frac{k\Omega}{M} .$$

Đối với chuyển động tuần hoàn, λ phải là ảo, $\lambda = i\omega$, trong đó ω là thực. Cân bằng hai phần thực và ảo cả hai vế ta có

$$\omega^2 = \frac{g}{R} \qquad \text{và} \qquad \omega = \pm\Omega .$$

Để thỏa mãn những điều đó, ta cần

$$\Omega = \pm\sqrt{\frac{g}{R}} = \pm\Omega_0$$

để chuyển động là tuần hoàn. Chú ý rằng dấu '+' và '−' ứng với hai chiều quay ngược nhau.

(d) Như đã trình bày ở phần (a), nếu $\Omega < \Omega_0$, chỉ có một vị trí cân bằng $\theta = 0$. Cân bằng tại đây là ổn định. Với $\Omega > \Omega_0$, có hai vị trí cân bằng $\theta = 0$ và $\theta = \arccos(\frac{\Omega_0^2}{\Omega^2})$. Tuy nhiên, cân bằng tại vị trí trước là không ổn định, do đó cân bằng ổn định bị dịch tới vị trí sau nếu $\Omega > \Omega_0$. Do đó với $\theta = 0$, có sự chuyển từ ổn định sang không ổn định tại $\Omega = \Omega_0$.

1107

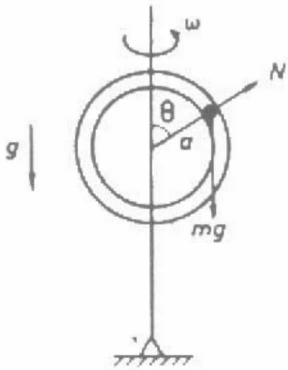
Một hạt khối lượng m có thể trượt không ma sát ở bên trong của một ống nhỏ cong thành dạng hình tròn bán kính a. Ống quay quanh một đường kính thẳng đứng với tốc độ ω rad/s không đổi như trên hình 1.79. Lập phương trình vi phân của chuyển động. Nếu hạt bị nhiễu loạn nhỏ so với vị trí cân bằng không ổn định tại vị trí $\theta = 0$, tìm vị trí có động năng cực đại.

(*SUNY, Buffalo*)

Lời giải:

Trong hệ tọa độ quay (r, θ, φ) gắn với ống tròn, ta có (từ bài toán 1094)

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}' + 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) ,$$



Hình 1.79

với

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F} &= m\mathbf{g} + \mathbf{N} \\
&= -mg\cos\theta\mathbf{e}_r + mg\sin\theta\mathbf{e}_\theta + N\mathbf{e}_r\ , \\
\boldsymbol{\omega} &= \omega\cos\theta\mathbf{e}_r - \omega\sin\theta\mathbf{e}_\theta\ , \\
\mathbf{a}' &= -a\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r + a\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta\ , \\
\mathbf{v}' &= a\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta, \qquad \mathbf{r} = a\mathbf{e}_r\ .
\end{aligned}
$$

Phương trình chuyển động theo chiều $\mathbf{e}_\theta$ khi đó là

$$ma\ddot{\theta} = mg\sin\theta + ma\omega^2\sin\theta\cos\theta\ .$$

Vì $\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta}$, phương trình ở trên với điều kiện ban đầu $\theta = \dot{\theta} = 0$ tại $t = 0$ cho

$$a\dot{\theta}^2 = a\omega^2\sin^2\theta + 2g(1 - \cos\theta)\ .$$

Trong hệ tọa độ quán tính tại thời điểm trùng với hệ quay, vận tốc của hạt là

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \omega \times \mathbf{r} = a\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + a\omega\sin\theta\mathbf{e}_\varphi\ ,$$

và động năng của nó là

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}m(a^2\dot{\theta}^2 + a^2\omega^2\sin^2\theta) \\
&= \frac{1}{2}m[\omega^2a^2\sin^2\theta + 2ga(1 - cos\theta) + \omega^2a^2\sin^2\theta] \\
&= ma[\omega^2a\sin^2\theta + g(1 - \cos\theta)]\ .
\end{aligned}
$$

Để E đạt lớn nhất tại θ_0, ta cần

$$\left(\frac{dE}{d\theta}\right)_{\theta_0} = 0, \qquad \left(\frac{d^2E}{d\theta^2}\right)_{\theta_0} < 0 .$$

Vì

$$\frac{dE}{d\theta} = ma[2\omega^2 a \sin\theta\cos\theta + g\sin\theta] = 0 ,$$

$$\frac{d^2E}{d\theta^2} = ma[4\omega^2 a \cos^2\theta + g\cos\theta - 2\omega^2 a] ,$$

ta có đối với vị trí động năng cực đại

$$\theta_0 = \pi \qquad \text{nếu} \quad \omega^2 < \frac{g}{2a} ,$$

$$\theta_0 = \arccos\left(\frac{-g}{2\omega^2 a}\right) \qquad \text{nếu} \quad \omega^2 > \frac{g}{2a} .$$

1108

Gọi S là hệ trục có tâm đặt tại tâm trái đất, với trục z hướng về phía cực Bắc là một hệ quy chiếu quán tính. Gọi S' là hệ đặt tương tự nhưng quay cùng với trái đất.

(a) Viết phương trình phi tương đối tính cho thấy phép biến đổi đạo hàm theo thời gian của một vectơ bất kì từ S' sang S. Dùng nó để tìm biểu thức cho lực Coriolis cho một vật chuyển động trong S'. Định nghĩa tất cả các kí hiệu.

(b) Trong bán cầu Bắc, tìm chiều của lực Coriolis tác dụng lên một vật chuyển động về phía Đông và một vật chuyển động thẳng đứng lên trên.

(c) Xét một vật rơi từ một độ cao 10 fut tại vĩ độ 30° Bắc. Tìm gần đúng độ lệch ngang do lực Coriolis khi nó rơi đến mặt đất. Bỏ qua lực cản không khí.

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

(a) Đặt XYZ là hệ quy chiếu quán tính S và $X'Y'Z'$ là hệ quay S' gắn cố định với trái đất, nó quay với vận tốc góc $\boldsymbol{\omega}$. Trong S', một vectơ $\mathbf{A}$ tùy ý có thể được viết thành

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} .$$

Trong S, đạo hàm theo thời gian của $\mathbf{A}$ là

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\left(\frac{dA_x}{dt}\mathbf{i}+\frac{dA_y}{dt}\mathbf{j}+\frac{dA_z}{dt}\mathbf{k}\right)+\left(A_x\frac{d\mathbf{i}}{dt}+A_y\frac{d\mathbf{j}}{dt}+A_z\frac{d\mathbf{k}}{dt}\right).$$

Gọi d^*/dt là đạo hàm theo thời gian trong S', khi đó

$$\frac{d^*\mathbf{A}}{dt}=\frac{dA_x}{dt}\mathbf{i}+\frac{dA_y}{dt}\mathbf{j}+\frac{dA_z}{dt}\mathbf{k}.$$

Động học của một vật rắn cho

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt}=\omega\times\mathbf{i},\qquad\frac{d\mathbf{j}}{dt}=\omega\times\mathbf{j},\qquad\frac{d\mathbf{k}}{dt}=\omega\times\mathbf{k}.$$

Từ đó

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\frac{d^*A}{dt}+\omega\times(A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k})=\frac{d^*\mathbf{A}}{dt}+\omega\times\mathbf{A}.$$

Như vậy, với vectơ bán kính $\mathbf{r}$ tới một điểm P, ta có

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d^*\mathbf{r}}{dt}+\omega\times\mathbf{r},$$

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d^*}{dt}\left(\frac{d^*\mathbf{r}}{dt}+\omega\times\mathbf{r}\right)+\omega\times\left(\frac{d^*\mathbf{r}}{dt}+\omega\times\mathbf{r}\right)$$

$$=\frac{d^{*2}\mathbf{r}}{dt^2}+2\omega\times\frac{d^*\mathbf{r}}{dt}+\omega\times(\omega\times\mathbf{r})+\frac{d^*\omega}{dt}\times\mathbf{r}.$$

Chú ý ở trên

$$\frac{d^*\omega}{dt}=\frac{d\omega}{dt}-\omega\times\omega=\frac{d\omega}{dt}.$$

Định luật 2 Newton áp dụng cho hệ quán tính, như thế với một hạt khối lượng m tại P bị tác động bởi lực $\mathbf{F}$, ta có

$$\mathbf{F}=m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=m\frac{d^{*2}\mathbf{r}}{dt^2}+2m\omega\times\frac{d^*\mathbf{r}}{dt}+m\omega\times(\omega\times\mathbf{r})+m\frac{d^*\omega}{dt}\times\mathbf{r}.$$

Biểu thị $\frac{d^*}{dt}$ bằng một dấu chấm trên và chú ý là với trái đất $\dot{\omega}=0$, phương trình ở trên được viết thành

$$m\ddot{\mathbf{r}}=\mathbf{F}-2m\omega\times\dot{\mathbf{r}}-m\omega\times(\omega\times\mathbf{r})$$

đối với hệ tọa độ quay. Điều này chỉ ra rằng định luật 2 Newton vẫn hợp lệ nếu ngoài $\mathbf{F}$ chúng ta đưa vào hai lực tưởng tượng: $-2m\omega\times\dot{\mathbf{r}}$, lực Coriolis, và $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$, lực ly tâm. Như vậy, một vật khối lượng m chuyển động trên trái đất với một vận tốc $\mathbf{v}'$ được quan sát trên trái đất như chịu một lực Coriolis $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$.

(b) Chọn cho S' một hệ cố định tại một điểm trên bề mặt trái đất tại vĩ độ λ và đặt các vectơ đơn vị trực giao của nó là $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ chỉ tương ứng theo hướng Nam, Đông và theo phương thẳng đứng hướng lên trên. Khi đó

$$\boldsymbol{\omega} = -\omega \cos \lambda \mathbf{i} + \omega \sin \lambda \mathbf{k} .$$

(1) Khi vật chuyển động về phía Đông, $\mathbf{v}' = \dot{y}\mathbf{j}$, lực Coriolis là

$$\mathbf{F}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' = 2m\omega\dot{y} \sin \lambda \mathbf{i} + 2m\omega\dot{y} \cos \lambda \mathbf{k} ,$$

nó có độ lớn

$$|\mathbf{F}_c| = \sqrt{(2m\omega\dot{y} \sin \lambda)^2 + (2m\omega\dot{y} \cos \lambda)^2} = 2m\omega\dot{y}$$

và chỉ về hướng Nam nghiêng một góc ϕ cho bởi

$$\mathrm{tg}\phi = \frac{\cos \lambda}{\sin \lambda} = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) .$$

(2) Khi vật chuyển động lên trên, $\mathbf{v}' = \dot{z}\mathbf{k}$, lực Coriolis là

$$\mathbf{F}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' = -2m\omega\dot{z} \cos \lambda \mathbf{j} ,$$

nó có độ lớn $2m\omega\dot{z} \cos \lambda$ và chiều hướng về phía Tây.

(c) Phương trình chuyển động cho một vật rơi tự do trong S' là

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 2m\omega\dot{y} \sin \lambda , \\ m\ddot{y} = -2m\omega(\dot{x} \sin \lambda + \dot{z} \cos \lambda) , \\ m\ddot{z} = -mg + 2m\omega\dot{y} \cos \lambda , \end{cases}$$

với điều kiện ban đầu $x = y = 0$, $z = h = 10$ ft, $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ tại $t = 0$. Tích phân và dùng các điều kiện ban đầu ta được

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\omega y \sin \lambda , \\ \dot{y} = -2\omega[x \sin \lambda + (z - h) \cos \lambda] , \\ \dot{z} = -gt + 2\omega y \cos \lambda . \end{cases}$$

Thế vào hệ phương trình ban đầu ta được

$$\begin{cases} \ddot{x} = -4\omega^2[x\sin\lambda + (z-h)\cos\lambda]\sin\lambda\ , \\ \ddot{y} = 2gt\omega\cos\lambda - 4\omega^2 y\ , \\ \ddot{z} = -g - 4\omega^2[x\sin\lambda + (z-h)\cos\lambda]\cos\lambda\ . \end{cases}$$

Bỏ qua các số hạng có ω^2, ta có gần đúng

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0\ , \\ \ddot{y} = 2gt\omega\cos\lambda y\ , \\ \ddot{z} = -g\ . \end{cases}$$

Lấy tích phân, áp dụng điều kiện ban đầu và khử t, ta được

$$y^2 = \left(\frac{8\omega^2\cos^2\lambda}{9g}\right)(h-z)^3\ .$$

Khi vật rơi đến mặt đất, $z = 0$,

$$y = \left(\frac{2\omega\cos\lambda}{3}\right)\sqrt{\frac{2h^3}{g}}\ .$$

Với $h = 10$ ft $= 3,05$ m, $\lambda = 30°$, ta tìm được $y = 1,01 \times 10^{-4}$ m. Do đó, độ lệch do lực Coriolis về phía Đông có độ lớn là 0,01cm.

2. ĐỘNG HỌC CỦA HỆ CÁC CHẤT ĐIỂM (1109–1144)

1109

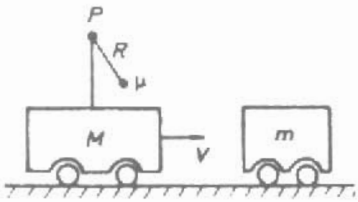
Một xe khối lượng M có một cột ở trên nó, trên cột treo một quả bóng khối lượng μ bằng một sợi dây mảnh gắn ở điểm P. Xe và bóng có vận tốc ban đầu là V. Xe này đâm vào một xe khác có khối lượng m và dính vào nó (hình 1.80). Nếu chiều dài của dây là R, chỉ ra rằng vận tốc ban đầu nhỏ nhất để làm quả bóng có thể chạy theo hình tròn quanh điểm P là $V = [(m+M)/m]\sqrt{5gR}$. Bỏ qua ma sát và giả thiết $M, m \gg \mu$.

(Wisconsin)

Lời giải:

Với $\mu \ll m, M$, định luật bảo toàn động lượng

$$MV = (M+m)V'$$



Hình 1.80

cho vận tốc của hai xe sau khi va chạm,

$$V' = \frac{MV}{M+m} .$$

Xét chuyển động tròn của quả bóng ở đỉnh xe M nếu nó đứng yên. Nếu tại điểm thấp nhất và cao nhất bóng có vận tốc tương ứng là V_1 và V_2, ta có

$$\frac{1}{2}\mu V_1^2 = \frac{1}{2}\mu V_2^2 + 2\mu g R ,$$

$$\frac{\mu V_2^2}{R} = T + \mu g ,$$

trong đó, T là lực căng của dây khi bóng ở điểm cao nhất. V_2 nhỏ nhất khi $T = 0$. Do đó, V_1 nhỏ nhất cho bởi

$$\frac{1}{2}\mu V_1^2 = \frac{1}{2}\mu g R + 2\mu g R ,$$

nghĩa là

$$V_1 = \sqrt{5gR} .$$

Với xe chuyển động, V_1 là vận tốc của bóng so với xe. Vì với bóng có vận tốc ban đầu V và xe có vận tốc V' sau khi va chạm, vận tốc của bóng so với xe sau khi va chạm là $V - V'$. Do đó, V nhỏ nhất để bóng chạy theo vòng tròn sau khi va chạm được cho bởi

$$V - V' = V - \frac{MV}{M+m} = \sqrt{5gR} ,$$

nghĩa là

$$V = \frac{M+m}{m}\sqrt{5gR} .$$

1110

Một xe khối lượng m chuyển động với vận tốc v tiến lại gần một xe có khối lượng $3m$ đang đứng yên. Lò xo bị nén trong khi hai xe đâm vào nhau (hình 1.81).

(a) Tốc độ của xe có khối lượng $3m$ bằng bao nhiêu tại thời điểm lò xo bị nén cực đại và năng lượng bảo toàn?

(b) Câu trả lời sẽ là thế nào khi năng lượng không bảo toàn?

(c) Vận tốc cuối cùng của xe nặng hơn sau một khoảng thời gian dài trôi qua nếu năng lượng được bảo toàn là bao nhiêu?

(d) Đưa ra vận tốc cuối cùng của xe nặng hơn khi va chạm hoàn toàn không đàn hồi.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Khi lò xo nén cực đại, hai xe là gần nhau nhất và tại thời điểm đó chuyển động với vận tốc v' chẳng hạn. Động lượng bảo toàn cho

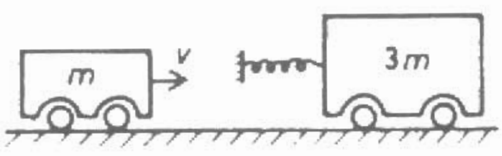
$$mv = (m + 3m)v' ,$$

nghĩa là

$$v' = \frac{v}{4} .$$

Như vậy xe nặng hơn có vận tốc $\frac{v}{4}$ tại thời điểm đó.

(b) Ngay nếu như cơ năng không bảo toàn, kết quả trên vẫn đúng vì nó được rút ra từ sự bảo toàn của động lượng, điều đó đúng chừng nào không có ngoại lực tác dụng.



Hình 1.81

(c) Năng lượng và động lượng bảo toàn cho

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1'^2}{2} + \frac{3mv_2'^2}{2} ,$$
$$mv = mv_1^1 + 3mv_2' ,$$

trong đó, v_1', v_2' tương ứng là vận tốc sau khi va chạm của xe nhẹ và xe nặng. Do đó, xe nặng hơn có vận tốc cuối cùng là

$$v_2' = \frac{2mv}{m+3m} = \frac{v}{2} \,.$$

(d) Nếu va chạm là hoàn toàn không đàn hồi, hai xe sẽ chuyển động cùng nhau sau khi va chạm. Vận tốc khi đó của chúng là $\frac{v}{4}$ như cho ở (a).

1111

Tính toán G, L và các khối lượng:

(a) Chu kì quay của một sao đôi có hai sao cùng khối lượng ($M_1 = M_2 = M$) cách nhau một khoảng L là bao nhiêu?

(b) Chu kì quay của một sao đôi có hai sao khác khối lượng ($M_1 \neq M_2$) cách nhau một khoảng L là bao nhiêu?

(c) Chu kì quay của một sao ba có dạng hình tam giác đều (cạnh L) đồng khối lượng là bao nhiêu?

(d) Chu kì quay của một sao ba có dạng hình tam giác đều (cạnh L) có ba sao khác khối lượng ($M_1 \neq M_2 \neq M_3$) là bao nhiêu?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) *Sao đôi có cùng khối lượng*

Lực hấp dẫn tác động lên mỗi sao là $f = GM^2/L^2$. Bán kính của quỹ đạo tròn của mỗi sao đối với hệ là khối tâm của sao đôi là $R = L/2$. Gia tốc hướng tâm của mỗi sao là $a = v^2/R$, trong đó v là tốc độ của mỗi sao trong hệ khối tâm. Dùng những điều trên ta có

$$\frac{Mv^2}{R} = \frac{GM^2}{L^2} \,,$$

hay

$$v^2 = \frac{GMR}{L^2} = \frac{GM}{2L} \,.$$

Do đó, chu kì của sao đôi là

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{\pi L}{\sqrt{\frac{GM}{2L}}} = \pi L\sqrt{\frac{2L}{GM}} \,.$$

Hình 1.82

(b) *Sao đôi không cùng khối lượng*
Đặt O là khối tâm của sao đôi. Khi đó như trên hình 1.82,

$$l_1 = \frac{M_2 L}{M_1 + M_2}, \qquad l_2 = \frac{M_1 L}{M_1 + M_2}.$$

Với M_1, $f = GM_1M_2/L^2$, bán kính của chuyển động tròn là l_1, và gia tốc hướng tâm là $a_1 = v_1^2/l_1$. Do đó

$$\frac{M_1 v_1^2}{l_1} = \frac{GM_1M_2}{L^2},$$

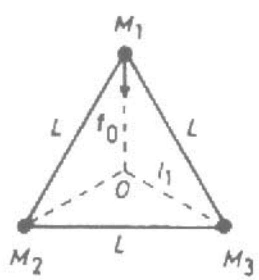
cho

$$v_1^2 = \frac{GM_2}{L}\frac{l_1}{L} = \frac{GM_2}{L}\frac{M_2}{M_1 + M_2}.$$

Chu kì quay của M_1 khi đó là

$$T_1 = 2\pi\frac{l_1}{v_1} = 2\pi\frac{M_2L}{M_1 + M_2}\frac{\sqrt{L(M_1 + M_2)}}{M_2\sqrt{G}} = 2\pi L\sqrt{\frac{L}{G(M_1 + M_2)}}.$$

Đổi chỉ số treo 1 thành 2 ở trên ta cũng được chu kì T_2 ứng với M_2.



Hình 1.83

(c) *Sao ba dạng tam giác đều có cùng khối lượng*
Đặt O là khối tâm của sao ba (hình 1.83). Theo hình học $l_1 = \sqrt{3}L/3$. Với

M_1, hợp lực của lực hấp dẫn tạo bởi hai sao theo hướng O và có độ lớn là $(2GM^2/L^2)\cos 30^\circ = \sqrt{3}GM^2/L^2$. Nếu tốc độ của nó là v, ta có

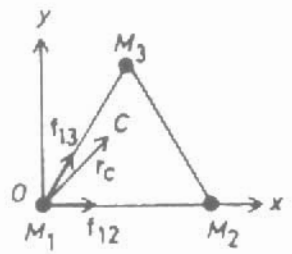
$$\frac{Mv^2}{l_1} = \frac{\sqrt{3}GM^2}{L^2},$$

hay

$$v^2 = \frac{\sqrt{3}GM}{L}\frac{l_1}{L} = \frac{GM}{L},$$

vậy chu kì của sao ba là

$$T = \frac{2\pi l_1}{v} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi L\sqrt{\frac{L}{GM}}.$$



Hình 1.84

(d) *Sao ba dạng tam giác đều không cùng khối lượng*
Dùng hệ tọa độ như trên hình 1.84. Tọa độ của M_1, M_2 và M_3 tương ứng là $(0,0)$, $(L,0)$ và $(L/2, \frac{\sqrt{3}L}{2})$ và vectơ bán kính của khối tâm C là

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum_i M_i\mathbf{r}_i}{\sum_i M_i} = \frac{L}{M_1+M_2+M_3}\left(M_2\mathbf{i} + \frac{1}{2}M_3\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}M_3\mathbf{j}\right)$$

$$= \frac{L}{M_1+M_2+M_3}\left[\left(M_2 + \frac{1}{2}M_3\right)\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}M_3\mathbf{j}\right].$$

Lực hấp dẫn gây bởi M_2 và M_3 lên M_1 tương ứng là

$$\mathbf{f}_{12} = \frac{GM_1M_2}{L^2}\mathbf{i}$$

và

$$\mathbf{f}_{13} = \frac{GM_1M_3}{L^2}\left(\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}\right),$$

do vậy, hợp lực lên M_1 là

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \mathbf{f}_{12} + \mathbf{f}_{13} \\ &= \frac{GM_1}{L^2}\left[\left(M_2 + \frac{M_3}{2}\right)\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}M_3\mathbf{j}\right] . \end{aligned}$$

Điều này cho thấy $\mathbf{f}_1$ song song với $\mathbf{r}_c$. Độ lớn của nó là

$$f_1 = \frac{GM_1}{L^2}\sqrt{\left(\frac{M_2 + M_3}{2}\right)^2 + \frac{3M_3^2}{4}} = \frac{GM_1}{L^2}\sqrt{M_2^2 + M_3^2 + M_2M_3} .$$

Bán kính của quỹ đạo tròn quanh khối tâm mà sao M_1 chuyển động là

$$R_1 = r_c = \frac{L}{M_1 + M_2 + M_3}\sqrt{M_2^2 + M_3^2 + M_2M_3} .$$

Từ đó, phương trình chuyển động của M_1 là

$$\frac{M_1v_1^2}{R_1} = \left(\frac{GM_1}{L^2}\right)\sqrt{M_2^2 + M_3^2 + M_2M_3} ,$$

cho tốc độ v_1 của M_1,

$$\begin{aligned} v_1^2 &= \frac{G}{L}\sqrt{M_2^2 + M_3^2 + M_2M_3}\left(\frac{R_1}{L}\right) \\ &= \frac{G}{L}\left(\frac{M_2^2 + M_3^2 + M_2M_3}{M_1 + M_2 + M_3}\right) . \end{aligned}$$

Do đó, chu kì quay của M_1 là

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{2\pi R_1}{v_1} \\ &= 2\pi L\sqrt{\frac{L}{G(M_1 + M_2 + M_3)}} , \end{aligned}$$

Đó rõ ràng cũng là chu kì của M_2 và M_3.

1112

Một hạt khối lượng m, điện tích q, và vận tốc ban đầu v va chạm thẳng vào vật giống vậy như vậy nhưng ban đầu đứng yên. Khoảng cách gần nhất giữa hai hạt (theo cơ học cổ điển) là bao nhiêu? Vận tốc của mỗi hạt ngay khi tiến đến gần nhau nhất đó là bao nhiêu? Vận tốc cuối cùng của mỗi hạt là bao nhiêu? Chứng minh cho những câu trả lời đó.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Vận tốc tương đối bằng 0 khi hai hạt ở vị trí gần nhau nhất. Động lượng bảo toàn nên $mv = 2mv'$ và $v' = v/2$ là vận tốc của mỗi hạt ngay khi tiến gần nhau nhất. Bảo toàn năng lượng cho

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv'^2}{2} + \frac{mv'^2}{2} + \frac{q^2}{r}$$

và do vậy

$$r = \frac{4q^2}{mv^2}$$

là khoảng cách tiến gần nhau nhất. Vận tốc cuối cùng bằng 0 với hạt tới và bằng v đối với hạt lúc đầu đứng yên. Điều này có thể thấy được từ sự đối xứng của bài toán.

1113

Hai quả cầu thép, quả dưới có bán kính $2a$ quả trên có bán kính a, rơi từ độ cao h (đo từ tâm của quả cầu lớn) lên một tấm thép như trên hình 1.85. Giả sử tâm của các quả cầu luôn nằm trên đường thẳng đứng và tất cả các va chạm là đàn hồi. Độ cao cực đại của quả cầu ở trên có thể đạt tới là bao nhiêu? Gợi ý: Giả thiết quả cầu lớn va chạm với tấm thép và dội lại trước khi nó đập vào quả cầu nhỏ.

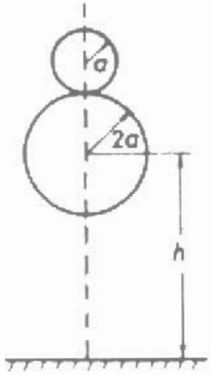
(*Wisconsin*)

Lời giải:

Gọi khối lượng của quả cầu nhỏ là m_1 và của quả lớn là m_2. Khi đó $m_2 = 8m_1$. Vận tốc chạm đất của quả cầu lớn là $v_2 = \sqrt{2g(h-2a)}$ và vận tốc của nó ngay sau khi bật lại từ tấm thép vẫn có độ lớn là v. Tại điểm này, vận tốc xuống của quả cầu nhỏ là $v_1 = \sqrt{2g(h-2a)} = v_2$. Gọi vận tốc của quả cầu lớn và nhỏ tương ứng sau khi va chạm đàn hồi là v_2' và v_1' và coi chiều hướng lên trên là chiều dương. Từ sự bảo toàn động lượng và năng lượng cho ta

$$m_2v_2 - m_1v_1 = m_2v_2' + m_1v_2' \,,$$

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_2v_2'^2}{2} + \frac{m_1v_1'^2}{2} \,,$$



Hình 1.85

chúng có nghiệm

$$v_2' = \frac{5v_2}{9} = \frac{5}{9}\sqrt{2g(h-2a)}\ ,$$
$$v_1' = \frac{23v_2}{9} = \frac{23}{9}\sqrt{2g(h-2a)}\ .$$

Cơ năng của quả cầu bé bảo toàn, do đó độ cao cực đại (so với tấm thép) của quả cầu bé là

$$H = 3a + \frac{v_1'^2}{2g} = 3a + \frac{529}{81}(h-2a)\ .$$

1114

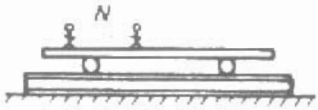
Một toa xe trần đường sắt khối lượng M có thể lăn không ma sát dọc theo đường ray nằm ngang như ở hình 1.86. N người, mỗi người có khối lượng m, lúc đầu đứng trên toa xe ở trạng thái nghỉ.

(a) N người cùng chạy về một phía của toa xe; tốc độ của họ so với toa xe là V_r ngay trước khi họ nhảy xuống (đồng thời). Tính vận tốc của toa xe sau khi mọi người nhảy xuống.

(b) N người chạy khỏi toa xe lần lượt từng người một (chỉ có một người chạy mỗi lần), mỗi người đều có vận tốc V_r so với toa xe ngay trước khi nhảy khỏi toa xe. Tìm biểu thức vận tốc ban đầu của toa xe.

(c) Trong hai trường hợp (a) và (b), trường hợp nào toa xe có vận tốc lớn hơn?

(*CUSPEA*)



Hình 1.86

Lời giải:

(a) Khi không có ngoại lực ngang nào tác dụng, khối tâm của hệ bao gồm toa xe và N người đứng yên. Lấy trục x dọc theo, ta có với khối tâm,

$$x_{\text{cm}} = \frac{Mx_{\text{xe}} + Nmx_{\text{người}}}{M + Nm} ,$$

$$\dot{x}_{\text{cm}} = 0 = M\dot{x}_{\text{xe}} + Nm\dot{x}_{\text{người}} ,$$

ở đây $\dot{x}_{\text{xe}}$ và $\dot{x}_{\text{người}}$ tương ứng là vận tốc của toa xe và của mỗi người và sau khi mọi người dời khỏi toa xe. Khi viết $\dot{x}_{\text{xe}} = V_{\text{xe}}$ và chú ý rằng $\dot{x}_{\text{người}} = V_{\text{xe}} - V_r$, ta có

$$MV_{\text{xe}} + Nm(V_{\text{xe}} - V_r) = 0 ,$$

từ đó cho ta

$$V_{\text{xe}} = \frac{NmV_r}{M + Nm} .$$

(b) Xét chuyển rời từ n người đến $(n-1)$ trên toa xe. Đặt V_n là vận tốc của toa xe khi n người rời khỏi xe. Động lượng tổng của xe với n người là

$$P_n = MV_n + nmV_n .$$

Khi người thứ n nhảy khỏi toa xe với vận tốc V_r so với toa xe, động lượng của hệ bao gồm toa xe và n người là

$$P_{n-1} = MV_{n-1} + (n-1)mV_{n-1} + m(V_{n-1} - V_r) .$$

Bảo toàn động lượng $P_{n-1} = P_n$ cho ta

$$(M + nm)V_n = (M + nm)V_{n-1} - mV_r ,$$

hay

$$V_{n-1} = V_n + \frac{mV_r}{M + nm} .$$

Do đó

$$V_{n-s} = V_n + \sum_{i=1}^{s} \frac{mV_r}{M + (n-i+1)m} .$$

Khi $n = N$, $V_N = 0$ ban đầu, ta có với $s = N$,

$$V_0 = \sum_{i=1}^{N} \frac{mV_r}{M + (N-i+1)m} = \sum_{n=1}^{N} \frac{mV_r}{M + nm} .$$

(c) Khi

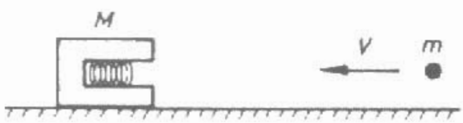
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{M + nm} > \frac{N}{M + Nm} ,$$

toa xe trong trường hợp (b) có vận tốc cuối cùng lớn hơn.

1115

Một viên đạn khối lượng m được bắn ra (với vận tốc V) vào một bia khối lượng M, bia có một lỗ trong có lò xo với hằng số đàn hồi k. Bia ban đầu đứng yên và có thể trượt không ma sát trên bề mặt nằm ngang (Hình 1.87). Tìm khoảng Δx mà lò xo bị nén lại cực đại.

(CUSPEA)



Hình 1.87

Lời giải:

Tại khoảng khắc lò xo bị nén đến cực đại, viên đạn m và bia M chuyển động với cùng vận tốc V_e. Bảo toàn năng lượng cho ta

$$\frac{mV^2}{2} = \frac{mV_e^2}{2} + \frac{MV_e^2}{2} + \frac{k(\Delta x)^2}{2} ,$$

và bảo toàn động lượng

$$mV = (m + M)V_e$$

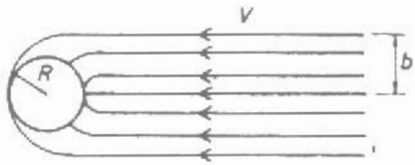
cho ta

$$\Delta x = \sqrt{\frac{mM}{k(m+M)}}V .$$

1116

Một ngôi sao nặng khối lượng M và bán kính R chuyển động với vận tốc **V** đi qua môi trường khi rất loãng mật độ ρ. Nó kéo các hạt về phía nó bởi trường hấp dẫn và bắt tất cả các nguyên tử va vào bề mặt của nó. Tìm lực kéo vào ngôi sao có tính đến sự gần đúng là vận tốc nhiệt của các nguyên tử bỏ qua so với $|\mathbf{V}|$ và các tương tác của các nguyên tử với nhau có thể bỏ qua.

(*CUSPEA*)



Hình 1.88

Lời giải:

Trong hệ toạ độ chuyển động với ngôi sao, các nguyên tử khí chuyển động với vận tốc **V** về phía ngôi sao từ vô cùng. Dưới ảnh hưởng của trường hấp dẫn quỹ đạo của ngôi sao, phác hoạ về các nguyên tử khí là như hình 1.88.

Đặt b là thông số va chạm lớn nhất mà với nó nguyên tử khí chỉ bị bắt bởi ngôi sao và v là vận tốc nguyên tử khí ngay trước khi bị bắt. Xét bảo toàn momen xung lượng cho ta

$$vR = bV ,$$

và bảo toàn năng lượng cho ta

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = \frac{V^2}{2} ,$$

từ đó ta có

$$b^2 = \frac{R^2}{V^2}\left(V^2 + \frac{2GM}{R}\right) .$$

Lực kéo vào ngôi sao bằng xung lượng được hấp thụ trên một đơn vị thời gian

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\pi b^2 V \Delta t \cdot \rho(-\mathbf{V})}{\Delta t}$$
$$= -\pi b^2 \rho V \mathbf{V} = -\frac{\pi R^2 \rho}{V} \left(V^2 + \frac{2GM}{R} \right) \mathbf{V} .$$

1117

Xét tập hợp các chất điểm m chuyển động theo quỹ đạo tròn xung quanh tâm chung với cùng một động năng. Nếu lực có mặt duy nhất là lực hấp dẫn tương hỗ (lực Newton), tìm mật độ hạt như hàm của bán kính r từ tâm để giữ được mật độ không đổi ở mọi thời điểm? (Thừa nhận rằng mật độ là đối xứng cầu).

(*Columbia*)

Lời giải:

Đặt T là động năng của mỗi hạt. Khi nó chuyển động theo quỹ đạo tròn bán kính r dưới tác dụng của lực hấp dẫn tương hỗ, ta có

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} .$$

Do đó

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r} ,$$

cho ta

$$M(r) = \frac{2Tr}{Gm}$$

khi khối lượng tổng của các hạt chuyển động trong hình cầu bán kính r tại tâm chung. Vì

$$dM = 4\pi r^2 \rho(r) dr ,$$

ta có

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dM}{dr} = \frac{T}{2\pi r^2 Gm} ,$$

từ đó ta nhận được mật độ hạt là

$$n(r) = \frac{\rho}{m} = \frac{T}{2\pi r^2 Gm^2} .$$

1118

Cho hệ N chất điểm với lực xuyên tâm bổ sung theo từng cặp, sử dụng định luật hai và ba Newton để chứng tỏ rằng momen động lượng toàn phần của hệ là một hằng số. Tính toán đó có phụ thuộc vào điểm chọn là gốc tọa độ hay không?

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Momen xung lượng của hệ có N chất điểm xung quanh gốc cố định được định nghĩa như

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i .$$

Định luật hai Newton $\mathbf{F}_i = \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}$ cho ta

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \sum_{j\neq i} \mathbf{f}_{ij} = \sum_i \sum_{j\neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} ,$$

ở đây $\mathbf{f}_{ij}$ là lực của khối lượng thứ j tác dụng lên khối lượng thứ i. Với hai khối lượng thứ i và j, định luật ba Newton cho

$$\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji} ,$$

và do đó

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{ji} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{f}_{ij} = 0 ,$$

bởi vì $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ song song với $\mathbf{f}_{ij}$. Vì tổng $\sum_i \sum_{j\neq i}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij})$ là do các cặp cực giống như $\mathbf{f}_{ij}$ và $\mathbf{f}_{ji}$ gây ra, ta có

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 ,$$

có nghĩa là

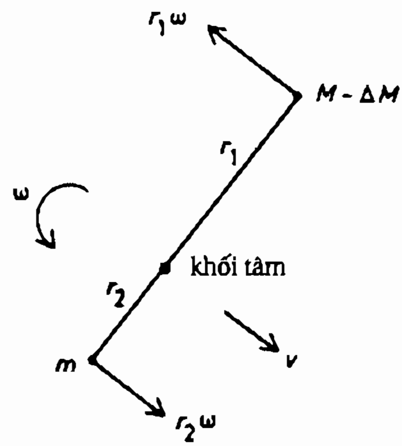
$$\mathbf{L} = \text{ hằng số} .$$

Vì gốc toạ độ trong chứng minh này là tuỳ ý, nên kết luận không phụ thuộc vào việc chọn gốc toạ độ.

1119

Hai ngôi sao khối lượng M và m cách nhau một khoảng cách d chuyển động trong các quỹ đạo tròn xung quanh khối tâm tĩnh. Ta có thể coi các ngôi sao gần đúng như chất điểm. Trong vụ nổ sao siêu mới, sao khối lượng M mất khối lượng ΔM. Vụ nổ là tức thời, đối xứng cầu, và không gây ra phản lực lên phần còn lại. Nó cũng không có ảnh hưởng trực tiếp lên sao khác. Chứng minh rằng hệ sao đôi còn lại là được liên kết khi $\Delta M < (M+m)/2$.

(*MIT*)



Hình 1.89

Lời giải:

Lấy khối tâm như là gốc hệ quy chiếu cố định và đặt r_1, r_2 tương ứng là khoảng cách từ khối tâm đến M, m trước khi nổ. Ta có

$$r_1 + r_2 = d, \qquad r_1 = \frac{md}{M+m}, \qquad r_2 = \frac{Md}{M+m}.$$

Vận tốc góc ω của chuyển động tròn của M thỏa mãn

$$Mr_1\omega^2 = \frac{GMm}{d^2}, \qquad mr_2\omega^2 = \frac{GMm}{d^2},$$

hay

$$\omega^2 = \frac{G(M+m)}{d^3}.$$

Sau khi M bùng nổ khối lượng ΔM rời ngôi. Vì vụ nổ không gây ra phản lực lên phần còn lại và không ảnh hưởng lên ngôi sao kia, nên tổng động năng và thế năng toàn phần của hai sao trong hệ quy chiếu gắn với khối tâm mới là

$$V = \frac{-G(M-\Delta M)m}{d},$$
$$T = \frac{(M-\Delta M)(r_1\omega)^2}{2} + \frac{m(r_2\omega)^2}{2} - T_0,$$

ở đây T_0 là động năng của hệ mới trong hệ quy chiếu cố định nếu tổng khối lượng của nó tập trung ở khối tâm. Động lượng của hệ mới trong hệ quy chiếu cố định (hình 1.89) là

$$(M-\Delta M+m)v = mr_2\omega - (M-\Delta M)r_1\omega = r_1\omega\Delta M,$$

ở đây v là vận tốc khối tâm của hệ mới, vì động lượng của hệ gốc $mr_2\omega - Mr_1\omega = 0$. Vì vậy, năng lượng tổng của hệ mới trong hệ quy chiếu khối tâm mới là

$$\begin{aligned}
T+V &= -\frac{G(M-\Delta M)}{d}m + \frac{1}{2}(M-\Delta M)(r_1\omega)^2 + \frac{1}{2}m(r_2\omega)^2 \\
&\quad - \frac{1}{2}(M-\Delta M+m)\cdot\frac{(\Delta M)^2}{(M-\Delta M+m)^2}(r_1\omega)^2 \\
&= -\frac{GMm}{d} + \frac{1}{2}M(r_1\omega)^2 + \frac{1}{2}m(r_2\omega)^2 + \frac{Gm\Delta M}{d} \\
&\quad - \frac{1}{2}\Delta M(r_1\omega)^2 - \frac{(\Delta M)^2(r_1\omega)^2}{2(M-\Delta M+m)} \\
&= -\frac{GMm}{2d} + \frac{Gm\Delta M}{d} - \frac{1}{2}\Delta M(r_1\omega)^2 - \frac{(\Delta M)^2}{2(M-\Delta M+m)}(r_1\omega)^2 \\
&= -\frac{1}{2}Mdr_1\omega^2 + dr_1\omega^2\Delta M - \frac{1}{2}\Delta M(r_1\omega)^2 - \frac{(\Delta M)^2(r_1\omega)^2}{2(M-\Delta M+m)} \\
&= -\frac{1}{2}r_1\omega^2\left[Md - 2d\Delta M + r_1\Delta M + \frac{r_1(\Delta M)^2}{M-\Delta M+m}\right] \\
&= -\frac{dr_1\omega^2}{2(M-\Delta M+m)}(2\Delta M - M - m)(\Delta M - M).
\end{aligned}$$

Điều kiện để hệ hai sao mới gắn bó với nhau là $T+V<0$, có nghĩa là

$$2\Delta M < M+m, \qquad \Delta M < M,$$

hay

$$2\Delta M > M+m, \qquad \Delta M > M.$$

Khi $\Delta M < M$, điều kiện đòi hỏi là

$$\Delta M < \frac{M + m}{2} .$$

1120

Thuyền trưởng một con tàu nhỏ khi đến đới lặng gió xích đạo quyết định áp dụng giải pháp kéo neo ($m = 200$ kg) lên đỉnh cột buồm ($s = 20$ m). Phần còn lại của tàu nặng $M = 1000$ kg.

(a) Tại sao tàu bắt đầu chuyển động?

(b) Tàu sẽ chuyển động theo hướng nào?

(c) Nó chuyển động nhanh như thế nào?

(Chicago)

Lời giải:

(a) Chuyển động thẳng đứng của neo gây nên lực Coriolis $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$, ở đây $\mathbf{v}$ là vận tốc của neo và ω vận tốc góc của quả đất, và do đó tầu chuyển động.

(b) Khi ω chỉ hướng bắc và $\mathbf{v}$ hướng thẳng đứng, lực Coriolis chỉ hướng tây. Vì vậy tàu sẽ chuyển động theo hướng tây.

(c) Khi momen xung lượng tổng của neo và tàu đối với khối tâm của quả đất trong hệ quy chiếu quán tính được bảo toàn, ta có

$$(M + m)r^2\omega_0 = [Mr^2 + m(r + s)^2]\omega ,$$

ở đây ω_0 và ω tương ứng là vận tốc góc của trái đất và tàu, r là bán kính trái đất, cho ta

$$\frac{\omega}{\omega_0} \approx \frac{(M + m)r^2}{(M + m)r^2 + 2mrs} .$$

hay

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \approx \frac{-2ms}{(M + m)r + 2ms} \approx \frac{-2ms}{(M + m)r} .$$

Do đó tốc độ tương đối của tàu ứng so trái đất là

$$u = r(\omega - \omega_0) = \frac{-2ms\omega_0}{M + m} = -4,9 \times 10^{-4} \text{ m/s} .$$

Dấu âm chỉ ra rằng tàu chuyển động theo hướng tây.

1121

Mẫu phân tử cổ điển đơn giản của CO_2 là cấu trúc thẳng của ba khối lượng với lực tĩnh điện giữa các iôn được biểu diễn bằng hai lò xo đồng nhất có chiều dài cân bằng l và hằng số đàn hồi là k, như ở hình 1.90. Thừa nhận rằng chỉ có một chuyển động theo đường cân bằng gốc là có thể, có nghĩa là bỏ qua sự quay. Đặt m là khối lượng của O^- và M là khối lượng của C^{++}.

(a) Hệ có bao nhiêu bậc dao động tự do?

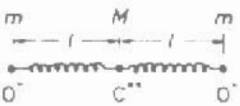
(b) Hãy định nghĩa tọa độ thích hợp và xác định phương trình chuyển động của các khối.

(c) Tìm lời giải cho phương trình chuyển động trong đó tất cả các hạt dao động với tần số chung (kiểu dao động chuẩn) và tính tần số có thể.

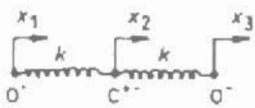
(d) Tính biên độ tương đối của dịch chuyển của các hạt đối với mỗi một kiểu dao động đó và mô tả nguồn gốc của chuyển động của mỗi kiểu dao động. Có thể vẽ sơ đồ.

(e) Kiểu dao động nào có thể hi vọng phát xạ điện từ và cấp đa cực của mỗi kiểu dao động là gì?

(MIT)



Hình 1.90



Hình 1.91

Lời giải:

(a) Hệ có hai bậc dao động tự do.

(b) Đặt x_1, x_2 và x_3 là dịch chuyển tương ứng của O^-, C^{++}, và O^- từ vị trí cân bằng của chúng, như ở hình 1.91. Phương trình chuyển động là

$$m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1) ,$$
$$M\ddot{x}_2 = k(x_3 - x_2) - k(x_2 - x_1) = k(x_1 - 2x_2 + x_3) ,$$
$$m\ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_2) .$$

(c) Đặt $x_1 = A_1 \cos\omega t$, $x_2 = A_2 \cos\omega t$ và $x_3 = A_3 \cos\omega t$ trong phương trình trên. Ta có

$$
\begin{aligned}
(k - m\omega^2)A_1 - kA_2 &= 0\,, \\
-kA_1 + (2k - M\omega^2)A_2 - kA_3 &= 0\,, \\
-kA_1 + (k - m\omega^2)A_3 &= 0\,.
\end{aligned}
$$

Với A_1, A_2, A_3 không đồng nhất bằng 0, ta đòi hỏi

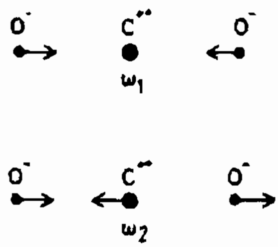
$$
\begin{vmatrix} k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - M\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0\,,
$$

chúng có các nghiệm

$$
\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{(2m+M)k}{mM}}, \qquad \text{và} \qquad \omega_3 = 0\,.
$$

Các tần số góc ω_1 và ω_2 tướng ứng với các dao động có thể, trong khi ω_3 ứng với dao động tịnh tiến của phân tử xét như một khối.

(d) Thay thế ω_1 và ω_2 vào các phương trình với A_1, A_2 và A_3, ta tìm được biên độ tương đối là $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ cho ω_1 và $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-2m}{M} \\ 1 \end{pmatrix}$ cho ω_2, như được mô tả trong hình 1.92.

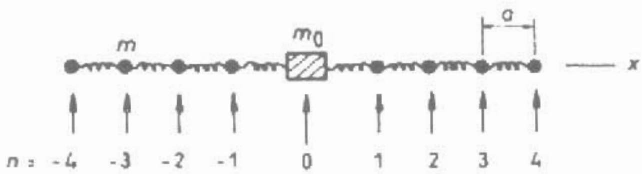


Hình 1.92

(e) Kiểu dao động ω_1 sẽ không làm xuất hiện bức xạ vì tâm điện tích đứng yên trong dao động. Kiểu dao động ω_2 có thể làm xuất hiện bức xạ lưỡng cực, trong khi bức xạ tứ cực và bậc cao hơn là có khả năng đối với cả hai kiểu dao động ω_2 và ω_3.

1122

Lấy một chuỗi rất dài các hạt được nối với nhau bởi các lò xo giống nhau với hệ số đàn hồi K và có độ dài cân bằng là a, như hình vẽ 1.93. Mỗi hạt tự do dao động dọc theo trục x. Tất cả các hạt đều có khối lượng là m ngoại trừ một hạt có khối lượng $m_0 < m$. Khối lượng của lò xo nhỏ không đáng kể.



Hình 1.93

(a) Xét từ hạt "đặc biệt", mối liên hệ giữa vectơ sóng và tần số của dao động đưa đến là thế nào?

(b) Với sóng có vectơ sóng k, xác suất phản xạ khi sóng đập vào hạt đặc biệt đó là bao nhiêu?
Gợi ý cho (b): Thử một nghiệm có dạng

$$x_n = Ae^{ikan} + Be^{-ikan} \quad \text{với} \quad n < 0\,,$$
$$x_n = Ce^{ikan} \quad \text{với} \quad n > 0\,.$$

trong đó A, B, và C là các hàm của thời gian.

(Chicago)

Lời giải:

(a) Với $n \neq 0$,

$$\ddot{x}_n = -\frac{K}{m}[(x_n - x_{n-1}) + (x_n - x_{n+1})] = -\frac{K}{m}(2x_n - x_{n+1} - x_{n-1})\,.$$

Đặt $x_n = Ae^{i(kan-\omega t)}$ vào biểu thức trên chúng ta nhận được

$$-\omega^2 x_n = -\frac{K}{m}(2 - e^{ika} - e^{-ika})x_n = -\frac{2K}{m}[1 - \cos(ka)]x_n\,,$$

hoặc

$$\omega^2 = \frac{2K}{m}[1 - \cos(ka)]\,.$$

(b) Thử một nghiệm có dạng

$$x_n = (Ae^{ikan} + Be^{-ikan})e^{-i\omega t} \quad \text{với} \quad n \leq 0\,,$$
$$x_n = Ce^{i(kan-\omega t)} \quad \text{với} \quad n \geq 0\,.$$

Với $n = 0$, tương ứng ở trên là $C = A + B$. Thay nghiệm vào phương trình chuyển động của hạt $n = 0$,

$$\ddot{x}_0 = -\frac{K}{m_0}(2x_0 - x_1 - x_{-1}) ,$$

chúng ta tìm ra

$$\frac{\omega^2 m_0}{K}(A + B) = 2(A + B) - (A + B)e^{ika} - Ae^{-ika} - Be^{ika} ,$$

Hoặc

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{m_0}{m - m_0} - \frac{m}{m - m_0}\frac{1 - e^{ika}}{1 - \cos(ka)}\right] B \\ &= -\left\{ 1 + \frac{im\sin(ka)}{(m - m_0)[1 - \cos(ka)]}\right\} B . \end{aligned}$$

Do đó xác suất phản xạ là

$$\left|\frac{B}{A}\right|^2 = \left\{1 + \left(\frac{m}{m - m_0}\right)^2 \left[\frac{\sin(ka)}{1 - \cos(ka)}\right]^2\right\}^{-1} .$$

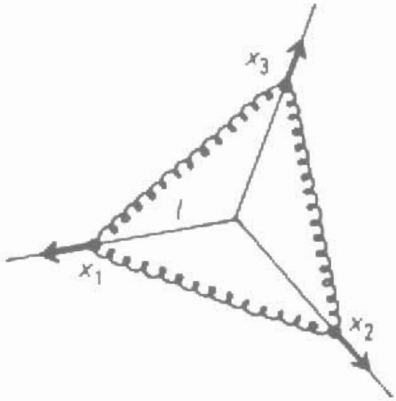
1123

Ba vật thể có khối lượng bằng m và được chỉ ra bằng các chỉ số $i = 1, 2, 3$, chúng bị buộc thực hiện các dao động nhỏ dọc theo các trục đồng phẳng khác nhau với các góc hợp thành là 120° ở các chỗ giao nhau, như hình 1.94. Các lò xo liên kết giống nhau giữ các vật thể đó ở gần các vị trí cân bằng với khoảng cách l từ điểm giao nhau của mỗi trục, nghĩa là, độ dài cân bằng của mỗi lò xo là $\sqrt{3}l$. Các câu hỏi dưới đây có thể trả lời được mà không cần dùng đến các phương pháp giải tích tổng quát.

(a) Chỉ ra rằng các phương trình chuyển động của ba vật được biểu diễn bằng hệ liên kết.

$$\frac{md^2x_i}{dt^2} = -Kx_i - k(x_1 + x_2 + x_3) ,$$

trong đó $x_i(t) + l$ chỉ ra các khoảng cách tương ứng của chúng từ điểm giao nhau. (Đặc biệt, cả K và k đều bằng 3/4 của mỗi hằng số đàn hồi).



Hình 1.94

(b) Xác nhận rằng một kiểu dao động chuẩn là đối xứng hoàn toàn

$$x_1(t) = x_2(t) = x_3(t) ,$$

Và xác định tần số của nó.

(c) Chỉ ra rằng các kiểu dao động chuẩn còn lại suy biến và xác định tần số của chúng.

(d) Tìm một cặp nghiệm thực $\{x_1(t), x_2(t), x_3(t)\}$ miêu tả các kiểu dao động chuẩn trực giao suy biến.

(e) Tìm một cặp thay thế các nghiệm liên hợp phức biểu diễn các kiểu dao động chuẩn trực giao suy biến.

(Chicago)

Lời giải:

(a) Xem hằng số của mỗi lò xo là η và xét các hạt i và j được đặt ở x_i và x_j từ các vị trí cân bằng tương ứng. Sức căng của lò xo giữa 2 hạt là $(x_i + x_j)\cos 30^\circ$, vì thế thế năng của hệ sẽ là

$$U = \frac{3\eta}{8}[(x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2] .$$

Lực tác động lên hạt thứ i sẽ là

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i} = -\frac{3\eta}{4}\left(x_i + \sum_j x_j\right) ,$$

phương trình chuyển động của nó sẽ là

$$m\ddot{x}_1 = -Kx_1 - k(x_1 + x_2 + x_3)$$

với $K = k = \frac{3\eta}{4}$.

(b) Nếu $x_1 = x_2 = x_3$, tất cả 3 chương trinh quy về thành dạng không liên kết

$$m\ddot{x}_i = -(K + 3k)x_i \ .$$

Nghiệm sẽ là

$$x_i = a\cos(\omega t + \varphi)$$

với

$$\omega = \sqrt{\frac{K + 3k}{m}} \ .$$

(c) Hai kiểu dao động chuẩn còn lại là trực giao với kiểu dao động đối xứng ở trên. Chúng thỏa mãn điều kiện

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \ ,$$

đối với nó các phương trình chuyển động đó quy về dạng không liên kết

$$m\dot{x}_i = -Kx_i \ .$$

Đặt $x_i = b_i\cos(\omega' t + \varphi')$, chúng ta có

$$\sum_i b_i = 0, \qquad \omega'^2 = \frac{K}{m} \ .$$

Tần số này là tương tự cho cả hai kiểu dao động, chính vì thế chúng là suy biến.

(d) Hai kiểu dao động chuẩn trực giao suy biến có biên độ là b_1, b_2, b_3 thỏa mãn $\sum_i b_i = 0$. Vì thế

$$\begin{aligned} b_1 &= 0, \qquad b_2 = -b_3 = c \ , \\ b_1 &= c, \qquad b_2 = b_3 = -\frac{c}{2} \end{aligned}$$

cho một cặp nghiệm thực, trong đó c là một số thực tùy ý.

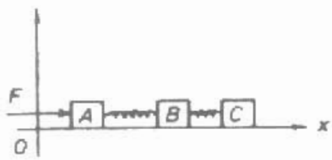
(e) Ta có thể lựa chọn, các biên độ phức cho phép,

$$b_1 = d, \qquad b_2 = de^{\pm\frac{i2\pi}{3}}, \qquad b_3 = de^{\mp\frac{i2\pi}{3}} \ ,$$

trong đó d là số thực, cho một cặp nghiệm kiểu dao động chuẩn trực giao suy biến.

1124

Ba vật thể giống nhau, mỗi vật có khối lượng là m, được kết nối với nhau bằng các lò xo có hằng số đàn hồi K, như trong hình 1.95. Chuyển động bị giới hạn trong một chiều.



Hình 1.95

Ở thời điểm $t = 0$, các vật ở trạng thái nghỉ ở các vị trí cân bằng. Tác dụng lên vật A một ngoại lực dẫn động phụ thuộc vào thời gian $F(t) = f\cos(\omega t)$, $t > 0$. Tính chuyển động của vật C.

(*Princeton*)

Lời giải:

Coi x_A, x_B, x_C là các tọa độ của ba vật và a là độ dài tự nhiên của mỗi lò xo. Các phương trình chuyển động là

$$
\begin{aligned}
f\cos(\omega t) + K(x_B - x_A - a) &= m\ddot{x}_A\,, \\
K(x_C - x_B - a) - K(x_B - x_A - a) &= m\ddot{x}_B\,, \\
-K(x_C - x_B - a) &= m\ddot{x}_C\,.
\end{aligned}
$$

Tập hợp các phương trình trên có thể được viết như sau

$$
\begin{aligned}
f\cos(\omega t) &= m(\ddot{x}_A + \ddot{x}_B + \ddot{x}_C)\,, \\
f\cos(\omega t) - 2aK &= m(\ddot{x}_A - \ddot{x}_C) + K(x_A - x_C)\,, \\
f\cos(\omega t) &= m(\ddot{x}_A - 2\ddot{x}_B + \ddot{x}_C) + 3K(x_A - 2x_B + x_C)\,,
\end{aligned}
$$

hoặc

$$f\cos(\omega t) = m\ddot{y}_1\,, \tag{1}$$

$$f\cos(\omega t) - 2aK = m\ddot{y}_2 + Ky_2\,, \tag{2}$$

$$f\cos(\omega t) = m\ddot{y}_3 + 3Ky_3\,, \tag{3}$$

với $y_1 = x_A + x_B + x_C$, $y_2 = x_A - x_C$, $y_3 = x_A - 2x_B + x_C$. Có thể thấy rằng y_1, y_2 và y_3 là ba tọa độ chuẩn của hệ dao động này. Các điều kiện ban đầu tại thời điểm $t = 0$ là

$$x_A = 0, \qquad x_B = a, \qquad x_C = 2a, \qquad \dot{x}_A = \dot{x}_B = \dot{x}_C = 0\,,$$

hoặc

$$y_1 = 3a, \qquad y_2 = -2a, \qquad y_3 = 0, \qquad \dot{y}_1 = \dot{y}_2 = \dot{y}_3 = 0\,.$$

Phương trình (1) có thể lấy tích phân, với các điều kiện ban đầu như trên sẽ cho ta

$$y_1 = \frac{f}{m\omega^2}[1 - \cos(\omega t)] + 3a\,.$$

Để giải phương trình (2), chúng ta thử một nghiệm riêng có dạng

$$y_2 = A_2 \cos(\omega t) + B_2$$

và thu được $A_2 = \frac{f}{K - m\omega^2}$, $B_2 = -2a$. Nghiệm tổng quát là

$$y_2 = \frac{f\cos(\omega t)}{K - m\omega^2} - 2a + C_2\cos(\omega_2 t) + D_2\sin(\omega_2 t)\,,$$

trong đó $\omega_2 = \sqrt{\frac{K}{m}}$. Từ điều kiện ban đầu cho ta

$$C_2 = -\frac{f}{K - m\omega^2}, \qquad D_2 = 0\,.$$

Để giải (3) chúng ta thử nghiệm riêng có dạng

$$y_3 = A_3\cos(\omega t)$$

và nhận được $A_3 = f/(3K - m\omega^2)$. Nghiệm tổng quát là

$$y_3 = \frac{f\cos(\omega t)}{3K - m\omega^2} + C_3\cos(\omega_3 t) + D_3\sin(\omega_3 t)\,,$$

trong đó $\omega_3 = \sqrt{\frac{3K}{m}}$. Điều kiện ban đầu cho ta

$$C_3 = -\frac{f}{3K - m\omega^2}, \qquad D_3 = 0\,.$$

Chính vì vậy các nghiệm sẽ là

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{f}{m\omega^2}[1 - \cos(\omega t)] + 3a\,, \\ y_2 = \dfrac{f}{K - m\omega^2}[\cos(\omega t) - \cos(\omega_2 t)] - 2a\,, \\ y_3 = \dfrac{f}{3K - m\omega^2}[\cos(\omega t) - \cos(\omega_3 t)]\,. \end{cases}$$

Chuyển động của vật C là tổ hợp tuyến tính của y_1, y_2 và y_3

$$\begin{aligned} x_C = \frac{y_1}{3} - \frac{y_2}{2} + \frac{y_3}{6} = 2a + \frac{f}{3m\omega^2}[1 - \cos(\omega t)] \\ + \frac{f}{2m(\omega_2^2 - \omega^2)}[\cos(\omega t) - \cos(\omega_2 t)] \\ + \frac{f}{6m(\omega_3^2 - \omega^2)}[\cos(\omega t) - \cos(\omega_3 t)] \,. \end{aligned}$$

Ghi nhớ rằng ω_2 và ω_3 là các tần số chuẩn của hệ thống.

1125

Mô hình của vòng benzen rất hữu ích cho một số mục đích là vòng dây gắn với 6 hạt không có ma sát, với các lò xò căng giữa các hạt, như hình 1.96. Mỗi hạt có khối lượng m và tất cả lò xo có hằng số đàn hồi là K. Các hạt được đánh số để tiện phân loại. Vòng được đặt cố định trong không gian.

(a) Tính, hoặc viết ra bằng trực giác, tần số riêng của các kiểu dao động chuẩn, chỉ ra mọi trường hợp suy biến. Trong hình 1.97, vẽ từng kiểu dao động bằng cách kẻ một mũi tên gần mỗi vật chỉ ra hướng chuyển động và tô đậm các vật đứng yên.

(b) Khối tâm có thể dao động với tần số là bao nhiêu?

(c) Kiểu dao động nào có thể liên quan đến kiểu dao động của phân tử benzen thực?
Gợi ý: Có thể bỏ được nhiều tính toán đại số bằng cách xem xét tính đối xứng của bài toán.

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Xem ψ_n là dịch chuyển của hạt thứ n. Phương trình chuyển động của nó là

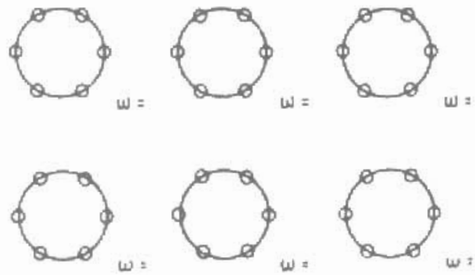
$$\begin{aligned} m\ddot{\psi}_n &= K(\psi_{n+1} - \psi_n) - K(\psi_n - \psi_{n-1}) \\ &= K(\psi_{n-1} + \psi_{n+1} - 2\psi_n) \,. \end{aligned}$$

Đặt $\psi_n = A_n e^{i\omega t}$, chúng ta nhận được

$$-m\omega^2 A_n = K(A_{n-1} + A_{n+1} - 2A_n) \,,$$

hay

Hình 1.96



Hình 1.97

$$A_{n-1} + \varepsilon A_n + A_{n+1} = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots, 6\,,$$

trong đó

$$\varepsilon = \frac{m\omega^2}{K} - 2\,.$$

Để hệ phương trình thuần nhất tuyến tính có một nghiệm khác không, định thức sau đây phải bằng không

$$\begin{vmatrix} \varepsilon & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \varepsilon & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \varepsilon & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \varepsilon \end{vmatrix} = 0\,,$$

hoặc

$$\varepsilon^6 - 6\varepsilon^4 + 9\varepsilon^2 - 4 = (\varepsilon + 1)^2(\varepsilon - 1)^2(\varepsilon + 2)(\varepsilon - 2) = 0\,.$$

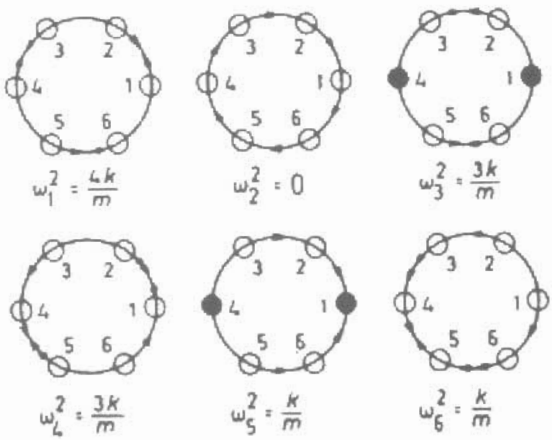
Chính vì vậy các nghiệm sẽ là

$$\varepsilon_1 = 2, \quad \varepsilon_2 = -2, \quad \varepsilon_3 = 1,$$
$$\varepsilon_4 = 1, \quad \varepsilon_5 = -1, \quad \varepsilon_6 = -1\,.$$

Các tần số riêng tương ứng là

$$\omega_1^2 = \frac{4K}{m}, \quad \omega_2^2 = 0, \quad \omega_3^2 = \frac{3K}{m},$$
$$\omega_4^2 = \frac{3K}{m}, \quad \omega_5^2 = \frac{K}{m}, \quad \omega_6^2 = \frac{K}{m}\,.$$

Có thể nhận ra rằng kiểu 3 và kiểu 4 cũng như kiểu 5 và kiểu 6 đều suy biến. Thay $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_6$ lần lượt vào hệ phương trình $A_{n-1} + \varepsilon A_n + A_{n+1} = 0$, chúng ta có thể tìm ra các tỉ số biên độ của mỗi kiểu chuẩn. Kết quả được miêu tả bằng hình 1.98. Các dịch chuyển của 6 hạt có độ lớn tương tự nhau trong các kiểu 1, 2, 3 và 5 ngoại trừ trong kiểu 3 và kiểu 5 các hạt thứ tư và đầu tiên đứng yên. Hướng của chúng được chỉ ra trong hình. Kiểu 2 tương ứng với sự quay của hệ thống như là hệ đầy đủ. Trong kiểu 4, các dịch chuyển của hạt thứ 2 và hạt thứ 5 lớn gấp đôi so với những hạt khác, và trong kiểu 6, các dịch chuyển của hạt thứ 3 và hạt thứ 6 cũng lớn gấp 2 lần so với những hạt khác. Những sự dịch chuyển lớn hơn này chỉ ra bằng 2 mũi tên cùng hướng trong hình.



Hình 1.98

(b) Từ hình 1.98 ta thấy chỉ có ở kiểu 5 và ở kiểu 6 tâm khối có thể dao động với tần số $\sqrt{k/m}$.

(c) Vì tâm khối của phân tử benzen thực không thể dao động, chỉ có các kiểu 1, 2, 3 và 4 có thể liên quan với phân tử benzen thực.

1126

Xem xét một hệ thống cổ điển các chất điểm có khối lượng m_i với các vectơ vị trí $\mathbf{r}_i$, mỗi hạt chịu tác dụng của một lực $\mathbf{F}_i$.

(a) Xét lượng $\sum_i m_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i$, giả sử rằng nó luôn luôn hữu hạn và chứng minh định lý virian

$$T = -\frac{1}{2}\overline{\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i}\,,$$

trong đó T là tổng động năng của hệ và dấu gạch ngang biểu thị trung bình theo thời gian.

(b) Trong trường hợp một hạt duy nhất chịu tác dụng của một lực theo luật bình phương nghịch đảo, chỉ ra rằng

$$T = -\frac{\overline{V}}{2}\,,$$

trong đó V là thế năng.

(*SUNY, Buffalo*)

Lời giải:

(a) Xem $Q(t) = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i$. Chúng ta có

$$\begin{aligned}\dot{Q}(t) &= \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i \\ &= \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i\,.\end{aligned}$$

Trung bình theo thời gian của $\dot{Q}(t)$ là

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \dot{Q}(t)dt = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 dt + \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i dt\,,$$

cụ thể là

$$\frac{1}{\tau}[Q(\tau) - Q(0)] = 2\overline{T} + \overline{\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i}\,,$$

trong đó τ là chu kì nếu các chuyển động là tuần hoàn với các chu kì giống nhau, hoặc nếu không $\tau \to \infty$. Trong cả 2 trường hợp, vế trái phương trình bằng không và chúng ta có

$$2\overline{T} + \sum_i \overline{\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i} = 0\,,$$

đó là điều phải chứng minh.

(b) Khi tác động lên một hạt duy nhất bằng một lực tỉ lệ với bình phương nghịch đảo khoảng cách,

$$F = \frac{C}{r^2}, \qquad \text{hay} \qquad V = \frac{C}{r}\,,$$

trong đó C là hằng số. Khi đó định lý virian cho ta,

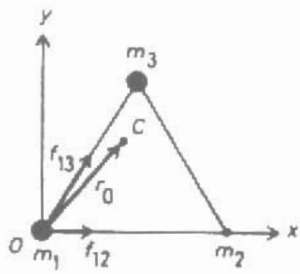
$$\overline{T} = -\frac{1}{2}\overline{\frac{C}{r^3}\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}} = -\frac{1}{2}\overline{\left(\frac{C}{r}\right)} = -\frac{\overline{V}}{2}\,.$$

1127

Ba hạt m_1, m_2 và m_3, được đặt ở 3 góc của một tam giác đều có cạnh là s, các hạt hút nhau theo định luật hấp dẫn của Newton. Xác định chuyển động quay khiến cho khoảng cách tương đối của mỗi hạt không thay đổi.

Gợi ý: Viết ra lực trong hệ khối tâm tác dụng lên một trong các hạt.

(*Wisconsin*)



Hình 1.99

Lời giải:

Trong hệ tọa độ Descartes ra trong hình 1.99, ba hạt m_1, m_2, m_3 có tọa độ tương ứng là $(0,0)$, $(s,0)$ và $(\frac{s}{2}, \frac{\sqrt{3}s}{2})$. Vị trí của tâm khối C là

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\sum\limits_i m_i r_i}{\sum\limits_i m_i}$$

$$= \frac{s}{m_1 + m_2 + m_3}\left[\left(m_2 + \frac{m_3}{2}\right)\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}m_3\mathbf{j}\right]\,.$$

Xét lực tác động lên m_1. Có 2 lực hút

$$\mathbf{f}_{12} = \frac{Gm_1m_2}{s^2}\mathbf{i} \qquad \text{và} \qquad \mathbf{f}_{13} = \frac{Gm_1m_3}{s^2}\left(\frac{\mathbf{i}}{2} + \frac{\sqrt{3}\mathbf{j}}{2}\right)$$

tương ứng do m_2 và m_3 gây ra. Hợp lực của chúng là

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_{12} + \mathbf{f}_{13} = \frac{Gm_1}{s^2}\left[\left(m_2 + \frac{m_3}{2}\right)\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}m_3\mathbf{j}\right] .$$

Vì $\mathbf{f}_1$ song song với $\mathbf{r}_0$ và cả 2 đều bắt đầu từ cùng gốc O, $\mathbf{f}_1$ đi qua tâm khối C. Chính vì vậy m_1 chịu tác động bởi lực xuyên tâm với tâm ở C và do đó m_1 di chuyển theo một vòng tròn tâm khối C. Bán kính của quỹ đạo hình tròn này là

$$R_1 = |\mathbf{r}_0| = \left(\frac{s}{m_1 + m_2 + m_3}\right)\sqrt{m_2^2 + m_3^2 + m_2m_3} .$$

Vận tốc tuyến tính của m_1 là v_1 được cho bởi $\frac{mv_1^2}{R_1} = |\mathbf{f}_1|$, hoặc

$$v_1^2 = \frac{R_1}{m_1}|\mathbf{f}_1| = \frac{G}{s}\left(\frac{m_2^2 + m_3^2 + m_2m_3}{m_1 + m_2 + m_3}\right) .$$

Bằng cách hoán vị các chỉ số, kết quả trên cũng được áp dụng cho m_2 và m_3. Chính vì vậy chuyển động quay khiến cho khoảng cách của mỗi cặp hạt không thay đổi là chuyển động tròn có chu kì

$$T = \frac{2\pi R_1}{v_1} = 2\pi s\sqrt{\frac{s}{G(m_1 + m_2 + m_3)}} ,$$

Chu kì này chung cho tất cả 3 hạt.

1128

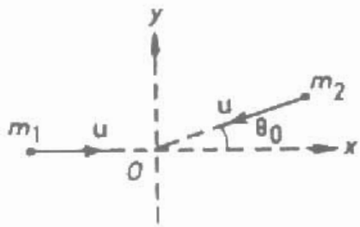
Hai hạt phi tương đối tính có khối lượng và năng lượng bằng nhau được chỉ ra trong hình 1.100 va chạm gần như thẳng vào nhau. Trong một hệ tọa độ (hệ tâm khối) di chuyển với vận tốc là $\mathbf{V}$, các hạt có vẻ như va chạm đối đầu với nhau.

(a) Tìm $\mathbf{V}$, vận tốc của hệ tâm khối.

(b) So sánh năng lượng tổng trong hệ thống tâm khối với năng lượng tổng ban đầu.

Trình bày câu trả lời của bạn dưới dạng vận tốc u và góc va chạm θ_0.

(*Wisconsin*)



Hình 1.100

Lời giải:

Dùng hệ phòng thí nghiệm ở hình 1.100 và lấy thời điểm va chạm $t = 0$. Các vectơ vị trí của m_1 và m_2 tại thời điểm $t < 0$ là

$$\mathbf{r}_1 = ut\mathbf{i} \, ,$$
$$\mathbf{r}_2 = -ut(\cos\theta_0\mathbf{i} + \sin\theta_0\mathbf{j}) \, .$$

Do vậy vectơ vị trí của tâm khối là

$$\mathbf{r}_c = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}$$
$$= \frac{1}{2}ut[(1 - \cos\theta_0)\mathbf{i} - \sin\theta_0\mathbf{j}]$$

khi $m_1 = m_2 = m$, chẳng hạn.

(a) Vận tốc của tâm khối, tức là của hệ tâm khối là

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{r}}_c = \frac{u}{2}[(1 - \cos\theta_0)\mathbf{i} - \sin\theta_0\mathbf{j}] \, .$$

(b) Trong hệ tâm khối, vận tốc của m_1 là

$$\mathbf{V}'_1 = \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_c = u\mathbf{i} - \frac{u}{2}[(1 - \cos\theta_0)\mathbf{i} - \sin\theta_0\mathbf{j}]$$
$$= \frac{u}{2}[(1 + \cos\theta_0)\mathbf{i} + \sin\theta_0\mathbf{j}] \, ,$$

và vận tốc của m_2 là

$$\mathbf{V}'_2 = \dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_c = -u[\cos\theta_0\mathbf{i} + \sin\theta_0\mathbf{j}] - \frac{u}{2}[(1 - \cos\theta_0)\mathbf{i} - \sin\theta_0\mathbf{j}]$$
$$= -\frac{u}{2}[(1 + \cos\theta_0)\mathbf{i} + \sin\theta_0\mathbf{j}] \, .$$

Tổng năng lượng của m_1 và m_2 khi đó là

$$E' = \frac{mV_1'^2}{2} + \frac{mV_2'^2}{2} = \frac{1}{2}mu^2(1 + \cos\theta_0) .$$

Vì năng lượng toàn phần ban đầu là

$$E = \frac{m_1u^2}{2} + \frac{m_2u^2}{2} = mu^2 ,$$

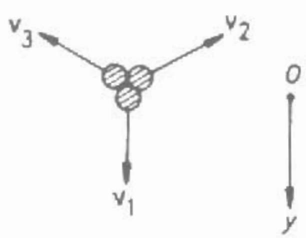
tỉ số của 2 năng lượng là

$$\frac{E'}{E} = \frac{1 + \cos\theta_0}{2} .$$

1129

Một quả rốc-két được phóng thẳng lên trên và nổ vỡ thành 3 mảnh có khối lượng bằng nhau khi đạt đến điểm cao nhất của quỹ đạo (hình 1.101). Một mảnh rơi thẳng xuống dưới sau thời gian t_1, còn 2 mảnh khác chạm đất sau thời gian t_2, sau khi nổ. Tìm độ cao $h(t_1, t_2)$ tại thời điểm mà quả đạn vỡ làm ba phần.

(*Wisconsin*)



Hình 1.101

Lời giải:

Vận tốc và xung lượng của của quả rốc-két là bằng không khi nó chạm tới đỉnh của quỹ đạo. Sự bảo toàn xung lượng sau vụ nổ cho ta

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + m_3\mathbf{v}_3 = 0 .$$

Vì

$$m_1 = m_2 = m_3, \qquad v_1 + v_2 + v_3 = 0 .$$

Vì mảnh thứ 2 và mảnh thứ 3 chạm đất cùng lúc, các thành phần thẳng đứng của $\mathbf{v}_2$ và $\mathbf{v}_3$ là như nhau. Vì $\mathbf{v}_1$ hướng thẳng xuống dưới, nên mỗi thành phần thẳng đứng của $\mathbf{v}_2$ và $\mathbf{v}_3$ là $-v_1/2$. Từ đó đối với mảnh thứ nhất và mảnh thứ 2 ta có

$$h = v_1 t_1 + \frac{g t_1^2}{2} ,$$

$$h = \frac{-v_1 t_2}{2} + \frac{g t_2^2}{2} ,$$

cho ta

$$v_1 = \frac{g(t_2^2 - t_1^2)}{2t_1 + t_2} ,$$

$$h = \frac{g t_1 t_2}{2} \cdot \frac{t_1 + 2t_2}{2t_1 + t_2} .$$

1130

Một vệ tinh có khối lượng m chuyển động trên quỹ đạo hình tròn bán kính R với vận tốc v xung quanh trái đất. Nó đột ngột nhận một vật nhỏ khối lượng δm đứng yên trước khi va chạm. Tìm sự thay đổi năng lượng tổng của vệ tinh, và cho rằng quỹ đạo mới là gần tròn, tìm bán kính của quỹ đạo mới.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Trước khi nhận vật khối lượng nhỏ, vệ tinh chuyển động trong quỹ đạo hình tròn, do đó

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} ,$$

từ đó cho $Rv^2 = GM$, trong đó M là khối lượng của quả đất. Chính vì vậy tổng năng lượng của nó là

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = -\frac{1}{2}mv^2 .$$

Sau khi nhận một khối lượng nhỏ tĩnh δm, tốc độ của vệ tinh thay đổi thành (xem quỹ đạo mới gần tròn, mặc dù thực tế nó là quỹ đạo elip)

$$v' = \frac{mv}{m + \delta m} ,$$

và tổng năng lượng của nó trở thành

$$E' = -\frac{1}{2}(m + \delta m)v'^2 = -\frac{1}{2}\frac{m^2v^2}{m + \delta m} .$$

Do vậy năng lượng mất đi do sự va chạm là

$$E' - E = \frac{1}{2}mv^2\left(1 - \frac{m}{m + \delta m}\right) = \frac{1}{2}mv^2\frac{\delta m}{m + \delta m}$$
$$\approx \frac{1}{2}v^2\delta m .$$

Nếu bán kính mới là R' chúng ta cũng có

$$R'v'^2 = GM = Rv^2 ,$$

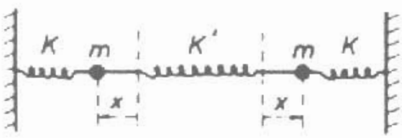
cho ta

$$R' = \left(\frac{v}{v'}\right)^2 R = \left(\frac{m + \delta m}{m}\right)^2 R \approx \left(1 + \frac{2\delta m}{m}\right) R .$$

1131

Cho một hệ thống như hình vẽ 1.102, hai vật có khối lượng giống nhau và khối lượng của các lò xo là không đáng kể. Tính chu kì dao động nếu các vật được giải phóng từ cấu hình đối xứng ban đầu như hình vẽ.

(*Wisconsin*)



Hình 1.102

Lời giải:

Do tính đối xứng, các dao động của 2 vật là giống nhau. Xem xét một trong hai vật và viết phương trình chuyển động

$$m\ddot{x} = -Kx - K'(x + x) = -(K + 2K')x ,$$

trong đó x là ly độ từ vị trí cân bằng tương ứng. Khi đó tần số góc của dao động là

$$\omega = \sqrt{\frac{K + 2K'}{m}} ,$$

và chu kì của dao động là

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K + 2K'}} .$$

Chú ý, nói chung có hai kiểu của dao động tuyến tính cho hệ thống này tương ứng với hai kiểu chuẩn. Nhưng điều kiện đối xứng ban đầu xác định rằng chỉ một kiểu được kích thích.

1132

Xét hệ thống trái đất – mặt trăng và để đơn giản giả thiết rằng có thể bỏ qua mọi tương tác với các vật khác. Mặt trăng di chuyển quanh trái đất chậm hơn sự quay của quả đất tạo ra các dòng thủy triều trên quả đất. Một tình trạng tương tự trên sao Hỏa, nhưng với sự khác biệt đó một trong những mặt trăng của quay quanh sao Hỏa nhanh hơn sự quay của hành tinh. Chứng minh rằng một hệ quả của ma sát thủy triều là trong một hệ thống khoảng cách mặt trăng – hành tinh thì tăng lên và trong trường hợp kia nó giảm xuống. Trong trường hợp nào thì giảm xuống?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Với hệ thống trái dất – mặt trăng, lực ma sát được gây ra bởi thủy triều làm chậm tốc độ quay của trái đất. Tuy nhiên, tổng momen xung lượng của hệ trái đất – mặt trăng được bảo toàn bởi vì sự tương tác giữa hệ thống này với các đối tượng khác có thể được bỏ qua. Sự giảm momen xung lượng quay của trái đất sẽ dẫn tới sự tăng momen xung lượng của mặt trăng quanh trái dất (chính xác là xung quanh tâm khối của hệ thống). Momen xung lượng của mặt trăng là $J = mR^2\omega$. Vì

$$mR\omega^2 = \frac{GMm}{R^2} ,$$

chúng ta có

$$J = mR^2\sqrt{\frac{GM}{R^3}} = m\sqrt{GMR} .$$

Ở đây chúng ta xem tâm của trái đất là gần đúng đứng yên, do đó R là khoảng cách trái đất – mặt trăng. Khi J tăng, R cũng sẽ tăng. Chính vì vậy đối với hệ thống trái đất – mặt trăng, sự ảnh hưởng của thủy triều làm tăng khoảng cách giữa trái đất và mặt trăng.

Với hệ sao Hỏa – mặt trăng, mặt trăng quay quanh sao Hỏa nhanh hơn sự quay của sao Hỏa, chính vì vậy lực ma sát gây ra bởi hiện tượng triều sẽ làm tăng tốc độ chuyển động của sao Hỏa, momen xung lượng quay của nó do đó sẽ tăng lên. Vì tổng momen xung lượng được bảo toàn, momen xung lượng của mặt trăng sẽ giảm. Những luận cứ trên chỉ ra rằng khoảng cách giữa sao Hỏa và mặt trăng của nó sẽ giảm.

1133

Hai chất điểm, mỗi chất điểm có khối lượng m, được đặt đứng yên trên bề mặt nằm ngang không ma sát. Chúng được nối bởi một lò xo có chiều dài cân bằng l và hằng số K. Tác động một xung I tại thời điểm $t = 0$ lên một chất điểm theo một hướng vuông góc với lò xo. Giả sử rằng lò xo luôn nằm dọc theo đường nối chiều dài l và không bị cong.

(a) Sau thời gian t, năng lượng tổng cộng và xung lượng tổng của hai chất điểm sẽ như thế nào?

(b) Vận tốc của khối tâm (kể cả hướng) và tổng momen xung lượng quanh khối tâm sẽ như thế nào?

(c) Khoảng cách lớn nhất giữa hai chất điểm trong chuyển động sau khi xung tác động sẽ như thế nào?

(d) Tốc độ tức thời lớn nhất nhận được bởi mỗi hạt sẽ như thế nào? Hãy giải thích.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Do sự bảo toàn của xung lượng và của cơ năng, xung lượng toàn phần và năng lượng toàn phần của hai chất điểm ở thời điểm t là giống như khi chúng ở thời điểm $t = 0$ sau khi tác động bằng xung lực

$$\mathbf{P} = \mathbf{I}, \qquad E = \frac{P^2}{2m} = \frac{I^2}{2m}\ .$$

(b) Hệ có tổng khối lượng là $2m$, xung lượng toàn phần là I, chính vì vậy tâm khối có vận tốc là

$$v_c = \frac{I}{2m} .$$

Sau khi tác động vào một xung, momen xung lượng của hệ thống quanh tâm khối là $L = \frac{Il}{2}$. Vì momen xung lượng bảo toàn trong hệ tâm khối, L là momen xung lượng quanh tâm khối ở tất cả các thời điểm sau đó.

(c) Coi l_M là khoảng cách lớn nhất được yêu cầu. Bảo toàn momen xung lượng và cơ năng

$$2m\left(\frac{l_M}{2}\right)^2 \dot{\varphi} = \frac{Il}{2},$$

$$m\left(\frac{l_M}{2}\dot{\varphi}\right)^2 + m\left(\frac{I}{2m}\right)^2 + \frac{1}{2}K(l_M - l)^2 = \frac{I^2}{2m}$$

cho ta

$$2mKl_M^4 - 4mKll_M^3 + (2mKl^2 - I^2)l_M^2 + I^2l^2 = 0 ,$$

nghiệm thực dương của nó là khoảng cách cực đại giữa hai chất điểm trong chuyển động sau xung trên.

(d) Coi x là khoảng cách giữa 2 chất điểm. Sự bảo toàn của cơ năng đưa ra

$$\frac{1}{2}\cdot 2m\left[\left(\frac{x}{2}\dot{\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\dot{x}}{2}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\cdot 2m\left(\frac{I}{2m}\right)^2 + \frac{1}{2}K(x-l)^2 = \frac{I^2}{2m} ,$$

hoặc

$$\frac{m}{4}(x^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2) + \frac{1}{2}K(x-l)^2 = \text{ hằng số } ,$$

chỉ ra rằng khi $x = l$, động năng của hệ 2 chất điểm, được cho bởi số hạng đầu tiên ở vế bên trái là lớn nhất. Đó là trường hợp tại thời điểm $t = 0$. Ngoài ra, tại $t = 0$ chỉ có hạt bị tác động bởi xung có vận tốc trong khi hạt kia vẫn đứng yên. Chính vì thế hạt đầu tiên sẽ có vận tốc lớn nhất

$$v_M = \frac{I}{m}$$

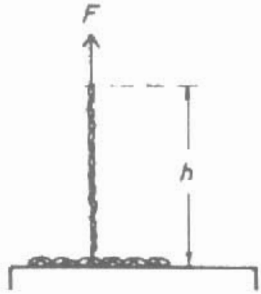
ở tại thời điểm $t = 0$.

Điều kiện $x = l$ đôi khi lại có thể được thỏa mãn. Tuy nhiên, vì vận tốc của hạt thứ nhất không tiến về không, do đó hạt thứ 2 cũng không thể đạt được vận tốc lớn nhất nói trên. Do đó vận tốc lớn nhất hạt thứ 2 có thể đạt được nhỏ hơn vận tốc v_m.

1134

Một chuỗi xích với tỉ số khối lượng/độ dài $= u$ treo thẳng đứng ở một đầu nơi tác dụng một lực hướng lên F như hình 1.103. Tìm phương trình chuyển động cho h, độ cao của đầu phía trên so với bàn (h là độ dài của đoạn xích treo tự do).

(*Wisconsin*)



Hình 1.103

Lời giải:

Vì bài toán này đề cập đến biến khối lượng nên sẽ thuận tiện hơn khi làm việc với xung lượng. Xét sự thay đổi xung lượng của chuỗi dây xích trong một khoảng thời gian từ t đến $t + \Delta t$. Nếu h và v tương ứng là độ cao và vận tốc của phần dây xích treo tự do ở thời điểm t, xung lượng của nó là μhv tại thời điểm t và $\mu(h - \Delta h)(v + \Delta v)$ ở thời điểm $t + \Delta t$ (xem hình 1.104). Phần Δh của chuỗi xích chạm tới bàn và truyền một xung lượng $\approx \mu \Delta hv$ cho bàn trong khoảng thời gian, định lý xung lượng đưa ra

$$\mu(h - \Delta h)(v + \Delta v) + \mu\Delta hv - \mu hv = (\mu hg - F)\Delta t \,,$$

hay, chỉ giữ lại các thành phần bậc nhất

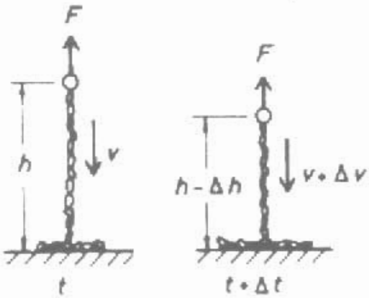
$$\mu h\Delta v = (\mu hg - F)\Delta t \,.$$

Khi $\Delta t \to 0$, phương trình trên trở thành

$$\mu h\dot{v} = \mu hg - F \,.$$

Khi $v = -\dot{h}$, chúng ta có phương trình chuyển động

$$\ddot{h} = \frac{F}{\mu h} - g \,.$$



Hình 1.104

1135

Dùng phương trình tên lửa để tìm khối lượng còn lại m của tên lửa (theo khối lượng) mà ở đó xung lượng của tên lửa là cực đại, đối với một tên lửa khối lượng m bắt đầu đứng yên trong không gian tự do. Vận tốc xả khí là một hằng số v_0.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Phương trình chuyển động cho một rốc-két (tên lửa), vận tốc v, trong không gian tự do là

$$\frac{mdv}{dt} = \frac{-v_0 dm}{dt} \ ,$$

nghĩa là

$$dv = \frac{-v_0 dm}{m} \ .$$

Lấy tích phân, chúng ta được

$$v = -v_0 \ln\left(\frac{m}{m_0}\right) \ ,$$

trong đó m_0 là khối lượng rốc-két khi bắn đi. Xung lượng của rốc-két là

$$P = mv = -mv_0 \ln\left(\frac{m}{m_0}\right) \ .$$

Để nó đạt giá trị cực đại ta cần có

$$\frac{dP}{dm} = -v_0 \ln\left(\frac{m}{m_0}\right) - v_0 = 0 .$$

Vì thế rốc-két có xung lượng cực đại khi khối lượng còn lại là

$$m = \frac{m_0}{e} .$$

1136

Một quả rốc-két được phóng thẳng lên trên không vận tốc ban đầu. Nó được đẩy bởi khối lượng phụt ra với vận tốc phụt không đổi u so với rốc-két và với tốc độ không đổi được xác định sao cho gia tốc ban đầu là không. Giả sử gia tốc là hằng số theo lực hấp dẫn.

(a) Tìm gia tốc của rốc-két như là một hàm của thời gian;

(b) Chỉ ra cách bạn sẽ tìm độ cao của rốc-két như là một hàm của thời gian.

(Không cần thiết phải lấy tích phân).

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Xem v là vận tốc của rốc két, phương trình chuyển động là

$$\frac{mdv}{dt} = -\frac{udm}{dt} - mg .$$

Vì dm/dt = hằng số và $m = m_0$, $dv/dt = 0$ tại $t = 0$, phương trình trên cho

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{m_0 g}{u}$$

ở bất kì thời điểm t nào sau khi phóng. Lấy tích phân ta được

$$m = m_0\left(1 - \frac{gt}{u}\right) .$$

Phương trình chuyển động bây giờ trở thành

$$m_0\left(1 - \frac{gt}{u}\right)\frac{dv}{dt} = (m_0 - m)g = \frac{m_0 g^2 t}{u} ,$$

hay

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g^2 t}{u - gt} \,,$$

nó diễn tả gia tốc của rốc-két như là một hàm của thời gian.

(b) Vận tốc ở tại thời điểm t là

$$v = \int_0^t g\left(\frac{gt'}{u - gt'}\right) dt' = -gt + u\ln\left(\frac{u}{u - gt}\right) \,.$$

Tích phân lần nữa cho ta độ cao của rốc két như là một hàm của thời gian

$$h = \int_0^t \left(-gt' + u\ln\frac{u}{u - gt'}\right) dt' = -\frac{1}{2}gt^2 + u\int_0^t \ln\frac{u}{u - gt'} dt' \,.$$

1137

Một thùng khối lượng M (khi trống) đứng yên tại thời điểm ban đầu và chứa đầy nước được kéo lên từ giếng bằng một sợi dây thừng với một lực ổn định P. Nước bị rò rỉ ra ngoài với một tốc độ đều và thùng sẽ trống sau thời gian T. Tìm vận tốc của thùng tại thời điểm mà nó rò rỉ hết nước.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Coi tổng khối lượng của thùng và nước là M'. Khi đó

$$M' = M + m - \frac{mt}{T} \,,$$

trong đó m là khối lượng ban đầu của nước. Vì nước bị rò rỉ có vận tốc bằng không với thùng, phương trình chuyển động là

$$M'\frac{dv}{dt} = P - M'g \,,$$

hay

$$dv = \frac{P - M'g}{M'}dt = \left(\frac{P}{M + m - \frac{m}{T}t} - g\right) dt \,.$$

Vận tốc của thùng ở thời điểm bị rò hết nước là

$$v = \int_0^T \frac{Pdt}{M + m - \frac{m}{T}t} - gT = \frac{PT}{m}\ln\left(\frac{M + m}{M}\right) - gT \,.$$

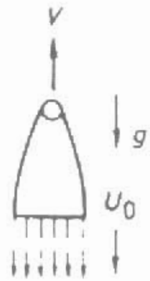
1138

Một tàu kiểu rốc-két với khối lượng M_0 và được nạp đầy nhiên liệu khối lượng m_0 cất cánh thẳng đứng trong một trường hấp dẫn không đổi như hình 1.105. Nó phụt nhiên liệu với vận tốc U_0 so với con tàu. Nhiên liệu sẽ phụt hết sau một khoảng thời gian T_0.

(a) Tìm phương trình chuyển động của rốc-két theo dM/dt, U_0, g, và M, trong đó M là khối lượng của rốc-két ở thời điểm t.

(b) Vận tốc của phương tiện ở tại thời điểm t_0 khi tất cả nhiên liệu được phụt hết ra ngoài là bao nhiêu (viết theo M_0, m_0, g và t_0)?

(MIT)



Hình 1.105

Lời giải:

(a) Coi rốc-két có khối lượng M và vận tốc V, trong khoảng thời gian Δt phụt ra một khối lượng ΔM với vận tốc U_0 so với rốc-két và nhận được thêm một vận tốc ΔV. Lấy hướng dương là hướng thẳng lên trên, chúng ta có theo định lý xung lượng

$$(M - \Delta M)(V + \Delta V) + (V + U_0)\Delta M - MV = -Mg\Delta t\ ,$$

cụ thể là

$$M\frac{\Delta V}{\Delta t} = -U_0\frac{\Delta M}{\Delta t} - Mg\ ,$$

hay khi $\Delta t \to 0$,

$$M\frac{dV}{dt} = -U_0\frac{dM}{dt} - Mg\ .$$

(b) Phương trình có thể viết lại như sau

$$dV = -U_0\frac{dM}{M} - gdt\ .$$

Lấy tích phân chúng ta có

$$V = -U_0 \ln M - gt + K .$$

Khi $M = M_0 + m_0$, $V = 0$ tại thời điểm $t = 0$,

$$K = U_0 \ln(M_0 + m_0) .$$

Vậy khi $M = M_0$ ở thời điểm $t = t_0$, chúng ta có

$$V = U_0 \ln\left(\frac{M_0 + m_0}{M_0}\right) - gt_0 .$$

1139

Một giọt nước nhỏ kết tinh trong sương mù tĩnh đồng đều. Sau đó nó rơi xuống, đi qua đám sương mù quét thành một đường. Giả sử rằng nó giữ lại hết tất cả các hạt sương khác trên đường mà nó rơi xuống. Nó vẫn giữ nguyên dạng hình cầu và trượt không dính. Dần dần tiệm cận nó rơi với gia tốc không đổi a:

$$V(t) \to at, \qquad \text{đối với } t \text{ lớn.}$$

Tìm a.

(*MIT*)

Lời giải:

Coi ρ_1, ρ_2 tương ứng là mật độ của giọt nước và sương, $R(t)$ là bán kính và $V(t)$ vận tốc của giọt, và giả sử rằng sức nổi của không khí có thể bỏ qua. Dùng "phương trình rốc-két" trong bài 1138, với

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_1, \qquad U_0 = 0 - (-V) = V ,$$

và thay

$$V \to -V,$$

$$\frac{dM}{dt} \to -\frac{dM}{dt} ,$$

chúng ta có

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_1 \frac{dV}{dt} + V\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_1\right) = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_1 g ,$$

hay

$$R\frac{dV}{dt} + 3V\frac{dR}{dt} = Rg \ .$$

Giọt nước quét thành một hình trụ $\pi R^2 V$ trong đơn vị thời gian, do đó tốc độ thay đổi khối lượng m của nó là

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_1\right) = 4\pi\rho_1 R^2 \frac{dR}{dt} = \pi R^2 V \rho_2 \ ,$$

cho

$$V = 4\eta\dot{R} \ ,$$

trong đó $\eta = \rho_1/\rho_2$. Như vậy chúng ta có

$$4\eta R\ddot{R} + 12\eta\dot{R}^2 = Rg \ .$$

Vì t lớn, $V = at$ hoặc $\dot{R} = \frac{at}{4\eta}$, chúng ta đặt $R = bt^2 + c$, trong đó b, c là các hằng số và thay nó trong phương trình vi phân. Đặt bằng nhau các hệ số của t^2 và t^0 tách riêng ở hai vế của phương trình, chúng ta có

$$56\eta b - g = 0, \qquad (8\eta b - g)c = 0 \ .$$

Để có nghiệm thích hợp, chúng ta lấy

$$b = \frac{g}{56\eta}, \qquad c = 0 \ .$$

Do đó $V = 4\eta\dot{R} = 8\eta bt = \frac{g}{7}t$, nghĩa là gia tốc tiệm cận là

$$a = \frac{g}{7} \ .$$

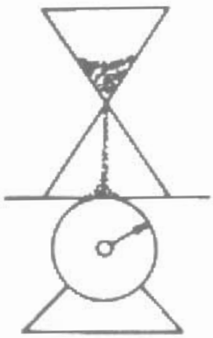
1140

Một đồng hồ cát đặt trên một cái cân. Ban đầu tất cả cát (khối lượng m) trong đồng hồ (khối lượng M) được giữ ở phễu chứa trên. Tại $t = 0$, cát bắt đầu rơi xuống. Nếu nó chảy khỏi phần trên ở một tốc độ không đổi $dm/dt = \lambda$, vẽ (và đánh dấu định lượng) sơ đồ chỉ ra số đọc của cân ở mọi thời điểm $t > 0$.

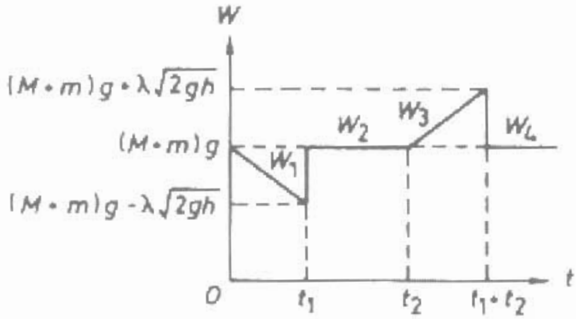
(MIT)

Lời giải:

Giả sử tất cả cát rơi xuống đáy của phần dưới của đồng hồ cát, chính vì thế với tất cả các hạt đều rơi từ độ cao là h. Một hạt rơi từ khoảng cách này



Hình 1.106



Hình 1.107

sẽ có vận tốc $V = \sqrt{2gh}$ khi nó chạm tới đáy và khi đến đấy nó mất một thời gian $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Để đọc giá trị của cân, ta xem xét bốn chu kì dưới đây theo thời gian:

Chu kì 1: Thời điểm $t = 0$ khi cát bắt đầu rơi tới thời điểm t_1 khi cát bắt đầu đến đáy của nửa dưới. Giá trị đọc được trên cân ở chu kì này là

$$W_1 = (M+m)g - \lambda t g, \qquad 0 < t < t_1\ ,$$

trong đó $t_1 = \sqrt{2gh}$.

Chu kì 2: Tại thời điểm t_1 khi cát bắt đầu đến đáy cho đến thời điểm t_2 khi tất cả các hạt cát thoát hết khỏi nửa trên của chiếc đồng hồ. Trong chu kì này, lực tác động lên cân bao gồm 2 phần: trọng lượng của cát như đã đưa ra ở phương trình trên với $t = t_1$ và một phần do xung lực của cát ở đáy của nửa dưới đồng hồ với độ lớn

$$V\frac{dm}{dt} = \lambda\sqrt{2gh}\ .$$

Do đó cân chỉ

$$W_2 = [(M+m)g - \lambda t_1 g] + \lambda\sqrt{2gh} = (M+m)g, \qquad t_1 < t < t_2\ ,$$

trong đó $t_2 = m/\lambda$.

Chu kì 3: Thời điểm t_2 khi tất cả cát rời khỏi nửa trên của đồng hồ cho đến thời điểm t_3 khi tất cả cát chạm tới đáy. Giá trị đọc từ cân là

$$W_3 = W_2 + \lambda(t - t_2)g, \qquad t_2 < t < t_3\ ,$$

trong đó $t_3 = t_2 + t_1$.

Chu kì 4: Thời gian sau đó tất cả cát chạm tới đáy. Giá trị đọc từ cân là hằng số tại

$$W_4 = (M + m)g, \qquad t > t_3 .$$

Số đọc của cân được vẽ trong hình 1.107.

1141

Một quả rốc-két có khối lượng tức thời là m đạt được một sức đẩy cố định F bằng cách phụt chất nổ đẩy tốc độ thấp với vận tốc tương đối cao. Rốc-két luôn hướng lực đẩy của nó dọc theo hướng của vận tốc tức thời **u**. Bởi vậy nó chuyển động từ bán kính ban đầu là r_1 (đo từ tâm của trái đất) tới một bán kính r_2, lớn hơn, duy trì trong cùng mặt phẳng và bay theo một đường gần giống đường xoắn ốc. Bán kính ban đầu r_1 gần với bán kính trái đất r_0, ở đó gia tốc trọng trường là g, trong khi $r_2 \gg r_0$. Tọa độ góc từ tâm quả đất là ϕ.

(a) Momen xung lượng của rốc-két trên khối lượng đơn vị là một hằng số của chuyển động? Thảo luận.

(b) Tìm các biểu thức đối với vận tốc tức thời u và gia tốc trọng trường g theo r, r_0, $\dot{r}$, và $\dot{\phi}$

(c) Tìm các biểu thức đối với $\ddot{r}$ và $\ddot{\phi}$ theo các đại lượng đã liệt kê ở trên.

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Dùng tọa độ cực (r, ϕ) như đã nói ở trên. Momen xung lượng của rốc két trên khối lượng đơn vị là $j = r^2\dot{\phi}$. Mặc dù trọng lực là lực xuyên tâm, song lực đẩy rốc-két thì không. Vì vậy momen xung lượng thì không phải là một đại lượng bảo toàn.

(b) Vận tốc tức thời của rốc két là

$$\mathbf{u} = u_r\mathbf{e}_r + u_\varphi\mathbf{e}_r = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi$$

với độ lớn

$$u = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2} .$$

Gia tốc trọng trường g là

$$g = \frac{GM}{r^2} .$$

Vì $g_0 = \frac{GM}{r_0^2}$, nó có thể được viết như

$$g = g_0 \frac{r_0^2}{r^2} \, .$$

(c) Phương trình chuyển động của rốc-két là

$$\mathbf{f} = m \frac{d\mathbf{u}}{dt} \, ,$$

trong đó $\mathbf{f} = \mathbf{F} + m\mathbf{g}$, $m = m(t)$, các số hạng liên quan tới $\frac{dm}{dt}$ được bỏ qua. Do lực đẩy $\mathbf{F}$ luôn song song với $\mathbf{u}$, các thành phần của nó là $F_r = F\frac{\dot{r}}{u}$, $F_\varphi = F\frac{r\dot{\varphi}}{u}$. Gia tốc trọng trường là $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_r$. Vì thế phương trình chuyển động có các phương trình thành phần là

$$m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = f_r = \frac{F\dot{r}}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2}} - \frac{mg_0 r_0^2}{r^2} \, ,$$

$$m(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) = f_\phi = \frac{Fr\dot{\phi}}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2}} \, ,$$

từ đó có thể nhận được các biểu thức đối với $\ddot{r}$ và $\ddot{\phi}$

1142

Một con tàu dùng tên lửa đẩy ở xa mọi trường hấp dẫn có một nguồn năng lượng E. Con tàu có khối lượng ban đầu là m_1 và khối lượng cuối là m_2.

(a) Tìm vận tốc lớn nhất v con tàu có thể đạt được bắt đầu từ khi nó đứng yên. E, m_1, và m_2 cố định nhưng vận tốc khối khí phụt ra w (so với con tàu) có thể biến thiên như là một hàm của khối lượng thức thời m của con tàu.

(b) Vận tốc lớn nhất v có thể nhận được là bao nhiêu nếu vận tốc phụt khí w là không đổi?

(Princeton)

Lời giải:

(a) Tích phân phương trình chuyển động của con tàu là (bài tập **1138**)

$$m\frac{dv}{dt} = -w(m)\frac{dm}{dt} \, ,$$

và lấy điều kiện ban đầu $v = 0$, $m = m_1$ tại thời điểm $t = 0$, chúng ta có

$$v = -\int_{m_1}^{m} \frac{w(m)}{m} dm .$$

Vậy vận tốc lớn nhất là

$$v_{\max} = -\int_{m_1}^{m_2} \frac{w(m)}{m} dm .$$

(b) Nếu w là hằng số, vận tốc lớn nhất là

$$v_{\max} = w \ln \frac{m_1}{m_2} .$$

1143

Một hạt bụi hình cầu rơi qua một đám mây mù mọng nước có mật độ không đổi. Tốc độ bám hơi nước thành giọt đó tỉ lệ thuận với thể tích của đám mây mù mà giọt quét qua trên đơn vị thời gian. Nếu hạt bụi đó ban đầu đứng yên trong đám mây mù, tìm giá trị gia tốc của giọt trong những khoảng thời gian lớn.

(*Princeton*)

Lời giải:

Giả sử hạt bụi hình cầu ban đầu có khối lượng M_0 và bán kính R_0. Lấy vị trí ban đầu của hạt bụi như gốc tọa độ và trục x hướng thẳng xuống dưới. Coi $M(t)$ và $R(t)$ là khối lượng và bán kính của giọt ở tại thời điểm t. Khi đó

$$M(t) = M_0 + \frac{4}{3}\pi(R^3 - R_0^3)\rho ,$$

trong đó ρ là mật độ của mây mù nước, cho ta

$$\frac{dM}{dt} = \rho 4\pi R^2 \frac{dR}{dt} .$$

Giọt nước đó có tiết diện πR^2 và quét thành một hình trụ thể tích $\pi R^2 \dot{x}$ trong một đơn vị thời gian, trong đó $\dot{x}$ là vận tốc của nó. Vì tốc độ bám của các phần tử nước tỉ lệ thuận với thể tích này, chúng ta có

$$\frac{dM}{dt} = \alpha\pi R^2 \dot{x} ,$$

α là hằng số dương. Vì thế

$$\dot{x} = \frac{4\rho}{\alpha}\dot{R} .$$

Định lý xung lượng cho

$$M(t+dt)\dot{x}(t+dt) - M(t)\dot{x}(t) = Mgdt .$$

Dùng định lý Taylor để khai triển $M(t+dt)$ và $\dot{x}(t+dt)$ và chỉ giữ lại các số hạng có bậc thấp nhất, chúng ta nhận được

$$\dot{x}\frac{dM}{dt} + M\ddot{x} = Mg .$$

Với t lớn, $M(t) \approx \frac{4}{3}\pi R^3\rho$, $dM/dt \approx 3M\dot{R}/R$, và phương trình trên trở thành

$$\ddot{R} + \frac{3\dot{R}^2}{R} = \frac{\alpha g}{4\rho} .$$

Với một nghiệm riêng hợp với trường hợp t lớn, đặt

$$R(t) = at^2 ,$$

trong đó a là hằng số, ở phương trình trên ta có

$$a = \frac{\alpha g}{56\rho} .$$

Vì thế với trường hợp t lớn,

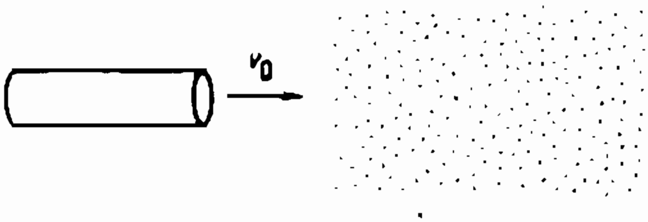
$$\dot{x} = \frac{4\rho}{\alpha}\cdot 2at = \frac{gt}{7} .$$

Vậy gia tốc trong trường hợp t lớn là $g/7$.

1144

Giả sử một phi thuyền có khối lượng m_0 và tiết diện ngang là A di chuyển với vận tốc v_0 khi nó chạm vào một đám bụi đứng yên có mật độ ρ như hình 1.108. Nếu bụi đó chạm dính vào phi thuyền, tìm lời giải cho chuyển động tiếp theo của phi thuyền. Giả sử A luôn là hằng số.

(*Princeton*)



Hình 1.108

Lời giải:

Giả sử rằng đám bụi xuất hiện mà không cản trở con tàu. Định luật thứ 2 Newton

$$\frac{d(mv)}{dt} = 0 ,$$

hay

$$m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} = 0 ,$$

ngụ ý rằng $mv = m_0 v_0$. Do đó

$$dm = \rho v A dt, \qquad \frac{dm}{dt} = \rho A v ,$$

Chúng ta có

$$\frac{dv}{v^3} + \frac{\rho A dt}{m_0 v_0} = 0 .$$

Lấy tích phân chúng ta nhận được

$$\frac{1}{v^2} = \frac{2\rho A t}{m_0 v_0} + C ,$$

trong đó C là hằng số. Nếu chúng ta đo thời gian từ thời điểm đầu tiên con tàu chạm đám bụi, thì $v = v_0$ tại $t = 0$, cho $C = v_0^{-2}$. Do vậy chuyển động của phi thuyền có thể miêu tả bằng

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{v_0^2} + \frac{2\rho A t}{m_0 v_0} ;$$

3. ĐỘNG LỰC HỌC VẬT RẮN (1145–1223)

1145

Hai đĩa kim loại tròn có cùng khối lượng M và có cùng độ dày t. Đĩa 1 có mật độ đều ρ_1 bé hơn mật độ đều của đĩa 2 ρ_2. Một trong hai đĩa, vật nào có momen quán tính lớn hơn?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Coi bán kính của các đĩa lần lượt là R_1 và R_2.

Vì các đĩa có cùng khối lượng và độ dày, do đó chúng ta có $\rho_1 R_1^2 = \rho_2 R_2^2$, hay

$$\frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} .$$

Momen quán tính của các đĩa là

$$I_1 = \frac{MR_1^2}{2}, \qquad I_2 = \frac{MR_2^2}{2} ,$$

chính vì vậy

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} .$$

Vì $\rho_1 < \rho_2$, $I_1 > I_2$. Do đó đĩa 1 có momen quán tính lớn hơn.

1146

Cho rằng momen quán tính của một hình lập phương đối với một trục là I_0, trục đó đi qua tâm khối và tâm của một mặt. Tìm momen quán tính đối với một trục qua tâm khối và một góc của hình lập phương.

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

Dùng hệ tọa độ Descartes có gốc ở tâm khối và các trục đi qua tâm của 3 cặp mặt của hình lập phương. Chúng ta có

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = I_0 ,$$
$$I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0 ,$$

Momen quán tính đối với một trục có các cosin chỉ hướng λ, μ, ν là

$$I = \lambda^2 I_{xx} + \mu^2 I_{yy} + \nu^2 I_{zz} - 2\mu\nu I_{yz} - 2\nu\lambda I_{zx} - 2\lambda\mu I_{xy}$$
$$= (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) I_0 .$$

Để tìm cosin chỉ hướng của một vectơ bán kính r từ gốc tọa độ tới một góc của hình lập phương, không mất đi tính tổng quát, chúng ta có thể chỉ cần xét góc với các tọa độ x, y, z dương. Khi đó

$$\mathbf{r} = a\mathbf{i} + a\mathbf{j} + a\mathbf{k} .$$

Trong đó, chúng ta coi $2a$ là độ dài của cạnh hình lập phương. Vì $|\mathbf{r}| = \sqrt{3}a$ chúng ta có

$$\lambda = \mu = \nu = \frac{1}{\sqrt{3}} .$$

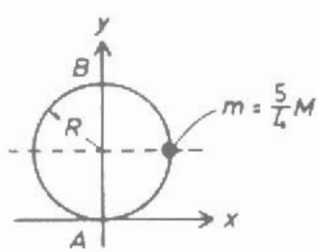
do đó

$$I = I_0 .$$

1147

Một đĩa mỏng bán kính R và khối lượng M nằm trong mặt phẳng xy có một chất điểm khối lượng $m = 5M/4$ nằm trên mép của nó (như hình 1.109). Momen quán tính của đĩa đối với tâm khối của nó là (trục z hướng ra ngoài mặt tờ giấy)

$$I = \frac{MR^2}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



Hình 1.109

(a) Tìm tenxơ momen quán tính của tổ hợp đĩa và chất điểm đối với điểm A trong hệ tọa độ được chỉ ra trong hình vẽ.

(b) Tìm các momen chính và các trục chính đối với điểm A.

(c) Tác dụng để đĩa quay quanh trục y với vận tốc góc ω bởi các chốt xoay ở các điểm A và B. Miêu tả momen xung lượng quanh điểm A như là một hàm của thời gian và tìm vectơ lực tác dụng tại điểm B (bỏ qua trọng lực).

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Đóng góp của một phần tử khối lượng Δm tại vectơ bán kính $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ cho các momen quán tính và các tích quán tính gốc là

$$I_{ij} = \Delta m(r^2\delta_{ij} - x_i x_j) ,$$

trong đó $\delta_{nu} = 1$ nếu $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ nếu $i \neq j$. Chính vì vậy tenxơ momen quán tính của chất điểm đối với A là

$$\frac{5MR^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Tenxơ momen quán tính của đĩa đối với A, theo định lý các trục song song là

$$\frac{MR^2}{4}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} .$$

Vì thế tenxơ momen quán tính của đĩa và chất điểm đối với A là

$$\frac{MR^2}{4}\begin{pmatrix} 10 & -5 & 0 \\ -5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} .$$

(b) Để tìm các trục chính và các momen quán tính, giải phương trình đặc trưng sau

$$\frac{MR^2}{4}\begin{vmatrix} 10-\gamma & -5 & 0 \\ -5 & 6-\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 16-\gamma \end{vmatrix} = 0 ,$$

hay

$$(16-\gamma)(\gamma^2 - 16\gamma + 35) = 0 .$$

Các nghiệm là

$$\gamma_1 = 16, \qquad \gamma_2 = 8 - \sqrt{29}, \qquad \gamma_3 = 8 + \sqrt{29} .$$

Vì thế ba momen quán tính chính đối với trục A là

$$I_1 = 4MR^2, \qquad I_2 = \left(2 - \frac{\sqrt{29}}{4}\right) MR^2, \qquad I_3 = \left(2 + \frac{\sqrt{29}}{4}\right) MR^2 .$$

Các cosin chỉ hướng của các trục chính (λ, μ, ν) tương ứng với I_1 thì được đưa ra bởi

$$\begin{pmatrix} -6 & -5 & 0 \\ -5 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = 0 ,$$

nghĩa là

$$\begin{aligned} -6\lambda - 5\mu &= 0 , \\ -5\lambda - 10\mu &= 0 , \\ 0\nu &= 0 . \end{aligned}$$

Nghiệm là $\lambda = \mu = 0$, $\nu =$ tùy ý. Vì

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1 ,$$

theo định nghĩa, các cosin chỉ hướng là

$$\lambda = 0, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = 1 .$$

Các trục chính đối với I_2 và I_3 có cosin chỉ hướng được cho bởi

$$\begin{pmatrix} 2 \pm \sqrt{29} & -5 & 0 \\ -5 & -2 \pm \sqrt{29} & 0 \\ 0 & 0 & 8 \pm \sqrt{29} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = 0 ,$$

nghĩa là

$$\begin{aligned} (2 \pm \sqrt{29}))\lambda - 5\mu &= 0 , \\ -5\lambda + (-2 \pm \sqrt{29})\mu &= 0 , \\ (8 \pm \sqrt{29})\nu &= 0 , \end{aligned}$$

trong đó dấu ở trên là cho I_2 và dấu ở dưới là cho I_3.

Các nghiệm là

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{-2 \pm \sqrt{29}}{5} = \begin{cases} 0.677 \\ -1.477 \end{cases} , \qquad \nu = 0 .$$

Khi đó vì $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = \lambda^2 + \mu^2 = 1$, chúng ta có

$$|\mu| = \left(\frac{\lambda^2}{\mu^2} + 1\right)^{-\frac{1}{2}} = \begin{cases} 0,828 \\ 0,561 \end{cases} ,$$

$$|\nu| = (1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} 0,561 \\ 0,828 \end{cases} .$$

Chúng ta luôn đòi hỏi rằng các trục chính đối với I_2 và I_3 là trực giao

$$\lambda_2\lambda_3 + \mu_2\mu_3 + \nu_2\nu_3 = 0 .$$

Chính vì vậy chúng ta lấy các trục chính như sau

$$\begin{aligned} &(0, 0, 1) , \\ &(0,561, 0,828, 0) , \\ &(-0,828, 0,561, 0) . \end{aligned}$$

(c) Tenxơ momen quán tính I của hệ thống đĩa và chất điểm đối với điểm gốc A tìm được trong (a) liên quan đến hệ tọa độ (x, y, z) gắn với đĩa. Trong hệ này momen xung lượng của hệ thống quay với một vận tốc góc $\boldsymbol{\omega}$ là

$$L = I\omega ,$$

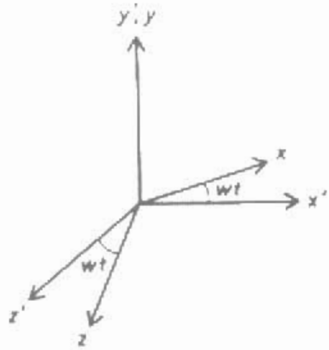
hay

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \frac{MR^2}{4} \begin{pmatrix} 10 & -5 & 0 \\ -5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{MR^2\omega}{4} \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Xem xét hệ tọa độ thí nghiệm (x', y', z') có cùng trục y như hệ tọa độ quay (x, y, z) sao cho các trục tương ứng trùng nhau tại thời điểm $t = 0$, như hình 1.110.

Khi

$$\begin{aligned} x' &= x\cos(\omega t) + z\sin(\omega t), \qquad y' = y , \\ z' &= -x\sin(\omega t) + z\cos(\omega t) , \end{aligned}$$



Hình 1.110

chúng ta có thể định nghĩa vectơ biến đổi

$$S = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & 0 & \sin(\omega t) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\omega t) & 0 & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

sao cho vectơ **V** được biến đổi theo

$$V' = SV \ .$$

Áp dụng phương trình trên cho vectơ momen xung lượng, chúng ta xác định được momen xung lượng xung quanh A trong hệ tọa độ thí nghiệm là

$$\begin{pmatrix} L'_x \\ L'_y \\ L'_z \end{pmatrix} = SL = \frac{MR^2\omega}{4} \begin{pmatrix} -5\cos(\omega t) \\ 6 \\ 5\sin(\omega t) \end{pmatrix} \ .$$

nghĩa là

$$L'_x = \frac{-5MR^2\omega}{4}\cos(\omega t), \qquad L'_y = \frac{3MR^2\omega}{2}, \qquad L'_z = \frac{5MR^2\omega}{4}\sin(\omega t)$$

khi xét một mình cái đĩa. Trục y là trục quán tính chính và do đó sự quay quanh nó sẽ không gây ra bất kì một lực nào lên các chốt xoay. Vì thế các lực trên các chốt xoay hoàn toàn do sự quay của chất điểm. Trong hệ quay chất điểm chịu một lực ly tâm có độ lớn $\frac{5MR\omega^2}{4}$, nó được cân bằng bởi các lực tác dụng lên đĩa bởi các chốt xoay đó. Lực tác động lên các chốt xoay là phản lực của các lực này. Chính vì vậy chốt xoay B chịu một lực có độ lớn $\frac{5MR\omega^2}{8}$ cùng hướng như lực ly tâm trên chất điểm. Trong hệ phòng thí nghiệm nói trên, lực này quay với một vận tốc góc ω.

1148

Bốn vật khối lượng như nhau và bằng m, nằm trong mặt phẳng xy ở các vị trí $(x, y) = (a, 0), (-a, 0), (0, +2a), (0, -2a)$. Những vật này được nối với nhau bởi các thanh không khối lượng để tạo thành vật rắn.

(a) Tìm tenxơ quán tính, dùng các trục x, y, z như là hệ quy chiếu. Biểu diễn tenxơ như là một ma trận.

(b) Xét một hướng được đưa ra bởi vectơ đơn vị $\hat{n}$ nằm "cân bằng giữa" các trục dương x, y, z, nghĩa là tạo thành các góc bằng nhau với 3 hướng này. Tìm momen quán tính đối với sự quay quanh các trục này.

(c) Cho trước tại một thời điểm t nào đó vectơ vận tốc góc nằm dọc theo hướng trên $\hat{n}$, tìm góc hợp bởi giữa vectơ momen xung lượng và $\hat{n}$ tại thời điểm đó.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Các phần tử I_{ij} của tenxơ quán tính được đưa ra bởi

$$I_{ij} = \sum_n m_n(r_n^2\delta_{ij} - x_{n_i}n_{n_j})$$

trong đó

$$r_n^2 = x_{n_1}^2 + x_{n_2}^2 + x_{n_3}^2 .$$

Vì ít nhất một trong những tọa độ của mỗi hạt là 0, $x_i x_j = 0$, chính vì vậy $I_{ij} = 0$ với mọi $i \neq j$. Với $i = j$, do tính đối xứng chúng ta có

$$I_{11} = 2m(a^2 - a^2) + 2m(4a^2 - 0) = 8ma^2 ,$$
$$I_{22} = 2m(a^2 - 0) + 2m(4a^2 - 4a^2) = 2ma^2 ,$$
$$I_{33} = 2m(a^2 - 0) + 2m(4a^2 - 0) = 10ma^2 .$$

Vì vậy tenxơ quán tính được cho bởi ma trận

$$\begin{pmatrix} 8ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 10ma^2 \end{pmatrix} .$$

(b) Khi hướng đưa ra tạo góc giống nhau với các trục, các cosin chỉ hướng của nó λ, μ, ν là bằng nhau. Momen quán tính đối với hướng này là

$$\begin{aligned} I &= \lambda^2 I_{11} + \mu^2 I_{22} + \nu^2 I_{33} - 2\mu\nu I_{23} - 2\nu\lambda I_{31} - 2\lambda\mu I_{12} \\ &= (8ma^2 + 2m\omega^2 + 10ma^2)\lambda^2 \\ &= 20ma^2\lambda^2 \ . \end{aligned}$$

Các cosin chỉ hướng tuân theo điều kiện

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 3\lambda^2 = 1 \ ,$$

cho $\lambda^2 = \frac{1}{3}$. Vì thế

$$I = \frac{20}{3}ma^2 \ .$$

(c) Hướng $\hat{\mathbf{n}}$ thì được đưa ra bởi

$$\hat{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Tại thời điểm T, ω song song với $\hat{\mathbf{n}}$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\mathbf{n}} = \lambda\omega \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Momen xung lượng tại thời điểm này là

$$L = I\omega \ ,$$

hay

$$\mathbf{L} = \lambda ma^2\omega \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \ ,$$

với độ lớn

$$L = \lambda ma^2\omega\sqrt{8^2 + 2^2 + 10^2} = \sqrt{168}\lambda ma^2\omega \ .$$

Góc ϕ giữa $\mathbf{L}$ và $\hat{\mathbf{n}}$ là

$$\cos\phi = \frac{\mathbf{L}\cdot\hat{\mathbf{n}}}{L} = \frac{\lambda^2 ma^2\omega(8+2+10)}{\lambda ma^2\omega\sqrt{168}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{20}{\sqrt{168}} = 0,891 \ ,$$

nghĩa là

$$\phi = 27^\circ \ .$$

1149

Do độ dẹt ở cực, trái đất có một momen quán tính đối với trục cực hơi lớn hơn so với momen quán tính đối với trục xích đạo của nó. Giả sử có đối xứng trục quanh trục cực.

(a) Chứng minh rằng các số hạng chủ yếu của thế hấp dẫn trên bề mặt của trái đất có thể được biểu diễn như sau

$$U = -\frac{GM}{r}\left[1 - \frac{C-A}{Ma^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right)\right] ,$$

trong đó C và A tương ứng là các momen quán tính quanh trục cực và trục xích đạo, M là khối lượng trái đất, a là bán kính trung bình của trái đất và r là khoảng cách tới tâm khối của trái đất. Hệ số $(C-A)/Ma^2$ là khoảng 10^{-3}.

(b) Số hạng thứ hai sẽ có hiệu ứng trường kì nào khi một vệ tinh quay quanh quỹ đạo tròn quanh trái đất?

(c) Nếu pháp tuyến với mặt phẳng của vệ tinh nghiêng một góc α với trục cực trái đất, dẫn ra biểu thức cho độ lớn của hiệu ứng này bằng việc lấy trung bình theo thời gian trên quỹ đạo tròn.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Chọn trục cực là trục z và mặt phẳng xích đạo là mặt xy. Đặt phân tử khối lượng dM của trái đất có vectơ vị trí $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ và đặt vệ tinh phía trên bề mặt của trái đất có vectơ vị trí $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Khi đó thế năng hấp dẫn trên một đơn vị khối lượng của vệ tinh là

$$U = -\int \frac{GdM}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\int \frac{GdM}{[r^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}' + r'^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -\int \frac{GdM}{r}\left[1 - \frac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

tích phân trên toàn trái đất. Khai triển Taylor, bỏ qua số hạng bậc cao hơn $(\frac{r'}{r})^2$, ta có

$$U = -\int \frac{GdM}{r}\left[1 + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2} - \frac{r'^2}{2r^2} + \frac{3}{2}\frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')^2}{r^4}\right] .$$

Vì $\mathbf{r}$ là vectơ không đổi và trái đất được cho là elipsoit đối xứng

$$\int \mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'dM = \mathbf{r}\cdot\int \mathbf{r}'dM = 0\,.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
U &= -\frac{GM}{r} - \frac{G}{r^3}\int\left[\frac{3}{2}\frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')^2}{r^2} - \frac{r'^2}{2}\right]dM \\
&= -\frac{GM}{r} \\
&\quad -\frac{G}{r^3}\int\left[\frac{3(xx'+yy'+zz')^2-(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)}{2r^2}\right]dM\,.
\end{aligned}$$

Do tính đối xứng của trái đất, các tích phân của $x'y'$, $y'z'$ và $z'x'$ tất cả bằng không và ta có

$$\begin{aligned}
U &= -\frac{GM}{r} \\
&\quad -\frac{G}{r^3}\int[2(x^2x'^2+y^2y'^2+z^2z'^2) \\
&\qquad -(x^2y'^2+x^2z'^2+y^2x'^2+y^2z'^2+z^2x'^2+z^2y'^2)]\frac{dM}{2r^2}\,.
\end{aligned}$$

Bây giờ chọn trục x và y tuỳ ý (chừng nào chúng còn nằm trong mặt phẳng xích đạo), để tích phân của x' bằng tích phân của y'. Như thế

$$\begin{aligned}
U &= -\frac{GM}{r} - \frac{G}{r^3}\int\left[\frac{x^2x'^2+y^2y'^2+2z^2z'^2-x^2z'^2-y^2z'^2-2z^2x'^2}{2r^2}\right]dM \\
&= -\frac{GM}{r} - \frac{G}{r^3}\int\left[\frac{(x^2+y^2)x'^2-2z^2x'^2+(2z^2-x^2-y^2)z'^2}{2r^2}\right]dM \\
&= -\frac{GM}{r} - \frac{G}{r^3}\int\frac{(3z^2-r^2)(z'^2-x'^2)}{2r^2}dM \\
&= -\frac{GM}{r} - \frac{G}{r^3}\left(\frac{3z^2}{2r^2}-\frac{1}{2}\right)\int[(z'^2+y'^2)-(x'^2+y'^2)]dM \\
&= -\frac{GM}{r} - \frac{G}{r^3}\left(\frac{3z^2}{2r^2}-\frac{1}{2}\right)(I_x-I_y)\,. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Vì $I_x = I_y = A$, $I_z = C$, $z = r\cos\theta$, ở đây θ là góc giữa $\mathbf{r}$ và trục cực biểu thức trên có thể viết như

$$U = -\frac{GM}{r}\left[1 - \frac{C-A}{Ma^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right)\right] .$$

(b) Phương trình (1) có thể được viết $U = U_1 + U_2$. $U_1 = -\frac{GM}{r}$ là thế năng trên một đơn vị khối lượng vệ tinh có thể có nếu trái đất là hình cầu hoàn hảo. U_2 xuất hiện do độ dẹt cực. Nó làm xuất hiện thêm lực bổ sung trên một đơn vị khối lượng của vệ tinh $\mathbf{F} = -\nabla U_2$. Vì $\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}$, $\nabla r^{-5} = \frac{-5\mathbf{r}}{r^7}$, $\nabla r^{-3} = \frac{-3\mathbf{r}}{r^5}$, $\nabla z^2 = 2z\mathbf{k}$,

$$\mathbf{F} = \frac{3G(A-C)}{2r^5}\left[\left(1 - \frac{5z^2}{r^2}\right)\mathbf{r} + 2z\mathbf{k}\right] .$$

Lưu ý rằng phần thứ nhất trong ngoặc vuông vẫn sẽ là lực xuyên tâm, mặc dù không phải kiểu bình phương nghịch đảo. Nó không làm thay đổi độ lớn và hướng của momen xung lượng quanh tâm trái đất; do đó nó không ảnh hưởng đến mặt phẳng quỹ đạo, nhưng chỉ làm cho vệ tinh lệch khỏi quỹ đạo tròn chút ít. Phần thứ hai,

$$\mathbf{F}_2 = \frac{3G(A-C)}{r^5}z\mathbf{k} ,$$

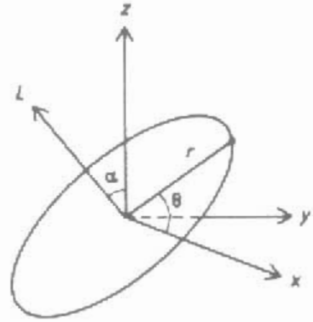
không phải là lực xuyên tâm, nó làm cho mặt phẳng quỹ đạo tiến động xung quanh trục z.

(c) Vì chuyển động của vệ tinh rất gần với chuyển động đều với tâm ở gốc, do sự đối xứng tích phân của $\mathbf{F}_2 dt$ trên một chu kì chuyển động tròn bằng không, cho nên ảnh hưởng trung bình của nó đến chuyển động là bằng không. Momen xoắn gây nên bởi $\mathbf{F}_2$ đối với tâm trái đất là

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 = \frac{3G(C-A)}{r^5}(-yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j}) .$$

Đặt giao cắt giữa mặt phẳng quỹ đạo và mặt phẳng xích đạo là trục x (hình 1.111). Trong quá trình quay, yz luôn luôn dương trong khi giá trị trung bình của zx là bằng không . Do đó, qua một chu kì momen xoắn trung bình hướng theo hướng $-x$. Vì vectơ momen xung lượng nằm trong mặt phẳng yz và như vậy vuông góc với momen xoắn trung bình, nên momen này không làm thay đổi độ lớn của momen xung lượng.

Vectơ momen xung lượng $\mathbf{L}$ có hai thành phần L_y và L_z. Vì momen xoắn trung bình, nó nằm trong hướng $-x$, vuông góc với L_z, nên nó không ảnh hưởng đến L_z. Do đó nó không làm thay đổi góc α giữa $\mathbf{L}$ và trục z. Kết quả



Hình 1.111

là $\mathbf{L}$ sẽ tiến động quanh trục z, vạch ra một hình nón nửa góc đỉnh α trong hệ toạ độ cố định ở một ngôi sao ở xa. Vì hệ quy chiếu (x, y, z) cố định so với quỹ đạo, trục x sẽ quay quanh tâm trái đất trong mặt phẳng xích đạo.

Đặt θ là góc giữa vectơ vị trí của vệ tinh và trục x. Khi đặt $\theta = 0$ tại $t = 0$, ta có $\theta = \omega t$, ω là vận tốc góc của vệ tinh. Vì $y = r\sin\theta\sin\alpha$, $z = r\sin\theta\cos\alpha$, trung bình M trên một chu kì $T = \frac{2\pi}{\omega}$ là

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{M} \rangle &= \mathbf{i}\frac{3G(C-A)}{r^5 T}\int_0^T -yz\,dt \\
&= -\frac{\mathbf{i}3G(C-A)\sin(2\alpha)}{2r^3 T}\int_0^T \sin^2(\omega t)\,dt \\
&= -\mathbf{i}\frac{3G(C-A)\sin(2\alpha)}{4r^3}\,.
\end{aligned}
$$

Vì $\langle \mathbf{M} \rangle$ vuông góc với momen xung lượng $\mathbf{L}$, nó sẽ khiến cho vectơ momen xung lượng tiến động quanh trục z với vận tốc góc

$$
\dot{\phi} = \frac{|\langle \mathbf{M} \rangle|}{r^2\omega} = \frac{3G(C-A)\sin(2\alpha)}{4r^5\omega}\,.
$$

1150

Một bánh đà có dạng của một đĩa dày đều đường kính 4 ft nặng 600 lbs (pao) và quay với tốc độ 1200 vòng/phút. Tính momen xoắn không đổi cần thiết để nó dừng quay trong 2 phút.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Phương trình chuyển động của bánh đà là

$$I\ddot{\theta} = -M ,$$

trong đó I là momen quán tính và M là momen xoắn để dừng. Vì thế

$$\dot{\theta} = \omega_0 - \frac{Mt}{I} .$$

Khi bánh đà ngừng quay ở thời điểm t, $\dot{\theta} = 0$ và

$$M = \frac{I\omega_0}{t} .$$

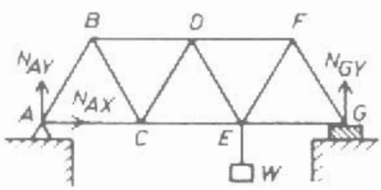
Với $I = \frac{MR^2}{2} = 1200$ lb ft^2, $\omega_0 = 40\pi$ rad/s, $t = 120$ s,

$$M = 400\pi \text{ pdl ft (paođan fut)} = 39 \text{ lb ft (pao fut)}$$

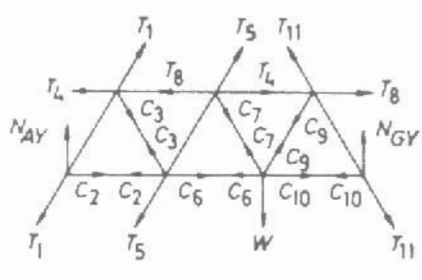
1151

Một cấu trúc được tạo thành từ các thanh có độ dài bằng nhau từ 1 đến 11 được chỉ ra như trong hình vẽ 1.112, được lắp bản lề ở các khớp nối ở các điểm $A, B, \ldots, G$. Điểm A được xem như là cố định, trong khi G chỉ được tựa thẳng đứng. Bỏ qua khối lượng của các thanh. Một vật nặng w được đặt ở E. Mỗi cấu kiện chỉ chịu sức căng T hoặc lực nén C. Giải tìm các lực tựa thẳng đứng ở A và G và tìm lực căng T hoặc lực nén C ở mỗi thanh.

(*Columbia*)



Hình 1.112



Hình 1.113

Lời giải:

Xét cấu trúc như một khối thống nhất. Các điều kiện cân bằng cho các lực ở A và G và cho momen xoắn xung quanh A cho

$$N_{AX} = 0\,,$$
$$N_{AY} + N_{GY} - W = 0\,,$$
$$\overline{AE} \cdot W - \overline{AG} \cdot N_{GY} = 0\,,$$

từ đó

$$N_{AX} = 0, \qquad N_{AY} = \frac{W}{3}, \qquad N_{GY} = \frac{2W}{3}\,.$$

Xem các lực căng và các lực nén trong các thanh như chỉ ra ở hình 1.113. Xét các điều kiện cân bằng cho điểm A chúng ta có

$$N_{AY} - T_1 \sin 60^\circ = 0\,,$$
$$C_2 - T_1 \cos 60^\circ = 0\,,$$

Giải ra

$$T_1 = \frac{2\sqrt{3}}{9}W, \qquad C_2 = \frac{\sqrt{3}}{9}W\,.$$

Xét sự cân bằng của các lực thẳng đứng ở B, C, D, G, F. Chúng ta nhận được bằng cách xét hình 1.113

$$C_3 = T_1 = \frac{2\sqrt{3}}{9}W, \qquad T_5 = C_3 = \frac{2\sqrt{3}}{9}W, \qquad C_7 = T_5 = \frac{2\sqrt{3}}{9}W,$$
$$T_{11} = \frac{N_{GY}}{\sin 60^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{9}W, \qquad C_9 = T_{11} = \frac{4\sqrt{3}}{9}W\,.$$

Rồi xét sự cân bằng của lực nằm ngang ở B, C, E, F chúng ta có

$$T_4 - (T_1 + C_3)\cos 60^\circ = 0\,,$$
$$C_6 - (C_3 + T_5)\cos 60^\circ - C_2 = 0\,,$$
$$C_{10} - (C_9 - C_7)\cos 60^\circ - C_6 = 0\,,$$
$$T_8 - (T_{11} + C_9)\cos 60^\circ = 0\,,$$

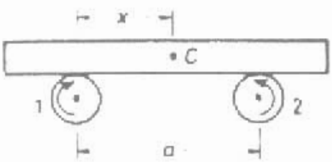
giải ra

$$T_4 = \frac{2\sqrt{3}}{9}W, \qquad C_6 = \frac{\sqrt{3}}{3}W, \qquad C_{10} = \frac{2\sqrt{3}}{9}W, \qquad T_8 = \frac{4\sqrt{3}}{9}W\,.$$

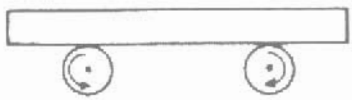
1152

Một thanh cứng, mỏng, đều có khối lượng M được nâng bởi 2 con lăn quay nhanh, trục của chúng được giữ ở một khoảng cách cố định a. Thanh cứng ban đầu được đặt nằm yên tại một vị trí bất đối xứng như hình 1.114.

(a) Giả sử những con lăn đó quay ngược chiều nhau như hình vẽ. Hệ số của ma sát động giữa thanh cứng và các con lăn là μ. Viết ra phương trình chuyển động của thanh và tìm độ chuyển dời $x(t)$ của tâm C thuộc thanh cứng từ con lăn 1 giả sử rằng $x(0) = x_0$ và $\dot{x}(0) = 0$.



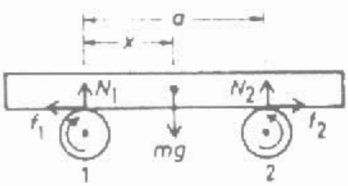
Hình 1.114



Hình 1.115

(b) Bây giờ xem xét trường hợp các quay của 2 con lăn là bị đảo ngược lại như hình 1.115. Tính độ chuyển dời $x(t)$, lại giả sử rằng $x(0) = x_0$ và $\dot{x}(0) = 0$.

(*Princeton*)



Hình 1.116

Lời giải:

(a) Các lực tác dụng bởi con lăn lên thanh cứng như trong hình 1.116. Với sự cân bằng dọc theo phương thẳng đứng chúng ta cần

$$N_1 + N_2 = Mg, \qquad aN_2 = xM_g \ ,$$

cho ra

$$N_1 = \left(1 - \frac{x}{a}\right) Mg, \qquad N_2 = \frac{x}{a} Mg \ .$$

Các lực ma sát động là

$$f_1 = \mu N_1, \qquad f_2 = \mu N_2 \ ,$$

với các hướng được chỉ như ra trong hình vẽ. Hãy nhớ rằng khi tất cả các con lăn quay nhanh, sự thay đổi trong hướng chuyển động của thanh cứng sẽ không ảnh hưởng tới các hướng của những lực này. Từ định luật II Newton ta có

$$M\ddot{x} = f_1 - f_2 = \frac{\mu M g}{a}(a - 2x) \, .$$

Với $\xi = 2x - a$, phương trình trên trở thành

$$\ddot{\xi} = -\frac{2\mu g}{a}\xi \, ,$$

đó là phương trình chuyển động của một dao động tử điều hòa. Với các điều kiện khởi đầu $\xi = 2x_0 - a$, $\dot{\xi} = 0$ ở $t = 0$, nghiệm là

$$\xi = (2x_0 - a)\cos(\omega t) \, ,$$

trong đó

$$\omega = \sqrt{\frac{2\mu g}{a}} \, .$$

Vì vậy

$$x = \left(x_0 - \frac{a}{2}\right)\cos(\omega t) + \frac{a}{2} \, .$$

(b) Với các hướng quay của con lăn đảo ngược, các lực ma sát cũng đảo ngược hướng và chúng ta có

$$M\ddot{x} = f_2 - f_1 \, ,$$

hay

$$\ddot{\xi} = \frac{2\mu g}{a}\xi \, ,$$

trong đó $\xi = 2x - a$ giống như trước đó. Chuyển động không còn là dao động điều hòa đơn giản. Với các điều kiện ban đầu giống nhau, nghiệm là

$$\xi = \left(x_0 - \frac{a}{2}\right)(e^{-\omega t} + e^{\omega t}) = (2x_0 - a)\cosh(\omega t) \, ,$$

nghĩa là

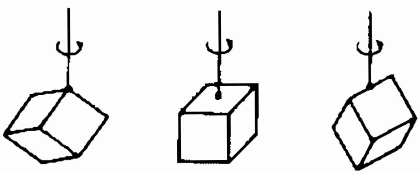
$$x = \left(x_0 - \frac{a}{2}\right)\cosh(\omega t) + \frac{a}{2} \, ,$$

trong đó $\omega = \sqrt{\frac{2\mu g}{a}}$. Chú ý rằng nếu $x_0 \neq \frac{a}{2}$, thanh sẽ di chuyển theo một hướng đến khi nó mất sự tiếp xúc với một con lăn, tại thời điểm đó phương trình không còn được áp dụng.

1153

Một con lắc xoắn bao gồm một dây thẳng đứng gắn với một vật, vật này có thể quay xung quanh chiều trục thẳng đứng. Xét 3 con lắc xoắn bao gồm các sợi dây giống nhau treo các khối rắn đồng nhất giống nhau hình lập phương. Một hình khối lập phương được treo ở góc, một hình lập phương khác treo ở giữa một cạnh bất kì, con lắc còn lại được treo ở điểm giữa của một mặt như trong hình vẽ 1.117. Tỉ số các chu kì của 3 con lắc này như thế nào?

(*MIT*)



Hình 1.117

Lời giải:

Trong cả 3 trường hợp nói trên, dây treo thẳng đứng đi qua tâm khối của khối lập phương rắn. Vì elipsoit quán tính của các khối lập phương rắn đồng nhất là một hình cầu, nên quán tính quay xung quanh bất kì một hướng nào qua tâm khối đều giống nhau. Vì thế các chu kì của ba con lắc xoắn này là bằng nhau.

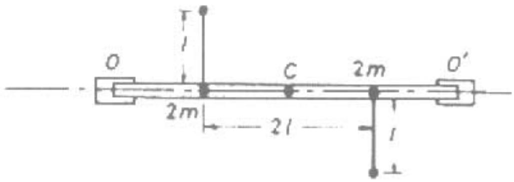
1154

Hình 1.118 chỉ ra một hình ảnh đơn giản hóa một trục cam với các chất điểm m và $2m$ được đặt cố định trên các thanh không khối lượng, tất cả trong cùng một mặt phẳng. Nó quay với một vận tốc góc không đổi ω quanh trục OO' qua trục dài, được giữ bởi các ổ trục không ma sát ở O và O'.

(a) Momen xoắn đối với điểm giữa của trục dài gây ra bởi các ổ trục sẽ như thế nào ?(Đưa ra độ lớn và hướng).

(b) Đặt một trục, giữ yên trong mặt phẳng chứa các vật, xung quanh một vật có thể quay với momen xoắn bằng không khi vận tốc góc là hằng số.

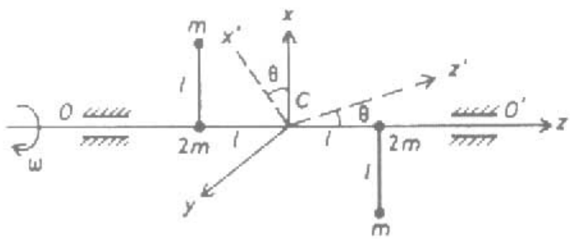
(*UC, Berkeley*)



Hình 1.118

Lời giải:

Chọn một hệ tọa độ gắn với trục với gốc ở điểm giữa C của trục quay dài, trục z dọc theo trục OO' và trục x nằm trong mặt phẳng của các chất điểm như hình 1.119.



Hình 1.119

Tenxơ quán tính tương đối với C được tính bằng cách dùng công thức $I_{ij} = \sum_n m_n(r_n^2\delta_{ij} - x_{ni}x_{nj})$, trong đó $r_n^2 = x_{n1}^2 + x_{n2}^2 + x_{n3}^2$. Khi các khối lượng có tọa độ

$$2m : (0, 0, l), \qquad m : (l, 0, -l)\,,$$
$$2m : (0, 0, -l), \qquad m : (-l, 0, l)\,,$$

chúng ta có

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 6ml^2 & 0 & 2ml^2 \\ 0 & 8ml^2 & 0 \\ 2ml^2 & 0 & 2ml^2 \end{pmatrix}\,.$$

Xét momen xung lượng J và momen xoắn M xung quanh C, chúng ta có

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{d^*\mathbf{J}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\,,$$

trong đó các kí hiệu * chỉ đạo hàm theo hệ tọa độ quay (x, y, z), vì vận tốc góc là hằng số. Khi đó

$$\mathbf{J} = I\boldsymbol{\omega} = I\begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix} = 2ml^2\omega\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} ,$$

chúng ta xác định được

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 0 & 0 & \omega\\ 2ml^2\omega & 0 & 2ml^2\omega\end{vmatrix} = 2ml^2\omega^2\mathbf{j} .$$

Momen xoắn đối với điểm giữa của trục quay gây ra bởi các ổ trục có độ lớn $2ml^2\omega^2$ và theo hướng y .

(b) Coi trục trong mặt phẳng xz quanh đó momen xoắn là 0 như là trục z' và giả sử nó tạo ra một góc θ với trục z. Xem hình 1.119, trục x', y' và z' tạo thành hệ tọa độ Descartes, trong đó trục x' cũng nằm trong mặt phẳng xz. Trong hệ quy chiếu này, vận tốc góc $\boldsymbol{\omega}$ là

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix}\omega\sin\theta\\0\\\omega\cos\theta\end{pmatrix}$$

và

$$\mathbf{J} = I\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix}6ml^2\omega\sin\theta + 2ml^2\omega\cos\theta\\0\\2ml^2\omega\sin\theta + 2ml^2\omega\cos\theta\end{pmatrix} .$$

Vì thế

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\\ &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \omega\sin\theta & 0 & \omega\cos\theta\\ ml^2\omega(6\sin\theta + 2\cos\theta) & 0 & 2ml^2\omega(\cos\theta + \sin\theta)\end{vmatrix}\\ &= 2ml^2\omega^2(\sin 2\theta + \cos 2\theta)\mathbf{j}\end{aligned}$$

Với $\mathbf{M} = 0$, chúng ta cần

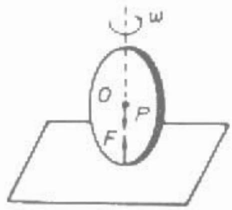
$$\mathrm{tg}2\theta = -1 ,$$

nghĩa là $\theta = -22,5^\circ$ hay $67,5^\circ$. Chú ý rằng trục z' quanh nó momen xoắn thiết diện là một trục quán tính chính. Như vậy cũng có thể tìm được bằng phương pháp bài 1147.

1155

Một đồng xu với mặt phẳng của nó thẳng đứng và quay với vận tốc góc ω trong mặt phẳng của nó như hình 1.120 được đặt nằm xuống một bề mặt phẳng. Vận tốc góc cuối cùng của đồng xu là bao nhiêu?.(Giả sử đồng xu đứng thẳng được bỏ qua ma sát lăn).

(*Wisconsin*)



Hình 1.120

Lời giải:

Sự quay của đồng xu thực hiện trên một mặt phẳng nằm ngang. Vì các lực tác động lên đồng xu cụ thể là lực đỡ **F** và trọng lực **P**, cả 2 điều có hướng đi qua tâm khối của đồng xu, momen xung lượng của đồng xu quanh tâm khối của nó được bảo toàn. Vì vậy vận tốc góc vẫn là ω sau khi nó được đặt xuống bề mặt phẳng.

1156

Chân người kích thước bình thường thấy thoải mái khi đi bộ ngoài tự nhiên, sải bước đi chừng một bước trên một giây, nhưng không thoải mái khi bị buộc phải đi về nhanh hơn hay chậm hơn. Bỏ qua ảnh hưởng của khớp đầu gối, dùng mô hình đơn giản nhất bạn có thể ước lượng tần số xác định nhịp đi đó, và tìm xem nó phụ thuộc vào đặc tính nào của chân.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Xét chân người như là một thanh đều có chiều dài l. Trong mô hình đơn giản nhất, tần số đu đưa của chân phải bằng tần số đặc trưng của thanh khi nó đu đưa xung quanh điểm cuối cố định của nó. Chuyển động đó là chuyển động của một con lắc kép miêu tả bởi

$$\frac{1}{3}ml^2\theta = -\frac{1}{2}mgl\sin\theta\,,$$

hay

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2l}\theta = 0\,.$$

đối với θ nhỏ khi đó tần số dung đưa là $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{2l}}$. Nếu chúng ta coi $l \approx 0,4$ m, thì $\nu \approx 1\ \mathrm{s}^{-1}$.

1157

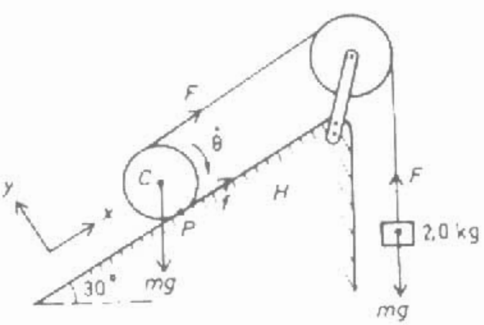
Hình trụ C (khối lượng 10,0 kg và có bán kính 0,07 m) lăn mà không trượt lên một đồi nghiêng H như hình 1.121. Sợi dây không duỗi thẳng ra mà cuốn xung quanh hình trụ C.

(a) Trụ C di chuyển thẳng đứng lên được bao xa khi được kéo bởi vật thể nặng 2 kg di chuyển xuống một mét?

(b) Độ lớn và hướng của gia tốc là như thế nào?

(c) Độ lớn và hướng của lực ma sát tĩnh tại điểm tiếp xúc P là như thế nào?

(*Wisconsin*)



Hình 1.121

Lời giải:

(a) Vì dây không được kéo thẳng, khi tâm của C di chuyển đi lên trên mặt nghiêng với một khoảng cách Δx, vật có khối lượng 2 kg cũng sẽ rơi xuống một đoạn đúng bằng Δx. Tuy nhiên, khi đó một thêm một đoạn dài Δx của sợi dây cũng tở ra trong quá trình đó được. Vật 2 kg thực tế sẽ rơi xuống thêm $2\Delta x$. Chính vì vậy khi nó di chuyển xuống dưới một mét, trụ C sẽ chuyển động đi lên mặt nghiêng một đoạn 0,5 m, hoặc đi thẳng đứng một đoạn $0,5\sin 30° = 0,25$ m.

(b) Các lực có liên quan được chỉ ra trong hình 1.121. Hiệu ứng trên có nghĩa là đối với vật khối lượng 2 kg chúng ta có

$$2m\ddot{x} = mg - F\ .$$

Với hình trụ C chúng ta có

$$M\ddot{x} = F + f - Mg\sin 30°\ ,$$
$$I\ddot{\theta} = (F - f)R\ ,$$

trong đó $I = \frac{1}{2}MR^2$. Hơn nữa, vì trụ C lăn mà không trượt nên chúng ta còn có

$$\ddot{x} = R\ddot{\theta}\ .$$

Các phương trình trên cho ta

$$\ddot{x} = \left(\frac{4m - M}{8m + 3M}\right)g = -0,0435g = -0,426\ \text{ms}^{-2}\ .$$

Như vậy gia tốc có độ lớn 0,426 ms^{-2} và tác động hướng xuống dọc theo mặt phẳng nằm nghiêng.

(c) $f = 4M(\ddot{x} + g) = 40 \times 0,574g = 23,0$ N. Hướng của nó là hướng lên dọc theo mặt phẳng nằm nghiêng.

1158

Một cái vòng đều khối lượng M và bán kính R treo theo mặt thẳng đứng bởi một lưỡi dao tại một điểm trên mặt chu vi trong của vòng tròn. Tính tần số tự nhiên của các dao động nhỏ.

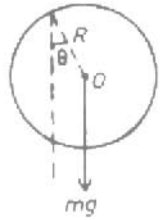
(*Wisconsin*)

Lời giải:

Momen quán tính của vòng quanh lưỡi dao tựa là

$$I = MR^2 + MR^2 = 2MR^2\ .$$

Xem hình 1.122, chúng ta có phương trình chuyển động



Hình 1.122

$$I\ddot{\theta} = -MgR\sin\theta \,.$$

hay

$$I\ddot{\theta} = -MgR\theta$$

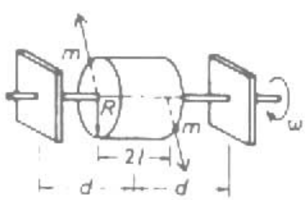
đối với các dao động nhỏ. Do đó tần số là

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{MgR}{I}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{2R}} \,.$$

1159

Một roto tốc độ siêu cao cấu tạo gồm một đĩa đồng chất khối lượng M, bán kính R độ dày là $2l$. Nó được lắp vào một trục quay gác trên các ổ trục cách nhau một khoảng cách $2d$ như hình 1.123. Hai vật thêm vào có khối lượng bằng nhau là m, được sắp xếp đối xứng sao cho roto nằm ở trạng thái cân bằng "tĩnh". Tìm lực biến thiên theo thời gian trên các ổ trục nếu roto quay với vận tốc góc ω.

(*Wisconsin*)



Hình 1.123

Lời giải:

Trong hệ quay gắn với đĩa như trên, 2 khối lượng thêm vào, mỗi cái chịu một lực ly tâm $mR\omega^2$, dẫn đến momen xoắn $T = 2mR\omega^2 l$. Momen xoắn này được cân bằng bởi một momen xoắn cùng độ lớn nhưng ngược hướng, gây ra bởi các ổ trục cách nhau một khoảng $2d$. Do đó với các ổ trục, mỗi cái chịu một lực $\frac{T}{2d} = \frac{mR\omega^2 l}{d}$ trong cùng hướng như là hướng của lực ly tâm tác dụng lên vật gần hơn. Trong hệ quy chiếu cố định những ổ trục đó quay với vận tốc góc ω.

1160

Một tấm pin mặt trời rộng 100 m^2 được ghép với một bánh đà sao cho, nó chuyển đổi ánh sáng tới thành cơ quay với hiệu suất 1%.

(a) Với vận tốc góc nào một bánh đà hình trụ rắn khối lượng 500 kg và bán kính 50 cm sẽ quay sau 8h tấm pin đó được phơi nắng (nếu đầu tiên nó đứng yên)?

Lấy hằng số hấp thu năng lượng là 2 cal/cm^2/phút trong suốt khoảng thời gian (1 cal = 4,2 jun)

(b) Giả sử trục của bánh đà nằm ngang đột nhiên rời khỏi ở trục tĩnh của nó và bắt đầu lăn dọc một mặt phẳng nằm ngang với hệ số ma sát động là $\mu = 0,1$. Nó sẽ lăn được bao xa cho đến khi ngừng trượt?

(c) Tâm khối di chuyển với tốc độ tại thời điểm đó là bao nhiêu?

(d) Bao nhiêu năng lượng sẽ biến thành nhiệt?

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Động năng quay của bánh đà là $E = \frac{1}{2}I\omega_0^2$, trong đó $I = \frac{1}{2}mR^2$, cho ta

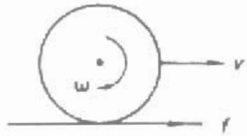
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2E}{I}} = \sqrt{\frac{2 \times 0,01 \times 100 \times 10^4 \times 8 \times 60 \times 2 \times 4,2}{\frac{1}{2} \times 500 \times 0,5^2}}$$

$$= 1136 \text{ rad/s} .$$

(b) Do khoảng thời gian từ khi bánh đà đó được giải phóng, khi đó nó quay với vận tốc góc ω_0. Sau khi giải phóng nó lăn trên mặt phẳng, lực ngang duy nhất tác dụng lên bánh đà là lực ma sát như hình 1.124. Các phương trình chuyển động là

$$I\dot{\omega} = -fR, \qquad m\dot{v} = f .$$

Tại thời điểm t_1 khi bánh đà dừng trượt, coi vận tốc góc của nó là ω_1. Các điều kiện biên là $\omega = \omega_0$, $v = 0$ ở $t = 0$, $\omega = \omega_1$, $v = v_1 = R\omega_1$ ở $t = t_1$. Lấy tích



Hình 1.124

phân các phương trình trên cho ta

$$I(\omega_1 - \omega_0) = -fRt_1 ,$$
$$mv - mR\omega_1 = ft_1 .$$

Chú ý: những phương trình này luôn có thể nhận được trực tiếp bằng cách xem xét xung lực. Giải các phương trình này chúng ta có

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{3}, \qquad t_1 = \frac{\omega_0 R}{3\mu g} ,$$

Vì $I = \frac{1}{2}mR^2$, $f = \mu mg$. Khoảng cách đi được của bánh đà trước khi nó ngừng trượt là

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{f}{m}\right)t_1^2 = \frac{1}{2}\mu g\left(\frac{\omega_0 R}{3\mu g}\right)^2 = \frac{(\omega_0 R)^2}{18\mu g} = 18290 \text{ m}$$

(c) Tại thời điểm t_1 tốc độ của tâm khối là

$$v_1 = R\omega_1 = \frac{\omega_0 R}{3} = 189,3 \text{ ms}^{-1} .$$

(d) Tại thời điểm $0 < t < t_1$, tích phân phương trình chuyển động cho

$$I(\omega - \omega_0) = -fRt ,$$
$$mv = ft .$$

Tại thời điểm $0 < t < t_1$, bánh đà vừa trượt vừa lăn, chỉ có phần trượt của chuyển động biến năng lượng thành nhiệt. Vận tốc trượt là

$$v - R\omega = \frac{3ft}{m} - R\omega_0$$

và tổng năng lương tiêu tán thành nhiệt là

$$\begin{aligned}Q &= -\int_0^{t_1}(v - R\omega)f\,dt \\ &= -\frac{3f^2t_1^2}{2m} + R\omega_0 f t_1 \\ &= \frac{mR^2\omega_0^2}{6} = 2,688 \times 10^7 \text{ J} .\end{aligned}$$

Điều này cũng luôn có thể nhận được bằng cách xem xét sự thay đổi động năng của bánh đà.

$$\begin{aligned}Q &= \frac{1}{2}I\omega_0^2 - \left(\frac{1}{2}I\omega_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2\right) \\ &= \frac{mR^2}{4}\cdot\frac{8\omega_0^2}{9} - \frac{m}{2}\frac{(R\omega_0)^2}{9} = \frac{mR^2\omega_0^2}{6} ,\end{aligned}$$

giống như trên.

1161

Một người muốn bẻ gãy một thanh dài bằng cách đập nó lên một tảng đá. Một đầu thanh được cầm trong tay và đầu đó của thanh quay mà không dịch chuyển như hình vẽ 1.125. Người đó muốn tránh một lực lớn tác động lên tay ở thời điểm thanh đập lên tảng đá. Nên đập vào tảng đá ở điểm nào của thanh? (Bỏ qua trọng lực).

(*CUSPEA*)

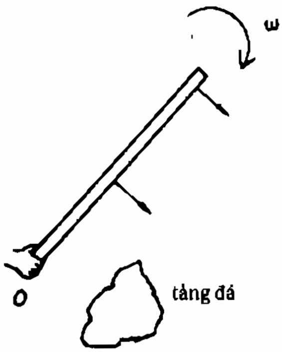
Lời giải:

Coi điểm va chạm đến chỗ cầm O của tay có khoảng cách là x và phản lực của lực tác động lên tay do tác dụng lực F là F', như trên hình 1.126. Xét chuyển động của tâm khối C, chúng ta có

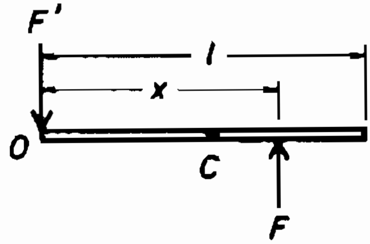
$$\int (F - F')dt = mv ,$$

$$\int \left[F\left(x - \frac{l}{2}\right) - F'\frac{l}{2}\right] dt = I\omega ,$$

trong đó v là vận tốc của C, ω là vận tốc góc quanh C ngay sau khi tác dụng lực F, và $I = \frac{ml^2}{12}$, m là khối lượng của thanh. Vì O vẫn là điểm cố định, chúng



Hình 1.125



Hình 1.126

ta cần

$$v - \frac{\omega l}{2} = 0\,,$$

hay

$$v = \frac{\omega l}{2}\,.$$

Chúng ta cũng coi $F' \approx 0$, chính vì vậy

$$\int F dt = mv, \qquad \left(x - \frac{l}{2}\right)\int F dt = I\omega\,,$$

cho ta

$$x = \frac{l}{6} + \frac{l}{2} = \frac{2l}{3}\,.$$

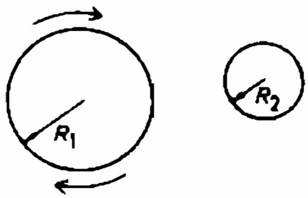
1162

Hai bánh đà như hình 1.127 lắp trên các trục song song không ma sát nhưng ban đầu không có điểm chạm. Bánh đà lớn có $f = 2000$ vg/phút trong khi bánh đà nhỏ đứng yên. Nếu hai trục song song di chuyển đến khi tiếp xúc nhau, tìm vận tốc góc của bánh đà thứ 2 sau khi xảy ra trạng thái cân bằng (nghĩa là: không trượt tiếp ở điểm tiếp xúc), cho $R_1 = 2R_2$, $I_1 = 16I_2$.

(Wisconsin)

Lời giải:

Giả sử xung của lực tương tác giữa hai bánh đà từ khi tiếp xúc tới khi cân bằng là J. Khi đó momen xoắn của xung lực tác động lên bán đà lớn là JR_1 và lên bánh đà nhỏ là JR_2.



Hình 1.127

Chúng ta có $I_1(\omega_1 - \omega_1') = JR_1$, $I_2\omega_2' = JR_2$, trong đó ω_1 và ω_1' tương ứng là các vận tốc góc của bánh đà lớn trước tiếp xúc và sau khi cân bằng xảy ra, và ω_2' là vận tóc góc của bánh đà nhỏ sau khi xảy ra sự cân bằng. Không có sự trượt giữa các bánh đà khi đạt tới sự cân bằng

$$\omega_1' R_1 = \omega_2' R_2 .$$

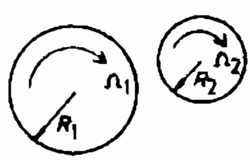
Các phương trình trên cho ta

$$\omega_2' = \frac{I_1 R_1 R_2 \omega_1'}{I_1 R_2^2 + I_2 R_1^2} = 1,6\omega_1 = 3200 \text{ vg/phút}.$$

1163

Hai hình trụ đồng đều quay độc lập với nhau quanh các trục song song của chúng. Một cái có bán kính R_1 và khối lượng M_1, còn cái kia tương ứng là R_2 và M_2. Ban đầu chúng quay cùng chiều như nhau với vận tốc góc tương ứng là Ω_1 và Ω_2 như hình 1.128. Sau đó chúng di chuyển cho đến khi xảy ra sự tiếp xúc dọc theo tiếp tuyến chung. Sau khi đạt tới trạng thái ổn định, vận tốc góc cuối cùng của mỗi hình trụ là bao nhiêu?

(*CUSPEA*)



Hình 1.128

Lời giải:

Coi ω_1, ω_2 lần lượt là vận tốc góc của 2 hình trụ sau khi đạt tới trạng thái ổn định. Khi đó

$$\omega_1 R_1 = -\omega_2 R_2 .$$

Xem J_1 và J_2 là momen xoắn tích hợp theo thời gian trên hình trụ 2 tác dụng lên hình trụ 1 và hình trụ 1 tác dụng lên hình trụ 2, thì

$$\frac{J_1}{R_1} = \frac{J_2}{R_2} ,$$

$$J_1 = I_1(\omega_1 - \Omega_1), \qquad J_2 = I_2(\omega_2 - \Omega_2) ;$$

hay

$$\frac{I_1(\omega_1 - \Omega_1)}{R_1} = \frac{I_2(\omega_2 - \Omega_2)}{R_2} .$$

Vì $I \propto MR^2$, phương trình cuối cùng trở thành

$$M_1 R_1(\omega_1 - \Omega_1) = M_2 R_2(\omega_2 - \Omega_2) ,$$

nghĩa là

$$M_1 R_1 \omega_1 - M_2 R_2 \omega_2 = M_1 R_1 \Omega_1 - M_2 R_2 \Omega_2 .$$

Vì vậy

$$\omega_1 = \frac{M_1 R_1 \Omega_1 - M_2 R_2 \Omega_2}{R_1(M_1 + M_2)} ,$$

$$\omega_2 = \frac{M_2 R_2 \Omega_2 - M_1 R_1 \Omega_1}{R_2(M_1 + M_2)} .$$

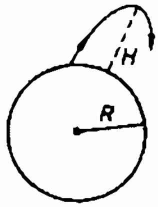
1164

Ba hình trụ giống nhau quay với vận tốc góc như nhau Ω quanh các trục song song qua tâm. Chúng được đưa gần lại nhau cho tới khi chạm vào nhau, vẫn giữ nguyên các trục song song. Một trạng thái ổn định mới có được khi ở mỗi đường tiếp xúc, mỗi hình trụ không trượt so với hình trụ bên cạnh, hình 1.129. Động năng quay ban đầu giờ còn lại bao nhiêu?
(Thứ tự chính xác mà vật 1 vật 2 chạm nhau, rồi vật 2 vật 3 chạm nhau, không có liên quan gì cả).

(*CUSPEA*)

Lời giải:

Vì không có sự trượt, nếu Ω' là vận tốc góc cuối cùng của hình trụ 1, thì vận tốc góc cuối cùng của hình trụ 2 và 3 tương ứng là $-\Omega'$ và Ω' . Coi I là



Hình 1.129

momen quán tính của mỗi hình trụ quanh trục quay của nó, M_{ij} là xung lực góc mà hình trụ thứ j truyền cho hình trụ thứ i tương ứng với trục quay của nó. Định luật III Newton yêu cầu rằng, khi các hình trụ có cùng bán kính

$$M_{ij} = M_{ji}. \qquad (i, j = 1, 2, 3; \quad i \neq j)$$

Xem xét động lực đưa ra

$$I(\Omega' - \Omega) = M_{12} , \tag{1}$$

$$I(-\Omega' - \Omega) = M_{21} + M_{23} , \tag{2}$$

$$I(\Omega' - \Omega) = M_{32} . \tag{3}$$

(1) + (3) − (2) cho ta

$$I(3\Omega' - \Omega) = 0 ,$$

hay

$$\Omega' = \frac{\Omega}{3} .$$

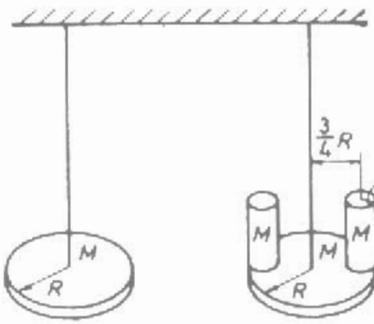
Tỉ số giữa các động năng quay sau và trước khi chạm nhau là

$$\frac{T'}{T} = \frac{\frac{1}{2}(3I\Omega'^2)}{\frac{1}{2}(3I\Omega^2)} = \left(\frac{\Omega'}{\Omega}\right)^2 = \frac{1}{9} .$$

1165

Tìm tỉ số của các chu kì của 2 con lắc xoắn như hình 1.130. Con lắc xoắn thứ hai chỉ khác với con lắc 1 do thêm vào 2 vật hình trụ như hình vẽ. Bán kính của mỗi vật thêm vào bằng 1/4 bán kính của đĩa. Mỗi hình trụ và đĩa có khối lượng bằng nhau.

(*Wisconsin*)



Hình 1.130

Lời giải:

Coi I_1 và I_2 tương ứng là momen quán tính của hai con lắc xoắn. Nếu A là hệ số phục hồi của mỗi dây treo, thì các phương trình chuyển động là $I_1\ddot{\theta} + A\theta = 0$, $I_2\ddot{\theta} + A\theta = 0$. Vì vậy các tần số góc dao động của các con lắc xoắn là $\omega_1 = \sqrt{A/I_1}$ và $\omega_2 = \sqrt{A/I_2}$. Với con lắc thứ nhất $I_1 = MR^2/2$, và đối với con lắc thứ hai

$$I_2 = \frac{MR^2}{2} + 2\left[\frac{M}{2}\left(\frac{R}{4}\right)^2 + M\left(\frac{3R}{4}\right)^2\right] = \frac{27}{16}MR^2 .$$

Vì thế tỉ số của các chu kì là

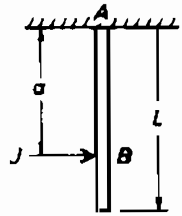
$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} .$$

1166

Một thanh đồng chất mảnh khối lượng M và độ dài L được treo từ một trục cố định (giả sử không có ma sát) ở A như hình 1.131. Momen quán tính xung quanh A là $ML^2/3$.

(a) Một xung lực ngang tức thời J được phát ra ở B, bên dưới điểm A một khoảng là a. Vận tốc góc ban đầu của thanh là bao nhiêu?

(b) Nói chung, như là kết của J, sẽ có một xung lực J' lên thanh từ trục A. J' là gì?



Hình 1.131

(c) Xung lực J nên tác dụng vào chỗ nào để $J' = 0$?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) $Ja = I(\omega - \omega_0)$, trong đó ω_0 là vận tốc góc của thanh trước khi tác dụng xung lực. Vì $\omega_0 = 0$, vận tốc góc ban đầu là

$$\omega = \frac{Ja}{I} = \frac{3Ja}{ML^2} .$$

(b) Vận tốc ban đầu của tâm khối của thanh là $v = \omega L/2$. Vì vậy sự thay đổi xung lượng của thanh là $Mv = M\omega L/2$. Vì nó bằng tổng xung lực trên thanh, chúng ta có

$$J + J' = \frac{M\omega L}{2} .$$

Vì vậy

$$J' = \frac{M\omega L}{2} - J = J\left(\frac{3a}{2L} - 1\right) .$$

(c)

$$J' = 0, \qquad \text{if} \quad a = \frac{2L}{3} .$$

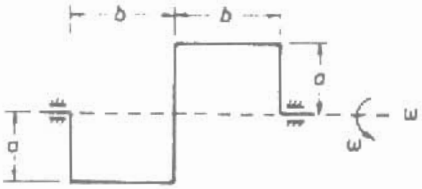
Vì vậy, sẽ không có xung lực nào từ trục nếu J được tác động vào điểm $2L/3$ phía dưới điểm A.

1167

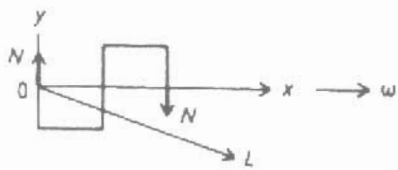
Một trục khuỷu như hình 1.132 quay với vận tốc góc cố định ω. Tính các lực tổng hợp lên các ổ trục. Trong phác họa chỉ ra hướng của những phản lực

đó và hướng của momen xung lượng.
(Giả sử trục khuỷu được chế tạo từ các thanh mảnh mật độ đồng nhất).

(UC, Berkeley)



Hình 1.132



Hình 1.133

Lời giải:

Xét chuyển động trong một hệ gắn với trục quay như hình 1.133. Khi các thanh hoặc song song hoặc vuông góc với trục quay, lực ly tâm tác động lên mỗi thanh có thể xem như là lên một điểm cùng khối lượng đặt tại tâm khối của thanh đó. Coi N là lực ràng buộc mà ở trục tác dụng lên mỗi thanh. Vì không có sự quay xung quanh trục z nên chúng ta cần các momen của các lực xung quanh O phải cân bằng

$$2b \cdot N + \frac{b}{2} \cdot \rho b \cdot a\omega^2 = \frac{3b}{2} \cdot \rho b \cdot a\omega^2 + 2b \cdot \rho a \cdot \frac{a}{2}\omega^2 ,$$

cho ta

$$N = \frac{\rho a\omega^2}{2}(a+b) .$$

trong đó ρ là khối lượng trên đơn vị độ dài của thanh. Các phản lực lên các ổ trục thì bằng và ngược với N như hình 1.133. Ở hệ tọa độ cố định những lực này quay, cùng với trục khuỷu, với vận tốc góc ω xung quanh trục. Momen xung lượng của trục khuỷu được cho bởi

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx}\omega \\ I_{yx}\omega \\ I_{zx}\omega \end{pmatrix} ,$$

trong đó I là tenxơ momen quán tính quanh trục O với các phần tử như sau

$$I_{ij} = \sum_n \Delta m_n (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) .$$

Vì tất cả $z = 0$, $I_{zx} = 0$. Hơn nữa có thể thấy rằng $I_{xx} > 0$, $I_{yx} < 0$. Vì vậy momen xung lượng **L** có hướng trong hệ tọa độ quay như hình 1.133. Chú ý rằng trọng lực được bỏ qua trong tính toán, nếu không sẽ có một lực cố định bổ sung có độ lớn $(2a + b)\rho g$ tác động lên mỗi ổ trục đỡ thanh và có hướng là hướng thẳng đứng xuống dưới trong hệ tọa độ cố định đó.

1168

Hai chất điểm như nhau có khối lượng M được nối bằng một thanh cứng không khối lượng có chiều dài $2A$ (một tạ), chúng liên kết với nhau để quay quanh một trục cố định vào tâm của thanh theo một góc θ (hình 1.134). Tâm của thanh ở gốc hệ tọa độ, trục quay dọc theo trục z và quả tạ đó nằm trong mặt phẳng xz tại $t = 0$. Vận tốc góc ω là không đổi theo thời gian và hướng theo trục z.

(a) Tính tất cả các phần tử trong tenxơ quán tính. Phải tin chắc đặc tả được hệ tọa độ bạn sử dụng.

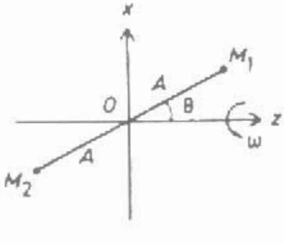
(b) Dùng các phần tử vừa tính toán để tìm momen xung lượng của quả tạ trong hệ phòng thí nghiệm như là một hàm của thời gian.

(c) Dùng phương trình $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, tính momen xung lượng và chỉ ra rằng nó giống như kết quả câu (b).

(d) Tính momen xoắn trên trục như là một hàm của thời gian.

(e) Tính động năng của quả tạ.

(UC, Berkeley)



Hình 1.134

Lời giải:

(a) Dùng hệ tọa độ xyz gắn với quả tạ sao cho là 2 chất điểm nằm trong mặt phẳng xz. Các phần tử của tenxơ quán tính xung quanh O, được đưa ra bởi $I_{ij} = \sum_n m_n(r^2\delta_{ij} - x_i x_j)$, là

$$I_{xx} = 2MA^2\cos^2\theta, \qquad I_{yy} = 2MA^2, \qquad I_{zz} = 2MA^2\sin^2\theta ,$$
$$I_{xy} = I_{yz} = 0, \qquad I_{zx} = -2MA^2\cos\theta\sin\theta = -MA^2\sin^2\theta .$$

Do vậy

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 2MA^2\cos^2\theta & 0 & -MA^2\sin 2\theta \\ 0 & 2MA^2 & 0 \\ -MA^2\sin 2\theta & 0 & 2MA^2\sin^2\theta \end{pmatrix} .$$

(b) Dùng hệ tọa độ phòng thí nghiệm $x'y'z'$ sao cho trục z' trùng với trục z của hệ tọa độ quay trong câu (a) và tất cả các trục tương ứng của hai hệ tọa độ đều bắt đầu ở $t = 0$. Các vectơ đơn vị dọc theo các trục của hai hệ tọa độ liên hệ với nhau bởi

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ -\sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix} .$$

Khi đó tenxơ quán tính trong hệ tọa độ phòng thí nghiệm là

$$\mathbb{I}' = S'\mathbb{I}S = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} 2MA^2\cos^2\theta & 0 & -MA^2\sin 2\theta \\ 0 & 2MA^2 & 0 \\ -MA^2\sin 2\theta & 0 & 2MA^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ -\sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Do vậy momen xung lượng của quả tạ trong hệ tọa độ phòng thí nghiệm là

$$\mathbf{L} = \mathbb{I}' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = MA^2\omega \begin{pmatrix} -\sin 2\theta\cos\omega t \\ -\sin 2\theta\sin\omega t \\ 2\sin^2\theta \end{pmatrix} .$$

(c) Các vectơ bán kính của M_1 và M_2 từ O tương ứng là

$$\mathbf{r}_1 = A(\sin\theta, 0, \cos\theta) ,$$
$$\mathbf{r}_2 = A(-\sin\theta, 0, -\cos\theta)$$

trong hệ tọa độ quay. Dùng phép biến đổi đối các vectơ đơn vị chúng ta có

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= A[\sin\theta(\mathbf{e}'_1\cos\omega t + \mathbf{e}'_2\sin\omega t) + \mathbf{e}'_3\cos\theta] \\ &= A(\sin\theta\cos\omega t, \sin\theta\sin\omega t, \cos\theta) , \\ \mathbf{r}_2 &= A(-\sin\theta\cos\omega t, -\sin\theta\sin\omega t, -\cos\theta) \end{aligned}$$

trong hệ tọa độ phòng thí nghiệm. Momen xung lượng của hệ này trong hệ tọa độ phòng thí nghiệm là

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \sum \mathbf{r}\times\mathbf{p} = \sum M\mathbf{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) = \sum M[r^2\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\omega})\mathbf{r}] \\
&= 2MA^2\omega\mathbf{e}_3' \\
&\quad - MA^2\omega\cos\theta(\mathbf{e}_1'\sin\theta\cos\omega t + \mathbf{e}_2'\sin\theta\sin\omega t + \mathbf{e}_3\cos\theta) \\
&\quad + MA^2\omega\cos\theta(-\mathbf{e}_1'\sin\theta\cos\omega t - \mathbf{e}_2'\sin\theta\sin\omega t - \mathbf{e}_3'\cos\theta) \\
&= MA^2\omega(-\mathbf{e}_1'\sin 2\theta\cos\omega t - \mathbf{e}_2'\sin 2\theta\sin\omega t + \mathbf{e}_3' 2\sin^2\theta)\ ,
\end{aligned}$$

giống như câu (b).

(d) Momen xoắn trên trục là

$$\tau = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = MA^2\omega^2[\sin 2\theta\sin\omega t\mathbf{e}_1' - \sin 2\theta\cos\omega t\mathbf{e}_2']\ .$$

(e) Vì $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ động năng quay của quả tạ là

$$T = \frac{I_{zz}\omega^2}{2} = MA^2\omega^2\sin^2\theta\ .$$

1169

Một con sóc khối lượng m chạy với một vận tốc không đổi V_0 so với mặt trong của một cái cũi hình trụ bán kính R và momen quán tính I như hình 1.135. Cái cũi có momen xoắn tắt dần tỉ lệ thuận với vận tốc góc của nó. Bỏ qua kích cỡ của con sóc so với R. Nếu ban đầu cái cũi đứng yên và con sóc bắt đầu ở điểm thấp nhất trong vòng hình trụ và chạy, tìm chuyển động của con sóc so với hệ tọa độ cố định trong trường hợp các dao động nhỏ tắt dần quá yếu. Tìm vận tốc góc của con sóc theo góc của nó so với phương thẳng đứng đối với các chuyển dịch góc bất kì trong trường hợp không tắt dần. Thảo luận một số tiêu chí thiết kế tiêu chuẩn cho cái cũi trong trường hợp này.

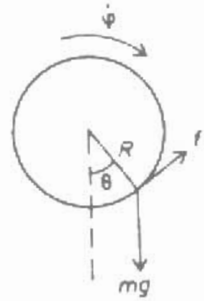
(*Wisconsin*)

Lời giải:

Trong một hệ tọa độ cố định, định nghĩa θ chỉ ra như hình 1.136. Với con sóc, phương trình chuyển động của nó là

$$mR\ddot{\theta} = f - mg\sin\theta\ ,$$

Hình 1.135



Hình 1.136

và với cái cũi phương trình chuyển động là

$$I\ddot{\varphi} = -fR - k\dot{\varphi} ,$$

trong đó f là hệ số ma sát giữa con sóc và cái cũi, k là một hằng số. Ngoài ra, khi con sóc có tốc độ không đổi V_0 so với với cái cũi, chúng ta có

$$R(\dot{\theta} - \dot{\varphi}) = V_0 ,$$

điều đó có nghĩa $\ddot{\varphi} = \ddot{\theta}$, $\dot{\varphi} = \dot{\theta} - \frac{V_0}{R}$. Dùng những kết quả này và để khử f từ các phương trình chuyển động cho ta

$$(I + mR^2)\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + mgR\sin\theta = \frac{kV_0}{R} .$$

Với các dao động nhỏ, $\theta \ll 1$ và phương trình trên rút gọn thành

$$(I + mR^2)\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + mgR\theta = \frac{kV_0}{R} .$$

Một nghiệm riêng của phương trình này là

$$\theta = \frac{kV_0}{mgR^2} ,$$

trong khi đó đối với tắt dần quá yếu nghiệm tổng quát đối với phương trình thuần nhất là

$$\theta = e^{-bt}(A\sin\omega t + B\cos\omega t) ,$$

trong đó

$$b = \frac{k}{2(I + mR^2)}, \qquad \omega = \sqrt{\frac{mgR}{I + mR^2} - b^2} .$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình trên là

$$\theta = \frac{kV_0}{mgR^2} + e^{-bt}(A\sin\omega t + B\cos\omega t) .$$

Dùng điều kiện ban đầu tại $t = 0$, $\theta = 0$, $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$, $\dot{\theta} = \frac{V_0}{R}$, chúng ta tìm được

$$\theta = \frac{kV_0}{mgR^2} - \frac{kV_0}{mgR^2}\left[\cos\omega t + \left(\frac{b}{\omega} - \frac{mgR}{\omega K}\right)\sin\omega t\right] e^{-bt}$$

Đối với trường hợp không tắt dần ($k = 0$), phương trình vi phân là

$$(I + mR^2)\ddot{\theta} + mgR\theta = 0$$

hoặc, vì $\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta}$,

$$(I + mR^2)d\dot{\theta}^2 = -2mgR\theta d\theta ,$$

tích phân 2 vế ta có

$$\dot{\theta}^2 = \left(\frac{V_0}{R}\right)^2 - \frac{mgR}{I + mR^2}\theta^2$$

có dùng điều kiện ban đầu cho $\dot{\theta}$. Do đó

$$\dot{\theta} = \pm\sqrt{\left(\frac{V_0}{R}\right)^2 - \frac{mgR}{I + mR^2}\theta^2} .$$

Chúng ta cần $I + mR^2 \gg k$ để cho trường hợp không tắt dần đúng. Vì thế cái cũi cần được thiết kế với một momen quán tính lớn.

1170

Một bản mỏng hình vuông có độ dài mỗi cạnh là a quay ở tần số góc không đổi ω quanh một trục qua tâm nghiêng một góc θ so với pháp tuyến của bản đó.

(a) Tìm các momen quán tính chính.

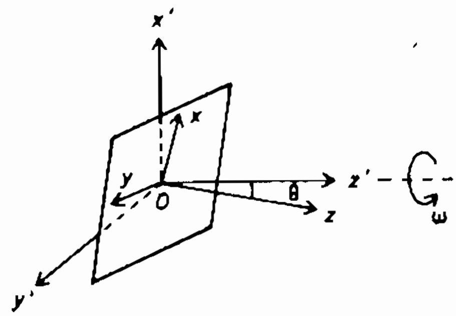
(b) Tìm momen xung lượng J trong hệ tọa độ phòng thí nghiệm.

(c) Tính momen xoắn trên trục.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Lấy gốc ở tâm O của bản vuông đó. Với hệ tọa độ gắn với bản mỏng này, lấy mặt phẳng của bản như là mặt phẳng xy với x và y song song với các



Hình 1.137

cạnh. Trục z dọc theo pháp tuyến và tạo thành một góc θ với trục z' của hệ tọa độ phòng thí nghiệm mà trong đó có bảng vuông quay, như hình 1.137. Chúng ta giả sử rằng các trục x, z và z' là đồng phẳng.

Do tính đối xứng các trục x, y và z là các trục quán tính chính quanh O với các momen quán tính tương ứng là

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{ma^2}{12}, \qquad I_{zz} = \frac{ma^2}{6},$$

trong đó m là khối lượng của bản mỏng hình vuông.

(b) Momen xung lượng J được giải theo các trục tọa độ của hệ quy chiếu quay là

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ma^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \sin\theta \\ 0 \\ \omega\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ma^2}{12}\omega\sin\theta \\ 0 \\ \frac{ma^2}{6}\omega\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Chúng ta có thể chọn hệ tọa độ phòng thí nghiệm sao cho trục y' của nó trùng với trục y tại thời điểm $t = 0$. Do vậy, các vectơ đơn vị của hai hệ tọa độ đó liên hệ với nhau bởi

$$\begin{cases} \mathbf{e}_x = \cos\theta\cos\omega t\mathbf{e}_{x'} + \cos\theta\sin\omega t\mathbf{e}_{y'} + \sin\theta\mathbf{e}_{z'}, \\ \mathbf{e}_y = -\sin\omega t\mathbf{e}_{x'} + \cos\omega t\mathbf{e}_{y'}, \\ \mathbf{e}_z = -\sin\theta\cos\omega t\mathbf{e}_{x'} - \sin\theta\sin\omega t\mathbf{e}_{y'} + \cos\theta\mathbf{e}_{z'}. \end{cases}$$

Vì thế momen xung lượng được giải theo các trục của hệ tọa độ phòng thí nghiệm là

$$\begin{pmatrix} J_{x'} \\ J_{y'} \\ J_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\omega t & -\sin\omega t & -\sin\theta\cos\omega t \\ \cos\theta\sin\omega t & \cos\omega t & -\sin\theta\sin\omega t \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{ma^2}{12}\omega\sin\theta \\ 0 \\ \frac{ma^2}{6}\omega\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{ma^2}{12}\omega\sin\theta\cos\theta\cos\omega t \\ -\frac{ma^2}{12}\omega\sin\theta\cos\theta\sin\omega t \\ \frac{ma^2}{12}\omega(1+\cos^2\theta) \end{pmatrix} .$$

(c) Momen xoắn trên trục đó được cho bởi

$$\mathbf{M} = \left(\frac{d\mathbf{J}}{dt}\right)_{\text{lab}} = \left(\frac{d\mathbf{J}}{dt}\right)_{\text{rot}} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{J} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{J}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \omega\sin\theta & 0 & \omega\cos\theta \\ \frac{ma^2}{12}\omega\sin\theta & 0 & \frac{ma^2}{6}\omega\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{ma^2}{12}\omega^2\sin\theta\cos\theta\mathbf{e}_y .$$

Momen xoắn có thể được biểu diễn theo các thành phần trong hệ tọa độ đang xét phòng thí nghiệm

$$\mathbf{M} = -\frac{ma^2}{12}\omega^2\sin\theta\cos\theta(-\sin\omega t\mathbf{e}_{x'} + \cos\omega t\mathbf{e}_{y'}) .$$

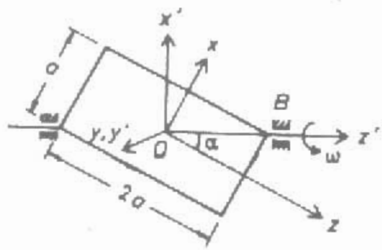
Kết quả có thể nhận được bằng cách lấy đạo hàm $\mathbf{L}$ trong hệ tọa độ phòng thí nghiệm

$$\mathbf{M} = \left(\frac{d\mathbf{J}}{dt}\right)_{\text{lab}} .$$

1171

Một bản mỏng hình chữ nhật khối lượng M có các cạnh là a và $2a$, quay với vận tốc góc không đổi ω quanh một trục đi qua hai góc đối diện nhau trên đường chéo như hình 1.138. Trục này được đỡ bởi các ổ trục ở góc của bản mỏng. Các ổ trục chỉ tác dụng lực lên trục. Bỏ qua trọng lực và lực ma sát, tìm lực do các ổ trục tác động trục như là hàm của thời gian.

(Princeton)



Hình 1.138

Lời giải:

Dùng một hệ tọa độ gắn với bản mỏng với gốc tọa độ ở tâm khối O, trục y dọc theo pháp tuyến, trục z song song với cạnh dài của hình chữ nhật như hình 1.138. Khi đó các trục x, y và z là các trục chính với các momen quán tính chính

$$I_{xx} = \frac{Ma^2}{12}, \qquad I_{yy} = \frac{5Ma^2}{12}, \qquad I_{zz} = \frac{4Ma^2}{12} .$$

Coi z' là trục quay và α là góc giữa các trục z và z'. Momen xung lượng của bản mỏng là

$$\mathbf{L} = \frac{Ma^2}{12}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega\sin\alpha\\ 0\\ \omega\cos\alpha\end{pmatrix} = \frac{Ma^2\omega}{12}\begin{pmatrix}\sin\alpha\\ 0\\ 4\cos\alpha\end{pmatrix} .$$

Momen xoắn trên trục của bản mỏng sẽ là

$$\begin{aligned}\tau &= \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{cố định}} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{quay}} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{L} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{L}\\ &= \frac{Ma^2\omega^2}{12}\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha\\ \sin\alpha & 0 & 4\cos\alpha\end{vmatrix}\\ &= -\frac{Ma^2\omega^2}{4}\cos\alpha\sin\alpha\,\mathbf{e}_y = -\frac{Ma^2\omega^2}{10}\mathbf{e}_y ,\end{aligned}$$

vì $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Xem N_A, N_B tương ứng là các lực ràng buộc gây ra bởi các ổ trục lên trục quay tại điểm A, B . Quay hệ tọa độ $Oxyz$ quanh trục y sao cho các trục z và z' trùng nhau. Các trục tọa độ mới là x', y' chúng đồng nhất với trục y và trục z' như trong hình 1.138. Vì tâm khối đứng yên, chúng ta có

$$N_{Ax'} + N_{Bx'} = 0, \qquad N_{Ay'} + N_{By'} = 0 .$$

Xét momen xoắn quanh O chúng ta có

$$N_{Bx'}d - N_{Ax'}d = -\frac{Ma^2\omega^2}{10}, \qquad N_{Ay'}d - N_{By'}d = 0 ,$$

trong đó $d = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$. Các phương trình trên cho ta

$$N_{Ay'} = N_{By'} = 0$$

$$N_{Ax'} = \frac{Ma^2\omega^2}{20d} = \frac{Ma\omega^2}{10\sqrt{5}} ,$$

$$N_{Bx'} = -\frac{Ma^2\omega^2}{20d} = -\frac{Ma\omega^2}{10\sqrt{5}} .$$

Những lực này là cố định trong hệ tọa độ quay. Trong hệ tọa độ đứng yên chúng quay với một vận tốc góc ω. Trong hệ tọa độ cố định $Ox''y''z''$ với cùng trục z' và trục x'' trùng với trục x' tại thời điểm $t = 0$,

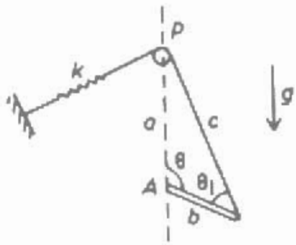
$$N_{Ax''} = \frac{Ma\omega^2}{10\sqrt{5}}\cos\omega t, \qquad N_{Ay''} = -\frac{Ma\omega^2}{10\sqrt{5}}\sin\omega t ,$$

$$N_{Bx''} = -\frac{Ma\omega^2}{10\sqrt{5}}\cos\omega t, \qquad N_{By''} = \frac{Ma\omega^2}{10\sqrt{5}}\sin\omega t .$$

1172

Một thanh mảnh đồng chất khối lượng M và độ dài là b được gắn bằng một sợi dây nhỏ không thể co giãn với một lò xo có hệ số đàn hồi là k. Sợi dây được vắt qua một ròng rọc rất nhỏ và nhẵn cố định ở điểm P. Thanh mảnh đó tự do quay quanh A mà không có sự ma sát trong một khoảng góc $-\pi < \theta \leq \pi$ như hình 1.139. Khi $c = 0$ lò xo nằm ở trạng thái tự nhiên. Giả sử rằng $b < a$ và trọng lực tác dụng hướng xuống.

(a) Tìm các giá trị của θ cho trường hợp hệ thống trên ở trong cân bằng tĩnh, và xác định trong mỗi trường hợp nếu hệ thống cân bằng là bền, không bền hoặc phiếm định.



Hình 1.139

(b) Tìm các tần số đối với các dao động nhỏ quanh các điểm cân bằng bền. (Chú ý: đường PA song song với g).

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

(a) Lấy hướng ra phía ngoài trang giấy là hướng dương của momen xoắn. Momen xoắn quanh điểm A do trọng lực là

$$L_g = -\frac{Mgb}{2}\sin\theta ,$$

và momen xoắn gây ra bởi lực hồi phục do lò xo là $L_k = kcb\sin\theta_1$, trong đó θ_1 là góc hợp bởi thanh với dây nối hoặc dùng định lý sin

$$\frac{c}{\sin\theta} = \frac{a}{\sin\theta_1} ,$$

$$L_k = kba\sin\theta .$$

Với trường hợp cân bằng, chúng ta cần $L_g + L_k = 0$, hoặc $ka\sin\theta = \frac{Mg}{2}\sin\theta$.

i) Nếu $ka = Mg/2$, điều kiện cân bằng thỏa mãn cho tất cả θ và cân bằng là phiếm định.

ii) Nếu $ka < Mg/2$, điều kiện cân bằng thỏa mãn nếu $\theta = 0$ hoặc $\theta = \pi$. Xét cân bằng ở $\theta = 0$. Coi $\theta = 0 \pm \epsilon$. Trong đó $\epsilon > 0$ là một góc nhỏ. Khi đó

$$L = L_k + L_g \approx \mp b\left(\frac{Mg}{2} - ka\right)\epsilon .$$

Như vậy

$$L < 0 \text{ đối với } \theta = +\epsilon,$$

$$L > 0 \text{ đối với } \theta = -\epsilon .$$

Do đó L có xu hướng làm tăng ϵ trong cả hai trường hợp và cân bằng là không bền. Đối với cân bằng ở $\theta = \pi \pm \epsilon$, chúng ta có

$$L = \pm\left(\frac{Mg}{2} - ka\right)\epsilon\,.$$

Khi đó

$$L < 0 \text{ đối với } \theta = \pi - \epsilon\,,$$
$$L > 0 \text{ đối với } \theta = \pi + \epsilon\,.$$

Trong trường hợp L có xu hướng làm giảm ϵ và cân bằng là bền.

iii) Nếu $ka > Mg/2$, tình huống là ngược với trường hợp (ii). Vì vậy trong trường hợp này $\theta = 0$ là một vị trí cân bằng bền và $\theta = \pi$ là một vị trí không bền.

(b) Lấy trường hợp $ka > Mg/2$ trong đó $\theta = 0$ là một vị trí cân bằng bền. Coi $\theta = \epsilon$ trong đó ϵ là góc nhỏ. Phương trình chuyển động là

$$b\left(ka - \frac{Mg}{2}\right)\sin\epsilon = -\frac{Mb^2}{3}\ddot{\epsilon}\,,$$

hoặc với các dao động nhỏ

$$b(2ka - Mg)\epsilon + \frac{2Mb^2}{3}\ddot{\epsilon} = 0\,.$$

Vì thế tần số của dao động là

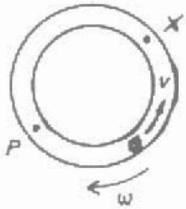
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3(2ka - Mg)}{2Mb}}\,.$$

Tương tự trong trường hợp $ka < Mg/2$, tần số của các do động nhỏ quanh vị trí cân bằng bền ở $\theta = \pi$ là

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3(Mg - 2ka)}{2Mb}}\,.$$

1173

Một cái nhẫn mảnh khối lượng M bán kính R xoay quanh chốt ở điểm P trên một cái bàn không ma sát, như hình 1.140. Một con rệp khối lượng m bò



Hình 1.140

dọc cái nhẫn với tốc độ v so với nhẫn. Con rệp bắt đầu từ chốt xoay với nhẫn đứng yên. Con rệp bò nhanh như thế nào so với cái bàn khi nó đạt đến điểm X đối diện theo đường kính với P trên cái nhẫn?

(MIT)

Lời giải:

Momen quán tính của cái nhẫn so với chốt xoay P là

$$I = MR^2 + MR^2 = 2MR^2 .$$

Khi con rệp bò đến điểm X, vận tốc của nó so với bàn là $v - 2R\omega$ và momen xung lượng của nhẫn xung quanh P là

$$J = 2MR^2\omega ,$$

trong đó ω là vận tốc góc của nhẫn quanh điểm P ở thời điểm đang xét đó. Ban đầu, momen xung lượng toàn phần của nhẫn và con rệp quanh điểm P là bằng không. Sự bảo toàn của momen xung lượng khi đó cho

$$2MR^2\omega - 2mR(v - 2R\omega) = 0 ,$$

hay

$$\omega = \frac{mv}{R(M + 2m)} .$$

Vận tốc của con rệp tại điểm X so với cái bàn là

$$v - 2R\omega = \frac{Mv}{M + 2m} .$$

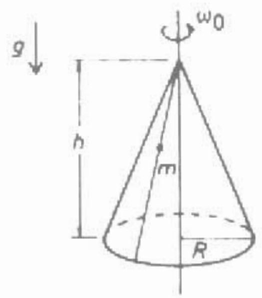
1174

Một hình nón có chiều cao h và bán kính đáy là R được cho quay quanh trục thẳng đứng của nó như hình 1.141. Một cái rãnh nhỏ thẳng được cắt dọc bề mặt của hình nón từ đỉnh tới đáy như hình vẽ. Tác động để hình nón quay với vận tốc góc ban đầu ω_0 quanh trục của nó và một hạt nhỏ (như một điểm) khối lượng m được thả từ trên đỉnh của rãnh không ma sát và trượt xuống dưới tác động của trọng lực. Giả sử rằng hạt đó nằm trong rãnh và momen quán tính của hình nón quanh trục của nó là I_0.

(a) Vận tốc góc của hình nón khi hạt chạm tới đáy là bao nhiêu?

(b) Tìm tốc độ của hạt trong hệ phòng thí nghiệm ngay khi nó rời khỏi hình nón?

(*MIT*)



Hình 1.141

Lời giải:

(a) Khi momen xung lượng toàn phần của hệ thống được bảo toàn, vận tốc góc ω của hình nón ở thời điểm khi mà hạt chạm tới đáy thỏa mãn hệ thức

$$I_0\omega_0 = (I_0 + mR^2)\omega \ .$$

Do đó

$$\omega = \frac{I_0\omega_0}{I_0 + mR^2} \ .$$

(b) Vì năng lượng của hệ thống được bảo toàn, vận tốc v của hạt khi nó chạm tới đáy thỏa mãn

$$\frac{1}{2}I_0\omega_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$$

với

$$v^2 = v_\parallel^2 + v_\perp^2 = v_\parallel^2 + R^2\omega^2 \ ,$$

trong đó $v_{\parallel}$ là vận tốc của hạt song song với rãnh và $v_{\perp}$ là thành phần vận tốc vuông góc với rãnh. Như vậy

$$\frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 = \frac{1}{2}I_0\omega_0^2 + mgh - \frac{1}{2}I_0\omega^2 - \frac{1}{2}mR^2\omega^2 ,$$

cho ta

$$v_{\parallel}^2 = I_0\omega_0^2 - \frac{(I_0 + mR^2)}{m}\frac{I_0^2\omega^2}{(I_0 + mR^2)^2} + 2gh = \frac{I_0\omega_0^2R^2}{I_0 + mR^2} + 2gh .$$

Do đó vận tốc của hạt khi nó chạm đáy là

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= v_{\perp}\mathbf{i} + v_{\parallel}\mathbf{j}\\ &= \frac{I_0\omega_0R}{I_0 + mR^2}\mathbf{i} + \sqrt{\frac{I_0\omega_0^2R^2}{I_0 + mR^2} + 2gh}\,\mathbf{j} ,\end{aligned}$$

i và j tương ứng là các vectơ đơn vị dọc và vuông góc với rãnh, với độ lớn

$$v = \sqrt{\left(\frac{I_0\omega_0R}{I_0 + mR^2}\right)^2 + \frac{I_0\omega_0^2R^2}{I_0 + mR^2} + 2gh} .$$

Tốc độ này có thể nhận được trực tiếp bằng cách thay biểu thức của ω trong phương trình năng lượng.

1175

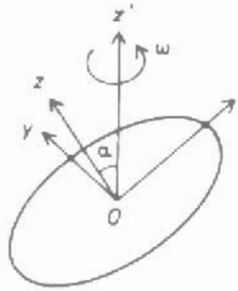
Một đĩa đồng chất mỏng, bán kính a và khối lượng m, quay tự do trên ổ trục không ma sát với vận tốc góc đều ω quanh một trục đứng yên thẳng đứng đi qua tâm của nó, và nghiêng một góc α với trục đối xứng của đĩa. Độ lớn và hướng của momen xoắn và độ lớn của lực tổng hợp tác động giữa trục và đĩa bằng bao nhiêu?

(*Columbia*)

Lời giải:

Lấy hệ tọa độ $Oxyz$ gắn với đĩa với gốc tọa độ tại tâm O của nó, trục z dọc theo pháp tuyến của đĩa, và trục x nằm trong mặt phẳng của trục z và trục quay z', như hình 1.142. Các trục x, y và z là các trục chính của đĩa với các momen quán tính chính

$$I_x = \frac{1}{4}ma^2, \qquad I_y = \frac{1}{4}ma^2, \qquad I_z = \frac{1}{2}ma^2 .$$



Hình 1.142

Momen xung lượng quanh O là

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}ma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega\sin\alpha \\ 0 \\ \omega\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}ma^2(\omega\sin\alpha\,\mathbf{e}_x + 2\omega\cos\alpha\,\mathbf{e}_z)\ .$$

Vì thế momen xoắn là

$$\mathbf{M} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{fixed}} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{rot}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$$

$$= (\omega\sin\alpha\mathbf{e}_x + \omega\cos\alpha\mathbf{e}_z) \times \frac{1}{4}ma^2\omega(\sin\alpha\mathbf{e}_x + 2\cos\alpha\mathbf{e}_z)$$

$$= -\frac{1}{4}ma^2\omega\sin\alpha\cos\alpha\mathbf{e}_y\ .$$

Momen xoắn nằm trong mặt phẳng của đĩa và vuông góc với mặt phẳng được tạo bởi pháp tuyến của đĩa và trục quay. Nó quay cùng với đĩa. Do tâm khối của đĩa đứng yên, lực tổng hợp trên đĩa bằng 0.

1176

Một mặt trăng khối lượng m chuyển động với vận tốc góc ω quanh một hành tinh khối lượng M. Giả sử $m \ll M$. Sự quay của mặt trăng có thể bỏ qua nhưng hành tinh quay quanh trục của nó với vận tốc Ω. Trục quay của hành tinh vuông góc với mặt phẳng quỹ đạo. Coi $I =$ là momen quán tính của hành tinh quanh trục của nó và D = khoảng cách từ mặt trăng đến tâm của hành tinh.

(a) Tìm biểu thức đối với momen xung lượng toàn phần L của hệ thống quanh tâm khối của nó và biểu thức đối với năng lượng toàn phần E. Khử D từ cả hai biểu thức này.

(b) Nói chung 2 vận tốc góc ω và Ω là không bằng nhau. Giả sử có một cơ chế như là sự ma sát thủy triều có thể giảm làm E nếu $\omega \neq \Omega$, nhưng bảo toàn momen xung lượng. Bằng cách khảo sát biểu diễn của E như là một hàm của ω, chỉ ra rằng có một khoảng các điều kiện ban đầu sao cho cuối cùng $\omega = \Omega$ và ta thu được cấu hình ổn định cuối cùng.

Các ví dụ nổi tiếng của hiệu ứng này xảy ra trong các quỹ đạo của các mặt trăng của sao Thủy và sao Kim. (Tuy nhiên, chính thiên thể nhẹ hơn (hay sao Thủy) mới có sự quay liên quan tới những ví dụ này).

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Vì $M \gg m$, vị trí của hành tinh có thể được xem là đứng yên trong không gian. Momen xung lượng toàn phần quanh tâm khối và năng lượng toàn phần của hệ mặt trăng và hành tinh khi đó là

$$L = I\Omega + mD^2\omega \, ,$$

$$E = \frac{1}{2}I\Omega^2 + \frac{1}{2}mD^2\omega^2 - \frac{GMm}{D} \, .$$

Xét lực hút hấp dẫn giữa hai vật chúng ta có

$$\frac{GMm}{D^2} = mD\omega^2 \, ,$$

hay

$$D = \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Thay biểu thức này vào phương trình trên ta có

$$L = I\Omega + m\left(\frac{G^2M^2}{\omega}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$E = \frac{1}{2}I\Omega^2 - \frac{m}{2}(GM\omega)^{\frac{2}{3}} \, . \quad (1)$$

(b) Vì momen xung lượng phải là bảo toàn, $dL = 0$, cho ta

$$\frac{d\Omega}{d\omega} = \frac{mD^2}{3I} .$$

Để cấu hình là ổn định, năng lượng tương ứng phải là nhỏ nhất. Lấy vi phân (1) chúng ta có

$$\begin{aligned} dE &= I\Omega d\Omega - \frac{m}{3}(GM)^{\frac{3}{2}}\omega^{-\frac{1}{3}}d\omega \\ &= \frac{mD^2}{3}(\Omega - \omega)d\omega , \\ \frac{d^2E}{d\omega^2} &= \frac{2mD}{3}(\Omega - \omega)\frac{dD}{d\omega} + \frac{mD^2}{3}\left(\frac{d\Omega}{d\omega} - 1\right) \\ &= \frac{mD^2}{9}\left(\frac{mD^2}{I} + 1 - \frac{4\Omega}{\omega}\right) . \end{aligned}$$

Vì thế để cấu hình ổn định, chúng ta cần

$$\Omega \approx \omega ,$$

và hơn nữa

$$\frac{mD^2}{I} + 1 > \frac{4\Omega}{\omega} .$$

Điều kiện cuối cùng có thể được thỏa mãn bởi một dãy các điều kiện ban đầu.

1177

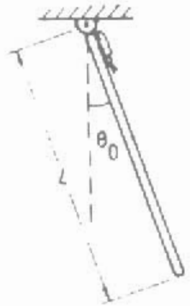
Một con lắc bao gồm một thanh cứng đồng chất độ dài L, khối lượng M, một con rệp khối lượng $M/3$ có thể bò dọc cái thanh. Thanh đó quay quanh một đầu và lắc trong mặt phẳng thẳng đứng. Ban đầu, con rệp ở điểm chốt của thanh mà thanh lại đứng yên ở một góc θ_0 ($\theta_0 \ll 1$ rad) so với chiều đứng như hình 1.143, và được thả ra. Với $t > 0$ con rệp bò chậm với vận tốc không đổi V dọc theo cái thanh hướng tới điểm cuối của thanh.

(a) Tìm tần số dao động ω của con lắc khi con rệp bò được một khoảng l dọc theo thanh.

(b) Tìm biên độ quay đu đưa của con lắc khi con rệp bò tới điểm cuối cùng của thanh ($l = L$).

(c) Con rệp phải bò chậm thế nào để câu trả lời của bạn trong câu (a) và (b) là hợp lý?

(*Wisconsin*)



Hình 1.143

Lời giải:

(a) Khi con rệp bò được khoảng cách l, momen quán tính của thanh và con rệp quanh chốt quay là

$$I = \frac{1}{3}ML^2 + \frac{1}{3}Ml^2 = \frac{1}{3}M(L^2 + l^2) .$$

Phương trình chuyển động của con lắc là

$$\frac{d}{dt}(I\dot{\theta}) = -Mg\frac{L}{2}\sin\theta - \frac{1}{3}Mgl\sin\theta ,$$

hay

$$\frac{1}{3}M(L^2 + l^2)\ddot{\theta} + \frac{2}{3}Ml\dot{l}\dot{\theta} = -Mg\sin\theta\left(\frac{L}{2} + \frac{l}{3}\right) .$$

Với các dao động nhỏ nó trở thành

$$\ddot{\theta} + \frac{2l\dot{l}\dot{\theta}}{L^2 + l^2} + \frac{g(l + \frac{3L}{2})\theta}{L^2 + l^2} = 0 .$$

Nếu con rệp bò quá chậm thì sự thay đổi l trong một chu kì của dao động là không đáng kể, nghĩa là $\dot{l} = v \ll l\omega$, chúng ta có thể bỏ qua số hạng thứ hai của phương trình và viết lại

$$\ddot{\theta} + \frac{g(2l + 3L)}{2(L^2 + l^2)}\theta = 0$$

Do đó tần số góc ω của dao động là

$$\omega = \sqrt{\frac{g(2l+3L)}{2(L^2+l^2)}}\,.$$

(b) Xét chuyển động của con rệp dọc thanh,

$$\frac{M}{3}(\ddot{l} - l\dot{\theta}^2) = \frac{Mg\cos\theta}{3} - f\,,$$

trong đó f là lực của thanh tác động lên con rệp. Khi con rệp bò với tốc độ không đổi, $\ddot{l} = 0$. Ngoài ra đối với các dao động nhỏ, $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$. Phương trình trên cho ta

$$f = \frac{Mg}{3} - \frac{Mg}{6}\theta^2 + \frac{Ml\dot{\theta}^2}{3}\,.$$

Công thực hiện bởi f khi con rệp bò được một khoảng dl khi đó là

$$dW = -f dl = -\frac{Mg}{3}dl + \frac{M}{3}\left(\frac{g\theta^2}{2} - l\dot{\theta}^2\right)dl\,,$$

công này được trữ lại như năng lượng của hệ thống. Số hạng đầu của vế phải là độ biến thiên thế năng của con rệp, trong khi số hạng thứ hai là độ biến thiên năng lượng dao động E của hệ thống,

$$dE = \frac{M}{3}\left(\frac{g\theta^2}{2} - l\dot{\theta}^2\right)dl\,.$$

Dưới điều kiện $\dot{l} \ll l\omega$, l hầu như không thay đổi trong một chu kì của dao động và có thể xem như là một hằng số. Đối với mỗi l, khi chúng ta xem xét một chu kì đầy đủ, các đại lượng động trong phương trình trên có thể được thay thế bằng các giá trị trung bình của chúng

$$dE = \frac{M}{3}\left(\frac{g\overline{\theta^2}}{2} - l\overline{\dot{\theta}^2}\right)dl\,.$$

Bây giờ, trong các dao động điều hòa đơn giản thế năng và động năng về trung bình bằng nhau, chính vì thế

$$\overline{T} = \frac{1}{2}\cdot\frac{M}{3}(L^2+l^2)\overline{\dot{\theta}^2} = \frac{E}{2}\,,$$

$$\overline{V} = \frac{MgL}{2}(1 - \overline{\cos\theta}) + \frac{Mgl}{3}(1 - \overline{\cos\theta})$$

$$= \frac{Mg}{2}\left(\frac{L}{2} + \frac{l}{3}\right)\overline{\theta^2} = \frac{E}{2}\,;$$

hoặc

$$\overline{\dot{\theta}^2} = \frac{3E}{M(L^2 + l^2)} .$$

$$\overline{\theta^2} = \frac{6E}{Mg(3L + 2l)} .$$

Thay thế những giá trị này vào phương trình năng lượng chúng ta có

$$\frac{dE}{E} = \left(\frac{1}{3L + 2l} - \frac{l}{L^2 + l^2} \right) dl ,$$

Hoặc

$$\ln E = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{3L + 2l}{L^2 + l^2} \right) + K ,$$

trong đó K là hằng số. Ban đầu, $l = 0$, $E = E_0$, nghĩa là

$$\ln E_0 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{3}{L} \right) + K ,$$

và như vậy chúng ta có

$$\ln \frac{E}{E_0} = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(3L + 2l)L}{3(L^2 + l^2)} \right] .$$

Khi $l = L$,

$$\ln \frac{E}{E_0} = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{6} ,$$

nghĩa là

$$E = \sqrt{\frac{5}{6}} E_0 .$$

θ bằng biên độ khi $\dot{\theta} = 0$ nghĩa là $T = 0$ và $E = V$. Khi $l = L$, biên độ $\theta_{\max}$ được cho bởi

$$\frac{1}{2} Mg \left(\frac{L}{2} + \frac{L}{3} \right) \theta_{\max}^2 = E .$$

Khi $l = 0$, chúng ta có

$$\frac{1}{2} Mg \cdot \frac{L}{2} \theta_0^2 = E_0 .$$

Khi đó vì $E = \sqrt{\frac{5}{6}} E_0$, các biểu thức trên cho ta

$$\theta_{\max} = \left(\frac{3}{10} \right)^{\frac{1}{4}} \theta_0 .$$

(c) Chúng ta loại bỏ vận tốc xuyên tâm của con bọ khi so sánh với vận tốc tiếp tuyến $\dot{l} \ll l\omega$. Đây là điều kiện để cho những trả lời trên là hợp lý.

1178

Một thanh đồng chất khối lượng m và độ dài l có đầu ở dưới được điều khiển lên xuống theo một tín hiệu điều khiển hình sin như trong hình 1.144, với biên độ là A và tần số góc ω. Thực tế là với các lựa chọn thích hợp của các thông số m, l, A và ω, con lắc sẽ trải qua các dao động quanh vị trí không bền tĩnh $\theta = 0$. (Chuyển động được hạn chế trong mặt phẳng của sơ đồ.)

(a) Liệt kê tất cả các thành phần của tất cả các lực trên thanh.

(b) Momen xung lượng góc của thanh có được bảo toàn?

(c) Xung lượng dài tuyến tính của thanh có được bảo toàn?

(d) Năng lượng của thanh có được bảo toàn?

(e) Tìm các thành phần gia tốc của tâm khối như là các hàm của thời gian được biểu diễn theo $\theta(t)$.

(f) Viết ra phương trình chuyển động góc của thanh theo các lực tác động lên nó.

(g) Dùng (c) và (f) để tìm một phương trình chuyển động cho $\theta(t)$.

KHÔNG YÊU CẦU BẠN GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG NÀY, NHƯNG LÀM SÁNG TỎ NÓ:

(h) Định tính, loại chuyển động được dự đoán là gì khi $A = 0$?

(i) Về mặt vật lý, các dao động xung quanh vị trí thẳng góc có thể xảy ra thì như thế nào?

(Gợi ý: Bạn nghĩ về tần số của chuyển động θ liên hệ với ω như thế nào?)

(*Wisconsin*)

Lời giải:

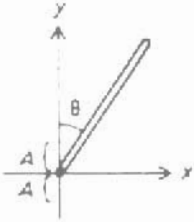
(a) Các lực trên thanh là trọng lực mg, các thành phần f_x, f_y của lực f gây ra bởi chốt quay chuyển động.

(b) Momen xung lượng của thanh không được bảo toàn.

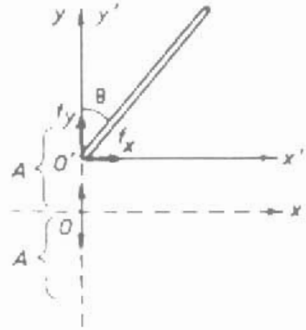
(c) Xung lượng dài của thanh không được bảo toàn.

(d) Năng lượng của thanh không được bảo toàn.

(e) Dùng một hệ tọa độ chuyển động $O'x'y'$ như hình 1.145 với các trục song song với các trục tương ứng của hệ tọa độ cố định Oxy, và gốc O' di



Hình 1.144



Hình 1.145

chuyển dọc trục y sao cho vectơ bán kính của nó từ O là

$$\mathbf{r}_0 = A\cos\omega t\mathbf{j}\ .$$

Khi đó vectơ bán kính của tâm khối của thanh là

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{l}{2}\sin\theta\mathbf{i} + \frac{l}{2}\cos\theta\mathbf{j}$$

$$= \frac{l}{2}\sin\theta\mathbf{i} + \left(A\cos\omega t + \frac{l}{2}\cos\theta\right)\mathbf{j}\ ,$$

từ đó

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{l}{2}\dot\theta\cos\theta\mathbf{i} - \left(A\omega\sin\omega t + \frac{l}{2}\dot\theta\sin\theta\right)\mathbf{j}\ ,$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{l}{2}(\ddot\theta\cos\theta - \dot\theta^2\sin\theta)\mathbf{i} - \left(A\omega^2\cos\omega t + \frac{l}{2}\ddot\theta\sin\theta + \frac{l}{2}\dot\theta^2\cos\theta\right)\mathbf{j}\ .$$

Phương trình cuối cho ta các thành phần gia tốc tâm khối x và y.

(f) (g) Xem x', y' là các tọa độ tâm khối của thanh trong hệ toạ độ chuyển động. Khi đó

$$x = x', \qquad y = y' + A\cos\omega t\ ,$$

và do đó

$$\ddot x = \ddot x', \qquad \ddot y = \ddot y' - A\omega^2\cos\omega t\ .$$

Định luật II Newton cho ta

$$m\ddot x' = m\ddot x = f_x\ ,$$

$$m\ddot y' = m\ddot y + mA\omega^2\cos\omega t = f_y + mA\omega^2\cos\omega t\ .$$

Như vậy để vậy áp dụng định luật II Newton trong hệ toạ độ chuyển động, ta phải thêm vào một tưởng tượng lực $mA\omega^2 \cos\omega t \mathbf{j}'$.

Xét sự quay của thanh trong hệ toạ độ chuyển động quanh gốc O'. Chúng ta có

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} = mg \cdot \frac{l}{2}\sin\theta - mA\omega^2\cos\omega t \cdot \frac{l}{2}\sin\theta ,$$

hay

$$\ddot{\theta} = \frac{3}{2l}(g - A\omega^2\cos\omega t)\sin\theta .$$

(h) Nếu $A = 0$, chuyển động chỉ là sự quay của một thanh dưới tác động của trọng lực, không có sự khác nhau giữa các hệ toạ độ chuyển động và cố định.

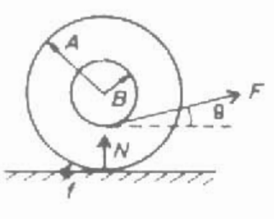
(i) Giả sử thanh dao động quanh vị trí thẳng đứng $\theta = 0$. Khi đó $\theta \approx 0$ và phương trình của chuyển động góc trở thành

$$\ddot{\theta} + \frac{3}{2l}(A\omega^2\cos\omega t - g)\theta = 0 .$$

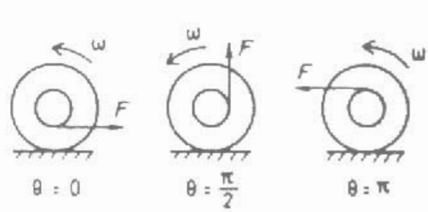
Như vậy, nếu $A \neq 0$ momen xoắn của lực tưởng tượng thỉnh thoảng tác động như là momen xoắn hồi phục. Với một khoảng thời gian nào đó chúng ta có thể có $A\omega^2\cos\omega t - g > 0$ và các dao động xung quanh vị trí thẳng đứng có thể xảy ra.

1179

Một cái Yo – Yo (cái giật lăn của trẻ em) khối lượng M nằm trên một cái bàn nằm ngang nhẵn như hình 1.146. Momen quán tính quanh tâm có thể xem như là $\frac{1}{2}MA^2$. Một sợi dây được kéo với một lực F từ bán kính bên trong B như được chỉ ra như hình 1.147. (a) Theo hướng nào cái Yo – Yo sẽ lăn nếu



Hình 1.146



Hình 1.147

$\theta = 0, \pi/2, \pi$?

(b) Với giá trị nào của θ Yo – Yo sẽ trượt mà không phụ thuộc độ thô ráp (hệ số ma sát) của bàn hoặc do độ lớn của lực F?

(c) Ở góc θ nào Yo-Yo sẽ lăn, không phụ thuộc vào độ nhẵn của bàn?

(*Columbia*)

Lời giải:

Giả sử Yo – Yo đứng yên trước khi chịu tác dụng một lực F.

(a) Vì không có ma sát tác động lên Yo–Yo, hướng lăn chỉ được xác định bằng hướng momen xoắn của lực F tác động lên tâm của nó. Hướng lăn được chỉ ra trong hình 1.147, với $\theta = 0$, $\pi/2$ hay π.

(b) Ma sát tác động lên Yo – Yo là $f = \mu N$, trong đó N là phản lực theo pháp tuyến của bàn, như hình 1.146. Yo – Yo sẽ trượt mà không lăn nếu

$$FB = \mu NA .$$

Gia tốc a của tâm khối Yo – Yo được cho bởi công thức

$$F\cos\theta - \mu N = Ma .$$

Như vậy

$$\cos\theta = \frac{Ma}{F} + \frac{B}{A} .$$

Nếu điều kiện này được thỏa mãn, θ độc lập với μ. Nó vẫn phụ thuộc vào F trừ khi $a = 0$, nghĩa là không chuyển động.

(c) Coi gia tốc tâm khối của Yo – Yo và gia tốc góc của nó quanh tâm tương ứng là a và α. Chúng ta có (hình 1.146).

$$F\cos\theta - f = Ma ,$$

$$fA - FB = \frac{1}{2}MA^2\alpha .$$

Với trường hợp lăn mà không trượt, $a = -A\alpha$. Khử α và a cho ta

$$f = \frac{2F}{A}\left(B - \frac{1}{2}A\cos\theta\right) .$$

Khi

$$f \le \mu N = \mu(Mg - F = \sin\theta) ,$$

Để Yo – Yo để lăn mà không trượt bất chấp độ nhẵn của cái bàn, nghĩa là độc lập với μ, chúng ta cần

$$\sin\theta = \frac{Mg}{F}, \qquad \cos\theta = \frac{2B}{A} ,$$

hoặc

$$\text{tg}\theta = \frac{A}{2B}\frac{Mg}{F} .$$

Như vậy chúng ta đòi hỏi, trước hết $2B < A$, $Mg < F$. Sau đó có thể có hai giá trị của θ, một dương và một âm với cùng $|\sin\theta|$.

1180

Một quả bowling mật độ đồng nhất được ném dọc một đường kì với vận tốc ban đầu v_0 theo cách sao cho ban đầu nó trượt mà không lăn. Quả bowling có khối lượng m, hệ số ma sát tĩnh là μ_s và hệ số ma sát trượt là μ_d với sàn. Bỏ qua ảnh hưởng của ma sát không khí.

Tính vận tốc của quả bóng khi nó bắt đầu lăn mà không trượt.

(*Princeton*)

Lời giải:

Khi quả bowling trượt mà không lăn ma sát $f = \mu_d mg$ nó tạo ra một gia tốc

$$a = -\frac{f}{m} = -\mu_d g .$$

Momen của f tạo ra một gia tốc góc α cho bởi

$$fR = \frac{2}{5}MR^2\alpha ,$$

vì quả bowling có một momen quán tính $\frac{2}{5}mR^2$ quanh một trục qua tâm của nó, R là bán kính của nó. Giả sử tại thời điểm t quả bowling lăn mà không trượt. Chúng ta cần

$$R\alpha t = v_0 + at ,$$

cho ta

$$t = \frac{v_0}{R\alpha - a} = \frac{2mv_0}{7f} = \frac{2v_0}{7\mu_d g} .$$

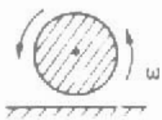
Vận tốc của quả bowling khi điều đó xảy ra là

$$v = v_0 + at = v_0 - \mu_d gt = \frac{5}{7}v_0 .$$

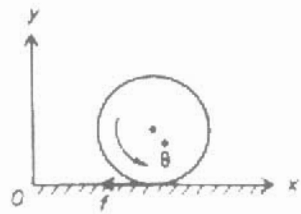
1181

Một đồng xu quay quanh trục đối xứng của nó với tần số góc ω được đặt lên trên một bề mặt nằm ngang (hình 1.148). Sau khi nó ngừng trượt, với vận tốc nào nó sẽ lăn ra xa?

(*Wisconsin*)



Hình 1.148



Hình 1.149

Lời giải:

Lấy các trục tọa độ như hình 1.149. Trước khi đồng xu dừng trượt, lực ma sát là $f = \mu mg$, trong đó μ là hệ số ma sát trượt. Coi x_c là tọa độ x của tâm khối đồng xu. Các phương trình chuyển động của đồng xu trước khi nó dừng trượt là

$$m\ddot{x}_c = -\mu mg \, ,$$
$$I\ddot{\theta} = -\mu mgR \, ,$$

trong đó m và R tương ứng là khối lượng và bán kinh của đồng xu. Và $I = \frac{1}{2}mR^2$. Tích phân 2 vế và dùng các điều kiện ban đầu $\dot{x}_c = 0$, $\dot{\theta} = \omega$ tại $t = 0$, chúng ta có

$$\dot{x}_c = -\mu gt \, ,$$
$$\dot{\theta} = \omega - \frac{2\mu gt}{R} \, .$$

Khi đồng xu lăn mà không trượt, chúng ta có

$$\dot{x}_c = -\dot{\theta}R \, .$$

Giả sử điều này xảy ra tại thời điểm t, thì phương trình ở phía trên cho

$$-\mu gt = -\omega R + 2\mu gt$$

Hay

$$t = \frac{\omega R}{3\mu g} \, .$$

Tại thời điểm này, vận tốc tâm khối của đồng xu là

$$\dot{x}_c = -\mu g t = -\frac{1}{3}\omega R ,$$

đó là vận tốc với mà với nó đồng xu sẽ lăn ra xa mà không trượt.

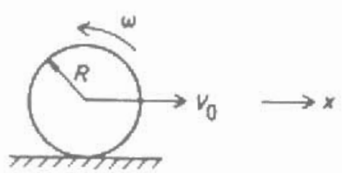
1182

Một bánh xe khối lượng M bán kính R được phóng ra dọc theo bề mặt nằm ngang với vận tốc dài ban đầu V_0 và vận tốc góc ban đầu là ω_0 như được chỉ ra ở hình 1.150, do đó nó bắt đầu trượt dọc theo bề mặt (ω_0 có khuynh hướng tạo ra sự lăn theo hướng ngược với V_0). Cho hệ số ma sát giữa bánh xe và bề mặt là μ.

(a) Bánh xe sẽ trượt thêm bao lâu nữa?

(b) Vận tốc ở khối tâm của bánh xe tại thời điểm nó ngừng trượt bằng bao nhiêu?

(*Columbia*)



Hình 1.150

Lời giải:

(a) Chọn chiều dương của trục x hướng sang phía phải và vận tốc góc $\dot{\theta}$ là dương khi bánh xe quay theo chiều kim đồng hồ. Giả sử rằng bánh xe có momen quán tính $\frac{1}{2}MR^2$ quanh trục quay. Chúng ta có 2 phương trình của chuyển động

$$M\ddot{x} = -\mu M g ,$$

$$\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} = \mu M g R .$$

Sử dụng điều kiện ban đầu $\dot{x}_c = V_0$, $\dot{\theta}_c = -\omega_0$ ở thời điểm $t = 0$ ta có các phương trình sau bằng cách lấy tích phân

$$\dot{x} = V_0 - \mu g t \ ,$$

$$\dot{\theta} = -\omega_0 + \frac{2\mu g t}{R} \ .$$

Chọn T là thời điểm khi vật dừng trượt. Ta có ở T

$$\dot{x} = R\dot{\theta} \ ,$$

hoặc

$$V_0 - \mu g T = -R\omega_0 + 2\mu g T \ ,$$

bằng phép biến đổi ta thu được

$$T = \frac{V_0 + R\omega_0}{3\mu g} \ .$$

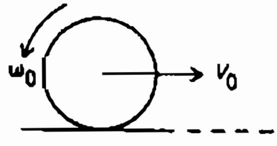
(b) Vận tốc ở khối tâm của bánh xe ở thời điểm khi nó trượt là

$$\dot{x} = V_0 - \mu g T = \frac{1}{3}(2V_0 - R\omega_0) \ .$$

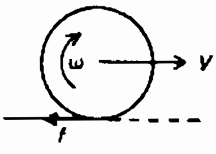
1183

Một vật hình trụ rỗng, mỏng có bán kính R và khối lượng M trượt trên sàn không ma sát với vận tốc V_0. Ở thời điểm ban đầu vật hình trụ đang quay tròn về phía sau với vận tốc góc $\omega_0 = 2V_0/R$ như được biểu diễn trên hình 1.151. Vật trụ lăn qua 1 khu vực ghồ ghề và tiếp tục chuyển động theo một đường thẳng. Do ma sát, cuối cùng vật lăn tròn. Vậy vận tốc cuối cùng $\mathbf{V}_f$ bằng bao nhiêu?

(*MIT*)



Hình 1.151



Hình 1.152

Lời giải:

Giả sử vật hình trụ đi vào khu vực có ma sát tại thời điểm $t = 0$ và nó bắt đầu lăn mà không trượt tại thời điểm $t = t_0$. Tại thời điểm $0 < t < t_0$ các phương trình chuyển động của vật hình trụ là (hình 1.152)

$$-f = M\frac{dV}{dt} .$$

$$fR = I\frac{d\omega}{dt}$$

với $I = MR^2$. Tích phân phương trình ta được

$$M(V_f - V_0) = -\int_0^{t_0} f dt ,$$

hay

$$I[\omega_f - (-\omega_0)] = R\int_0^{t_0} f dt ,$$

thế 2 phương trình vào nhau ta được

$$I(\omega_f + \omega_0) = MR(V_0 - V_f) .$$

Vật hình trụ lăn mà không trượt ở thời điểm $t = t_0$, khi $V_f = \omega_f R$. Chúng ta cũng được cho $\omega_0 R = 2V_0$. Phương trình cuối cùng khi đó cho

$$V_f = -\frac{1}{2}V_0 .$$

Từ phương trình ta thấy cuối cùng vật hình trụ sẽ chuyển động giật lùi với vận tốc $\frac{1}{2}V_0$.

1184

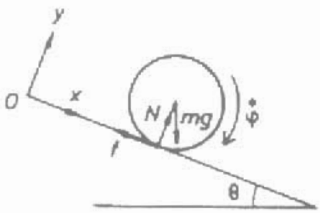
Tính hệ số ma sát tối thiểu để một chiếc nhẫn hình tròn mảnh không bị trượt trong quá trình lăn xuống trên 1 mặt nghiêng 1 góc θ so với mặt phẳng nằm ngang.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Sử dụng hệ trục tọa độ như hình 1.153 và viết các phương trình chuyển động của chiếc nhẫn

$$m\ddot{x} = mg\sin\theta - f, \qquad I\ddot{\varphi} = fR ,$$



Hình 1.153

ở đây m và R lần lượt là khối lượng và bán kính của chiếc nhẫn, $I = mR^2$ là momen quán tính của chiếc nhẫn quanh trục đối xứng của nó và f là ma sát tĩnh của chiếc nhẫn. Thay các biểu thức vào ta rút ra được

$$\ddot{x} + R\ddot{\varphi} = g\sin\theta \,.$$

Điều kiện để không trượt là $R\dot{\varphi} = \dot{x}$, hoặc $R\ddot{\varphi} = \ddot{x}$, ta rút ra

$$\ddot{x} = \frac{1}{2} g\sin\theta \,.$$

Từ đó

$$f = mg\sin\theta - m\ddot{x} = \frac{1}{2} mg\sin\theta \,.$$

Phản lực pháp tuyến của mặt nghiêng là $N = mg\cos\theta$, và để chiếc nhẫn không bị trượt ta cần $f < \mu N$, hoặc

$$\frac{1}{2} mg\sin\theta < \mu mg\cos\theta \,,$$

nghĩa là

$$\frac{1}{2}\mathrm{tg}\theta < \mu \,.$$

Do đó hệ số ma sát tối thiểu để giữ cho chiếc nhẫn không bị trượt trên mặt nghiêng là $\mu = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\theta$.

1185

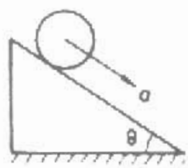
Một vật rắn hình trụ đều có khối lượng m, bán kính R được đặt trên một mặt phẳng nghiêng 1 góc θ so với mặt phẳng nằm ngang, hình 1.154. Chọn g là gia tốc thông thường gây ra bởi trọng lực và a là gia tốc dọc theo mặt nghiêng của trục hình trụ. Hệ số ma sát giữa hình trụ và mặt phẳng là μ.

Cho θ nhỏ hơn góc tới hạn θ_c nào đó, hình trụ sẽ lăn xuống trên mặt phẳng nghiêng mà không bị trượt.

(a) Góc tới hạn θ_c bằng bao nhiêu?

(b) Đối với $\theta < \theta_c$, thì gia tốc a bằng bao nhiêu?

(*CUSPEA*)



Hình 1.154

Lời giải:

Chọn f là lực ma sát và α là gia tốc góc đối với trục của hình trụ. Các phương trình chuyển động là

$$mg\sin\theta - f = ma\ ,$$
$$fR = I\alpha\ ,$$

với

$$I = \frac{1}{2}MR^2\ .$$

(a) Nếu không có sự trượt chúng ta cần $a = R\alpha$, $f < \mu N$, ở đây N, phản lực pháp tuyến của mặt phẳng nghiêng, bằng $mg\cos\theta$. Các phương trình chuyển động cho

$$f = \frac{1}{3}mg\sin\theta\ .$$

Do đó chúng ta cần

$$\mu mg\cos\theta > \frac{1}{3}mg\sin\theta\ ,$$

hoặc

$$3\mu > \mathrm{tg}\theta\ .$$

giả sử $\mathrm{tg}\theta_c = 3\mu$. Khi đó để vật không trượt chúng ta cần $\mathrm{tg}\theta < \mathrm{tg}\theta_c$. Do đó góc tới hạn sẽ là $\theta_c = \mathrm{arctg}3\mu$.

(b) Đối với $\theta < \theta_c$, vật trụ lăn không bị trượt và từ trên ta có

$$a = g\sin\theta - \frac{f}{m} = \frac{2}{3}g\sin\theta\ .$$

1186

Một bánh xe bán kính r, khối lượng m, và momen quán tính $I = mR^2$ bị kéo dọc theo một bề mặt nằm ngang bằng cách tác dụng một lực theo phương ngang **F** để tháo dây cuốn trên trục của bánh xe có bán kính b như ở hình 1.155. Bạn có thể giả thiết rằng có lực ma sát giữa bánh xe và bề mặt và bánh xe không bị trượt trong quá trình lăn. Trong biểu thức $I = mR^2$ đại lượng R là một hằng số với thứ nguyên là độ dài.

(a) Hãy tính gia tốc tuyến tính của bánh xe.

(b) Tính lực ma sát tác động lên bánh xe.

(*Wisconsin*)

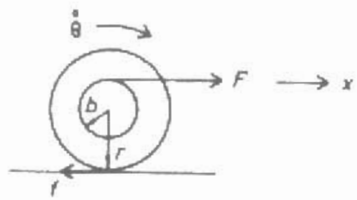
Lời giải:

Giả sử x là độ dịch chuyển khối tâm của bánh xe dọc theo phương ngang và θ là độ dịch chuyển góc của bánh xe so với phương ban đầu qua khối tâm của nó.

(a) Các phương trình chuyển động của bánh xe là (hình 1.155)

$$m\ddot{x} = F - f ,$$

$$I\ddot{\theta} = Fb + fr .$$



Hình 1.155

Ràng buộc để không có sự trượt là $\dot{x} = r\dot{\theta}$ hoặc $\ddot{x} = r\ddot{\theta}$. Do đó

$$\frac{mR^2}{r}\ddot{x} = Fb + (F - m\ddot{x})r ,$$

hay

$$\ddot{x} = \frac{F(b + r)r}{m(R^2 + r^2)} ,$$

nó là gia tốc tuyến tính của bánh xe.

(b) Lực ma sát là

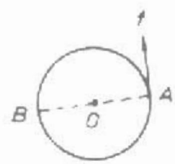
$$f = F - m\ddot{x}$$

$$= F\left[1 - \frac{(b+r)r}{R^2+r^2}\right] = \frac{F(R^2 - br)}{R^2+r^2} .$$

1187

Một chiếc đĩa dẹt có khối lượng $m = 1,8$ kg và bán kính $r = 0,2$ m nằm trên một mặt bàn nằm ngang không ma sát. Một sợi dây cuốn quanh bề mặt hình trụ của đĩa tác dụng một lực 3N theo phương bắc (hình 1.156). Tìm gia tốc a của khối tâm (độ lớn và hướng) và gia tốc góc α đối với khối tâm. Có thể cho $a = r\alpha$ được không? Hãy giải thích.

(*Wisconsin*)



Hình 1.156

Lời giải:

Các phương trình của chuyển động là

$$f = ma ,$$
$$fr = I\alpha ,$$

Trong đó $I = mr^2/2$, ta rút ra

$$a = \frac{f}{m} = 1,7 \text{ m/s} ,$$

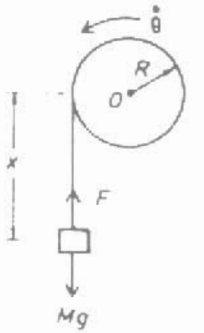
$$\alpha = \frac{2f}{mr} = 17 \text{ rad/s} .$$

Phương của a là giống với phương của f. Ta thấy rằng $a \neq \alpha r$. Điều này là do chiếc đĩa nằm trên bề mặt phẳng của nó, hai chuyển động là không liên quan với nhau cho dù chúng được gây ra bởi cùng một lực.

1188

Một bánh xe bán kính R và momen quán tính I được lắp trên một 1 trục không ma sát tại O. Một sợi dây mềm, không trọng lượng được cuốn lên vành của bánh xe và trên sợi dây treo một vật có khối lượng M bắt đầu chuyển động xuống phía dưới, được mô tả như trên hình 1.157. Hãy tính lực căng của sợi dây?

(*Wisconsin*)



Hình 1.157

Lời giải:

Giả sử F là lực căng của sợi dây, x là vị trí khối tâm của vật thể như chỉ ra trên và θ là vận tốc góc của vật thể, hình 1.157. Chúng ta có các phương trình sau

$$I\ddot{\theta} = FR\,,$$

$$M\ddot{x} = Mg - F\,,$$

$$\ddot{x} = R\ddot{\theta}\,,$$

thay thế và biến đổi ta được

$$F = \frac{MgI}{I + MR^2}\,.$$

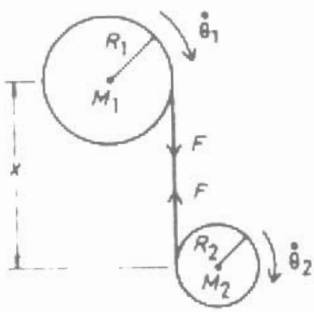
1189

Hai chiếc đĩa đồng chất trong mặt phẳng thẳng đứng có các khối lượng M_1 và M_2 với bán kính tương ứng là R_1 và R_2. Có một sợi chỉ dây cuốn quanh chu vi hai đĩa này và chúng được nối với nhau như hình 1.158.

Chiếc đĩa đầu tiên có trục quay nằm ngang không ma sát cố định đi qua tâm của nó. Hãy thiết lập các phương trình để xác định gia tốc của khối tâm của chiếc đĩa thứ 2 nếu nó rơi tự do.

(Không cần giải phương trình).

(*Wisconsin*)



Hình 1.158

Lời giải:

Giả sử F là lực căng của sợi dây, x_1 là khoảng cách giữa khối tâm của đĩa 1 và đĩa 2, $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$ là vận tốc góc tương ứng của các đĩa này, như ở hình 1.158. Chúng ta có các phương trình chuyển động

$$M_2\ddot{x} = M_2g - F \ ,$$

$$I_1\ddot{\theta}_1 = FR_1 \ ,$$

$$I_2\ddot{\theta}_2 = FR_2 \ ,$$

ở đây $I_1 = m_1R_1^2/2$, $I_2 = m_2R_2^2/2$. Chúng ta cũng có ràng buộc

$$\dot{x} = R_1\dot{\theta}_1 + R_2\dot{\theta}_2 \ ,$$

hoặc

$$\ddot{x} = R_1\ddot{\theta}_1 + R_2\dot{\theta}_2 \ .$$

Vậy từ bốn phương trình trên chúng ta có thể tìm ra được các ẩn số $\ddot{\theta}_1$, $\ddot{\theta}_2$, $\ddot{x}$ và F.

1190

Một chiếc Yo - Yo có khối lượng M được làm từ 2 chiếc đĩa lớn có bán kính R độ dày là t, giữa chúng là một trục có độ dài t và bán kính r. Giả thiết mật độ của chúng là đồng nhất. Hãy tìm lực căng của sợi dây không khối lượng gắn trên trục nối này khi chiếc Yo - Yo hạ xuống dưới tác dụng của trọng lực.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Giả sử mật độ của chiếc Yo - Yo là ρ, khi đó momen quán tính và khối lượng của nó tương ứng là

$$I = 2 \cdot \frac{1}{2}\pi t\rho R^4 + \frac{1}{2}\pi t\rho r^4 ,$$

$$M = 2\pi t\rho R^2 + \pi t\rho r^2 ,$$

do đó

$$I = \frac{1}{2}M\left(\frac{2R^4 + r^4}{2R^2 + r^2}\right) .$$

Các phương trình chuyển động của chiếc Yo - Yo sẽ là

$$M\ddot{x} = Mg - F ,$$

$$I\ddot{\theta} = Fr ,$$

ở đây F là lực căng của sợi dây. Chúng ta cũng có ràng buộc $\ddot{x} = r\ddot{\theta}$. Từ các phương trình ở trên ta thu được

$$F = \frac{IMg}{I + Mr^2} = \frac{(2R^4 + r^4)Mg}{2R^4 + 4R^2r^2 + 3r^4} .$$

1191

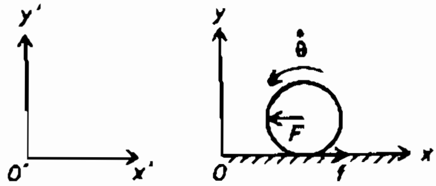
Một hình cầu có khối lượng M và bán kính R ($I = \frac{2}{5}MR^2$) đặt trên sàn của một toa xe. Toa xe bắt đầu chuyển động từ trạng thái nằm yên và có gia tốc không đổi là A. Giả thiết rằng quả cầu này lăn không trượt. Hãy tìm gia tốc của khối tâm của quả cầu so với toa xe.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Giả sử Oxy và $O'x'y'$ tương ứng là các hệ trục tọa độ gắn vào toa xe và cố định không gian với các trục x và x' dọc theo phương nằm ngang, như hình 1.159. Coi đoạn $\overline{O'O} = \xi$, chúng ta có đối với khối tâm của hình cầu

$$x' = x + \xi, \qquad \text{hoặc} \qquad \ddot{x}' = \ddot{x} + \ddot{\xi} .$$



Hình 1.159

Vì lực tác dụng lên khối cầu là lực ma sát f, theo định luật II Newton ta có, viết A thay cho $\ddot{\xi}$,

$$f = M\ddot{x}' = M\ddot{x} + MA\,,$$

hoặc

$$M\ddot{x} = f - MA\,.$$

Như vậy trong hệ trục tọa độ chuyển động có 1 lực tưởng tượng $F = -MA$ tác động lên hình cầu qua khối tâm, ngoài lực ma sát f. Xét momen xoắn đối với khối tâm chúng ta có

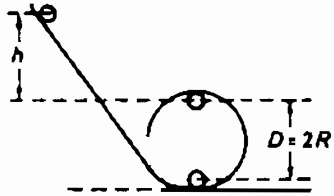
$$I\ddot{\theta} = fR$$

với $I = \frac{2}{5}MR^2$. Để khi lăn khối cầu không trượt chúng ta có điều kiện, $\dot{x} = -R\dot{\theta}$, hay $\ddot{x} = -R\ddot{\theta}$. Từ 3 phương trình ta rút ra $\ddot{x} = -\frac{5}{7}A$, đây chính là gia tốc của khối tâm hình cầu so với toa xe.

1192

Quan sát hình 1.160, hãy tìm độ cao tối thiểu h (so với đỉnh của chiếc vành tròn) để một quả bóng hình cầu có bán kính r (lăn mà không trượt) duy trì tiếp xúc liên tục với đường ray của chiếc vành tròn này. (Momen quán tính đối với tâm của quả cầu là $\frac{2}{5}mr^2$.)

(*Wisconsin*)



Hình 1.160

Lời giải:

Sự bảo toàn cơ năng đòi hỏi rằng động năng của quả cầu ở vị trí đỉnh của vành tròn là bằng độ giảm mgh trong thế năng khi quả bóng rơi từ vị trí ban đầu tới vị trí này. Động năng của quả cầu gồm 2 phần: động năng tịnh tiến và động năng quay của quả cầu đối với khối tâm của nó. Giả sử m, T, v, ω tương ứng là khối lượng, động năng, vận tốc của khối tâm và vận tốc góc đối với khối tâm của hình cầu. Khi đó

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

với $I = \frac{2}{5}mr^2$. Vì quả cầu lăn không trượt , $v = \omega r$ và

$$T = \frac{1}{2}\left(mv^2 + \frac{2}{5}mr^2\frac{v^2}{r^2}\right) = \frac{7}{10}mv^2 .$$

Trong trường hợp tới hạn, lực tác dụng bởi vành tròn lên quả cầu là bằng không khi quả cầu lên tới đỉnh của vành tròn. Nói cách khác, lực hướng tâm cần cho chuyển động tròn của quả cầu được cung cấp toàn bộ bởi trọng lực

$$\frac{mv^2}{R} = mg ,$$

từ đó $v^2 = Rg$ và

$$T = \frac{7}{10}mRg = mgh .$$

Do đó $h = 7R/10$ là độ cao tối thiểu cần thiết.

1193

Một quả cầu bán kính b nằm yên như $\theta = 0$ ở trên một quả cầu cố định bán kính $a > b$. Quả cầu bên trên hơi di chuyển để lăn dưới tác động của trọng lực, như hình 1.161. Hệ số ma sát tĩnh là $\mu_s > 0$, hệ số ma sát trượt là $\mu = 0$.

(a) Mô tả vắn tắt và giải thích trình tự các chuyển động liên tục của hình cầu từ lăn, trượt và tách ra.

(b) Viết phương trình ràng buộc cho chuyển động lăn thuần túy của quả cầu phía trên, trên quả cầu dưới.

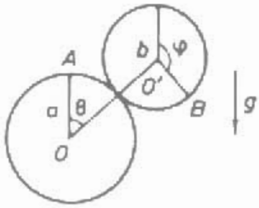
(c) Viết phương trình chuyển động theo $\ddot{\theta}$ và θ khi quả cầu lăn không trượt.

(d) Tìm phương trình liên hệ giữa $\dot{\theta}$ và θ.

(e) Giải phương trình đó tìm $\theta(t)$, với giả thiết $0 < \theta(0) \ll \theta(t)$. Bạn có thể sử dụng hệ thức sau

$$\int \frac{dx}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = 2\ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{4}\right) .$$

(*MIT*)



Hình 1.161

Lời giải:

(a) Lúc đầu quả cầu phía trên lăn không trượt, vận tốc góc trở nên lớn hơn và áp lực pháp tuyến lên nó nhỏ hơn với góc θ tăng dần. Khi điều kiện cho chuyển động lăn thuần túy không được thỏa mãn thì quả cầu bắt đầu trượt và cuối cùng khi lực hướng tâm không đủ lớn để giữ được chuyển động tròn của quả cầu phía trên thì nó sẽ tách ra khỏi quả cầu bên dưới.

(b) Giả thiết ban đầu O, A, O', B ở trên cùng đường thẳng đứng. Khi quả cầu bên trên lăn được một góc φ, thì tâm của nó dịch chuyển được một đoạn $\overline{OO'}\theta$, như biểu diễn trên hình 1.161. Do đó điều kiện cho chuyển động lăn thuần túy là

$$(a+b)\theta = b\varphi .$$

(c) Các phương trình chuyển động của quả cầu bên trên là

$$m(a+b)\ddot{\theta} = mg\sin\theta - f,$$

$$I\ddot{\varphi} = \frac{2}{5}mb^2\ddot{\varphi} = fb ,$$

ở đây f là hệ số ma sát tĩnh của quả cầu. Khi quả cầu lăn không trượt thì từ câu (b) ta có

$$(a+b)\ddot{\theta} = b\ddot{\varphi} .$$

Khi đó các phương trình của chuyển động cho

$$\ddot{\theta} = \frac{5g\sin\theta}{7(a+b)} .$$

(d) Bởi vì

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} ,$$

phương trình cuối cùng cho

$$\dot{\theta}^2 = -\frac{10g\cos\theta}{7(a+b)} + K .$$

Với $\dot{\theta} = 0$ tại $\theta = 0$, $K = \frac{10g}{7(a+b)}$. Do đó

$$\dot{\theta}^2 = \frac{10g(1-\cos\theta)}{7(a+b)} .$$

(e) Vì

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{10g(1-\cos\theta)}{7(a+b)}} = \sqrt{\frac{20g}{7(a+b)}}\sin\frac{\theta}{2} ,$$

chúng ta có, với $\theta_0 = \theta(0)$ tại $t = 0$,

$$\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} = \sqrt{\frac{20g}{7(a+b)}}\int_0^t dt$$

hoặc

$$\ln\left(\frac{\mathrm{tg}\frac{\theta}{4}}{\mathrm{tg}\frac{\theta_0}{4}}\right) = \alpha t ,$$

trong đó $\alpha = \sqrt{\frac{5g}{7(a+b)}}$. Do đó

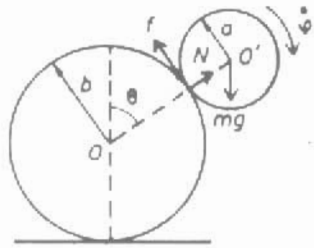
$$\theta = 4\mathrm{arctg}\left(e^{\alpha t}\mathrm{tg}\frac{\theta_0}{4}\right) ,$$

công thức đúng cho phần chuyển động khối cầu lăn mà không trượt.

1194

Một khối cầu có khối lượng m, bán kính a và momen quán tính $\frac{2}{5}ma^2$. Khối cầu lăn không trượt từ vị trí ban đầu của nó nằm yên ở đỉnh của một hình trụ cố định có bán kính b (mô tả trên hình 1.162).

(a) Xác định góc $\theta_{\max}$ để tại đó hình cầu rời khỏi hình trụ.



Hình 1.162

(b) Xác định các thành phần vận tốc của tâm khối cầu tại thời điểm nó vừa rời khỏi hình trụ?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Các lực tác dụng lên khối cầu được trình bày trên hình 1.162. Các phương trình chuyển động đối với khối tâm của hình cầu là

$$m(a+b)\ddot{\theta} = mg\sin\theta - f\ , \tag{1}$$

$$m(a+b)\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - N\ , \tag{2}$$

và phương trình cho sự quay của khối cầu là

$$\frac{2}{5}ma^2\ddot{\varphi} = fa\ . \tag{3}$$

Điều kiện để khối cầu lăn không trượt là

$$(a+b)\dot{\theta} = a\dot{\varphi}. \qquad \text{hoặc} \qquad (a+b)\ddot{\theta} = a\ddot{\varphi}\ . \tag{4}$$

Từ (3) và (4) ta tìm được

$$f = \frac{2}{5}m(a+b)\ddot{\theta}\ .$$

Thay nó vào phương trình (1) ta có

$$\ddot{\theta} = \frac{5g\sin\theta}{7(a+b)}\ .$$

Vì $\theta = \dot{\theta} = 0$ ở $t = 0$ và $\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta}$, nên ta có

$$\dot{\theta}^2 = \frac{10g(1-\cos\theta)}{7(a+b)}\ .$$

Thay nó vào (2) ta có

$$N = mg\cos\theta - \frac{10}{7}mg(1-\cos\theta) = mg\left(\frac{17\cos\theta}{7} - \frac{10}{7}\right) .$$

Sau khi khối cầu rời hình trụ, $N = 0$. Ta giả thiết rằng hệ số ma sát là đủ lớn để khoảng thời gian khối cầu vừa lăn vừa trượt trên hình trụ trước khi khối rời hình trụ là không đáng kể. Khi đó ở thời điểm N trở nên bằng không, $\theta = \theta_{\max}$ sẽ được cho bởi

$$\cos\theta_{\max} = \frac{10}{17} .$$

(b) Ở thời điểm khối cầu bắt đầu rời khỏi hình trụ vận tốc của tâm của khối cầu có độ lớn

$$v = (a+b)\dot{\theta} = \sqrt{\frac{10}{17}g(a+b)} ,$$

và vận tốc đó song song với hướng tiếp tuyến của hình trụ ở điểm mà $\theta = \theta_{\max}$.

1195

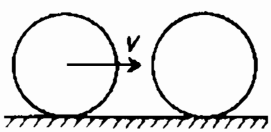
Trong hình 1.163, quả bóng bên phía trái lăn không trượt theo chiều ngang với vận tốc V về phía một quả bóng giống nó ban đầu ở trạng thái nghỉ. Hai quả bóng có dạng cầu đồng chất, khối lượng M. Giả sử rằng toàn bộ lực ma sát là đủ nhỏ để có thể bỏ qua trong khi va chạm và va chạm tức thời là đàn hồi lý tưởng, hãy tính:

(a) Vận tốc của từng quả bóng một thời gian đủ dài sau va chạm khi từng quả bóng lại lăn mà không trượt.

(b) Tỉ lệ năng lượng ban đầu bị chuyển thành nhiệt năng do lực ma sát.

Momen quán tính của khối cầu có khối lượng M, bán kính R đối với tâm của nó là $\frac{2}{5}MR^2$.

(*CUSPEA*)



Hình 1.163

Lời giải:

(a) Trước va chạm

$$V_1 = V, \qquad V_2 = 0, \qquad \omega_1 = \frac{V}{R}, \qquad \omega_2 = 0 .$$

Trong quá trình va chạm, vì ma sát có thể được bỏ qua, các lực tác động qua lại giữa các quả bóng là trực tiếp qua tâm sao cho momen xung lượng đối với tâm của mỗi quả bóng được bảo toàn. Như vậy

$$\omega_1' = \omega_1, \qquad \omega_2' = 0 .$$

Vì va chạm là đàn hồi, nên sự bảo toàn của xung lượng tịnh tiến và động năng khi đó đòi hỏi

$$V_1' = 0, \qquad V_2' = V_1 = V .$$

Theo trên, ta dùng một dấu phẩy để biểu diễn những đại lượng tức thì sau va chạm. Sau đó một thời gian những quả bóng lại lăn mà không trượt. Những đại lượng ở thời điểm này được biểu diễn bằng hai dấu phẩy. Chiều dương của những lượng đại này được mô tả trên hình 1.164

Momen xung lượng của mỗi quả bóng đối với một điểm cố định nào đó trong mặt phẳng chuyển động là được bảo toàn. Hãy xét momen xung lượng của từng quả bóng đối với điểm tiếp xúc với mặt phẳng nằm ngang.

Với quả bóng 1,

$$MRV_1' + I\omega_1' = MRV_1'' + I\omega_1'' ,$$

hoặc

$$\frac{IV}{R} = \left(MR + \frac{I}{R}\right) V_1'' ,$$

từ đó sinh ra

$$V_1'' = \frac{V}{\frac{MR^2}{I} + 1} = \frac{2}{7} V .$$

Với quả bóng 2

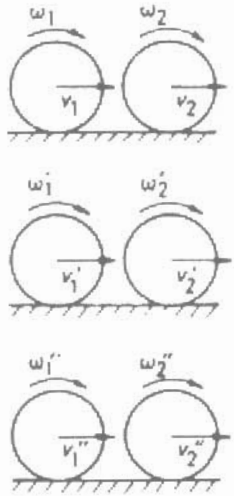
$$MRV_2' + I\omega_2' = MRV_2'' + I\omega_2'' ,$$

hoặc

$$MRV = \left(MR + \frac{I}{R}\right) V_2'' ,$$

từ đó sinh ra

$$V_2'' = \frac{V}{1 + \frac{I}{MR^2}} = \frac{5}{7} V .$$



Hình 1.164

(b) Năng lượng ban đầu và năng lượng cuối cùng của hệ là

$$W_i = \frac{1}{2}MV_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2 = \frac{1}{2}\left(MV^2 + \frac{2}{5}MR^2 \cdot \frac{V^2}{R^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}MV^2 \cdot \frac{7}{5} .$$

$$W_f = \frac{1}{2}M(V_1''^2 + V_2''^2) + \frac{1}{2}I(\omega_1''^2 + \omega_2''^2)$$

$$= \frac{1}{2}M\left[V_1''^2 + V_2''^2 + \frac{2}{5}(V_1''^2 + V_2''^2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}MV^2 \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{29}{49} .$$

Do đó năng lượng mất mát là

$$W_i - W_f = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5}MV^2 \cdot \frac{20}{49} ,$$

và tỉ lệ mất mát là $\frac{20}{49}$.

1196

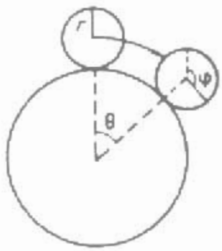
Một quả cầu đồng chất có khối lượng m và bán kính r lăn không trượt trên bề mặt bên ngoài của một quả cầu lớn hơn đứng yên có bán kính R như ở hình 1.165. Gọi θ là góc cực của quả cầu con đối với hệ trục tọa độ với gốc được đặt ở tâm của quả cầu lớn, với trục z là trục thẳng đứng. Quả cầu nhỏ bắt đầu lăn từ vị trí đỉnh của quả cầu lớn ($\theta = 0$).

(a) Tính vận tốc ở tâm của quả cầu nhỏ như là hàm của θ.

(b) Tính góc mà tại đó quả cầu nhỏ rời khỏi quả cầu lớn .

(c) Nếu bây giờ cho phép trượt với một hệ số ma sát là μ, thì ở điểm nào quả cầu nhỏ sẽ bắt đầu trượt?

(Columbia)



Hình 1.165

Lời giải:

(a) Khi quả cầu nhỏ lăn không trượt, tổng động năng và thế năng của nó là một hằng số của chuyển động, chúng ta có

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\cdot\dot{\varphi}^2 + mg(R+r)\cos\theta = mg(R+r)$$

với $v = r\dot{\varphi} = (R+r)\dot{\theta}$, do đó

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{10}{7}\frac{(1-\cos\theta)g}{(R+r)}}\,.$$

Vận tốc ở tâm của quả cầu nhỏ là

$$v = (R+r)\dot{\theta} = \sqrt{\frac{10}{7}(R+r)(1-\cos\theta)g}\,.$$

(b) Tại thời điểm quả cầu nhỏ rời khỏi quả cầu lớn thì lực giá đỡ lên quả cầu nhỏ $N = 0$. Từ phương trình lực

$$mg\cos\theta - N = \frac{mv^2}{R+r}\,,$$

ta tìm được góc θ_c mà tại đó quả cầu nhỏ rời khỏi quả cầu lớn được cho bởi

$$\cos\theta_c = \frac{10}{17} .$$

Như vậy

$$\theta_c = \arccos\left(\frac{10}{17}\right) .$$

Lưu ý rằng sự rút ra này chỉ áp dụng cho hệ số ma sát đủ lớn.

(c) Khi quả cầu nhỏ lăn không trượt chúng ta có

$$mg\sin\theta - f = m\dot{v} ,$$

$$fr = \frac{2}{5}mr^2\ddot{\varphi} ,$$

$$v = (R+r)\dot{\theta} = r\dot{\varphi} ,$$

ở đây f là lực ma sát trên quả cầu. Từ đó chúng ta tìm được

$$f = \frac{2}{7}mg\sin\theta .$$

Tại thời điểm khi quả cầu nhỏ bắt đầu trượt thì lực ma sát là

$$f = \mu N ,$$

tức là

$$\frac{2}{7}mg\sin\theta = \mu\left(mg\cos\theta - \frac{mv^2}{R+r}\right) .$$

Khi đó, sử dụng biểu thức của v trong câu (a) chúng ta có

$$2\sin\theta = 17\mu\cos\theta - 10\mu .$$

Giải phương trình này ta thấy rằng góc θ_s mà ở đó quả cầu nhỏ bắt đầu trượt được cho bởi công thức

$$\cos\theta_s = \frac{170\mu^2 \pm \sqrt{756\mu^2+4}}{289\mu^2+4} .$$

Tuy nhiên, chúng ta cần $\theta_c > \theta_s$, hoặc là $\cos\theta_s > \cos\theta_c$. Ở đây với giá trị của μ có thể làm thỏa mãn điều đó, nói chung chúng ta phải lấy dấu trên. Do đó

$$\theta_s = \arccos\left(\frac{170\mu^2 + \sqrt{756\mu^2+4}}{289\mu^2+4}\right) .$$

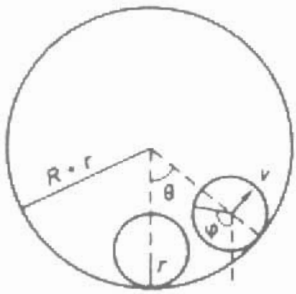
1197

Một quả bóng hình cầu bán kính r ở bên trong một vòng tròn thẳng đứng có bán kính $(R + r)$ như ở hình 1.166. Xem xét hai trường hợp, (i) lăn không trượt và (ii) trượt không ma sát mà không lăn.

(a) Trong mỗi trường hợp thì vận tốc tối thiểu v_1 của quả cầu tại đáy vòng tròn phải bằng bao nhiêu để nó không rơi tại vị trí đỉnh của vòng tròn?

(b) Trong trường hợp trượt và với v_1 nhỏ hơn 10%, thì tại vị trí nào trên vòng tròn bắt đầu xảy ra sự rơi?

(Columbia)



Hình 1.166

Lời giải:

(a) Với trường hợp lăn không trượt, $R\theta = r\varphi$. Từ đó

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{R\dot{\theta}}{r} = \frac{v}{r},$$

ở đây v là vận tốc của tâm quả bóng. Với mục đích để quả bóng không rơi ở đỉnh của vòng tròn thì lực N_t mà vòng tròn tác dụng lên quả bóng ở đỉnh phải bằng

$$N_t = \frac{mv^2}{R} - mg \geq 0 .$$

Như vậy chúng ta cần

$$v^2 \geq Rg .$$

Vận tốc nhỏ nhất v_t thỏa mãn điều kiện như thế là $v_t^2 = Rg$ và động năng tương ứng là

$$T_t = \frac{1}{2}mv_t^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\cdot\omega^2 = \frac{7}{10}mv_t^2 .$$

Ở đáy của vòng tròn, nếu quả bóng có vận tốc cần thiết nhỏ nhất v_1, chúng ta có

$$T_b = T_t + V_t \ ,$$

nghĩa là

$$\frac{7}{10} m v_1^2 = \frac{7}{10} m v_t^2 + 2mRg \ ,$$

từ đó cho bởi

$$v_1^2 = v_t^2 + \frac{20}{7} Rg = \frac{27}{7} Rg \ ,$$

hoặc

$$v_1 = \sqrt{\frac{27}{7} Rg} \ .$$

(ii) Với trường hợp trượt không lăn, tại đỉnh của vòng tròn chúng ta vẫn cần có $v^2 \geq Rg$, nghĩa là vận tốc nhỏ nhất ở đỉnh được cho bởi

$$v_t^2 = Rg \ ,$$

và động năng tương ứng là

$$T_t = \frac{1}{2} m v_t^2 \ .$$

Như vậy chúng ta có

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_t^2 + 2mgR \ ,$$

cho bởi

$$v_1^2 = 5Rg \ ,$$

hoặc

$$v_1 = \sqrt{5Rg} \ .$$

(b) Giả sử quá trình rơi bắt đầu tại θ. Ở thời điểm đó vận tốc v của tâm quả bóng được cho bởi

$$\frac{1}{2} m (0,9 v_1)^2 = \frac{1}{2} m v^2 + mg(R - R\cos\theta) \ ,$$

và

$$N - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R}$$

với

$$N = 0 .$$

Từ những phương trình trên rút ra

$$3Rg\cos\theta = 2Rg - 0,81v_1^2 = -2,05Rg ,$$

nghĩa là

$$\cos\theta = -0.683 ,$$

hoặc

$$\theta = 133,1^\circ .$$

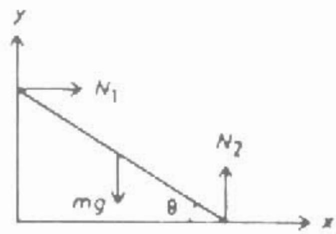
1198

Một tấm ván đồng chất có độ dài là $2a$ được giữ tạm thời sao cho một đầu tựa lên một bức tường thẳng đứng, không ma sát và đầu kia tựa lên mặt sàn nằm ngang không ma sát tạo thành một góc $\theta = \theta_0$. Khi tấm ván được thả ra nó sẽ trượt xuống dưới do tác dụng của trường lực.

(a) Tìm biểu thức cho thời gian để tấm ván trượt xuống tới một góc mới θ. Bạn có thể dùng tích phân.

(b) Tìm giá trị của góc θ khi đầu trên của tấm ván rời khỏi tường.

(*Columbia*)



Hình 1.167

Lời giải:

(a) Vì không có ma sát cơ năng của hệ được bảo toàn, do đó ta có

$$\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ma^2\dot{\theta}^2 + mga\sin\theta = mga\sin\theta_0 ,$$

nghĩa là

$$\frac{2}{3}a\dot{\theta}^2 = g(\sin\theta_0 - \sin\theta) \tag{1}$$

hoặc

$$\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{3g}{2a}(\sin\theta_0 - \sin\theta)}\ .$$

Chú ý rằng hệ số $\frac{1}{3}ma^2$ là momen quán tính của tấm ván đối với trục nằm ngang đi qua khối tâm của nó và dấu âm phải được sử dụng cho $\dot{\theta}$ vì θ giảm khi t tăng.

Như vậy

$$t = \int_0^t dt = -\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{3g}{2a}(\sin\theta_0 - \sin\theta)}}\ .$$

(b) Chọn hệ tọa độ như trên hình 1.167. Khối tâm của tấm ván có tọa độ nằm ngang

$$x = a\cos\theta\ .$$

Như vậy

$$\ddot{x} = -a(\dot{\theta}^2\cos\theta + \ddot{\theta}\sin\theta)\ .$$

Các lực tác dụng lên tấm ván được mô tả trên hình 1.167. Ngay tại thời điểm tấm ván thôi tựa vào tường, ta có $N_1 = m\ddot{x} = 0$, nghĩa là

$$\dot{\theta}^2\cos\theta = -\ddot{\theta}\sin\theta\ .$$

Lấy vi phân phương trình (1) chúng ta có

$$\ddot{\theta} = -\frac{3g}{4a}\cos\theta\ .$$

Thay giá trị này và (1) vào phương trình ở trên ta có

$$\sin\theta = 2(\sin\theta_0 - \sin\theta)\ ,$$

hoặc

$$\sin\theta = \frac{2}{3}\sin\theta_0\ ,$$

nghĩa là

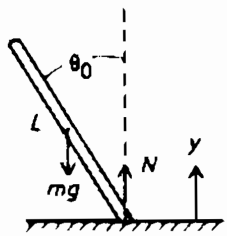
$$\theta = \arcsin\left(\frac{2}{3}\sin\theta_0\right)\ ,$$

giá trị θ này chính là góc khi mà đầu trên tấm ván bắt đầu rời khỏi tường.

1199

Một chiếc gậy nhỏ đồng chất có khối lượng m, đầu dưới của nó tựa trên một bàn không ma sát. Người ta thả nó tại vị trí ban đầu nghiêng 1 góc θ_0 so với phương thẳng đứng, hình 1.168. Hãy tìm lực tác dụng bởi bàn tại thời điểm rất nhỏ ngay sau khi chiếc gậy được thả ra.

(*UC, Berkeley*)



Hình 1.168

Lời giải:

Khi không có lực ma sát thì chỉ có hai lực tác dụng lên chiếc gậy, đó là phản lực của mặt bàn N và trọng lực mg như ở hình 1.168. Trong khoảng thời gian vô cùng ngắn ngay sau khi thả chiếc gậy, các phương trình chuyển động là

$$N - mg = m\ddot{y} ,$$

$$\frac{1}{2}NL\sin\theta_0 = \frac{1}{12}mL^2\ddot{\theta} ,$$

ở đây y là trục thẳng đứng của khối tâm và $\frac{1}{12}mL^2$ là momen quán tính xung quanh trục nằm ngang qua khối tâm của chiếc gậy. Khi đó

$$y = \frac{1}{2}L\cos\theta,$$

$$\ddot{y} = -\frac{1}{2}L(\dot{\theta}^2\cos\theta + \ddot{\theta}\sin\theta) = -\frac{1}{2}L\ddot{\theta}\sin\theta_0 ,$$

với điều kiện ban đầu

$$\dot{\theta} = 0, \qquad \theta = \theta_0 .$$

Do đó

$$\begin{aligned} N &= mg + m\ddot{y} \\ &= mg - \frac{1}{2}mL\ddot{\theta}\sin\theta_0 \\ &= mg - 3N\sin^2\theta_0 \, , \end{aligned}$$

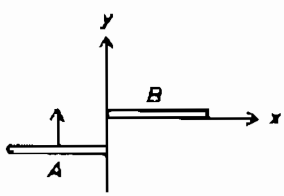
hoặc

$$N = \frac{mg}{1 + 3\sin^2\theta_0} \, .$$

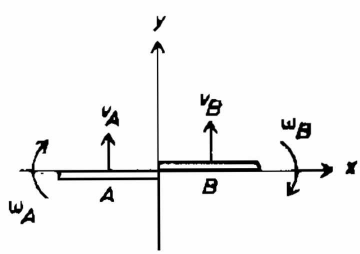
1200

Hai chiếc que đồng chất A và B dài 1 m có khối lượng tương ứng là 1 kg (A) và 2 kg (B). Chúng được đặt song song với nhau trên một mặt phẳng nằm ngang không ma sát (x, y). Vị trí ban đầu của que B là $y = 0$, $x = 0$ tới $x = 1$ m. Que A đang chuyển động với vận tốc 10 m/s theo chiều dương của trục y, và nó mở rộng từ $x = (-1 + \epsilon)$ m tới $x = \epsilon$ m, ($\epsilon \ll 1$ m) như mô tả trên hình 1.169. Que A đạt tới $y = 0$ tại thời điểm $t = 0$ và va chạm đàn hồi với B. Bỏ qua khả năng có những va chạm sau đó, hãy tìm chuyển động tiếp theo của các que A và B. Kiểm tra tính ngang bằng của năng lượng trước và sau va chạm.

(*Columbia*)



Hình 1.169



Hình 1.170

Lời giải:

Giả sử I là xung lượng do que A tác dụng lên que B trong quá trình va chạm. Phương của nó là phương chuyển động của A, nghĩa là chiều dương của trục y. Giả sử v_A, ω_A, v_B, ω_B, là các giá trị vận tốc của khối tâm và vận tốc góc quanh khối tâm tương ứng của que A và B, như hình 1.170. Biểu diễn khối lượng của A, B tương ứng là m_A, m_B, chúng ta có

$$-I = m_A(v_A - 10) ,$$

$$\frac{1}{2}I = \frac{1}{12}m_A\omega_A ,$$

$$I = m_B v_B ,$$

$$\frac{1}{2}I = \frac{1}{12}m_B\omega_B .$$

Điều kiện để có va chạm đàn hồi là vận tốc tương đối của các điểm va chạm giữ nguyên độ lớn nhưng đổi chiều

$$\left(v_B + \frac{1}{2}\omega_B\right) - \left(v_A - \frac{1}{2}\omega_A\right) = 10 .$$

Các phương trình trên cho ta

$$I = \frac{5m_A m_B}{m_A + m_B} = \frac{10}{3}\ \text{Ns} ,$$

$$v_A = 10 - \frac{I}{m_A} = \frac{20}{3}\ \text{m/s} ,$$

$$\omega_A = \frac{6I}{m_A} = 20\ \text{rad/s} ,$$

$$v_B = \frac{I}{m_B} = \frac{5}{3}\ \text{m/s} ,$$

$$\omega_B = \frac{6I}{m_B} = 10\ \text{rad/s}$$

đối với chuyển động kế tiếp. Năng lượng của hai chiếc que trước va chạm là

$$E_i = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^2 = 50\ \text{J}$$

và sau va chạm là

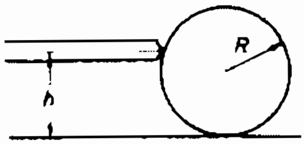
$$\begin{aligned} E_f &= \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12}m_A\omega_A^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12}m_B\omega_B^2 \\ &= \frac{225}{9} + \frac{300}{12} = 50\ \text{J} = E_i . \end{aligned}$$

Vậy ta thấy năng lượng trước và sau va chạm là bằng nhau.

1201

Một quả bóng bi a có bán kính R và khối lượng là M bị chọc bởi một chiếc gậy bi a ở độ cao h so với bàn bi a như ở hình 1.171. Cho momen quán tính của quả bóng bi a là $\frac{2}{5}MR^2$, hãy tìm độ cao h để ở đó quả bóng bị chọc lăn trên bàn mà không trượt.

(*Wisconsin*)



Hình 1.171

Lời giải:

Giả sử rằng f là lực va chạm do chiếc gậy bi a chọc vào quả bóng và lực đó tác dụng trong thời gian Δt gây nên độ thay đổi xung lượng của quả bóng là $M\Delta v$ và làm thay đổi xung lượng góc đối với khối tâm của quả bóng là $I\Delta\omega$. Chúng ta có các phương trình của chuyển động

$$M\Delta v = f\Delta t \, ,$$
$$I\Delta\omega = f(h - R)\Delta t$$

với $I = \frac{2}{5}MR^2$, từ đó ta có

$$\Delta v = \frac{2R^2\Delta\omega}{5(h-R)} \, .$$

Vì quả bóng ở vị trí nghỉ ban đầu nên vận tốc khối tâm của nó và vận tốc góc sau va chạm thỏa mãn

$$v = \frac{2R^2\omega}{5(h-R)} \, .$$

Quả bóng sẽ lăn không trượt nếu $v = R\omega$. Do đó chúng ta cần

$$5(h - R) = 2R \, ,$$

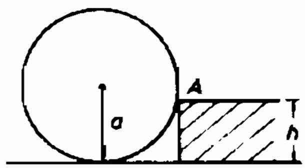
hoặc

$$h = \frac{7}{5}R \, .$$

1202

Một quả cầu rắn đồng chất có bán kính a lăn với vận tốc v trên một bề mặt bằng phẳng và va chạm không đàn hồi với một bậc có độ cao $h < a$ như ở hình 1.172. Hãy tìm vận tốc nhỏ nhất theo h và a để quả bóng có thể lăn qua bậc đó. Biết rằng không xảy ra sự trượt tại điểm va chạm và momen quán tính của một khối cầu rắn đối với trục đi qua tâm của nó là $\frac{2}{5}Ma^2$.

(*Wisconsin*)



Hình 1.172

Lời giải:

Giả sử ω và ω', J và J' là vận tốc góc của quả cầu đối với khối tâm của nó và xung lượng góc của nó quanh điểm va chạm A tương ứng với trước và sau quá trình va chạm với bậc. Ta có

$$J = mv(a-h) + \frac{2}{5}ma^2\omega = \frac{7}{5}mva - mvh$$

vì để quả cầu lăn không trượt thì $v = a\omega$, và

$$J' = \left(\frac{2}{5}ma^2 + ma^2\right)\omega' = \frac{7}{5}ma^2\omega'$$

vì khối tâm của quả cầu là đứng yên trong giây lát ngay sau khi va chạm. Sự bảo toàn của xung lượng góc đòi hỏi

$$\frac{7}{5}ma^2\omega' = \frac{7}{5}mva - mvh ,$$

từ đó cho

$$\omega' = \left(1 - \frac{5h}{7a}\right)\frac{v}{a} .$$

Với mục đích để khối cầu có thể vừa vượt đúng qua khỏi bậc thì động năng của nó phải đủ để lớn cung cấp cho quá trình tăng của thế năng

$$\frac{1}{2}J'\omega'^2 = mgh ,$$

ở đây $I' = \frac{2}{5}ma^2 + ma^2 = \frac{7}{5}ma^2$ là momen quán tính của khối cầu đối với trục nằm ngang đi qua A. Do đó vận tốc nhỏ nhất cần thiết được cho bởi

$$\frac{7}{10}ma^2\left(1 - \frac{5h}{7a}\right)^2\left(\frac{v}{a}\right)^2 = mgh\ ,$$

từ đó cho

$$v = \frac{a\sqrt{70gh}}{7a - 5h}\ .$$

1203

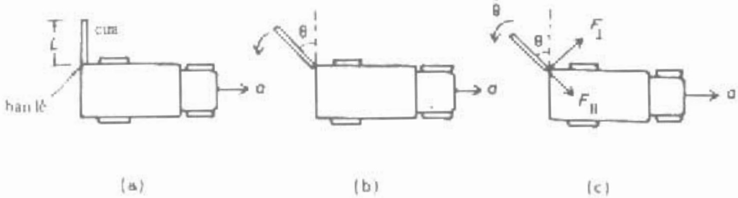
Một chiếc xe tải đang đỗ và cánh cửa sau của nó đang được mở rộng như vẽ trong hình chiếu phẳng ở hình 1.173(a). Tại thời điểm $t = 0$ chiếc xe bắt đầu gia tốc với gia tốc không đổi là a. Cánh cửa sau sẽ bắt đầu đóng lại và tại thời điểm t sau đó cánh cửa sẽ đi qua vị trí như hình 1.173(b). Tại đây cánh cửa sẽ tạo một góc θ so với phương ban đầu của nó. Bạn có thể giả thiết rằng cánh cửa có khối lượng m và được phân bố đều trên toàn bộ chiều dài L của nó.

(a) Sử dụng θ và các đạo hàm của nó theo thời gian để mô tả chuyển động, viết các phương trình động lực liên hệ hai thành phần lực tác dụng lên bản lề của cánh cửa $F_\perp$ và $F_\|$ với các đại lượng động học. $F_\|$ là thành phần lực song song và $F_\perp$ là thành phần lực vuông góc với cánh cửa.

(b) Biểu diễn $\ddot{\theta} = d^2\theta/dt^2$, $F_\|$ và $F_\perp$ theo các đại lượng θ, m, L và a.

(c) Hãy viết biểu thức cho tổng thời gian từ lúc xe bắt đầu gia tốc cho tới khi cánh cửa đóng lại, nhưng không cần lấy tích phân.

(MIT)



Hình 1.173

Lời giải:

(a) Trong hệ quy chiếu gắn với chiếc xe tải đang gia tốc, khối tâm của cánh cửa có các thành phần gia tốc $\frac{1}{2}L\ddot{\theta}$ vuông góc với cửa và $-\frac{1}{2}L\dot{\theta}^2$ song song với cánh cửa. Phương của $F_{\parallel}$ và $F_{\perp}$ được mô tả như trên hình 1.173 (c). Trong hệ quy chiếu này lực tưởng tượng $-ma$ tác dụng lên khối tâm được tính đến trong các phương trình chuyển động

$$F_{\perp} - ma\cos\theta = -\frac{1}{2}mL\ddot{\theta} ,$$

$$F_{\parallel} - ma\sin\theta = \frac{1}{2}mL\dot{\theta}^2 ,$$

$$\frac{1}{2}LF_{\perp} = \frac{1}{12}mL^2\ddot{\theta} ,$$

ở đây $\frac{1}{12}mL^2$ là momen quán tính của cửa xung quanh trục vuông góc với mép trên của cửa qua khối tâm.

(b) Từ phương trình trên rút ra

$$\ddot{\theta} = \frac{3a\cos\theta}{2L} ,$$

$$F_{\perp} = \frac{1}{4}ma\cos\theta .$$

Vì $\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta}$, lấy tích phân biểu thức của $\ddot{\theta}$ và lưu ý rằng ở thời điểm ban đầu $\theta = \dot{\theta} = 0$ chúng ta có

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3a\sin\theta}{L} ,$$

do đó

$$F_{\parallel} = ma\sin\theta + \frac{3}{2}ma\sin\theta = \frac{5}{2}ma\sin\theta .$$

(c) Vì

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{3a\sin\theta}{L}} ,$$

nên tổng thời gian từ lúc chiếc xe bắt đầu được gia tốc cho tới khi cánh cửa đóng lại là

$$t = \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{L}{3a\sin\theta}}\, d\theta .$$

1204

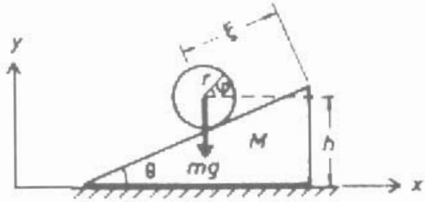
Một vật hình trụ rắn khối lượng m và bán kính r trượt xuống mà không lăn trên bề mặt nghiêng, nhẵn của một cái nêm khối lượng M, nêm có thể tự do chuyển động không ma sát trên mặt phẳng nằm ngang như hình 1.174.

(a) Vào thời gian hình trụ trượt xuống tới độ cao h thì cái nêm chuyển động được bao xa?

(b) Bây giờ giả sử vật hình trụ tự do lăn xuống, không trượt trên chiếc nêm. Trong trường hợp này nêm sẽ chuyển động được bao xa?

(c) Trong trường hợp nào thì vật hình trụ sẽ xuống tới đáy của cái nêm nhanh hơn? Điều này phụ thuộc như thế nào vào bán kính của vật hình trụ?

(UC, Berkeley)



Hình 1.174

Lời giải:

(a) Giả sử ξ là khoảng cách giữa khối tâm của hình trụ và vị trí ban đầu của nó. Trong một hệ tọa độ cố định, giả sử x là tọa độ nằm ngang của khối tâm của cái nêm. Thành phần vận tốc nằm ngang của vật hình trụ trong hệ quy chiếu này là $\dot{x} - \dot{\xi}\cos\theta$. Vì xung lượng toàn phần của hệ theo phương x được bảo toàn, nên từ trạng thái nghỉ ban đầu của hệ ta có,

$$M\dot{x} + m(\dot{x} - \dot{\xi}\cos\theta) = 0 ,$$

từ đó cho

$$(M + m)\dot{x} = m\dot{\xi}\cos\theta .$$

Chúng ta đặt $\xi = x = 0$ tại $t = 0$ mà không mất tính tổng quát. Tích phân phương trình trên chúng ta được

$$(M + m)x = m\xi\cos\theta .$$

Khi vật hình trụ trượt xuống tới độ cao h, nó đã dịch chuyển một khoảng cách $\xi = \frac{h}{\sin\theta}$, và cái nêm đã dịch chuyển được một khoảng

$$x = \frac{m\xi}{M + m}\cos\theta = \frac{mh}{M + m}\cot\theta .$$

(b) Nếu vật hình trụ được phép lăn, sự bảo toàn của thành phần nằm ngang của tổng xung lượng tuyến tính của hệ vẫn được giữ đúng. Điều này cho phép kết quả thu được ở câu (a) cũng đúng ở đây.

(c) Sự bảo toàn tổng cơ năng của hệ được giữ đúng trong cả hai trường hợp. Vì khối tâm của hình trụ có vận tốc $(\dot{x} - \dot{\xi}\cos\theta, -\dot{\xi}\sin\theta)$ và cái nêm có vận tốc $(\dot{x}, 0)$, chúng ta có đối với vật hình trụ trượt,

$$\frac{1}{2}m[(\dot{x} - \dot{\xi}\cos\theta)^2 + \dot{\xi}^2\sin^2\theta] + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 = mg\xi\sin\theta\ ,$$

và đối với hình trụ lăn,

$$\frac{1}{2}m[(\dot{x} - \dot{\xi}\cos\theta)^2 + \dot{\xi}^2\sin^2\theta] + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 = mg\xi\sin\theta$$

với $I = \frac{1}{2}mr^2$, $\dot{\varphi} = \frac{\dot{\xi}}{r}$ đối với vật lăn mà không trượt. Vì

$$\dot{x} = \left(\frac{m}{M+m}\right)\dot{\xi}\cos\theta\ ,$$

phương trình trên sẽ được rút gọn tương ứng là

$$\frac{m}{2(M+m)}(M + m\sin^2\theta)\dot{\xi}^2 = mg\xi\sin\theta\ ,$$

$$\frac{m}{4(M+m)}[3M + m(1 + 2\sin^2\theta)]\dot{\xi}^2 = mg\xi\sin\theta\ .$$

Các phương trình đó có dạng $\dot{\xi} = b\sqrt{\xi}$. Vì $\xi = 0$ tại thời điểm $t = 0$, nên lấy tích phân ta sẽ được $t = \frac{2}{b}\sqrt{\xi}$. Do đó đối với cùng $\xi = \frac{h}{\sin\theta}$, $t \propto \frac{1}{b}$. Vì

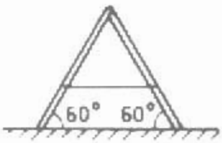
$$3M + m(1 + 2\sin^2\theta) - 2(M + m\sin^2\theta) = M + m > 0\ ,$$

nên vật hình trụ trượt sẽ xuống tới đáy của nêm nhanh hơn.

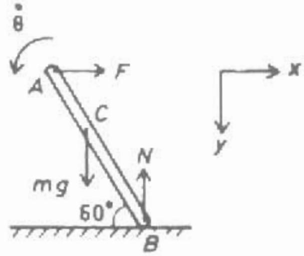
1205

Một chiếc thang xếp gồm hai chân được gắn với nhau bởi một khớp nối ở đỉnh và một sợi dây nằm ngang ở gần đáy. Thang được đặt trên một bề mặt nằm ngang và tạo với bề mặt một góc 60° như ở hình 1.175. Nếu sợi dây đột nhiên bị cắt thì gia tốc của khớp nối tại thời điểm đó là bao nhiêu? Biết rằng các chân là đồng đều, giống hệt nhau và bỏ qua tất cả các ma sát.

(*UC, Berkeley*)



Hình 1.175



Hình 1.176

Lời giải:

Xét khoảnh khắc khi sợi dây nằm ngang đột nhiên bị cắt.

Do tính đối xứng các lực của hai chân thang tác dụng lên nhau tại khớp nối A là nằm theo phương ngang và gia tốc $\mathbf{a}_A$ của điểm A là hướng thẳng xuống dưới.

Xét một chân của thang xếp. Các lực tác dụng lên nó được mô tả như hình 1.176. Giả sử l là độ dài của chân thang và gia tốc của khối tâm C tại thời điểm tức thời dây bị cắt là $\mathbf{a}_C$. Chúng ta có

$$mg - N = ma_{Cy} ,$$

$$F = ma_{Cx} ,$$

$$\frac{1}{2}Nl\cos 60° - \frac{1}{2}Fl\sin 60° = I\ddot\theta$$

với $I = \frac{1}{12}ml^2$, hoặc

$$N - \sqrt{3}F = \frac{1}{3}ml\ddot\theta .$$

Vận tốc của A tính theo vận tốc của C được cho bởi

$$\dot x_A = \dot x_C - \frac{1}{2}l\dot\theta\sin 60° , \qquad \dot y_A = \dot y_C + \frac{1}{2}l\dot\theta\cos 60° .$$

Do đó gia tốc $\mathbf{a}_A$, theo phương của y có các thành phần

$$0 = a_{Cx} - \frac{\sqrt{3}}{4}l\ddot\theta ,$$

$$a_A = a_{Cy} + \frac{1}{4}l\ddot\theta .$$

Bây giờ xem xét gia tốc $\mathbf{a}_B$ của điểm B. Ở thời điểm ngay khi sợi dây bị cắt nó chỉ có thành phần nằm ngang. Bởi vậy $a_{By} = 0$, nghĩa là

$$a_{Cy} - \frac{1}{2}l\ddot{\theta}\cos 60^\circ = a_{Cy} - \frac{1}{4}l\ddot{\theta} = 0 .$$

Từ các phương trình bên trên ta rút ra

$$a_{Cx} = \frac{\sqrt{3}}{4}l\ddot{\theta}, \qquad a_{Cy} = \frac{1}{4}l\ddot{\theta} .$$

Đưa những giá trị này vào các phương trình chuyển động của C ta tìm được

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{4l} ,$$

Kết quả này cho ta gia tốc của khớp nối là

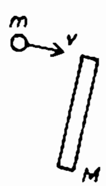
$$a_A = \frac{1}{2}l\ddot{\theta} = \frac{3}{8}g ,$$

gia tốc này hướng thẳng xuống dưới.

1206

Một hạt có khối lượng m và vận tốc v va chạm đàn hồi với đầu cuối của một thanh mảnh, đồng đều có khối lượng M như trên hình 1.177. Sau va chạm m dừng lại, hãy tính M.

(*MIT*)



Hình 1.177

Lời giải:

Giả sử v_c là vận tốc của khối tâm của thanh và ω là vận tốc góc của thanh quanh khối tâm của nó. Sự bảo toàn của xung lượng và năng lượng của hệ đó

cho ta

$$mv = Mv_c\ ,$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

với $I = \frac{1}{12}Ml^2$, với l là độ dài của thanh. Sự bảo toàn xung lượng góc của hệ xung quanh điểm cố định nằm tại tâm của thanh trước khi va chạm cho ta

$$\frac{1}{2}lmv = I\omega\ .$$

Thay các phương trình bên trên vào ta được

$$M = 4m\ .$$

1207

Một thanh hình trụ mảnh, đồng đều có độ dài L và khối lượng m được treo ở hai đầu bằng hai lò xo không khối lượng có hệ số đàn hồi k_1 và k_2. Ở cân bằng t thanh hình trụ nằm ngang như hình 1.178. Bạn được yêu cầu xét chuyển động biên độ nhỏ xung quanh vị trí cân bằng, trong trường hợp các lò xo chỉ có thể chuyển động theo phương thẳng.

(a) Đầu tiên xem xét trường hợp đặc biệt $k_1 = k_2$. Hãy tìm các tần số riêng của các kiểu dao động chuẩn tắc và mô tả các dao động chuẩn tắc tương ứng. Ở đây bạn có thể được hướng dẫn tốt bởi lập luận trực giác.

(b) Bây giờ ta xét trường hợp tổng quát khi hệ số đàn hồi k_1 và k_2 là không nhất thiết bằng nhau. Hãy tìm các tần số riêng của kiểu dao động chuẩn tắc.

(*Princeton*)

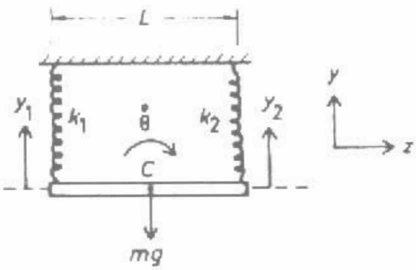
Lời giải:

(a) Giả sử y_1 và y_2 là các độ dịch chuyển thẳng đứng của hai đầu thanh so với vị trí cân bằng như ở hình 1.178. Bởi vì độ dịch chuyển của khối tâm C là $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$, phương trình của chuyển động tịnh tiến đó là

$$\frac{1}{2}m(\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) = -k_1y_1 - k_2y_2\ .$$

Đối với sự quay với biên độ nhỏ xung quanh khối tâm, chúng ta có

$$I\ddot{\theta} = -\frac{1}{2}L(k_1y_1 - k_2y_2)$$



Hình 1.178

với $I = \frac{1}{12}mL^2$, $\theta \approx \frac{y_1 - y_2}{L}$. Đối với $k_1 = k_2 = k$, các phương trình chuyển động quy về

$$\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 = -\frac{2k}{m}(y_1 + y_2)\,;$$

$$\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2 = -\frac{6k}{m}(y_1 - y_2)\,.$$

Từ đó tồn tại hai kiểu dao động chuẩn tắc

(i) *Kiểu dao động đối xứng*

$$y_s = y_1 + y_2$$

với tần số riêng $\omega_s = \sqrt{\frac{2k}{m}}$. Kiểu dao động này tương ứng với dao động điều hòa theo phương thẳng đứng của thanh xét như một khối.

(ii) *Kiểu dao động không đối xứng*

$$y_a = y_1 - y_2$$

với tần số riêng $\omega_a = \sqrt{\frac{6k}{m}}$. Kiểu dao động này tương ứng với dao động điều hòa xung quanh một trục nằm ngang vuông góc với thanh và đi qua khối tâm của nó.

(b) Đối với trường hợp tổng quát $k_1 \neq k_2$, giả sử $y_1 = A_1 e^{i\omega t}$, $y_2 = A_2 e^{i\omega t}$, ở đây ω là tần số riêng của dao động. Các phương trình của chuyển động bây giờ cho

$$\left(k_1 - \frac{1}{2}m\omega^2\right)A_1 + \left(k_2 - \frac{1}{2}m\omega^2\right)A_2 = 0.$$

$$\left(\frac{I\omega^2}{L} - \frac{1}{2}Lk_1\right)A_1 + \left(\frac{1}{2}Lk_2 - \frac{I\omega^2}{L}\right)A_2 = 0\,.$$

Đối với nghiệm khác không chúng ta cần

$$\begin{vmatrix} k_1 - \frac{1}{2}m\omega^2 & k_2 - \frac{1}{2}m\omega^2 \\ \frac{I\omega^2}{L} - \frac{1}{2}Lk_1 & \frac{1}{2}Lk_2 - \frac{I\omega^2}{L} \end{vmatrix} = 0 ,$$

nghĩa là

$$\frac{Im\omega^4}{L} - \left(\frac{I}{L} + \frac{1}{4}mL\right)(k_1 + k_2)\omega^2 + Lk_1k_2 = 0 ,$$

hoặc

$$m^2\omega^4 - 4m(k_1 + k_2)\omega^2 + 12k_1k_2 = 0 .$$

Giải cho ω^2 chúng ta thu được các tần số riêng

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{m}\left[(k_1 + k_2) \pm \sqrt{(k_1^2 - k_1k_2 + k_2^2)}\right]} .$$

Chú ý rằng do $k_1 = k_2 = k$, biểu thức này cho $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}, \sqrt{\frac{6k}{m}}$, nó giống như trường hợp câu (a).

1208

Một bánh xe cứng có các momen quán tính chính $I_1 = I_2 \neq I_3$ xung quanh các trục chính $\hat{\mathbf{x}}_1$, $\hat{\mathbf{x}}_2$ và $\hat{\mathbf{x}}_3$, được đặt cố định ở bánh xe như ở hình 1.179. Khối tâm của bánh xe được gắn với một ổ trục cho phép bánh xe quay không ma sát xung quanh trục cố định trong không gian. Chiếc bánh xe là "cân bằng động", nghĩa là nó có thể quay với $\omega \neq 0$ không đổi và không gây ra momen xoắn lên ổ trục của nó. Các thành phần của ω phải thỏa mãn điều kiện gì? Phác họa chuyển động được cho phép.

(*MIT*)

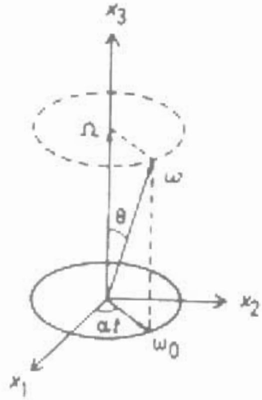
Lời giải:

Trong các phương trình Eurler đặt $I_1 = I_2 = I$

$$I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_3\omega_2 = 0 , \quad (1)$$

$$I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = 0 , \quad (2)$$

$$I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1 = 0 , \quad (3)$$



Hình 1.179

chúng ta thấy rằng có thể dễ dàng tích phân phương trình (3) để có

$$\omega_3 = \text{ hằng số } = \Omega\ , \text{ chẳng hạn} .$$

Khi đó chúng ta viết lại phương trình (1) và (2) như là

$$\dot{\omega}_1 = -\left(\frac{I_3 - I}{I}\right)\Omega\omega_2 ,$$

$$\dot{\omega}_2 = \left(\frac{I_3 - I}{I}\right)\Omega\omega_1 .$$

đó là những điều kiện phải được thỏa mãn. Lấy đạo hàm những phương trình trên ta được

$$\ddot{\omega}_1 = -\left(\frac{I_3 - I}{I}\Omega\right)\dot{\omega}_2 = -\left(\frac{I_3 - I}{I}\Omega\right)^2\omega_1 = -\alpha^2\omega_1 ,$$

$$\ddot{\omega}_2 = -\left(\frac{I_3 - I}{I}\Omega\right)^2\omega_2 = -\alpha^2\omega_2 ,$$

ở đây $\alpha = (\frac{I_3 - I}{I})\Omega$. Nghiệm tổng quát là

$$\omega_1 = \omega_0\cos(\alpha t + \varepsilon), \qquad \omega_2 = \omega_0\sin(\alpha t + \varepsilon) .$$

Do đó tổng vận tốc góc có độ lớn

$$\omega = \sqrt{\Omega^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2} = \sqrt{\Omega^2 + \omega_0^2} ,$$

nó là một hằng số. Khi $\omega_3 = \Omega$ là một hằng số, vectơ tổng vận tốc góc $\boldsymbol{\omega}$ tạo với trục $\hat{\mathbf{x}}_3$ một góc θ như ở hình 1.179. Hơn thế, mặt phẳng của $\boldsymbol{\omega}$ và $\hat{\mathbf{x}}_3$ quay xung quanh trục $\hat{\mathbf{x}}_3$ với một vận tốc góc α, hoặc 1 chu kì

$$\frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi I}{(I_3 - I)\Omega} .$$

Trên hình 1.179 là phác họa của chuyển động duy nhất được phép.

1209

Một vật thể rắn ở trong không gian. Mọi ảnh hưởng bên ngoài được bỏ qua (kể cả lực hấp dẫn).

(a) Sử dụng định luật Newton để chỉ ra rằng xung lượng góc được bảo toàn; đưa ra tất cả các giả thiết.

(b) Giả thiết rằng khối tâm của vật đứng yên trong hệ quy chiếu quán tính. Trục quay của nó có cần có phương cố định không? Biện minh ngắn gọn cho câu trả lời của bạn.

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

(a) Momen xung lượng của một vật thể rắn xung quanh điểm cố định O được định nghĩa là

$$\mathbf{L} = \sum_i^n \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i ,$$

ở đây $\mathbf{r}_i$ là vectơ bán kính từ O tới hạt m_i của vật rắn gồm n hạt. Vì không có ngoại lực tác động vào mà chỉ có các nội lực thì theo định luật II Newton ta có

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j\neq i}^n \mathbf{F}_{ij} .$$

ở đây $\mathbf{F}_{ij}$ là lực của hạt m_j tác dụng lên hạt m_i của vật rắn. Xét

$$\sum_i^n \mathbf{r}_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_i^n \sum_{j\neq i}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} . \tag{1}$$

Theo định luật III Newton thì các nội lực $\mathbf{F}_{ij}$ xuất hiện thành cặp sao cho

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} ,$$

cả hai lực tác dụng trên cùng một đường thẳng nối hai hạt. Điều đó nghĩa là tổng kép ở vế phải của phương trình (1) gồm các tổng có dạng

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji} \,.$$

Như mô tả trên hình 1.180, mỗi tổng như thế cộng vào bằng 0. Do đó

$$\sum_{r}^{n} \mathbf{r}_i \times m\ddot{\mathbf{r}}_i = 0 \,.$$

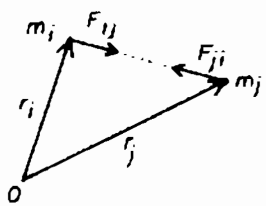
Khi đó

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i}^{n} \dot{\mathbf{r}}_i \times m\dot{\mathbf{r}}_i + \sum_{i}^{n} \mathbf{r}_i \times m\ddot{\mathbf{r}}_i = 0 \,,$$

hoặc

$$\mathbf{L} = \text{ hằng số} \,.$$

Nghĩa là, xung lượng góc của vật thể rắn xung quanh một điểm tùy ý là được bảo toàn.



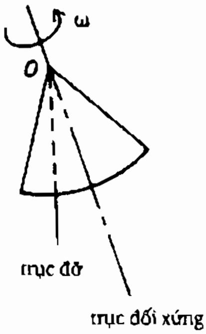
Hình 1.180

(b) Chứng minh trên cũng đúng cho một điểm cố định trong một hệ quy chiếu quán tính, do đó xung lượng góc **L** của vật thể đối với khối tâm của nó là một vectơ không đổi trong hệ quy chiếu quán tính. Tuy nhiên, vận tốc góc ω của vật thể đối với khối tâm là không cần cùng phương với **L**. Chỉ khi trục quay là dọc theo trục chính của vật thể thì ω song song với **L**. Do đó, nói chung trục quay là không bị cố định cho dù là phương của **L** là cố định.

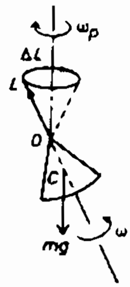
1210

Chiếc thùng rác bên cạnh thùng thư của khoa Vật lý có nắp dạng hình nón và ở giữa của nắp này có một chốt quay. Giả sử bạn chạm nhẹ nón nắp này và quay nó nhanh với vận tốc quay $\dot{\omega}$ đối xứng xung quanh trục của chiếc nắp, hình 1.181. Vậy chiếc nắp sẽ tiến động theo cùng phương hay theo phương ngược lại so với phương quay của ω? Hãy chứng minh câu trả lời bằng cách vẽ giản đồ vectơ và lập công thức thích hợp.

(*Wisconsin*)



Hình 1.181



Hình 1.182

Lời giải:

Momen quay của trọng lực xung quanh điểm O là

$$\mathbf{M} = \overline{\mathbf{OC}} \times m\mathbf{g} .$$

Trong một hệ quy chiếu cố định chúng ta có

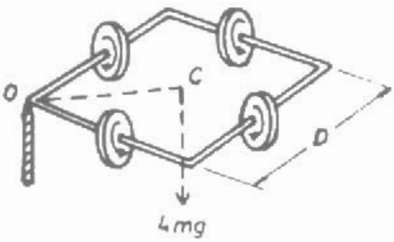
$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} = -\frac{\overline{OC}\mathbf{L}}{L} \times m\mathbf{g} = \frac{\overline{OC}}{L} m\mathbf{g} \times \mathbf{L} = \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{L} ,$$

ở đây $\boldsymbol{\omega}_p = \frac{\overline{OC}m\mathbf{g}}{L}$. Vậy $\mathbf{L}$ và do đó trục đối xứng của nắp tiến động với vận tốc góc $\omega_p = \frac{\overline{OC}mg}{L}$ xung quanh trục thẳng đứng theo chiều ngược với chiều quay, như trên hình 1.182.

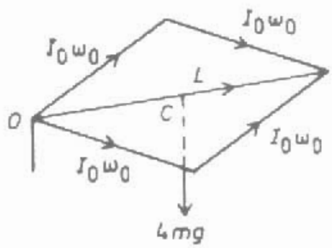
1211

Một khung hình vuông có khối lượng không đáng kể, trên khung có gắn bốn chiếc đĩa quay như hình 1.183. Mỗi chiếc đĩa có khối lượng m, momen quán tính I_0, và vận tốc quay ω_0. Khung nằm ngang và xoay tự do trên một chốt quay ở góc. Vậy tốc độ tiến động của khung là bao nhiêu?

(*MIT*)



Hình 1.183



Hình 1.184

Lời giải:

Momen xung lượng của từng chiếc đĩa đối với trục quay của nó là $I_0\omega_0$ với phương như trên hình 1.184. Momen xung lượng toàn phần của cả hệ đối với chốt quay có độ lớn $L = 2\sqrt{2}I_0\omega_0$ và hướng dọc theo $\overline{\mathbf{OC}}$, C là khối tâm của hệ. Chú ý rằng **L** nằm ngang vì khung nằm ngang. Momen gây ra bởi trọng lực là

$$\mathbf{M} = \mathbf{OC} \times 4m\mathbf{g} = \frac{D}{\sqrt{2}}\frac{\mathbf{L}}{L} \times 4m\mathbf{g} .$$

Từ đó

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} = -\frac{2\sqrt{2}Dm}{L}\mathbf{g} \times \mathbf{L} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L} ,$$

ở đây

$$\boldsymbol{\Omega} = -\frac{2\sqrt{2}Dm\mathbf{g}}{2\sqrt{2}I_0\omega_0} = -\frac{Dm}{I_0\omega_0}\mathbf{g}$$

là vận tốc góc tiến động. Và nó có giá trị là $\frac{Dmg}{I_0\omega_0}$ và khi nhìn từ trên xuống nó là ngược chiều kim đồng hồ.

1212

Chúng ta xem xét một con quay tự do lý tưởng, tức là một vật thể rắn đối xứng quay (với các momen quán tính $I_1 = I_2 < I_3$) được treo sao cho nó có thể quay tự do quanh trọng tâm của nó và chuyển động không chịu ảnh hưởng của momen quay. Giả sử $\boldsymbol{\omega}(t)$ là vectơ vận tốc góc tức thời và $\mathbf{L}(t)$ là xung lượng góc tức thời. Chọn vectơ đơn vị $\mathbf{u}(t)$ chỉ dọc theo trục đối xứng của vật thể (liên kết với momen quán tính I_3). Những vectơ đó ở trong hệ quy chiếu quán tính mà đối với nó ta xét vật thể quay. Tìm biểu thức của $\mathbf{L}(t)$, $\boldsymbol{\omega}(t)$, và $\mathbf{u}(t)$ theo các giá trị ban đầu $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(0)$ và $\boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\omega}(0)$.

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

Giả sử $t = 0$ ở thời điểm khi $\mathbf{L}$, $\boldsymbol{\omega}$ và trục đối xứng của con quay $\mathbf{u}$, cùng trên một mặt phẳng. Đặt một hệ tọa độ cố định $Oxyz$ với gốc ở tâm khối con quay sao cho ở thời điểm $t = 0$ trục z dọc theo vectơ xung lượng góc $\mathbf{L}$ và trục y là vuông góc với vận tốc góc ω_0. Chúng ta cũng sử dụng một hệ tọa độ quay $Ox'y'z'$ gắn với con quay sao cho trục z' trùng với trục đối xứng và trục x' ở cùng mặt phẳng với các trục z' và z tại thời điểm $t = 0$. Mối quan hệ giữa hai hệ tọa độ này được mô tả trên hình 1.185. Ở đó cũng định nghĩa các góc Euler là θ, φ, ψ. Chú ý rằng ban đầu trục y' và y là trùng nhau và $\psi_0 = \varphi_0 = 0$.

Như ta quan sát trên hình 1.185, vận tốc góc $\boldsymbol{\omega}(t)$ của con quay có thể được biểu diễn trong hệ quy chiếu quay theo các góc Eurler

$$\begin{aligned}
\omega_{x'} &= \dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi \, , \\
\omega_{y'} &= \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi \, , \\
\omega_{z'} &= \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \, .
\end{aligned}$$

Vì các trục x', y' và z' là trục chính, nên $\mathbf{L}$ có thể được biểu diễn như

$$\mathbf{L} = I_1\omega_{x'}\mathbf{i}' + I_1\omega_{y'}\mathbf{j}' + I_3\omega_{z'}\mathbf{k}' \tag{1}$$

vì $I_1 = I_2$. Do không có momen quay tác dụng lên con quay, nên $\mathbf{L} =$ hằng số và dọc theo trục z. Ngoài ra, phương trình Euler

$$I_3\dot{\omega}_{z'} - (I_1 - I_2)\omega_{x'}\omega_{y'} = 0$$

do $I_1 = I_2$ cho

$$\omega_{z'} = \text{ hằng số } = \omega_{0z'} \, .$$

Vì

$$L = \sqrt{I_1^2(\omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2) + I_3^2\omega_{0z'}^2} = \text{ constant} \, ,$$

chúng ta có

$$\omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2 = \text{ constant } = \omega_{0x'}^2 + \omega_{0y'}^2 = \omega_{0x'}^2$$

từ đó $\omega_{0y'} = \omega_{0y} = 0$. Do đó

$$\mathbf{L} = \sqrt{I_1^2\omega_{0x'}^2 + I_3^2\omega_{0z'}^2}\,\mathbf{k} \, .$$

L cũng có thể được diễn đạt theo các góc Eurle như sau (hình 1.185)

$$\mathbf{L} = -L\sin\theta\cos\psi\mathbf{i}' + L\sin\theta\sin\psi\mathbf{j}' + L\cos\theta\mathbf{k}'$$

trong hệ quy chiếu quay. So sánh nó với (1) chúng ta tìm được

$$L\cos\theta = I_3\omega_{0z'} .$$

điều đó chỉ ra rằng $\cos\theta =$ hằng số $= \cos\theta_0$, chẳng hạn và do vậy $\dot\theta = 0$. Ngoài ra,

$$-L\sin\theta\cos\psi = I_1\omega_{x'} = -I_1\dot\varphi\sin\theta\cos\psi ,$$

đưa đến

$$\dot\varphi = \frac{L}{I} = \text{ hằng số.}$$

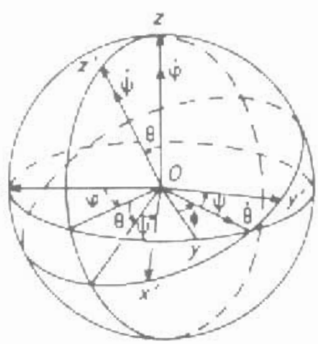
Tương tự,

$$L\cos\theta = I_3\omega_{z\prime} = I_3(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi) .$$

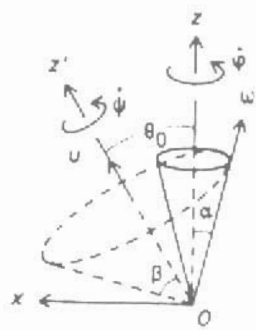
đưa đến

$$\dot\psi = \frac{L\cos\theta}{I_3} - \frac{L\cos\theta}{I_1} = \left(1 - \frac{I_3}{I_1}\right)\frac{L\cos\theta}{I_3} = \left(1 - \frac{I_3}{I_1}\right)\omega_{0z'} = \text{ hằng số} .$$

Điều trên có nghĩa là chuyển động của con quay đối xứng, tự do gồm hai phần: sự quay với vận tốc góc $\dot\psi$ quanh trục đối xứng và sự tiến động với vận tốc góc $\dot\varphi$ xung quanh vectơ xung lượng góc không đổi L.



Hình 1.185



Hình 1.186

Bây giờ xét vectơ đơn vị $\mathbf{u}(t)$, dọc theo trục đối xứng trong hệ quy chiếu cố định (hình 1.185)

$$\mathbf{u}(t) = \sin\theta\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\theta\sin\varphi\mathbf{j} + \cos\theta\mathbf{k} .$$

Vì $\theta = \theta_0$ tại $t = 0$, $\varphi = 0$, chúng ta có

$$\mathbf{u}(0) = \sin\theta_0\mathbf{i} + \cos\theta_0\mathbf{k} \; ,$$

và vì $\varphi = \dot{\varphi}t$, nên

$$\mathbf{u}(t) = u_{0x}\cos(\dot{\varphi}t)\mathbf{i} + u_{0x}\sin(\dot{\varphi}t)\mathbf{j} + u_{0z}\mathbf{k} \; .$$

Hãy xét vận tốc góc $\boldsymbol{\omega}$. Trong hệ quy chiếu quay chúng ta có đối với thời gian t

$$\boldsymbol{\omega} = (-\dot{\varphi}\sin\theta_0\cos\psi, \dot{\varphi}\sin\theta_0\sin\psi, \dot{\varphi}\cos\theta_0 + \dot{\psi}) \; ,$$

Vì $\theta = \theta_0$, $\dot{\theta} = 0$, và đối với thời gian $t = 0$

$$\boldsymbol{\omega}_0 = (-\dot{\varphi}\sin\theta_0, 0, \dot{\varphi}\cos\theta_0 + \dot{\psi}) = (\omega_{0x'}, 0, \omega_{0z'}) \; .$$

Như vậy

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_{0x'}\cos\psi, -\omega_{0x'}\sin\psi, \omega_{0z'})$$

Với

$$\omega = \sqrt{\omega_{0x'}^2 + \omega_{0z'}^2} = \omega_0 \; .$$

Do đó $\boldsymbol{\omega}$ có độ lớn không đổi. Nó tạo một góc α với trục z cho bởi

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\omega_z}{\omega} = \frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{L}}{\omega L} \\
&= \frac{1}{\omega}(\dot{\varphi}\sin^2\theta_0\cos^2\psi + \dot{\varphi}\sin^2\theta_0\sin^2\psi + \dot{\varphi}\cos^2\theta_0 + \dot{\psi}\cos\theta_0) \\
&= \frac{\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta_0}{\omega} \; ,
\end{aligned}$$

nó là một hằng số vì các đại lượng $\dot{\varphi}, \dot{\psi}, \omega$ đều là hằng số. Nó tạo một góc β với trục z' cho bởi

$$\cos\beta = \frac{\omega_{z'}}{\omega} = \frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{k}'}{\omega} = \frac{\dot{\varphi}\cos\theta_0 + \dot{\psi}}{\omega} \; ,$$

nó cũng là một hằng số. Trong hệ quy chiếu cố định

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega} &= (\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi, \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi - \dot{\theta}\cos\varphi, \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}) \\
&= (\dot{\psi}\sin\theta_0\cos\varphi, \dot{\psi}\sin\theta_0\sin\varphi, \dot{\psi}\cos\theta_0 + \dot{\varphi})
\end{aligned}$$

Vì $\theta = \theta_0$, $\dot{\theta} = 0$. Ở thời điểm $t = 0$, $\varphi = \psi = 0$ do đó

$$\boldsymbol{\omega}_0 = (\dot{\psi}\sin\theta_0, 0, \dot{\psi}\cos\theta_0 + \dot{\varphi}) \ .$$

Từ đó

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_{0x}\cos(\dot{\varphi}t)\mathbf{i} + \omega_{0x}\sin(\dot{\varphi}t)\mathbf{j} + \omega_{0z}\mathbf{k} \ .$$

Các tiến động của $\boldsymbol{\omega}$ xung quanh **L** và **u** được vẽ trong hình 1.186. Lưu ý rằng tự bản thân **u** cũng tiến động xung quanh **L**.

1213

Giả sử I_1, I_2, I_3 là các momen quán tính chính của một vật thể rắn (đối với khối tâm) và giả thiết rằng các momen này là khác nhau với $I_1 > I_2 > I_3$. Trong không gian tự do nếu vật thể được cho quay xung quanh một trong các trục chính nó sẽ tiếp tục quay xung quanh trục đó. Tuy nhiên, chúng ta quan tâm tới tính bền vững. Điều gì sẽ xảy ra nếu trục quay ban đầu là rất gần với (nhưng không thực sự thẳng hàng với một trục chính? Bền vững nghĩa là trục quay không bao giờ dời ra xa trục chính. Người ta thấy rằng chuyển động trong thực tế là ổn định đối với các trục chính tương ứng với I_1 và I_3, các momen quán tính lớn nhất và nhỏ nhất. Giải thích điều này bằng giải tích có sử dụng các phương trình Euler.

(*CUSPEA*)

Lời giải:

Giả sử $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ là các thành phần của vận tốc góc dọc theo các trục chính. Khi đó sử dụng các phương trình Euler với momen quay bằng 0

$$I_1\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3(I_2 - I_3) = 0 \ ,$$
$$I_2\dot{\omega}_2 - \omega_3\omega_1(I_3 - I_1) = 0 \ ,$$
$$I_3\dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2(I_1 - I_2) = 0 \ ,$$

chúng ta xem xét các trường hợp sau.

(i) Giả sử ban đầu $\boldsymbol{\omega}$ hướng gần như song song với trục x, nghĩa là $\omega_1 \gg \omega_2, \omega_3$. Nếu ω_2, ω_3 vẫn là nhỏ trong chuyển động quay tiếp sau thì chuyển động là ổn định. Vì $|\omega|$ = hằng số và $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} \approx \omega_1$, nên chúng ta có thể coi ω_1 là hằng số đến bậc nhất. Khi đó

$$\ddot{\omega}_2 = \frac{\omega_1(I_3 - I_1)}{I_2}\dot{\omega}_3 = \frac{\omega_1^2(I_3 - I_1)(I_1 - I_2)}{I_2 I_3}\omega_2 ,$$

$$\ddot{\omega}_3 = \frac{\omega_1^2(I_1 - I_2)(I_3 - I_1)}{I_3 I_2}\omega_3 .$$

Vì $I_1 > I_2, I_3$, các hệ số ở vế phải của phương trình trên đều âm và các phương trình chuyển động có dạng phương trình của dao động điều hòa. Như vậy ω_2 và ω_3 sẽ dao động quanh cùng các giá trị cân bằng và vẫn nhỏ. Do đó chuyển động là ổn định. Kết luận tương tự cũng được rút ra nếu ban đầu ω gần như song song với trục z.

(ii) Nếu ban đầu ω gần như song song với trục y. Xét tương tự ta được

$$\ddot{\omega}_1 = \frac{\omega_2^2(I_2 - I_3)(I_1 - I_2)}{I_1 I_3}\omega_1 ,$$

$$\ddot{\omega}_3 = \frac{\omega_2^2(I_1 - I_2)(I_2 - I_3)}{I_3 I_1}\omega_3 .$$

Vì $I_2 > I_3$, $I_1 > I_2$, các hệ số bên vế phải đều dương và chuyển động là không ổn định, ít nhất là trong phép xấp xỉ bậc nhất.

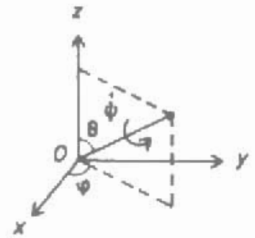
1214

Một quả cầu có khối lượng m, bán kính R và mật độ đồng đều được gắn trên một thanh cứng có chiều dài l khối lượng không đáng kể sao cho quả cầu có thể quay xung quanh trục này. Quả cầu nằm trong trường hấp dẫn đều, của trái đất chẳng hạn. Giả thiết quả cầu và thanh quay xung quanh trục z không có chương động (nghĩa là θ là được cố định), vận tốc góc của thanh và quả cầu xung quanh trục z là ω, và quả cầu quay xung quanh thanh với vận tốc góc Ω. Hãy tìm hệ thức giữa ω và Ω (bạn cũng có thể sử dụng giả thiết $R/l \ll 1$ dù là không cần thiết cho dạng của nghiệm). Và quả bóng là chuyển động theo chiều về phía trái hay phía phải của trục z?

(*Columbia*)

Lời giải:

Hướng của quả cầu có thể được miêu tả theo các góc Eurle θ, φ, ψ (xem lại bài **1212**). Vì không có chương động nên $\dot{\theta} = 0$. Xung lượng góc của quả bóng



Hình 1.187

xung quanh điểm gốc O (hình 1.187) là

$$\mathbf{L} = \frac{2}{5}mR^2\dot{\varphi}\mathbf{e}_r + l\sin\theta\cdot\dot{\varphi}ml\sin\theta\mathbf{e}_z$$
$$= \frac{2}{5}mR^2\Omega\mathbf{e}_r + ml^2\sin^2\theta\omega\mathbf{e}_z$$

trong hệ tọa độ trụ. Vì $\mathbf{e}_z$ là cố định, θ là một hằng số, chúng ta có

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{2}{5}mR^2\Omega\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \mathbf{M}\,,$$

ở đây M là momen quay gây ra bởi trọng lực. Vì

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\mathbf{e}_\varphi = \omega\sin\theta\mathbf{e}_\varphi\,,$$

phương trình trên trở thành

$$\frac{2}{5}mR^2\Omega\omega\sin\theta\mathbf{e}_\varphi = l\mathbf{e}_r\times mg(-\mathbf{e}_z) = lmg\sin\theta\mathbf{e}_\varphi\,.$$

Do đó

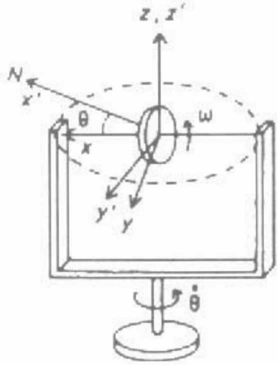
$$\omega = \frac{5lg}{2R^2\Omega}\,.$$

Vì $\dot{\varphi} \equiv \omega > 0$, quả bóng chuyển động theo chiều tay phải quanh trục z.

1215

Một con quay hồi chuyển ở vĩ độ 45° Bắc được lắp trên một ổ trục sao cho trục quay bị buộc nằm ngang mà nếu không thì không xuất hiện momen quay ổ trục. Tính đến sự quay của trái đất, chỉ ra rằng hướng với trục quay dọc theo phương Bắc – Nam định xứ là ổn định và tìm chu kì của các dao động nhỏ của trục quay xung quanh hướng này. Giả sử roto có thể được coi gần đúng như một cái nhẫn mảnh (nghĩa là các nan hoa và các chi tiết có khối lượng có thể bỏ qua). (Trong quá trình tính toán bài toán sẽ đơn giản hơn khi viết vận tốc góc của roto xung quanh trục x hình 1.188) để gộp chung số hạng quay và của con quay và số hạng do sự quay của trái đất).

(UC, Berkeley)



Hình 1.188

Lời giải:

Sử dụng hệ quy chiếu quán tính $Ox'y'z'$ cố định đối với một ngôi sao ở xa mà ở thời điểm đang xem xét, nó có gốc O ở tâm khối của roto, trục z' hướng theo hướng thẳng đứng, trục x' hướng theo phía bắc và một hệ quy chiếu quay $Oxyz$ gắn trên trái đất có trục z cũng hướng theo cùng trục z', còn trục x tại thời điểm đó hướng dọc theo hướng trục quay của roto (hình 1.188). Kí hiệu vận tốc góc quay là ω, momen quán tính quanh các trục x, y, z, tương ứng là C, A, A. Khi xung lượng góc có các thành phần

$$(C\omega, 0, A\dot{\theta})$$

trong hệ quy chiếu quay và

$$(C\omega\cos\theta, C\omega\sin\theta, A\dot{\theta})$$

trong hệ quy chiếu cố định. Chú ý rằng thành phần z vốn như nhau trong cả hai hệ quy chiếu được đóng góp bởi chuyển động tiến động. Trong hệ quy chiếu cố định, vận tốc góc quay của trái đất ở vĩ độ $\lambda = 45°$ bắc có các thành phần

$$\Omega(\cos 45°, 0, \sin 45°) = \frac{\Omega}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) .$$

Ngoài ra, các momen quay duy nhất là những momen buộc trục quay phải nằm ngang do đó

$$M_{z'} = 0\,.$$

Vì

$$\mathbf{M} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{cố định}} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{quay}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{L} = 0\,,$$

thành phần z của nó là

$$A\ddot{\theta} + \frac{C\omega\Omega\sin\theta}{\sqrt{2}} = 0\,,$$

hoặc

$$A\ddot{\theta} + \frac{C\omega\Omega}{\sqrt{2}}\theta = 0$$

đối với góc θ nhỏ. Chú ý rằng đối với $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{L}$ chúng ta giải được các vectơ trong hệ quy chiếu cố định. Phương trình cuối cùng chỉ ra rằng trục quay dao động điều hòa xung quanh phương bắc nam với tần số góc là

$$\omega' = \sqrt{\frac{C\omega\Omega}{\sqrt{2}A}}$$

và sự định hướng là ổn định. Chu kì là

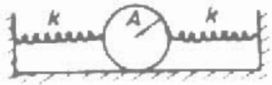
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{2}A}{C\omega\Omega}}\,.$$

Nếu roto được coi xấp xỉ như một cái nhẫn mảnh có khối lượng M và bán kính R, chúng ta có

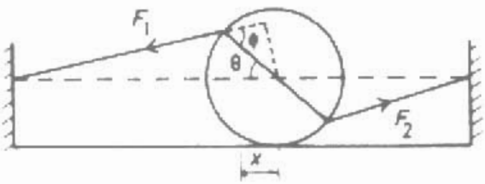
$$C = MR^2, \qquad A = \frac{MR^2}{2}, \qquad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\sqrt{2}\omega\Omega}}\,.$$

1216

Một chiếc đĩa mỏng có khối lượng M và bán kính A được nối bởi hai lò xo có hệ số đàn hồi k với hai điểm cố định trên mặt bàn không ma sát. Chiếc đĩa quay tự do nhưng nó bị ràng buộc quay trong một mặt phẳng. Khi không bị kéo căng mỗi lò xo có độ dài l_0, tại thời điểm cân bằng ban đầu chúng đều bị kéo căng tới độ dài $l > l_0$ như hình 1.189. Với dao động nhỏ thì tần số của các



Hình 1.189



Hình 1.190

kiểu dao động chuẩn tắc là bao nhiêu? Phác họa chuyển động của mỗi kiểu dao động đó.

(*Princeton*)

Lời giải:

Chuyển động của đĩa bị hạn chế trong mặt phẳng thẳng đứng. Giả sử độ dịch chuyển của khối tâm so với vị trí cân bằng là x và độ dịch chuyển góc là θ, như mô tả trên hình 1.190. Xét tới bậc nhất của θ, các lực phục hồi là

$$F_1 = k(l + x - l_0), \qquad F_2 = k(l - x - l_0) .$$

Các phương trình chuyển động khi đó là

$$M\ddot{x} = F_2 - F_1 = -2kx ,$$

hoặc

$$\ddot{x} + \frac{2k}{M}x = 0 , \tag{1}$$

và

$$I\ddot{\theta} = (F_2 + F_1)A\sin\varphi ,$$

ở đây $I = \frac{1}{2}MA^2$ và φ được cho bởi

$$\frac{\sin(\pi - \varphi)}{l + A + x} = \frac{\sin\theta}{l + x} ,$$

hoặc

$$\sin\varphi \approx \left(\frac{l + A}{l}\right)\sin\theta \approx \left(\frac{l + A}{l}\right)\theta ,$$

nghĩa là

$$\ddot{\theta} + \frac{4k(l - l_0)(l + A)}{MlA}\theta = 0 . \quad (2)$$

Phương trình (1) cho ta tần số góc của dao động tuyến tính

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{M}} .$$

Phương trình (2) cho ta tần số góc của dao động quay

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{4k(l - l_0)(l + A)}{MlA}} .$$

Do đó các tần số kiểu dao động chuẩn tắc của các dao động nhỏ là

$$\frac{\omega_1}{2\pi}, \qquad \frac{\omega_2}{2\pi} ,$$

và chuyển động của hai kiểu dao động chuẩn tắc được mô tả trên hình 1.191.

Hình 1.191

1217

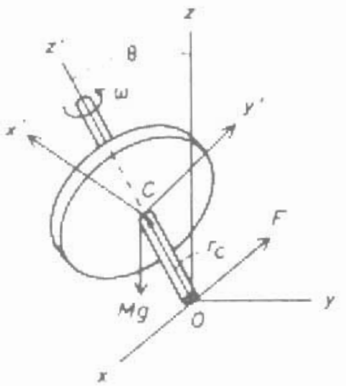
Một con quay đối xứng đơn giản bao gồm một chiếc đĩa khối lượng M bán kính r được gắn ở tâm C của một thanh hình trụ khối lượng không đáng kể, chiều dài l và bán kính a như ở hình 1.192. Con quay xoay với một vận tốc góc lớn $\omega(t)$ và nó được đặt nghiêng một góc θ so với phương thẳng đứng trên một mặt phẳng nằm ngang có hệ số ma sát nhỏ. Bỏ qua chương động và giả thiết rằng trong một chu kì tiến động tốc độ chậm dần của $\omega(t)$ là nhỏ.

(a) Mô tả toàn bộ chuyển động sau đó của con quay.

(b) Tính tần số góc của sự tiến động (chậm).

(c) Ước tính thời gian cần thiết trước khi trục của con quay trở nên thẳng đứng.

(UC, Berkeley)



Hình 1.192

Lời giải:

(a) Chuyển động của con quay bao chủ yếu gồm ba thành phần sau:

(1) quay với vận tốc góc ω quanh trục đối xứng của nó,

(2) một tiến động chậm Ω quanh trục thẳng đứng gây ra bởi trọng lực,

(3) chuyển động của trục đối xứng dần trở nên thẳng đứng do ảnh hưởng momen quay ma sát.

(b) Sử dụng hai hệ trục tọa độ với điểm gốc O như hình 1.192: một hệ quy chiếu cố định $Oxyz$ với trục z hướng thẳng lên trên, và một hệ quy chiếu quay $Ox'y'z'$ với trục z' dọc theo trục đối xứng của con quay và cùng hướng như là vận tốc góc quay ω, tại thời điểm xem xét cả trục x và x' đều ở trong cùng một mặt phẳng với z và z'. Chúng ta có

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{cố định}} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{quay}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{L} .$$

Với điều kiện vận tốc góc quay ω là rất lớn, xung lượng góc toàn phần có thể lấy xấp xỉ

$$\mathbf{L} = I_3\omega\mathbf{k}' .$$

Hơn nữa, vì ω không thay đổi rõ rệt trong một chu kì tiến động $(\frac{d\mathbf{L}}{dt})_{\text{quay}} \approx 0$. Chúng ta có

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{cố định}} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{r}_C \times M\mathbf{g}$$

với

$$\mathbf{\Omega} = \Omega(-\sin\theta, 0, \cos\theta) ,$$
$$\mathbf{L} = (0, 0, I_3\omega)$$

Trong hệ quy chiếu quay, và

$$\mathbf{r}_C = \left(0, 0, \frac{l}{2}\right) ,$$
$$\mathbf{g} = g(\sin\theta, 0, \cos\theta) .$$

Trong hệ quy chiếu cố định, từ trên ta có

$$I_3\omega\Omega\sin\theta = \frac{1}{2}Mlg\sin\theta ,$$

nghĩa là

$$\Omega = \frac{Mlg}{2I_3\omega} = \frac{lg}{r^2\omega} ,$$

vì

$$I_3 = \frac{1}{2}Mr^2 .$$

(c) Khi trục đối xứng tạo một góc θ với phương thẳng đứng, lực ma sát f tại điểm tiếp xúc của thanh và mặt đất là xấp xỉ bằng μMg. Thực sự chỉ có mép bên trái ở phía cuối của thanh là tiếp xúc với mặt đất. Lực ma sát có hướng ngược với vận tốc trượt của điểm tiếp xúc và có hướng như mô tả trên hình 1.192. Lực này gây ta một gia tốc của khối tâm C của con quay và tại cùng thời điểm đó nó tạo ra một momen quay xung quanh C. Bỏ qua mọi điều kiện đặc biệt của thanh, chúng ta có thể lấy momen quay xung quanh C xấp xỉ là

$$\tau \approx \mu Mg \cdot \frac{1}{2}l\mathbf{j} .$$

Momen quay này làm thay đổi độ lớn của góc θ và là nguyên nhân làm cho trục đối xứng của con quay dần trở nên thẳng đứng.

Khi trục là thẳng đứng, đầu cuối của thanh cuối cùng tiếp xúc với mặt đất, do đó lực ma sát được phân bố đối xứng. Tổng momen quay quanh C gây bởi lực ma sát lúc này bằng 0. Thực tế momen quay của lực ma sát đối với trục z' (quan hệ với thành phần z' của L) không cùng biến mất, nhưng khi thanh là quá mảnh thì momen quay là rất nhỏ và khiến cho ω chỉ giảm chậm. Chúng ta có gần đúng đối với momen quay ma sát

$$\frac{d\mathbf{L}_C}{dt} = \frac{1}{2}\mu Mgl\mathbf{j} ,$$

nghĩa là

$$-\dot{\theta} I_3 \omega = \frac{1}{2}\mu M g l \ ,$$

hoặc

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\mu g l}{r^2 \omega} \ .$$

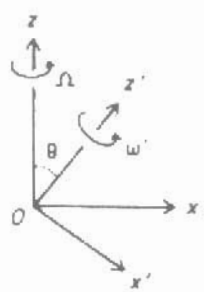
lấy tích phân ta được

$$t = -\int_{\theta}^{0} \frac{r^2\omega}{\mu g l} d\theta = \frac{r^2\omega}{\mu g l}\theta \ .$$

1218

Một con quay đối xứng nặng với một điểm cố định đang tiến động với một vận tốc góc ổn định Ω xung quanh trục thẳng đứng z. Góc quay ω' nhỏ nhất đối với trục đối xứng z' của nó bằng bao nhiêu (z' nghiêng một góc θ so với trục z)? Con quay có khối lượng m và trọng tâm của nó ở độ cao h so với điểm cố định. Sử dụng các hệ quy chiếu trong hình 1.193, tại thời điểm xem xét các trục z, z', x và x' ở trong cùng một mặt phẳng và giả thiết rằng $I_1 = I_2$.

(*SUNY, Buffalo*)



Hình 1.193

Lời giải:

Tham khảo định nghĩa về góc Euler trong bài tập 1212, momen gây ra bởi trọng lực là theo hướng vuông góc với mặt phẳng xz và trong hệ quy chiếu quay $Ox'y'z'$được gắn với con quay có các thành phần

$$mgh\sin\theta\sin\psi, \qquad mgh\sin\theta\cos\psi, \qquad 0\ .$$

Đối với $I_1 = I_2$, các phương trình Euler, áp dụng trong hệ quy chiếu quay là

$$I_1\dot{\omega}_{x'} - (I_1 - I_3)\omega_{y'}\omega_{z'} = mgh\sin\theta\sin\psi \ ,$$
$$I_1\dot{\omega}_{y'} - (I_3 - I_1)\omega_{x'}\omega_{z'} = mgh\sin\theta\cos\psi \ ,$$
$$I_3\dot{\omega}_{z'} = 0 \ .$$

Vectơ vận tốc góc ω trong hệ quy chiếu quay có các thành phần

$$-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi, \qquad \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi, \qquad \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}$$

vì $\dot{\theta} = 0$. Do đó viết Ω theo $\dot{\varphi}$ và chú ý rằng $\ddot{\varphi} = 0$ đối với tiến động ổn định phương trình Eurle thứ nhất trở thành

$$\Omega^2(I_1 - I_3)\cos\theta - \Omega I_3\dot{\psi} + mgh = 0 \ ,$$

từ đó cho

$$\omega' \equiv \dot{\psi} = \frac{mgh + (I_1 - I_3)\Omega^2\cos\theta}{I_3\Omega} \ .$$

Tuy nhiên để Ω là thực chúng ta cần

$$I_3^2\omega'^2 - 4(I_1 - I_3)mgh\cos\theta \geq 0 \ ,$$

hoặc

$$\omega' \geq \frac{1}{I_3}\sqrt{4(I_1 - I_3)mgh\cos\theta} \ .$$

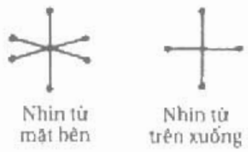
1219

Trò chơi "Jack" là một trò chơi được chơi với những miếng kim loại, chúng có thể được xấp xỉ bởi sáu khối trên các trục trực giao, các trục có chiều dài l và tổng khối lượng là M, như mô tả trên hình 1.194

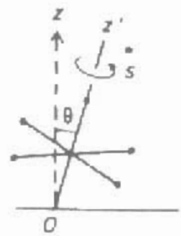
(a) Nếu bạn quay Jack xung quanh một trục, sao cho có một tiến động ổn định xung quanh trục thẳng đứng, (hình 1.195) thì hãy cho biết mối quan hệ giữa vận tốc quay s, tốc độ tiến động và góc θ giữa trục thẳng đứng và trục quay của Jack?

(b) Vận tốc quay phải bằng bao nhiêu để Jack quay ổn định xung quanh trục thẳng đứng (nghĩa là $\theta = 0$)?

(Princeton)



Hình 1.194



Hình 1.195

Lời giải:

Sử dụng hệ quy chiếu cố định $Oxyz$ và hệ quy chiếu quay $Ox'y'z'$ như trong bài 1212, với O là điểm tiếp xúc với mặt đất và hệ quy chiếu quay gắn với Jack. Trục z dọc theo phương thẳng đứng và trục z' là dọc theo trục quay như ở hình 1.195. Momen quán tính đối với các trục x', y' và z' là

$$I_1 = I_2 = 4ml^2 + 6ml^2 = 10ml^2 \,,$$
$$I_3 = 4ml^2 \,,$$

với $m = \frac{M}{6}$.

(a) Trong hệ quy chiếu quay, momen gây ra bởi trọng lực có các thành phần

$$6mgl\sin\theta\sin\psi, \qquad 6mgl\sin\theta\cos\psi, \qquad 0\,,$$

và vận tốc góc ω có các thành phần

$$\dot\theta\sin\psi - \dot\varphi\sin\theta\cos\psi, \qquad \dot\theta\cos\psi + \dot\varphi\sin\theta\sin\psi, \qquad \dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\,.$$

các phương trình Euler khi đó cho

$$5\dot\omega_{x'} - 3\omega_{y'}\omega_{z'} = \frac{3g}{l}\sin\theta\sin\psi, \tag{1}$$

$$5\dot\omega_{y'} + 3\omega_{z'}\omega_{x'} = \frac{3g}{l}\sin\theta\cos\psi, \tag{2}$$

$$4\dot\omega_{z'} = 0\,.$$

Phương trình cuối cùng cho

$$\omega_{z'} = \dot\psi + \dot\varphi\cos\theta = s + \Omega\cos\theta = \text{ constant}\,.$$

ở đây Ω là tốc độ tiến động.

(b) Nếu trục quay là gần thẳng đứng, $\theta \approx 0$ và chúng ta lấy xấp xỉ $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$. Khi đó $\sin\psi \times (1) + \cos\psi \times (2)$ cho bởi

$$5\ddot{\theta} + \left(2\Omega s - 3\Omega^2 - \frac{3g}{l}\right)\theta = 0$$

với $\Omega = \dot{\varphi}$, $s = \dot{\psi}$. Do đó để sự quay là ổn định tại $\theta = 0$ chúng ta cần

$$2\Omega s - 3\Omega^2 - \frac{3g}{l} > 0\,,$$

hoặc

$$s > \frac{3\Omega}{2} + \frac{3g}{2l\Omega}\,.$$

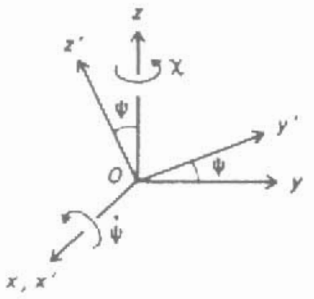
1220

Một máy bay cánh quạt bay theo vòng tròn, ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ trên xuống với vận tốc góc không đổi χ đối với một hệ quy chiếu quán tính. Bộ cánh quạt của nó quay với vận tốc góc không đổi $d\psi/dt$ và theo phi công là cùng chiều kim đồng hồ.

(a) Đối với bộ cánh quạt phẳng và gồm bốn cánh, hãy cho biết mối quan hệ giữa các momen quán tính?

(b) Tìm độ lớn và phương của momen quay mà các ổ trục phải tác dụng lên trục cánh quạt để giữ cho máy bay bay vòng thăng bằng.

(UC, Berkeley)



Hình 1.196

Lời giải:

(a) Đặt hệ tọa độ cố định $Oxyz$ ở vị trí tức thời tại tâm của cánh quạt với trục z theo phương thẳng đứng và một hệ quy chiếu quay $Ox'y'z'$ cố định ở cánh quạt sao cho trục x' dọc theo trục quay và trục z' là dọc theo một là cánh quạt, trục x lấy trùng với trục x' ở thời điểm đang xét như ở hình 1.196. Các trục tọa độ quay khi đó là các trục chính với các momen quán tính.

$$I_2 = I_3 = I \ ,$$

và theo định lý trục vuông góc ta có $I_1 = 2I$. Trong hệ quy chiếu quay vận tốc góc có các thành phần

$$\dot{\psi}, \qquad \chi \sin\psi, \qquad \chi\cos\psi \ ,$$

ở đây $\psi = \dot{\psi}t$. Các phương trình Euler của chuyển động

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_{x'} - (I_2 - I_3)\omega_{y'}\omega_{z'} &= M_{x'} \ , \\ I_2\dot{\omega}_{y'} - (I_3 - I_1)\omega_{z'}\omega_{x'} &= M_{y'} \ , \\ I_3\dot{\omega}_{z'} - (I_1 - I_2)\omega_{x'}\omega_{y'} &= M_{z'} \end{aligned}$$

Khi đó đối với momen M tác động lên trục cánh quạt sẽ cho

$$M_{x'} = 0 \ ,$$

vì $\dot{\psi}$ = hằng số và $I_2 = I_3$,

$$\begin{aligned} M_{y'} &= 2I\dot{\psi}\chi\cos(\dot{\psi}t) \ , \\ M_{z'} &= -2I\dot{\psi}\chi\sin(\dot{\psi}t) \ , \end{aligned}$$

do χ = hằng số. Từ đó

$$M = 2I\dot{\psi}\chi$$

và vì

$$\begin{aligned} M_{x'} &= 0 \ , \\ M_{y'} &= M\cos\psi \ , \\ M_{z'} &= -M\sin\psi \ , \end{aligned}$$

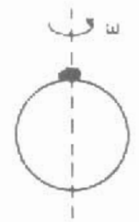
M ở trong mặt phẳng của bộ cánh quạt và có hướng dọc theo trục y của hệ quy chiếu cố định.

1221

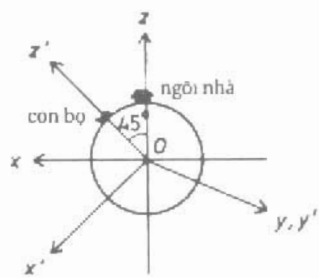
Một quả cầu hoàn toàn đồng chất có đường kính 20 cm, mật độ 5 g/cm^3 đang quay tự do trong không gian ở 1 vg/s. Một con bọ thông minh nặng

10^{-3} g ở trong một ngôi nhà không khối lượng, ngôi nhà đặt trên bề mặt của quả cầu ở một cực quay, như hình 1.197. Con bọ quyết định dịch chuyển xích đạo tới ngôi nhà bằng cách đi bộ nhanh tới vĩ độ 45° và đợi một khoảng thời gian thích hợp. Nó sẽ phải đợi bao nhiêu lâu? Hãy chỉ ra tại sao bạn có được câu trả lời.
Lưu ý rằng: bỏ qua tiến động nhỏ gắn với chuyển động của con bọ trên bề mặt của quả cầu.

(*Princeton*)



Hình 1.197



Hình 1.198

Lời giải:

Sau khi con bọ di chuyển tới vị trí vĩ độ 45°, thì vận tốc góc ω không còn trùng với trục chính của hệ thống nữa. Điều này làm cho quả cầu tiến động. Vì khối lượng của con bọ là rất nhỏ so với quả cầu, khối tâm của hệ có thể được lấy ở tâm của quả cầu O. Sử dụng hệ tọa độ cố định $Oxyz$ với trục z dọc theo phương ban đầu của ω và một hệ quy chiếu quay $Ox'y'z'$ gắn với quả cầu với trục z' đi qua vị trí mới của con bọ, với các trục x và x' nằm trong cùng mặt phẳng với trục z và z' tại $t = 0$ như trên hình 1.198. Vì hệ ở trong không gian tự do nên không có ngoại lực. Chúng ta giả thiết rằng con bọ dịch chuyển tới vị trí mới nhanh tới mức ω vẫn giữ nguyên tại thời điểm $t = 0$ cũng như đối với $t < 0$.

Các trục quay là các trục chính mới. Giả sử các momen quán tính tương ứng là I_1, I_2 và I_3 với $I_1 = I_2$ do đối xứng. Vậy các phương trình Euler là

$$I_1\dot{\omega}_{x'} - (I_1 - I_3)\omega_{y'}\omega_{z'} = 0\,, \quad (1)$$

$$I_1\dot{\omega}_{y'} - (I_3 - I_1)\omega_{z'}\omega_{x'} = 0\,, \quad (2)$$

$$I_3\dot{\omega}_{z'} = 0\,. \quad (3)$$

Phương trình (3) chỉ ra rằng

$$\omega_{z'} = \text{hằng số} = \omega_{0z'}\,.$$

Các phương trình (2) và (3) khi đó cho ta

$$\ddot{\omega}_{x'} + \Omega^2 \omega_{x'} = 0$$

với $\Omega = \left|\frac{I_3 - I_1}{I_1}\right| \omega_{0z'}$. Nghiệm của nó là

$$\omega_{x'} = A\cos(\Omega t + \phi) ,$$

ở đây A và ϕ là các hằng số. Khi đó phương trình (2) cho

$$\omega_{y'} = A\sin(\Omega t + \phi) .$$

Ở thời điểm ban đầu, các thành phần của ω trong hệ quy chiếu quay là

$$\omega_{0x'} = -\frac{\omega}{\sqrt{2}}, \qquad \omega_{0y'} = 0, \qquad \omega_{0z'} = \frac{\omega}{\sqrt{2}} .$$

Chúng cho ta

$$A = \frac{\omega}{\sqrt{2}}, \qquad \phi = \pi .$$

Do đó ở thời điểm t, ω có các thành phần

$$\omega_{x'} = \frac{\omega}{\sqrt{2}}\cos(\Omega t + \pi) ,$$

$$\omega_{y'} = \frac{\omega}{\sqrt{2}}\sin(\Omega t + \pi) ,$$

$$\omega_{z'} = \frac{\omega}{\sqrt{2}} .$$

Như vậy, cả độ lớn và thành phần z' của ω đều là không đổi và vectơ vận tốc góc ω mô tả một hình nón trong vật rắn với trục dọc theo trục z'. Nói cách khác, ω tiến động xung quanh trục z' với một tốc độ góc

$$\Omega = \left|\frac{I_3 - I_1}{I_1}\right| \frac{\omega}{\sqrt{2}} .$$

để đường xích đạo ở vị trí ngôi nhà của con bọ thì vận tốc góc ω phải ở nửa đường giữa các trục x' và z', nghĩa là

$$\omega_{x'} = \frac{\omega}{\sqrt{2}}, \qquad \omega_{y'} = 0, \qquad \omega_{z'} = \frac{\omega}{\sqrt{2}} .$$

Điều này nghĩa là $\Omega t = \pi$, hoặc thời gian cần thiết là

$$\frac{\pi}{\Omega} = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{\omega}\left|\frac{I_1}{I_3 - I_1}\right| \approx \frac{\sqrt{2}\pi}{\omega}\frac{2MR^2}{5mR^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\pi}{5\omega m}\left(\frac{4}{3}\pi R^3 \rho\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi \times 10^6 = 6 \times 10^6 \text{ s} .$$

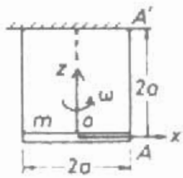
1222

Một thanh nằm ngang có khối lượng m độ dài $2a$. Hai đầu của nó được treo bằng hai sợi dây song song có độ dài $2a$. Thanh này đột nhiên bị tác động một vận tốc góc ω quanh trục thẳng đứng qua tâm của nó. Hãy tính

(a) khoảng cách h mà thanh sẽ nâng lên,

(b) độ tăng lực căng ban đầu của mỗi sợi dây.

(*Wisconsin*)



Hình 1.199

Lời giải:

Sử dụng một hệ tọa độ cố định với gốc ở tâm của thanh, trục z theo phương thẳng đứng và trục x dọc theo phương ban đầu của thanh, như hình 1199.

(a) Chọn mặt phẳng xy như là mức chuẩn cho thế năng. Cơ năng toàn phần của thanh tại thời điểm $t = 0$ khi nó vừa bị tác động một vận tốc góc ω là

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{ma^2\omega^2}{6}$$

vì $I = \frac{1}{3}ma^2$. Khi thanh ở vị trí cao nhất h, nó chỉ có thế năng mgh. Theo định luật bảo toàn năng lượng ta có

$$mgh = \frac{1}{6}ma^2\omega^2 ,$$

hoặc

$$h = \frac{a^2\omega^2}{6g} .$$

(b) Do đối xứng, thanh sẽ luôn luôn nằm ngang trong quá trình chuyển động khi nó quay xung quanh trục z. Giả sử tại thời điểm t thanh ở độ cao z và nó tạo với trục x một góc θ. Giả thiết các sợi dây là không bị giãn và khoảng cách giữa kiểu treo A' và điểm cuối A của thanh là không đổi. Tọa độ của A và A' tương ứng là $(a\cos\theta, a\sin\theta, z)$ và $(a, 0, 2a)$. Như vậy

$$a^2(1-\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta + (2a - z)^2 = 4a^2 ,$$

nghĩa là

$$z^2 - 4az + 2a^2(1 - \cos\theta) = 0 \,.$$

Đạo hàm hai lần theo thời gian chúng ta thu được

$$\dot{z}^2 + z\ddot{z} - 2a\ddot{z} + a^2\ddot{\theta}\sin\theta + a^2\dot{\theta}^2\cos\theta = 0 \,,$$

hoặc

$$\ddot{z} = \frac{1}{2a - z}[\dot{z}^2 + a^2\ddot{\theta}\sin\theta + a^2\dot{\theta}^2\cos\theta] \,.$$

Ở $t = 0$, $\theta = 0$, $z = 0$, $\dot{z} = 0$, $\dot{\theta} = \omega$, chúng ta có $\ddot{z} = \frac{1}{2}a\omega^2$. Như vậy lực tác dụng thẳng đứng lên thanh tăng một lượng $m\ddot{z} = \frac{1}{2}ma\omega^2$. Do nó được treo bằng hai sợi dây tương đương nên độ tăng lực căng trên mỗi dây là

$$\Delta T = \frac{1}{2}m\ddot{z} = \frac{1}{4}ma\omega^2 \,.$$

1223

Một thanh đồng chất chiều dài $2a$ và khối lượng M bị quay với vận tốc góc không đổi ω trong một vòng tròn nằm ngang có tâm là B và bán kính b. Thanh có khớp nối ở A sao cho nó chỉ có thể dịch chuyển tự do trong mặt phẳng thẳng đứng chứa nó. Góc giữa phương thẳng đứng và thanh là θ như hình 1.200. Lực trọng trường của quả đất là theo phương thẳng đứng.

(a) Tính động năng và thế năng của thanh theo θ, $\dot{\theta}$ và ω.

(b) Tìm biểu thức tổng quát cho các vị trí cân bằng có thể của thanh.

(c) Giải biểu thức tìm được ở mục (b) bằng phương pháp đồ thị để tìm các vị trí cân bằng trong các góc phần tư θ giữa 0 và 2π.

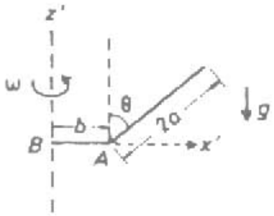
(d) Vị trí cân bằng nào là ổn định? Không ổn định? Với mỗi góc phần tư θ các vị trí cân bằng tồn tại phụ thuộc vào các thông số ω, b và a như thế nào?

(e) Với mỗi góc phần tư θ hãy vẽ giản đồ lực để kiểm tra định tính sự tồn tại và bản chất của các vị trí cân bằng.

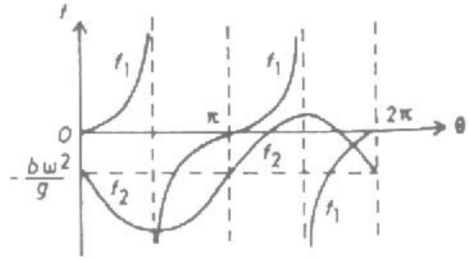
(*MIT*)

Lời giải:

Sử dụng hệ trục $Ox'y'z'$ với gốc O trùng với B, trục z' dọc theo trục quay của vận tốc góc ω và trục x' ở trong mặt phẳng thẳng đứng chứa trục z' và thanh.



Hình 1.200



Hình 1.201

(a) Trong hệ quy chiếu quay động năng của hệ là

$$T = \frac{1}{2} I_A \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} ma^2 \cdot \dot{\theta}^2 = \frac{2}{3} ma^2 \dot{\theta}^2 \ .$$

Thế năng bao gồm hai phần, thế năng ly tâm và thế năng hấp dẫn. Trong hệ quy chiếu quay, lực ly tâm tưởng tượng $m\omega^2 x'$ phải được đưa vào trên mọi điểm khối lượng m, tương ứng thế năng là $-\frac{1}{2} m x'^2 \omega^2$. Với toàn hệ thế năng ly tâm tưởng tưởng đó là $-\frac{1}{2} I_{z'} \omega^2$, ở đây $I_{z'} = \frac{1}{3} ma^2 \sin^2\theta + m(b + a\sin\theta)^2$. Vì thế năng hấp dẫn là $mga\cos\theta$, chúng ta có

$$V = \frac{1}{2} m \left[\frac{1}{3} a^2 \sin^2\theta + (b + a\sin\theta)^2 \right] \omega^2 + mga\cos\theta \ .$$

(b) Để cân bằng, $\frac{dV}{d\theta} = 0$, nó cho ta phương trình cho các vị trí cân bằng có thể của thanh

$$-m\omega^2 \left(b + \frac{4}{3} a \sin\theta \right) \cdot a \cdot \cos\theta - mga \sin\theta = 0 \ ,$$

hoặc

$$\mathrm{tg}\theta = -\frac{a\omega^2}{g} \left(\frac{b}{a} + \frac{4}{3} \sin\theta \right) \ .$$

(c) Giả sử vế trái trong phương trình trên là f_1 và vế phải là f_2 và chúng được vẽ như các đường cong trên hình 1.201. Các vị trí cân bằng được cho bởi các điểm giao nhau trên đồ thị. Có thể thấy rằng vị trí cân bằng xảy ra trong các góc phần tư thứ hai và phần tư thứ tư của θ. Trong góc phần tư thứ ba, $f_1 = \mathrm{tg}\theta$ là dương, và

$$f_2 = \left(-\frac{a}{g} + \frac{4a}{3g} |\sin\theta| \right) \omega^2$$

vì $\sin\theta$ là âm. Ta thấy rằng chỉ khi f_2 là dương và đủ lớn có thể có một hoặc hai vị trí cân bằng, các trường hợp khác sẽ không có vị trí cân bằng.

(d) Để vị trí cân bằng là ổn định chúng ta cần

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} > 0$$

ở vị trí đó. Vì

$$\frac{dV}{d\theta} = -m\omega^2\left(b + \frac{4}{3}a\sin\theta\right)a\cos\theta - mga\sin\theta\ ,$$

chúng ta cần

$$\begin{aligned}
\frac{d^2V}{d\theta^2} &= -\frac{4}{3}ma^2\omega^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + mab\omega^2\sin\theta - mga\cos\theta \\
&= \frac{ma\cos^2\theta}{\sin\theta}\left(\frac{4}{3}a\omega^2\sin\theta\mathrm{tg}^2\theta + b\omega^2\mathrm{tg}^2\theta + b\omega^2\right) \\
&= \frac{ma\cos^2\theta}{\sin\theta}(-g\mathrm{tg}^3\theta + b\omega^2) > 0
\end{aligned}$$

để vị trí cân bằng θ là ổn định.

Khi θ ở góc phần tư thứ hai $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, vì $\sin\theta > 0$, $\mathrm{tg}\theta < 0$, chúng ta có

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} > 0$$

và cân bằng là ổn định.

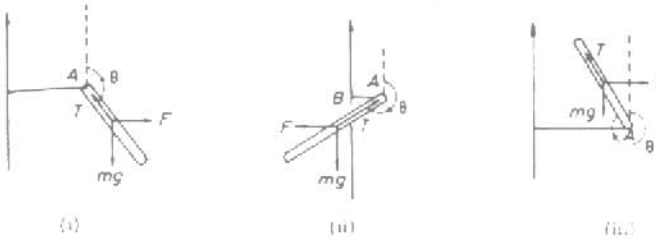
Khi θ ở góc phần tư thứ tư $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, as $\sin\theta < 0$, $\mathrm{tg}\theta < 0$, chúng ta có

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} < 0$$

và cân bằng là không ổn định.

Khi θ là ở góc phần tư thứ ba $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$, chúng ta viết

$$\begin{aligned}
\frac{d^2V}{d\theta^2} &= \frac{ma\cos^2\theta}{\sin\theta}\left(\frac{4}{3}a\omega^2\sin\theta\mathrm{tg}^2\theta + b\omega^2\sec^2\theta\right) \\
&= \frac{ma\omega^2}{\sin\theta}\left(\frac{4}{3}a\sin^3\theta + b\right) = -\frac{ma\omega^2}{|\sin\theta|}\left(b - \frac{4}{3}a|\sin\theta|^3\right)
\end{aligned}$$



Hình 1.202

vì $\sin\theta < 0$. Khi đó nếu $b < \frac{1}{3}a|\sin\theta|^3$, cân bằng là ổn định và nếu $b > \frac{1}{3}a|\sin\theta|^3$, thì cân bằng là không ổn định.

(e) Giản đồ lực cho mỗi trường hợp cân bằng được mô tả trong hình 1.202, trong đó (i), (ii), (iii) tương ứng với các góc phần tư thứ hai, ba và bốn, với T và F kí hiệu tựa do bản lề và lực ly tâm tưởng tượng. Xét độ lệch nhỏ $\delta\theta$ khỏi vị trí cân bằng chúng ta thấy rằng (i) là bền còn (iii) là không bền, trong trường hợp (ii) tình huống là khá phức tạp. Việc cân bằng hay không cân bằng ở đây là phụ thuộc vào các giá trị tương đối của tham số.

4. ĐỘNG LỰC HỌC CỦA CÁC VẬT BIẾN DẠNG ĐƯỢC (1224 - 1272)

1224

Một sợi dây bị kéo căng giữa hai giá đỡ cứng cách nhau 100cm. Trong dải tần số giữa 100 và 350 Hz chỉ có các giá trị 160, 240, 320 Hz là có thể bị kích thích. Hãy cho biết bước sóng của mỗi kiểu dao động?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Khi hai đầu của dây bị cố định chúng ta có $n\lambda = 2L$, ở đây L là độ dài của sợi dây và n là một số nguyên. Cho bước sóng ứng với các tần số 160, 240, 320 Hz tương ứng là λ_0, λ_1, λ_2. Khi đó

$$n\lambda_0 = (n+1)\lambda_1 = (n+2)\lambda_2 = 200\ ,$$
$$160\lambda_0 = 240\lambda_1 = 320\lambda_2\ .$$

Như vậy $n = 2$, và

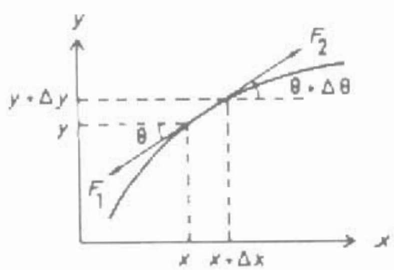
$$\lambda_0 = 100 \text{ cm}, \qquad \lambda_1 = 67 \text{ cm}, \qquad \lambda_2 = 50 \text{ cm}.$$

1225

(a) Viết phương trình liên hệ tần số cơ bản của một sợi dây với các tính chất vật lý và hình học của sợi dây.

(b) Bạn hãy rút ra kết quả từ các phương trình Newton bằng cách phân tích những gì xảy ra đối với một đoạn nhỏ của sợi dây.

(*Wisconsin*)



Hình 1.203

Lời giải:

(a) Giả sử ω là tần số cơ bản của một sợi dây có độ dài l, mật độ tuyến tính ρ và lực căng F. Phương trình liên hệ F, l và ρ là

$$\omega = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{F}{\rho}}.$$

(b) Xét một đoạn nhỏ Δl của sợi dây dọc theo phương x chịu các dao động nhỏ và coi F_1, F_2 là các lực căng ở hai đầu, như hình 1.203. Với dao động nhỏ, $\theta \approx 0$ và $\Delta\theta$ là lượng nhỏ bậc hai. Hơn nữa vì không có chuyển động của x, chúng ta có thể lấy thành phần x của lực trên đoạn Δl là bằng 0. Do đó

$$\begin{aligned} f_x &= F_2\cos(\theta + \Delta\theta) - F_1\cos\theta \\ &\approx (F_2 - F_1)\cos\theta - F_2\Delta\theta\sin\theta \\ &\approx F_2 - F_1 = 0, \end{aligned}$$

hoặc $F_2 \approx F_1$. Khi đó

$$f_y = F\sin(\theta + \Delta\theta) - F\sin\theta \approx F\frac{d\sin\theta}{d\theta}\Delta\theta$$

$$= F\cos\theta\frac{d\theta}{dx}\Delta x \approx F\frac{d\theta}{dx}\Delta x\ .$$

Đối với góc θ nhỏ,

$$\theta \approx \frac{dy}{dx}, \qquad \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}\ ,$$

và phương trình trên trở thành

$$\rho\Delta l\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x$$

theo định luật hai Newton. Vì $\Delta l \approx \Delta x$, điều đó cho

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\rho}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0\ ,$$

nó là phương trình cho một sóng với vận tốc truyền

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho}}\ .$$

Đối với kiểu dao động cơ bản trong một sợi dây chiều dài l với hai đầu được gắn cố định, bước sóng λ được cho bởi $l = \lambda/2$. Do đó tần số góc cơ bản là

$$\omega = \frac{2\pi v}{\lambda} = \frac{\pi v}{l} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{F}{\rho}}\ .$$

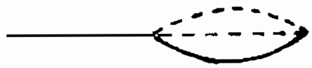
1226

Một sợi dây đàn viôlông có độ dài L và coi là cố định chắc ở cả hai đầu. Âm cơ bản của sợi dây hở có tần số là f_0. Người nghệ sĩ kéo vĩ trên sợi dây đàn ở vị trí $L/4$ kể từ một đầu của sợi dây và chạm nhẹ ở điểm giữa.

(a) Trong những điều kiện này, tần số thấp nhất người nghệ sĩ có thể kích thích dây đàn là bao nhiêu? Phác họa hình dáng của sợi dây.

(b) Với những điều kiện này, tần số của họa âm cao thứ nhất là bao nhiêu?

(*Wisconsin*)



Hình 1.204

Lời giải:

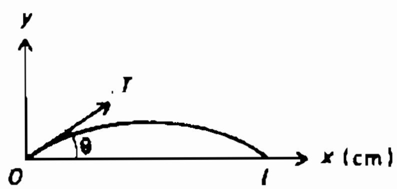
(a) Với sợi dây đàn hở, bước sóng λ_0 tương ứng với tần số cơ bản f_0 được cho bởi $\lambda_0/2 = L$. Khi người nghệ sĩ kéo vĩ ở vị trí $L/4$ từ một đầu dây và chạm vào dây đàn ở vị trí $L/2$, điểm trước là nút sóng còn điểm thứ hai là bụng sóng do đó $\lambda_0 = L$. Do đó, sợi dây đàn có dạng như hình 1.204 và $f_0 \propto 1/\lambda_0$, tần số cơ bản là $2f_0$.

(b) Tần số của họa âm cao thứ nhất $4f_0$.

1227

Một sợi dây đàn ghita có chiều dài 80 cm và tần số cơ bản là 400 Hz. Trong kiểu dao động cơ bản của nó thì độ dịch chuyển lớn nhất ở chính giữa là 2 cm. Nếu lực căng của sợi dây là 10^6 dyn, thì cực đại của thành phần lực ở điểm tựa cuối, vốn vuông góc với vị trí cân bằng của sợi dây đàn là bao nhiêu?

(*Wisconsin*)



Hình 1.205

Lời giải:

Sử dụng hệ tọa độ Descartes với trục x dọc theo vị trí cân bằng của sợi dây và gốc đặt ở một trong các điểm cuối của nó. Khi đó hai đầu cố định tại các vị trí $x = 0$ và $x = l = 80$ cm, như hình 1.205. Tại $x = 0$, thành phần y của lực tác dụng lên điểm tựa là

$$F_y = T\sin\theta \simeq T\theta \simeq T\frac{\partial y}{\partial x} ,$$

ở đây T là lực căng trên sợi dây. Sợi dây đàn có dạng hình sin

$$y = y_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]$$

với $\omega = \frac{2\pi v}{\lambda} = \frac{2\pi v}{2l} = \frac{\pi v}{80}$, $y_0 = 2$ cm. Như vậy

$$y = 2\sin\left(\omega t - \frac{\pi x}{80}\right)\ \text{cm}\ .$$

Do đó ở $x = 0$,

$$F_y = -\frac{2\pi T}{80}\cos(\omega t)$$

và

$$F_{y\max} = \frac{\pi T}{40} = 7,85 \times 10^4\ \text{dyn}\ .$$

1228

Một sóng hình sin truyền theo phương ngang trên một sợi dây bị kéo căng có khối lượng trên đơn vị độ dài ρ, có tần số ω và vận tốc sóng là c. Biên độ cực đại là y_0, ở đây $y_0 \ll \lambda$. Sóng truyền theo chiều tăng của x.

(a) Viết biểu thức của biên độ y như hàm của t và x, ở đây x là khoảng cách đo dọc theo dây.

(b) Mật độ năng lượng (năng lượng/đơn vị độ dài) là bao nhiêu?

(c) Cho biết công suất truyền dọc theo dây?

(d) Nếu sóng được tạo bởi một thiết bị cơ học ở điểm $x = 0$, tìm lực ngang $F_y(t)$ tác dụng lên sợi dây.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) $y = y_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]$.

(b) Mọi điểm sóng truyền qua đều tham gia chuyển động điều hòa đơn giản. Xem xét một phần tử của dây từ x tới $x + \Delta x$. Cơ năng của phần tử này là tổng của động năng và thế năng và là một hằng số bằng cực đại động năng của phần tử này. Vì

$$\dot{y} = \omega y_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]\ ,$$

vận tốc dao động cực đại của phần tử là ωy_0 và cơ năng toàn phần của nó là

$$\frac{1}{2}\Delta m \cdot \omega^2 y_0^2 = \frac{1}{2}\rho\omega^2 y_0^2 \Delta x\ .$$

Do đó năng lượng trên đơn vị độ dài của dây là

$$E = \frac{1}{2}\rho\omega^2 y_0^2 .$$

(c) Vì sóng truyền ở vận tốc c, năng lượng truyền qua một điểm trên sợi dây ở thời điểm t là Ect. Do đó công suất được truyền là

$$\frac{1}{2}\rho c\omega^2 y_0^2 .$$

(d) Lực căng T của sợi dây được cho bởi $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ (bài tập 1225). Lực ngang do thiết bị cơ học tác động lên dây ở vị trí $x = 0$ là (bài tập 1227)

$$F_y(t) = -T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0} = \rho c\omega y_0 \cos(\omega t) .$$

1229

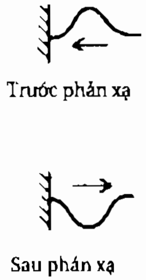
Một sợi dây đàn viôlông có chiều dài 0,5 m và có tần số cơ bản là 200 Hz.

(a) Cho biết tốc độ của một xung ngang truyền trên sợi dây này?

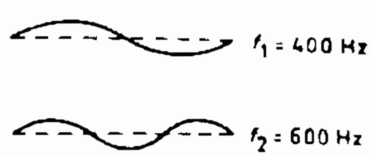
(b) Hãy vẽ dạng của xung ở thời điểm trước và sau phản xạ ở một đầu sợi dây.

(c) Hãy vẽ phác họa hình dạng của sợi dây trong hai kiểu dao động bậc cao hơn tiếp theo và cho biết tần số của mỗi kiểu dao động.

(*Wisconsin*)



Hình 1.206



Hình 1.207

Lời giải:

(a) Với một sợi dây có độ dài l bị gắn chặt ở hai đầu, thì bước sóng λ của kiểu dao động cơ bản được cho bởi $\lambda/2 = l$. Từ đó

$$v = \lambda\nu = 2l\nu = 2 \times 0,5 \times 200 = 200 \text{ m/s} .$$

(b) Hình 1.206 cho ta hình dạng của một xung trước và sau khi phản xạ từ một đầu sợi dây.

(c) Các tần số của hai kiểu dao động bậc cao hơn tiếp theo là 400 Hz và 600 Hz. Hình dạng tương ứng của sợi dây được mô tả trên hình 1.207.

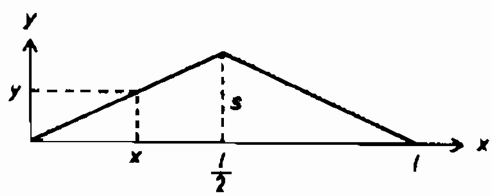
1230

Một sợi dây đàn piano có chiều dài l được cố định hai đầu. Sợi dây có mật độ khối lượng tuyến tính σ và lực căng T.

(a) Tìm các nghiệm được phép cho dao động của sợi dây. Các tần số và bước sóng cho phép của sợi dây là bao nhiêu?

(b) Ở thời điểm $t = 0$ tại điểm giữa sợi dây bị kéo ra một khoảng cách s so với vị trí cân bằng, do đó nó tạo thành một tam giác cân. Sau đó sợi dây được thả ra ($s \ll l$, xem hình 1.208). Tìm chuyển động tiếp theo của sợi dây bằng phương pháp phân tích Fourier.

(*Columbia*)



Hình 1.208

Lời giải:

(a) Dao động của sợi dây được mô tả bởi phương trình sóng (bài toán 1225)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\sigma}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 ,$$

theo các điều kiện

$$y(0, t) = y(l, t) = 0$$

đối với tất cả t. Giả sử

$$y(x,t) = X(t)A(t)$$

và từ trên ta thu được

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{\sigma}{TA}\frac{d^2A}{dt^2} .$$

Vì vế trái của phương trình chỉ phụ thuộc vào x và vế phải chỉ phụ thuộc vào t nên mỗi vế phải bằng một hằng số; giả sử nó là $-k^2$. Khi đó chúng ta có các phương trình vi phân thường

$$\frac{d^2X}{dx^2} + k^2X = 0 ,$$

$$\frac{d^2A}{dt^2} + v^2k^2A = 0 ,$$

ở đây $v = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$.

Nghiệm của các phương trình trên tương ứng là

$$X(x) = c_1\cos(kx) + c_2\sin(kx) ,$$
$$A(t) = b_1\cos(vkt) + b_2\sin(vkt) .$$

Với điều kiện biên $X(0) = X(l) = 0$, chúng ta có

$$c_1 = 0, \qquad c_2\sin(kl) = 0 .$$

Vì cả c_1 và c_2 không thể bằng 0 (nếu không $y(x,t)$ phải đồng nhất bằng 0), chúng ta phải chọn $\sin(kl) = 0$ hoặc

$$kl = n\pi, \qquad n = 1,2,3\dots .$$

Như vậy nghiệm tổng quát được phép là

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{n\pi vt}{l}\right) + B_n\sin\left(\frac{n\pi vt}{l}\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) ,$$

ở đây ta đã thay các hằng số tích phân b_1c_2 bởi A_n và b_2c_2 bởi B_n với n là số nguyên. Mỗi số hạng trong nghiệm tổng quát là một nghiệm được phép tương ứng v ới một kiểu dao động cho phép. Chu kì đối với kiểu dao động thứ n được cho bởi

$$\frac{n\pi v}{l}T_n = 2\pi ,$$

tần số là

$$\nu_n = \frac{1}{T_n} = \frac{n}{2l}v = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{T}{\sigma}},$$

và bước sóng là

$$\lambda_n = \frac{v}{\nu_n} = \frac{2l}{n}.$$

(b) Dạng ban đầu của sợi dây được mô tả trên hình 1.208. Vì

$$\frac{y}{x} = \frac{y}{l-x} = \frac{s}{\frac{l}{2}},$$

điều kiện ban đầu là

$$y(x,0) = \begin{cases} \dfrac{2sx}{l} & \text{đối với} \quad 0 \le x \le \dfrac{l}{2}, \\ \dfrac{2s(l-x)}{l} & \text{đối với} \quad \dfrac{l}{2} \le x \le l. \end{cases}$$

Hơn nữa, ban đầu sợi dây ở trạng thái nghỉ, bởi vậy

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0} = 0.$$

Từ đó

$$B_n = 0,$$

và A_n được cho bởi

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Nhân cả 2 vế với $\sin(m\pi x/l)$ và lấy tích phân từ 0 tới l

$$\begin{aligned}\int_0^l y(x,0)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx \\ &= A_m \int_0^l \sin^2\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx \\ &= \frac{A_m l}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2\xi d\xi = \frac{1}{2}A_m l.\end{aligned}$$

Từ đó

$$\begin{aligned}
A_m &= \frac{2}{l}\int_0^l y(x,0)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx \\
&= \frac{2}{l}\left[\frac{2s}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx + 2s\int_{\frac{l}{2}}^{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx\right] \\
&= \frac{8s}{(m\pi)^2}\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right),
\end{aligned}$$

ta đã sử dụng các công thức

$$\int_0^\pi \sin(mx)\sin(nx)dx = \frac{1}{2}\pi\delta_{mn},$$

$$\int x\sin(ax)dx = \frac{1}{a^2}\sin(ax) - \frac{x}{a}\cos(ax).$$

Như vậy chuyển động của sợi dây được mô tả bởi

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8s}{(n\pi)^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi vt}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

với $v = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$.

1231

Một lò xo ở trạng thái nghỉ có độ dài X, hệ số đàn hồi k và khối lượng m. Một đầu nó được gắn cố định, đầu còn lại gắn với một vật nặng có khối lượng M. Vật M chuyển động không ma sát theo phương ngang trên bề mặt.

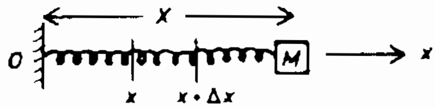
(a) Viết phương trình sóng đối với dao động theo phương dọc của hệ này.

(b) Tìm tần số của kiểu dao động thấp nhất theo khối lượng trong trường hợp khi M và k là hữu hạn và $m \ll M$.

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Đặt trục x dọc theo chiều dài lò xo với gốc ở đầu bị gắn cố định vào giá. Xem xét một đoạn Δx trong khoảng từ x tới $x + \Delta x$ như hình 1.209. Lúc đó, khi M dịch chuyển về phía phải thì điểm x dịch chuyển tới $x + \xi$ và điểm $x + \Delta x$ dịch chuyển tới $x + \Delta x + \xi + \Delta\xi$ như hình 1.210.



Hình 1.209

Hình 1.210

Coi σ là suất Young của lò xo. Lực phục hồi F được cho bởi $F = a\sigma\Delta l/l$, ở đây a là diện tích tiết diện của lò xo và $\Delta l/l$ là độ dãn trên đơn vị độ dài. Viết K_0 thay cho $a\sigma$. Lực tổng hợp lên đoạn đang xét là

$$F_{x+\Delta x} - F_x = K_0\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - K_0\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_x ,$$

mà theo định luật hai Newton nó bằng $\rho\Delta x\left(\partial^2\xi/\partial t^2\right)_x$, ρ là khối lượng trên đơn vị độ dài của lò xo, giả thiết không đổi đối với các độ dãn nhỏ. Bởi vậy

$$\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\right)_x = \frac{K_0}{\rho}\,\frac{\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_x}{\Delta x} = \frac{K_0}{\rho}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right)_x ;$$

hoặc

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} - \frac{m}{K_0X}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = 0 .$$

Đây là phương trình lan truyền sóng dọc theo lò xo và cho vận tốc truyền là

$$v = \sqrt{\frac{K_0X}{m}} = X\sqrt{\frac{k}{m}} ,$$

do $k = K_0/X$ theo định nghĩa.

(b) Thử một nghiệm

$$\xi(x, t) = \xi_0(x)\cos(\omega t + \varphi) ,$$

ở đây ω, φ là các hằng số. Thay chúng vào phương trình sóng ta được

$$\frac{\partial^2\xi_0}{\partial x^2} + K^2\xi_0 = 0 ,$$

ở đây

$$K^2 = \frac{m\omega^2}{K_0 X} = \frac{\omega^2}{v^2} .$$

Nghiệm tổng quát của nó là

$$\xi_0 = A\sin(Kx) + B\cos(Kx) ,$$

A, B là các hằng số tích phân. Điều kiện biên $\xi_0 = 0$ ở $x = 0$ cho $B = 0$. Từ định luật Newton hai chúng ta có

$$M\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\right)_X = -K_0\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_X ,$$

hoặc

$$KX\text{tg}(KX) = \frac{m}{M} ,$$

mà có thể giải để đưa ra các giá trị của K, và từ đó rút ra các tần số dao động của lò xo.

Đối với $m \ll M$ và tần số thấp nhất, tg$(KX) \simeq KX$ và phương trình trên trở thành

$$\frac{\omega^2 m}{k} \approx \frac{m}{M} ,$$

từ đó cho tần số góc thấp nhất là

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} .$$

Lưu ý rằng đây chính là tần số dao động của một dao động tử bao gồm một lò xo khối lượng không đáng kể, hằng số lực k với một đầu được gắn chặt và một đầu kia gắn với vật có khối lượng M.

Để thu được nghiệm gần đúng chính xác hơn, ta khai triển

$$\text{tg}(KX) = KX + \frac{1}{3}(KX)^3 + \cdots$$

và chỉ quan tâm tới số hạng đầu tiên. Khi đó, chúng ta có

$$(KX)^2 = \frac{m}{M}\left[1 + \frac{1}{3}(KX)^2\right]^{-1} \approx \frac{m}{M}\left[1 - \frac{1}{3}(KX)^2\right] ,$$

hoặc

$$K^2 = \frac{3m}{(3M+m)X^2} ,$$

từ đó cho

$$\omega = \sqrt{\frac{3k}{3M+m}}\,.$$

1232

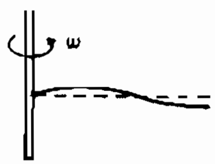
(a) Giả sử bạn có một lò xo khối lượng đều trên đơn vị độ dài là ρ chiều dài l và hai đầu bị giữ với lực căng T. Thiết lập phương trình cho các dao động ngang nhỏ của lò xo và sau đó tìm các tần số dao động riêng.

(b) Bây giờ ta xét trường hợp một lò xo được thả một đầu tự do, đầu còn lại được gắn vào một cái sào thẳng đứng và nó quay xung quanh cái sào này với vận tốc góc ω (bỏ qua tác dụng của lực hấp dẫn), như hình 1.211. Hãy thiết lập phương trình của các dao động nhỏ trong trường hợp này.

(c) Tìm các tần số riêng.

(Gợi ý: phương trình bạn tìm được phải có các số hạng tựa như các số hạng của các đa thức Legendre).

(CUSPEA)



Hình 1.211

Lời giải:

(a) Xem xét một đoạn của lò xo như trên hình 1.212. Thành phần y của lực căng ở x là

$$F_y(x) = -T\sin\theta \approx -T\theta \approx -T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x\,.$$

Tương tự ở $x+\Delta x$

$$F_y(x+\Delta x) \approx T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}\,.$$

Chú ý rằng T là hằng số. Như vậy

$$F_y(x+\Delta x) - F_y(x) = T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x\right] = T\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\cdot\Delta x$$

$$= T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\Delta x\,.$$

Đoạn có độ dài Δx, khối lượng $\rho\Delta x$, và áp dụng định luật Newton hai cho đoạn này ta có

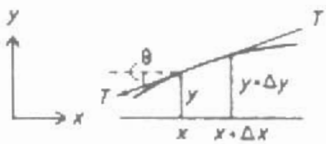
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0\,.$$

Đây là phương trình sóng cho các dao động ngang nhỏ, vận tốc truyền là $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$. Nghiệm tổng quát là (bài tập 1230)

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi vt}{l} + B_n\sin\frac{n\pi vt}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}\,.$$

Các tần số riêng là

$$\nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{n\pi v}{2\pi l} = \frac{nv}{2l}\,.$$



Hình 1.212

(b) Lấy hệ quy chiếu quay $Oxyz$ gắn với lò xo, trục y dọc theo trục quay và trục x là dọc theo lò xo. Ở đây một lực ly tâm tưởng tượng tác động lên lò xo được cân bằng với lực căng. Xét đoạn Δx trên lò xo. Chênh lệch lực căng giữa các điểm mút của lò xo là

$$-\Delta T = \rho\Delta x\cdot x\omega^2\,,$$

từ đó

$$\frac{dT}{dx} = -\rho\omega^2 x\,.$$

Lấy tích phân và áp dụng điều kiện biên $T = 0$ tại $x = l$ ta được

$$T = \frac{1}{2}\rho\omega^2(l^2 - x^2)\,.$$

Làm theo quy trình ở (a) ta được

$$F_y(x+\Delta x) - F_y(x) = \left(T\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(T\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x$$
$$\approx \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\rho\omega^2(l^2 - x^2)\frac{\partial y}{\partial x}\right]\Delta x \,.$$

Theo định luật Newton hai ta được

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\rho\omega^2(l^2 - x^2)\frac{\partial y}{\partial x}\right]\Delta x \,,$$

hoặc

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(l^2 - x^2)\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \frac{2}{\omega^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \,,$$

đối với các dao động ngang nhỏ.

(c) Thử một nghiệm kiểu $y \sim e^{-i\Omega t}$ và giả sử $\xi = \frac{x}{l}$. Khi đó phương trình trên trở thành

$$(1-\xi^2)\frac{\partial^2 y}{d\xi^2} - 2\xi\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{2\Omega^2}{\omega^2}y = 0 \,,$$

với $0 \le \xi \le 1$. Phương trình vi phân này có các nghiệm hữu hạn nếu

$$\frac{2\Omega^2}{\omega^2} = n(n+1) \,,$$

n là số nguyên. Phương trình trên được biết như phương trình vi phân Legendre và các nghiệm là đa thức Legendre. Do đó các tần số riêng được cho bởi

$$\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{\omega}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}n(n+1)} \,,$$

ở đây $n = 1, 2, 3, \ldots$. Tuy nhiên chúng ta vẫn phải làm thỏa mãn điều kiện biên $y = 0$ tại $\xi = 0$. Điều này giới hạn n cho phép chấp nhận các giá trị nguyên lẻ $1, 3, 5, \ldots$ vì các đa thức Legendre $P_n(\xi) = 0$ ở $\xi = 0$ chỉ đối với giá trị lẻ của n.

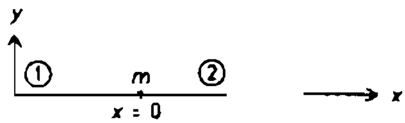
1233

Một lò xo dài có mật độ dài (khối lượng trên đơn vị độ dài) μ chịu lực căng T. Một chất điểm m được gắn ở một điểm đặc biệt trên lò xo. Một sóng với tần số góc ω truyền dọc theo lò xo tới từ bên trái.

(a) Tính tỉ lệ năng lượng tới bị phản xạ trở lại bởi khối lượng m.

(b) Giả thiết rằng khối lượng điểm m bị thay thế bằng một lò xo có mật độ dài $\mu_m \gg \mu$ và độ dài ngắn l sao cho $l = m/\mu_m$. Với khoảng các giá trị độ dài l bằng bao nhiêu (với m cố định) để câu trả lời trong (a) vẫn là gần đúng?

(*CUSPEA*)



Hình 1.213

Lời giải:

(a) Chia không gian thành hai khu vực với điểm chia tại m, tại đây đặt gốc của trục x như ở hình 1.213. Trong khu vực 1, giả thiết hàm sóng là

$$y^{(1)} = e^{ikx} + Ae^{-ikx} ,$$

ở đây $k = \omega/v$, $v = \sqrt{T/\mu}$ là vận tốc của sóng (bài tập 1225), số hạng thứ hai ở vế phải biểu diễn sóng phản xạ. Trong khu vực 2 chúng ta có

$$y^{(2)} = Be^{ikx} .$$

Tại $x = 0$, nơi đặt khối lượng m, chúng ta cần

$$y^{(1)} = y^{(2)}$$

nghĩa là

$$1 + A = B . \tag{1}$$

Hơn nữa, xét các lực tác động trên chất điểm m chúng ta có

$$m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial y^{(2)}}{\partial x} - T\frac{\partial y^{(1)}}{\partial x} ,$$

ở đây thay cho y chúng ta có thể sử dụng $y^{(1)}$ hoặc $y^{(2)}$. Khi ấy

$$-m\omega^2 B = ikT(B - 1 + A) . \tag{2}$$

Giải (1) và (2) ta có

$$A = \frac{-m\omega^2}{2ikT + m\omega^2},$$

$$B = \frac{2ikT}{2ikT + m\omega^2} .$$

Do đó tỉ lệ năng lượng tới bị phản xạ là

$$|A|^2 = \frac{m^2\omega^4}{4k^2T^2 + m^2\omega^4}\,.$$

(b) Tính toán trong câu (a) vẫn áp dụng được với điều kiện$l \ll \lambda$, ở đây λ là bước sóng, là

$$\frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{T}{\mu}}\,.$$

Do đó điều kiện ở đây để câu trả lời trong câu (a) vẫn gần đúng là

$$l \ll \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{T}{\mu}}\,.$$

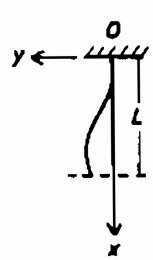
1234

Một lò xo rất dẻo có mật độ khối lượng dài đều ρ và độ dài L. Một đầu của lò xo được treo trên giá cố định, đầu còn lại để tự do, như ở hình 1.214.

(a) Tìm phương trình đạo hàm riêng mô tả dao động ngang nhỏ (trong một mặt phẳng của lò xo) và từ nó tìm phương trình vi phân cho dạng của các kiểu dao động chuẩn tắc.

(b) Sử dụng phương pháp chuẩn (chuỗi lũy thừa) để giải phương trình vi phân này (mẹo biến nó thành phương trình Bessel là không cần thiết) và sử dụng phương pháp xấp xỉ số trị để tìm tần số của kiểu dao động chuẩn tắc thấp nhất.

(*Princeton*)



Hình 1.214

Lời giải:

(a) Sử dụng hệ tọa độ $Oxyz$ như hình 1.214, theo thủ tục ở bài 1232, theo định luật Newton hai, với đoạn Δx của lò xo, chúng ta có

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left(T\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(T\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x ,$$

hoặc

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial y}{\partial x}\right) .$$

Lực căng T ở lò xo tại điểm x liên hệ với trọng lực bởi

$$T = \int_x^L \rho g dx = \rho g(L-x) ,$$

bởi vậy phương trình trên trở thành

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = g\frac{\partial}{\partial x}\left[(L-x)\frac{\partial y}{\partial x}\right] .$$

Đây là phương trình đạo hàm riêng mô tả các dao động ngang nhỏ của lò xo. Sử dụng phương pháp tách biến bằng cách đặt

$$y(x,t) = \xi(x)\tau(t) ,$$

chúng ta thu được

$$\frac{1}{g\tau}\frac{d^2\tau}{dt^2} = \frac{1}{\xi}\frac{d}{dx}\left[(L-x)\frac{d\xi}{dx}\right] .$$

Vì vế trái của phương trình phụ thuộc duy nhất vào t và vế phải phụ thuộc duy nhất vào x, nên mỗi vế phải bằng một hằng số, bằng $-\lambda$, chẳng hạn λ là một số dương. Bởi vậy chúng ta có các phương trình vi phân thường tương đương.

$$\frac{d}{dx}\left[(L-x)\frac{d\xi}{dx}\right] + \lambda\xi = 0 ,$$

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} + \lambda g\tau = 0 .$$

Điều kiện biên là

$$y(0,t) = 0, \qquad y(L,t) = \text{ hữu hạn} ,$$

nghĩa là

$$\xi(0) = 0, \qquad \xi(L) = \text{ hữu hạn} .$$

(b) Phương trình ξ có thể được viết là

$$(x - L)\xi'' + \xi' - \lambda\xi = 0 .$$

Vì $x = L$ là điểm dị thường, phương trình có nghiệm dạng

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - L)^n .$$

Khi đó

$$\xi' = \sum_{1}^{\infty} n a_n (x - L)^{n-1} = \sum_{0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x - L)^n ,$$

$$\xi'' = \sum_{1}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} (x - L)^{n-1} = \sum_{2}^{\infty} (n-1) n a_n (x - L)^{n-2} ,$$

$$(x - L)\xi'' = \sum_{2}^{\infty} (n-1) n a_n (x - L)^{n-1} = \sum_{1}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} (x - L)^n ,$$

và phương trình ξ trở thành

$$(a_1 - \lambda a_0) + \sum_{1}^{\infty} [(n+1)^2 a_{n+1} - \lambda a_n](x - L)^n = 0 .$$

Đặt bằng nhau các hệ số của $(x - L)^n$ ở cả hai vế của phương trình, chúng ta tìm được

$$a_1 = \lambda a_0, \qquad a_{n+1} = \frac{\lambda}{(n+1)^2} a_n .$$

Từ đó

$$a_2 = \frac{\lambda}{2^2} a_1 = \frac{\lambda^2}{2^2} a_0 ,$$

$$a_3 = \frac{\lambda}{3^2} a_2 = \frac{\lambda^3}{(3 \cdot 2)^2} a_0 ,$$

$$\ldots\ldots$$

$$a_n = \frac{\lambda^n}{(n!)^2} a_0 ,$$

$$\ldots\ldots ,$$

cho ta

$$\xi(x) = a_0 \sum_0^\infty \frac{\lambda^n}{(n!)^2} (x - L)^n .$$

Điều kiện biên $\xi(0) = 0$ cho ta

$$f(\lambda L) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n (\lambda L)^n}{(n!)^2} = 1 - \lambda L + \frac{1}{4} \lambda^2 L^2 - \ldots = 0 .$$

Phương trình này có thể được giải để tìm các nghiệm λL, các nghiệm này cho các tần số của những kiểu dao động khác nhau, $\sqrt{\lambda g}/2\pi$, theo phương trình τ.

Đối với một nghiệm gần đúng chúng ta chỉ giữ lại các số hạng tới $n = 2$ trong $f(\lambda L)$

$$f(\lambda L) \approx 1 - \lambda L + \frac{1}{4} (\lambda L)^2 ,$$

Phương pháp xấp xỉ của Newton cho ta nghiệm gần đúng chính xác hơn của $f(\lambda L) = 0$, α_{k+1}, nếu chúng ta nhập một nghiệm gần đúng α_k bằng các tính

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - \frac{f(\alpha_k)}{f'(\alpha_k)} .$$

Vì

$$f'(\lambda L) \approx -1 + \frac{1}{2} \lambda L ,$$

nếu chúng ta lấy $\alpha_1 = 0$, thì

$$\alpha_2 = 1, \qquad f(\alpha_2) \approx 0,25 ,$$

$$\alpha_3 = 1 - \frac{0,25}{-0,5} = 1,5, \qquad f(\alpha_3) \approx 0,625 .$$

Vì $f(\alpha_3)$ là quá gần 0 nên chúng ta có thể lấy $\alpha_3 = 1,5$ là nghiệm dương nhỏ nhất. Như vậy

$$\lambda_{\min} = \frac{1.5}{L} .$$

đối với kiểu dao động thấp nhất. Khi đó đối với kiểu dao động này

$$\tau = A\cos(\sqrt{\lambda g}\, t) + B\sin(\sqrt{\lambda g}\, t)$$

và tần số là

$$\nu_{\min} \approx \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{2L}} .$$

1235

Một giới thiệu chứng minh bài giảng thông thường mô tả như sau: nắm hoặc kẹp một thanh nhôm mảnh, dài một mét ở tâm. Dùng búa đập vào một đầu theo chiều dọc của thanh (nghĩa là song song với trục của thanh) và kết quả tạo ra một sóng âm có tần số 2500 Hz.

(a) Từ thí nghiệm này tính tốc độ truyền âm trong không khí.

(b) Tính tốc độ truyền sóng âm trong nhôm.

(c) Liệu bạn có thể giữ thanh nhôm để kích thích ở tần số 3750 Hz? Đập vào đầu nào của thanh nhôm có quan trọng hay không? Giải thích.

(d) Giả thiết bạn nắm thanh nhôm ở tâm của nó như ở trên nhưng đập ngang thanh chứ không phải dọc theo thanh. Hãy giải thích định tính tại sao sóng âm tạo ra lúc này có tần số thấp hơn trường hợp trên.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Điểm mà búa đập vào thanh là một bụng sóng và điểm nó bị giữ là nút sóng. Với thanh bị giữ ở tâm và một đầu của nó bị đập thì bước sóng λ quan hệ với độ dài của thanh L qua biểu thức $\lambda = 2L$. Do đó tốc độ truyền âm trong nhôm là

$$v_{\mathrm{Al}} = \nu\lambda = 2\nu L = 2 \times 2500 \times 1 = 5000 \text{ m/s} .$$

Tốc độ của sóng âm trong chất rắn là

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} ,$$

ở đây Y là suất Young (suất đàn hồi) của vật liệu và ρ là mật độ của nó. Tốc độ âm thanh trong chất lưu là

$$v = \sqrt{\frac{M}{\rho}} \, ,$$

ở đây M là suất nén của nó và ρ là mật độ. Đối với sự nén đoạn nhiệt của một chất khí, $M = \gamma p$, ở đây p là áp suất của nó và γ là tỉ số các nhiệt dung riêng chính của nó; $\gamma = 1,4$ đối với không khí, một chất khí lưỡng nguyên tử. Do đó

$$\frac{v_{\text{không khí}}}{v_{\text{Al}}} = \sqrt{\frac{1,4p\rho_{\text{Al}}}{Y\rho_{\text{không khí}}}} \, .$$

Với

$$\begin{aligned}
p &= 1,013 \times 10^6 \text{ dyn/cm}^2 \quad \text{(áp suất tiêu chuẩn,)} \\
Y &= 7,05 \times 10^{11} \text{ dyn/cm}^2 \, , \\
\rho_{\text{Al}} &= 2,7 \text{ g/cm}^3 \, , \\
\rho_{\text{không khí}} &= 1,165 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3 \quad (\text{ở } 30^\circ\text{C}) \, , \\
v_{\text{không khí}} &= 6,83 \times 10^{-2} \times 5000 = 341 \text{ m/s} \, .
\end{aligned}$$

(b) $v_{\text{Al}} = 5000$ m/s.

(c) Giả sử thanh bị giữ ở khoảng x tính từ đầu bị búa đập. Chúng ta có

$$x = \frac{\lambda}{4} = \frac{v}{4\nu} = \frac{5000}{4 \times 3750} = \frac{1}{3} \, m \, .$$

Từ đó, thanh phải được giữ ở vị trí $\frac{1}{3}\,m$ so với điểm bị búa đập. Nếu được giữ như vậy nhưng dùng búa đập ở đầu kia chúng ta phải có

$$\frac{2}{3} = \frac{v}{4\nu}$$

và tần số sẽ phải là 1875 Hz.

(d) Nếu thanh bị đập theo phương ngang, sóng tạo ra sẽ là sóng ngang, không nén và vận tốc truyền khi đó được cho bởi

$$v = \sqrt{\frac{N}{\rho}} \, ,$$

ở đây N là suất trượt. Vì suất trượt của một chất rắn nói chung nhỏ hơn suất nén của nó, nên vận tốc v bây giờ là nhỏ hơn. Và vì

$$\nu = \frac{v}{2L}$$

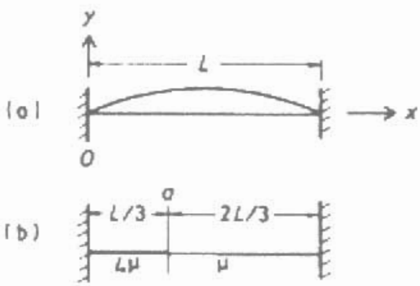
nên tần số được tạo ra là thấp hơn.

1236

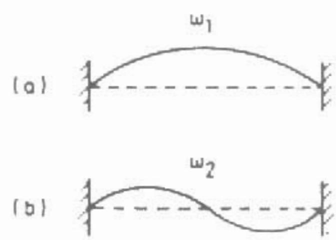
(a) Một sợi dây đàn viôlông có độ dài L với mật độ dài μ kg/m và lực căng T niutơn chịu các dao động nhỏ, (hình 1.215 (a)). Viết các nghiệm cho họa ba cơ bản và họa ba thứ nhất và vẽ sự phụ thuộc của x của chúng. Hãy đưa ra tần số góc ω_1 của họa ba cơ bản và của tần số góc ω_2 của họa ba thứ nhất.

(b) 1/3 bên trái của sợi dây đàn được bọc sao cho làm tăng mật độ dài của nó thành 4μ kg/m (hình 1.215(b)). Lặp lại như phần (a), nghĩa là đưa ra và vẽ phác họa ba cơ bản và họa ba thứ nhất mới và biểu diễn các tần số góc mới ω_1 và ω_2 theo các tần số góc ban đầu ω_1 và ω_2 trong phần (a).

(*UC, Berkeley*)



Hình 1.215



Hình 1.216

Lời giải:

(a) Sử dụng hệ trục tọa độ như hình 1.215(a). Phương trình chuyển động của dây đàn là (bài 1225)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \,,$$

từ đó ta thấy rằng sóng truyền dọc theo dây đàn $v = \sqrt{T/\mu}$. Vì hai đầu của dây đàn bị cố định, kiểu dao động cơ bản (hình 1.216(a)) có bước sóng λ_1 cho bởi

$$L = \frac{1}{2}\lambda_1 .$$

Từ đó tần số góc cơ bản là

$$\omega_1 = \frac{2\pi v}{\lambda_1} = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} .$$

Nghiệm đối với kiểu dao động cơ bản là

$$y_1 = A_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos(\omega_1 t + \varphi_1) ,$$

ở đây A_1, φ_1 là các hằng số được xác định từ các điều kiện ban đầu. Bước sóng của họa ba thứ nhất (hình 1.216(b)) là $\lambda_2 = L$. Do đó với họa ba thứ nhất tần số góc là

$$\omega_2 = \frac{2\pi v}{\lambda_2} = \frac{2\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

và nghiệm là

$$y_2 = A_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\cos(\omega_2 t + \varphi_2) ,$$

ở đây A_2, φ_2 là các hằng số được xác định từ các điều kiện ban đầu.

(b) Các phương trình chuyển động đối với hai phần là

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{4\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \qquad 0 \le x \le \frac{L}{3} ,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \qquad \frac{L}{3} \le x \le L .$$

Các điều kiện biên là cho tất cả t, $y = 0$ ở $x = 0, L$, và y và $\partial y/\partial x$ là liên tục ở $x = L/3$. Như vậy các nghiệm của các phương trình chuyển động là

$$y(x,t) = \begin{cases} (A_1\cos\omega t + B_1\sin\omega t)\sin\left(\dfrac{\omega}{v_1}x\right), & 0 \le x \le \dfrac{L}{3} , \\ (A_2\cos\omega t + B_2\sin\omega t)\sin\left[\dfrac{\omega}{v_2}(L-x)\right], & \dfrac{L}{3} \le x \le L , \end{cases}$$

với

$$v_1 = \sqrt{\frac{T}{4\mu}}, \qquad v_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = 2v_1$$

và

$$
\begin{aligned}
&(A_1 \cos\omega t + B_1 \sin\omega t) \sin\left(\frac{L\omega}{3v_1}\right) \\
&\qquad = (A_2 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t) \sin\left(\frac{L\omega}{3v_1}\right) , \\
&\frac{\omega}{v_1}(A_1 \cos\omega t + B_1 \sin\omega t) \cos\left(\frac{L\omega}{3v_1}\right) \\
&\qquad = -\frac{\omega}{2v_1}(A_2 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t) \cos\left(\frac{L\omega}{3v_1}\right) .
\end{aligned}
$$

Đặt bằng nhau riêng rẽ các hệ số của $\cos\omega t$ và $\sin\omega t$ ở hai vế của hai phương trình cuối cùng ta được

$$
\begin{aligned}
&A_1 \sin\left(\frac{L\omega}{3v_1}\right) - A_2 \sin\left(\frac{L\omega}{3v_1}\right) = 0 , \\
&A_1 \frac{\omega}{v_1} \cos\left(\frac{L\omega}{3v_1}\right) + A_2 \frac{\omega}{2v_1} \cos\left(\frac{L\omega}{3v_1}\right) = 0 , \\
&B_1 \sin\left(\frac{L\omega}{3v_1}\right) - B_2 \sin\left(\frac{L\omega}{3v_1}\right) = 0 , \\
&B_1 \frac{\omega}{v_1} \cos\left(\frac{L\omega}{3v_1}\right) + B_2 \frac{\omega}{2v_1} \cos\left(\frac{L\omega}{3v_1}\right) = 0 .
\end{aligned}
$$

Để các A_1, A_2, B_1, B_2 không phải tất cả đều bằng 0 chúng ta cần

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix}
\sin\left(\frac{L\omega}{3v_1}\right) & -\sin\left(\frac{L\omega}{3v_1}\right) \\
\frac{\omega}{v_1}\cos\left(\frac{L\omega}{3v_1}\right) & \frac{\omega}{2v_1}\cos\left(\frac{L\omega}{3v_1}\right)
\end{vmatrix}
&= \frac{3\omega}{2v_1} \sin\left(\frac{L\omega}{3v_1}\right) \cos\left(\frac{L\omega}{3v_1}\right) \\
&= \frac{3\omega}{4v_1} \sin\left(\frac{2L\omega}{3v_1}\right) = 0 ,
\end{aligned}
$$

nghĩa là

$$
\frac{2L\omega}{3v_1} = n\pi, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .
$$

Từ đó các tần số góc cơ bản mới của họa ba cơ bản và họa ba thứ nhất là

$$\omega_1' = \frac{3\pi v_1}{2L} = \frac{3\pi}{4L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{3}{4}\omega_1 ,$$

$$\omega_2' = \frac{6\pi v_1}{2L} = \frac{3\pi}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{3}{2}\omega_1 .$$

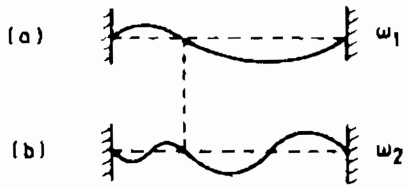
Đối với tần số cơ bản ω_1',

$$A_2 = A_1 , \qquad B_2 = B_1 .$$

Đối với tần số họa ba thứ nhất ω_2',

$$A_2 = -2A_1 , \qquad B_2 = -2B_1 .$$

Các dạng sóng tương ứng được vẽ trong các hình 1.217 (a) và (b).



Hình 1.217

1237

Một sợi dây dài vô hạn có lực căng T và mật độ dài σ. Ở $t = 0$, độ biến dạng của sợi dây được cho bởi hàm $f(x)$, và phân bố vận tốc ban đầu của nó được cho bởi $g(x)$. Chuyển động của sợi dây ở thời điểm $t > 0$ là như thế nào?

(*Chicago*)

Lời giải:

Biến dạng của sợi dây truyền đi như là sóng, tuân theo phương trình sóng

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

với

$$v = \pm\sqrt{\frac{T}{\sigma}} .$$

Nghiệm tổng quát là tổng của các sóng chạy theo các phương $-x$ và $+x$

$$y = f_1(x + vt) + f_2(x - vt) .$$

Điều kiện ban đầu cho ta

$$f_1(x) + f_2(x) = f(x) , \tag{1}$$

$$f_1'(x) - f_2'(x) = \frac{g(x)}{v} , \tag{2}$$

ở đây

$$f_1'(x) = \left(\frac{\partial f_1(\xi)}{\partial \xi}\right)_{t=0} , \qquad f_2'(x) = \left(\frac{\partial f_2(\xi)}{\partial \xi}\right)_{t=0} ,$$

tương ứng với $\xi = x + vt$, $\xi = x - vt$. Lấy tích phân phương trình (2) ta được

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{v}\int^x g(x')dx' + C , \tag{3}$$

C là một hằng số tùy ý. Kết hợp các phương trình (1) và(3) ta được

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + \frac{1}{\mathrm{v}}\int^x g(x')dx' + C\right] ,$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) - \frac{1}{\mathrm{v}}\int^x g(x')dx' - C\right] .$$

Do đó

$$\begin{aligned} y(x,t) &= f_1(x + vt) + f_2(x - vt) \\ &= \frac{1}{2}\left\{ \left[f(x + vt) + \frac{1}{\mathrm{v}}\int^{x+vt} g(x')dx' + C\right] \right. \\ &\qquad \left. + \left[f(x - vt) - \frac{1}{\mathrm{v}}\int^{x-vt} g(x')dx' - C\right] \right\} \\ &= \frac{1}{2}\left[f(x + vt) + f(x - vt) + \frac{1}{\mathrm{v}}\int_{x-vt}^{x+vt} g(x')dx'\right] . \end{aligned}$$

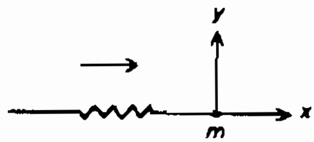
1238

Một bó sóng dài với biên độ A bao gồm chủ yếu các tần số rất gần ω_0 lan truyền trên một sợi dây dài vô hạn có mật độ khối lượng dài μ. Sợi dây bị kéo ra với lực căng T như ở hình 1.218. Bó sóng truyền trên sợi dây và gặp hạt có khối lượng m gắn trên sợi dây (được mô tả trên hình).

(a) Biên độ của bó sóng truyền đi là bao nhiêu?

(b) Trong giới hạn m lớn và tần số cao (ω_0 lớn), thì biên độ lớn của sóng truyền đi phụ thuộc vào ω_0 như thế nào?

(MIT)



Hình 1.218

Lời giải:

(a) Phương trình chuyển động của sợi dây đối với các dao động ngang nhỏ là một phương trình sóng (bài 1225)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 ,$$

vận tốc truyền sóng là $v = \pm\sqrt{T/\mu}$. Đối với các song có tần số góc ω, ta định nghĩa số sóng

$$k = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{\frac{\mu}{T}} .$$

Đối với các sóng với tần số góc rất gần ω_0, phương trình sóng có các nghiệm

$$y_1 = Ae^{i(kx-\omega_0 t)} + Be^{-i(kx-\omega_0 t)} \qquad \text{đối với } x < 0 ,$$

$$y_2 = Ce^{i(kx-\omega_0 t)} \qquad \text{đối với } x > 0 ,$$

ở đây A, B, C tương ứng là biên độ của các sóng tới, sóng phản xạ và sóng truyền đi và vị trí của hạt được đặt ở gốc của trục x. Tính liên tục của độ dịch chuyển ở biên đòi hỏi $y_1 = y_2$ ở $x = 0$ với tất cả t, nghĩa là

$$A + B = C .$$

Phương trình chuyển động của hạt là

$$m\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_{x=0} = -T\sin\theta_1 + T\sin\theta_2$$

$$\approx -T\theta_1 + T\theta_2$$

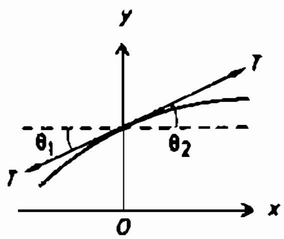
$$\approx -T\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)_{x=0} + T\left(\frac{\partial y_2}{\partial x}\right)_{x=0},$$

ở đây θ_1, θ_2 là các góc mà sợi dây tạo với trục x tương ứng đối với $x < 0$ và $x > 0$ như mô tả trên hình 1.219. Như

$$-m\omega_0^2 C = -ikT(A - B) + ikTC\,,$$

hoặc

$$A - B = \left(1 + \frac{m\omega_0^2}{ikT}\right)C\,.$$



Hình 1.219

Vì $A + B = C$ chúng ta có

$$C = \frac{2A}{\left(2 + \frac{m\omega_0^2}{ikT}\right)},$$

và biên độ của sóng truyền đi là

$$|C| = \sqrt{C^*C} = \frac{2A}{\sqrt{4 + \frac{m^2\omega_0^4}{k^2T^2}}} = \frac{2A}{\sqrt{4 + \frac{m^2\omega_0^4}{\mu T}}}\,.$$

(b) Trong giới hạn m lớn và ω_0 lớn chúng ta có

$$|C| \approx \frac{2A}{m\omega_0}\sqrt{\mu T} \propto \frac{1}{\omega_0}\,.$$

1239

Một sợi dây có độ dài L và khối lượng trên một đơn vị dài là ρ. Nó chịu sự rung nhỏ theo phương ngang trong mặt phẳng (x, y) với hai đầu của sợi dây được cố định ở các tọa độ tương ứng $(0, 0)$ và $(L, 0)$. Sức căng là K. Ở đây có mặt lực ma sát phụ thuộc vận tốc: nếu một đoạn nhỏ có độ dài δl có vận tốc ngang là v thì lực ma sát là $-kv\delta l$. Sử dụng sự xấp xỉ thích hợp, các phương trình sau sẽ đúng cho biên độ dao động $y(x, t)$

(i) $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a\frac{\partial y}{\partial t} = b\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, (ii) $y(0, t) = 0 = y(L, t)$.

(a) Tìm các hằng số a và b trong (i). Nếu bạn không thể làm phần này, hãy cho a và b là các hằng số dương và chuyển sang phần tiếp theo.

(b) Tìm tất cả các nghiệm của (i) và (ii), các nghiệm đó có dạng tích $y = X(x)T(t)$. Bạn có thể giả thiết $a^2 < b/L^2$.

(c) Giả sử $y(x, 0) = 0$,

$$\dot{y}(x, 0) = A\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) + B\sin\left(\frac{5\pi x}{L}\right) .$$

Ở đây A và B là các hằng số. Tìm $y(x, t)$.

(d) Giả sử thay thế $a = 0$ và $\dot{y}(x, 0) = 0$ trong khi

$$y(x, 0) = \begin{cases} Ax, & 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ A(L - x), & \frac{L}{2} \le x \le L . \end{cases}$$

Tìm $y(x, t)$.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Lực ma sát tác dụng lên một đơn vị độ dài của sợi dây là $-kv = -k\partial y/\partial t$, bởi vậy dao động ngang của sợi dây được mô tả bởi

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = K\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - k\frac{\partial y}{\partial t} ,$$

hoặc

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \left(\frac{k}{\rho}\right)\frac{\partial y}{\partial t} = \left(\frac{K}{\rho}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} .$$

Từ đó $a = k/\rho$, $b = K/\rho$.

(b) Đặt $y = X(x)T(t)$ và thay thế nó vào phương trình sóng chúng ta được

$$\frac{T''}{T} + \frac{aT'}{T} = \frac{bX''}{X} .$$

Vì vế trái của phương trình trên chỉ phụ thuộc vào t và vế phải chỉ phụ thuộc vào x, nên mỗi vế phải bằng một hằng số, $-b\lambda^2$ chẳng hạn. Như vậy chúng ta có

$$X'' + \lambda^2 X = 0 ,$$
$$T'' + aT' + b\lambda^2 T = 0 .$$

Sử dụng điều kiện biên

$$y(0,t) = y(L,t) = 0, \text{ i.e. } X(0) = X(L) = 0 ,$$

chúng ta thu được nghiệm cho phương trình thứ nhất

$$X_n(x) = A_n \sin(\lambda_n x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) ,$$

ở đây A_n là hằng số và $n = 1, 2, 3, \ldots$. Phương trình thứ hai khi đó trở thành

$$T'' + aT' + b\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T = 0 .$$

Cho $T(t) = e^{pt}$ chúng ta thu được phương trình đặc trưng

$$p^2 + ap + \frac{n^2\pi^2 b}{L^2} = 0,$$

các nghiệm của nó là

$$p_{\pm} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4n^2\pi^2 b/L^2}}{2} = -\frac{a}{2} \pm i\omega_n ,$$

ở đây

$$\omega_n = \sqrt{\frac{n^2\pi^2 b}{L^2} - \frac{a^2}{4}}$$

là số thực khi $b/L^2 > a^2$. Do đó nghiệm của phương trình hai có thể được viết là

$$T_n = [C'_n \sin(\omega_n t) + D'_n \cos(\omega_n t)]e^{-\frac{at}{2}} ,$$

và như vậy

$$y_n = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)[C_n \sin(\omega_n t) + D_n \cos(\omega_n t)]e^{-\frac{at}{2}}$$

nhóm các hằng số trong mỗi số hạng vào một. Ta có nghiệm tổng quát của phương trình sóng là

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x,t)\,.$$

(c) Vì $y(x,0) = 0$, $D_n = 0$ đối với tất cả n chúng ta có

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin(\omega_n t) e^{-\frac{at}{2}}\,.$$

và

$$\dot{y}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) [\omega_n \cos(\omega_n t) - \frac{a}{2}\sin(\omega_n t)] e^{-\frac{at}{2}}\,.$$

Khi đó vì

$$\dot{y}(x,0) = A\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) + B\sin\left(\frac{5\pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\omega_n\,,$$

chúng ta có

$$C_3 = \frac{A}{\omega_3}, \qquad C_5 = \frac{B}{\omega_5}$$

và tất cả $C_n = 0$. Do đó

$$y(x,t) = \left[\frac{A}{\omega_3}\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\sin(\omega_3 t) + \frac{B}{\omega_5}\sin\left(\frac{5\pi x}{L}\right)\sin(\omega_5 t)\right] e^{-\frac{at}{2}}$$

với

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{9\pi^2 b}{L^2} - \frac{a^2}{4}}, \qquad \omega_5 = \sqrt{\frac{25\pi^2 b}{L^2} - \frac{a^2}{4}}\,.$$

(d) Bắt đầu với nghiệm tổng quát

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) [C_n \sin(\omega_n t) + D_n \cos(\omega_n t)] e^{-\frac{at}{2}}\,,$$

chúng ta tìm $C_n = 0$ cho tất cả n khi $\dot{y}(x,0) = 0$. Khi đó

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \begin{cases} Ax, & 0 \le x \le L/2\,, \\ A(L-x), & L/2 \le x \le L\,. \end{cases}$$

Vì

$$\int_0^L y(x,0)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^L D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx$$
$$= \frac{LD_m}{2} ,$$

chúng ta có

$$\begin{aligned} D_m &= \frac{2}{L}\int_0^L y(x,0)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx \\ &= \frac{2}{L}\int_0^{L/2} Ax\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx + \frac{2}{L}\int_{L/2}^{L} A(L-x)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx \\ &= \frac{4AL}{m^2\pi^2}\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) . \end{aligned}$$

Chú ý rằng chúng ta đã sử dụng công thức

$$\int_0^{\pi}\sin(mx)\sin(nx)dx = \frac{\pi}{2}\delta_{mn}$$

ở trên. Cuối cùng chúng ta có

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4AL}{n^2\pi^2}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(\omega_n t) ,$$

ở đây

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}\sqrt{b}$$

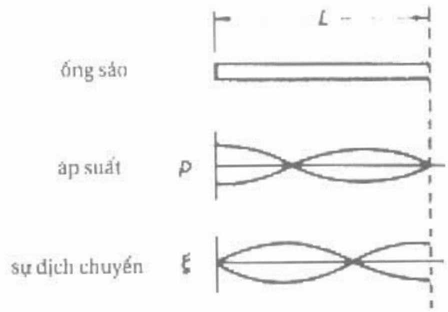
khi $a = 0$.

1240

(a) Vẽ biểu đồ dịch chuyển của không khí và áp suất dọc theo một ống sáo được đóng kín ở một đầu cho kiểu dao động thứ hai.

(b) Tần số của kiểu dao động này quan hệ gì với tần số cơ bản?

(*Wisconsin*)



Hình 1.220

Lời giải:

(a) Áp suất và độ dịch chuyển không khí là hàm của khoảng cách từ đầu bị đóng, nó được mô tả trên hình 1.220.

(b) Với kiểu dao động này, $L = 3\lambda/4$, trong khi đối với kiểu dao động cơ bản thì $L = \lambda/4$. Từ đó nếu ω_0 là tần số cơ bản thì tần số của kiểu dao động này là $3\omega_0$.

1241

Một ống đàn ocgan có độ dài l hở ở cả hai đầu được dùng trong một đường ống khí động dưới âm thanh để đo số Mach v/c của không khí trong đường ống, như ở hình 1.221. Ống đàn khi gắn cố định trong đường ống được quan sát là cộng hưởng với chu kì cơ bản t. Nếu $v/c = 1/2$, tính tỉ số của các chu kì t/t_0, ở đây t_0 là chu kì cơ bản của ống đàn khi đặt trong không khí tĩnh.

(*Wisconsin*)

Hình 1.221

Lời giải:

Vì ống đàn ocgan hở cả hai đầu nên bước sóng cơ bản của sóng âm trong cộng hưởng với nó được cho bởi $\lambda/2 = l$. Chu kì tương ứng là

$$t = \frac{\lambda}{v} = \frac{2l}{v} \, ,$$

ở đây v là vận tốc của âm thanh so với ống đàn.

Khi không khí trong ống v vẫn tĩnh lặng bằng vận tốc của âm trong không khí tĩnh, c, và chu kì cơ bản là

$$t_0 = \frac{2l}{c} \, .$$

Khi không khí trong ống chuyển động với vận tốc $c/2$, thì ống có thể xem như chuyển động với vận tốc $-c/2$ trong không khí tĩnh. Như vậy, $v = c - (-c/2) = 3c/2$ và chu kì là

$$t = \frac{2l}{\frac{3c}{2}} = \frac{4l}{3c} \, .$$

Từ đó ta có tỉ số

$$\frac{t}{t_0} = \frac{2}{3} \, .$$

1242

Vận tốc của âm thanh trong một chất khí được tính bằng công thức

$$V = \sqrt{\frac{\text{suất nén đoạn nhiệt}}{\text{mật độ}}} \, .$$

(a) Chỉ ra rằng đây là phương trình chính xác về mặt thứ nguyên.

(b) Công thức này cho thấy rằng quá trình truyền sóng âm trong không khí là một quá trình chuẩn tĩnh. Mặt khác, vận tốc trong không khí là 340 m/s ở nhiệt độ mà tại đó vận tốc căn quân phương của một phân tử không khí là khoảng 500 m/s. Tại sao quá trình này lại có thể là quá trình chuẩn tĩnh?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Thứ nguyên của suất nén cũng giống như thứ nguyên của áp suất trong khi hệ số đoạn nhiệt là đại lượng không có thứ nguyên. Do đó xét về mặt thứ nguyên

$$\frac{\text{suất nén đoạn nhiệt}}{\text{mật độ}} \sim \frac{\text{g/cm} \cdot \text{s}^2}{\text{g/cm}^3} = \text{cm}^2/\text{s}^2 \, ,$$

có thứ nguyên của v^2. Do đó công thức đúng về mặt thứ nguyên.

(b) Xét một ví dụ về âm thanh có tần số 1kHz. Bước sóng của nó khoảng 0,34 m. Mặc dù vận tốc căn quân phương của phân tử khí lớn nhưng quãng đường tự do trung bình của nó chỉ khoảng 10^{-5} cm, nhỏ hơn rất nhiều so với bước sóng của âm thanh. Vì vậy chuyển động của các phân tử khí không làm ảnh hưởng tới quá trình truyền sóng âm trong không khí, vẫn là một quá trình đoạn nhiệt và chuẩn tĩnh.

1243

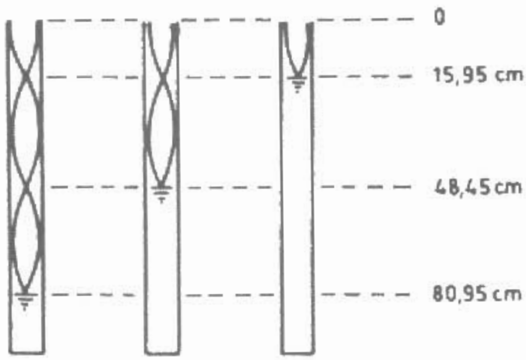
Một ống hình trụ thẳng đứng, hở ở một đầu và được đổ vào một phần nước. Các cộng hưởng liên tiếp của cột với một âm thanh có tần số 512 s^{-1} được quan sát khi khoảng cách giữa mặt nước và đầu hở của ống là 15,95 cm, 48,45 cm và 80,95 cm.

(a) Tính vận tốc truyền âm trong không khí.

(b) Xác định chính xác vị trí của bụng sóng gần đầu hở của ống.

(c) Các đo đạc trên là của một nhóm sinh viên năm thứ hai đại học ở phòng thí nghiệm. Bạn có nhận xét gì về công việc của họ?

(*Wisconsin*)



Hình 1.222

Lời giải:

(a) Dạng sóng của các cộng hưởng liên tiếp bên trong cột không khí được mô tả như hình 1.222. Như ta thấy đối với các cộng hưởng liên tiếp, các cột không khí có độ cao thay đổi một nửa bước sóng $d = \lambda/2$. Do

$$d = 48,45 - 15,95 = 80,95 - 48,45 = 32,50 \text{ cm} ,$$
$$\lambda = 2d = 65,00 \text{ cm} .$$

Vận tốc truyền âm trong không khí khi đó là

$$v = \lambda\nu = 0,6500 \times 512 = 330 \text{ m/s} .$$

(b) Do $\lambda/4 = 16,25$ cm và 16,25 cm$-15,95$ cm = 0,30 cm, bụng sóng cao nhất ở vị trí 0,30 cm so với đỉnh ống.

(c) Phương pháp đo vận tốc âm thanh này khá không chính xác do tai người không đủ nhạy cảm để phân biệt một cách chính xác những thay đổi nhỏ ở cường độ âm thanh và độ chính xác của phép đo hơi bị hạn chế. Tuy nhiên dữ liệu nhận được là hợp lý và cho kết quả tốt. Các sinh viên này đáng được khen vì việc làm thận trọng của họ.

1244

Hai môi trường có mặt phân cách phẳng, không thấm qua được như trên hình vẽ 1.223. Các sóng âm phẳng có biên độ áp suất A và tần số f được phát trong môi trường (1), hướng tới môi trường (2). Coi A và f đã biết và giả thiết phương truyền sóng vuông góc với bề mặt phân cách. Môi trường (1) có mật độ ρ_1 và vận tốc âm thanh c_1, trong khi môi trường (2) có mật độ ρ_2 và vận tốc âm thanh c_2.

(a) Điều kiện biên nào thích hợp ở bề mặt phân cách?

(b) Sử dụng các điều kiện biên kể trên để rút ra biên độ áp suất A_r của sóng phản xạ lại môi trường (1) và biên độ áp suất B của sóng truyền qua môi trường (2).

(*CUSPEA*)

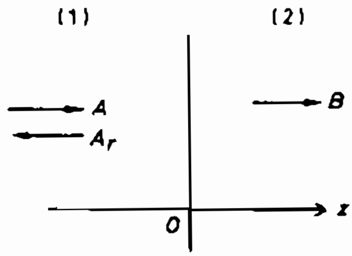
Lời giải:

(a) Điều kiện biên ở mặt phân cách là

(i) áp suất liên tục,

(ii) thành phần tốc độ dịch chuyển chất lưu vuông góc với bề mặt phân cách là liên tục, nếu không mặt phân cách có thể thấm qua được.

(b) Lấy trục z vuông góc với mặt phân cách với gốc tại mặt đó và đặt áp



Hình 1.223

suất dưới dạng

$$Ae^{i(\omega t - k_1 z)} \quad \text{đối với sóng tới,}$$
$$A_r e^{i(\omega t - k_1 z)} \quad \text{đối với sóng phản xạ,}$$
$$Be^{i(\omega t - k_2 z)} \quad \text{đối với sóng truyền qua,}$$

với $k_j = \omega/c_j$, c_j là vận tốc sóng âm trong môi trường thứ j. Điều kiện biên (i) cho ta

$$A + A_r = B\,. \tag{1}$$

vận tốc của âm thanh trong chất lưu được cho bởi

$$c = \sqrt{\frac{M}{\rho}}\,,$$

trong đó $M = -p(\Delta v/v)^{-1}$ là suất nén, Δv là độ biến thiên thể tích ban đầu v do áp suất dư p. Đối với sóng nén Δv chỉ là độ biến thiên dọc nên

$$\frac{\Delta v}{v} \approx \frac{\Delta \xi}{\Delta z} \approx \frac{\partial \xi}{\partial z}\,,$$

trong đó ξ là dịch chuyển của các lớp chất lưu khỏi vị trí cân bằng của chúng. Do đó

$$p = -\rho c^2 \frac{\partial \xi}{\partial z}\,,$$

hay

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{-p}{\rho c^2} \sim -\frac{e^{i(\omega t \mp kz)}}{\rho c^2}\,.$$

Tích phân ta có

$$\xi \sim \pm \frac{e^{i(\omega t \mp kz)}}{ik\rho c^2}\,.$$

Đối với ba sóng ta lần lượt có

$$\xi_A = \frac{1}{\rho_1 c_1^2}\left(\frac{A}{ik_1}\right)e^{i(\omega t - k_1 z)},$$

$$\xi_{A_r} = \frac{-1}{\rho_1 c_1^2}\left(\frac{A_r}{ik_1}\right)e^{i(\omega t + k_1 z)},$$

$$\xi_B = \frac{1}{\rho_2 c_2^2}\left(\frac{B}{ik_2}\right)e^{i(\omega t - k_2 z)},$$

và do đó

$$\dot{\xi}_A = \frac{A}{\rho_1 c_1}e^{i(\omega t - k_1 z)},$$

$$\dot{\xi}_{A_r} = \frac{-A_r}{\rho_1 c_1}e^{i(\omega t + k_1 z)},$$

$$\dot{\xi}_B = \frac{B}{\rho_2 c_2}e^{i(\omega t - k_2 z)}.$$

Điều kiện biên (ii) chỉ ra rằng tại $z = 0$,

$$\dot{\xi}_A + \dot{\xi}_{A_r} = \dot{\xi}_B,$$

hay

$$\frac{A}{\rho_1 c_1} - \frac{A_r}{\rho_1 c_1} = \frac{B}{\rho_2 c_2}. \tag{2}$$

Kết hợp các phương trình (1) và (2) ta có các biên độ của sóng áp suất phản xạ và truyền qua

$$A_r = A\frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2},$$

$$B = \frac{2A\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2}.$$

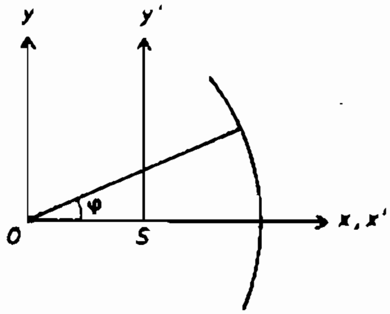
1245

Gọi vận tốc âm thanh trong không khí là c và vận tốc chuyển động của nguồn âm thanh là v dọc theo trục x.

(a) Đối với $v < c$: một xung âm thanh được phát ra từ gốc tọa độ tại thời điểm $t = 0$. Phác họa quan hệ của mặt đầu sóng ở thời điểm t và với vị trí của âm thanh tại thời điểm t. Hãy đánh dấu hình vẽ của bạn cẩn thận. Viết phương trình mô tả vị trí của mặt đầu sóng khi nhìn từ nguồn tại thời điểm t.

(b) Với $v > c$: một nguồn phát ra tín hiệu liên tục. Vẽ mặt đầu sóng tạo thành do nguồn âm di chuyển. Chỉ ra trên hình vẽ phép dựng hình dẫn tới kết quả đó. Viết phương trình liên hệ hình dạng của mặt đầu sóng với các yếu tố đã biết trong bài tập này.

(*Wisconsin*)



Hình 1.224

Lời giải:

(a) Đặt S là vị trí của nguồn tại thời điểm t. Sử dụng các hệ quy chiếu Oxy, $Sx'y'$ với gốc tại O và S, các trục x, x' dọc theo OS, và y, y' song song với nhau như trên hình 1.224. Ta có

$$x' = x - vt, \qquad y' = y \ .$$

Mặt sóng tại thời điểm t được cho bởi $x = ct\cos\varphi$, $y = ct\sin\varphi$, với $0 \le \varphi \le 2\pi$. Khi đó mặt đầu sóng nhìn từ nguồn sẽ là $x' = ct\cos\varphi - vt$, $y' = ct\sin\varphi$.

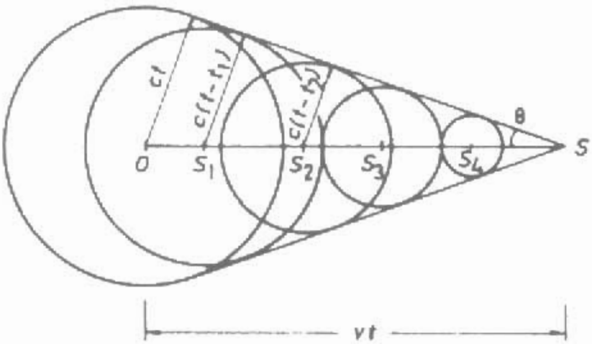
(b) Giả sử nguồn di chuyển từ O tới S trong khoảng thời gian từ $t = 0$ tới $t = t$ và xét tín hiệu phát ra tại thời điểm $t = 0$ và các thời điểm trung gian $t_1, t_2, \ldots$, khi nguồn tại vị trí $S_1, S_2, \ldots$, với $OS_1 = vt_1$, $OS_2 = vt_2$, ... Mỗi tín hiệu sẽ truyền đi từ điểm phát như một sóng cầu. Tại thời điểm t, các mặt sóng của các tín hiệu phát ra từ $O, S_2, S_2, \ldots$ sẽ có bán kính lần lượt là ct, $c(t - t_1)$, $c(t - t_2), \ldots$, Do

$$\frac{ct}{vt} = \frac{c(t-t_1)}{v(t-t_1)} = \frac{c(t-t_2)}{v(t-t_2)} = \ldots \ ,$$

tất cả các mặt đầu sóng trên sẽ được bao bởi một hình nón có đỉnh ở S với nửa góc ở đỉnh là θ được cho bởi

$$\sin\theta = \frac{ct}{vt} = \frac{c}{v},$$

như trên hình 2.225. Do đó mặt đầu sóng thu được của tín hiệu liên tục là một hình nón có nửa góc ở đỉnh $\arcsin(c/v)$ với đỉnh tại nguồn chuyển động S.



Hình 1.225

1246

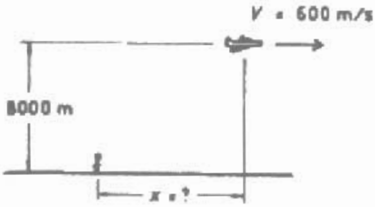
Vận tốc âm thanh trong khí quyển là 300 m/s. Một máy bay chuyển động với vận tốc 600 m/s tại độ cao 8000 m bên trên người quan sát như trên hình 1.226. Máy bay đã bay qua người quan sát bao xa khi người đó nghe thấy tiếng nổ âm thanh?

(*Wisconsin*)

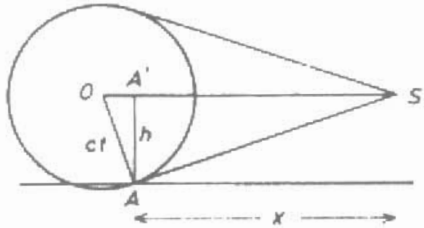
Lời giải:

Do vận tốc v của nguồn S lớn hơn vận tốc truyền sóng âm c, mặt sóng là một mặt nón có đỉnh tại nguồn chuyển động (bài 1245). Người quan sát tại A sẽ nghe thấy tiếng nổ âm thanh, vốn được phát ra khi nguồn ở O, khi hình nón quét qua anh ta, như hình 1.227. Nguồn bấy giờ đã di chuyển tới S. Đặt A' là điểm nằm trên quỹ đạo chuyển động của máy bay ngay phía trên người quan sát A. Ta có

$$OA \perp AS, \qquad OA = ct, \qquad OS = vt,$$



Hình 1.226



Hình 1.227

và

$$\frac{h}{x} = \frac{ct}{AS} = \frac{ct}{\sqrt{OS^2 - OA^2}} = \frac{c}{\sqrt{v^2 - c^2}}$$

hay

$$x = h\sqrt{\left(\frac{v}{c}\right)^2 - 1} = 8000\sqrt{2^2 - 1} = 1,39 \times 10^4 \text{ m} .$$

Đó là khoảng cách ngang mà máy bay đã vượt qua người quan sát khi người đó nghe thấy tiếng nổ âm thanh. Chú ý rằng nửa góc ở đỉnh của hình nón là $\theta = \arcsin(c/v)$ như được đòi hỏi.

1247

Người ta đã rất tò mò khi thỉnh thoảng nghe được âm thanh ở xa rất rõ khi có gió thổi từ nguồn âm về phía người đó.

(a) Chỉ ra rằng không thể nói rằng "gió đã mang âm thanh đi theo nó", nghĩa là vận tốc gió đều không thể giải thích cho hiệu ứng này.

(b) Một cơn gió qua mặt đất có gradien vận tốc theo phương thẳng đứng mà có thể được biểu diễn tốt ở gần mặt đất bằng công thức $v = ky^2$, trong đó y là độ cao so với mặt đất và k là hằng số phụ thuộc vào vận tốc gió bên ngoài lớp biên, tại đó profin vận tốc parabon là một gần đúng tốt. Với một giá trị k cho trước và vận tốc âm thanh là v_s, tìm khoảng cách s từ nguồn âm thanh xuôi chiều gió, tại đó có sự tăng cực đại cường độ của âm thanh.
Gợi ý: hãy giả thiết các "tia" âm thanh đi theo các quỹ đạo thấp và hình cung biểu diễn tốt bởi:

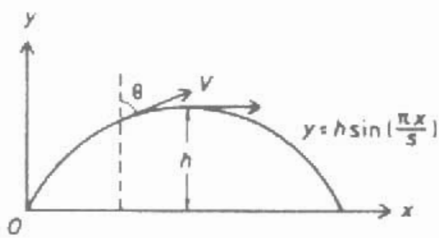
$$y = h\sin\left(\frac{\pi x}{s}\right) .$$

(c) Người ta còn quan sát thấy hiện tượng tăng cường truyền âm thanh qua một cái hồ ngay cả khi không gió. Điều gì xảy ra trong trường hợp này?

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Hiệu ứng này không thể do gió mang âm thanh theo nó, bởi vì qua quãng đường gió thổi đều thì mọi người quan sát đều có thể nghe thấy âm thanh rõ như nhau. Thực ra hiệu ứng là do sự khúc xạ của âm thanh gây bởi sự thay đổi vận tốc âm thanh đối với một người quan sát cố định ở những điểm khác nhau của môi trường. Điều này có thể xảy ra do hai nguyên nhân là gradien nhiệt độ hoặc gradien vận tốc ở gió chuyển động. Vận tốc của sóng nén trong một chất khí thay đổi theo nhiệt độ T như $\sqrt{T}$. Nó cũng thay đổi nếu vận tốc của bản thân môi trường thay đổi. Sự khúc xạ sóng âm làm thay đổi hướng mặt sóng của nó. Gần bề mặt trái đất, cả hai loại gradien này đều có thể xuất hiện và đường truyền sóng âm có thể bị bẻ cong theo các cách khác nhau, làm cho một người quan sát nghe rõ âm thanh từ xa một cách bất ngờ.



Hình 1.228

(b) Sử dụng hệ quy chiếu như trên hình 1.228. Giả thiết rằng vận tốc gió gần mặt đất là nằm ngang với một gradien vận tốc theo chiều thẳng đứng. Nghĩa là

$$v = v_x = ky^2 ,$$

do đó môi trường có thể coi như bao gồm các lớp ngang với vận tốc truyền âm khác nhau. Định luật khúc xạ là

$$\frac{\sin\theta}{V} = \text{ hằng số},$$

trong đó θ là góc giữa phương truyền sóng trong lớp và đường thẳng đứng, và V là vận tốc truyền âm so với mặt đất. Xét hai điểm trên đường truyền sóng với các biến

$$\theta_1 = \theta, \qquad V_2 = v_s + v_x \sin\theta = v_s + v\sin\theta\ ,$$

$$\theta_2 = \theta + d\theta, \qquad V_2 = v_s + (v+dv)\sin(\theta + d\theta)\ .$$

Định luật khúc xạ khi đó cho ta

$$\frac{v_s + (v+dv)\sin(\theta+d\theta)}{v_s + v\sin\theta} = \frac{\sin(\theta+d\theta)}{\sin\theta}\ .$$

Do $\sin(\theta + d\theta) \approx \sin\theta + \cos\theta d\theta$, chỉ giữ lại các số hạng bậc nhỏ nhất ta có

$$\frac{dv}{v_s} = \frac{d\sin\theta}{\sin^2\theta}\ .$$

Do đó

$$\int_0^h 2ky\frac{dy}{v_s} = \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\sin\theta}{\sin^2\theta}\ ,$$

hay

$$\frac{kh^2}{v_s} = \frac{1}{\sin\theta_0} - 1\ .$$

Mặt khác đường truyền sóng đã cho suy ra

$$\cot\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{\pi h}{s}\cos\frac{\pi x}{s}\ ,$$

hay

$$\frac{1}{\sin\theta} = \sqrt{1+\cot^2\theta} = \sqrt{1+\left(\frac{\pi h}{s}\right)^2\cos^2\frac{\pi x}{s}}\ ,$$

đặc biệt,

$$\frac{1}{\sin\theta_0} = \sqrt{1+\left(\frac{\pi h}{s}\right)^2}\ .$$

Thế phương trình này vào các phương trình bên trên ta rút ra chiều dài quãng đường s từ nguồn âm thanh xuôi chiều gió, tại đó xảy ra sự tăng cực đại cường độ âm thanh là

$$s = \frac{\pi v_s}{\sqrt{k(2v_s + kh^2)}}$$

(c) Vận tốc của âm thanh trong một chất khí thay đổi theo nhiệt độ tuyệt đối T như $\sqrt{T}$. Dọc theo chiều thẳng đứng bên trên một cái hồ đến một độ cao nào đó, nhiệt độ tăng dần khi ban ngày và tạo ra một gradien thẳng đứng.

Vận tốc âm thanh cũng như vậy. Sự khúc xạ âm thanh xảy ra vào thời điểm ban ngày tương tự như mô tả ở mục (b).

1248

Xét một sóng âm đứng phẳng có tần số 10^3 Hz trong không khí tại nhiệt độ 300 K. Giả sử biên độ thay đổi áp suất do sóng này là 1 dyn.cm^2 (so sánh với áp suất môi trường là 10^6 dyn/cm^2). Đánh giá (bậc của độ lớn) biên độ dịch chuyển của các phân tử khí do sóng này tạo ra.

(*Columbia*)

Lời giải:

Dịch chuyển dọc ξ khỏi vị trí cân bằng của một điểm của sóng nén dừng phẳng theo hướng x được biểu diễn như

$$\xi = \xi_0 \sin(kx)e^{-i\omega t} ,$$

với $k = n\pi/l$, l là bề dày của chất khí và $n = 1, 2, \ldots$. Vận tốc truyền sóng là

$$v = \sqrt{\frac{M}{\rho}} .$$

Trong đó suất nén M được định nghĩa bởi

$$M = -p\left(\frac{\Delta V}{V}\right)^{-1} ,$$

p là áp suất dư và V là thể tích ban đầu. Xét một hình trụ chất khí có tiết diện A và chiều dài Δx. Ta có

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{A\Delta\xi}{A\Delta x} \approx \frac{\partial\xi}{\partial x} .$$

Khi đó

$$\begin{aligned} p &= -M\frac{\partial\xi}{\partial x} \\ &= -Mk\xi_0\cos(kx)e^{-i\omega t} \\ &= -p_0\cos(kx)e^{-i\omega t} , \end{aligned}$$

trong đó $p_0 = Mk\xi_0 = \rho v^2 k\xi_0$ là biên độ của áp suất dư. Từ đó

$$\xi_0 = \frac{p_0}{\rho v^2 k} .$$

Đối với kiểu dao động thấp nhất

$$n = 1, \qquad \lambda = 2l,$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{v} ,$$

ν là tần số của sóng âm. Do đó

$$\xi_0 = \frac{p_0}{2\pi\rho v\nu} .$$

Đối với một chất khí lý tưởng

$$p_a V = \frac{m}{M} RT ,$$

cho ta

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p_a M}{RT} ,$$

trong đó p_a, T tương ứng là áp suất và nhiệt độ môi trường. Do $p_0 = 1$ dyn/cm^2 $= 10^{-1}$ N/m^2, $p_a = 10^6$ dyn/cm^2 $= 10^5$ N/m^2, $M = 29 \times 10^{-3}$ kg/mol , $R = 8,31$ J/mol/K, $T = 300$ K , $v = 340$ m/s , $\nu = 10^3$ Hz , ta có $\xi_0 = 4 \times 10^{-8}$ m là biên độ dịch chuyển của các phân tử chất khí dưới ảnh hưởng của sóng âm.

1249

Một đầu dò chuyển động dùng sóng âm phát ra một tín hiệu có tần số 50 Hz và thu lại tín hiệu phản xạ. Nếu tín hiệu phản xạ bị dịch chuyển do hiệu ứng Doppler từ tần số 50 Hz lên tới tần số trên 100 Hz, thì một "vật chuyển động" được ghi lại. Đối với vận tốc truyền âm trong không khí là 330 m/s, tính vận tốc mà một vật thể phải chuyển động về phía (hoặc rời xa khỏi) đầu dò để có thể được ghi lại như một "vật chuyển động".

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Xét nguồn phát âm có tần số ν. Theo hiệu ứng Doppler nếu một người quan sát chuyển động với vận tốc v về phía nguồn thì anh ta sẽ phát tín hiệu tần số như

$$\nu' = \left(\frac{c+v}{c}\right)\nu ,$$

c là vận tốc truyền âm thanh. Mặt khác, nếu nguồn di chuyển với vận tốc v về phía người quan sát đứng yên thì

$$\nu' = \left(\frac{c}{c-v}\right)\nu .$$

Do đó vật thể, đang di chuyển về phía đầu dò, nhận được tín hiệu có tần số

$$\nu' = \left(\frac{c+v}{c}\right)\nu ,$$

và tín hiệu sau phản xạ có ở vật được đầu dò phát hiện như tần số

$$\nu'' = \left(\frac{c}{c-v}\right)\nu' = \left(\frac{c+v}{c-v}\right)\nu .$$

Để vật chuyển động được ghi lại, ta phải có $\nu'' = \nu \pm \Delta\nu$, trong đó $\Delta\nu \geq 10^2$ Hz. Khi đó

$$\nu \pm \Delta\nu = \left(\frac{c+v}{c-v}\right)\nu ,$$

hay

$$v = \pm\frac{c\Delta\nu}{2\nu \pm \Delta\nu} \approx \pm\frac{c\Delta\nu}{2\nu} ,$$

do $\Delta\nu \ll \nu$. Từ đó vật phải chuyển động về phía đầu dò hoặc rời khỏi nó với vận tốc

$$v \geq \frac{330 \times 10^2}{2 \times 5 \times 10^4} = 0,330 \text{ m/s}$$

để có thể được ghi lại.

1250

Một sinh viên đứng gần đường ray tàu hỏa nghe thấy tiếng còi tàu khi tàu chạy thẳng về phía anh ta rồi chạy qua anh ta. Hai tần số âm thanh quan sát được là 250 Hz và 200 Hz. Giả sử vận tốc truyền âm trong không khí là 360 m/s. Tìm vận tốc của đoàn tàu?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Đặt ν_0, ν_1, ν_2 lần lượt là tần số của còi tàu và các tần số nghe được bởi anh sinh viên khi tàu đi lại gần và rời xa anh ta. Hiệu ứng Doppler cho là

$$\nu_1 = \left(\frac{c}{c-v}\right)\nu_0 ,$$

$$\nu_2 = \left(\frac{c}{c+v}\right)\nu_0 ,$$

trong đó c là vận tốc âm thanh và v là vận tốc của đoàn tàu và như vậy

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{c+v}{c-v} .$$

Thay số vào ta có

$$1,25 = \frac{360+v}{360-v} ,$$

hay

$$\frac{2,25}{0,25} = \frac{720}{2v} ,$$

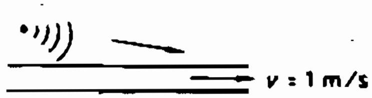
do đó

$$v = \frac{360}{9} = 40 \text{ m/s} .$$

1251

Vận tốc của máu trong động mạch có thể đo được nhờ hiệu ứng dịch chuyển Doppler của sóng siêu âm. Giả sử sóng âm có tần số $1,5 \times 10^6$ Hz bị phản xạ ngược lại bởi dòng máu chảy với vận tốc 1 m/s. Giả sử vận tốc âm thanh trong mô là 1500 m/s và sóng âm tới có góc tới rất nhỏ như trên hình 1.229, tính độ dịch chuyển tần số giữa sóng tới và sóng phản xạ.

(*Wisconsin*)



Hình 1.229

Lời giải:

Do sóng âm có góc tới rất nhỏ, máu có thể coi như chảy đi cùng chiều với âm thanh. Vì vậy, kết quả của bài 1249 có thể được áp dụng trong trường hợp này với v thay bởi $-v$

$$\nu'' = \left(\frac{c-v}{c+v}\right)\nu .$$

Độ dịch tần số khi đó là

$$\nu'' - \nu = -\frac{2v\nu}{c+v} \approx -\frac{2v\nu}{c} = -2 \times 10^3 \text{ Hz} .$$

1252

Một ôtô có gắn một bộ loa gồm hai loa ngược chiều nhau trên nóc và chạy về phía bạn với vận tốc 50 ft/s, như mô tả trên hình 1.230. Nếu bộ loa phát một âm thanh có tần số 1000 Hz, tìm tần số phách bạn sẽ nghe được giữa âm thanh tới trực tiếp và âm thanh phản xạ bởi một tòa nhà gạch nằm đằng sau ôtô. (Vận tốc âm lấy bằng 1000 ft/s).

(*Wisconsin*)

Hình 1.230

Lời giải:

Âm thanh từ loa hướng về phía đằng sau có tần số Doppler là

$$\nu_b = \left(\frac{c}{c+v}\right)\nu ,$$

trong đó c và v lần lượt là vận tốc âm thanh và vận tốc của xe, ν là tần số của âm thanh phát ra. Do bức tường đứng yên so với người qua sát, ν_b cũng là tần số âm mà người quan sát nghe được. Âm thanh từ loa hướng về đằng trước phát ra có tần số Doppler là

$$\nu_f = \left(\frac{c}{c-v}\right)\nu .$$

Do đó tần số phách là

$$\nu_f - \nu_b = c\nu\left(\frac{1}{c-v} - \frac{1}{c+v}\right) = \frac{2vc\nu}{c^2-v^2} \approx \frac{2v\nu}{c} = 100 \text{ Hz} .$$

1253

Một sinh viên vật lý cầm một âm thoa rung động ở tần số 440 Hz và đi bộ với vận tốc 1,2 m/s ra xa khỏi một bức tường. Sóng âm phản xạ từ bức tường có cao độ cao hơn hay thấp hơn so với âm thoa? Tần số phách anh ta nghe thấy giữa âm thoa và âm phản xạ là bao nhiêu? Vận tốc âm thanh là 330 m/s.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Do âm thoa, phát ra âm thanh có tần số ν, di chuyển ra xa khỏi bức tường với vận tốc v, âm thanh tới bức tường có tần số là

$$\nu' = \left(\frac{c}{c+v}\right)\nu .$$

Do đó anh sinh viên, đang đi với vận tốc v ra xa khỏi bức tường sẽ nghe âm thanh phản xạ có tần số

$$\nu'' = \left(\frac{c-v}{c}\right)\nu' = \left(\frac{c-v}{c+v}\right)\nu .$$

Do

$$\nu'' - \nu = -\frac{2v\nu}{c+v} < 0 ,$$

âm thanh vọng có tần số nhỏ hơn. Tần số phách giữa âm thoa và âm thanh vọng lại từ bức tường là

$$\frac{2v\nu}{c+v} \approx \frac{2v\nu}{c} = 3,2 \text{ Hz} .$$

1254

Một sợi dây bị cột chặt một đầu vào tường được cuốn quanh một cái tời dưới một góc θ. Nếu một người nào đó kéo sợi dây ở đầu kia với lực F như trên hình 1.231(a), tìm lực căng của sợi dây tại điểm giữa bức tường và tời theo F, θ và hệ số ma sát μ_s giữa dây và tời.

(*Columbia*)

Lời giải:

Xét một phần tử của sợi dây như trên hình 1.231(b). Các lực tác dụng lên phần tử này là sức căng T và $T + \Delta T$ tại hai đầu, phản lực N gây ra bởi cái

Hình 1.231

tời và lực ma sát f. Do phần tử đó ở trạng thái cân bằng nên ta có

$$f + (T + \Delta T)\cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) - T\cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) = 0,$$

$$N - (T + \Delta T)\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) - T\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) = 0\,.$$

Trong phép gần đúng cấp một, các phương trình trên trở thành

$$f + (T + \Delta T) - T = 0, \qquad \text{hoặc} \qquad f = -\Delta T\,,$$

$$N - T\frac{\Delta\theta}{2} - T\frac{\Delta\theta}{2} = 0, \qquad \text{hoặc} \qquad N = T\Delta\theta\,.$$

Khi đó do $f = \mu_s$ N , ta tìm được

$$\frac{\Delta T}{\Delta\theta} = -\mu_s T\,,$$

hay, cho $\Delta\theta \to 0$,

$$\frac{dT}{d\theta} = -\mu_s T\,.$$

Lấy tích phân ta có

$$T = Ce^{-\mu_s\theta}\,,$$

trong đó C là một hằng số. Do $T = F$ tại $\theta = 0$, $C = F$. Do đó

$$T = Fe^{-\mu_s\theta}\,.$$

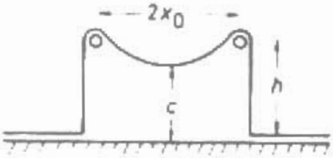
1255

Một dây đồng chất và rất dẻo có chiều dài L và mật độ khối lượng dài là ρ được treo bởi hai điểm treo có chiều cao h so với một mặt phẳng ngang và cách nhau một khoảng $2x_0$ như trên hình 1.232.

(a) Tìm hình dạng cong của sợi dây.

GỢI Ý: Một tham số trong nghiệm của bạn sẽ phụ thuộc vào một phương trình siêu việt không cần giải. Tuy nhiên, bạn phải giải các phương trình vi phân mà bạn gặp trong quá trình tìm ra đáp số.

(b) Tìm biểu thức của lực căng của sợi dây tại các điểm treo.



Hình 1.232

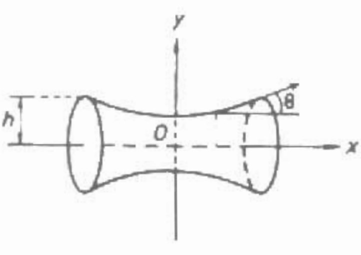
Giả sử các điểm treo bây giờ được thay bằng các ròng rọc không ma sát kích thước không đáng kể đồng chất, và sợi dây đồng chất có chiều dài vô hạn treo qua hai ròng rọc như trên hình 1.232. Không có ma sát giữa sợi dây và mặt bàn. Trong trường hợp này, dạng cong của sợi dây chỉ phụ thuộc vào một thông số không thứ nguyên là $\alpha = h/x_0$.

(c) Giả sử sợi dây được treo theo một đường cong nhẵn có độ cao cực tiểu c, tìm phương trình siêu việt liên hệ giữa h/c và α.

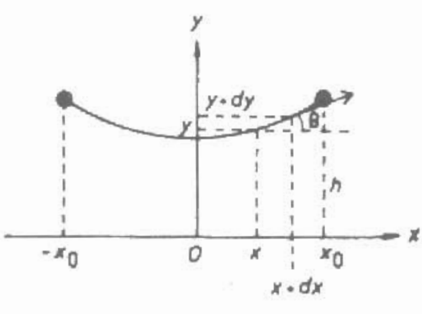
(d) Tìm nghiệm chính xác cho hình dạng sợi dây khi $\alpha \ll 1$.

(e) Liên hệ giữa hình dạng sợi dây trong câu (c) và (d) với hình dạng của mặt bong bóng xà phòng căng giữa hai dây uốn tròn có bán kính h và khoảng cách $2x_0$ như trên hình 1.233.

(*MIT*)



Hình 1.233



Hình 1.234

Lời giải:

(a) Sử dụng hệ tọa độ như trên hình 1.234 và gọi lực căng của sợi dây là $T = T(x)$. Xét một phần vô cùng bé trên sợi dây giữa hai điểm x và $x + dx$. Điều kiện cân bằng của nó là

$$(T\cos\theta)_{x+dx} - (T\cos\theta)_x = 0\,,$$
$$(T\sin\theta)_{x+dx} - (T\sin\theta)_x = \rho g\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \rho g\sqrt{1+y'^2}dx\,.$$

Phương trình đầu tiên cho ta

$$\frac{d(T\cos\theta)}{dx} = 0, \qquad \text{hay} \qquad T\cos\theta = \text{ hằng số } = A, \quad \text{chẳng hạn}\,.$$

Phương trình thứ hai cho ta

$$\frac{d(T\sin\theta)}{dx} = \rho g\sqrt{1+y'^2}\,.$$

Do

$$\text{tg}\theta = \frac{dy}{dx} \equiv y'\,,$$

ta có

$$\sin\theta = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}, \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

và các phương trình trên trở thành

$$T = A\sqrt{1+y'^2}\,, \tag{1}$$
$$Ay'' = \rho g\sqrt{1+y'^2}\,. \tag{2}$$

Viết (2) như

$$\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\frac{dy'}{dx} = \frac{\rho g}{A}\,,$$

hay

$$\frac{d}{dx}(\text{sh}^{-1}y') = \frac{\rho g}{A}\,,$$

và lấy tích phân hai vế ta được

$$y' = \text{sh}\left(\frac{\rho g x}{A} + C\right)\,,$$

trong đó C là một hằng số. Do $y' = 0$ tại $x = 0$, $C = 0$ và

$$y' = \text{sh}\left(\frac{\rho g x}{A}\right)\,. \tag{3}$$

Tiếp tục lấy tích phân ta có

$$y = \frac{A}{\rho g}\text{ch}\left(\frac{\rho g x}{A}\right) + B\ .$$

Với điều kiện biên $y = h$ tại $x = x_0$, ta có

$$B = h - \frac{A}{\rho g}\text{ch}\left(\frac{\rho g x_0}{A}\right)\ .$$

Do đó hình dạng của sợi dây được mô tả bằng phương trình

$$y(x) = \frac{A}{\rho g}\left[\text{ch}\left(\frac{\rho g x}{A}\right) - \text{ch}\left(\frac{\rho g x_0}{A}\right)\right] + h \tag{4}$$

với A là hằng số chưa được xác định. Xét lực căng $T\ (\pm x_0)$ tại điểm treo $x = \pm x_0$. Các thành phần theo trục y của chúng thỏa mãn

$$2T\sin\theta = L\rho g\ ,$$

nghĩa là

$$\frac{2Ty'}{\sqrt{1+y'^2}} = L\rho g\ .$$

Sử dụng các phương trình (1) và (3) ta có thể viết lại biểu thức trên như

$$2A\text{sh}\left(\frac{\rho g x_0}{A}\right) = L\rho g\ ,$$

từ phương trình này có thể tìm được A. Lực căng tại $x = \pm x_0$ được cho bởi (1) trở thành

$$T(\pm x_0) = A\sqrt{1+y'^2}|_{x=x_0} = A\cosh\left(\frac{\rho g x_0}{A}\right)\ , \tag{5}$$

sử dụng kết quả của phương trình (3).

(c) Lực căng $T(\pm x_0)$ trên sợi dây ở hai bên của mỗi ròng rọc bằng nhau. Do đó

$$T(\pm x_0) = h\rho g\ ,$$

hay, từ phương trình (5)

$$A\text{ch}\left(\frac{\rho g x_0}{A}\right) = h\rho g\ .$$

Thay thế vào (4) suy ra phương trình mô tả hình dạng của sợi dây giữa hai ròng rọc

$$y(x) = \frac{A}{\rho g}\text{ch}\left(\frac{\rho g x}{A}\right)\ . \tag{6}$$

Đặt $y = c$ tại $x = 0$, suy ra $c = A/\rho g$. Do $y = h$ tại $x = x_0$, ta có

$$h = c\operatorname{ch}\left(\frac{x_0}{c}\right) ,$$

hay

$$\frac{h}{c} = \operatorname{ch}\left(\frac{h}{c\alpha}\right) . \qquad (7)$$

Phương trình này xác định h/c chỉ là hàm của $\alpha = h/x_0$. Phương trình (6) có thể được viết lại là

$$\frac{y}{h} = \frac{c}{h}\operatorname{ch}\left(\frac{h}{c}\frac{x}{h}\right) .$$

Nếu ta lấy định tỉ lệ tọa độ theo h, nghĩa là

$$\xi = \frac{x}{h}, \qquad \eta = \frac{y}{h} ,$$

ta có

$$\eta = \frac{c}{h}\operatorname{ch}\left(\frac{h}{c}\xi\right) .$$

Phương trình này mô tả hình dạng của đường cong chỉ phụ thuộc vào h/c, đại lượng này lại chỉ phụ thuộc vào $\alpha = h/x_0$ thông qua phương trình (7).

(d) Về mặt vật lý, $c < h$, do đó nếu $\alpha \ll 1$, $\operatorname{ch}(h/c\alpha) \gg 1$. Nên với h hữu hạn ta cần có $c \to 0$ để thỏa mãn phương trình (7). Điều đó có nghĩa là toàn bộ sợi dây nằm trên mặt đất.

(e) Gọi σ là hệ số căng mặt ngoài của xà phòng. Để cân bằng trên mặt phẳng nằm ngang tại điểm (x, y) trên mặt bong bóng ta có

$$(\sigma \cdot 2\pi y \cos\theta)_{x+dx} - (\sigma \cdot 2\pi y \cos\theta)_x = 0 ,$$

hay

$$\frac{d}{dx}(2\pi\sigma y \cos\theta) = 0 ,$$

tức là

$$y \cos\theta = \text{ hằng số } .$$

Giả sử $y = c$ tại $x = 0$, khi đó do $\theta = 0$ với $x = 0$, hằng số đó bằng với c. Hơn nữa, do

$$\cos\theta = \frac{dx}{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} ,$$

ta có

$$y = c\sqrt{1 + y'^2}$$

hay

$$dx = \frac{cdu}{\sqrt{u^2 - 1}}$$

với $u = y/c$. Lấy tích phân ta có

$$x = c\mathrm{ch}^{-1}\left(\frac{y}{c}\right) + \text{ hằng số }.$$

Do $y = c$ tại $x = 0$, hằng số bằng không. Do đó

$$y = c\mathrm{ch}\left(\frac{x}{c}\right) ,$$

nó đồng nhất với phương trình (6) ở phần c.

1256

(a) Một vật có biên, đối xứng trục có mật độ khối lượng $\rho(x, y, z) = \rho(r, \theta)$. Tại khoảng cách lớn đối với vật đó, thế hấp dẫn có dạng

$$\phi = -\frac{GM}{r} + \frac{f(\theta)}{r^2} + \dots ,$$

trong đó

$$M = \int \rho(x', y', z')dx'dy'dz' = 2\pi \int \rho(r', \theta')r'^2 \sin\theta' dr' d\theta'$$

là khối lượng toàn phần. Tìm $f(\theta)$.

(b) Một vật thử nhỏ có mật độ khối lượng $\sigma(x, y, z)$ và được đặt trong thế hấp dẫn $\phi(x, y, z)$. Tìm thế năng hấp dẫn của nó.

(c) Giả sử vật trong câu (a) có đối xứng cầu, nghĩa là $\rho = \rho(r)$, khi đó $\phi = \phi(r)$. Giả sử vật đó là một khối khí có áp suất $p(r)$. Kí hiệu bán kính của nó là R. Một vài tích phân sau đây mô tả chính xác thế năng hấp dẫn của khối khí đó, một vài tích phân khác bị sai lệch một hệ số đơn giản bằng số âm hoặc dương. Xác định các biểu thức chính xác và tìm hệ số hiệu chỉnh cho các biểu thức còn lại. Nếu U = thế năng/ 4π, thì các biểu thức đó là

$$U = \begin{cases} \text{(i)} & -\int_0^R \rho \dfrac{d\phi}{dr} r^3 dr \quad ? \\ \text{(ii)} & \dfrac{1}{4\pi G}\int_0^R \left(\dfrac{d\phi}{dr}\right)^2 r^2 dr \quad ? \\ \text{(iii)} & \dfrac{1}{2}\int_0^R \rho\phi r^2 dr \quad ? \\ \text{(iv)} & -\int_0^R p r^2 dr \quad ? \end{cases}$$

(d) Vật thử trong câu (b) được đặt sao cho khối tâm của nó tại tọa độ $(0, 0, r_0)$ trong trường thế đối xứng cầu

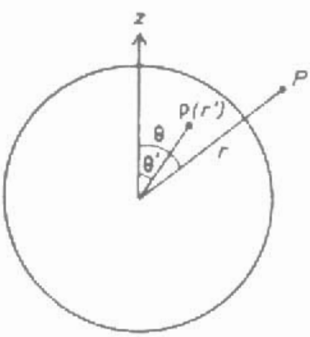
$$\phi(r) = -\frac{MG}{r} .$$

Với r_0 lớn, thế năng hấp dẫn có dạng

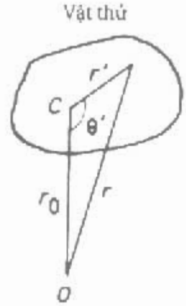
$$-\frac{mGM}{r_0} + \frac{d}{r_0^3} + O\left(\frac{1}{r_0^4}\right) ,$$

trong đó $m = \int \sigma d^3x$. Tìm d.

(UC, Berkeley)



Hình 1.235



Hình 1.236

Lời giải:

(a) Như mô tả trên hình 1.235, trục z hướng dọc theo trục đối xứng và gốc tọa độ 0 nằm bên trong vật. Thế hấp dẫn (thế năng trên một đơn vị khối lượng của vật thử) do vật gây ra tại điểm P là

$$\phi = -\int_{V'} \frac{G\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' ,$$

trong đó V' là thể tích của vật.

Do

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\theta'-\theta) ,$$

với một khoảng cách lớn từ vật $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1}$ có thể lấy gần đúng như sau

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r}\left[1+\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - \frac{2r'}{r}\cos(\theta-\theta')\right]^{-\frac{1}{2}} \\ &\approx \frac{1}{r}\left[1+\frac{r'}{r}\cos(\theta-\theta')\right] .\end{aligned}$$

Thế vào tích phân ta có

$$\begin{aligned}\phi = &-\frac{G}{r}\cdot 2\pi\int \rho(r',\theta')r'^2\sin\theta' dr' d\theta' \\ &-\frac{G}{r^2}\cdot 2\pi\int \rho(r',\theta')r'^3\sin\theta'\cos(\theta-\theta')dr'd\theta' .\end{aligned}$$

So sánh nó với dạng đã cho

$$\phi \approx -\frac{GM}{r} + \frac{f(\theta)}{r^2} ,$$

ta tìm ra

$$f(\theta) = -2\pi G\int \rho(r',\theta')r'^3\sin\theta'\cos(\theta-\theta')dr'd\theta' .$$

(b) Trong trường thế hấp dẫn $\phi(x,y,z)$ thế năng của vật thử có mật độ khối lượng $\sigma(x,y,z)$ và thể tích V là

$$W = \int_V \sigma(x,y,z)\phi(x,y,z)dV .$$

(c) Với một hệ đóng có mật độ khối lượng là ρ và thể tích V năng lượng hấp dẫn là

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho\phi dV .$$

Với một khối khí đối xứng cầu có bán kính R ta có

$$W = \frac{1}{2}\int_0^R \rho(r)\phi(r)4\pi r^2 dr \,,$$

với gốc tọa độ tại tâm của nó. Do đó

$$U = \frac{W}{4\pi} = \frac{1}{2}\int_0^R \rho\phi r^2 dr \,. \tag{1}$$

Nên tích phân (iii) là đúng.

Xét một vỏ khối khí hình cầu bán kính r và bề dày Δr. Do khối khí có áp suất p, ta cần có điều kiện sau để cân bằng

$$4\pi r^2 \left[p(r) - p(r+\Delta r)\right] - 4\pi r^2 \rho \frac{d\phi}{dr}\Delta r = 0 \,,$$

hay

$$\frac{dp}{dr} = -\rho\frac{d\phi}{dr} \,.$$

Phương trình Poisson cho các khối lượng hút nhau là

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \,,$$

hay với vật có đối xứng cầu,

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right) = 4\pi G\rho \,,$$

suy ra

$$\rho = \frac{1}{4\pi G}\cdot\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right) .$$

Do đó

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{1}{4\pi G}\cdot\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right)\frac{d\phi}{dr} \,.$$

Bên ngoài vật hình cầu, p bằng không và $dp/dr = 0$. Do đó

$$\left(\frac{d\phi}{dr}\right)_{r=R} = 0 \,.$$

Phương trình (1) có thể viết lại là

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{8\pi G}\int_0^R \phi\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right)dr\\ &= \frac{1}{8\pi G}\left[r^2\phi\frac{d\phi}{dr}\bigg|_0^R - \int_0^R r^2\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2 dr\right]\\ &= -\frac{1}{8\pi G}\int_0^R r^2\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2 dr\,. \qquad (2)\end{aligned}$$

Do đó tích phân (ii) phải nhân thêm hệ số $-\frac{1}{2}$. Xét tích phân (i). Nó có thể được viết là

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{4\pi G}\int_0^R r\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right)\cdot\frac{d\phi}{dr}dr\\ &= -\frac{1}{4\pi G}\left[r^3\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2\bigg|_0^R - \int_0^R r^2\frac{d\phi}{dr}\cdot d\left(r\frac{d\phi}{dr}\right)\right]\\ &= \frac{1}{8\pi G}\int_0^R rd\left(r\frac{d\phi}{dr}\right)^2\\ &= \frac{1}{8\pi G}\left[r^3\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2\bigg|_0^R - \int_0^R r^2\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2 dr\right]\\ &= -\frac{1}{8\pi G}\int_0^R r^2\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2 dr\,,\end{aligned}$$

giống như phương trình (2). Do đó tích phân (i) đúng.

Tích phân (iv) có thể viết là

$$\begin{aligned}-\frac{1}{3}\int_0^R p\,dr^3 &= -\frac{1}{3}\left[pr^3\Big|_0^R - \int_0^R r^3\frac{dp}{dr}dr\right]\\ &= \frac{1}{3}\int_0^R r^3\frac{dp}{dr}dr\\ &= -\frac{1}{3}\int_0^R \rho r^3\frac{d\phi}{dr}dr\,.\end{aligned}$$

So sánh với tích phân (i), vốn là tích phân đúng nó cần phải nhân với 3.

(d) Gọi C là khối tâm của vật thử và xét một phần tử thể tích dV' tại vectơ bán kính $\mathbf{r}'$ từ C như trên hình 1.236. Ta có

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}' ,$$

hay

$$r^2 = r_0^2 + r'^2 + r_0 r' \cos\theta' ,$$

suy ra

$$r^{-1} = r_0^{-1}\left[1 + \frac{r'}{r_0}\cos\theta' + \left(\frac{r'}{r_0}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \approx r^{-1}\left[1 - \frac{r'}{2r_0}\cos\theta' + O\left(\frac{r'^2}{r_0^2}\right)\right] .$$

Thế năng hấp dẫn của vật thử là

$$W = \int_{V'} \sigma\phi dV' = -\int_{V'} \sigma(\mathbf{r}')\frac{GM}{r_0}\left(1 - \frac{r'}{2r_0}\cos\theta' + O\left(\frac{r'}{r_0^2}\right)^2\right) dV' .$$

trong đó V' là thể tích của vật thử. Sử dụng tọa độ cầu (r', θ', φ') với gốc tại C, ta có

$$dV' = r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' d\varphi'$$

và có thể viết thế năng trên lại thành

$$W = -\frac{GMm}{r_0} + \frac{GM}{2r_0^2}\int \sigma(r', \theta', \varphi') r'^3 \sin 2\theta' dr' d\theta' d\varphi' + O\left(\frac{1}{r_0^3}\right) .$$

Do đó

$$d = \frac{GMr_0}{2}\int \sigma(r', \theta', \varphi') r'^3 \sin 2\theta' dr' d\theta' d\varphi' .$$

1257

Một dầm gỗ sồi đã hong khô, tiết diện 2 in × 4 in được chôn vào tường bê tông để chồi ra bên ngoài 6 ft, như trên hình 1.237. Nó được tạo ra với mục đích làm giá đỡ cho một trọng vật L sao cho ít bị cong nhất. Giới hạn đàn hồi của gỗ sồi là ứng suất 7900 lb/in^2 (pao/in^2). Suất đàn hồi của nó, $l\,(dp/dl)$, là $1,62 \times 10^6$ lb/in^2. Trọng vật L lớn nhất mà dầm gỗ sồi có thể đỡ được mà không bị biến dạng vĩnh viễn là bao nhiêu và độ dịch chuyển của điểm P dưới tác dụng của trọng vật đó là bao nhiêu? Khi giải bài toán này hãy sử dụng các

Hình 1.237

gần đúng thích hợp, kể cả cho bán kính cong của dầm bằng $-(d^2y/dx^2)^{-1}$ thay cho biểu thức chính xác.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Bỏ qua ứng suất trượt và chỉ xét biến dạng cong thuần túy. Trong quá trình uốn cong, các thớ gỗ bên trên bị dãn trong khi thớ gỗ bên dưới bị nén, giữa chúng tồn tại một mặt phẳng trung tính không bị biến dạng $N'N$. Xét các thớ gỗ cách mặt $N'N$ một khoảng ξ như trên hình 1.237. Gọi bán kính cong của $N'N$ là r và của các thớ gỗ đang xét là $r+\xi$. Vậy thớ gỗ đang xét chịu biến dạng dọc là

$$\frac{(r+\xi)-r}{r}=\frac{\xi}{r}.$$

Xét tiết diện A của dầm gỗ tại vị trí x. Ứng suất dọc tại ξ trục trung tính $N'N$ tại đó tiết diện cắt mặt phẳng trung hòa $N'N$ là

$$T(\xi)=\frac{E\xi}{r},$$

trong đó E là suất Young của vật liệu. Momen tổng công của các ứng suất dọc đối với trục trung tính là

$$M(x)=\int T\xi dA=\frac{E}{r}\int\xi^2dA=\frac{EI}{r}. \qquad (1)$$

I là momen quán tính của diện tích tiết diện quanh trục trung tính. Momen uốn cực đại xảy ra tại tiết diện $x=0$ và ứng suất cực đại xảy ra tại biên trên và biên dưới. Do

$$T=\frac{E\xi}{r}=\frac{M(x)\xi}{I};$$

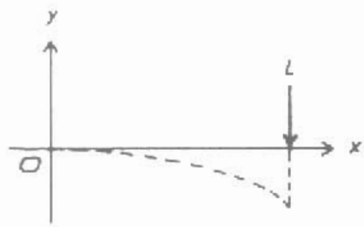
$$T_{\max}=\frac{M(0)h}{I}=\frac{Llh}{I}.$$

Để cho dầm gỗ bị uốn cong ít nhất, dầm gỗ phải được lắp sao cho độ cao của nó là $2h = 4$ in và bề dày $w = 2$ in. Do đó

$$I = \int \xi^2 dA = \omega \int_{-h}^{h} \xi^2 d\xi = \frac{2}{3}\omega h^3 = \frac{32}{3}\ \text{in}^4 .$$

Với $l = 72$ in, ứng suất giới hạn $T_{\max} = 7900$ lb/in^2, suy ra độ lớn của trọng vật cực đại là

$$L = \frac{7900 \times 32}{3 \times 72 \times 2} = 585\ \text{lb (pao)} .$$



Hình 1.238

Hình 1.238 cho thấy sự uốn cong của mặt phẳng trung tính $N'N$. Phương trình (1) suy ra

$$\frac{d^2y}{dx^2} \approx \frac{1}{r} = \frac{M(x)}{EI} = \frac{L(l - x)}{EI} .$$

Lấy tích phân và chú ý là $dy/dx = 0$ tại $x = 0$, ta có

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{L}{EI}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) .$$

Tích phân thêm lần nữa với $y = 0$ tại $x = 0$ suy ra

$$y = \frac{L}{EI}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{lx^2}{2}\right) .$$

Độ dịch chuyển của điểm P do đó sẽ là

$$\frac{L}{EI}\left(\frac{l^3}{6} - \frac{l^3}{2}\right) = -\frac{Ll^3}{3EI} = -4,21\ \text{in} .$$

1258

Rất nhiều giáo trình sơ cấp mô tả định luật Pascal về thủy tĩnh học như sau “bất kì độ thay đổi áp suất nào của chất lưu bị đóng kín nào đều truyền không bị giảm và ngay lập tức tới tất cả mọi điểm khác trong lòng chất lưu đó". Điều này có vi phạm nguyên lý tương đối không? Giải thích một cách rõ nhất ý nghĩa của từ "ngay lập tức" trong trường hợp này.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Định luật Pascal không thực sự vi phạm nguyên lý tương đối. Nguyên lý đó giả thiết rằng chất lưu không thể bị nén, và là một mô hình đơn giản hóa, không hoàn toàn chính xác với chất lưu thật.

Sự thay đổi áp suất tại một điểm của chất lưu được truyền đi trong lòng chất lưu với vận tốc của âm thanh. Do kích thước của bình chứa thông thường rất nhỏ so với quãng đường đi được của âm thanh trong một khoảng thời gian ngắn nên độ thay đổi áp suất có vẻ như là được truyền đi tới mọi phần của chất lưu, một cách "ngay lập tức" hay tức thời.

1259

Một cân đòn được dùng để đo khối lượng m_1 của một chất rắn thể tích V_1 có mật độ khối ρ_1 rất bé. Vật rắn này được đặt ở đĩa cân bên trái và các quả cân bằng kim loại có mật độ ρ_2 rất lớn được đặt ở đĩa bên phải để cân bằng.

(a) Nếu sự cân này đầu tiên được thực hiện trong không khí sau đó lồng cân được rút chân không thì cân đòn còn giữ nguyên thăng bằng không? Nếu không thì đĩa bên nào sẽ lệch xuống dưới?

(b) Xác định phần trăm sai số (nếu có) của khối lượng m_1 đo được khi cân trong không khí (mật độ khối của không khí là $= \rho_A$).

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Cân sẽ không còn thăng bằng nữa sau khi rút chân không lồng cân. Đĩa bên trái, mang chất rắn mật độ khối nhỏ hơn, do đó là vật có thể tích lớn hơn sẽ lệch xuống do nó đã được đẩy nhiều hơn lên trên bởi không khí trong khi cân trong không khí.

(b) Đặt khối lượng thực và khối lượng cân được (biểu kiến) của chất rắn trong không khí lần lượt là m và m_1. Khi đó

$$mg - \frac{m}{\rho_1}\rho_A g = m_1 g - \frac{m_1}{\rho_2}\rho_A g\,,$$

hay

$$m - m_1 - \left(\frac{m}{\rho_1} - \frac{m_1}{\rho_2}\right)\rho_A \approx \frac{m_1}{\rho_1}\rho_A ,$$

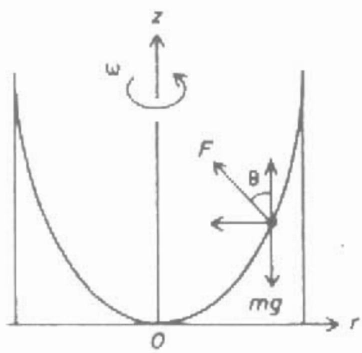
nghĩa là

$$\frac{\Delta m_1}{m_1} \approx \frac{\rho_A}{\rho_1} .$$

1260

Một gàu nước được quay với vận tốc góc không đổi ω quanh trục đối xứng của nó. Xác định hình dạng của bề mặt nước sau khi mọi chuyện đã ổn định.

(MIT)



Hình 1.239

Lời giải:

Xét một hạt nước trên bề mặt có khối lượng m. Có hai lực tác dụng lên nó: lực **F** vuông góc với mặt nước gây ra bởi các hạt nước xung quanh, và trọng lực mg, như trên hình 1.239. Do nó di chuyển trên một quỹ đạo tròn với vận tốc góc không đổi ω, trong hệ tọa độ trụ với gốc tọa độ là điểm thấp nhất của mặt nước ta có

$$F\cos\theta = mg ,$$

$$F\sin\theta = m\omega^2 r ,$$

trong đó θ là góc giữa pháp tuyến của mặt nước và trục z. Do đó

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{\omega^2 r}{g} .$$

Do tgθ là độ dốc của đường cong biểu diễn hình dạng bề mặt nước,

$$\frac{dz}{dr} = \frac{\omega^2 r}{g} ,$$

suy ra

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} ,$$

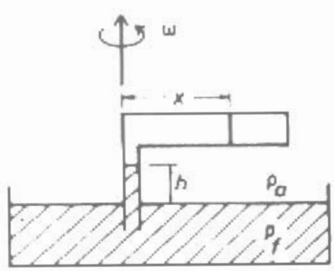
do $z = 0$ đối với $r = 0$. Do đó mặt nước là một hình paraboloit được tạo ra bởi parabon ở trên quay quanh trục z.

1261

Một thiết bị bao gồm một ống mảnh thẳng đứng và một ống rộng nằm ngang nối với nhau theo cách như trên hình 1.240 được nhúng chìm vào một chất lỏng có mật độ ρ_f. Mật độ và áp suất của khí quyển bên ngoài lần lượt là ρ_a và p_a. Đầu cuối của ống nằm ngang khi đó được bịt chặt và sau đó thiết bị quay với vận tốc góc không đổi là ω như đã chỉ ra. Có thể coi không khí trong khí quyển là khí lý tưởng và có một nhiệt độ cố định và bỏ qua sự thay đổi mật độ không khí theo độ cao. Cuối cùng, bỏ qua hiện tượng mao dẫn và ma sát bề mặt.

Tìm chiều cao h mà nước dâng lên trong ống thẳng đứng tới bậc hai của ω.

(Princeton)



Hình 1.240

Lời giải:

Áp suất p và mật độ ρ của không khí trong ống nằm ngang không đều. Xét một lớp thẳng đứng của không khí có bề dày dx tại khoảng cách x tính từ trục quay như trên hình 1.240. Do ống quay với vận tốc góc ω, ta có

$$[p(x+dx)-p(x)]A = \omega^2 x\rho A dx ,$$

A là diện tích tiết diện ống, hay

$$\frac{dp}{dx} = \omega^2 x\rho .$$

Coi không khí là khí lý tưởng với phân tử lượng M, ta có

$$pV = \frac{m}{M}RT ,$$

hay

$$\rho = \frac{pM}{RT} ,$$

trong đó R là hằng số khí. Do đó

$$d\rho = \frac{M}{RT}dp$$

và

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{M\omega^2}{RT}xdx .$$

Lấy tích phân phương trình trên ta có

$$\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = \frac{M\omega^2}{2RT}x^2 ,$$

trong đó ρ_0 là mật độ của không khí tại điểm $x=0$. Như vậy

$$\rho = \rho_0 e^{\alpha x^2}$$

với $\alpha = M\omega^2/2RT$. ρ_0 có thể được xác định bằng cách xét toàn bộ khối lượng không khí bên trong ống

$$\int_0^L \rho S dx = \rho_a SL ,$$

tức là

$$\rho_0\int_0^L e^{\alpha x^2}dx = \rho_a L .$$

Với ω không quá lớn, α là một số nhỏ. Do

$$e^{\alpha x^2} = 1 + \alpha x^2 + \frac{\alpha^2 x^4}{2!} + \ldots \approx 1 + \alpha x^2 ,$$

có thể lấy gần đúng phương tình ở trên là

$$\rho_0 L\left(1+\frac{\alpha L^2}{3}\right) \approx \rho_a L ,$$

hay

$$\rho_0 \approx \left(1-\frac{\alpha L^2}{3}\right)\rho_a .$$

Do p tỉ lệ thuận với ρ vì nhiệt độ được giả thiết là không đổi tại mọi điểm, ta có áp suất tại điểm $x = 0$ là

$$p_0 = \left(1-\frac{\alpha L^2}{3}\right)p_a .$$

Bây giờ xét chất lỏng trong ống nhỏ thẳng đứng. Điều kiện cận bằng là

$$p_a = p_0 + gh\rho_f ,$$

hay

$$\frac{\alpha L^2}{3}p_a = gh\rho_f ,$$

suy ra

$$h = \frac{M\omega^2 L^2 p_a}{6RTg\rho_f} = \frac{\omega^2 L^2}{6g}\cdot\frac{\rho_a}{\rho_f} .$$

1262

Một bình chứa hình trụ tiết diện tròn, bán kính là R, được đỡ sao cho nó có thể quay quanh trục thẳng đứng của nó. Ban đầu nó được đổ đầy chất lỏng (giả sử không thể bị nén) có mật độ ρ tới độ cao h so với đáy phẳng của nó. Sau đó bình trụ được cho quay với vận tốc góc ω quanh trục của nó. Vận tốc góc được giữ không đổi và đợi đến khi hệ ổn định. Giả thiết rằng chất lỏng không bị tràn ra ngoài và không có phần nào của đáy bị cạn nước.

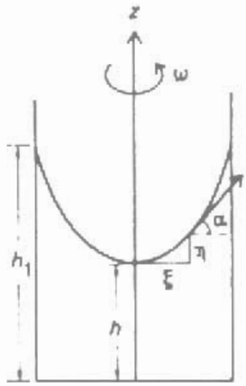
(a) Tìm phương trình mô tả mặt nước.

(b) Tìm biểu thức của áp suất $p(z)$ của mặt trụ tại độ cao z so với đáy.

(c) Tìm biểu thức của áp suất $p_0(z)$ dọc theo trục tại độ cao z so với đáy.

(d) Đối với người quan sát cố định dòng chất lỏng không có rota? Chất lỏng tất nhiên chịu tác động của trọng lực và chúng ta giả sử áp suất khí quyển tiêu chuẩn p_a trên toàn bộ bề mặt nước.

(UC, Berkeley)



Hình 1.241

Lời giải:

(a) Xét một mặt phẳng thẳng đứng chứa trục quay. Đặt α là góc giữa tiếp tuyến của mặt trên chất lỏng với đường nằm ngang tại điểm có khoảng cách ξ so với trục quay và có độ cao η so với điểm thấp nhất của bề mặt trên như trên hình 1.241. Áp dụng kết quả của bài 1260 ta có

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\omega^2 \xi}{g} .$$

Tích phân nó ta có parabon

$$\eta = \frac{\omega^2 \xi^2}{2g} .$$

Bề mặt trên của chất lỏng thu được bằng cách quay parabon này quanh trục quay.

(b) Bề mặt trên của chất lỏng là một mặt đẳng áp có áp suất bằng áp suất khí quyển p_a. Chú ý là mỗi parabon quay như thế trong chất lỏng đều là một mặt đẳng áp, hiệu áp suất giữa nó và bề mặt trên được xác định bằng khoảng cách giữa hai bề mặt dọc theo trục quay. Gọi h là chiều cao của điểm thấp nhất của các bề mặt trên so với đáy bình chứa. Chiều cao của điểm cao nhất trên bề mặt trên so với đáy khi đó là

$$h_1 = h + \frac{\omega^2 R^2}{2g} .$$

Nếu $S = \pi R^2$ và h_0 là độ cao của chất lỏng khi nó không bị quay, thể tích tổng cộng của chất lỏng là

$$h_0 S = h_1 S - \int_0^{\frac{\omega^2 R^2}{2g}} \pi\xi^2 d\eta = h_1 S - \int_0^R \frac{\pi\omega^2}{g}\xi^3 d\xi$$

$$= h_1 S - \frac{\pi\omega^2 R^4}{4g} = \left(h_1 - \frac{\omega^2 R^2}{4g}\right)\pi R^2 ,$$

suy ra

$$h_1 = h_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g} ,$$

và do đó

$$h = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} .$$

Áp suất lên bề mặt trụ ở độ cao z so với đáy do vậy là

$$p(z) = p_a + (h_1 - z)\rho g = p_a + \left(h_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g} - z\right)\rho g .$$

(c) Áp suất dọc theo trục quay tại độ cao z so với đáy là

$$p_0(z) = p_a + (h - z)\rho g = p_a + \left(h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} - z\right)\rho g .$$

(d)

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \nabla \times \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= \nabla \times (-\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j})$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega\mathbf{k} .$$

Do $\nabla \times \mathbf{v} \neq 0$, nên dòng chất lỏng có rota.

1263

Cho biết góc trông (đường kính góc) của mặt trăng và mặt trời gần như là bằng nhau và thủy triều gây ra bởi mặt trăng cao gấp đôi thủy triều gây ra bởi mặt trời. Bạn có thể rút ra kết luận gì về mật độ tương đối của mặt trăng so với mặt trời.

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

Gọi R_e, R_m, R_s là các bán kính, M_e, M_m, M_s là các khối lượng của trái đất, mặt trăng, mặt trời và kí hiệu h_m, h_s tương ứng là chiều cao của thủy triều gây ra bởi mặt trăng và mặt trời tại một điểm trên trái đất và D_m, D_s lần lượt là khoảng cách từ tâm của trái đất tới mặt trăng và mặt trời. Nhiễu loạn gây ra bởi mặt trăng tại một điểm trên bề mặt của trái đất có thể được thể hiện qua thế gần đúng là

$$\frac{3}{2}\frac{GM_m R_e^2}{D_m^3}\left(\frac{1}{3}-\cos\theta\right) .$$

trong đó θ là khoảng cách thiên đỉnh của mặt trăng tại điểm đó. Giá trị của nó bằng gh_m, trong đó

$$g=\frac{GM_e}{R_e^2}$$

là gia tốc trọng trường của trái đất, ta có

$$h_m=\frac{3}{2}\frac{R_e^4 M_m}{D_m^3 M_e}\left(\frac{1}{3}-\cos^2\theta\right) .$$

Đối với cùng khoảng cách góc thiên đỉnh

$$\frac{h_m}{h_s}=\left(\frac{D_s}{D_m}\right)^3\frac{M_m}{M_s}=\left(\frac{D_s}{D_m}\right)^3\left(\frac{R_m}{R_s}\right)^3\frac{\rho_m}{\rho_s} ,$$

với ρ_m, ρ_s tương ứng là kí hiệu mật độ trung bình của mặt trăng và mặt trời. Do các đường kính góc của mặt trời và mặt trăng là xấp xỉ bằng nhau ta có

$$\frac{R_m}{D_m}=\frac{R_s}{D_s} ,$$

và do đó

$$\frac{\rho_m}{\rho_s}=\frac{h_m}{h_s}=2 ,$$

là tỉ lệ mật độ khối lượng của mặt trăng so với mặt trời.

1264

Một thiên thể được hình thành từ một vật liệu giả định có phương trình trạng thái

$$p = \frac{1}{2}K\rho^2 ,$$

trong đó p là áp suất và ρ là mật độ khối.

(a) Chỉ ra rằng đối với vật liệu này, trong điều kiện cân bằng thủy tĩnh, có mối liên hệ tuyến tính giữa mật độ và thế hấp dẫn. Dấu đại số của số hạng tỉ lệ đóng vai trò quan trọng.

(b) Viết phương trình vi phân thỏa mãn ở cân bằng thủy tĩnh bởi mật độ. Điều kiện biên và các ràng buộc vật lý khác nào phải được sử dụng?

(c) Giả sử đối xứng cầu, tìm bán kính của thiên thể tại trạng thái cân bằng.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Giả sử chất lưu chịu tác dụng của một ngoại lực **F** trên đơn vị thể tích. Xét các bề mặt vuông góc với trục x có phần tử thể tích $d\tau = dxdydz$ của chất lưu đó. Tại trạng thái cân bằng, **F** cân bằng với áp suất trong chất lưu, như vậy

$$F_x d\tau = [p(x+dx) - p(x)]dydz = \frac{\partial p}{\partial x}d\tau .$$

nghĩa là

$$F_x = \frac{\partial p}{\partial x}$$

hay

$$\mathbf{F} = \nabla p .$$

Khi đó nếu **f** là ngoại lực trên một đơn vị khối lượng chất lưu, ta có

$$\mathbf{f} = \frac{1}{\rho}\nabla p .$$

Do p có thể được rút ra bằng phương trình trạng thái, ta có

$$\nabla p = K\rho\nabla\rho ,$$

và

$$\mathbf{f} = K\nabla\rho .$$

Nếu ngoại lực phát sinh từ thế hấp dẫn ϕ, thì

$$\mathbf{f} = -\nabla\phi .$$

So sánh với các phương trình trên ta có

$$\nabla\phi + K\nabla\rho = 0 ,$$

hay

$$\phi + K\rho = \text{ hằng số} .$$

Do đó ϕ và ρ có quan hệ tuyến tính.

(b) Phương trình Poisson

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$$

khi đó cho

$$\nabla^2\rho + \frac{4\pi G\rho}{K} = 0 .$$

Đây là phương trình vi phân cần được thoả mãn bởi mật độ để đạt được trạng thái cân bằng. Điều kiện biên là mật độ ρ bằng không tại biên của thiên thể.

(c) Với đối xứng cầu ta sử dụng hệ tọa độ cầu có gốc tại tâm của thiên thể. Phương trình cuối cùng khi đó trở thành

$$\frac{d^2\rho}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\rho}{dr} + \frac{4\pi G\rho}{K} = 0 .$$

Đặt $u = \rho r$, $\omega^2 = 4\pi G/K$ và thế vào phương trình trên ta được

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \omega^2 u = 0 ,$$

nó có nghiệm là

$$u = u_0\sin(\omega r + \beta) ,$$

suy ra

$$\rho = \frac{r_0\rho_0}{r}\sin(\omega r + \beta) ,$$

trong đó r_0, ρ_0 và β là các hằng số. Điều kiện biên $\rho = 0$ tại $r = R$, trong đó R là bán kính của thiên thể đòi hỏi

$$\omega R + \beta = n\pi, \qquad n = 1, 2, 3, \dots .$$

Tuy nhiên, mật độ khối ρ phải là một đại lượng không âm nên $\omega r + \beta \le \pi$. Điều đó có nghĩa rằng $n = 1$ và $\omega R + \beta = \pi$. Xét

$$\begin{aligned}
\mathbf{f} &= K\nabla\rho \\
&= K\left[-\frac{r_0\rho_0}{r^2}\sin(\omega r + \beta) + \frac{r_0\rho_0}{r}\omega\cos(\omega r + \beta)\right]\mathbf{e}_r \\
&= -K\frac{\rho_0 r_0}{r^2}\cos(\omega r + \beta)[\operatorname{tg}(\omega r + \beta) - \omega r]\mathbf{e}_r .
\end{aligned}$$

Do đối xứng ra cần có f = 0 tại $r = 0$. Điều này có nghĩa là khi $r \to 0$

$$\text{tg}(\omega r + \beta) - \omega r = \beta + \frac{1}{3}(\omega r + \beta)^3 + \ldots \to 0\,.$$

Do đó $\beta = 0$ và $\omega R = \pi$, suy ra bán kính của nó là

$$R = \sqrt{\frac{\pi K}{4G}}\,.$$

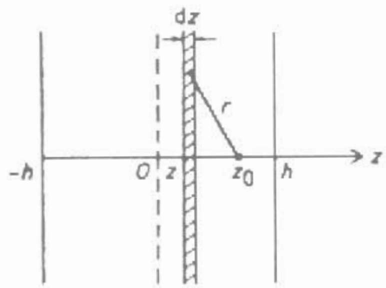
1265

Xét một bản chất lưu tự hấp dẫn đang ở trạng thái cân bằng thủy tĩnh có bề dày tổng cộng là $2h$ và có kính thước vô hạn theo hướng bên (theo các hướng x và y). Bản mỏng đó đồng nhất nên mật độ $\rho(z)$ chỉ là hàm của z, và phân bố vật chất tiếp tục đối xứng qua mặt phẳng giữa $z = 0$. Rút ra biểu thức của áp suất p của mặt $z = 0$ theo đại lượng

$$\sigma = \int_0^h \rho(z)dz$$

không được giả thiết thêm gì về phương trình trạng thái.

(UC, Berkeley)



Hình 1.242

Lời giải:

Trong trạng thái cân bằng thủy tĩnh, lực tác dụng trên một đơn vị khối lượng của chất lưu là (xem bài 1264)

$$\mathbf{f} = \frac{1}{\rho}\nabla p\,.$$

Do chỉ có sự thay đổi theo z, nên

$$f = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} . \tag{1}$$

Xét lực hấp dẫn tác dụng lên một đơn vị khối lượng tại điểm z_0, như trên hình 1.242, bởi một lớp chất lưu dày dz tại toạ độ z

$$\begin{aligned}
&- \int_0^\infty \frac{G\rho(z)dz \cdot 2\pi r dr}{r^2 + (z_0 - z)^2} \cdot \frac{z_0 - z}{\sqrt{r^2 + (z_0 - z)^2}} \\
&= -2\pi G\rho(z)(z_0 - z)dz \int_0^\infty \frac{rdr}{[r^2 + (z_0 - z)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&= -2\pi G\rho(z)(z_0 - z)\left[\frac{-1}{\sqrt{r^2 + (z_0 - z)^2}}\right]_0^\infty dz \\
&= \frac{-2\pi G\rho(z)(z_0 - z)dz}{|z_0 - z|} .
\end{aligned}$$

Lực hấp dẫn tổng cộng tác dụng lên đơn vị khối lượng tại $z = z_0$ là

$$\begin{aligned}
f(z_0) &= -2\pi G\left[\int_{-h}^{z_0} \rho(z)dz - \int_{z_0}^{h} \rho(z)dz\right] \\
&= -2\pi G \int_{-z_0}^{z_0} \rho(z)dz
\end{aligned}$$

do $\rho(z)$ đối xứng qua mặt phẳng$z = 0$. Áp dụng phương trình (1) cho điểm $z = z_0$ và lấy tích phân ta có

$$p(h) - p(0) = \int_0^h dp(z_0) = -2\pi G \int_0^h \rho(z_0)dz_0 \int_{z_0}^{z_0} \rho(z)dz .$$

Từ đó suy ra mật độ đối xứng $\rho(z)$

$$p(h) - p(0) = -4\pi G \int_0^h \rho(z_0)dz_0 \int_0^{z_0} \rho(z)dz .$$

Đặt $\varphi(z_0) = \int_0^{z_0} \rho(z)dz$, ta có $d\varphi/dz_0 = \rho(z_0)$ và

$$\int_0^h \rho(z_0)dz_0 \int_0^{z_0} \rho(z)dz = \int_0^h \rho(z_0)\varphi(z_0)\frac{d\varphi}{\rho(z_0)} = \int_0^\sigma \varphi d\varphi = \frac{\sigma^2}{2} ,$$

trong đó $\sigma = \int_0^h \rho(z)dz$. Sử dụng điều kiện biên $p(h) = 0$ cuối cùng ta có

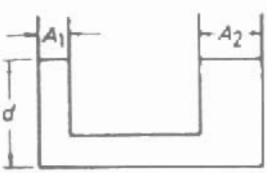
$$p(0) = 2\pi G\sigma^2 .$$

1266

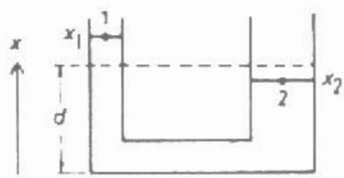
(a) Một con thuyền có khối lượng M nổi trên một bể chứa nước sâu có thành thẳng đứng. Một hòn đá khối lượng m được cho rơi vào thuyền. Mặt nước bể dâng lên bao nhiêu? Nếu hòn đá rơi trượt vào lòng bể thì mực nước dâng lên bao nhiêu?
[Có thể giả thiết mọi kích thước và hình dạng của bể nước, thuyền và hòn đá nếu cần thiết.]

(b) Một ống chữ U với hai nhánh có diện tích tiết diện khác nhau A_1, A_2 được đổ vào một lượng chất lỏng không chịu nén tới độ cao d, như trên hình 1.243. Không khí được thổi từng đợt vào một nhánh ống. Mô tả định lượng chuyển động của chất lỏng sau đó. Bỏ qua độ nhớt và sức căng bề mặt của chất lỏng.

(*UC, Berkeley*)



Hình 1.243



Hình 1.244

Lời giải:

(a) Gọi ρ_w và ρ_r tương ứng là mật độ của nước và hòn đá, S_t và S_b tương ứng là diện tích tiết diện nằm ngang của bể và thuyền. Với hòn đá ở trên thuyền, thuyền sẽ chìm xuống một khoảng Δh (so với mặt nước) sao cho sức nổi bổ sung tạo ra có độ lớn

$$mg = \rho_w S_b \Delta h g ,$$

suy ra

$$\Delta h = \frac{m}{\rho_w S_b} .$$

Điều này làm cho nước trong bể dâng lên một đoạn ΔH được cho bởi

$$S_t\Delta H = S_b\Delta h ,$$

hay

$$\Delta H = \frac{m}{\rho_w S_t} .$$

Nếu hòn đá rơi trượt ra khỏi thuyền và rơi vào bể nước, nó sẽ bị chìm xuống đáy bể. Điều này làm nước trong hồ "tăng" một thể tích là m/ρ_r, làm cho mực nước hồ dâng lên một đoạn

$$\Delta H = \frac{m}{\rho_r S_t} .$$

(b) Chuyển động của chất lưu là không xoáy (không rota) và không ổn định và được mô tả bằng phương trình Bernoulli dạng

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p + U - \rho\frac{\partial\phi}{\partial t} = \text{ constant} ,$$

nó đúng với mọi điểm trong chất lỏng tại thời điểm t. U là thế của ngoại lực $\mathbf{F}$ định nghĩa bởi $\mathbf{F} = -\nabla U$, và ϕ là thế vận tốc định nghĩa là $\mathbf{v} = -\nabla\phi$. Xét hai điểm trên bề mặt 1, 2 trên mỗi nhánh của ống chữ U tại khoảng cách x_1, x_2 so với vị trí cân bằng d như trên hình 1.244. Phương trình Bernoulli suy ra

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 + U_1 - \rho\frac{\partial\phi_1}{\partial t} = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 + U_2 - \rho\frac{\partial\phi_2}{\partial t}$$

với

$$\begin{aligned}
&p_1 = p_2 = \text{ áp suất khí quyển} ,\\
&U_1 = (d + x_1)\rho g, \qquad U_2 = (d - x_2)\rho g ,\\
&v_1 = \dot{x}_1, \qquad v_2 = \dot{x}_2 ,\\
&\frac{\partial\phi_1}{\partial t} = -\int_0^{d+x_1}\frac{\partial v_1}{\partial t}dx \approx -\ddot{x}_1 d,\\
&\frac{\partial\phi_2}{\partial t} = -\int_0^{d-x_1} -\frac{\partial v_2}{\partial t}dx \approx \ddot{x}_2 d ,
\end{aligned}$$

chỉ giữ lại các số hạng bậc nhất của các đại lượng nhỏ x_1, x_2 và các đạo hàm theo thời gian của chúng. Với gần đúng tương tự phương trình Bernoulli trở thành

$$(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + \frac{g}{d}(x_1 + x_2) = 0 .$$

Sử dụng phương trình liên tục

$$A_1x_1 = A_2x_2 ,$$

ta có

$$\ddot{x}_1 + \frac{gx_1}{d} = 0 ,$$
$$\ddot{x}_2 + \frac{gx_2}{d} = 0 .$$

Do đó chuyển động sau đó của chất lỏng là dao động điều hòa với tần số góc $\omega = \sqrt{g/d}$.

1267

Một trạm không gian được chế tạo từ một hình trụ bán kính R_0 được nạp đầy không khí. Hình trụ quay xung quanh trục đối xứng của nó với tốc độ góc ω để đảm bảo gia tốc tại mép bằng gia tốc trọng trường g trên mặt đất.

Nếu nhiệt độ T bên trong trạm là không đổi, tìm tỉ số của áp suất không khí tại tâm với áp suất tại mép?

(MIT)

Lời giải:

Xét một vỏ hình trụ không khí bán kính r và dày Δr. Chênh lệch áp suất ngang qua các bề mặt cong của nó tạo nên lực hướng tâm cho không khí quay. Như vậy

$$[p(r + \Delta r) - p(\Delta r)]2\pi rl = \omega^2 r \cdot 2\pi rl\rho\Delta r ,$$

ở đây ρ là mật độ không khí và l là chiều dài hình trụ, cho ta

$$\frac{dp}{dr} = \rho\omega^2 r .$$

Không khí tuân theo phương trình trạng thái khí lí tưởng

$$pV = \frac{m}{M}RT ,$$

hay

$$\rho = \frac{M}{RT}p ,$$

ở đây T và M là nhiệt độ tuyệt đối và phân tử lượng của không khí và R hằng số khí. Do đó

$$\frac{dp}{dr} = \frac{M\omega^2}{RT}pr .$$

Tích phân ta có

$$\int_{p(0)}^{p(R_0)} \frac{dp}{p} = \frac{M\omega^2}{RT} \int_0^{R_0} r dr ,$$

có nghĩa là

$$\ln\left[\frac{p(R_0)}{p(0)}\right] = \frac{M\omega^2 R_0^2}{2RT} = \frac{MR_0 g}{2RT} ,$$

do gia tốc ở mép, $\omega^2 R_0$, bằng g. Do đó tỉ số áp suất là

$$\frac{p(0)}{p(R_0)} = \exp\left(-\frac{MR_0 g}{2RT}\right) .$$

1268

Hãy tính hình dạng bề mặt tròn xoay mô tả độ phình ra ở xích đạo khi hành tinh quay chậm hình thành. Thừa nhận rằng hành tinh gồm toàn chất lỏng không bị nén mật độ ρ và khối lượng tổng M hành tinh đó quay với vận tốc góc đều ω. Khi quay, khoảng cách cân bằng kể từ tâm hành tinh đến hai cực của nó là R_p.

(a) Hãy viết phương trình cân bằng thủy tĩnh đối với bài toán.

(b) Giải đối với áp suất gần bề mặt của hành tinh bằng cách sử dụng gần đúng thô là trường hấp dẫn gần bề mặt có thể được viết như $-GM\mathbf{r}/r^2$.

(c) Tìm phương trình cho bề mặt hành tinh.

(d) Nếu độ phình xích đạo $(R_e - R_p)$ là một phần nhỏ của bán kính hành tinh, tìm một gần đúng cho biểu thức nhận được trong (c) để mô tả độ lệch của bề mặt so với tính cầu.

(e) Với trường hợp của trái đất ($R_p = 6400$ km, $M = 6 \times 10^{24}$ kg) hãy ước lượng bằng con số chiều cao của chỗ phình xích đạo.

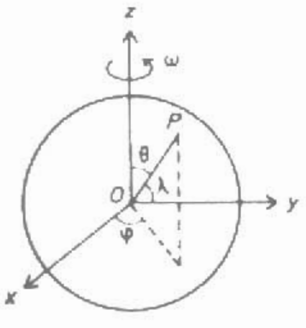
(*MIT*)

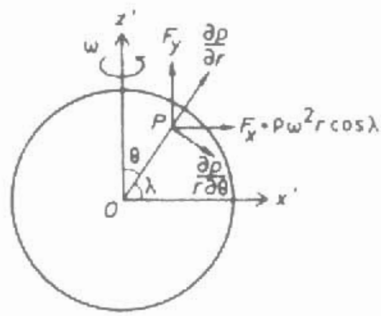
Lời giải:

(a) Sử dụng tọa độ như hình 1.245 và xét điểm P trong hành tinh. Trong trạng thái cân bằng lực ngoài cân bằng bởi áp lực trên một đơn vị thể tích,

$$\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial r}, \frac{\partial p}{r\partial\theta}, 0\right) ,$$

trong tọa độ cầu với sự thừa nhận rằng hành tinh là đối xứng quanh trục quay.





Hình 1.245

Hình 1.246

Bây giờ sử dụng hệ quy chiếu quay gắn với hành tinh sao cho trục z' trùng với trục quay và mặt phẳng $x'z'$ chứa OP. Trong hệ quy chiếu này lực ly tâm tưởng tượng trên một đơn vị thể tích, $\rho\omega^2 r\cos\lambda$, ở đây $\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$ là vĩ độ, phải được đưa ra. Đặt $\mathbf{F}$ là lực hấp dẫn trên một đơn vị thể tích. Khi đó các lực có liên quan như ở hình 1.246. Khi $d\theta = -d\lambda$, ta có thể viết $\partial p/\partial\theta = -\partial p/\partial\lambda$ và có, trong các hướng x' và z',

$$\frac{\partial p}{\partial r}\cos\lambda - \frac{\partial p}{r\partial\lambda}\sin\lambda = F_{x'} + \rho\omega^2 r\cos\lambda\,, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r}\sin\lambda + \frac{\partial p}{r\partial\lambda}\cos\lambda = F_{y'}\,. \qquad (2)$$

(b) Lực hấp dẫn trên một đơn vị thể tích tại P, như đã cho, có các thành phần

$$F_{x'} = -\frac{\rho GM\cos\lambda}{r^2}, \qquad F_{y'} = -\frac{\rho GM\sin\lambda}{r^2}\,.$$

Thay vào phương trình (2), ta có

$$\frac{\partial p}{r\partial\lambda} = -\left(\frac{\rho GM}{r^2} + \frac{\partial p}{\partial r}\right)\mathrm{tg}\lambda\,,$$

mà với phương trình (1) sẽ cho

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\omega^2 r\cos^2\lambda - \frac{\rho GM}{r^2}\,.$$

Vì $p = 0$ tại $r = R$, tích phân của nó cho

$$p = \frac{1}{2}(r^2 - R^2)\rho\omega^2\cos^2\lambda + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)\rho GM$$

Với điểm ở độ sâu h dưới bề mặt vĩ độ λ, ta có, khi $r = R - h$ với $h \ll R$,

$$r^2 - R^2 \approx -2Rh, \qquad \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \approx \frac{h}{R^2}$$

và

$$p \approx \left(-R\omega^2 \cos^2 \lambda + \frac{GM}{R^2}\right) \rho h \ .$$

(c) Bề mặt hành tinh là một mặt đẳng thế. Thế (thế năng trên một đơn vị khối lượng) tại bề mặt gây ra do lực hấp dẫn là

$$U = -\frac{GM}{R} + \text{ hằng số } .$$

Thế ϕ gây ra do lực ly tâm được cho bởi

$$-\nabla\phi = \left(-\frac{\partial\phi}{\partial r}, \frac{\partial\phi}{r\partial\lambda}\right) = \left(\omega^2 r \cos^2 \lambda, \omega^2 r \cos\lambda \sin\lambda\right) \ .$$

Như vậy

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\omega^2 r \cos^2 \lambda \ ,$$

hay

$$\phi = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2 \lambda + f(\lambda) \ .$$

Khi

$$\frac{\partial\phi}{r\partial\lambda} = \omega^2 r \cos\lambda \sin\lambda + \frac{1}{r} f'(\lambda) = \omega^2 r \cos\lambda \sin\lambda \ ,$$

$$f'(x) = 0 \qquad \text{hoặc} \qquad f(x) = \text{ hằng số } .$$

Do đó đối với bề mặt ta có

$$-\frac{1}{2}\omega^2 R^2 \cos^2 \lambda - \frac{Gm}{R} = \text{ hằng số.}$$

Tại các cực, $\lambda = \pm\frac{\pi}{2}$, $R = R_p$. Như vậy ta có

$$\frac{1}{2}\omega^2 \cos^2 \lambda R^3 - \frac{GM}{R_p} R + GM = 0 \ .$$

(d) Tại xích đạo, $\lambda = 0$, $R = R_e$, và phương trình trên trở thành

$$\omega^2 R_e^3 = 2GM\left(\frac{R_e - R_p}{R_P}\right) \ .$$

Độ lệch của bề mặt so với tính cầu là

$$\frac{R_e - R_p}{R_p} = \frac{\omega^2 R_e^3}{2GM}\,.$$

(e) Đối với trái đất,

$$R = 6400\ \text{km}, \qquad R_e \approx R_p = 6400\ \text{km}\,, \qquad M = 6\times 10^{24}\ \text{kg}\,,$$
$$\omega = \frac{2\pi}{24\times 3600}\ \text{s}^{-1}, \qquad G = 6,67\times 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2\,,$$

ta có

$$R_e - R_p = 11\ \text{km}\,.$$

1269

Hệ số nén K của chất khí hay chất lỏng được định nghĩa là $K = -(dV/V)/dp$, ở đây $-dV$ là độ giảm thể tích do độ tăng áp suất dp. Không khí (tại áp suất và nhiệt độ tiêu chuẩn) chịu nén khoảng 15.000 lần lớn hơn so với nước.

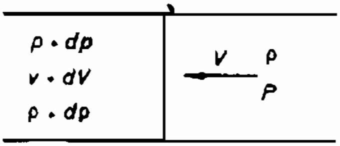
(a) Đưa ra công thức cho vận tốc sóng âm v, $1/v^2 = K\rho$, ở đây ρ là mật độ khối. Sử dụng bất kì phương pháp nào bạn muốn. (Một mô hình đơn giản sẽ là đủ.)

(b) Vận tốc âm thanh trong không khí (tại áp suất và nhiệt độ tiêu chuẩn) là khoảng 330 m/s. Vận tốc âm thanhh trong nước khoảng 1470 m/s. Hãy giả thiết rằng bạn có nước chứa một hỗn hợp đồng nhất bọt không khí nhỏ xíu (rất nhỏ so với bước sóng âm trong không khí), nó chiếm chỉ 1% thể tích. Bỏ qua ảnh hưởng của bọt đối với mật độ khối lượng của hỗn hợp (so với nước tinh khiết). Tìm hằng số nén K của hỗn hợp, và do đó tìm v đối với hỗn hợp. So sánh trị số của v đối với phần thể tích 1% đã cho với trị số v của nước tinh khiết hay không khí.

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

(a) Không mất tính tổng quát, ta có thể xét bài toán một chiều và giả thiết rằng mặt đầu vùng bị nén, nghĩa là mặt đầu sóng, được truyền từ trái sang phải với vận tốc v. Để thuận tiện, ta sử dụng hệ toạ độ sao cho vùng nén đứng yên, khi đó các hạt khí trong vùng sóng không tới được sẽ chuyển động từ trái sang phải với vận tốc v trong hệ quy chiếu này. Đặt áp suất và mật độ trong



Hình 1.247

vùng không khí vừa nói tương ứng là p và ρ. Khi các hạt đi vào vùng bị nén, vận tốc của chúng thay đổi thành $v + dv$, áp suất thay đổi thành $p + dp$, và mật độ thay đổi thành $\rho + d\rho$, như ở hình 1.247. Khối lượng khí đi qua một đơn vị diện tích mặt đầu sóng là

$$\rho v = (\rho + d\rho)(v + dv) ,$$

Từ đó ta có, với các đại lượng bậc một,

$$v d\rho = -\rho dv .$$

Độ biến thiên động lượng trên một đơn vị thời gian ngang qua một đơn vị diện tích là

$$(\rho + d\rho)(v + dv) \cdot (v + dv) - \rho v \cdot v = v^2 d\rho + 2\rho v dv .$$

Theo định luật Newton hai điều này tương ứng với áp suất dư của vế bên phải so với vế bên trái. Như vậy

$$v^2 d\rho + 2\rho v dv = p - (p + dp) = -dp .$$

Hai phương trình trên cho ta

$$v^2 d\rho = dp .$$

Với khối lượng m đã cho của chất khí

$$m = \rho V$$

hay

$$d\rho = -\rho \frac{dV}{V} .$$

Do đó

$$v^2 d\rho = -v^2 \rho \frac{dV}{V} = dp ,$$

hoặc

$$v^2 = -\left(\frac{dV}{V}\right)^{-1} \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{K\rho} ,$$

có nghĩa là

$$v = \frac{1}{\sqrt{K\rho}} .$$

(b) Đối với hỗn hợp đã cho

$$K = -\frac{dV}{Vdp} = -\frac{dV_1 + dV_2}{Vdp} = \frac{K_1V_1 + K_2V_2}{V} .$$

Đối với nước và không khí tương ứng ta có

$$v_1^2 = \frac{1}{K_1\rho_1}, \qquad v_2^2 = \frac{1}{K_2\rho_2} ,$$

và như vậy

$$\begin{aligned} \frac{K_2}{K_1} &= \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 \frac{\rho_1}{\rho_2} \\ &= \left(\frac{1470}{330}\right)^2 \frac{1}{1,293 \times 10^{-3}} \\ &= 1,53 \times 10^4 . \end{aligned}$$

Do đó, đối với hỗn hợp

$$K = \left(\frac{V_1}{V} + \frac{K_2V_2}{K_1V}\right) K_1 = (0,99 + 153)K_1 \approx 154K_1,$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{K\rho}} \approx \frac{1}{\sqrt{154K_1\rho_1}} = \frac{1470}{\sqrt{154}} = 118 \text{ m/s} ,$$

nó nhỏ hơn rất nhiều so với vận tốc âm thanh trong nước tinh khiết hay không khí.

1270

Xét sự dãn nở đối xứng cầu của một chất khí đồng tính, tự hấp dẫn với áp suất không đáng kể. Các điều kiện ban đầu của dãn nở không được chỉ ra; thay vào đó bạn được cho biết là khi mật độ là ρ_0, một phần tử chất lưu có bán kính R_0 tính từ gốc có vận tốc là v_0.

(a) Hãy tìm $v(R)$.

(b) Mô tả trạng thái cuối cùng của khí theo v_0, R_0 và ρ_0.

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

(a) Xét chuyển động của một đơn vị khối lượng tại bề mặt chất khí, định luật bảo toàn có năng cho ta

$$\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{GM}{R_0} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{R} ,$$

ở đây $M = 4\pi\rho_0 R_0^3/3$ là khối lượng tổng của chất khí. Do đó vận tốc của một đơn vị khối lượng khí khi bán kính phần thể tích khí là R là

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{8}{3}\pi G\rho_0 R_0^3\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}\right)} .$$

(b) Khi R tăng, v giảm, và cuối cùng $v = 0$ và sự dãn nở dừng lại khi bán kính trở thành

$$R = \left[\frac{1}{R_0} - \frac{3v_0^2}{8\pi G\rho_0 R_0^3}\right]^{-1} .$$

1271

Một chất lỏng không bị nén mật độ khối lượng ρ, độ nhớt η được bơm trong dòng chảy thành lớp trạng thái dừng qua một ống tròn bán kính trong là R và chiều dài L. Áp suất tại đầu vào là p_1, áp suất đầu ra là p_2, $p_1 > p_2$.

Đặt Q là khối lượng của chất lỏng chảy qua ống trong một đơn vị thời gian. Hãy tính Q.

(*CUSPEA*)

Lời giải:

Sử dụng toạ độ trụ (r, φ, z) với trục z dọc theo trục của ống. Đối với dòng chảy thành lớp vận tốc v của chất lỏng có các thành phần

$$v_r = v_\varphi = 0, \qquad v_z = v .$$

Ngoài ra, vì đối xứng, $v = v(r)$. Khi đó trong phương trình Navier-Stokes

$$\rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} - \eta\nabla^2\mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{F} ,$$

$\partial \mathbf{v}/\partial t = 0$ đối với chuyển động dừng,

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}\mathbf{e}_z = 0\ ,$$

do $v = v_z(r)$, và lực ngoài trên một đơn vị thể tích $\mathbf{F}$ bằng không với điều kiện lực hút có thể bỏ qua, ta có

$$\nabla p = \eta \nabla^2 \mathbf{v}\ .$$

Phương trình này trở thành

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\eta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right), \qquad \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$$

đối với $\mathbf{v} = v(r)\mathbf{e}_z$. Do vế phải của phương trình thứ nhất phụ thuộc vào r trong khi p là hàm của z, nên vế kia phải bằng một hằng số, đó là

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{p_2 - p_1}{L} = -\frac{\Delta p}{L}\ ,$$

ở đây $\Delta p = p_1 - p_2$. Do đó

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = -\left(\frac{\Delta p}{\eta L}\right) r\ .$$

Tích phân cho ta

$$v = -\frac{1}{4}\left(\frac{\Delta p}{\eta L}\right) r^2 + C_1 \ln r + C_2\ ,$$

C_1, C_2 là các hằng số. Vì

$$v(r) = \text{ hữu hạn}\ , \qquad v(R) = 0\ ,$$

ta đòi hỏi

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta p}{\eta L}\right) R^2\ .$$

Do đó

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta L}(R^2 - r^2)\ .$$

Khối lượng chất lỏng đi qua ống trên một đơn vị thời gian khi đó là

$$Q = \rho \int_0^R v \cdot 2\pi r dr = \frac{\pi \rho R^4 \Delta p}{8\eta L}\ .$$

1272

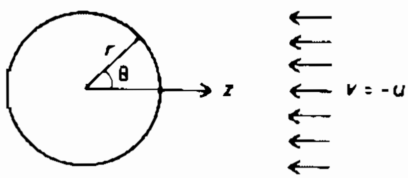
Một quả cầu bán kính R chuyển động với vận tốc đều u trong một chất lưu lý tưởng không nhớt, không bị nén ($\nabla \cdot \mathbf{v}(x) = 0$, $\mathbf{v}(x)$ là vận tốc chất lỏng).

(a) Xác định vận tốc v của chất lưu đi qua bất kì một điểm nào trên bề mặt cầu.

(b) Tính phân bố áp suất trên bề mặt hình cầu.

(c) Lực cần thiết để giữ quả cầu chuyển động đều là bao nhiêu?

(*Columbia*)



Hình 1.248

Lời giải:

Ta có thể xét quả cầu như là đứng yên trong khi chất lưu chảy qua nó với vận tốc $v = -u$ như chỉ ra ở hình 1.248. Sử dụng tọa độ cầu (r, θ, φ) với gốc tại khối tâm cầu sao cho vận tốc của chất lưu là trong hướng $\theta = \pi$. Định nghĩa thế vận tốc ϕ bởi

$$\mathbf{v} = -\nabla\phi\ .$$

Chất lưu không bị nén có nghĩa là

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = -\nabla^2\phi = 0\ .$$

Như vậy ϕ thỏa mãn phương trình Laplace. Điều kiện biên là

$$-\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)_R = -u\cos\theta$$

do bề mặt cầu là không thể thấm qua được, và

$$\phi = 0 \qquad \text{khi} \qquad r \to \infty$$

do $v = -u =$ hằng số tại các khoảng cách lớn kể từ quả cầu.

Nghiệm tổng quát của phương trình Laplace là

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(a_{nm}r^n + b_{nm}r^{-n-1})P_n^m(\cos\theta)e^{\pm im\varphi}\ .$$

Do hình dạng là đối xứng trụ, nên ϕ không phụ thuộc vào φ và ta phải lấy $m = 0$. Như thế ta có

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n r^n + b_n r^{-n-1}) P_n(\cos\theta) \,,$$

ở đây $P_n(\cos\theta)$ là các đa thức Legendre , và a_n, b_n là hằng số tùy ý. Do $\phi = 0$ khi $r \to \infty$, ta đòi hỏi $a_n = 0$. Do

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)_R = \sum_{n=0}^{\infty}(-n-1) b_n R^{-n-2} P_n(\cos\theta) = u P_1(\cos\theta)$$

ta đòi hỏi

$$b_n = 0 \quad \text{đối với mọi} \quad n \neq 1$$

và

$$b_1 = -\frac{1}{2} u R^3 \,.$$

Do đó

$$\phi = -\frac{uR^3}{2r^2}\cos\theta \,.$$

(a) Tại điểm (R, θ) trên mặt cầu vận tốc chất lưu là

$$\begin{aligned}\mathbf{v} = -\nabla\phi &= \left[-\frac{\partial\phi}{\partial r}\mathbf{e}_r - \frac{\partial\phi}{r\partial\theta}\mathbf{e}_\theta\right]_{r=R} \\ &= -\frac{1}{2}uR^3\left[\frac{2}{r^3}\cos\theta\mathbf{e}_r + \frac{\sin\theta}{r^3}\mathbf{e}_\theta\right]_{r=R} \\ &= -u\cos\theta\mathbf{e}_r - \frac{1}{2}u\sin\theta\mathbf{e}_\theta \,.\end{aligned}$$

(b) Phương trình Bernoulli cho dòng chảy dừng không rota của chất lưu không nhớt, không bị nén là

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p + U = \text{ hằng số},$$

ở đây U = hằng số nếu không có lực ngoài tác dụng. Xét điểm (R, θ) trên mặt cầu và điểm ở vô cùng, ở đây áp suất là p_0. Khi đó

$$\frac{\rho}{2}u^2\left(\cos^2\theta + \frac{1}{4}\sin^2\theta\right) + p = \frac{1}{2}\rho u^2 + p_0 \,,$$

hay

$$p(R,\theta) = \frac{3}{8}\rho u^2 \sin^2\theta + p_0 .$$

Biểu thức đó cho phân bố của áp suất trên mặt cầu.

(c) Lực ngoài tổng được tác dụng bởi áp suất trên mặt cầu là hướng của u và có giá trị

$$\begin{aligned} F_z &= \int p\cos\theta dS \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{3}{8}\rho u^2\sin^2\theta + p_0\right)\cdot 2\pi R\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot Rd\theta \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Do đó không có lực nào được đòi hỏi để giữ quả cầu chuyển động đều. Điều đó có thể đoán trước được khi quả cầu chuyển động đều không ma sát.

PHẦN II

CƠ HỌC GIẢI TÍCH

1. CÁC PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE (2001 2027)

2001

Một lò xo không khối lượng có chiều dài nghỉ l_0 (không dãn) có treo một trọng vật khối lượng m (coi như chất điểm) ở một đầu và đầu kia cố định, do đó lò xo được treo trong trọng trường như chỉ ra trong hình 2.1. Chuyển động của hệ chỉ xảy ra trong mặt phẳng thẳng đứng.

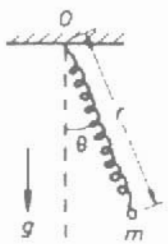
(a) Viết hàm Lagrange.

(b) Tìm các phương trình Lagrange khi sử dụng biến số θ, $\lambda = (r - r_0)/r_0$, ở đây r_0 là chiều dài nghỉ (khi treo trọng vật khối lượng m). Sử dụng $\omega_s^2 = k/m$, $\omega_p^2 = g/r_0$.

(c) Hãy xét phép gần đúng bậc thấp nhất đối với chuyển động khi λ và θ nhỏ với điều kiện ban đầu $\theta = 0$, $\dot{\lambda} = 0$, $\lambda = A$, $\dot{\theta} = \omega_p B$ tại $t = 0$. A và B là các hằng số.

(d) Xét phép gần đúng tiếp theo đối với chuyển động. Dưới điều kiện nào thì chuyển động λ cộng hưởng? Điều đó có thể thực hiện được về mặt vật lý không?

(*Wisconsin*)



Hình 2.1

Lời giải:

(a) Trong tọa độ cực (r, θ) như hình 2.1, chất điểm m có vận tốc $\mathbf{v} = (\dot{r}, r\dot{\theta})$. Như vậy

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)\ ,$$

$$V = -mgr\cos\theta + \frac{1}{2}k(r - l_0)^2\ .$$

k là hằng số đàn hồi. Hàm Lagrange của m là

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mgr\cos\theta - \frac{1}{2}k(r - l_0)^2 .$$

(b)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

cho ta

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + k(r - l_0) = 0 .$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

suy ra

$$mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mgr\sin\theta = 0 .$$

Chiều dài nghỉ của lò xo có khối lượng m khi treo, r_0, được cho bởi định luật Hooke

$$k(r_0 - l_0) = mg .$$

Như vậy với $\lambda = (r - r_0)/r_0$ ta có

$$r - l_0 = \lambda r_0 + \frac{mg}{k} ,$$

$$r = r_0(1 + \lambda), \qquad \dot{r} = r_0\dot{\lambda}, \qquad \ddot{r} = r_0\ddot{\lambda} ,$$

và phương trình chuyển động trở thành

$$\ddot{\lambda} + \frac{k\lambda}{m} - (1 + \lambda)\dot{\theta}^2 + \frac{g}{r_0}(1 - \cos\theta) = 0 ,$$

$$(1 + \lambda)\ddot{\theta} + 2\dot{\lambda}\dot{\theta} + \frac{g}{r_0}\sin\theta = 0 ;$$

hay, với $\omega_s^2 = \frac{k}{m}$, $\omega_p^2 = \frac{g}{r_0}$,

$$\ddot{\lambda} + (\omega_s^2 - \dot{\theta}^2)\lambda - \dot{\theta}^2 + \omega_p^2(1 - \cos\theta) = 0 ,$$

$$(1 + \lambda)\ddot{\theta} + 2\dot{\lambda}\dot{\theta} + \omega_p^2\sin\theta = 0 .$$

(c) Khi λ và θ là nhỏ, ta có thể bỏ qua các đại lượng bậc hai trong $\theta, \lambda, \dot{\theta}, \dot{\lambda}$, và các phương trình chuyển động giản ước thành

$$\ddot{\lambda} + \omega_s^2\lambda = 0 ,$$

$$\ddot{\theta} + \omega_p^2\theta = 0$$

với gần đúng bậc thấp nhất. Đối với các điều kiện ban đầu đã cho, ta tìm được

$$\lambda = A\cos(\omega_s t) ,$$
$$\theta = B\sin(\omega_p t) .$$

Như vậy λ và θ dao động hình sin với tần số góc tương ứng ω_s và ω_p, hai dao động khác pha nhau $\pi/2$.

(d) Nếu ta cũng giữ các số hạng bậc hai, thì các phương trình trở thành

$$\ddot{\lambda} + \omega_s^2\lambda = \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\omega_p^2\theta^2 ,$$
$$(1+\lambda)\ddot{\theta} + 2\dot{\lambda}\dot{\theta} + \omega_p^2\theta = 0 .$$

Sử dụng các kết quả của gần đúng bậc nhất, phương trình thứ nhất trên có thể được lấy gần đúng như sau

$$\begin{aligned}\ddot{\lambda} + \omega_s^2\lambda &\approx \frac{1}{2}B^2\omega_p^2[2\cos^2(\omega_p t) - \sin^2(\omega_p t)] \\ &= \frac{1}{4}B^2\omega_p^2[3\cos(2\omega_p t) + 1] .\end{aligned}$$

Như thế λ có thể cộng hưởng nếu $\omega_s = 2\omega_p$. Tuy nhiên, điều đó không giống với thực tế vật lý bởi vì khi biên độ của λ tăng tới cộng hưởng thì gần đúng bậc nhất không còn đúng nữa và các hiệu ứng gần đúng bậc cao hơn sẽ xảy ra. Ngoài ra tính chất phi tuyến của lò xo cũng sẽ đóng vai trò, làm mất giá trị của mô hình gốc được đơn giản hóa.

2002

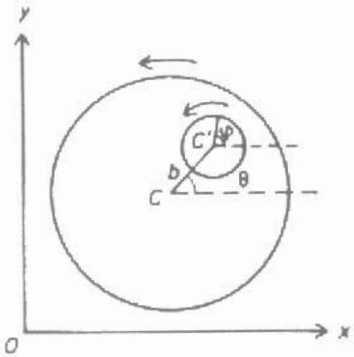
Một đĩa khối lượng M và bán kính R trượt không ma sát trên bề mặt nằm ngang. Một đĩa khác khối lượng m bán kính r được ghim đi qua tâm của nó và cách tâm của đĩa thứ nhất một khoảng b, để nó có thể quay không ma sát trên đĩa thứ nhất như chỉ ra trong hình 2.2. Hãy mô tả chuyển động và tìm các hằng số của nó.

(*Wisconsin*)

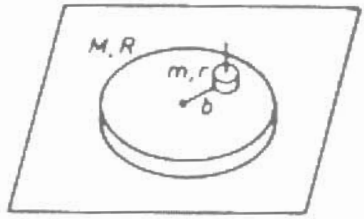
Lời giải:

Lấy tọa độ suy rộng như sau: x, y là tọa độ của khối tâm của đĩa lớn hơn, θ là góc quay của đĩa lớn hơn và φ là góc quay của đĩa nhỏ hơn như trong hình 2.3. Khối tâm của đĩa nhỏ hơn có tọa độ

$$x + b\cos\theta, \qquad y + b\sin\theta$$



Hình 2.2



Hình 2.3

và các thành phần tốc độ

$$\dot{x} - b\dot{\theta}\sin\theta, \qquad \dot{y} + b\dot{\theta}\cos\theta\,.$$

Từ đó động năng toàn phần của hệ hai đĩa là

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2\\ &\quad + \frac{1}{2}m[(\dot{x} - b\dot{\theta}\sin\theta)^2 + (\dot{y} + b\dot{\theta}\cos\theta)^2] + \frac{1}{4}mr^2\dot{\phi}^2\end{aligned}$$

và hàm Lagrange là

$$\begin{aligned}L &= T - V = T\\ &= \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2\\ &\quad + \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + b^2\dot{\theta}^2 - 2b\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + 2b\dot{y}\dot{\theta}\cos\theta] + \frac{1}{4}mr^2\dot{\varphi}^2\,.\end{aligned}$$

Xét các phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0\,.$$

Do

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0\,,$$

ta có

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \text{hằng số}\,,$$

hay

$$(M+m)\dot{x} - mb\dot{\theta}\sin\theta = \text{hằng số} \, . \tag{1}$$

Do $\partial L/\partial y = 0$, ta có $\partial L/\partial \dot{y} =$ hằng số, hay

$$(M+m)\dot{y} + mb\dot{\theta}\cos\theta = \text{hằng số} \, . \tag{2}$$

Do $\partial L/\partial \varphi = 0$, ta có $\partial L/\partial \dot{\varphi} =$ hằng số, hay

$$\dot{\varphi} = \text{hằng số}. \tag{3}$$

Do

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mb\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta - mb\dot{y}\dot{\theta}\sin\theta \, ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta} + mb^2\dot{\theta} - mb\dot{x}\sin\theta + mb\dot{y}\cos\theta \, ,$$

ta có phương trình chuyển động

$$\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} + mb^2\ddot{\theta} - mb\ddot{x}\sin\theta + mb\ddot{y}\cos\theta = 0 \, : \tag{4}$$

Phương trình (1) – (4) mô tả chuyển động của hệ. Vì $V = 0$ và $T + V =$ hằng số khi không có ngoại lực, động năng toàn phần của hệ, T, là một đại lượng được bảo toàn. Bảo toàn momen xung lượng xung quanh khối tâm của hệ đòi hỏi rằng khi $\dot{\varphi} =$ hằng số, thì cũng phải có $\dot{\theta} =$ hằng số.

2003

Một hình trụ rắn đồng chất bán kính R và khối lượng M ở trạng thái nghỉ trên mặt phẳng ngang và một trụ khác giống hệt nằm trên nó, chạm vào nó dọc theo đường sinh cao nhất như hình 2.4. Trụ trên dịch chuyển vô cùng nhỏ sao cho cả hai trụ quay không trượt.

(a) Tìm hàm Lagrange của hệ?

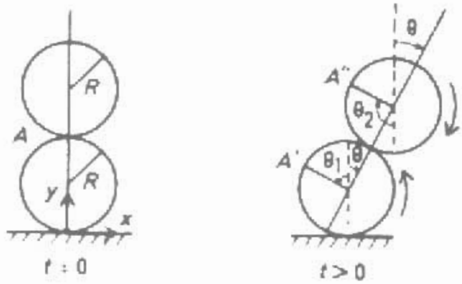
(b) Tìm các hằng số của chuyển động?

(c) Hãy chứng minh rằng chừng nào mà các trụ còn chạm nhau thì

$$\dot{\theta}^2 = \frac{12g(1-\cos\theta)}{R(17 + 4\cos\theta - 4\cos^2\theta)} \, ,$$

ở đây θ là góc mà mặt phẳng chứa các trục tạo với phương thẳng đứng.

(*Wisconsin*)



Hình 2.4

Lời giải:

(a) Hệ có hai bậc tự do do đó cần hai tọa độ suy rộng. Đối với những tọa độ này, ta sử dụng θ_1, là góc quay của trụ dưới, và góc θ, là góc tạo bởi mặt chứa hai trục của hai trụ với chiều thẳng đứng.

Ban đầu, mặt phẳng chứa hai trục của các hình trụ là thẳng đứng. Ở một thời điểm sau đó, mặt phẳng này tạo ra góc θ với đường thẳng đứng. Điểm tiếp xúc ban đầu, A, bây giờ dịch chuyển đến A' trên hình trụ dưới và đến A'' trên hình trục trên. Với các góc định nghĩa như trên, từ hình 2.4 ta có

$$\theta_1 + \theta = \theta_2 - \theta ,$$

hay

$$\theta_2 = \theta_1 + 2\theta .$$

Lấy toạ độ Descartes (x, y) trong mặt phẳng thẳng đứng vuông góc với các trục hình trụ và đi qua các khối tâm của chúng, như ở hình 2.4 ta có tại $t > 0$, đối với trụ dưới

$$x_1 = -R\theta_1, \qquad y_1 = R ,$$

và đối với trụ trên

$$x_2 = x_1 + 2R\sin\theta ,$$
$$y_2 = 3R - 2(R - \cos\theta) = R + 2R\cos\theta .$$

Các thành phần vận tốc tương ứng là

$$\dot{x}_1 = -R\dot{\theta}_1, \qquad \dot{y}_1 = 0 ,$$
$$\dot{x}_2 = -R\dot{\theta}_1 + 2R\dot{\theta}\cos\theta, \qquad \dot{y}_2 = -2R\dot{\theta}\sin\theta .$$

Động năng của trụ dưới là

$$T_1 = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}_1^2 = \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}_1^2\,,$$

và động năng của trụ trên là

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}M(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}_2^2 \\ &= \frac{1}{2}MR^2(\dot{\theta}_1^2 - 4\dot{\theta}_1\dot{\theta}\cos\theta + 4\dot{\theta}^2) + \frac{1}{4}MR^2(\dot{\theta}_1^2 + 4\dot{\theta}_1\dot{\theta} + 4\dot{\theta}^2) \\ &= \frac{1}{4}MR^2[3\dot{\theta}_1^2 + 4\dot{\theta}_1\dot{\theta}(1 - 2\cos\theta) + 12\dot{\theta}^2]\,. \end{aligned}$$

Thế năng của hệ, khi lấy mặt phẳng nằm ngang như mức tham chiếu, là

$$V = Mg(y_1 + y_2) = 2MR(1 + \cos\theta)g\,.$$

Từ đó hàm Lagrange của hệ là

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}MR^2[3\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}(1 - 2\cos\theta) + 6\dot{\theta}^2] - 2MR(1 + \cos\theta)g\,. \end{aligned}$$

(b) Khi chỉ tính đến trọng lực, cơ năng toàn phần của hệ là hằng số của chuyển động

$$\begin{aligned} E &= T + V \\ &= \frac{1}{2}MR^2[3\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}(1 - 2\cos\theta) + 6\dot{\theta}^2] + 2MR(1 + \cos\theta)g \\ &= \text{hằng số}\,. \end{aligned}$$

Ngoài ra, nếu $\partial L/\partial q_i = 0$, phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

đòi hỏi rằng $\partial L/\partial \dot{q}_i$ được bảo toàn. Với hệ đang xét, $\partial L/\partial \theta_1 = 0$ do đó

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = MR^2[3\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}(1 - 2\cos\theta)] = \text{hằng số}\,.$$

(c) Chừng nào các hình trụ còn giữ tiếp xúc với nhau thì các kết quả của (b) vẫn còn đúng. Ban đầu, $\theta = 0$, $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta} = 0$, do đó

$$\frac{1}{2}MR^2[3\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}(1 - 2\cos\theta) + 6\dot{\theta}^2] + 2MR(1 + \cos\theta)g = 4MRg ,$$

$$MR^2[3\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}(1 - 2\cos\theta)] = 0 .$$

Các biểu thức đó kết hợp lại cho ta

$$\dot{\theta}^2[18 - (1 - 2\cos\theta)^2] = \frac{12}{R}(1 - \cos\theta)g ,$$

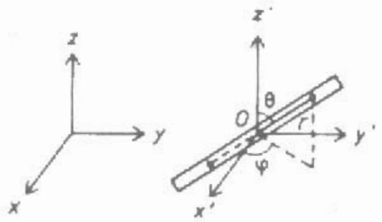
có nghĩa là

$$\dot{\theta}^2 = \frac{12(1 - \cos\theta)g}{R(17 + 4\cos\theta - 4\cos^2\theta)} .$$

2004

Hai hạt khối lượng m như nhau bị buộc phải trượt dọc theo một thanh mảnh khối lượng M và dài L, thanh tự nó được chuyển động tự do theo mọi cách. Hai lò xo đồng nhất nối các hạt này với tâm điểm của thanh. Chỉ xét những chuyển động của hệ này trong đó chiều dài của các lò xo (có nghĩa là khoảng cách của hai hạt kể từ tâm thanh) là bằng nhau. Cho đó là hệ cô lập trong không gian, hãy tìm phương trình chuyển động của chúng và giải (đến điểm có thể tích phân). Hãy mô tả định tính chuyển động.

(*Wisconsin*)



Hình 2.5

Lời giải:

Sử dụng tọa độ Descartes cố định, và hệ tọa độ chuyển động với gốc là tại trung điểm O của thanh và các trục tọa độ Descartes tương ứng song song với các trục của hệ tọa độ chuyển động. Đặt (r, θ, φ) là tọa độ cầu của một điểm tham chiếu hệ tọa độ chuyển động, như hình 2.5. Khi đó điểm O có các tọa độ (x, y, z) trong hệ tọa độ cố định và hai chất điểm có tọa độ cầu là (r, θ, φ) và $(-r, \theta, \varphi)$ trong hệ tọa độ chuyển động.

Động năng của hệ bằng với động năng mà nó sẽ có nếu toàn bộ khối lượng của nó tập trung tại khối tâm cộng với động năng của chuyển động xung quanh khối tâm. Khi O là khối tâm của hệ, ta có

$$T = \frac{1}{2}(M + 2m)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) + T_{\text{quay}} ,$$

ở đây T_{quay} là động năng quay của thanh. Vận tốc góc của thanh xung quanh O là

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\cos\theta \mathbf{e}_r - \dot{\varphi}\sin\theta \mathbf{e}_\theta - \dot{\theta}\mathbf{e}_\varphi ,$$

giải nó theo các trục chính, các momen quán tính tương ứng là

$$I_r = 0, \qquad I_\theta = \frac{1}{12}ML^2, \qquad I_\varphi = \frac{1}{12}ML^2 .$$

Do đó

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2}(I_r\omega_r^2 + I_\theta\omega_\theta^2 + I_\varphi\omega_\varphi^2) \\ &= \frac{1}{24}ML^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) . \end{aligned}$$

Hệ ở trong không gian tự do, vì vậy chỉ có thế năng là do tác dụng của lò xo,

$$V = 2 \cdot \frac{1}{2}K(r - r_0)^2 = K(r - r_0)^2 ,$$

ở đây K và r_0 tương ứng là hằng số lò xo và chiều dài tự nhiên của mỗi lò xo. Do đó

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}(M + 2m)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) \\ &\quad + \frac{1}{24}ML^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) - K(r - r_0)^2 . \end{aligned}$$

Các phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 ,$$

khi đó cho ta các hằng số chuyển động sau

$$(M+2m)\dot{x} = \text{hằng số}\ ,$$

$$(M+2m)\dot{y} = \text{hằng số}\ ,$$

$$(M+2m)\dot{z} = \text{hằng số}\ .$$

$$\left(2mr^2 + \frac{1}{12}ML^2\right)\dot{\varphi}\sin^2\theta = \text{hằng số}\ .$$

Ba phương trình đầu chỉ ra rằng vận tốc $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ của khối tâm của hệ là vectơ không đổi. Như thế khối tâm chuyển động trong chuyển động thẳng đều với bất kì vận tốc ban đầu nào. Phương trình cuối cùng chỉ ra rằng thành phần của momen động lượng xung quanh trục z' là hằng số của chuyển động. Vì trục đã được chọn tùy ý nên điều đó có nghĩa rằng momen xung lượng được bảo toàn.

Các phương trình Lagrange cũng cho các phương trình chuyển động sau

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \frac{K}{m}(r - r_0) = 0,$$

$$\left(r^2 + \frac{ML^2}{24m}\right)\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} - \left(r^2 + \frac{ML^2}{24m}\right)\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta = 0\ .$$

Các phương trình đó và phương trình $\dot{\varphi}$ ở trên mô tả chuyển động quay xung quanh khối tâm của hệ.

Như vậy với ràng buộc rằng hai chất điểm m trượt dọc theo thanh một cách đối xứng đối với trung điểm O, chuyển động của khối tâm O của hệ là chuyển động thẳng đều, và chuyển động của hệ quanh O là như thế nào đó để momen xung lượng đối với O được bảo toàn.

2005

Hệ tọa độ vuông góc có các trục x, y, z quay đối với hệ quy chiếu quán tính với vận tốc góc không đổi ω quanh trục z. Một chất điểm khối lượng m chuyển động dưới tác dụng của lực mà thế của nó là $V(x, y, z)$. Lập phương trình Lagrange của chuyển động trong hệ tọa độ x, y, z. Hãy chứng minh rằng các phương trình đó giống như các phương trình của hạt trong hệ tọa độ cố định bị tác dụng bởi lực $-\nabla V$ và lực dẫn ra từ thế phụ thuộc vận tốc U. Tìm U.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Cho hệ quy chiếu quán tính có cùng gốc như hệ tọa độ quay và các trục là x', y', z'. Kí hiệu các vận tốc của hạt trong hai hệ tọa độ bởi v và v'. Vì

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

với

$$\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega), \qquad \mathbf{r} = (x, y, z), \qquad \mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) ,$$

ta có

$$\begin{aligned} v'^2 &= v^2 + 2\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 \\ &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + 2\omega(x\dot{y} - \dot{x}y) + \omega^2(x^2 + y^2) , \end{aligned}$$

và hàm Lagrange của hạt trong hệ tọa độ quán tính, được biểu diễn theo các đại lượng có liên quan tới hệ tọa độ quay,

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + m\omega(x\dot{y} - \dot{x}y) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) - V . \end{aligned}$$

Các phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

khi đó cho ta

$$m\ddot{x} - 2m\omega\dot{y} - m\omega^2 x + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 ,$$

$$m\ddot{y} + 2m\omega\dot{x} - m\omega^2 y + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 ,$$

$$m\ddot{z} + \frac{\partial V}{\partial z} = 0 .$$

Với hạt khối lượng m chuyển động trong hệ tọa độ cố định (x, y, z) dưới tác dụng của lực $-\nabla V$ và thế không phụ thuộc tốc độ bổ sung U, hàm Lagrange là

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V - U .$$

So sánh hàm này với hàm Lagrange đã nhận được trước đây ta có

$$U = -m\omega(x\dot{y} - \dot{x}y) - \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) .$$

Toán tử Lagrange này rõ ràng làm xuất hiện cùng các phương trình chuyển động.

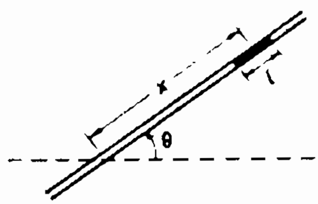
2006

(a) Chứng minh rằng momen quán tính của một que mảnh xung quanh tâm khối tâm của nó là $ml^2/12$.

(b) Một ống mảnh, dài khối lượng bỏ qua được ghim lại để nó có thể quay không ma sát trong mặt phẳng nằm ngang. Một que mảnh khối lượng M và dài l trượt không ma sát bên trong ống. Hãy chọn hệ tọa độ thích hợp và viết phương trình Lagrange cho hệ chuyển động trên.

(c) Ban đầu que được định tâm qua chốt quay và ống quay với vận tốc góc ω_0. Chứng minh rằng que không ổn định ở vị trí này, và mô tả chuyển động sau đó của nó nếu nó bị kích thích nhẹ. Hãy tìm vận tốc theo tia và vận tốc góc của que sau một thời gian dài. (Giả thiết ống đủ dài để que chuyển động vẫn nằm trong ống).

(*Wisconsin*)



Hình 2.6

Lời giải:

(a) Theo định nghĩa momen quán tính là

$$I = \sum_i R_i^2 \Delta m_i = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \rho dx = \frac{1}{12}\rho l^3 = \frac{1}{12} m l^2 .$$

(b) Lấy tọa độ suy rộng là góc θ giữa ống mảnh và đường ngang cố định đi qua chốt quay và khoảng cách x của khối tâm của que mảnh tính từ chốt quay của ống, như hình 2.5, ta có

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + x^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{24}Ml^2\dot{\theta}^2, \qquad V = 0 ,$$

và hàm Lagrange

$$L = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + x^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{24}Ml^2\dot{\theta}^2 .$$

Các phương trình Lagrange khi đó cho ta

$$\ddot{x} = x\dot{\theta}^2 ,$$

$$M\left(x^2 + \frac{1}{12}l^2\right)\dot{\theta} = \text{hằng số} = C, \quad \text{chẳng hạn.}$$

(c) Điều kiện ban đầu $x = 0$, $\dot{\theta} = \omega_0$ cho ta

$$C = \frac{1}{2}Ml^2\omega_0 ,$$

nghĩa là

$$\dot{\theta} = \frac{l^2\omega_0}{12x^2 + l^2} .$$

Khi đó ta có

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{x}^2}{dx} = \frac{l^4\omega_0^2 x}{(12x^2 + l^2)^2} .$$

Lấy tích phân, khi ban đầu $x = 0$, $\dot{x} = 0$, ta được

$$\dot{x}^2 = \frac{l^2\omega_0^2 x^2}{12x^2 + l^2} .$$

Chú ý rằng tốc độ que trong ống

$$\dot{x} = \frac{l\omega_0}{\sqrt{12 + \frac{l^2}{x^2}}} .$$

tăng khi khoảng cách của nó từ vị trí đầu tăng. Như thế que là không ổn định ở vị trí ban đầu. Khi $t \to \infty$, $x \to \infty$, $\dot{\theta} \to 0$ và $\dot{x} \to l\omega_0/\sqrt{12}$. Do đó, sau một thời gian dài, chuyển động quay sẽ chậm lại đến 0 trong khi tốc độ que trong ống sẽ tiến tới một giới hạn trên. Tuy nhiên khoảng cách x sẽ còn tiếp tục tăng.

2007

Một hộp khối lượng M được nối cứng với một vành bánh xe không khối lượng có rãnh trong, bán kính a trên bàn nằm ngang không ma sát như ở hình

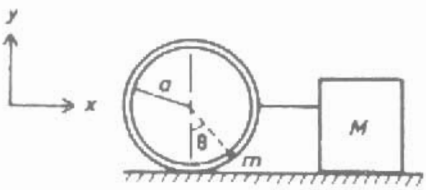
2.7. Một hạt khối lượng m bị giới hạn chuyển động không ma sát trong rãnh trong bánh xe đặt thẳng đứng.

(a) Thiết lập hàm Lagrange, khi sử dụng θ như một tọa độ.

(b) Hãy tìm phương trình chuyển động.

(c) Trong một giới hạn góc nhỏ, hãy giải phương trình chuyển động đó đối với θ như hàm của thời gian.

(*Wisconsin*)



Hình 2.7

Lời giải:

(a) Vì chuyển động của hệ bị giới hạn trong mặt phẳng thẳng đứng, sử dụng hệ tọa độ cố định x, y và chọn tọa độ x của tâm bánh xe và góc θ cho vị trí của m trên rãnh bánh xe như các tọa độ suy rộng như, được vẽ trên hình 2.7. Các tọa độ của khối m khi đó là $(x + a\sin\theta, -a\cos\theta)$. Vì M được nối cứng với bánh xe nên tốc độ của nó là $(\dot{x}, 0)$. Do đó hàm Lagrange là

$$L = T - V = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{x} + a\dot{\theta}\cos\theta)^2 + a^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta] + mga\cos\theta$$

$$= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + a^2\dot{\theta}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta] + mga\cos\theta\ .$$

(b) Do

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0\ ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + m\dot{x} + ma\dot{\theta}\cos\theta\ ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -ma\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta - mga\sin\theta\ ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ma^2\dot{\theta} + ma\dot{x}\cos\theta\ ,$$

các phương trình Lagrange là

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

cho ta

$$(M + m)\ddot{x} + ma\ddot{\theta}\cos\theta - ma\dot{\theta}^2\sin\theta = 0 \,,$$

$$a\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta + g\sin\theta = 0 \,.$$

(c) Với dao động nhỏ, θ và $\dot{\theta}$ là đại lượng nhỏ bậc nhất. Bỏ qua các số hạng bậc cao hơn các phương trình trở thành

$$(M + m)\ddot{x} + ma\ddot{\theta} = 0 \,,$$

$$a\ddot{\theta} + \ddot{x} + g\theta = 0 \,.$$

Khử $\ddot{x}$ ta có

$$\ddot{\theta} + \frac{(M + m)g\theta}{Ma} = 0 \,.$$

Do đó

$$\theta = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \,,$$

ở đây $\omega = \sqrt{(M + m)g/Ma}$ là tần số góc của dao động và A và B là hằng số được xác định từ các điều kiện ban đầu.

2008

Xét một hạt khối lượng m chuyển động theo một quỹ đạo liên kết (hay quỹ đạo bị giới hạn) với thế $V(r) = -k/r$. Sử dụng tọa độ cực trong mặt phẳng quỹ đạo:

(a) Hãy tìm p_r và p_θ như hàm của r, θ, $\dot{r}$ và $\dot{\theta}$. Có đại lượng nào là hằng số không?

(b) Sử dụng định lý virian chỉ ra rằng

$$J_r + J_\theta = \oint \frac{k}{r}dt \,,$$

ở đây

$$J_r = \oint p_r dr \,,$$

$$J_\theta = \oint p_\theta d\theta \,.$$

(c) Chứng minh rằng

$$(J_r + J_\theta) = \sqrt{\frac{-2\pi^2 mk^2}{E}} \ ,$$

khi sử dụng

$$\int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{\sqrt{-r^2 + ar - b}} = \pi, \qquad r_\pm = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 - 4b}) \ .$$

(d) Sử dụng các kết quả của (c) chứng minh rằng chu kì của quỹ đạo là như nhau đối với các chuyển động r và θ cụ thể

$$\tau = \pi k \sqrt{\frac{m}{-2E^3}} \ .$$

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Ta có

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r} \ .$$

Các xung lượng suy rộng là

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \ ,$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \ .$$

Khi không có θ trong L, $p_\theta = mr^2\dot{\theta}$ là một hằng số của chuyển động.

(b)

$$\begin{aligned} J_r + J_\theta &= \oint m\dot{r}dr + \oint mr^2\dot{\theta}d\theta \\ &= \oint m\dot{r}^2 dt + \oint mr^2\dot{\theta}^2 dt \\ &= \oint m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)dt \\ &= 2\oint T dt = 2\overline{T}\tau \ , \end{aligned}$$

ở đây τ là chu kì và $\overline{T}$ là động năng trung bình của hạt trên một chu kì. Đối với hạt chuyển động trên một quỹ đạo liên kết trong trường lực theo quy luật bình phương nghịch đảo, định lý varian có dạng

$$\overline{T} = -\frac{1}{2}\overline{V} .$$

Như vậy

$$J_r + J_\theta = -\overline{V}\tau = \oint \frac{k}{r} dt .$$

(c) Năng lượng toàn phần của hạt

$$E = T + V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{r} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) - \frac{k}{r} ,$$

ở đây $h = r^2\dot{\theta} = p_\theta/m =$ hằng số, là một hằng số. Từ trên cho ta

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m}\left(E + \frac{k}{r}\right) - \frac{h^2}{r^2} ,$$

hay

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \pm\frac{1}{r}\sqrt{\frac{2Er^2}{m} + \frac{2kr}{m} - h^2} \\ &= \pm\sqrt{\frac{-2E}{m}} \cdot \frac{1}{r}\sqrt{-r^2 - \frac{kr}{E} + \frac{mh^2}{2E}} .\end{aligned}$$

ở đây cần thấy rằng $E < 0$ đối với các quỹ đạo liên kết.

Đối với quỹ đạo liên kết, $r_- \leq r \leq r_+$. Các giá trị cực trị của r được cho bởi $\dot{r} = 0$, có nghĩa là

$$r^2 + \frac{kr}{E} - \frac{mh^2}{2E} = 0 .$$

Khi viết biểu thức trên như

$$r^2 - ar + b = 0 ,$$

ở đây a, b là các số dương $a = -k/E$, $b = -mh^2/2E$, ta có

$$r_\pm = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 - 4b}) .$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
J_r + J_\theta &= \oint \frac{k}{r} dt = \oint \frac{k}{r\dot{r}} dr \\
&= 2\int_{r_-}^{r_+} \frac{k dr}{\sqrt{\frac{-2E}{m}} \cdot \sqrt{-r^2 - \frac{kr}{E} + \frac{mh^2}{2E}}} \\
&= 2k\sqrt{\frac{m}{-2E}} \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{\sqrt{-r^2 - \frac{kr}{E} + \frac{mh^2}{2E}}} \\
&= 2k\sqrt{\frac{m}{-2E}} \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{\sqrt{-r^2 + ar - b}} \\
&= 2\pi k\sqrt{\frac{m}{-2E}} = \sqrt{\frac{2\pi^2 mk^2}{-E}} ,
\end{aligned}$$

sử dụng giá trị đã cho đối với tích phân.

(d) Khi E là một hằng số, ta có

$$-E = -\overline{E} = -(\overline{T} + \overline{V}) = -(\overline{T} - 2\overline{T}) = \overline{T} ,$$

hay

$$\begin{aligned}
-E &= \frac{1}{\tau} \oint T dt \\
&= \frac{1}{2\tau}(J_r + J_\theta) = \frac{1}{2\tau}\sqrt{\frac{2\pi^2 mk^2}{-E}} ,
\end{aligned}$$

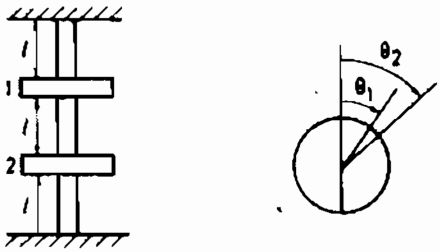
cho ta

$$\tau = \pi k \sqrt{\frac{m}{-2E^3}} .$$

2009

Hai đĩa giống như nhau khối lượng M và bán kính R được đỡ bởi 3 thanh xoắn giống như nhau, như hình 2.8, momen xoắn hồi phục của chúng là $\tau = -k\theta$, ở đây k = hằng số xoắn cho trước đối với chiều dài l và góc xoắn θ. Các đĩa tự do quay xung quanh trục thẳng đứng của thanh xoắn với chuyển dời θ_1, θ_2 khỏi vị trí cân bằng. Bỏ qua momen quán tính của thanh xoắn. Với điều kiện ban đầu $\theta_1(0) = 0$, $\theta_2(0) = 0$, $\dot{\theta}_1(0) = 0$, $\dot{\theta}_2(0) = \Omega$ = hằng số đã cho, hỏi bao lâu đĩa 1 nhận được tất cả động năng? Bạn có thể để kết quả đó dưới dạng một hàm ẩn.

(UC, Berkeley)



Hình 2.8

Lời giải:

Nếu I là momen quán tính của mỗi đĩa, hàm Lagrange của hệ là

$$L = \frac{1}{2}I(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - \frac{1}{2}k[\theta_1^2 + \theta_2^2 + (\theta_1 - \theta_2)^2] \, .$$

Hai phương trình Lagrange là

$$I\ddot{\theta}_1 + k(2\theta_1 - \theta_2) = 0 \, ,$$
$$I\ddot{\theta}_2 + k(2\theta_2 - \theta_1) = 0 \, .$$

Kết hợp chúng lại ta có

$$I(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + k(\theta_1 + \theta_2) = 0 \, ,$$
$$I(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) + 3k(\theta_1 - \theta_2) = 0 \, .$$

Các nghiệm tương ứng là

$$\theta_1 + \theta_2 = A_+ \sin\left(\sqrt{\frac{k}{I}}\, t + \varphi_+\right) \, ,$$

$$\theta_1 - \theta_2 = A_- \sin\left(\sqrt{\frac{3k}{I}}\, t + \varphi_-\right) \, .$$

Điều kiện ban đầu

$$\theta_1 + \theta_2 = 0, \qquad \theta_1 - \theta_2 = 0 \quad \text{tại} \quad t = 0$$

cho $\varphi_+ = \varphi_- = 0$. Các điều kiện

$$\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 = \Omega, \qquad \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 = -\Omega \quad \text{tại} \quad t = 0$$

cho ta

$$A_+ = \Omega\sqrt{\frac{I}{k}}, \qquad A_- = -\Omega\sqrt{\frac{I}{3k}}\,.$$

Từ đó

$$\theta_2 = \frac{1}{2}\Omega\left[\sqrt{\frac{I}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{I}}\,t\right) + \sqrt{\frac{I}{3k}}\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{I}}\,t\right)\right],$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{1}{2}\Omega\left[\cos\left(\sqrt{\frac{k}{I}}\,t\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{I}}\,t\right)\right].$$

Chỉ khi $\dot{\theta}_2 = 0$, nghĩa là sau thời gian t được cho bởi

$$\cos\left(\sqrt{\frac{k}{I}}\,t\right) = -\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{I}}\,t\right),$$

đĩa 1 sẽ nhận toàn bộ động năng.

Cần phải nhớ rằng động năng của hệ không phải là một hằng số. Khi t thỏa mãn phương trình trên, đĩa 1 nhận toàn bộ động năng của hệ ở thời điểm đó. Tuy nhiên, động năng này thay đổi theo thời gian xảy ra.

2010

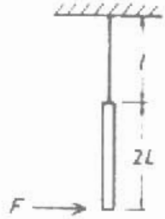
Một que đồng nhất, mảnh dài $2L$ và khối lượng M được treo trên một sợi dây không khối lượng dài l buộc vào một cái đinh. Như ở hình 2.9, lực ngang F đặt vào đầu que tự do.

Hãy viết phương trình Lagrange của hệ. Với những khoảng thời gian rất ngắn (để tất cả các góc đều nhỏ) xác định góc mà dây và que tạo với phương thẳng đứng. Bắt đầu từ trạng thái đứng yên ở thời điểm $t = 0$. Hãy vẽ sơ đồ minh họa chuyển động ban đầu của que.

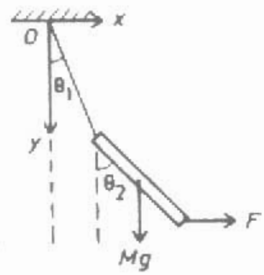
(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

Do lực tác dụng F nằm ngang và ban đầu dây và que thẳng đứng, nên chuyển động bị giới hạn trong mặt phẳng thẳng đứng. Lấy tọa độ



Hình 2.9



Hình 2.10

Descartes như ở hình 2.10 và kí hiệu các góc tạo nên bởi dây và que với phương thẳng đứng tương ứng là θ_1, θ_2. Khối tâm của que có tọa độ $(l\sin\theta_1 + L\sin\theta_2, -l\cos\theta_1 - L\cos\theta_2)$ và như vậy tốc độ là $(l\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + L\dot{\theta}_2\cos\theta_2, l\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + L\dot{\theta}_2\sin\theta_2)$. Momen quán tính của nó quay xung quanh trục vuông góc đi qua tâm của nó là $ML^2/3$. Do đó động năng của nó là

$$T = \frac{1}{2}M[l^2\dot{\theta}_1^2 + L^2\dot{\theta}_2^2 + 2Ll\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)] + \frac{1}{6}ML^2\dot{\theta}_2^2$$

và thế năng của nó là

$$V = -Mg(l\cos\theta_1 + L\cos\theta_2) .$$

Thế U của lực ngang được định nghĩa bởi

$$U = -\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -F(l\sin\theta_1 + 2L\sin\theta_2) .$$

Vì thế hàm Lagrange là

$$L = T - V - U$$
$$= \frac{1}{2}M[l^2\dot{\theta}_1^2 + L^2\dot{\theta}_2^2 + 2Ll\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)] + \frac{1}{6}ML^2\dot{\theta}_2^2$$
$$+ Mg(l\cos\theta_1 + L\cos\theta_2) + F(l\sin\theta_1 + 2L\sin\theta_2) .$$

Các phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

khi đó cho ta

$$Ml\ddot{\theta}_1 + ML\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + ML\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1 - \theta_2)$$
$$+ Mg\sin\theta_1 - F\cos\theta_1 = 0,$$

$$\frac{4}{3}ML\ddot{\theta}_2 + Ml\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1 - \theta_2) - Ml\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1 - \theta_2)$$
$$+ Mg\sin\theta_2 - 2F\cos\theta_2 = 0 .$$

Lưu ý là nếu F nhỏ để θ_1, θ_2, $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$ có thể được coi là nhỏ, khi đó chỉ giữ lại các số hạng bậc một, các biểu thức ở trên thành

$$Ml\ddot{\theta}_1 + ML\ddot{\theta}_2 + Mg\theta_1 - F = 0 ,$$
$$\frac{4}{3}ML\ddot{\theta}_2 + Ml\ddot{\theta}_1 + Mg\theta_2 - 2F = 0 .$$

Chuyển động bắt đầu từ trạng thái nghỉ tại $t = 0$. Đối với khoảng thời gian rất ngắn Δt sau đó, lực có thể được xem như làm xuất hiện xung lực ngang $F\Delta t$ và momen quay $FL\Delta t$ xung quanh khối tâm của que. Khi đó ta có

$$F\Delta t = M(l\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + L\dot{\theta}_2\cos\theta_2)$$
$$\approx Ml\dot{\theta}_1 + ML\dot{\theta}_2 ,$$

do góc θ_1, θ_2 vẫn là nhỏ, và

$$FL\Delta t = \frac{1}{3}ML^2\dot{\theta}^2 .$$

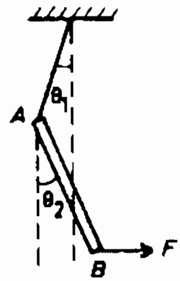
Khử $F\Delta t$ từ biểu thức trên ta có

$$\dot{\theta}_1 \approx -\frac{2L}{3l}\dot{\theta}_2 .$$

Do $\theta_1 = \overline{\dot{\theta}_1}\Delta t \approx \dot{\theta}_1\Delta t/2$, $\theta_2 \approx \dot{\theta}_2\Delta t/2$, biểu thức trên cho

$$\theta_1 \approx -\frac{2L}{3l}\theta_2 \,.$$

Cấu hình ban đầu của hệ được chỉ ra ở hình 2.11.



Hình 2.11

2011

Ta xét một hệ sao đôi.

(a) Hãy viết hàm Lagrange đối với hệ theo toạ độ Descartes của hai sao $\mathbf{r}_1$ và $\mathbf{r}_2$.

(b) Hãy chứng minh thế năng là hàm thuần nhất của toạ độ cấp -1, nghĩa là

$$V(\alpha\mathbf{r}_1, \alpha\mathbf{r}_2) = \alpha^{-1}V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\ ,$$

ở đây α là thông số định tỉ lệ thực.

(c) Hãy tìm phép biến đổi để hàm Lagrange không đổi cho tới một hằng số nhân (do đó làm cho tính chất vật lý không đổi) và như vậy hãy tìm định luật Kepler III liên hệ chu kì quay của hệ với kích thước quỹ đạo của nó.

(*Chicago*)

Lời giải:

(a) Cho $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ tương ứng là các véctơ bán kính của hệ sao đôi, các khối lượng m_1, m_2, từ gốc hệ toạ độ cố định. Khi đó

$$T = \frac{1}{2}m_1|\dot{\mathbf{r}}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\dot{\mathbf{r}}_2|^2, \qquad V = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}\ ,$$

và hàm Lagrange là

$$L = T - V = \frac{1}{2}\left(m_1|\dot{\mathbf{r}}_1|^2 + m_2|\dot{\mathbf{r}}_2|^2\right) + \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} .$$

(b)

$$V(\alpha\mathbf{r}_1, \alpha\mathbf{r}_2) = -\frac{Gm_1m_2}{|\alpha\mathbf{r}_1 - \alpha\mathbf{r}_2|} = -\frac{1}{\alpha}\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{1}{\alpha}V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) ,$$

nghĩa là thế năng là hàm thuần nhất của toạ độ cấp -1.

(c) Cho $\mathbf{R}$ là vectơ bán kính của khối tâm hệ sao đôi từ gốc toạ độ cố định, và $\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2$ là vectơ bán kính tương ứng của m_1, m_2 từ khối tâm. Theo định nghĩa

$$(m_1 + m_2)\mathbf{R} = m_2\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 ,$$
$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_1, \qquad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_2 ,$$

như vậy

$$\mathbf{r}'_1 = \frac{m_2\mathbf{r}}{m_1 + m_2}, \qquad \mathbf{r}'_2 = -\frac{m_1\mathbf{r}}{m_1 + m_2} ,$$

ở đây $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2$.

Ta có thể viết hàm Lagrange như sau

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2}|\dot{\mathbf{R}}|^2 + \frac{m_1m_2}{2(m_2 + m_2)}|\dot{\mathbf{r}}|^2 + \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}|} .$$

Vì L không phụ thuộc tường minh vào $\mathbf{R} = (x, y, z)$, nên $\partial L/\partial\dot{x}$, $\partial L/\partial\dot{y}$, $\partial L/\partial\dot{z}$ và do đó $(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}$ là hằng số. Vì vậy số hạng đầu tiên của L, vốn là động năng của hệ xét như một khối, là hằng số. Các số hạng này có thể bỏ qua khi ta chỉ quan tâm đến chuyển động bên trong của hệ. Như vậy

$$\begin{aligned} L &= \left(\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\right)\left[\frac{1}{2}|\dot{\mathbf{r}}|^2 + \frac{G(M_1 + M_2)}{|\mathbf{r}|}\right] \\ &= \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)\left[\frac{1}{2}m_2|\dot{\mathbf{r}}|^2 + \frac{Gm_2(m_1 + m_2)}{|\mathbf{r}|}\right] \\ &= \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)\left[\frac{1}{2}m_1|\dot{\mathbf{r}}|^2 + \frac{Gm_1(m_1 + m_2)}{|\mathbf{r}|}\right] , \end{aligned}$$

mà có thể được xem như hàm Lagrange, ngoài một hằng số nhân, của chuyển động của một sao trong trường hấp dẫn của sao cố định khối lượng $m_1 + m_2$. Đặt m_1 là sao "chuyển động" đó và xét lực hướng tâm của nó

$$m_1r\dot{\theta}^2 = \frac{Gm_1(m_1 + m_2)}{r^2} ,$$

hay

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)},$$

ở đây $T = 2\pi/\dot{\theta}$ là chu kì của m_1 quay quanh m_2, đó là định luật Kepler thứ ba. Tất nhiên điều giống như thế cũng đúng cho chuyển động của m_2 quanh m_1.

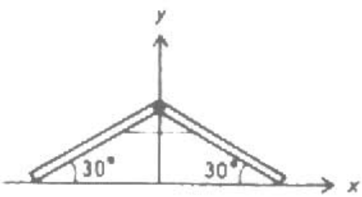
2012

Hai dầm mỏng khối lượng m dài l được nối với nhau bởi bản lề và một sợi dây. Hệ ở trạng thái nghỉ trên một bề mặt nhẵn như thấy ở hình 2.12. Tại $t = 0$ sợi dây bị cắt. Có thể bỏ qua khối lượng sợi dây và bản lề.

(a) Hãy tìm tốc độ của chốt bản lề khi nó chạm vào sàn.

(b) Hãy tìm thời gian để bản lề chạm vào sàn, biểu thị điều đó bằng một tích phân cụ thể mà bạn không cần ước lượng tường minh.

(*Princeton*)



Hình 2.12

Lời giải:

(a) Do đối xứng, bản lề sẽ rơi thẳng đứng. Lấy tọa độ như hình 2.12 và cho θ là góc mỗi nhánh dầm tạo với mặt sàn. Khi đó khối tâm của các dầm có tọa độ

$$x_1 = \frac{1}{2} l \cos\theta, \qquad y_1 = \frac{1}{2} l \sin\theta\ ,$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} l \cos\theta, \qquad y_2 = \frac{1}{2} l \sin\theta\ ,$$

và các thành phần vận tốc là

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{2}l\dot{\theta}\sin\theta, \qquad \dot{y}_1 = \frac{1}{2}l\dot{\theta}\cos\theta\,,$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{2}l\dot{\theta}\sin\theta, \qquad \dot{y}_2 = \frac{1}{2}l\dot{\theta}\cos\theta\,.$$

Mỗi dầm có momen quán tính $ml^2/12$ quanh trục ngang qua khối tâm. Hàm Lagrange của hệ là

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{4}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\sin\theta \\ &= \frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\sin\theta\,. \end{aligned}$$

Phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$$

khi đó cho ta

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2l}\cos\theta = 0\,.$$

Do

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} \qquad \text{và} \qquad \dot{\theta} = 0 \qquad \text{khi } \theta = 30^\circ,$$

Tích phân phương trình ở trên cho

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2l}(1 - 2\sin\theta)\,.$$

Do đó khi bản lề chạm sàn, $\theta = 0$ và

$$\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{3g}{2l}}\,,$$

nghĩa là

$$|\mathbf{v}| = |l\dot{\theta}| = \sqrt{\frac{3gl}{2}}\,.$$

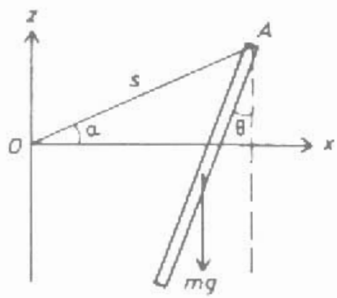
(b) Thời gian để bản lề chạm sàn được cho bởi

$$\begin{aligned} t &= \int_{30^\circ}^{0}\frac{d\theta}{\dot{\theta}} = \int_{30^\circ}^{0}\frac{d\theta}{-\sqrt{\frac{3g}{2l}(1-2\sin\theta)}} \\ &= \sqrt{\frac{2l}{3g}}\int_0^{30^\circ}\frac{d\theta}{1 - 2\sin\theta}\,. \end{aligned}$$

2013

Một que đồng chất dài L và khối lượng M chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng xz, một trong các đầu mút của nó. A chịu ràng buộc $z = x\text{tg}\alpha$ (α – góc nghiêng cố định với trục ngang x). Hãy đưa ra phương trình Lagrange của chuyển động theo tọa độ suy rộng $q_1 = s$ và $q_2 = \theta$ (xem hình 2.13). Sử dụng các phương trình đó để xác định xem có thể có một chuyển động tịnh tiến (θ = hằng số) được không, nếu được thì đối với θ bằng bao nhiêu.

(*Princeton*)



Hình 2.13

Lời giải:

Tọa độ và các thành phần vận tốc của khối tâm của que là

$$x = s\cos\alpha - \frac{1}{2}L\sin\theta, \qquad z = s\sin\alpha - \frac{1}{2}L\cos\theta,$$

$$\dot{x} = \dot{s}\cos\alpha - \frac{1}{2}L\dot{\theta}\cos\theta, \qquad \dot{z} = \dot{s}\sin\alpha + \frac{1}{2}L\dot{\theta}\sin\theta,$$

và momen quán tính của que xung quanh trục vuông góc đi qua khối tâm là $ML^2/12$, như thế hàm Lagrange là

$$
\begin{aligned}
L &= T - V \\
&= \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{24}ML^2\dot{\theta}^2 - Mgz \\
&= \frac{1}{2}M[\dot{s}^2 - L\dot{s}\dot{\theta}\cos(\theta + \alpha)] + \frac{1}{6}ML^2\dot{\theta}^2 - Mg\left(s\sin\alpha - \frac{1}{2}L\cos\theta\right).
\end{aligned}
$$

Các phương trình Lagrange là

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

khi đó cho ta

$$\ddot{s} - \frac{1}{2}L\ddot{\theta}\cos(\theta+\alpha) + \frac{1}{2}L\dot{\theta}^2\sin(\theta+\alpha) + g\sin\alpha = 0\,,$$

$$\ddot{s}\cos(\theta+\alpha) - \frac{2}{3}L\ddot{\theta} - g\sin\theta = 0\,.$$

Nếu chuyển động là thuần túy tịnh tiến thì, $\theta =$ hằng số, $\dot{\theta} = 0$, $\ddot{\theta} = 0$ và các phương trình trên trở thành

$$\ddot{s} + g\sin\alpha = 0,$$

$$\ddot{s}\cos(\theta+\alpha) - g\sin\theta = 0\,.$$

Khử bỏ $\ddot{s}$ cho ta

$$\sin\alpha\cos(\theta+\alpha) = -\sin\theta\,,$$

hay

$$\theta = -\alpha\,.$$

2014

Con lắc cầu gồm chất điểm m được buộc bởi một sợi dây dài l vào một điểm cố định như hình 2.14.

(a) Với tốc độ góc bằng bao nhiêu thì nó chuyển động tròn, với sợi dây tạo môt góc cố định θ_0 với phương thẳng đứng?

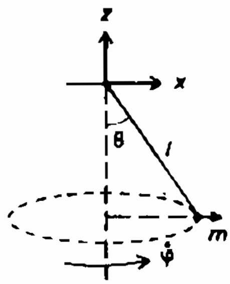
(b) Chất điểm trong quỹ đạo tròn như trong phần (a) ở trên nhận được một xung lực vuông góc với vận tốc của nó, kết quả là quỹ đạo có điểm cao nhất với dây tạo góc θ_1 với phương thẳng đứng. Hãy viết (không cần giải) phương trình để sao cho giải tìm được góc sợi dây tạo với phương thẳng đứng lúc chất điểm ở điểm thấp nhất.

(c) Với trường hợp trong đó biên độ dao động quanh θ_0 là nhỏ, hãy giải tìm tần số của những dao động đó.

(*Princeton*)

Lời giải:

Sử dụng hệ tọa độ quay như hình 2.14, với trục thẳng đứng z và trục x trong mặt phẳng thẳng đứng chứa dây và chất điểm m. Chất điểm có tọa độ $(l\sin\theta, 0, -l\cos\theta)$, ở đây θ là góc dây tạo với phương thẳng đứng. Đặt φ là vận



Hình 2.14

tốc góc của m xung quanh trục z. Vận tốc của m trong hệ tọa độ cố định cho bởi

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\varphi}} \times \mathbf{r} ,$$

với

$$\dot{\mathbf{r}} = (l\dot{\theta}\cos\theta, 0, l\dot{\theta}\sin\theta), \qquad \dot{\boldsymbol{\varphi}} = (0, 0, \dot{\varphi}) .$$

Hàm Lagrange khi đó là

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{1}{2}mv^2 - mgz \\ &= \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + mgl\cos\theta . \end{aligned}$$

Các phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

cho

$$\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + \frac{g}{l}\sin\theta = 0,$$
$$\dot{\varphi}\sin^2\theta = \text{hằng số}.$$

(a) Với chuyển động tròn có góc không đổi $\theta = \theta_0$, $\ddot{\theta} = 0$ và phương trình (1) cho

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{g}{l\cos\theta_0}} = \omega \text{ , chẳng hạn .}$$

Các phương trình chuyển động bây giờ có thể được viết như

$$\dot{\varphi}\sin^2\theta = \omega\sin^2\theta_0 , \tag{2.1}$$

$$\ddot{\theta} - \omega^2\sin^4\theta_0\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} + \omega^2\cos\theta_0\sin\theta = 0 . \tag{1}$$

Do $\ddot{\theta} = d\dot{\theta}^2/2d\theta$, phương trình (1) có thể được tích phân để cho

$$\dot{\theta}^2 = -\frac{\omega^2\sin^4\theta_0}{\sin^2\theta} + 2\omega^2\cos\theta_0\cos\theta + K .$$

Tại điểm cao nhất của quỹ đạo của m, $\dot{\theta} = 0$ và $\theta = \theta_1$, suy ra

$$K = \omega^2\frac{\sin^4\theta_0}{\sin^2\theta_1} - 2\omega_0^2\cos\theta_0\cos\theta_1 .$$

Tại điểm thấp nhất, $\dot{\theta} = 0$, $\theta = \theta_2$, và ta có

$$\frac{\sin^4\theta_0}{\cos\theta_0}\left(\frac{1}{\sin^2\theta_1} - \frac{1}{\sin^2\theta_2}\right) + 2(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) = 0 ,$$

nó có thể được giải cho θ_2 theo θ_0 và θ_1.

(c) Đặt $\theta = \alpha + \theta_0$ với $\alpha \ll \theta_0$. Do

$$\cos\theta \approx \cos\theta_0 - \alpha\sin\theta_0, \qquad \sin\theta \approx \sin\theta_0 + \alpha\cos\theta_0 .$$

$$\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} \approx \frac{\cos\theta_0(1-\alpha\tan\theta_0)}{\sin^3\theta_0(1+\alpha\cot\theta_0)^3} \approx \frac{\cos\theta_0}{\sin^3\theta_0}[1 - \alpha(\tan\theta_0 + 3\cot\theta_0)]$$

với $\ddot{\theta} = \ddot{\alpha}$, phương trình. (1) quy về

$$\ddot{\alpha} + \omega^2\sin\theta_0\cos\theta_0[\alpha(\tan\theta_0 + 3\cot\theta_0) - 1 + 1 + \alpha\cot\theta_0] = 0 ,$$

nghĩa là

$$\ddot{\alpha} + \omega^2(\sin^2\theta_0 + 4\cos^2\theta_0)\alpha = 0 ,$$

hay

$$\ddot{\alpha} + \omega^2(1 + 3\cos^2\theta_0)\alpha = 0 .$$

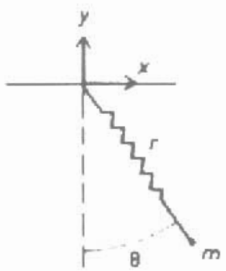
Do đó θ dao động quanh θ_0 với tần số góc

$$\omega_\varphi = \omega\sqrt{1 + 3\cos^2\theta_0} = \sqrt{\frac{g(1+3\cos^2\theta_0)}{l\cos\theta_0}} .$$

2015

Một con lắc lò xo gồm khối chất m gắn với một đầu một lò xo không khối lượng có hằng số đàn hồi k. Đầu kia của lò xo buộc vào một giá treo cố định. Khi không có tải trọng trên lò xo, chiều dài của nó là l. Thừa nhận rằng chuyển động của hệ giới hạn trong một mặt phẳng thẳng đứng. Hãy đưa ra phương trình chuyển động. Hãy giải phương trình chuyển động theo gần đúng dịch chuyển góc và dịch chuyển theo tia nhỏ so với vị trí cân bằng.

(SUNY, Buffalo)



Hình 2.15

Lời giải:

Sử dụng hệ tọa độ như ở hình 2.15. Trọng khối chất m có tọa độ $(r\sin\theta, -r\cos\theta)$ và các thành phần vận tốc $(r\dot{\theta}\cos\theta + \dot{r}\sin\theta, r\dot{\theta}\sin\theta - \dot{r}\cos\theta)$ và do đó động năng

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) ,$$

và thế năng

$$V = \frac{1}{2}k(r - l)^2 - mgr\cos\theta .$$

Do đó hàm Lagrange là

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}k(r - l)^2 + mgr\cos\theta .$$

Các phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Khi đó cho các phương trình chuyển động

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + k(r - l) - mg\cos\theta = 0,$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + g\sin\theta = 0 .$$

Vị trí cân bằng trong hệ tọa độ cực (r_0, θ_0) được cho bởi $\ddot{r} = \ddot{\theta} = 0$, $\dot{r} = \dot{\theta} = 0$, cụ thể,

$$\theta_0 = 0, \qquad r_0 = l + \frac{mg}{k} .$$

Với dao động nhỏ xung quanh điểm cân bằng, θ là góc nhỏ. Đặt $\rho = r - r_0$ với $\rho \ll r_0$ và viết phương trình chuyển động như

$$m\ddot{\rho} - m(r_0 + \rho)\dot{\theta}^2 + k\rho = 0 ,$$
$$(r_0 + \rho)\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} + g\theta = 0 .$$

hay, bỏ qua số hạng bậc cao hơn của các đại lượng nhỏ ρ, $\dot{\rho}$, $\dot{\theta}$,

$$\ddot{\rho} + \frac{k}{m}\rho = 0 ,$$
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{r_0}\theta = 0 .$$

Như thế cả hai dịch chuyển góc và xuyên tâm đều thực hiện chuyển động điều hòa xung quanh điểm cân bằng tương ứng với tần số góc $\sqrt{k/m}$, $\sqrt{g/r_0}$. Các nghiệm là

$$\rho = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi_1\right) ,$$

hay

$$r = l + \frac{mg}{k} + A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi_1\right) ,$$

và

$$\theta = B\cos\left(\sqrt{\frac{kg}{kl + mg}}\,t + \varphi_2\right) ,$$

ở đây các hằng số A, φ_1, B, φ_2 được xác định từ điều kiện ban đầu.

2016

Một hạt bị buộc chuyển động trong một mặt phẳng. Nó bị hút đến một điểm cố định P trong mặt phẳng này; lực luôn luôn được hướng chính xác đến điểm P và tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách từ điểm P.

(a) Sử dụng hệ tọa độ cực, hãy viết hàm Lagrange của hạt này.

(b) Viết các phương trình Lagrange cho hạt này và tìm ít nhất một tích phân đầu tiên.

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

(a) Chọn hệ tọa độ cực với gốc tại P trong mặt phẳng trong đó hạt bị cưỡng bức chuyển động. Lực tác dụng lên hạt là

$$\mathbf{F} = -\frac{k\mathbf{r}}{r^3} ,$$

k là hằng số dương. Thế năng của nó ở vô cùng là

$$V = -\int_{\infty}^{r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{k}{r} .$$

Động năng của hạt là

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) .$$

Do đó hàm Langrange là

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r} .$$

(b) Các phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

khi đó cho các phương trình chuyển động

$$m\ddot{r} + \frac{k}{r^2} = 0, \qquad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 .$$

Phương trình thứ hai trực tiếp cho tích phân thứ nhất

$$mr^2\dot{\theta} = \text{hằng số} ,$$

có nghĩa rằng momen xung lượng đối với P là bảo toàn.

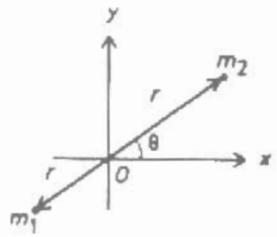
2017

Xét hai hạt tương tác bằng lực xuyên tâm (thế $= V(r)$, ở đây r là vectơ tri tương đối).

(a) Hãy rút ra hàm Lagrange trong hệ khối tâm và chứng minh rằng năng lượng và momen xung lượng được bảo toàn. Chứng tỏ rằng chuyển động là trong mặt phẳng và thỏa mãn định luật Kepler II (nghĩa là **r** quét những diện tích bằng nhau trong khoảng thời gian bằng nhau).

(b) Giả thiết rằng thế là $V = kr^2/2$, ở đây k là hằng số dương, và rằng năng lượng toàn phần E đã biết. Hãy tìm biểu thức cho các giá trị cực tiểu và cực đại mà r sẽ có trong quá trình chuyển động.

(SUNY, Buffalo)



Hình 2.16

Lời giải:

Vì lực tác dụng lên các hạt luôn luôn hướng dọc theo đường nối phân cách hai hạt, nên chuyển động bị giới hạn trong bất kì mặt phẳng nào mà ban đầu các hạt chuyển động. Sử dụng hệ tọa độ cực trong mặt phẳng này như ở hình 2.16 với gốc ở khối tâm của các hạt. Theo định nghĩa của khối tâm,

$$m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0 ,$$

nghĩa là

$$m_1\mathbf{r}_1 = -m_2\mathbf{r}_2 ,$$

hay

$$m_1 r_1 = m_2 r_2$$

cho các giá trị tuyệt đối.

(a) Động năng của hạt là

$$T = \frac{m_1}{2}|\dot{\mathbf{r}}_1|^2 + \frac{m_2}{2}|\dot{\mathbf{r}}_2|^2$$

$$= \frac{m_2^2}{2m_1}|\dot{\mathbf{r}}_2|^2 + \frac{m_2}{2}|\dot{\mathbf{r}}_2|^2$$

$$= \frac{m_2(m_1+m_2)}{2m_1}|\dot{\mathbf{r}}_2|^2 = \frac{m_2^2}{2\mu}|\dot{\mathbf{r}}_2|^2 ,$$

ở đây $\mu = m_1m_2/(m_1+m_2)$ là khối lượng rút gọn của hệ. Thế năng là

$$V(r_1+r_2) = V\left(\frac{m_2r_2}{m_1} + r_2\right) = V\left(\frac{m_2r_2}{\mu}\right) .$$

Do đó hàm Lagrange là

$$L = T - V = \frac{m_2^2}{2\mu}(\dot{r}_2^2 + r_2^2\dot{\theta}^2) - V\left(\frac{m_2r_2}{\mu}\right) ,$$

khi sử dụng r_2 và θ như tọa độ suy rộng.

Hàm Lagrange L không phụ thuộc tường minh vào t. Như vậy

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)$$

$$= \sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j\right]$$

$$= \frac{d}{dt}\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j ,$$

có sử dụng các phương trình Lagrange. Từ đó

$$\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L = \text{hằng số} .$$

Trong trường hợp này,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_2}\dot{r}_2 = \frac{m_2^2\dot{r}_2^2}{\mu}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta} = \frac{m_2^2r_2^2\dot{\theta}^2}{\mu} ,$$

và các phương trình trên cho ta

$$\frac{m_2^2}{\mu}(\dot{r}_2^2 + r_2^2\dot{\theta}^2) - T + V = \frac{m_2^2}{2\mu}(\dot{r}_2^2 + r_2^2\dot{\theta}^2) + V$$

$$= T + V = \text{hằng số},$$

chỉ ra rằng năng lượng toàn phần được bảo toàn. Hãy chứng minh rằng có thể có điều chứng minh đó là vì V rõ ràng không phụ thuộc vào vận tốc.

Vì L không phụ thuộc tường minh vào θ nên phương trình Lagrange cho

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{m_2^2 r_2^2 \dot{\theta}}{\mu} = \text{hằng số} = J \text{ , chẳng hạn.}$$

Momen xung lượng của hệ đối với khối tâm là

$$m_2 r_2^2 \dot{\theta} + m_1 r_1^2 \dot{\theta} = \frac{(m_1 + m_2) m_2 r_2^2 \dot{\theta}}{m_1} = \frac{m_2^2 r_2^2 \dot{\theta}}{\mu} = J \, .$$

Do đó momen xung lượng được bảo toàn. Phương trình trên cũng ngụ ý là

$$r^2\dot{\theta} = (r_1 + r_2)^2 \dot{\theta} = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)^2 r_2^2 \dot{\theta} = \frac{m_2^2 r_2^2 \dot{\theta}}{\mu^2} = \text{ hằng số },$$

nghĩa là

$$\frac{r^2 \Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\Delta S}{\Delta t} = \text{ hằng số.}$$

ở đây ΔS là diện tích mà r quét trong thời gian Δt. Như vậy định luật Kepler thứ hai được thỏa mãn.

(b) Năng lượng toàn phần

$$E = T + V = \frac{m_2^2}{2\mu}(\dot{r}_2^2 + r_2^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}kr^2$$

$$= \frac{m_2^2 \dot{r}_2^2}{2\mu} + \frac{J^2 \mu}{2m_2^2}\frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{2}kr^2$$

có thể được viết như sau

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2\mu}\frac{1}{r^2} + \frac{1}{2}kr^2 \, .$$

Khi r là cực đại hay cực tiểu, $\dot{r} = 0$. Do đó các giá trị cực trị của r được cho bởi

$$k\mu r^4 - 2E\mu r^2 + J^2 = 0 \, .$$

2018

Một hạt bị hút tới một tâm lực bởi một lực mà lực này thay đổi tỉ lệ nghịch với lập phương khoảng cách của nó tới tâm. Hãy đưa ra phương trình chuyển động và giải chúng tìm các quỹ đạo. Hãy thảo luận xem làm sao mà bản chất của quỹ đạo lại phụ thuộc vào các thông số của hệ.

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

Khi hạt chuyển động dưới tác dụng của lực xuyên tâm thì chuyển động của nó phải nằm trong mặt phẳng. Ta sử dụng toạ độ cực trong mặt phẳng đó với gốc ở tâm lực. Đối với lực

$$\mathbf{F} = -\frac{k\mathbf{r}}{r^4},$$

ở đây k là hằng số dương, thế năng là

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{k}{2r^2}.$$

Do đó hàm Lagrange là

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{2r^2}.$$

Các phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

khi đó cho ta

$$mr^2\dot{\theta} = b, \quad \text{(một hằng số)},$$

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{k}{r^3} = 0.$$

Đặt $u = \frac{1}{r}$. Phương trình đầu tiên trở thành

$$\dot{\theta} = \frac{bu^2}{m}.$$

Khi

$$\dot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\dot{\theta} = -\frac{b}{m}\frac{du}{d\theta},$$

$$\ddot{r} = -\frac{b}{m}\frac{d^2u}{d\theta^2}\dot{\theta} = -\frac{b^2u^2}{m^2}\frac{d^2u}{d\theta^2},$$

phương trình thứ hai trở thành

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{mk}{b^2}\right) u = 0 \, .$$

Do đó, nếu $b^2 > mk$,

$$u = \frac{1}{r_0} \cos\left[\sqrt{1 - \frac{mk}{b^2}}\,(\theta - \theta_0)\right] ,$$

nghĩa là

$$r \cos\left[\sqrt{1 - \frac{mk}{b^2}}\,(\theta - \theta_0)\right] = r_0 \, ;$$

nếu $b^2 < mk$,

$$u = \frac{1}{r_0} \cosh\left[\sqrt{\frac{mk}{b^2} - 1}\,(\theta - \theta_0)\right] ,$$

nghĩa là

$$r \cosh\left[\sqrt{\frac{mk}{b^2} - 1}\,(\theta - \theta_0)\right] = r_0 \, .$$

Ở đây (r_0, θ_0) là một điểm trên quỹ đạo.

2019

Thừa nhận hàm Lagrange đối với chuyển động một chiều nào đó được cho bởi

$$L = e^{\gamma t}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2\right) ,$$

ở đây γ, m, k là các hằng số dương. Phương trình Lagrange là gì? Có mấy hằng số của chuyển động? Hãy mô tả chuyển động? Một phép biến đổi điểm được tạo ra cho một tọa độ suy rộng khác là cho bởi S được cho bởi

$$S = \exp\left(\frac{\gamma t}{2}\right) q \, .$$

Hàm Lagrange theo S là gì? Phương trình Lagrange? Các hằng số chuyển động? Hãy mô tả quan hệ giữa hai nghiệm?

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

Phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

cho ta

$$e^{\gamma t}(m\ddot{q} + \gamma m\dot{q} + kq) = 0 \, .$$

hay

$$\ddot{q} + \gamma\dot{q} + \frac{kq}{m} = 0 \, .$$

Vì L chứa q, t tường minh nên không có hằng số nào của chuyển động.

Thử các nghiệm theo dạng $q \sim e^{\alpha t}$. Thay thế cho ta

$$\alpha^2 + \gamma\alpha + \frac{k}{m} = 0 \, ,$$

các nghiệm của nó là

$$\alpha = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \frac{k}{m}} \, .$$

Viết kết quả đó như $\alpha = -\frac{\gamma}{2} \pm b$ và xét ba trường hợp có thể.

(i) $\frac{\gamma}{2} < \sqrt{\frac{k}{m}}$. b là ảo; đặt nó là $i\beta$. Nghiệm tổng quát là

$$q = e^{-\frac{\gamma t}{2}}(Ae^{i\beta t} + Be^{-i\beta t}) \, ,$$

hay

$$q = e^{-\frac{\gamma t}{2}}(A' \cos\beta t + B' \sin\beta t) \, ,$$

A, B, A', B' các hằng số. Như vậy chuyển động là dao động với biên độ tắt dần.

(ii) $\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{k}{m}}$. $b = 0$ và ta có

$$q = q_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}} \, ,$$

cho thấy rằng chuyển động không phải dao động với q giảm dần từ giá trị q_0 tại $t = 0$.

(iii) $\frac{\gamma}{2} > \sqrt{\frac{k}{m}}$. $b = 0$ và

$$q = e^{-\frac{\gamma t}{2}}(Ce^{bt} + De^{-bt}) \, ,$$

C và D là hằng số. Chuyển động này cũng không phải dao động và tắt dần theo thời gian.

Ba trường hợp có thể được đặc trưng như tắt dần quá yếu, tắt dần tới hạn và quá tắt dần.

Nếu ta đưa yếu tố thời gian vào toạ độ suy rộng nhờ một phép biến đổi điểm

$$S = e^{\frac{\gamma t}{2}} q, \qquad \text{nghĩa là} \qquad q = e^{-\frac{\gamma t}{2}} S \, ,$$

hàm Lagrange trở thành

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{S} - \frac{1}{2} \gamma S \right)^2 - \frac{1}{2} k S^2 \, .$$

Phương trình Lagrange khi đó cho phương trình chuyển động

$$\ddot{S} + \omega^2 S = 0$$

với $\omega^2 = k/m - (\gamma/2)^2$. Vì $\ddot{S} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{S}^2}{dS}$, tích phân cho

$$\dot{S}^2 + \omega^2 S^2 = \text{hằng số}.$$

Do đó bây giờ có hằng số chuyển động. Tuy nhiên, về mặt vật lý tình thế không thay đổi. Vì $S, \dot{S}$ cả hai chứa t một cách ẩn, hằng số này thực tế thay đổi theo thời gian.

Với $\gamma/2 < \sqrt{k/m}$, ω^2 là dương, nghĩa là ω là số thực, và phương trình chuyển động theo S mô tả chuyển động điều hòa đơn giản không có tắt dần. Với $\gamma/2 = \sqrt{k/m}$, $\omega = 0$ và chuyển động theo S là đều. Với $\gamma/2 > \sqrt{k/m}$, ω là số ảo và chuyển động không phải dao động có tắt dần theo thời gian. Tuy nhiên, như đã lưu ý ở trên, S chứa thừa số suy giảm ẩn $\exp(-\gamma t/2)$, nó khiến cho sự tắt dần theo thời gian có mặt trong tất cả ba trường hợp.

Chúng ta có thể kết luận rằng cả hai tập hợp nghiệm đều mô tả những tình huống vật lý giống nhau, nhưng trong tập hợp nghiệm thứ hai hệ số tắt dần theo thời gian $\exp(-\gamma t/2)$ bị gộp vào trong các tọa độ suy rộng và sự thảo luận diễn biến như thể nó không tồn tại.

2020

Một hạt có khối lượng m trượt không ma sát trên một vòng dây đang quay bán kính a trục quay của nó đi qua đường kính thẳng đứng như hình 2.17. Vận tốc góc không đổi của vòng là ω.

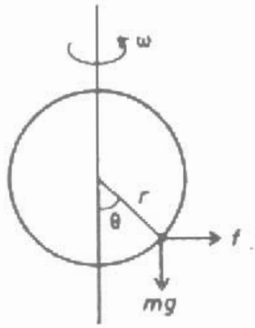
(a) Hãy viết hàm Lagrange đối với hệ và tìm các hằng số chuyển động có thể tồn tại.

(b) Hãy chỉ ra vị trí cân bằng của hạt với $\omega < \omega_c$ và $\omega > \omega_c$, tại đây $\omega_c = \sqrt{g/a}$.

Vị trí nào trong những vị trí cân bằng đó là bền và không bền?

(d) Hãy tính tần số dao động của những dao động biên độ nhỏ quanh điểm cân bằng bền.

(UC, Berkeley)



Hình 2.17

Lời giải:

(a) Sử dụng một hệ tọa độ cực quay gắn với vòng như hình 2.17. Trong hệ tọa độ này, ngoài lực hấp dẫn tác dụng lên khối lượng, mg, ta phải đưa vào lực ly tâm tưởng tượng f như đã chỉ ra. Trong hệ tọa độ cực

$$\mathbf{f} = (m\omega^2 r \sin^2\theta, m\omega^2 r \sin\theta\cos\theta) ,$$
$$\mathbf{mg} = (mg\cos\theta, -mg\sin\theta) .$$

f có thể được biểu diễn theo thế V_f bởi

$$\mathbf{f} = -\nabla V_f = \left(-\frac{\partial V_f}{\partial r}, -\frac{\partial V_f}{\gamma\partial\theta}\right) ,$$

nghĩa là

$$V_f = -\frac{1}{2}mr^2\omega^2\sin^2\theta .$$

Tương tự, thế hấp dẫn là

$$V_g = -mgr\cos\theta .$$

Vận tốc hạt là $(\dot{r}, r\dot{\theta})$. Với ràng buộc $r = a$, hàm Lagrange là

$$L = T - V = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2\theta + mga\cos\theta \, .$$

Do $\partial L/\partial t = 0$ và V không chứa $\dot{\theta}$ một cách tường minh, nên $\dot{\theta}\partial L/\partial\dot{\theta} - L =$ hằng số (bài tập 2017). Do đó

$$\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2\theta - mga\cos\theta = \text{hằng số},$$

điều đó có nghĩa là $T + V =$ hằng số.

(b) Phương trình Lagrange cho phương trình chuyển động

$$a\ddot{\theta} - a\omega^2\sin\theta\cos\theta + g\sin\theta = 0 \, .$$

Tại vị trí cân bằng, $\ddot{\theta} = 0$, như vậy

$$\sin\theta(a\omega^2\cos\theta - g) = 0 \, ,$$

hay

$$a\sin\theta(\omega^2\cos\theta - \omega_c^2) = 0$$

với $\omega_c^2 = \frac{g}{a}$.

Nếu $\omega < \omega_c$, $\omega^2\cos\theta < \omega_c^2$ và do đó $\sin\theta = 0$, và ta có hai vị trí cân bằng tại $\theta = 0, \pi$.

Nếu $\omega > \omega_c$, ta có ngoài vị trí trên một vị trí cân bằng tại

$$\cos\theta = \frac{\omega_c^2}{\omega^2} = \frac{g}{a\omega^2} \, .$$

(c) Giả thiết θ_0 là vị trí cân bằng và đặt $\theta = \theta_0 + \alpha$, ở đây α là một đại lượng nhỏ. Phương trình chuyển động rút gọn, chỉ giữ lại các số hạng bậc một, thành

$$a\ddot{\alpha} + (g\cos\theta_0 - a\omega^2\cos 2\theta_0)\alpha - a\omega^2\sin\theta_0\cos\theta_0 + g\sin\theta_0 = 0 \, ,$$

hay, vì $\ddot{\theta} = 0$ tại $\theta = \theta_0$,

$$\ddot{\alpha} + \left(\frac{g}{a}\cos\theta_0 - \omega^2\cos 2\theta_0\right)\alpha = 0 \, .$$

Nếu $\omega < \sqrt{g/a}$, thì hệ số của α là dương đối với cân bằng tại $\theta_0 = 0$. Như vậy đó là vị trí cân bằng bền. Hệ số là âm đối với vị trí cân bằng tại $\theta_0 = \pi$, chỉ ra rằng đó là vị trí cân bằng không bền.

Nếu $\omega > \sqrt{g/a}$, thì cân bằng cũng xảy ra tại $\cos\theta_0 = g/a\omega^2$. Trong trường hợp này hệ số của α là

$$\frac{g}{a}\cos\theta_0 - 2\omega^2\cos^2\theta_0 + \omega^2 = \frac{1}{\omega^2}\left(\omega^4 - \frac{g^2}{a^2}\right) > 0\ ,$$

do đó cân bằng là cân bằng bền.

(d) Tần số góc của dao động nhỏ quanh điểm cân bằng bền là

$$\begin{aligned}\omega' &= \sqrt{\frac{g}{a}\cos\theta_0 - \omega^2\cos 2\theta_0}\\ &= \begin{cases}\sqrt{\frac{g}{a} - \omega^2} & \text{tại } \theta_0 = 0\ .\\ \frac{1}{\omega}\sqrt{\omega^4 - \left(\frac{g}{a}\right)^2} & \text{tại } \theta_0 = \cos^{-1}\left(\frac{g}{a\omega^2}\right)\ .\end{cases}\end{aligned}$$

2021

Các hạt có khối lượng m_1 và m_2, được nối bằng một lò xo nhẹ có hằng số đàn hồi k, ở trạng thái nghỉ trên bề mặt ngang không ma sát.

(a) Một xung lực I trong thời gian ngắn tác dụng lên m_1. Hướng xung lực là từ m_1 đến m_2. m_2 chuyển động được bao xa trước khi tiến tới trạng thái nghỉ lần đầu tiên?

(b) Có khả năng truyền một xung lực ngắn tới m_1 để hệ chuyển động từ trạng thái nghỉ sao cho nó quay mà không dao động? Giải thích.

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

(a) Lấy vị trí ban đầu của m_1 như gốc tọa độ và hướng dương là từ m_1 đến m_2 trên trục x. Hàm Lagrange của hệ là

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - l)^2\ ,$$

ở đây l là chiều dài tự nhiên của lò xo, bằng $x_2 - x_1$ tại $t = 0$. Các phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

cho ta

$$m_1\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - l)\ ,$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - l)\ .$$

Từ trên ta nhận được

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -\frac{k(m_1 + m_2)(x_2 - x_1 - l)}{m_1 m_2}\ ,$$

hay bằng cách đặt $u = x_2 - x_1 - l$, $\omega^2 = k(m_1 + m_2)/m_1 m_2$,

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0$$

Nghiệm tổng quát là

$$u = a\cos(\omega t + \alpha)\ ,$$

suy ra

$$x_2 - x_1 - l = a\cos(\omega t + \alpha)\ ,$$

ở đây a và α là các hằng số. Điều kiện ban đầu $x_1 = 0$, $x_2 = l$, $\dot{x}_1 = I/m_1$, $\dot{x}_2 = 0$ tại $t = 0$ cho ta

$$a\cos\alpha = 0\ ,$$
$$a\omega\sin\alpha = \frac{I}{m_1}\ ,$$

với nghiệm

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \qquad a = \frac{I}{m_1\omega}\ .$$

Do đó

$$x_2 - x_1 = l + \frac{I}{m_1\omega}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\ . \tag{1}$$

Bảo toàn động lượng cho ta

$$m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 = I\ .$$

Tích phân và áp dụng điều kiện ban đầu ta nhận được

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_2 l + It\ .$$

Phương trình này và cùng với phương trình (1) cho ta

$$x_2 = l + \frac{It}{m_1 + m_2} - \frac{I\sin(\omega t)}{(m_1 + m_2)\omega}\ ,$$

và như vậy

$$\dot{x}_2 = \frac{I}{m_1 + m_2} - \frac{I\cos(\omega t)}{m_1 + m_2} .$$

Khi m_2 tiến tới nghỉ lần đầu tiên, $\dot{x}_2 = 0$, và từ trên cho ta có $\cos(\omega t) = 1$ lần đầu tiên. Do đó khi m_2 tiến tới nghỉ lần đầu tiên,

$$t = \frac{2\pi}{\omega} .$$

Tại thời gian này m_2 đã di chuyển được một khoảng cách

$$x_2 - l = \frac{2\pi I}{\omega(m_1 + m_2)} = 2\pi I\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k}}\,(m_1 + m_2)^{-3/2} .$$

(b) Nếu xung lực truyền cho m_1 có thành phần vuông góc với đường nối hai hạt thì hệ sẽ quay quanh khối tâm, ngoài chuyển động thẳng của khối tâm. Trong hệ tọa độ quay với gốc là khối tâm và trục x dọc theo đường nối các hạt, thì sẽ có lực ly tâm tưởng tượng tác dụng vào các hạt cộng với lực hồi phục của lò xo. Tại vị trí các hạt mà lực cân bằng thì các hạt có vận tốc cực đại vì năng lượng được bảo toàn (Bài tập 2017). Do đó dao động sẽ luôn luôn xảy ra, cùng với sự quay của hệ xét như một khối.

2022

Một quả cầu khối lượng M và bán kính R lăn không trượt trên một khối tam giác khối lượng m có thể tự do chuyển động không ma sát trên mặt ngang như hình 2.18.

(a) Hãy tìm hàm Lagrange và các phương trình Lagrange cho hệ chịu trọng lực ở mặt đất này.

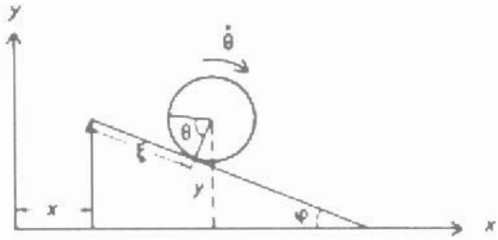
(b) Hãy tìm chuyển động của hệ bằng cách lấy tích phân phương trình Lagrange, với điều kiện là tất cả các vật ban đầu ở trạng thái nghỉ và tâm quả cầu ở cách bề mặt một khoảng H.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Sử dụng hệ tọa độ cố định như hình 2.18 và đặt θ là góc quay của quả cầu. Vì quả cầu lăn không ma sát trên mặt phẳng nghiêng, tâm của nó sẽ có tọa độ

$$(x + (\xi_0 + R\theta)\cos\varphi,\ H - R\theta\sin\varphi)$$



Hình 2.18

và vận tốc

$$(\dot{x} + R\dot{\theta}\cos\varphi, -R\dot{\theta}\sin\varphi) .$$

Lưu ý rằng tại $t = 0$, $x = 0$, $\theta = 0$, $\xi = \xi_0$, $y = H$, $\dot{x} = \dot{\theta} = 0$. Khi đó toán tử Lagrange là

$$\begin{aligned} L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + 2R\dot{x}\dot{\theta}\cos\varphi) \\ + \frac{1}{5}MR^2\dot{\theta}^2 - Mg(H - R\theta\sin\varphi) . \end{aligned}$$

Các phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

cho ta

$$(m + M)\ddot{x} + MR\ddot{\theta}\cos\varphi = 0 ,$$
$$\ddot{x}\cos\varphi + \frac{7}{5}R\ddot{\theta} - g\sin\varphi = 0 .$$

(b) Khử $\ddot{x}$ từ các phương trình trên ta có

$$\left(\frac{7}{5} - \frac{M\cos^2\varphi}{m + M}\right)\ddot{\theta} = \frac{g\sin\varphi}{R} ,$$

hay, tích phân và sử dụng điều kiện ban đầu ta có

$$\theta = \frac{5(m + M)\sin\varphi}{2[7(m + M) - 5M\cos^2\varphi]}\frac{gt^2}{R} ,$$

và như vậy

$$x = -\frac{MR\cos\varphi}{m + M}\theta = -\frac{5M\sin(2\varphi)}{4[7(m + M) - 5M\cos^2\varphi]}gt^2 .$$

Chú ý rằng, khi quả cầu lăn xuống mặt phẳng, khối tam giác chuyển động sang trái như chờ đợi từ sự bảo toàn động lượng.

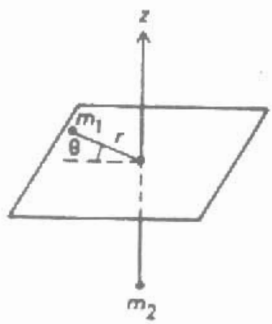
2023

Hai chất điểm m_1 và m_2 ($m_1 \neq m_2$) được nối với nhau bằng một sợi dây dài l đi qua một cái lỗ tròn ở mặt bàn. Sợi dây và chất điểm chuyển động không ma sát m_1 trên mặt bàn và m_2 tự do chuyển động theo đường thẳng đứng.

(a) Tốc độ ban đầu m_1 phải bằng bao nhiêu để m_2 sẽ duy trì không chuyển động ở cách mặt bàn một khoảng d?

(b) Nếu m_2 hơi dịch chuyển theo hướng thẳng đứng thì sẽ có những dao động nhỏ. Sử dụng các phương trình Lagrange để tìm chu kì của những dao động đó.

(UC, Berkeley)



Hình 2.19

Lời giải:

(a) m_1 phải có vận tốc v vuông góc với sợi dây như thế nào để lực hướng tâm tác dụng lên nó bằng lực hấp dẫn tác dụng lên m_2

$$\frac{m_1 v^2}{l-d} = m_2 g \, ,$$

hay

$$v = \sqrt{\frac{m_2(l-d)g}{m_1}} \, .$$

(b) Sử dụng hệ tọa độ cực cố định trên mặt bàn ngang như hình 2.19. m_2 có tọa độ z là $-(l-r)$ và như vậy vận tốc là $\dot{r}$. Hàm Lagrange của hệ khi đó là

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2 + m_2g(l-r) .$$

Các phương trình Lagrange cho

$$m_1r^2\dot{\theta} = \text{hằng số},$$
$$(m_1 + m_2)\ddot{r} - m_1r\dot{\theta}^2 + m_2g = 0 .$$

Tại $t = 0$, $r = l - d$, $v = \sqrt{m_2(l-d)g/m_1} = v_0$, chẳng hạn, do đó

$$\dot{\theta}_0 = \frac{v_0}{l-d} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}\frac{g}{l-d}} .$$

Từ đó

$$m_1r^2\dot{\theta} = m_1(l-d)^2\dot{\theta}_0 = m_1\sqrt{\frac{m_2}{m_1}(l-d)^3g} ,$$

suy ra

$$r\dot{\theta}^2 = \frac{r^4\dot{\theta}^2}{r^3} = \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{l-d}{r}\right)^3 g$$

và

$$(m_1 + m_2)\ddot{r} - m_2\left(\frac{l-d}{r}\right)^3 g + m_2g = 0 .$$

Đặt $r = (l-d) + \rho$, ở đây $\rho \ll (l-d)$. Khi đó

$$\ddot{r} = \ddot{\rho}, \qquad r^{-3} = (l-d)^{-3}\left(1 + \frac{\rho}{l-d}\right)^{-3} \approx (l-d)^{-3}\left(1 - \frac{3\rho}{l-d}\right)$$

và phương trình trên trở thành

$$\ddot{\rho} + \frac{3m_2g}{(m_1+m_2)(l-d)}\rho = 0 .$$

Từ đó ρ dao động quanh O, nghĩa là r dao động quanh giá trị $l-d$, với tần số góc

$$\omega = \sqrt{\frac{3m_2g}{(m_1+m_2)(l-d)}} ,$$

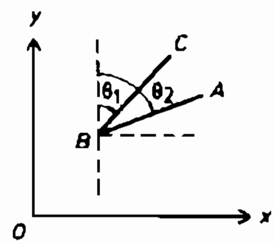
hoặc chu kì

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(m_1+m_2)(l-d)}{3m_2g}} .$$

2024

Hai que AB và BC, mỗi que dài a và có khối lượng m, được nối không ma sát tại B và nằm trên mặt bàn ngang không ma sát. Ban đầu hai que (có nghĩa là điểm A, B, C) là cộng tuyến. Một xung lực $\overline{P}$ đặt vào điểm A theo hướng vuông góc với đường ABC. Hãy tìm chuyển động của các que ngay sau khi xung lực tác dụng.

(*Columbia*)



Hình 2.20

Lời giải:

Vì hai que AB, BC được nối tự do tại B, lấy các tọa độ như hình 2.20 và đặt các tọa độ của B là (x, y). Khi đó khối tâm của BC có các tọa độ

$$\left(x + \frac{1}{2}a\sin\theta_1, y + \frac{1}{2}a\cos\theta_1\right)$$

và vận tốc

$$\left(\dot{x} + \frac{1}{2}a\dot{\theta}_1\cos\theta_1, \dot{y} - \frac{1}{2}a\dot{\theta}_1\sin\theta_1\right),$$

và khối tâm của AB có tọa độ

$$\left(x + \frac{1}{2}a\sin\theta_2, y + \frac{1}{2}a\cos\theta_2\right)$$

và vận tốc

$$\left(\dot{x} + \frac{1}{2}a\dot{\theta}_2\cos\theta_2, \dot{y} - \frac{1}{2}a\dot{\theta}_2\sin\theta_2\right).$$

Mỗi que có momen quán tính quanh khối tâm của nó là $ma^2/12$. Từ đó động năng toàn phần là

$$T = \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{1}{4}a^2\dot{\theta}_1^2 + a\dot{\theta}_1(\dot{x}\cos\theta_1 - \dot{y}\sin\theta_1)\right] + \frac{1}{24}ma^2\dot{\theta}_1^2$$

$$+ \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{1}{4}a^2\dot{\theta}_1^2 + a\dot{\theta}_2(\dot{x}\cos\theta_2 - \dot{y}\sin\theta_2)\right] + \frac{1}{24}ma^2\dot{\theta}_2^2$$

$$= \frac{1}{2}m\left[2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + a\dot{x}(\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + \dot{\theta}_2\cos\theta_2) - a\dot{y}(\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + \dot{\theta}_2\sin\theta_2)\right]$$

$$+ \frac{1}{6}ma^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)\ .$$

Xung lực $\overline{P}$ đặt vào A theo hướng vuông góc với đường ABC. Như thế momen ảo của xung lực là $\overline{P}\delta(y + a\cos\theta_2)$ và các thành phần suy rộng của xung lực là

$$Q_x = 0, \qquad Q_y = \overline{P}, \qquad Q_{\theta_1} = 0, \qquad Q_{\theta_2} = -a\overline{P}\sin\theta_2\ .$$

Các phương trình Lagrange đối với chuyển động xung là

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)_f - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)_i = Q_j\ ,$$

ở đây i, f là các trạng thái đầu và cuối của hệ liên quan đến sự tác động của xung lực. Lưu ý rằng tại $t = 0$ khi đó xung đặt vào, $\theta_1 = -\pi/2$, $\theta_2 = \pi/2$. Ngoài ra, đối với trạng thái ban đầu, $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \dot{x} = \dot{y} = 0$. Vì

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x} + \frac{1}{2}ma(\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + \dot{\theta}_2\cos\theta_2)\ ,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = 2m\dot{y} - \frac{1}{2}ma(\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + \dot{\theta}_2\sin\theta_2)\ ,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{1}{2}ma\dot{x}\cos\theta_1 - \frac{1}{2}ma\dot{y}\sin\theta_1 + \frac{1}{3}ma^2\dot{\theta}_1\ ,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} = \frac{1}{2}ma\dot{x}\cos\theta_2 - \frac{1}{2}ma\dot{y}\sin\theta_2 + \frac{1}{3}ma^2\dot{\theta}_2\ ,$$

Các phương trình Lagrange cho

$$2m\dot{x} = 0 \,,$$

$$2m\dot{y} + \frac{1}{2}ma(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) = \overline{P} \,,$$

$$\frac{1}{2}ma\dot{y} + \frac{1}{3}ma^2\dot{\theta}_1 = 0 \,,$$

$$-\frac{1}{2}ma\dot{y} + \frac{1}{3}ma^2\dot{\theta}_2 = -a\overline{P} \,.$$

Nghiệm là

$$\dot{x} = 0, \qquad \dot{y} = -\frac{\overline{P}}{m}, \qquad \dot{\theta}_1 = \frac{3\overline{P}}{2ma}, \qquad \dot{\theta}_2 = -\frac{9\overline{P}}{2ma} \,.$$

Do đó ngay sau khi xung tác dụng khối tâm của BC có vận tốc

$$\left(\dot{x}, \dot{y} + \frac{1}{2}a\dot{\theta}_1\right) = \left(0, -\frac{\overline{P}}{4m}\right) \,,$$

và khối tâm của AB có vận tốc

$$\left(\dot{x}, \dot{y} - \frac{1}{2}a\dot{\theta}_2\right) = \left(0, \frac{5\overline{P}}{4m}\right) \,.$$

2025

Xét một hạt khối lượng m chuyển động trong mặt phẳng nhờ lực xuyên tâm

$$F(r) = -\frac{k}{r^2} + \frac{k'}{r^3}$$

(giả sử $k > 0$).

(a) Tìm hàm Lagrange đối với hệ này theo toạ độ cực r, θ và vận tốc của chúng?

(b) Hãy viết phương trình chuyển động đối với r và θ, và chứng minh rằng momen xung lượng quỹ đạo l là hằng số chuyển động.

(c) Cho rằng $l^2 > -mk'$. Hãy tìm phương trình của quỹ đạo, có nghĩa là r như hàm của θ.

(Columbia)

Lời giải:

(a) Vì

$$F(r) = -\frac{k}{r^2} + \frac{k'}{r^3} ,$$

$$V(r) = -\int_\infty^r F(r)dr = -\frac{k}{r} + \frac{k'}{2r^2} .$$

Hàm Lagrange khi đó là

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r} - \frac{k'}{2r^2} .$$

(b) Các phương trình Lagrange cho phương trình chuyển động

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r^2} - \frac{k'}{r^3} = 0 , \tag{1}$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 .$$

Phương trình thứ hai có tích phân đầu tiên $mr^2\dot{\theta}$ = hằng số. Đại lượng đó là momen xung lượng của hạt xung quanh gốc $l = r \cdot mr\dot{\theta}$.

(c) Đặt $u = r^{-1}$. Vì $r = u^{-1}$,

$$\dot{r} = -u^{-2}\frac{du}{d\theta}\dot{\theta} = -u^{-2}\frac{du}{d\theta}\frac{l}{mr^2} = -\frac{l}{m}\frac{du}{d\theta} ,$$

$$\ddot{r} = -\frac{l}{m}\frac{d^2u}{d\theta^2}\dot{\theta} = -\frac{l^2}{m^2}u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} ,$$

$$mr\dot{\theta}^2 = \frac{l^2}{mr^3} = \frac{l^2u^3}{m} ,$$

Phương trình (1) trở thành

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \left(1 + \frac{mk'}{l^2}\right)u - \frac{mk}{l^2} = 0 .$$

Một nghiệm riêng là

$$u = \frac{mk}{l^2}\left(\frac{l^2}{l^2 + mk'}\right) = \frac{mk}{l^2 + mk'} ,$$

Vì $l^2 > -mk'$, nghĩa là $\frac{mk'}{l^2} > -1$,

$$1 + \frac{mk'}{l^2} > 0$$

và nghiệm tổng quát là

$$u = A\cos\left(\sqrt{1+\frac{mk'}{l^2}}\,\theta+\alpha\right)+\frac{mk}{l^2+mk'} .$$

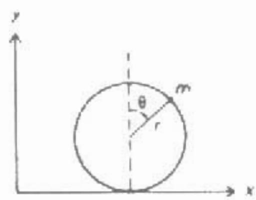
ở đây A, α là hằng số. Bằng việc chọn toạ độ thích hợp, α có thể đặt bằng 0. Do đó phương trình quỹ đạo có thể được viết như sau

$$r = \left[A\cos\left(\sqrt{1+\frac{mk'}{l^2}}\,\theta\right)+\frac{mk}{l^2+mk'}\right]^{-1} .$$

2026

Một hạt điểm khối lượng m bị ràng buộc chuyển động không ma sát trên bề mặt trong của một vòng dây tròn bán kinh r, mật độ đồng đều và khối lượng M. Vòng tròn nằm trong mặt phẳng xy có thể lăn không trượt và luôn bám vào một đường cố định là trục x. Hạt điểm chỉ chịu tác dụng của trọng lực theo hướng âm trục y. Tại $t = 0$ giả thiết vòng dây tròn trong trạng thái tĩnh. Tại thời điểm đó hạt ở đỉnh của vòng dây tròn và có vận tốc v_0 dọc theo trục x. Tìm vận tốc v_f, so với trục cố định, khi hạt đến đáy của vòng dây tròn. Hãy đơn giản hóa lời giải trong giới hạn $m/M \to 0$ và $M/m \to 0$.

(*Columbia*)



Hình 2.21

Lời giải:

Sử dụng hệ toạ độ cố định như chỉ ra trên hình 2.21 và đặt toạ độ tâm vòng dây tròn là (x, y). Khi đó chất điểm m có toạ độ

$$(x + r\sin\theta, r + r\cos\theta)$$

và vận tốc là

$$(\dot{x} + r\dot{\theta}\cos\theta, -r\dot{\theta}\sin\theta) .$$

Khi vòng dây tròn có momen quán tính Mr^2, hệ có động năng

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + 2r\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Mr^2\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2$$

và thế năng

$$V = mg(r + r\cos\theta)\ .$$

Do đó hàm Lagrange là

$$L = T - V = M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + 2r\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) - mgr(1 + \cos\theta)\ .$$

Do $\partial L/\partial x = 0$, phương trình Lagrange cho

$$(2M + m)\dot{x} + mr\dot{\theta}\cos\theta = \text{hằng số}\ . \tag{1}$$

Tại $t = 0$, m ở đỉnh vòng dây tròn, $\dot{x} = 0$, $\theta = 0$, $r\dot{\theta} = v_0$, cho giá trị của hằng số là mv_0. Khi m ở đáy vòng dây tròn, $\theta = \pi$, vận tốc của chất điểm là

$$v_f = \dot{x} + r\dot{\theta}\cos\pi = \dot{x} - r\dot{\theta}\ ,$$

và phương trình (1) trở thành

$$2M\dot{x} + mv_f = mv_0\ .$$

Năng lượng toàn phần được bảo toàn để giữa hai điểm ta có

$$M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + 2mgr\ .$$

Khử $\dot{x}$ giữa hai phương trình cuối cùng cho ta

$$(2M + m)v_f^2 - 2mv_0v_f - [(2M - m)v_0^2 + 8Mgr] = 0\ .$$

Lời giải là

$$v_f = \frac{mv_0 \pm 2\sqrt{M^2v_0^2 + 2(2M + m)Mgr}}{2M + m}\ .$$

Trong giới hạn $m/M \to 0$, $v_f \to \pm\sqrt{v_0^2 + 4gr}$. Dấu âm phải được chọn đối với $M \gg m$, $\dot{x}$ nhỏ và $v_f \simeq -r\dot{\theta}$. Trong giới hạn $M/m \to 0$, $v_f \to v_0$.

2027

(a) Một hạt trượt bên trong một paraboloit tròn xoay nhẵn, thẳng đứng $r^2 = az$. Hãy chứng minh rằng lực có ràng buộc có độ lớn = hằng số $\cdot \left(1 + \frac{4r^2}{a^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$. Hướng của lực đó như thế nào?

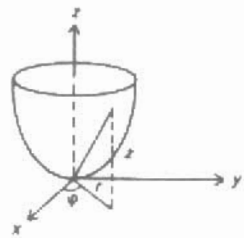
(b) Hạt khối lượng m bị tác dụng bởi lực mà thế của nó là $V(r)$.

(1) Hãy thiết lập hàm Lagrange trong hệ toạ độ cầu quay xung quanh trục z với vận tốc góc ω.

(2) Hãy chứng minh rằng hàm Lagrange có cùng dạng như trong hệ toạ độ cố định cộng với thế phụ thuộc vận tốc U (nó cho lực ly tâm và lực Coriolis).

(3) Hãy tính từ U các thành phần lực ly tâm và lực Coriolis theo hướngȳuyên tâm (r) và hướng phương vị (ϕ).

(*Wisconsin*)



Hình 2.22

Lời giải:

(a) Sử dụng toạ độ trụ (r, φ, z) như chỉ ra ở hình 2.22. Trong hệ toạ độ Descartes hạt khối lượng m, có toạ độ

$$(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \ ,$$

vận tốc

$$(\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi, \dot{z}) \ ,$$

và do đó hàm Lagrange

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz \ .$$

Phương trình ràng buộc là

$$f(r, \varphi, z) = -r^2 + az = 0 \ ,$$

hay

$$-2rdr + adz = 0 \ .$$

Các phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i ,$$

ở đây Q_i là các lực ràng buộc suy rộng khi đó với sự sử dụng nhân tử không xác định Lagrange λ, cho ta

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = -2r\lambda , \tag{1}$$

$$m\ddot{z} + mg = a\lambda , \tag{2}$$

$$mr^2\dot{\varphi} = \text{ hằng số } = J, \quad \text{chẳng hạn} . \tag{3}$$

Phương trình ràng buộc $z = \frac{r^2}{a}$ cho

$$\dot{z} = \frac{2r\dot{r}}{a}, \qquad \ddot{z} = \frac{2r\ddot{r}}{a} + \frac{2\dot{r}^2}{a} . \tag{4}$$

Sử dụng các phương trình (3) và (4) ta viết lại năng lượng toàn phần

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + mgz ,$$

nó được bảo toàn, do

$$\dot{r}^2 = \left(\frac{2E}{m} - \frac{J^2}{m^2r^2} - \frac{2gr^2}{a}\right)\left(1 + \frac{4r^2}{a^2}\right)^{-1} , \tag{5}$$

và phương trình (2) như

$$\frac{m}{a}(2r\ddot{r} + 2\dot{r}^2) + mg = a\lambda .$$

Khi sử dụng các phương trình (1) và (3), nó trở thành

$$a\lambda\left(1 + \frac{4r^2}{a^2}\right) = \frac{2m\dot{r}^2}{a} + mg + \frac{2J^2}{mar^2} .$$

Biểu thức (5) khi đó giản ước nó đến

$$\lambda = \left(\frac{4E}{a^2} + \frac{8J^2}{ma^4} + \frac{mg}{a}\right)\left(1 + \frac{4r^2}{a^2}\right)^{-2} = \text{hằng số} \cdot \left(1 + \frac{4r^2}{a^2}\right)^{-2} .$$

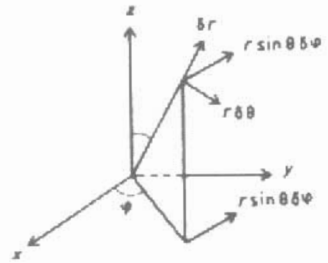
Lực ràng buộc như vậy là

$$\mathbf{f} = -2r\lambda\mathbf{e}_r + a\lambda\mathbf{e}_z ,$$

nó có độ lớn

$$
\begin{aligned}
f &= a\lambda\sqrt{1+\frac{4r^2}{a^2}} \\
&= \text{hằng số}\cdot\left(1+\frac{4r^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} .
\end{aligned}
$$

Lực này trong mặt phẳng rz và vuông góc với bề mặt trong của paraboloit tròn xoay. (Nó tạo góc arctg $(-a/2r)$ với trục r trong khi độ nghiêng của parabon là $2r/a$).



Hình 2.23

(b) Như chỉ ra ở hình 2.23, trong toạ độ cầu (r,θ,φ) dịch chuyển vô cùng bé của hạt có thể được giải như sau

$$\delta\mathbf{r} = (\delta r, r\delta\theta, r\delta\varphi\sin\theta) ,$$

và vận tốc của nó như

$$\dot{\mathbf{r}} = (\dot{r}, r\dot{\theta}, r\dot{\varphi}\sin\theta) .$$

(1) Giả thiết hệ toạ độ quay với vận tốc góc ω xung quanh trục z. Khi đó vận tốc của hạt đối với hệ tọa độ cố định

$$\mathbf{v}' = \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} ,$$

do đó động năng của hạt là

$$T = \frac{1}{2}m[\dot{\mathbf{r}}^2 + 2\dot{\mathbf{r}}\cdot\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} + (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})^2] .$$

Dựa vào hệ tọa độ quay và sử dụng toạ độ cầu ta có

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} &= (r, 0, 0), \\
\boldsymbol{\omega} &= (\omega\cos\theta, -\omega\sin\theta, 0)\ , \\
\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} &= (0, 0, \omega r\sin\theta)\ , \\
2\dot{\mathbf{r}}\cdot\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} &= 2\omega r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta\ , \\
(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})^2 &= \omega^2 r^2\sin^2\theta\ , \\
\dot{\mathbf{r}}^2 &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\ .
\end{aligned}
$$

Từ đó

$$
\begin{aligned}
L &= T - V \\
&= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + 2\omega r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta + \omega^2 r^2\sin^2\theta) - V(r)\ .
\end{aligned}
$$

Lưu ý rằng đó là hàm Lagrange của hạt đối với hệ tọa độ cố định, nó được sử dụng trong các phương trình Lagrange, khi sử dụng toạ độ dựa vào hệ tọa độ quay.

(2) Hàm Lagrange có thể viết như sau

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) - U - V$$

với

$$U = -\frac{1}{2}m(2\omega r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta + \omega^2 r^2\sin^2\theta)\ .$$

Như vậy L có dạng của hàm Lagrange mà hạt phải có nếu hệ toạ độ được tham chiếu là cố định và hạt có thế $U + V$, có nghĩa là cộng thêm với thế phụ thuộc vận tốc U.

(3) Viết hàm Lagrange như sau

$$L = T' - U - V = L' - U\ ,$$

ở đây

$$
\begin{aligned}
T' &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\ , \\
L' &= T' - V
\end{aligned}
$$

là động năng và hàm Lagrange hạt phải có nếu hệ toạ độ được tham chiếu la cố định. Phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

có thể viết như sau

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial U}{\partial q_i} \equiv Q'_i\ .$$

Q'_i là các lực suy rộng phải được đưa ra do yếu tố là hệ tọa độ được quy chiếu là hệ tọa độ quay. Lấy đạo hàm U ta có

$$\begin{aligned}
Q'_r &= 2m\omega r\dot{\varphi}\sin^2\theta + m\omega^2 r\sin^2\theta\ ,\\
Q'_\theta &= 2m\omega r^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta + m\omega^2 r^2\sin\theta\cos\theta\ ,\\
Q'_\varphi &= -2m\omega r\dot{r}\sin^2\theta - 2m\omega r^2\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta\ .
\end{aligned}$$

Các thành phần suy rộng Q'_j của lực $\mathbf{F}'$ được định nghĩa bởi

$$\mathbf{F}'\cdot\delta\mathbf{r} = \sum_j Q'_j\delta q_j\ ,$$

có nghĩa là

$$F_r\delta r + F_\theta r\delta\theta + F_\varphi r\sin\theta\delta\varphi = Q_r\delta r + Q_\theta\delta\theta + Q_\varphi\delta\varphi\ .$$

Do đó

$$\begin{aligned}
F_r &= Q'_r = 2m\omega r\dot{\varphi}\sin^2\theta + m\omega^2 r\sin^2\theta\ ,\\
F_\theta &= \frac{Q'_\theta}{r} = 2m\omega r\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta + m\omega^2 r\sin\theta\cos\theta\ ,\\
F_\varphi &= \frac{Q'_\varphi}{r\sin\theta} = -2m\omega\dot{r}\sin\theta - 2m\omega r\dot{\theta}\cos\theta
\end{aligned}$$

là các thành phần của lực ly tâm và lực Coriolis trong hướng $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$. Lưu ý rằng các số hạng phụ thuộc vận tốc là do lực Coriolis gây ra trong khi các số hạng còn lại do lực ly tâm.

2. CÁC DAO ĐỘNG NHỎ (2028 -2067)

2028

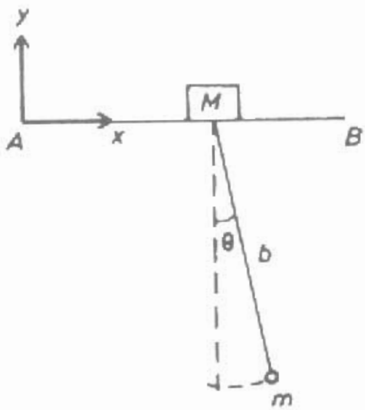
Một khối M bị buộc phải trượt không ma sát trên đường trượt AB như ở hình 2.24. Khối lượng m được nối với M bởi một dây không dãn không khối lượng. (Thực hiện gần đúng góc nhỏ).

(a) Hãy viết hàm Lagrange đối với hệ này.

(b) Hãy tìm toạ độ chuẩn tắc (và mô tả chúng).

(c) Hãy tìm các biểu thức cho toạ độ chuẩn tắc như hàm của thời gian.

(*Wisconsin*)



Hình 2.24

Lời giải:

(a) Sử dụng toạ độ như ở hình 2.24. M và m tương ứng có toạ độ

$$(x, 0), \qquad (x + b\sin\theta, -b\cos\theta)\ .$$

Hàm Lagrange của hệ khi đó là

$$L = T - V = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + b^2\dot{\theta}^2 + 2b\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) + mgb\cos\theta\ .$$

(b) Đối với các dao động nhỏ, θ và $\dot{\theta}$ là những đại lượng nhỏ và ta có hàm Lagrange gần đúng

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + b^2\dot{\theta}^2 + 2b\dot{x}\dot{\theta}) + mgb\left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right)\ .$$

Các phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

khi đó cho $(m + M)\dot{x} + mb\dot{\theta} = C$, một hằng số, $\ddot{x} + b\ddot{\theta} + g\theta = 0$.

Trong biểu thức ở trên, phương trình thứ nhất có thể viết như sau

$$(m+M)\dot{\eta}=C \tag{1}$$

bằng việc đặt

$$\eta = x + \frac{mb\theta}{m+M}\,.$$

Do $(m+M)\ddot{x}+mb\ddot{\theta}=0$, phương trình thứ hai có thể viết như sau

$$\frac{Mb\ddot{\theta}}{m+M}+g\theta=0\,. \tag{2}$$

Hai phương trình chuyển động mới bây giờ không phụ thuộc vào nhau. Do đó η và θ là các toạ độ chuẩn tắc của hệ. Khối tâm của hệ nằm tại khoảng cách $\frac{mb}{m+M}$ từ M dọc theo dây. Do đó η là toạ độ x của khối tâm. Phương trình (1) chứng minh rằng chuyển động ngang của khối tâm là đều. Toạ độ chuẩn tắc kia θ, là góc dây tạo với phương thẳng đứng.

(c) Phương trình (1) có nghiệm

$$\eta=\frac{Ct}{m+M}+D\,,$$

và phương trình (2) có nghiệm

$$\theta = A\cos(\omega t+B)\,,$$

ở đây

$$\omega=\sqrt{\frac{(m+M)g}{Mb}}$$

là tần số góc của dao động nhỏ của dây và A, B, C, D là các hằng số.

2029

Một con lắc đơn giản được gắn vào một cái giá, giá được truyền động theo chiều ngang cùng với thời gian như hình 2.25.

(a) Hãy thiết lập hàm Lagrange đối với hệ theo các toạ độ suy rộng θ và y, ở đây θ là dịch chuyển góc từ cân bằng và $y(t)$ là vị trí nằm ngang của giá treo con lắc.

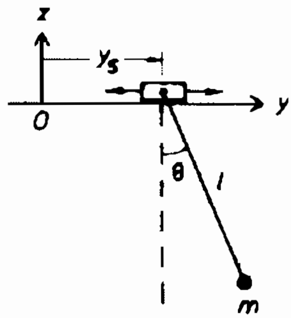
(b) Hãy tìm phương trình chuyển động đối với θ.

(c) Với dịch chuyển góc nhỏ và chuyển động hình sin của giá đỡ.

$$y = y_0 \cos(\omega t) \ .$$

Hãy tìm nghiệm ở trạng thái dừng cho phương trình chuyển động.

(*Wisconsin*)



Hình 2.25

Lời giải:

(a) Khối m có toạ độ

$$(y_s + l\sin\theta, -l\cos\theta)$$

Và vận tốc

$$(\dot{y}_s + l\dot{\theta}\cos\theta, l\dot{\theta}\sin\theta) \ .$$

Do đó hàm Lagrange là

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{y}_s^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{y}_s\dot{\theta}\cos\theta) + mgl\cos\theta \ .$$

(b) Phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

cho

$$l\ddot{\theta} + \ddot{y}_s\cos\theta + g\sin\theta = 0 \ .$$

(c) Với $y_s = y_0\cos(\omega t)$ và θ nhỏ, phương trình trên giản ước thành

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = \frac{y_0}{l}\omega^2\cos(\omega t)$$

với $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Một nghiệm riêng nhận được bằng việc đặt $\theta = A\cos(\omega t)$. Sự thay thế cho ta

$$A = \frac{y_0\omega^2}{l(\omega_0^2 - \omega^2)} \, .$$

Nghiệm tổng quát khi đó là

$$\theta = \frac{y_0\omega^2\cos(\omega t)}{l(\omega_0^2 - \omega^2)} + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \, .$$

Cộng hưởng sẽ xảy ra nếu $\omega_0 \approx \omega$. Chừng nào $\omega \neq \omega_0$, chuyển động của hệ là chuyển động dừng.

2030

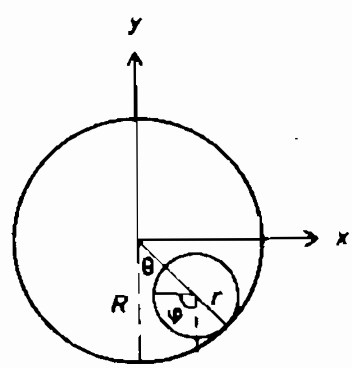
Một hình trụ rắn đồng chất bán kính r và khối m lăn không trượt trên mặt trong của một hình trụ lớn hơn bán kính R đứng yên như ở hình 2.26.

(a) Nếu trụ nhỏ bắt đầu chuyển động từ trạng thái nghỉ từ một góc θ_0 so với phương thẳng đứng, tính lực tổng cộng hưởng xuống nó tác dụng lên trụ ngoài khi nó đi qua điểm thấp nhất?

(b) Hãy xác định phương trình chuyển động của trụ bên trong, có sử dụng các phương pháp Lagrange.

(c) Hãy tìm chu kì của các dao động nhỏ xung quanh vị trí cân bằng bền.

(*Wisconsin*)



Hình 2.26

Lời giải:

Lấy toạ độ như ở hình 2.26. Tâm khối của trụ lăn có toạ độ

$$((R-r)\sin\theta, -(R-r)\cos\theta)$$

và vận tốc

$$((R-r)\dot{\theta}\cos\theta, (R-r)\dot{\theta}\sin\theta)\ .$$

Hình trụ có momen quán tính $\frac{1}{2}mr^2$ và điều kiện của lăn không trượt có nghĩa là

$$(R-r)\theta = r\varphi\ .$$

(a) Ban đầu $\dot{\theta} = 0$ tại $\theta = \theta_0$. Giả thiết rằng trụ có vận tốc v khi lăn qua điểm thấp nhất $\theta = 0$. Bảo toàn năng lượng toàn phần $T + V$ cho ta

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mr^2\dot{\phi}^2 - mg(R-r) = -mg(R-r)\cos\theta_0\ ,$$

Hay, với $r\dot{\varphi} = (R-r)\dot{\theta}$, $v = (R-r)\dot{\theta}$,

$$mv^2 = \frac{4}{3}(R-r)(1-\cos\theta_0)mg\ .$$

Lực do trụ nhỏ tác dụng lên trụ ngoài khi nó đi qua điểm thấp nhất là hướng theo phương thẳng đứng và có giá trị

$$\begin{aligned} mg + m(R-r)\dot{\theta}^2 &= mg + \frac{mv^2}{(R-r)} \\ &= mg + \frac{4}{3}(1-\cos\theta_0)mg \\ &= \frac{1}{3}mg(7-4\cos\theta_0)\ . \end{aligned}$$

(b) Hàm Lagrange của trụ là

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}mr^2\dot{\varphi}^2 + mg(R-r)\cos\theta \\ &= \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 + mg(R-r)\cos\theta\ . \end{aligned}$$

Phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$$

suy ra

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{3}\left(\frac{g}{R-r}\right)\sin\theta = 0 .$$

(c) Với dao động nhỏ xung quanh vị trí cân bằng $\theta = 0$, phương trình chuyển động giản ước thành

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{3}\left(\frac{g}{R-r}\right)\theta = 0 .$$

Nó có dạng phương trình cho chuyển động điều hòa đơn giản. Do đó cân bằng là bền và có chu kì

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{6(R-r)}{g}} .$$

2031

Một hạt khối lượng m bị buộc chuyển động trên một vòng tròn bán kính b. Vòng quay với vận tốc góc không đổi ω quanh một trục trùng với đường kính của vòng.

(a) Hãy thiết lập hàm Lagrange và rút ra các phương trình chuyển động của hạt.

(b) Hãy tìm vận tốc góc tới hạn Ω mà dưới nó đáy của vòng là vị trí cân bằng bền với đối với hạt.

(c) Tìm vị trí cân bằng bền đối với $\omega > \Omega$.

(*Wisconsin*)

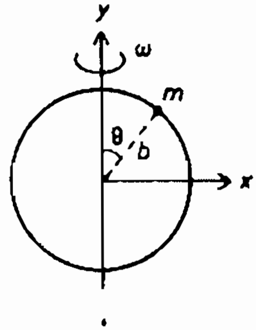
Lời giải:

(a) Sử dụng hệ tọa độ quay gắn với vòng như ở hình 2.27. Khối m có toạ độ $(b\sin\theta, b\cos\theta)$ và vận tốc $(b\dot{\theta}\cos\theta, -b\dot{\theta}\sin\theta)$ quy chiếu về tọa độ quay. Ngoài thế $mgb\cos\theta$ do trọng trực gây ra, thế do lực ly tâm tưởng tượng gây ra $mx\omega^2$ phải được đưa vào. Vì

$$mx\omega^2 = -\frac{\partial U}{\partial x} ,$$

ta có thể lấy

$$U = -\frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = -\frac{1}{2}m\omega^2 b^2 \sin^2\theta .$$



Hình 2.27

Do đó

$$L = T - U - V = \frac{1}{2}mb^2(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2\theta) - mgb\cos\theta\ .$$

Phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

khi đó cho ta

$$b\ddot{\theta} - b\omega^2 \sin\theta\cos\theta - g\sin\theta = 0\ .$$

(b) Tại đáy của vòng dây, $\theta = \pi$. Đặt $\theta = \pi + \alpha$, ở đó α là đại lượng nhỏ. Do

$$\sin\theta = \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha \approx -\alpha\ ,$$
$$\cos\theta = \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \approx -1\ ,$$

phương trình chuyển động trở thành

$$\ddot{\alpha} + \left(\frac{g}{b} - \omega^2\right)\alpha = 0\ .$$

Để α dao động quanh vị trí cân bằng, nghĩa là để cân bằng là bền, ta yêu cầu

$$\frac{g}{b} - \omega^2 > 0, \qquad \text{nghĩa là} \qquad \omega < \sqrt{\frac{g}{b}}\ .$$

Do đó để có cân bằng bền, ω phải nhỏ hơn tần số góc tới hạn $\Omega = \sqrt{\frac{g}{b}}$.

(c) Tại cân bằng, $\ddot{\theta} = 0$ và phương trình chuyển động trở thành

$$b\omega^2 \sin\theta\cos\theta + g\sin\theta = 0\ .$$

Khi xét trường hợp $\theta = 0$ trong (b), ta có thể lấy $\sin\theta \neq 0$ và như vậy phương trình trên cho ta

$$\cos\theta_0 = -\frac{g}{b\omega^2}$$

đối với vị trí cân bằng khác.

Để thử độ ổn định của cân bằng này, đặt $\beta = \theta - \theta_0$, ở đây β là một đại lượng nhỏ. Do

$$\sin\theta = \sin(\theta_0 + \beta) \approx \sin\theta_0 + \beta\cos\theta_0 ,$$
$$\cos\theta = \cos(\theta_0 + \beta) \approx \cos\theta_0 - \beta\sin\theta_0 ,$$

Phương trình chuyển động trở thành

$$b\ddot{\beta} - b\omega^2 \sin\theta_0\cos\theta_0 - b\omega^2(\cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0)\beta - g\sin\theta_0 - g\beta\cos\theta_0 = 0 ,$$

nghĩa là

$$\ddot{\beta} - \omega^2(2\cos^2\theta_0 - 1)\beta - \frac{g}{b}\beta\cos\theta_0 = 0 ,$$

hay, sử dụng giá trị của $\cos\theta_0$,

$$\ddot{\beta} + \left(1 - \frac{g^2}{b^2\omega^2}\right)\beta = 0 .$$

Do đó cân bằng là bền bởi vì khi $\omega > \Omega$, $1 - \frac{g^2}{b^2\omega^2} > 0$.

2032

Xét chuyển động dọc của một hệ gồm các khối chất và lò xo như ở hình 2.28, với $M > m$.

(a) Tần số kiểu dao động chuẩn tắc của hệ là bao nhiêu?

(b) Nếu khối chất bên trái nhận được một xung P_0 tại $t = 0$, hãy tìm chuyển động của khối chất bên trái như hàm của thời gian.

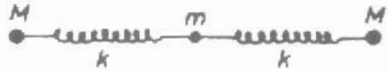
(c) Hoặc là nếu khối chất ở giữa được truyền động một cách hài hòa tại tần số $\omega_0 = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$, thì nó sẽ chuyển động cùng hay lệch pha với chuyển động dẫn động? Giải thích.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Đặt x_1, x_2, x_3 là dịch chuyển của ba khối chất, tính từ trái, khỏi vị trí cân bằng của chúng. Hàm Lagrange của hệ là

$$L = T - V = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_3^2 - \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2}k(x_3 - x_2)^2 .$$



Hình 2.28

Các phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

khi đó cho

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) &= 0\,, \\ m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) + k(x_2 - x_3) &= 0\,, \\ M\ddot{x}_3 + k(x_3 - x_2) &= 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Thử nghiệm kiểu

$$x_i = x_{i0}e^{i\omega t}\,.$$

Sự thay thế cho ta

$$\begin{aligned} (k - \omega^2 M)x_{10} - kx_{20} \qquad\qquad &= 0\,, \\ -kx_{10} + (2k - \omega^2 m)x_{20} - kx_{30} &= 0\,, \\ -kx_{20} + (k - \omega^2 M)x_{30} &= 0\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Để có nghiệm trong đó không phải tất cả các biên độ đều triệt tiêu, ta cần

$$\begin{vmatrix} k - \omega^2 M & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 m & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 M \end{vmatrix} = 0\,,$$

nó có các nghiệm

$$\omega = 0, \qquad \pm\sqrt{\frac{k}{M}}, \qquad \pm\sqrt{\frac{k}{m}\left(1 + \frac{2M}{m}\right)}\,.$$

Từ hệ có ba tần số (góc) kiểu dao động chuẩn tắc

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{M}}, \qquad \omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 + \frac{2M}{m}\right)}\,.$$

(b) Với $\omega = \omega_1$, phương trình (2) cho ta

$$x_{10} = x_{20} = x_{30}, \qquad \text{hay} \qquad x_1 = x_2 = x_3 .$$

Các phương trình (1) khi đó cho ta

$$x_1 = x_2 = x_3 = at + b ,$$

ở đây a, b là các hằng số, cho thấy rằng trong kiểu chuyển động này, ba khối chất tham gia chuyển động tịnh tiến như một vật rắn mà không dao động.

Với $\omega = \omega_2$, phương trình (2) cho ta

$$x_2 = 0, \qquad x_3 = -x_1 ,$$

và phương trình (1) cho ta

$$\ddot{x}_1 + \omega_2^2 x_1 = 0, \qquad \ddot{x}_3 + \omega_2^2 x_3 = 0 .$$

Các nghiệm khi đó là

$$\begin{aligned} x_1 &= A\sin(\omega_2 t) + B\cos(\omega_2 t) , \\ x_2 &= 0 , \\ x_3 &= -x_1 . \end{aligned}$$

Trong kiểu chuyển động này khối chất ở giữa vẫn đứng yên trong khi hai khối chất ở hai đầu dao động điều hòa đúng lệch pha với nhau.

Với $\omega = \omega_3$, ta có, một cách tương tự

$$\begin{aligned} x_1 &= C\sin(\omega_3 t) + D\cos(\omega_3 t) , \\ x_2 &= -\frac{2Mx_1}{m} , \\ x_3 &= x_1 . \end{aligned}$$

Ở đây hai khối chất ngoài dao động với cùng biên độ và pha, trong khi một khối chất bên trong dao động lệch pha với một biên độ khác.

Chuyển động dọc tổng quát của hệ là một tổ hợp tuyến tính nào đó của các kiểu chuyển động chuẩn tắc

$$\begin{aligned} x_1 &= at + b + A\sin(\omega_2 t) + B\cos(\omega_2 t) + C\sin(\omega_3 t) + D\cos(\omega_3 t) , \\ x_2 &= at + b - \frac{2M}{m}[C\sin(\omega_3 t) + D\cos(\omega_3 t)] , \\ x_3 &= at + b - A\sin(\omega_2 t) - B\cos(\omega_2 t) + C\sin(\omega_3 t) + D\cos(\omega_3 t) , \end{aligned}$$

Điều kiện ban đầu tại $t = 0$,

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \qquad \dot{x}_1 = \frac{P_0}{m}, \qquad \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = 0$$

khi đó cho ta

$$a = \frac{P_0}{m + 2M}\,,$$

$$A = \frac{P_0}{2M\omega_2}\,,$$

$$C = \frac{P_0 m}{2M(m + 2M)\omega_3}\,,$$

$$b = B = D = 0\,.$$

Do đó chuyển động của khối chất bên trái được cho bởi

$$x_1 = P_0\left[\frac{t}{m + 2M} + \frac{\sin(\omega_2 t)}{2M\omega_2} + \frac{m\sin(\omega_3 t)}{2M(m + 2M)\omega_3}\right]\,.$$

(c) Giả thiết khối chất ở giữa có chuyển động được cho bởi

$$x_2 = x_{20}\sin(\omega_0 t)\,.$$

Phương trình đầu của (1) bây giờ trở thành

$$\ddot{x}_1 + \omega_2^2 x_1 = \omega_2^2 x_{20}\sin(\omega_0 t)\,.$$

Trong trạng thái dừng x_1 chuyển động với cùng tần số như chuyển động dẫn động

$$x_1 = x_{10}\sin(\omega_0 t)\,.$$

Sự thay thế vào phương trình trên cho ta

$$x_1 = \left(\frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_0^2}\right)x_{20}\sin(\omega_0 t) = \left(\frac{m}{m - 4M}\right)x_{20}\sin(\omega_0 t)\,.$$

Vì $m - 4M < 0$, khối chất bên trái sẽ chuyển động lệch pha với chuyển động dẫn động.

2033

Hai con lắc cùng chiều dài l và cùng khối lượng m được ghép đôi bởi một lò xo không khối lượng với hằng số k như chỉ ra ở hình 2.29. Chiều dài không dãn của lò xo là bằng khoảng cách giữa hai điểm treo.

(a) Hãy thiết lập hàm Lagrange chính xác theo các toạ độ và vận tốc suy rộng thích hợp.

(b) Hãy tìm toạ độ và tần số chuẩn tắc của các dao động nhỏ quanh vị trí cân bằng.

(c) Giả thiết rằng ban đầu hai khối chất ở trạng thái nghỉ. Một lực xung tạo nên vận tốc ngang v hướng về phía phải sang khối chất ở bên trái. Tìm chuyển động của hệ theo các toạ độ chuẩn tắc.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Giả sử các khối chất bị buộc chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng. Đặt khoảng cách giữa hai điểm treo là d, chúng cũng là chiều dài không dãn của lò xo, và sử dụng toạ độ Descartes như ở hình 2.29. Các khối chất có toạ độ

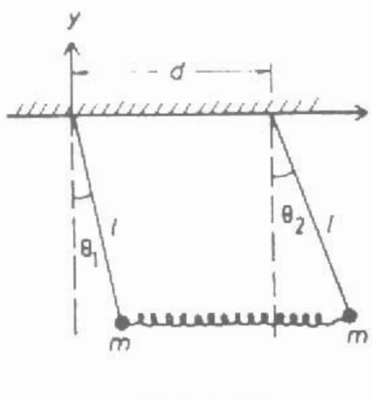
$$(l\sin\theta_1, -l\cos\theta_1), \qquad (d + l\sin\theta_2, -l\cos\theta_2)$$

và các vận tốc tương ứng

$$(l\dot{\theta}_1\cos\theta_1, l\dot{\theta}_1\sin\theta_1), \qquad (l\dot{\theta}_2\cos\theta_2, l\dot{\theta}_2\sin\theta_2).$$

Chiều dài của lò xo là khoảng cách giữa hai khối chất

$$\sqrt{(d + l\sin\theta_2 - l\sin\theta_1)^2 + (l\cos\theta_2 - l\cos\theta_1)^2}\,.$$



Hình 2.29

Do đó hàm Lagrange của hệ là

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + mgl(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

$$- \frac{1}{2}k\left(\sqrt{d^2 + 2dl(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) + 2l^2 - 2l^2\cos(\theta_2 - \theta_1)} - d\right)^2 .$$

(b) Do

$$-\frac{\partial L}{\partial \theta_1}$$

$$= mgl\sin\theta_1 - k\left(\sqrt{d^2 + 2dl(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) + 2l^2 - 2l^2\cos(\theta_2 - \theta_1)} - d\right)$$

$$\times \frac{dl\cos\theta_1 + l^2\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sqrt{d^2 + 2dl(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) + 2l^2 - 2l^2\cos(\theta_2 - \theta_1)}}$$

$$\approx mgl\theta_1 - kl\left[\sqrt{d^2 + 2dl(\theta_2 - \theta_1)} - d\right] \times \frac{d + l(\theta_2 - \theta_1)}{\sqrt{d^2 + 2dl(\theta_2 - \theta_1)}}$$

$$\approx mgl\theta_1 - kl\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2l(\theta_2 - \theta_1)}{d}}}\right)[d + l(\theta_2 - \theta_1)]$$

$$\approx mgl\theta_1 - kl\left[\frac{l(\theta_2 - \theta_1)}{d}\right][d + l(\theta_2 - \theta_1)]$$

$$\approx mgl\theta_1 - kl^2(\theta_2 - \theta_1) ,$$

bỏ qua các số hạng có θ_1, θ_2 bậc hai và bậc cao hơn, chúng là những đại lượng nhỏ. Tương tự

$$-\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = mgl\theta_2 + kl^2(\theta_2 - \theta_1) .$$

Như vậy các phương trình chuyển động đối với dao động nhỏ là

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{g\theta_1}{l} - \frac{k(\theta_2 - \theta_1)}{m} = 0 ,$$

$$\ddot{\theta}_2 + \frac{g\theta_2}{l} + \frac{k(\theta_2 - \theta_1)}{m} = 0 .$$

Đặt

$$\eta = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2), \qquad \xi = \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)$$

và phương trình trên cho ta

$$\ddot{\eta} + \frac{g\eta}{l} = 0 ,$$

$$\ddot{\xi} + \left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}\right)\xi = 0 .$$

Những điều trên chỉ ra rằng η và ξ là các toạ độ chuẩn tắc với các tần số (góc) chuẩn tắc tương ứng

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}} .$$

(c) Nghiệm của phương trình chuyển động trong toạ độ chuẩn tắc là

$$\eta = A\cos(\omega_1 t) + B\sin(\omega_1 t) ,$$

$$\xi = C\cos(\omega_2 t) + D\sin(\omega_2 t) .$$

Tại $t = 0$, $\theta_1 = \theta_2 = 0$, cho $\eta = \xi = 0$; và $\dot{\theta}_1 = \frac{v}{l}$, $\dot{\theta}_2 = 0$, cho $\dot{\eta} = \dot{\xi} = \frac{v}{2l}$. Như vậy

$$A = C = 0, \qquad B = \frac{v}{2l\omega_1}, \qquad D = \frac{v}{2l\omega_2} ,$$

và

$$\eta = \frac{v\sin(\omega_1 t)}{2l\omega_1}, \qquad \xi = \frac{v\sin(\omega_2 t)}{2l\omega_2} ,$$

cho chuyển động của hệ theo toạ độ chuẩn tắc.

2034

Bốn khối chất như nhau được nối bởi bốn lò xo như nhau và bị buộc chuyển động theo vòng tròn không ma sát bán kính b như ở hình 2.30.

(a) Có bao nhiêu kiểu chuẩn tắc của các dao động nhỏ?

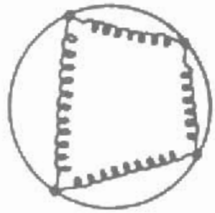
(b) Tần số của các dao động nhỏ là bao nhiêu?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Lấy các chiều dài của cung s_1, s_2, s_3, và s_4 của bốn khối chất từ các vị trí cân bằng ban đầu của chúng như các toạ độ suy rộng. Động năng của hệ là

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{s}_1^2 + \dot{s}_2^2 + \dot{s}_3^2 + \dot{s}_4^2) .$$



Hình 2.30

Vì các lò xo là như nhau, tại vị trí cân bằng bốn khối chất được định vị một cách đối xứng trên vòng tròn, có nghĩa là cung giữa hai khối chất lân cận, thứ n và $(n+1)$,), trương một góc $\frac{\pi}{2}$ tại tâm. Khi các khối chất lân cận dịch chuyển khỏi vị trí cân bằng, lò xo nối chúng sẽ dãn ra một đoạn bằng

$$2b\sin\left[\frac{1}{2}\left(\frac{s_{n+1}}{b}-\frac{s_n}{b}+\frac{\pi}{2}\right)\right]-2b\sin\frac{\pi}{4}\approx\frac{1}{\sqrt{2}}(s_{n+1}-s_n)\,,$$

đối với các dao động nhỏ mà đối chứng s_n là nhỏ.

Như vậy thế năng là

$$V=\frac{k}{2}(s_1^2+s_2^2+s_3^2+s_4^2-s_1s_2-s_2s_3-s_3s_4-s_4s_1)\,.$$

Hệ có bốn bậc tự do và vì vậy có bốn kiểu dao động chuẩn tắc.

(b) Các ma trận T và V là

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0\\ 0 & m & 0 & 0\\ 0 & 0 & m & 0\\ 0 & 0 & 0 & m\end{pmatrix},\qquad \mathbf{V}=\begin{pmatrix} k & -\frac{k}{2} & 0 & -\frac{k}{2}\\ -\frac{k}{2} & k & -\frac{k}{2} & 0\\ 0 & -\frac{k}{2} & k & -\frac{k}{2}\\ -\frac{k}{2} & 0 & -\frac{k}{2} & k\end{pmatrix},$$

do vậy phương trình đặc trưng là

$$|\mathbf{V}-\omega^2\mathbf{T}|=\begin{vmatrix} k-m\omega^2 & -\frac{k}{2} & 0 & -\frac{k}{2}\\ -\frac{k}{2} & k-m\omega^2 & -\frac{k}{2} & 0\\ 0 & -\frac{k}{2} & k-m\omega^2 & -\frac{k}{2}\\ -\frac{k}{2} & 0 & -\frac{k}{2} & k-m\omega^2\end{vmatrix}=0\,,$$

nó có bốn nghiệm $0, 0, \sqrt{\frac{k}{m}}, \sqrt{\frac{2k}{m}}$. Vì vậy tần số góc của các dao động nhỏ là $\sqrt{\frac{k}{m}}$ và $\sqrt{\frac{2k}{m}}$.

2035

Một con lắc đơn dài $4l$ và khối lượng m được treo vào một con lắc đơn khác dài $3l$ và khối lượng m. Có thể làm cho hệ này thực hiện các dao động nhỏ quanh vị trí cân bằng sao cho một điểm trên con lắc dưới không dịch chuyển ngang. Xác định điểm đó.

(*Wisconsin*)

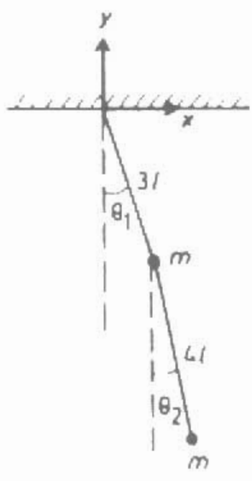
Lời giải:

Sử dụng toạ độ Descartes như hình 2.31. Các khối chất trên và dưới có các toạ độ

$$(3l\sin\theta_1, -3l\cos\theta_1)\ ,$$
$$(3l\sin\theta_1 + 4l\sin\theta_2, -3l\cos\theta_1 - 4l\cos\theta_2)$$

và vận tốc

$$(3l\dot{\theta}_1\cos\theta_1, 3l\dot{\theta}_1\sin\theta_1)\ ,$$
$$(3l\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + 4l\dot{\theta}_2\cos\theta_2, 3l\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + 4l\dot{\theta}_2\sin\theta_2)\ .$$



Hình 2.31

Hàm Lagrange của hệ khi đó là

$$L = T - V = \frac{1}{2}m[18l^2\dot{\theta}_1^2 + 16l^2\dot{\theta}_2^2 + 24l^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)]$$
$$+ mg(6l\cos\theta_1 + 4l\cos\theta_2)\ .$$

Các phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

cho ta

$$3\ddot{\theta}_1 + 2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + 2\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{g \sin\theta_1}{l} = 0\,,$$

hay, chỉ giữ các số hạng bậc một đối với dao động nhỏ

$$3\ddot{\theta}_1 + 2\ddot{\theta}_2 + \frac{g\theta_1}{l} = 0\,,$$

và, tương tự,

$$3\ddot{\theta}_1 + 4\ddot{\theta}_2 + \frac{g\theta_2}{l} = 0\,.$$

Thử $\theta_1 = \theta_{10}e^{i\omega t}$, $\theta_2 = \theta_{20}e^{i\omega t}$. Các phương trình trên cho ta

$$\left(\frac{g}{l} - 3\omega^2\right)\theta_{10} - 2\omega^2\theta_{20} = 0\,,$$

$$-3\omega^2\theta_{10} + \left(\frac{g}{l} - 4\omega^2\right)\theta_{20} = 0\,.$$

Phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} \frac{g}{l} - 3\omega^2 & -2\omega^2 \\ -3\omega^2 & \frac{g}{l} - 4\omega^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{g}{l} - \omega^2\right)\left(\frac{g}{l} - 6\omega^2\right) = 0$$

có các nghiệm

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad \pm\sqrt{\frac{g}{6l}}\,.$$

Do đó có hai tần số của kiểu dao động chuẩn tắc. Với

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad \theta_{20} = -\theta_{10} \quad \text{hay} \quad \theta_2 = -\theta_1;$$

với

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{6l}}, \qquad \theta_{20} = \frac{3}{2}\theta_{10} \quad \text{hay} \quad \theta_2 = \frac{3}{2}\theta_1\,.$$

Các dao động tổng quát là tổ hợp tuyến tính hai kiểu dao động chuẩn tắc.

Một điểm trên con lắc dưới ở khoảng cách ξ từ khối chất trên có toạ độ x là $3l\sin\theta_1 + \xi\sin\theta_2$ và do đó thành phần x của vận tốc

$$\dot{x} = 3l\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + \xi\dot{\theta}_2\cos\theta_2 \approx 3l\dot{\theta}_1 + \xi\dot{\theta}_2\,.$$

Để điểm đó không có dịch chuyển ngang, $\dot{x} = 0$. Với kiểu dao động ω_1, $\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}_1$, điều này đòi hỏi

$$(3l - \xi)\dot{\theta}_1 = 0, \qquad \text{hay} \qquad \xi = 3l\ .$$

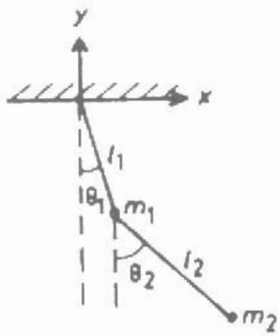
Với kiểu dao động ω_2, $\dot{\theta}_2 = \frac{3}{2}\dot{\theta}_1$, $\dot{x} = 0$ có thể đòi hỏi

$$3\left(l + \frac{\xi}{2}\right)\dot{\theta}_1 = 0\ .$$

Vì ξ là dương điều đó không có khả năng trừ phi $\dot{\theta}_1 = 0$, có nghĩa là không có chuyển động. Vì thế khi hệ chịu các dao động nhỏ với tần số góc $\sqrt{\frac{g}{l}}$, thì một điểm trên con lắc dưới ở khoảng cách $3l$ từ khối chất trên không có dịch chuyển ngang.

2036

(a) Hãy tìm các phương trình chuyển động Lagrange đối với dao động tử kép đồng phẳng như ở hình 2.32 trong giới hạn dao động nhỏ, giả sử các thanh nối hay các dây không có khối lượng. Từ đó tìm các tần số chuẩn tắc của hệ.



Hình 2.32

(b) Bây giờ xét một con lắc đơn khối lượng m, cũng trong giới hạn dao động nhỏ. Giả thiết rằng dây dài l bị làm ngắn lại rất chậm (bằng cách rút nó qua một lỗ không ma sát trên giá treo như ở hình 2.33), để phần thay đổi trên l trong một chu kì là nhỏ. Hỏi biên độ dao động của m thay đổi theo l như thế nào?

(*Wisconsin*)

Hình 2.33

Lời giải:

(a) Toạ độ của m_1, m_2 là

$$(l_1 \sin\theta_1, -l_1 \cos\theta_1) ,$$
$$(l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2, -l_1 \cos\theta_1 - l_2 \cos\theta_2)$$

và vận tốc của chúng tương ứng là

$$(l_1\dot\theta_1 \cos\theta_1, l_1\dot\theta_1 \sin\theta_1) ,$$
$$(l_1\dot\theta_1 \cos\theta_1 + l_2\dot\theta_2 \cos\theta_2, l_1\dot\theta_1 \sin\theta_1 + l_2\dot\theta_2 \sin\theta_2)$$

Hàm Lagrange của hệ khi đó là

$$\begin{aligned} L = T - V = &\ \frac{1}{2} m_1 [l_1^2\dot\theta_1^2 + l_2^2\dot\theta_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] \\ &+ m_1 g l_1 \cos\theta_1 + m_2 g (l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2) \\ \approx &\ \frac{1}{2}(m_1 + m_2) l_1^2 \dot\theta_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_2^2 \dot\theta_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2) \\ &+ (m_1 + m_2) g l_1 \left(1 - \frac{\theta_1^2}{2}\right) + m_2 g l_2 \left(1 - \frac{\theta_2^2}{2}\right) . \end{aligned}$$

Bỏ qua các số hạng bậc cao hơn hai ở các đại lượng nhỏ θ_1, θ_2 trong giới hạn dao động nhỏ. Các phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

khi đó cho

$$\ddot{\theta}_1 + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) \frac{l_2}{l_1} \ddot{\theta}_2 + \frac{g}{l_1} \theta_1 = 0 ,$$

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{l_2}{l_1} \ddot{\theta}_2 + \frac{g}{l_1} \theta_2 = 0 .$$

Đặt $\theta_1 = \theta_{10} e^{i\omega t}$, $\theta_2 = \theta_{20} e^{i\omega t}$ và nhận được phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} \frac{g}{l_1} - \omega^2 & -\frac{m_2 l_2 \omega^2}{(m_1 + m_2) l_1} \\ -\omega^2 & \frac{g - l_2 \omega^2}{l_1} \end{vmatrix} = 0 ,$$

hay

$$\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) l_1 l_2 \omega^4 - g(l_1 + l_2)\omega^2 + g^2 = 0 .$$

Các tần số chuẩn tắc ω_1, ω_2 được cho bởi các nghiệm của phương trình này

$$\left.\begin{matrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \end{matrix}\right\} = \frac{g}{2m_1 l_1 l_2}$$

$$\times \left[(m_1 + m_2)(l_2 + l_2) \pm \sqrt{(m_1 + m_2)^2 (l_1 + l_2)^2 - 4(m_1 + m_2) m_1 l_1 l_2}\right] .$$

(b) Như chỉ ra ở hình 2.33. Lực tác dụng lên m là sức căng f trên dây và trọng lượng mg. Chúng tạo ra lực hướng tâm

$$f - mg\cos\theta = mr\dot{\theta}^2 .$$

Khi dây bị rút ngắn lại một đoạn dr, công thực hiện bởi f là

$$\begin{aligned} dW &= \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = -f dr \\ &\approx -mgdr + \left(\frac{1}{2} mg\theta^2 - mr\dot{\theta}^2\right) dr \\ &= -mgdr + dE , \end{aligned}$$

trong đó dE là phần liên quan đến dao động, đối với dao động góc nhỏ. Vì độ thay đổi r, chiều dài dây, nhỏ trong một chu kì, ta có thể lấy trung bình

$$d\overline{E} = \left(\frac{1}{2} mg\overline{\theta^2} - mr\overline{\dot{\theta}^2}\right) dr .$$

Dao động cũng có thể được coi như dao động điều hòa đơn giản, có nghĩa là

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi) ,$$

trong đó $\omega = \sqrt{\frac{g}{r}}$. Khi đó nếu $T = \frac{2\pi}{\omega}$ là chu kì ta có

$$\overline{\theta^2} = \frac{1}{T}\int_0^T \theta^2 dt = \frac{1}{2}\theta_0^2,$$

$$\overline{\dot\theta^2} = \frac{1}{T}\int_0^T \dot\theta^2 dt = \frac{\omega^2}{T}\int_0^T \theta^2 dt = \omega^2\overline{\theta^2} ,$$

có nghĩa là

$$mr\overline{\dot\theta^2} = mg\overline{\theta^2} .$$

Năng lượng của con lắc là

$$\frac{1}{2}mr^2\dot\theta^2 - mgr\cos\theta \approx -mgr + \frac{1}{2}mr^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}mgr\theta^2 ,$$

do đó

$$\overline{E} = \frac{1}{2}mr^2\overline{\dot\theta^2} + \frac{1}{2}mgr\overline{\theta^2} = mgr\overline{\theta^2} .$$

Từ đó

$$d\overline{E} = \left(\frac{1}{2}\overline{E} - \overline{E}\right)\frac{dr}{r} ,$$

hay

$$\frac{d\overline{E}}{\overline{E}} = -\frac{dr}{2r} .$$

Lấy tích phân ta có

$$\overline{E}r^{\frac{1}{2}} = \text{ hằng số} ,$$

hay

$$\theta_0^4 r^3 = \text{ hằng số} .$$

Đặt các biên độ tại các chiều dài dây r, l tương ứng là θ_r, θ_l tương ứng, khi đó

$$\theta_r^4 = \frac{\theta_l^4 l^3}{r^3} .$$

2037

Một hạt nằm trong thế của một dao động tử điều hòa ba chiều đẳng hướng có tần số góc riêng ω_0. Hãy tìm tần số dao động của nó nếu nó được tích điện và được tác dụng đồng thời bởi điện trường đều và từ trường đều. Hãy thảo luận kết quả trong giới hạn trường yếu và trường mạnh.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Giả sử rằng từ trường đều và điện trường đều, B và E, là vuông góc với nhau và lấy hướng của chúng tương ứng theo trục z và x. Khi đó

$$B\mathbf{k} = \nabla \times \mathbf{A}, \qquad E\mathbf{i} = -\nabla\Phi ,$$

ta có thể lấy thế vectơ và thế vô hướng như

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(-By\mathbf{i} + Bx\mathbf{j}), \qquad \Phi = -Ex .$$

Vì hạt là dao động tử điều hòa đẳng hướng với tần số góc riêng ω_0 và có điện tích e, chẳng hạn, nên thế năng của nó là

$$V = \frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2 + e\Phi - e\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} ,$$

ở đây $\mathbf{r} = (x, y, z)$ là độ chuyển rời của hạt từ gốc tọa độ, trong hệ đơn vị SI. Từ đó hàm Lagrange là

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}m\omega_0^2(x^2 + y^2 + z^2)$$
$$+ eEx + \frac{1}{2}eB(-\dot{x}y + x\dot{y}) .$$

Các phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 .$$

khi đó cho ta

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \frac{eB\dot{y}}{m} - \frac{eE}{m} = 0 ,$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y + \frac{eB\dot{x}}{m} = 0 ,$$

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0 .$$

Phương trình cuối cùng chỉ ra rằng dao động theo hướng z xảy ra với tần số góc riêng ω_0. Khi đặt $x = x' + \frac{eE}{m\omega_0^2}$, hai phương trình đầu trở thành

$$\ddot{x}' + \omega_0^2 x' - \frac{eB\dot{y}}{m} = 0\,,$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y + \frac{eB\dot{x}'}{m} = 0\,.$$

Thử một nghiệm kiểu

$$x' = A'e^{i\omega t}, \qquad y = B'e^{i\omega t}$$

và ta nhận được phương trình ma trận

$$\begin{pmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & -\frac{ieB\omega}{m} \\ \frac{ieB\omega}{m} & \omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix} = 0\,.$$

Phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & -\frac{ieB\omega}{m} \\ \frac{ieB\omega}{m} & \omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \left(\frac{eB\omega}{m}\right)^2 = 0$$

khi đó cho ta

$$\omega^2 \pm \frac{eB\omega}{m} - \omega_0^2 = 0\,,$$

nó có hai nghiệm dương

$$\omega_+ = \frac{1}{2}\left(\frac{eB}{m} + \sqrt{\left(\frac{eB}{m}\right)^2 + 4\omega_0^2}\right)\,,$$

$$\omega_- = \frac{1}{2}\left(-\frac{eB}{m} + \sqrt{\left(\frac{eB}{m}\right)^2 + 4\omega_0^2}\right)\,.$$

Do đó ba tần số góc kiểu dao động chuẩn tắc là ω_0, ω_+ và ω_-. Lưu ý rằng hai kiểu dao động cuối cùng được gây nên bởi chỉ một mình từ trường, trong khi mà điện trường chỉ gây nên dịch chuyển $\frac{eE}{m\omega_0^2}$ dọc theo hướng của nó.

Đối với trường yếu, $\frac{eB}{m} \ll \omega_0$, ta có

$$\omega_+ = \omega_0 + \frac{eB}{2m}, \qquad \omega_- = \omega_0 - \frac{eB}{2m}\,.$$

Đối với trường mạnh, $\frac{eB}{m} \gg \omega_0$, ta có

$$\omega_+ \approx \frac{1}{2}\left[\frac{eB}{m} + \frac{eB}{m}\left(1 + \frac{2m^2\omega_0^2}{e^2B^2}\right)\right]$$

$$= \frac{eB}{m} + \frac{m\omega_0^2}{eB} ,$$

$$\omega_- \approx \frac{1}{2}\left[-\frac{eB}{m} + \frac{eB}{m}\left(1 + \frac{2m^2\omega_0^2}{e^2B^2}\right)\right]$$

$$= \frac{m\omega_0^2}{eB} .$$

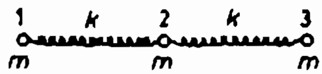
2038

Ba hạt khối lượng bằng nhau m chuyển động không ma sát trong một chiều. Hai trong các hạt được nối mỗi hạt với hạt thứ ba bởi một lò xo không trọng lượng với hằng số k. Hãy tìm các kiểu dao động chuẩn tắc và tần số tương ứng của chúng.

(*CUSPEA*)

Lời giải:

Đánh số các khối chất từ bên trái như hình 2.34 và đặt x_1, x_2, x_3 là dịch chuyển của các hạt tương ứng khỏi vị trí cân bằng của chúng. Hàm Lagrange của hệ là



Hình 2.34

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - \frac{1}{2}k[(x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2] .$$

Các phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

cho ta

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) &= 0\,, \\ m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) + k(x_2 - x_3) &= 0\,, \\ m\ddot{x}_3 + k(x_3 - x_2) &= 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Thử một nghiệm kiểu

$$x_1 = Ae^{i\omega t}, \qquad x_2 = Be^{i\omega t}, \qquad x_3 = Ce^{i\omega t}\,,$$

ta có thể viết hệ phương trình trên như một phương trình ma trận

$$\begin{pmatrix} k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = 0\,. \tag{2}$$

Phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = m\omega^2(k - m\omega^2)(m\omega^2 - 3k) = 0$$

có ba nghiệm không âm

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \omega_3 = \sqrt{\frac{3k}{m}}\,.$$

Đó là các tần số góc kiểu dao động chuẩn tắc của hệ. Các kiểu dao động chuẩn tắc tương ứng là như sau

(i) $\omega_1 = 0$

Phương trình (2) cho $A = B = C$ và như vậy $x_1 = x_2 = x_3$. Phương trình đầu từ (1) khi đó cho

$$\ddot{x}_1 = 0, \qquad \text{hay} \qquad x_1 = at + b\,,$$

trong đó a, b là các hằng số. Do đó trong kiểu dao động này ba hạt tham gia chuyển động tịnh tiến đều cùng nhau như một vật rắn và không xảy ra dao động.

(ii) $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Phương trình (2) cho $B = 0$, $A = -C$. Trong kiểu dao động này, hạt ở giữa giữ nguyên tĩnh tại trong khi các hạt bên ngoài dao động đối xứng so với nó. Các dịch chuyển là

$$x_1 = A\cos(\omega_2 t + \varphi)\ ,$$
$$x_2 = 0\ ,$$
$$x_3 = -A\cos(\omega_2 t + \varphi)\ ,$$

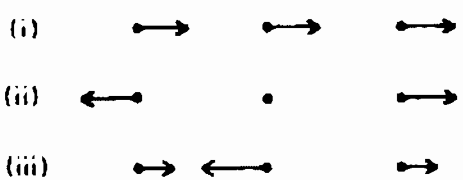
φ là một hằng số.

(iii) $\omega_3 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$

Phương trình (2) cho $B = -2A$, $C = A$. Trong kiểu này hai hạt ngoài dao động cùng biên độ và pha trong khi hạt ở giữa dao động đúng lệch pha với biên độ gấp đôi so với hai hạt kia. Dịch chuyển là

$$x_1 = A\cos(\omega_3 t + \varphi)\ ,$$
$$x_2 = -2A\cos(\omega_3 t + \varphi)\ ,$$
$$x_3 = A\cos(\omega_3 t + \varphi)\ .$$

Ba kiểu dao động chuẩn tắc như chỉ ra ở hình 2.35.

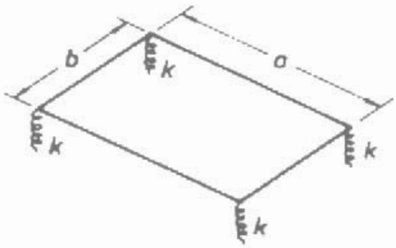


Hình 2.35

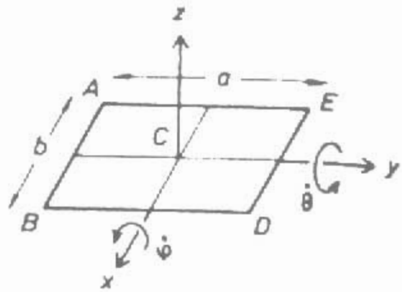
2039

Một tấm hình chữ nhật khối lượng M, dài a rộng b được đỡ ở mỗi góc của nó bằng một lò xo a với hằng số k như hình 2.36. Các lò xo được gắn sao cho chúng chỉ có thể chuyển động theo hướng thẳng đứng. Đối với các biên độ nhỏ, hãy tìm các kiểu dao động chuẩn tắc và tần số của chúng. Hãy mô tả từng kiểu dao động.

(UC, Berkeley)



Hình 2.36



Hình 2.37

Lời giải:

Sử dụng hệ toạ độ Descartes với gốc là khối tâm C của tấm khi tấm ở trong cân bằng, trục z hướng thẳng đứng lên trên, các trục x và y dọc theo các trục đối xứng trong mặt phẳng tấm, và đặt góc quay quanh trục x và y tương ứng là φ, θ, như chỉ ra ở hình 2.37. Nếu z là toạ độ thẳng đứng của C, thì các toạ độ thẳng đứng của bốn góc là

$$z_A = z - \frac{1}{2}a\varphi + \frac{1}{2}b\theta ,$$

$$z_B = z - \frac{1}{2}a\varphi - \frac{1}{2}b\theta ,$$

$$z_D = z + \frac{1}{2}a\varphi - \frac{1}{2}b\theta ,$$

$$z_E = z + \frac{1}{2}a\varphi + \frac{1}{2}b\theta ,$$

Đối với các dao động góc nhỏ.

Vì các toạ độ liên quan đến các vị trí cân bằng, nên hàm Lagrange là

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}M\dot{z}^2 + \frac{1}{24}Ma^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{24}Mb^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(z_A^2 + z_B^2 + z_D^2 + z_E^2) - Mgz \\ &= \frac{1}{2}M\dot{z}^2 + \frac{1}{24}Ma^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{24}Mb^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(4z^2 + a^2\varphi^2 + b^2\theta^2) - Mgz . \end{aligned}$$

Các phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

khi đó cho

$$M\ddot{z} + 4kz + Mg = 0 ,$$

$$\frac{1}{12}M\ddot{\varphi} + k\varphi = 0 ,$$

$$\frac{1}{12}M\ddot{\theta} + k\theta = 0 .$$

Bằng việc đặt $z = z' - \frac{Mg}{4k}$, phương trình đầu tiên có thể viết như sau

$$M\ddot{z}' + 4kz' = 0 .$$

Các phương trình cho thấy rằng các tần số góc kiểu dao động chuẩn tắc là

$$\omega_1 = 2\sqrt{\frac{k}{M}}, \qquad \omega_2 = \omega_3 = 2\sqrt{\frac{3k}{M}} .$$

Nếu ta định nghĩa

$$\xi_1 = \sqrt{M}\, z', \qquad \xi_2 = \sqrt{\frac{M}{12}}\, a\varphi, \qquad \xi_3 = \sqrt{\frac{M}{12}}\, b\theta ,$$

ta có thể viết khi bỏ qua số hạng không đổi trong thế năng

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2 + \dot{\xi}_3^2) ,$$

$$V = \frac{1}{2}(\omega_1^2\xi_1^2 + \omega_2^2\xi_2^2 + \omega_3^2\xi_3^2) .$$

Cả hai biểu thức đều ở dạng toàn phương, cho thấy rằng ξ_1, ξ_2, ξ_3 là các toạ độ kiểu dao động chuẩn tắc.

Kí hiệu các biên độ của z', φ, θ tương ứng bằng $z_0', \varphi_0, \theta_0$, ta nhận được từ các phương trình chuyển động

$$(4k - M\omega^2)z_0 = 0,$$

$$\left(k - \frac{1}{12}M\omega^2\right)\varphi_0 = 0,$$

$$\left(k - \frac{1}{12}M\omega^2\right)\theta_0 = 0 .$$

Có thể thấy rằng nếu $\omega = \omega_1$ khi đó $z_0 \neq 0$, $\varphi_0 = \theta_0 = 0$. Nếu $\omega = \omega_2$ hay ω_3, khi đó $z_0 = 0$, và một hay cả hai giá trị của φ_0, θ_0 là khác 0.

2040

Một hạt chuyển động không ma sát bên trong vách của một bình đối xứng được cho bởi

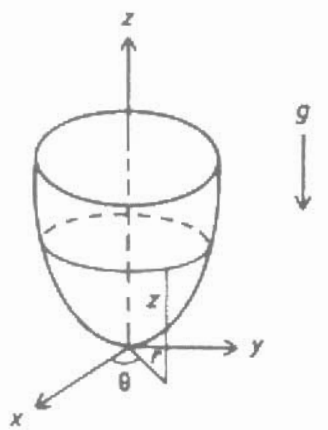
$$z = \frac{1}{2}b(x^2 + y^2) ,$$

ở đây b là một hằng số và z là ở phương thẳng đứng, như ở hình 2.38.

(a) Hạt chuyển động theo quỹ đạo tròn tại độ cao $z = z_0$. Hãy tìm năng lượng và momen xung lượng của nó theo số hạng z_0, b, g (gia tốc trọng trường), và khối lượng m của hạt.

(b) Hạt trong quỹ đạo tròn ngang bị hơi ấn xuống dưới. Hãy tìm tần số dao động quanh quỹ đạo không bị nhiễu loạn đối với biên độ dao động rất nhỏ.

(*UC, Berkeley*)



Hình 2.38

Lời giải:

(a) Sử dụng hệ toạ độ như hình 2.38. Vì $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, bình có thể được biểu diễn bởi

$$z = \frac{1}{2}b(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}br^2 .$$

Hàm Lagrange của hạt là

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - mgz \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + b^2r^2\dot{r}^2) - \frac{1}{2}mgbr^2 . \end{aligned}$$

Phương trình Lagrange cho r khi đó cho ta

$$(1+b^2r^2)\ddot{r} - b^2r\dot{r}^2 - r\dot{\theta}^2 + gbr = 0\,. \tag{1}$$

Vì hạt chuyển động bắt buộc theo đường tròn ở độ cao z_0 và bán kính r_0, chẳng hạn, ta có

$$r = r_0, \qquad \dot{r} = \ddot{r} = 0, \qquad z_0 = \frac{1}{2}br_0^2\,,$$

$$\dot{\theta}^2 = gb = \Omega^2, \quad \text{chẳng hạn.}$$

Năng lượng toàn phần của hạt khi đó là

$$T + V = \frac{1}{2}m(r_0^2\Omega^2 + gbr_0^2) = mgbr_0^2 = 2mgz_0\,,$$

và momen xung lượng quanh tâm đường tròn là

$$J = mr \cdot r\dot{\theta} = mr_0^2\Omega = 2mz_0\sqrt{\frac{g}{b}}\,.$$

(b) Đối với chuyển động bị nhiễu loạn, đặt $r = r_0 + \rho$ ở đây $\rho \ll r_0$, phương trình Lagrange với θ chỉ ra rằng momen xung lượng $mr^2\dot{\theta}$ được bảo toàn. Do đó

$$r\dot{\theta}^2 = \frac{r^4\dot{\theta}^2}{r^3} = \frac{r_0^4\Omega^2}{r^3} = \frac{r_0^4gb}{r^3}\,,$$

và phương trình (1) trở thành

$$(1 + b^2r_0^2)\ddot{\rho} + 4gb\rho = 0$$

bằng việc bỏ qua các số hạng bậc cao hơn bậc một trong các đại lượng nhỏ $\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}$. Tần số góc của các dao động biên độ nhỏ quanh r_0 vì vậy là

$$\omega = \sqrt{\frac{4gb}{1 + b^2r_0^2}} = 2\sqrt{\frac{gb}{1 + 2bz_0}}\,.$$

2041

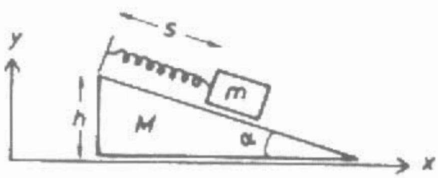
Một khối nhỏ có khối lượng m được gắn với một cái nêm khối lượng M bằng một lò xo có hằng số đàn hồi k. Mặt nghiêng không ma sát của nêm tạo góc nghiêng với phương ngang là α. Nêm có thể tự do trượt trên bề mặt ngang không ma sát, như ở hình 2.39.

(a) Cho chiều dài chùng của lò xo là d, hãy tìm giá trị s_0 khi cả khối và nêm đều ở trạng thái nghỉ.

(b) Hãy tìm hàm Lagrange cho hệ như là hàm của toạ độ x của nêm và chiều dài của lò xo s. Hãy viết phương trình chuyển động.

(c) Tìm tần số dao động riêng?

(*UC, Berkeley*)



Hình 2.39

Lời giải:

(a) Khi khối nhỏ ở trong cân bằng, tổng các lực song song với mặt nghiêng là 0

$$mg\sin\alpha - k(s_0 - d) = 0 ,$$

suy ra

$$s_0 = \frac{mg\sin\alpha}{k} + d .$$

(b) Đặt chiều cao của nêm là h. Sử dụng hệ toạ độ như hình 2.39 và đặt toạ độ ngang của bên trái nêm là x. Khi đó khối m sẽ có toạ độ

$$(x + s\cos\alpha, h - s\sin\alpha) .$$

Hàm Lagrange của hệ khi đó là

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{x} + \dot{s}\cos\alpha)^2 + (\dot{s}\sin\alpha)^2] \\ &\quad - \frac{1}{2}k(s - d)^2 - mg(h - s\sin\alpha) \\ &= \frac{1}{2}(m + M)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + m\dot{x}\dot{s}\cos\alpha - \frac{1}{2}k(s - d)^2 - mg(h - s\sin\alpha) . \end{aligned}$$

Các phương trình Lagrange khi đó cho các phương trình chuyển động

$$(m+M)\ddot{x} + m\ddot{s}\cos\alpha = 0 ,$$
$$m\ddot{x}\cos\alpha + m\ddot{s} + ks - (kd + mg\sin\alpha) = 0 .$$

(c) Khi đặt

$$s = s' + \frac{kd + mg\sin\alpha}{k} ,$$

ta có thể viết các phương trình trên như sau

$$(m+M)\ddot{x} + m\ddot{s}'\cos\alpha = 0 ,$$
$$m\ddot{x}\cos\alpha + m\ddot{s}' + ks' = 0 .$$

Xét nghiệm dạng

$$x = Ae^{i\omega t}, \qquad s' = Be^{i\omega t} ,$$

các phương trình trên cho phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} -(m+M)\omega^2 & -m\omega^2\cos\alpha \\ -m\omega^2\cos\alpha & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 ,$$

suy ra

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k(m+M)}{m(M + m\sin^2\alpha)}} .$$

Vì chuyển động liên quan đến ω_1 không phải là dao động mà như toàn bộ tịnh tiến dọc trục x, nên chỉ có một tần số dao động riêng ω_2.

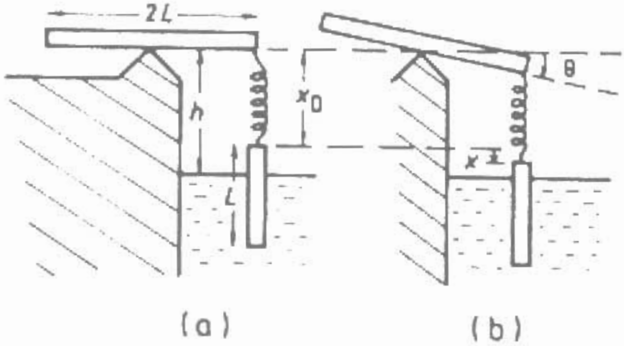
2042

Một phao đồng chất có chiều dài L, điện tích tiết diện A và khối lượng M nổi thẳng đứng trên, trong nước ($\rho = 1,0$) và được gắn bằng một lò xo có hệ số đàn hồi K với một thanh đồng chất có trục quay cố định tại tâm như trên hình 2.40(a). Thanh có cùng khối lượng nhưng chiều dài gấp đôi so với phao. Phao chỉ có thể chuyển động theo phương thẳng đứng và chiều dài tự nhiên của lò xo chọn sao cho tại vị trí cân bằng thanh nằm ngang.

(a) Tìm các kiểu dao động chuẩn tắc (tần số và tỉ số các dịch chuyển) đối với các dịch chuyển nhỏ của thanh.

(b) Nhận xét về ý nghĩa vật lý của các kiểu dao động chuẩn tắc trong giới hạn lò xo rất cứng.

(UC, Berkeley)



Hình 2.40

Lời giải:

Sử dụng hệ tọa độ như trên hình vẽ 2.40(b) với x là độ dịch chuyển của đầu bên trên của phao thẳng đứng khỏi vị trí cân bằng (chiều hướng xuống dưới là chiều dương), và θ là góc quay của thanh. Tại vị trí cân bằng (hình 2.40(a)), lò xo có chiều dài tự nhiên x_0 và không tác dụng lực nào lên phao. Với $\rho = 1$ ta có

$$Mg = [L - (h - x_0)]Ag \, .$$

Khi thanh quay một góc θ (hình 2.40(b)) lò xo dài ra một đoạn $x - L\theta$ và lực đẩy lên trên của nước là

$$-[L - (h - x_0 - x)]Ag = -\frac{\partial V_t}{\partial x} \, ,$$

suy ra

$$\begin{aligned} V_t &= Ag \int_0^x \left\{ [L - (h - x_0)] + x' \right\} dx' \\ &= [L - (h - x_0)]Agx + \frac{1}{2}Agx^2 \\ &= Mgx + \frac{1}{2}Agx^2 \, . \end{aligned}$$

Do đó thế năng toàn phần là

$$\begin{aligned} V &= -Mgx + Mgx + \frac{1}{2}Agx^2 + \frac{1}{2}K(x - L\theta)^2 \\ &= \frac{1}{2}Agx^2 + \frac{1}{2}K(x - L\theta)^2 \, . \end{aligned}$$

Thanh có momen quán tính $\frac{1}{3}ML^2$, do đó động năng toàn phần của hệ là

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{6}ML^2\dot{\theta}^2 .$$

Như vậy hàm Lagrange là

$$L = T - V = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{6}ML^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}Agx^2 - \frac{1}{2}K(x - L\theta)^2 .$$

Các phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

cho

$$M\ddot{x} + Agx + K(x - L\theta) = 0,$$
$$ML\ddot{\theta} - 3K(x - L\theta) = 0 .$$

Thử một nghiệm kiểu $x = De^{i\omega t}$, $\theta = Be^{i\omega t}$ và viết các các phương trình trên có thể như

$$(K + Ag - M\omega^2)D - KLB = 0,$$
$$-3KD + (3KL - ML\omega^2)B = 0 .$$

Khi đó phương trình đặc trưng là

$$\begin{vmatrix} K + Ag - M\omega^2 & -KL \\ -3K & 3KL - ML\omega^2 \end{vmatrix} = 0 ,$$

hay

$$M^2\omega^4 - M(4K + Ag)\omega^2 + 3KAg = 0 .$$

Hai nghiệm dương

$$\omega_\pm = \sqrt{\frac{4K + Ag \pm \sqrt{(4K + Ag)^2 - 12KAg}}{2M}}$$

là hai tần số góc của hai kiểu dao động chuẩn tắc của hệ đối với các dao động nhỏ của thanh.

Các tỉ số của các độ dịch chuyển là

$$\frac{x}{L\theta} = \frac{D}{BL} = \frac{3K - M\omega^2}{3K} = \frac{2K - Ag \mp \sqrt{(4K + Ag)^2 - 12KAg}}{6K}$$

với dấu bên trên là cho ω_+ và dấu bên dưới cho ω_-.

(b) Trong giới hạn lò xo rất cứng, $K \to \infty$. Do $M\ddot{x}$, Agx, $ML\ddot{\theta}$ tất cả đều hữu hạn, nên ta cần có $x - L\theta \to 0$, nghĩa là $x \to L\theta$. Khử các số hạng $K(x - L\theta)$ trong phương trình chuyển động và sử dụng $L\ddot{\theta} \approx \ddot{x}$, ta tìm được

$$4M\ddot{x} + 3Agx = 0$$

và do đó tần số góc của dao động

$$\omega = \sqrt{\frac{3Ag}{4M}} .$$

Tỉ số các dịch chuyển là

$$\frac{x}{L\theta} \approx 1 ,$$

và chúng ở trong cùng pha. Chú ý rằng kết quả này không thể nhận được từ các kết quả trước đó bằng cách cho $K \to \infty$ bởi vì các quan hệ ràng buộc là khác nhau. Về mặt vật lý, ràng buộc $x \approx L\theta$ có nghĩa là chiều dài của lò xo không đổi khi hệ dao động, điều đó được chờ đợi khi lò xo rất cứng.

2043

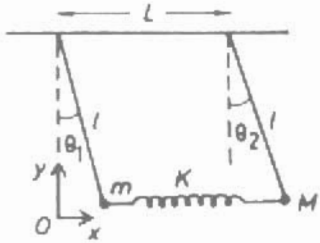
Hai khối lượng không bằng nhau M và m ($M > m$) treo lên góc treo bằng hai sợi dây có cùng chiều dài l. Các khối lượng được gắn với nhau bằng một lò xo có hằng số đàn hồi là K và có chiều dài tự nhiên bằng khoảng cách giữa hai điểm treo như trên hình vẽ 2.41. Tìm các tần số của các kiểu dao động chuẩn tắc đối với các dao động nhỏ dọc theo đường nối giữa hai khối lượng. Tìm quan hệ giữa chuyển động của M và chuyển động của m trong mỗi kiểu dao động. Tìm nghiệm tổng quát nhất.

Bây giờ xét riêng trường hợp tại thời điểm ban đầu $t = 0$, m ở trạng thái nghỉ tại vị trí cân bằng của nó, và M được thả từ trạng thái nghỉ của nó với một ly độ ban đầu dương. Nếu năng lượng toàn phần của hệ là E_0 và lò xo rất yếu, tìm năng lượng cực đại m cần có trong quá trình chuyển động sau đó với giả thiết $\frac{M}{m} = 2$. (Bạn sử dụng giả thiết lò xo yếu ở đâu?)

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

Sử dụng hệ tọa độ cho trên hình 2.41, với gốc O tại vị trí cân bằng của m và các trục x và y tương ứng dọc theo hướng nằm ngang và thẳng đứng và đặt



Hình 2.41

khoảng cách giữa hai điểm treo là L. Các khối lượng m và M lần lượt có tọa độ

$$(l\sin\theta_1, l(1-\cos\theta_1)), \qquad (L + l\sin\theta_2, l(1-\cos\theta_2))$$

và tương ứng vận tốc

$$(l\dot\theta_1\cos\theta_1, l\dot\theta_1\sin\theta_1), \qquad (l\dot\theta_2\cos\theta_2, l\dot\theta_2\sin\theta_2)\ .$$

Hàm Lagrange của hệ là

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}ml^2\dot\theta_1^2 + \frac{1}{2}Ml^2\dot\theta_2^2 - \frac{1}{2}Kl^2(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)^2 \\ &\quad - mgl(1-\cos\theta_1) - Mgl(1-\cos\theta_2) \\ &\approx \frac{1}{2}ml^2\dot\theta_1^2 + \frac{1}{2}Ml^2\dot\theta_2^2 - \frac{1}{2}Kl^2(\theta_2-\theta_1)^2 - \frac{1}{2}gl(m\theta_1^2 + M\theta_2^2) \end{aligned}$$

đối với các dao động nhỏ theo phương nằm ngang.

Các phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Khi đó cho

$$\begin{aligned} ml\ddot\theta_1 + (mg + Kl)\theta_1 - Kl\theta_2 &= 0\ , \\ Ml\ddot\theta_2 + (Mg + Kl)\theta_2 - Kl\theta_1 &= 0\ . \end{aligned}$$

Thử một nghiệm kiểu $\theta_1 = Ae^{i\omega t}$, $\theta_2 = Be^{i\omega t}$ và viết phương trình trên như

$$\begin{pmatrix} mg + Kl - ml\omega^2 & -Kl \\ -Kl & Mg + Kl - Ml\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0\ .$$

Khi đó phương trình đặc trưng là

$$\begin{vmatrix} mg + Kl - ml\omega^2 & -Kl \\ -Kl & Mg + Kl - Ml\omega^2 \end{vmatrix} = 0 ,$$

suy ra các tần số góc của các kiểu dao động chuẩn tắc

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{mMg + Kl(m+M)}{mMl}} .$$

Do

$$\frac{A}{B} = \frac{Mg + Kl - Ml\omega^2}{Kl} ,$$

ta có

$$\frac{A}{B} = 1 \quad \text{đối với} \quad \omega = \omega_1 ,$$

$$\frac{A'}{B'} = -\frac{M}{m} \quad \text{đối với} \quad \omega = \omega_2 .$$

Từ đó, với $\omega = \omega_1$,

$$\theta_1 = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1), \qquad \theta_2 = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) ,$$

với $\omega = \omega_2$,

$$\theta_1 = A'\cos(\omega_2 t + \varphi_2), \qquad \theta_2 = -\frac{m}{M}A'\cos(\omega_2 t + \varphi_2) ,$$

và nghiệm tổng quát nhất là

$$\theta_1 = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A'\cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

$$\theta_2 = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \frac{m}{M}A'\cos(\omega_2 t + \varphi_2) .$$

Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$, cho $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0$, và $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \theta_0$, cho

$$A = \frac{M}{m+M}\theta_0, \qquad A' = -A .$$

Nếu năng lượng toàn phần ban đầu là E_0, thì do

$$E_0 = \frac{1}{2}Kl^2\theta_0^2 + \frac{1}{2}Mgl\theta_0^2 ,$$

do θ_0 dương, ta có

$$\theta_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{(Kl + Mg)l}} \ .$$

Nếu thêm vào đó, $M = 2m$, nghiệm tổng quát rút gọn thành

$$\theta_1 = \frac{2}{3}\theta_0[\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)] \ ,$$

$$\theta_2 = \frac{2}{3}\theta_0[\cos(\omega_1 t) + \frac{1}{2}\cos(\omega_2 t)] \ ,$$

với

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{2mg + 3Kl}{2ml}}, \qquad \theta_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{(2mg + Kl)l}} \ .$$

Năng lượng của m là

$$E_1 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}mgl\theta_1^2 \ .$$

Nếu lò xo rất yếu, ta có lấy $Kl \ll mg$ do đó

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}\left(1 + \frac{3Kl}{2mg}\right)} \approx \sqrt{\frac{g}{l}}\left(1 + \frac{3Kl}{4mg}\right) = \omega_1(1 + \delta) \ ,$$

$$\theta_0 = \sqrt{\frac{E_0}{mgl}}\left(1 - \frac{\delta}{3}\right) \ ,$$

trong đó

$$\delta = \frac{3Kl}{4mg} \ll 1 \ .$$

Khi đó ta có

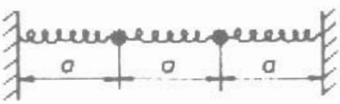
$$E_1 = \frac{2}{9}mgl\theta_0^2\left[1 + (1+\delta)^2\sin^2(\omega_2 t) + \cos^2(\omega_2 t)\right.$$
$$\left. -2(1+\delta)\sin(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t) - 2\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)\right]$$
$$\approx \frac{4}{9}E_0[1 - \cos(\omega_1\delta t)] \ ,$$

bỏ qua δ so với đơn vị. Do đó năng lượng cực đại của m là $\frac{8}{9}E_0$.

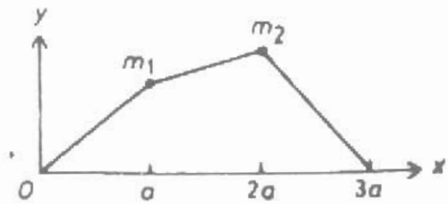
2044

Hai hình cầu nhỏ có khối lượng M được treo giữa giá đỡ cứng như trên hình 2.42. Giả thiết cả hai hạt có thể di chuyển trong mặt phẳng hình vẽ theo cả hai hướng lên xuống và trái phải. Ba lò xo giống nhau và có độ cứng K. Các lò xo đang bị biến dạng: trong trạng thái không biến dạng thì chiều dài của nó là $\frac{a}{2}$. Các lò xo coi như không có khối lượng và đàn hồi tuyệt đối. Giả sử dao động nhỏ quanh vị trí cân bằng, tìm các tần số ứng với bốn mode trực giao của hệ.

(UC, Berkeley)



Hình 2.42



Hình 2.43

Lời giải:

Do chuyển động bị ràng buộc trong mặt phẳng hình vẽ trên hình 2.42, chuyển động theo phương ngang được giải thích như chuyển động dọc dọc theo các lò xo.

Gọi (x_1, y_1) và (x_2, y_2) là dịch chuyển ngang và dọc của các hình cầu, được đánh số từ trái sang, so với vị trí cân bằng tương ứng của chúng. Dùng hệ tọa độ như trên hình 2.43, m_1, m_2 tương ứng có tọa độ $(a + x_1, y_1)$, $(2a + x_2, y_2)$. Lấy cấu hình cân bằng như hình 2.42 là trạng thái có thế bằng không, ta có thế của hệ là

$$\begin{aligned}
V = &\frac{1}{2}K\left[\sqrt{(a+x_1)^2 + y_1^2} - \frac{a}{2}\right]^2 - \frac{1}{2}K\left(\frac{a}{2}\right)^2 \\
&+ \frac{1}{2}K\left[\sqrt{(a + x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} - \frac{a}{2}\right]^2 \\
&\frac{1}{2}K\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}K\left[\sqrt{(a - x_2)^2 + y_2^2} - \frac{a}{2}\right]^2 \\
&- \frac{1}{2}K\left(\frac{a}{2}\right)^2 + Mg(y_1 + y_2)\,.
\end{aligned}$$

Xét

$$\frac{1}{2}K\left[\sqrt{(a+x_1)^2+y_1^2}-\frac{a}{2}\right]^2-\frac{1}{2}K\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}K\left[a^2+x_1^2+2ax_1+y_1^2+\frac{a^2}{4}-a\sqrt{a^2+x_1^2+2ax_1+y_1^2}\right]-\frac{1}{8}Ka^2\,.$$

Do số hạng liên quan tới dấu căn bậc hai có thể viết được như

$$a^2\left(1+\frac{x_1^2+2ax_1+y_1^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx a^2\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2+2ax_1+y_1^2}{a^2}\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{4x_1^2}{a^2}\right]$$

$$=a^2+\frac{1}{2}(x_1^2+2ax_1+y_1^2)-\frac{1}{2}x_1^2$$

chỉ giữ lại các số hạng cho tới bậc hai ở các đại lượng nhỏ x_1, y_1, các biểu thức trên trở thành

$$\frac{1}{2}K\left(x_1^2+ax_1+\frac{1}{2}y_1^2\right)\,.$$

Cùng phép gần đúng được áp dụng cho các số hạng khác. Do đó

$$V\approx\frac{1}{2}K\left[x_1^2+ax_1+\frac{y_1^2}{2}+(x_2-x_1)^2+a(x_2-x_1)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(y_2-y_1)^2+x_2^2-ax_2+\frac{1}{2}y_2^2\right]+Mg(y_1+y_2)$$

$$=\frac{1}{2}K(2x_1^2+2x_2^2+y_1^2+y_2^2-2x_1x_2-y_1y_2)+Mg(y_1+y_2)\,.$$

Hàm Lagrange khi đó là

$$L=T-V$$

$$=\frac{1}{2}M(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2)$$

$$-\frac{1}{2}K(2x_1^2+2x_2^2+y_1^2+y_2^2-2x_1x_2-y_1y_2)-Mg(y_1+y_2)\,.$$

Các phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$$

cho

$$M\ddot{x}_1 + 2Kx_1 - Kx_2 = 0\,,$$

$$M\ddot{x}_2 + 2Kx_2 - Kx_1 = 0\,,$$

$$M\ddot{y}_1 + Ky_1 - \frac{1}{2}Ky_2 + Mg = 0\,,$$

$$M\ddot{y}_2 + Ky_2 - \frac{1}{2}Ky_1 + Mg = 0\,.$$

Có thể thấy rằng các phương trình chia tự nhiên thành hai nhóm, một theo x_1, x_2 và một theo y_1, y_2. Đặt

$$x_i = A_i e^{i\omega t}\,.$$

Khi đó hai phương trình đầu tiên chọn phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} 2K - M\omega^2 & -K \\ -K & 2K - M\omega^2 \end{vmatrix} = (3K - M\omega^2)(K - M\omega^2) = 0\,,$$

suy ra hai tần số góc kiểu dao động chuẩn tắc

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{M}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{3K}{M}}$$

đối với các dao động dọc.

Đối với nhóm hai phương trình thứ hai, đặt

$$y_1' = y_1 + \frac{2Mg}{K}, \qquad y_2' = y_2 + \frac{2Mg}{K}\,.$$

Khi đó chúng có thể được viết thành

$$M\ddot{y}_1' + Ky_1' - \frac{1}{2}Ky_2' = 0\,,$$

$$M\ddot{y}_2' + Ky_2' - \frac{1}{2}Ky_1' = 0\,.$$

Thử một nghiệm kiểu

$$y_i' = B_i e^{i\omega t}\,,$$

ta thu được phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} K - M\omega^2 & -\frac{K}{2} \\ -\frac{K}{2} & K - M\omega^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{3}{2}K - M\omega^2\right)\left(\frac{1}{2}K - M\omega^2\right) = 0\,,$$

nó cho các tần số góc kiểu dao động chuẩn tắc

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{K}{2M}}, \qquad \omega_4 = \sqrt{\frac{3K}{2M}}$$

đối với các dao động thẳng đứng.

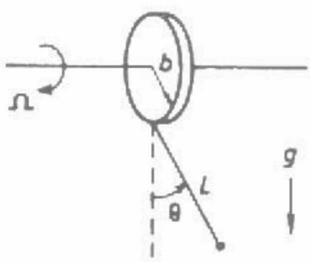
2045

Một con lắc đơn chiều dài L được treo tại mép vành một bánh xe có bán kính b quay trong mặt phẳng thẳng đứng với vận tốc góc không đổi Ω (hình 2.44). Chúng ta xét chuyển động trong đó quả nặng của con lắc chuyển động trong mặt phẳng chứa bánh xe.

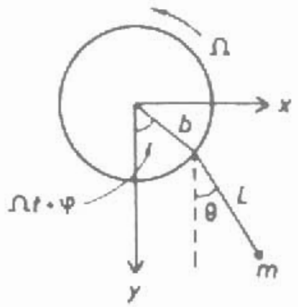
(a) Thiết lập phương trình vi phân chính xác đối với dịch chuyển góc θ của quả nặng. Ngoài ra viết một dạng đơn giản hóa có hiệu lực khi biên độ dao động là rất nhỏ.

(b) Giả sử rằng cả bán kính b và biên độ dao động của quả nặng là rất nhỏ. Đưa ra nghiệm gần đúng của phương trình chuyển động có hiệu lực trong những giả thiết đó.
(Có thể bỏ qua các hiện tượng chuyển tiếp mà sẽ biến mất nếu có một chút tiêu tán.)

(*UC, Berkeley*)



Hình 2.44



Hình 2.45

Lời giải:

(a) Sử dụng hệ tọa độ như trên hình 2.45. Khối lượng m có tọa độ

$$(b\sin(\Omega t + \varphi) + L\sin\theta, b\cos(\Omega t + \varphi) + L\cos\theta)$$

và vận tốc

$$(b\Omega\cos(\Omega t + \varphi) + L\dot{\theta}\cos\theta, -b\Omega\sin(\Omega t + \varphi) - L\dot{\theta}\sin\theta)\ ,$$

trong đó φ là một hằng số.

Hàm Lagrange của m khi đó là

$$\begin{aligned}L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}m[b^2\Omega^2 + L^2\dot{\theta}^2 + 2bL\Omega\dot{\theta}\cos(\theta - \Omega t - \varphi)] \\ &\quad + mg[b\cos(\Omega t + \varphi) + L\cos\theta].\end{aligned}$$

Phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

cho

$$L\ddot{\theta} + b\Omega^2\sin(\theta - \Omega t - \varphi) + g\sin\theta = 0\ .$$

Đối với các dao động có biên độ nhỏ, $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$,

$$\sin(\theta - \Omega t - \varphi) \approx \theta\cos(\Omega t + \varphi) - \sin(\Omega t + \varphi)\ ,$$

và phương trình chuyển động trở thành

$$L\ddot{\theta} + [b\Omega^2\cos(\Omega t + \varphi) + g]\theta - b\Omega^2\sin(\Omega t + \varphi) = 0\ .$$

(b) Đối với b và θ nhỏ, chỉ giữ lại các số hạng tới bậc một của b, θ, $\dot{\theta}$,

$$L\ddot{\theta} + g\theta - b\Omega^2\sin(\Omega t + \varphi) = 0\ .$$

Trong trạng thái ổn định, con lắc sẽ lắc với cùng tần số như với sự quay của bánh xe, nên ta có thể giả thiết

$$\theta = \alpha\cos(\Omega t + \varphi) + \beta\sin(\Omega t + \varphi)\ ,$$

trong đó α, β là các hằng số. Thay vào phương trình chuyển động ta có

$$(-L\Omega^2 + g)[\alpha\cos(\Omega t + \varphi) + \beta\sin(\Omega t + \varphi)] - b\Omega^2\sin(\Omega t + \varphi) = 0\ .$$

Do phương trình này phải đúng cho một thời điểm tùy ý bất kì nên các hệ số của $\cos(\Omega t + \varphi)$ và $\sin(\Omega t + \varphi)$ phải triệt tiêu riêng rẽ

$$\begin{aligned}-\alpha L\Omega^2 + g\alpha &= 0\ , \\ g\beta - \beta L\Omega^2 - b\Omega^2 &= 0\ .\end{aligned}$$

Do Ω cho trước, ta phải có $\alpha = 0$ trong phương trình thứ nhất. Phương trình thứ hai cho

$$\beta = \frac{b\Omega^2}{g - L\Omega^2} .$$

Do đó nghiệm (trạng thái) dừng

$$\theta = \frac{b\Omega^2 \sin(\Omega t + \varphi)}{g - L\Omega^2} .$$

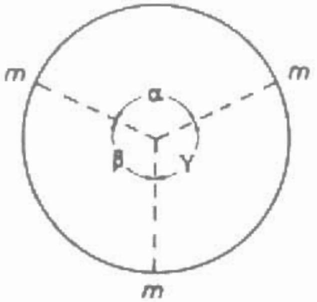
2046

Ba chất điểm như nhau m di chuyển trên một đường tròn bán kính b dưới một lực sinh ra bởi thế năng

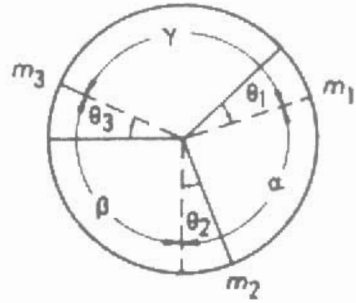
$$V(\alpha, \beta, \gamma) = V_0(e^{-\alpha} + e^{-\beta} + e^{-\gamma}) ,$$

trong đó α, β, γ là các khoảng cách góc giữa ba vật đó, đơn vị là radian (hình 2.46). Khi $\alpha = \beta = \gamma = \frac{2\pi}{3}$, hệ ở vị trí cân bằng. Tìm tần số của các kiểu dao động chuẩn tắc đối với một sự lệch nhỏ khỏi vị trí cân bằng.
(Chú ý rằng α, β, γ không độc lập vì $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$.)

(*UC, Berkeley*)



Hình 2.46



Hình 2.47

Lời giải:

Đặt $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ là dịch chuyển góc của ba khối lượng khỏi vị trí cân bằng như trên hình 2.47. Ta có

$$\alpha = \frac{2\pi}{3} + \theta_2 - \theta_1 \ ,$$

$$\beta = \frac{2\pi}{3} + \theta_3 - \theta_2 \ ,$$

$$\gamma = \frac{2\pi}{3} + \theta_1 - \theta_3 \ .$$

Do

$$e^{-x} \approx 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \cdots \ ,$$

ta có thể viết thế năng thành

$$\begin{aligned} V &= V_0 e^{-\frac{2\pi}{3}} [e^{-(\theta_2-\theta_1)} + e^{-(\theta_3-\theta_2)} + e^{-(\theta_1-\theta_3)}] \\ &\approx V_0 e^{-\frac{2\pi}{3}} \Big[3 - (\theta_2 - \theta_1) - (\theta_3 - \theta_2) - (\theta_1 - \theta_3) \\ &\qquad + \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{1}{2}(\theta_3 - \theta_2)^2 + \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_3)^2 \Big] \\ &= A(3 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 - \theta_1\theta_2 - \theta_2\theta_3 - \theta_3\theta_1) \end{aligned}$$

với $A = V_0 \exp\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, giữ lại các số hạng tới bậc hai ở các đại lượng nhỏ $\theta_1, \theta_2, \theta_3$.

Do vận tốc là $b\dot{\theta}_1, b\dot{\theta}_2, b\dot{\theta}_3$, động năng là

$$T = \frac{1}{2} B(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2)$$

với $B = mb^2$.

Hàm Lagrange do đó là

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= B(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2) - A(3 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 - \theta_1\theta_2 - \theta_2\theta_3 - \theta_3\theta_1) \ . \end{aligned}$$

Các phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Khi đó cho

$$B\ddot{\theta}_1 + A(2\theta_1 - \theta_2 - \theta_3) = 0 \ ,$$

$$B\ddot{\theta}_2 + A(2\theta_2 - \theta_3 - \theta_1) = 0 \ ,$$

$$B\ddot{\theta}_3 + A(2\theta_3 - \theta_1 - \theta_2) = 0 \ .$$

Thử một nghiệm dạng $\theta_i = C_i e^{i\omega t}$, ta tìm được phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} 2A - B\omega^2 & -A & -A \\ -A & 2A - B\omega^2 & -A \\ -A & -A & 2A - B\omega^2 \end{vmatrix} = 0\,,$$

hay, sau một vài biến đổi số học

$$\begin{vmatrix} 0 & -2A & A - B\omega^2 \\ 0 & 2A - B\omega^2 & -A \\ -3A + B\omega^2 & -A & 2A - B\omega^2 \end{vmatrix} \doteq B\omega^2(-3A + B\omega^2)^2 = 0\,.$$

Do đó các tần số góc của kiểu dao động chuẩn tắc là

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = \omega_3 = \sqrt{\frac{3A}{B}} = \sqrt{\frac{3V_0 \exp\left(\frac{-2\pi}{3}\right)}{mb^2}}\,.$$

Chú ý rằng ω_1 không sinh ra dao động, trong trường hợp này các phương trình chuyển động cho $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$ và cả hệ quay với một vận tốc góc không đổi. Hai kiểu dao động chuẩn tắc kia là suy biến và chỉ có một tần số kiểu dao động chuẩn tắc

$$\frac{1}{b}\sqrt{\frac{3V_0}{m}} \exp\left(-\frac{\pi}{3}\right)\,.$$

2047

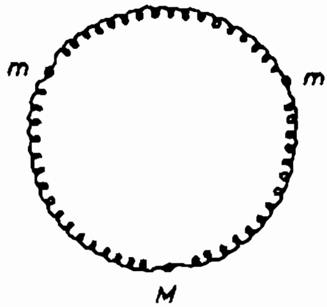
Ba hạt điểm trong đó hai có khối lượng m và một hạt có khối lượng M, bị ràng buộc sao cho nằm trên một đường tròn nằm ngang bán kính r. Chúng được liên kết với nhau bằng ba lò xo có cùng hằng số đàn hồi K, và lò xo uốn dọc theo cung đường tròn. Tại trạng thái nghỉ, chiều dài của ba lò xo bằng nhau (hình 2.48). Giả sử chuyển động kéo dãn các lò xo chỉ một lượng nhỏ so với độ dài cân bằng $(2\pi r/3)$,

(a) mô tả định tính các kiểu dao động điều hòa đơn giản theo thời gian (các kiểu chuẩn tắc);

(b) tìm tập hợp chính xác các tọa độ chuẩn tắc, mỗi tọa độ tương ứng với một kiểu dao động đó.

(c) tìm tần số của mỗi kiểu dao động.

(UC, Berkeley)



Hình 2.48

Lời giải:

(a) Do hệ không chịu tác dụng của momen quay bên ngoài, nên momen động lượng của hệ được bảo toàn. Như vậy có nghĩa là có một kiểu dao động chuẩn tắc trong đó hệ như một khối quay. Như vậy chỉ có hai bậc tự do cho các dao động. Gọi $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ lần lượt là dịch chuyển góc của m, M, m khỏi vị trí cân bằng của chúng và gọi biên độ của chúng là c_1, c_2, c_3. Khi xét dao động của các khối lượng so với vị trí cân bằng của chúng, ta có thể coi momen động lượng toàn phần của hệ bằng không. Khi đó hai kiểu dao động chuẩn tắc tương ứng với

$$c_2 = 0, \qquad c_1 = -c_3 \qquad \text{và} \qquad c_1 = c_3 = -\frac{Mc_2}{2m}\,.$$

(b) Gọi chiều dài tự nhiên của mỗi lò xo là a và kí hiệu chiều dài của chúng tại vị trí cân bằng là b, có nghĩa là

$$b = \frac{2\pi r}{3}\,.$$

Hàm Lagrange của hệ là

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}mr^2(\dot\theta_1^2 + \dot\theta_3^2) + \frac{1}{2}Mr^2\dot\theta_2^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}K[(b + r\theta_2 - r\theta_1 - a)^2 + (b + r\theta_3 - r\theta_2 - a)^2 + (b + r\theta_1 - r\theta_3 - a)^2]. \end{aligned}$$

Các phương trình Lagrange là

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

khi đó cho hệ phương trình chuyển động vi phân

$$m\ddot{\theta}_1 + K(2\theta_1 - \theta_2 - \theta_3) = 0 ,$$
$$M\ddot{\theta}_2 + K(2\theta_2 - \theta_3 - \theta_1) = 0 ,$$
$$m\ddot{\theta}_3 + K(2\theta_3 - \theta_1 - \theta_2) = 0 .$$

Cộng vế với vế suy ra

$$m\ddot{\theta}_1 + M\ddot{\theta}_2 + m\ddot{\theta}_3 = 0 ,$$

và phương trình thứ nhất và phương trình thứ ba cho

$$m(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_3) + 3K(\theta_1 - \theta_3) = 0 .$$

Các phương trình này có thể viết như sau

$$m\ddot{\xi} = 0 , \tag{1}$$
$$m\ddot{\eta} + 3K\eta = 0 \tag{2}$$

nếu ta đặt

$$\xi = \theta_1 + \frac{M\theta_2}{m} + \theta_3 ,$$
$$\eta = \theta_1 - \theta_3 .$$

Do đó ξ và η là các tọa độ kiểu dao động chuẩn tắc của hệ.

Phương trình (1) cho thấy $\omega_1 = 0$. Do đó tương ứng với kiểu này, trong đó hệ quay như một khối và không có dao động.

Phương trình (2) cho thấy

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3K}{m}} .$$

Để tìm tọa độ chuẩn tắc thứ ba, ta chọn phép biến đổi tọa độ

$$q_1 = \theta_1, \qquad q_2 = \theta_2\sqrt{\frac{M}{m}}, \qquad q_3 = \theta_3$$

để cho động năng là tổng của các bình phương

$$T = \frac{1}{2}mr^2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) .$$

q_1, q_2, q_3 giống như tọa độ Descartes. Phép giữa ba tọa độ chuẩn tắc và ba tọa độ "Descartes" q_1, q_2, q_3 phải là tuyến tính. Ta đã có

$$\xi = q_1 + q_2\sqrt{\frac{M}{m}} + q_3, \qquad \eta = q_1 - q_3 .$$

Giả thiết tọa độ chuẩn tắc thứ ba là

$$\zeta = Aq_1 + Bq_2 + Cq_3 .$$

Nó phải vuông góc với các trục ξ, η. Giải dọc theo các trục q_i ta có

$$\boldsymbol{\xi} = \left(1, \sqrt{\frac{M}{m}}, 1\right), \qquad \boldsymbol{\eta} = (1, 0, -1), \qquad \boldsymbol{\zeta} = (A, B, C) .$$

Tính trực giao có nghĩa là

$$\boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{\xi} = A + B\sqrt{\frac{M}{m}} + C = 0 ,$$
$$\boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{\eta} = A - C = 0 ,$$

suy ra $A = C$, $B = -2A\sqrt{\frac{m}{M}}$. Vì một tọa độ chuẩn tắc vẫn giữ nguyên như thế sau khi nhân nó với một hằng số khác không, chúng ta có thể đặt $A = 1$, khi đó

$$\zeta = q_1 - 2q_2\sqrt{\frac{m}{M}} + q_3 = \theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3 .$$

Các phương trình chuyển động khi đó cho ta

$$\ddot{\zeta} + \left(\frac{(2m + M)K}{mM}\right)\zeta = 0 ,$$

dẫn tới

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{(2m + M)K}{mM}} .$$

(c) $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ là các tần số góc kiểu chuẩn tắc tương ứng với lần lượt ba tọa độ chuẩn tắc ξ, η, ζ.

2048

Một vòng có khối lượng M và bán kính R được đỡ bởi một chốt quay tại một điểm trên vòng đó, vòng có thể quay quanh điểm đó trong mặt phẳng thẳng đứng riêng của nó. Một hạt khối lượng m trượt không ma sát trên đường tròn (xem hình 2.49).

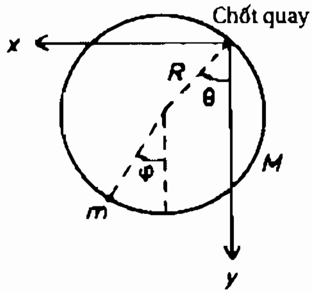
(a) Tìm hàm Lagrange của hệ.

(b) Tìm các phương trình chuyển động.

(c) Mô tả các kiểu dao động chuẩn tắc trong các giới hạn $m \gg M$ và $m \ll M$.

(d) Tìm tần số của các kiểu chuẩn tắc của các dao động nhỏ đối với m và M tổng quát.

(UC, Berkeley)



Hình 2.49

Lời giải:

(a) Dùng hệ tọa độ như trên hình 2.49. Khối lượng m và khối tâm của vòng có tọa độ

$$(R\sin\theta + R\sin\varphi, R\cos\theta + R\cos\varphi), \qquad (R\sin\theta, R\cos\theta)$$

và tương ứng, vận tốc

$$(R\dot\theta\cos\theta + R\dot\varphi\cos\varphi, -R\dot\theta\sin\theta - R\dot\varphi\sin\varphi), \qquad (R\dot\theta\cos\theta, -R\dot\theta\sin\theta).$$

Vòng tròn có momen quán tính $2MR^2$ đối với chốt quay. Nên hàm Lagrange của hệ là

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= MR^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}mR^2[\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 + 2\dot\theta\dot\varphi\cos(\theta - \varphi)] \\ &\quad + (M + m)gR\cos\theta + mgR\cos\varphi \,, \end{aligned}$$

lấy chốt quay như mức chuẩn của thế năng.

(b) Các phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

cho các phương trình chuyển động

$$(2M + m)R\ddot{\theta} + mR\ddot{\varphi}\cos(\theta - \varphi)$$
$$+ mR\dot{\varphi}^2\sin(\theta - \varphi) + (m + M)g\sin\theta = 0,$$
$$R\ddot{\varphi} + R\ddot{\theta}\cos(\theta - \varphi) - R\dot{\theta}^2\sin(\theta - \varphi) + g\sin\varphi = 0\,.$$

(c),(d) Đối với các dao động nhỏ, $\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ là các đại lượng nhỏ nên các phương trình trên rút gọn

$$(2M + m)R\ddot{\theta} + mR\ddot{\varphi} + (M + m)g\theta = 0\,,$$
$$R\ddot{\varphi} + R\ddot{\theta} + g\varphi = 0\,.$$

Thử một nghiệm kiểu $\theta = Ae^{i\omega t}, \varphi = Be^{i\omega t}$ và viết những phương trình đó như một phương trình ma trận

$$\begin{pmatrix} (M + m)g - (2M + m)R\omega^2 & -mR\omega^2 \\ -R\omega^2 & g - R\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0\,.$$

Phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} (m + M)g - (2M + m)R\omega^2 & -mR\omega^2 \\ -R\omega^2 & g - R\omega^2 \end{vmatrix}$$
$$= (2R\omega^2 - g)[MR\omega^2 - (m + M)g] = 0$$

có các nghiệm dương

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{2R}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{(m + M)g}{MR}}\,,$$

chúng là các tần số góc kiểu dao động chuẩn tắc của hệ. Tỉ số các biên độ là

$$\frac{A}{B} = \frac{g - R\omega^2}{R\omega^2} = \begin{cases} 1 & \text{đối với } \omega = \omega_1, \\ -\frac{m}{M+m} & \text{đối với } \omega = \omega_2\,. \end{cases}$$

Nếu $m \gg M$,

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{2R}}, \qquad \frac{A}{B} = 1\,,$$

nghĩa là θ và φ có cùng biên độ và pha;

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{mg}{MR}}, \qquad \frac{A}{B} = -1 ,$$

nghĩa là θ và φ có cùng biên độ nhưng ngược pha.

Nếu $m \ll M$,

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{2R}}, \qquad \frac{A}{B} = 1 ,$$

nghĩa là θ và φ có cùng biên độ và pha như ở trên;

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{R}}, \qquad \frac{A}{B} = -\frac{m}{M} ,$$

nghĩa là θ có biên độ nhỏ hơn rất nhiều so với φ và hai dao động là ngược pha.

2049

Một hạt khối lượng m bị ràng buộc chỉ chuyển động theo một parabon $z = \frac{x^2}{a}$ trong một mặt phẳng nào đó, a là hằng số thứ nguyên chiều dài. Hạt chịu tác dụng của một lực hấp dẫn không đổi theo chiều âm của trục z.

(a) Định nghĩa một tọa độ suy rộng thích hợp cho chuyển động của hạt.

(b) Tìm hàm Lagrange theo tọa độ và vận tốc suy rộng đó.

(c) Vị trí nào là vị trí cân bằng của hạt?

(d) Viết phương trình cho các dao động biên độ nhỏ quanh vị trí cân bằng đó.

(e) Giải các phương trình bạn có trong phần (d).

(Columbia)

Lời giải:

(a) Chọn x là tọa độ suy rộng của hạt.

(b) Hạt có tọa độ $(x, z) = (x, \frac{x^2}{a})$ và vận tốc $(\dot{x}, \dot{y}) = (\dot{x}, \frac{2x\dot{x}}{a})$. Khi đó

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\left(1 + \frac{4x^2}{a^2}\right) ,$$

$$V = mgz = \frac{mgx^2}{a} .$$

Hàm Lagrange do đó là

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\left(1 + \frac{4x^2}{a^2}\right) - \frac{mgx^2}{a}\,.$$

(c) Tọa độ vị trí cân bằng được cho bởi

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2mgx}{a} = 0,$$

hay

$$x = 0\,.$$

Khi đó cũng có $z = 0$. Như vậy tọa độ vị trí cân bằng là $(0, 0)$.

(d) Với các dao động nhỏ xung quanh vị trí cân bằng, $x, \dot{x}$ là các đại lượng nhỏ. Bỏ qua các số hạng bậc cao hơn hai của các đại lượng nhỏ này ta có

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{mgx^2}{a}\,.$$

Phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

khi đó cho

$$\ddot{x} + \frac{2gx}{a} = 0\,.$$

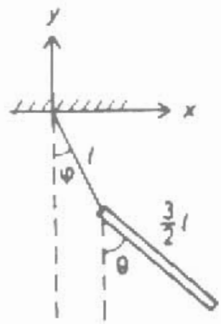
(e) Phương trình này có nghiệm tổng quát

$$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{2g}{a}}\,t + \varepsilon\right),$$

trong đó A, ε là các hằng số tích phân phải xác định qua các điều kiện ban đầu.

2050

Một thanh mảnh đều khối lượng m chiều dài $\frac{3l}{2}$ được treo bằng một sợi dây không khối lượng và chiều dài l. Tìm các tần số chuẩn tắc và các kiểu dao động chuẩn tắc cho những dao động nhỏ trên một mặt phẳng.
(*Columbia*)



Hình 2.50

Lời giải:

Sử dụng hệ tọa độ như trên hình vẽ 2.50. Khối tâm của thanh có tọa độ $(l\sin\varphi + \frac{3}{4}l\sin\theta,\ l\cos\varphi - \frac{3}{4}l\cos\theta)$ và vận tốc $(l\dot\varphi\cos\varphi + \frac{3}{4}l\dot\theta\cos\theta, l\dot\varphi\sin\varphi + \frac{3}{4}l\dot\theta\sin\theta)$. Thanh có momen quán tính là

$$\frac{1}{12}m\left(\frac{3l}{2}\right)^2 = \frac{3}{16}ml^2\,.$$

Do đó hàm Lagrange của nó là

$$\begin{aligned}
L &= T - V \\
&= \frac{1}{2}ml^2\left[\dot\varphi^2 + \frac{9}{16}\dot\theta^2 + \frac{3}{2}\dot\theta\dot\varphi\cos(\theta-\varphi)\right] \\
&\quad + \frac{3}{32}ml^2\dot\theta^2 + mgl\left(\cos\varphi + \frac{3}{4}\cos\theta\right) \\
&\approx \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{3}{4}\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 + \frac{3}{2}\dot\theta\dot\varphi\right) + \frac{7}{4}mgl - \frac{1}{2}mgl\left(\varphi^2 + \frac{3}{4}\theta^2\right)
\end{aligned}$$

đối với các dao động nhỏ, chỉ giữ lại các số hạng tới bậc hai của các đại lượng nhỏ $\theta, \varphi, \dot\theta, \dot\varphi$.

Phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

cho

$$\frac{3}{4}l\ddot{\theta} + l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0 ,$$

$$l\ddot{\theta} + l\ddot{\varphi} + g\theta = 0 .$$

Với một nghiệm dạng

$$\theta = Ae^{i\omega t}, \qquad \varphi = Be^{i\omega t} ,$$

các phương trình trên cho

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{4}l\omega^2 & g - l\omega^2 \\ g - l\omega^2 & -l\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0 .$$

Phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} -\frac{3}{4}l\omega^2 & g - l\omega^2 \\ g - l\omega^2 & -l\omega^2 \end{vmatrix} = 0 ,$$

có nghĩa là

$$l^2\omega^4 - 8lg\omega^2 + 4g^2 = 0 ,$$

có các nghiệm

$$\omega^2 = (4 \pm 2\sqrt{3})\frac{g}{l} = (1 \pm \sqrt{3})^2\frac{g}{l} ,$$

hay

$$\omega = (\sqrt{3} \pm 1)\sqrt{\frac{g}{l}} ,$$

do ω phải là dương. Do đó các tần số góc kiểu dao động chuẩn tắc là

$$\omega_1 = (\sqrt{3} + 1)\sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad \omega_2 = (\sqrt{3} - 1)\sqrt{\frac{g}{l}} .$$

Tỉ số các biên độ là

$$\frac{B}{A} = \frac{g - l\omega^2}{l\omega^2} = \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{đối với } \omega = \omega_1 , \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{đối với } \omega = \omega_2 . \end{cases}$$

Như vậy trong kiểu dao động chuẩn tắc cho bởi ω_1, θ và φ là ngược pha, trong khi trong kiểu dao động chuẩn tắc cho bởi ω_2, θ và φ là cùng pha. Trong cả hai trường hợp, tỉ số các biên độ φ trên biên độ θ là

$$\sqrt{3} : 2 .$$

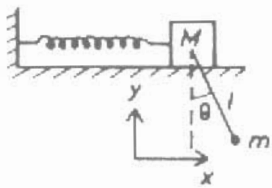
2051

Một con lắc đơn cấu tạo gồm một khối lượng m và dây không khối lượng chiều dài l. Con lắc được gắn vào vật M, vật này nối với một lò xo nằm ngang có hằng số đàn hồi k như trên hình 2.51.

(a) Tìm các phương trình Lagrange.

(b) Tìm các tần số ứng với dao động biên độ nhỏ.

(Columbia)



Hình 2.51

Lời giải:

(a) Sử dụng hệ tọa độ có gốc tại vị trí của m khi hệ ở trạng thái cân bằng, các trục x và y lần lượt là trục nằm ngang và thẳng đứng như hình 2.51. Khi đó M và m có tọa độ và vận tốc tương ứng là

$$(x, l), \qquad (x + l\sin\theta, l - l\cos\theta)$$
$$(\dot{x}, 0), \qquad (\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta, l\dot{\theta}\sin\theta)$$

Hàm Lagrange của hệ là

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) - Mgl - mgl(1-\cos\theta) - \frac{1}{2}kx^2 \ . \end{aligned}$$

Các phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Khi đó cho

$$(M+m)\ddot{x} - ml\dot{\theta}^2\sin\theta + ml\ddot{\theta}\cos\theta + kx = 0 \ ,$$

$$l\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta + g\sin\theta = 0 \ .$$

(b) Đối với những dao động nhỏ, $x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}$ là các đại lượng nhỏ. Bỏ qua các số hạng bậc cao hơn hai, phương trình chuyển động trở thành

$$(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} + kx = 0 \,,$$
$$l\ddot{\theta} + \ddot{x} + g\theta = 0 \,.$$

Đặt

$$x = A\exp(i\omega t) \,, \qquad \theta = B\exp(i\omega t) \,.$$

Các phương trình trên thành

$$\begin{pmatrix} k-(M+m)\omega^2 & -ml\omega^2 \\ -\omega^2 & g-l\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0 \,.$$

Phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} k-(M+m)\omega^2 & -ml\omega^2 \\ -\omega^2 & g-l\omega^2 \end{vmatrix} = Ml\omega^2 - [g(M+m)+kl]\omega^2 + gk = 0$$

có hai nghiệm dương

$$\omega_1 = \left[\frac{g(M+m)+kl+\sqrt{[g(M+m)+kl]^2-4Mlgk}}{2Ml}\right]^{\frac{1}{2}} \,,$$

$$\omega_2 = \left[\frac{g(M+m)+kl-\sqrt{[g(M+m)+kl]^2-4Mlgk}}{2Ml}\right]^{\frac{1}{2}} \,,$$

chúng là các tần số góc kiểu dao động chuẩn tắc của hệ.

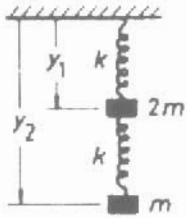
2052

Hai vật khối lượng $2m$ và m, được treo trên một giá đỡ cố định bằng các lò xo đàn hồi như trên hình 2.52. Hệ số đàn hồi (lực/đơn vị độ dài) của mỗi lò xo là k. Chỉ xét chuyển động theo phương thẳng đứng của hệ.

(a) Tính các tần số của các kiểu dao động chuẩn tắc của hệ.

(b) Vật trên $2m$ bị dịch từ từ xuống bên dưới một đoạn l so với vị trí cân bằng sau đó được thả ra sao cho hệ thực hiện các dao động tự do. Tìm chuyển động sau đó của vật m bên dưới.

(Columbia)



Hình 2.52

Lời giải:

(a) Gọi chiều dài tự nhiên của các lò xo trên và dưới tương ứng là l_1, l_2, và kí hiệu vị trí của vật trên và vật dưới tương ứng là y_1, y_2 như trên hình 2.52. Hàm Lagrange của hệ khi đó là

$$\begin{aligned}
L &= T - V \\
&= m\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_2^2 + 2mgy_1 + mgy_2 - \frac{1}{2}k(y_1 - l_1)^2 - \frac{1}{2}k(y_2 - y_1 - l_2)^2 \\
&= \frac{1}{2}m(2\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) + mg(2y_1 + y_2) - \frac{1}{2}k[(y_1 - l_1)^2 + (y_2 - y_1 - l_2)^2] .
\end{aligned}$$

Các phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

cho

$$\begin{aligned}
2m\ddot{y}_1 + 2ky_1 - ky_2 &= 2mg + kl_1 - kl_2 , \\
m\ddot{y}_2 + ky_2 - ky_1 &= mg + kl_2 .
\end{aligned}$$

Gọi $y_1 = y_1' + \eta_1$, $y_2 = y_2' + \eta_2$.

Các phương trình trên trở thành

$$\begin{aligned}
2m\ddot{y}_1' + 2ky_1' - ky_2' &= 0 , \\
m\ddot{y}_2' + ky_2' - ky_1' &= 0 ,
\end{aligned}$$

nếu ta đặt

$$\eta_1 = \frac{3mg + kl_1}{k}, \qquad \eta_2 = \frac{4mg + kl_1 + kl_2}{k} .$$

Chú ý rằng $y_1 = \eta_1$, $y_2 = \eta_2$ là các vị trí cân bằng tương ứng của vật $2m$ và m r, như có thể thấy từ các phương trình lực

$$\begin{aligned} 3mg &= k(y_1 - l_1) \,, \\ mg &= k(y_2 - y_1 - l_2) \,. \end{aligned}$$

Với một nghiệm có dạng

$$y_1' = Ae^{i\omega t}, \qquad y_2' = Be^{i\omega t},$$

ta có

$$\begin{pmatrix} 2k - 2m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0 \,.$$

Phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} 2k - 2m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

có hai nghiệm dương

$$\omega_\pm = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \,,$$

chúng là các tần số góc ứng với các kiểu dao động chuẩn tắc của hệ. Do

$$\frac{B}{A} = \frac{2k - 2m\omega^2}{k} = \mp\sqrt{2} \,,$$

các kiểu dao động chuẩn tắc tương ứng là $\binom{1}{-\sqrt{2}}$ và $\binom{1}{\sqrt{2}}$.

(b) Chuyển động tổng quát của hệ được cho bởi

$$\begin{aligned} y_1' &= A\cos(\omega_+ t + \varphi_1) + A'\cos(\omega_- t + \varphi_2) \,, \\ y_2' &= -\sqrt{2}A\cos(\omega_+ t + \varphi_1) + \sqrt{2}A'\cos(\omega_- t + \varphi_2) \,. \end{aligned}$$

Điều kiện ban đầu là điều kiện ở $t = 0$

$$y_1' = y_2' = l, \qquad \dot{y}_1' = \dot{y}_2' = 0 \,.$$

Suy ra

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0 \,,$$

$$A = \frac{l}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad A' = \frac{l}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \,.$$

Do đó chuyển động của vật $2m$ được mô tả bởi phương trình

$$y_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) l \cos\left[\sqrt{\frac{k}{m}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\, t\right] + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) l \cos\left[\sqrt{\frac{k}{m}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\, t\right] + l_1 + l_2 + \frac{4mg}{k} .$$

2053

Ba lò xo không khối lượng có chiều dài tự nhiên là $\sqrt{2}$ và hệ số đàn hồi K được gắn với một hạt điểm khối lượng m và các điểm cố định $(-1, 1)$, $(1, 1)$ và $(-1, -1)$ như hình 2.53. Chất điểm m chỉ được phép chuyển động trong mặt phẳng (x, y).

(a) Tìm hàm Lagrange của hệ.

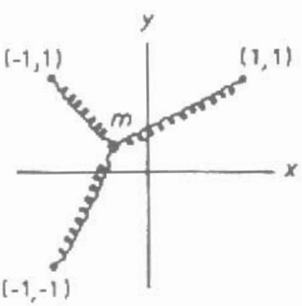
(b) Tìm vị trí cân bằng bền của vật nếu có.

(c) Tìm hàm Lagrange thích hợp cho các dao động bé.

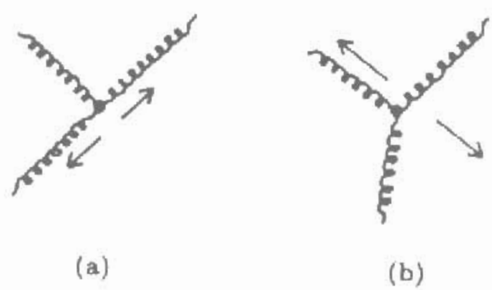
(d) Đưa vào hệ trục tọa độ chuẩn tắc và giải phương trình chuyển động của hạt trong gần đúng dao động bé.

(e) Vẽ các kiểu của dao động chuẩn tắc.

(*Columbia*)



Hình 2.53



Hình 2.54

Lời giải:

(a) Gọi tọa độ của vật m là (x, y). Hàm Lagrange của nó khi đó là

$$\begin{aligned}
L &= T - V \\
&= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \\
&\quad - \frac{1}{2}K[\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} - \sqrt{2}]^2 \\
&\quad - \frac{1}{2}K[\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} - \sqrt{2}]^2 \\
&\quad - \frac{1}{2}K[\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} - \sqrt{2}]^2 .
\end{aligned}$$

(b) Từ điều kiện cân bằng bền

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{2\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} > 0 ,$$

ta tìm được một vị trí cân bằng bền $(0, 0)$.

(c) Đối với các dao động nhỏ, $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ là các đại lượng nhỏ. Khai triển L và chỉ giữ lại các số hạng có bậc bé nhất ở các đại lượng nhỏ đó ta có

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - \frac{1}{4}K(3x^2 + 2xy + 3y^2) .$$

(d) Động năng và thế năng của hệ được biểu diễn tương ứng bằng các ma trận

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}K & \frac{1}{2}K \\ \frac{1}{2}K & \frac{3}{2}K \end{pmatrix} .$$

Phương trình ma trận là

$$(\mathbf{V} - \omega^2\mathbf{T})\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}K - m\omega^2 & \frac{1}{2}K \\ \frac{1}{2}K & \frac{3}{2}K - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = 0 .$$

Để các nghiệm không triệt tiêu ta cần có

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{2}K - m\omega^2 & \frac{1}{2}K \\ \frac{1}{2}K & \frac{3}{2}K - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 ,$$

hay

$$(2K - m\omega^2)(K - m\omega^2) = 0 .$$

Hai nghiệm dương của nó cho các tần số chuẩn tắc và các kiểu dao động chuẩn tắc tương ứng

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2K}{m}}, \qquad U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K}{m}}, \qquad U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Chuyển động tổng quát của hạt đối với các dao động nhỏ khi đó là

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

trong đó $A, B, \varphi_1, \varphi_2$ là các hằng số được xác định từ các điều kiện ban đầu. Các tọa độ chuẩn tắc được cho bởi

$$\bar{q}_s = \sum_{i,j} U_i a_{ij} q_j,$$

trong đó a_{ij} là các phần tử của ma trận $\mathbf{T}$. Như vậy đối với kiểu dao động ω_1, tọa độ chuẩn tắc là

$$\xi = U_1 mx + U_2 my = U_1 m(x + y).$$

Hệ số không đổi $U_1 m$ là không quan trọng và ta có thể lấy

$$\xi = x + y.$$

Tương tự cho kiểu ω_2

$$\eta = U_1 m(x - y)$$

và ta có thể lấy

$$\eta = x - y.$$

ξ, η là các tọa độ chuẩn tắc của hệ.

(e) Với $\omega_1 = \sqrt{\frac{2K}{m}}$,

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

do đó chất điểm dao động dọc theo đường thẳng $y = x$ như trên hình 2.54(a).

Với $\omega_2 = \sqrt{\frac{K}{m}}$,

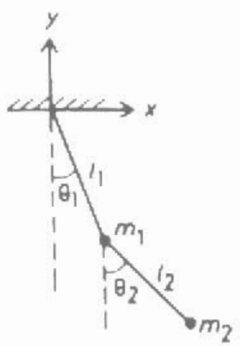
$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

và chất điểm dao động dọc theo đường thẳng $y = -x$ như trên hình 2.54(b).

2054

Một con lắc đơn được treo vào một con lắc khác; có nghĩa là dây của con lắc bên dưới được treo vào vật nặng của con lắc bên trên. Độ dài dây và khối lượng quả nặng chọn tùy ý, tìm hàm Lagrange của hệ. Dùng các góc nghiêng mỗi sợi dây tạo với phương thẳng đứng là các tọa độ suy rộng. Xét dao động nhỏ của hệ. Tìm các kiểu dao động chuẩn tắc và các tần số góc tương ứng. Chỉ ra rằng với trường hợp đặc biệt hai con lắc hoàn toàn giống nhau, các tần số đó là $\sqrt{\frac{g(2\pm\sqrt{2})}{l}}$. Dưới điều kiện nào của hệ để hệ chuyển động như một vật duy nhất?

(Columbia)



Hình 2.55

Gọi m_1, m_2 là khối lượng của các vật nặng và l_1, l_2 là chiều dài của hai sợi dây như trên hình 2.55. Hai quả nặng m_1, m_2 có tọa độ

$$(l_1 \sin\theta_1, -l_1\cos\theta_1), \qquad (l_1\sin\theta_1 + l_2\sin\theta_2, -l_1\cos\theta_1 - l_2\cos\theta_2)$$

và tương ứng vận tốc

$$(l_1\dot\theta_1\cos\theta_1, l_1\dot\theta_1\sin\theta_1), \qquad (l_1\dot\theta_1\cos\theta_1 + l_2\dot\theta_2\cos\theta_2, l_1\dot\theta_1\sin\theta_1 + l_2\dot\theta_2\sin\theta_2)$$

Khi đó động năng T của hệ được cho bởi

$$\begin{aligned} 2T &= m_1 l_1^2\dot\theta_1^2 + m_2[l_1^2\dot\theta_2^2 + l_2^2\dot\theta_2^2 + 2l_1l_2\dot\theta_1\dot\theta_2\cos(\theta_2-\theta_1)] \\ &= (m_1+m_2)l_1^2\dot\theta_1^2 + m_2 l_2^2\dot\theta_2^2 + 2m_2l_1l_2\dot\theta_1\dot\theta_2\cos(\theta_2-\theta_1) \\ &\approx (m_1+m_2)l_1^2\dot\theta_1^2 + m_2l_2^2\dot\theta_2^2 + 2m_2l_1l_2\dot\theta_1\dot\theta_2\,. \end{aligned}$$

Và thế năng V được cho bởi

$$\begin{aligned}2V &= -2m_1gl_1\cos\theta_1 - 2m_2g(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2)\\ &\approx -2(m_1+m_2)gl_1\left(1-\frac{1}{2}\theta_1^2\right) - m_2gl_2\left(1-\frac{1}{2}\theta_2^2\right)\\ &= V_0 + (m_1+m_2)gl_1\theta_1^2 + m_2gl_2\theta_2^2 .\end{aligned}$$

Đối với các dao động nhỏ, ta chỉ giữ lại các số hạng tới bậc hai của các đại lượng bé $\theta_1, \theta_2, \dot\theta_1, \dot\theta_2$. Hàm Lagrange của hệ là $L = T - V$. Để tìm được các kiểu chuẩn tắc ta thành lập ma trận có dạng

$$2T = \sum_{i,j=1}^{2} M_{ij}\dot\theta_i\dot\theta_j = \dot\Theta'\mathbf{M}\dot\Theta ,$$

$$2V = V_0 + \sum_{i,j=1}^{2} K_{ij}\theta_i\theta_j = V_0 + \Theta'\mathbf{K}\Theta ,$$

với

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix}(m_1+m_2)l_1^2 & m_2l_1l_2\\ m_2l_1l_2 & m_2l_2^2\end{pmatrix} ,$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix}(m_1+m_2)gl_1 & 0\\ 0 & m_2gl_2\end{pmatrix} ,$$

$$\Theta = \begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}, \qquad \dot\Theta = \begin{pmatrix}\dot\theta_1\\ \dot\theta_2\end{pmatrix} ,$$

và Θ', $\dot\Theta'$ lần lượt là các ma trận chuyển vị của Θ, $\dot\Theta$. Xét một nghiệm dưới dạng

$$\begin{pmatrix}\theta_2\\ \theta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix}\cos(\omega t + \varepsilon) ,$$

ta có

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{A} = 0 ,$$

nghĩa là

$$\begin{pmatrix}(m_1+m_2)l_1(g-l_1\omega^2) & -m_2l_1l_2\omega^2\\ -m_2l_1l_2\omega^2 & m_2l_2(g-l_2\omega^2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix} = 0 .$$

Để A_1, A_2 không bằng không một cách đồng nhất ta cần có

$$\begin{vmatrix}(m_1+m_2)l_1(g-l_1\omega^2) & -m_2l_1l_2\omega^2\\ -m_2l_1l_2\omega^2 & m_2l_2(g-l_2\omega^2)\end{vmatrix} = 0 ,$$

hay

$$m_1 l_1 l_2 \omega^4 - (l_2 + l_2)(m_1 + m_2) g\omega^2 + (m_1 + m_2) g^2 = 0 \,.$$

Các nghiệm dương của nó

$$\omega_\pm = \left[\frac{g}{2l_1 l_2 m_1}\left\{(m_1 + m_2)(l_1 + l_2) \right.\right.$$
$$\left.\left. \pm \sqrt{(m_1 + m_2)[m_2(l_1 + l_2)^2 + m_1(l_1 - l_2)^2]}\right\}\right]^{\frac{1}{2}}$$

là các tần số góc kiểu chuẩn tắc của hệ. Do

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{l_2}{l_1}\left(\frac{g}{l_2\omega^2} - 1\right)$$
$$= \frac{1}{2l_1}\left\{(l_1 - l_2) \mp \sqrt{\frac{m_2(l_1 + l_2)^2 + m_1(l_1 - l_2)^2}{m_1 + m_2}}\right\} ,$$

các kiểu dao động chuẩn tắc được cho bởi

$$\begin{pmatrix}\theta_1 \\ \theta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{l_1 - l_2}{2l_1} \mp \frac{1}{2l_1}\sqrt{[m_2(l_1 + l_2)^2 + m_1(l_1 - l_2)^2]/(m_1 + m_2)} \\ 1\end{pmatrix}$$
$$\times A_\pm \cos(\omega_\pm t + \varepsilon_\pm) ,$$

trong đó dấu bên trên và dấu bên dưới lần lượt tương ứng với ω_+, và ω_-. Nghiệm tổng quát là

$$\theta_1 = \left\{\frac{l_1 - l_2}{2l_1} - \frac{1}{2l_1}\sqrt{\frac{m_2(l_1 + l_2)^2 + m_1(l_1 - l_2)^2}{m_1 + m_2}}\right\} A_+ \cos(\omega_+ t + \varepsilon_+)$$
$$+ \left\{\frac{l_1 - l_2}{2l_1} + \frac{1}{2l_1}\sqrt{\frac{m_2(l_1 + l_2)^2 + m_1(l_1 - l_2)^2}{m_1 + m_2}}\right\} A_- \cos(\omega_- t + \varepsilon_-) ,$$

$$\theta_2 = A_+ \cos(\omega_+ t + \varepsilon_+) + A_- \cos(\omega_- t + \varepsilon_-) ,$$

trong đó A_+, A_-, ε_+ và ε_- là các hằng số được xác định thông qua các điều kiện ban đầu.

Trong trường hợp đặc biệt với các khối lượng và chiều dài con lắc bằng nhau, $m_1 = m_2 = m$, $l_1 = l_2 = l$, tần số chuẩn tắc là

$$\omega_\pm = \sqrt{\frac{g}{l}(2 \pm \sqrt{2})} \,.$$

Để hệ chuyển động như một vật rắn duy nhất ta cần có $\theta_1 = \theta_2$, tức là

$$\frac{1}{2l_1}\left[(l_1 - l_2) \mp \sqrt{\frac{m_2(l_1 + l_2)^2 + m_1(l_1 - l_2)^2}{m_1 + m_2}}\right] = 1 ,$$

hay

$$(m_1 + m_2)(l_1 + l_2) = \mp\sqrt{(m_1 + m_2)^2(l_1 + l_2)^2 - 4m_1(m_1 + m_2)l_1l_2} .$$

Do vế bên trái dương, dấu bên dưới của vế phải được sử dụng. Hơn nữa, bình phương hai vế ta có

$$l_1l_2m_1(m_1 + m_2) = 0 .$$

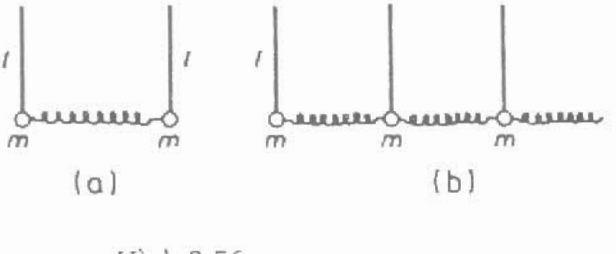
Phương trình này cần có hoặc $l_1 = 0$, hoặc $l_2 = 0$, hoặc $m_1 = 0$. Mỗi trường hợp này sẽ làm cho hệ hai con lắc rút về trở thành một con lắc đơn duy nhất. Do đó hệ hai con lắc đơn này không thể chuyển động như một vật rắn duy nhất.

2055

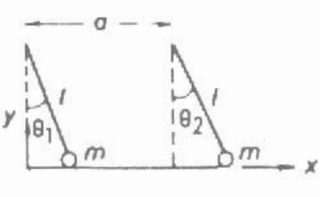
(a) Xét hai con lắc đơn mỗi con lắc có khối lượng m và chiều dài l được nối với nhau bằng một lò xo không khối lượng và có hệ số đàn hồi k như trên hình 2.56(a). Khoảng cách giữa các chốt quay được chọn sao cho lò xo không bị kéo căng khi các con lắc ở vị trí thẳng đứng. Tìm các tần số và các kiểu dao động chuẩn tắc đối với các dao động có biên độ nhỏ của hệ này xung quanh vị trí cân bằng.

(b) Xét một hàng vô hạn gồm các con lắc, mỗi con lắc được nối với các con lắc lân cận của nó bằng các lò xo giống trường hợp (a) (hình 2.56(b)). Tìm các kiểu dao động chuẩn tắc và các tần số tương ứng cho hệ mới này.

(*Columbia*)



Hình 2.56



Hình 2.57

Lời giải:

(a) Đặt a là chiều dài tự nhiên của mỗi lò xo. Đánh số các con lắc từ trái sang và sử dụng hệ tọa độ có gốc tại vị trí cân bằng của quả nặng con lắc thứ 1 và các trục x, y dọc theo các hướng nằm ngang và thẳng đứng như trên hình 2.57. Vậy hai quả nặng có tọa độ

$$(l\sin\theta_1, l(1-\cos\theta_1)), \qquad (a + l\sin\theta_2, l(1-\cos\theta_2))$$

và tương ứng vận tốc là

$$(l\dot{\theta}_1\cos\theta_1, l\dot{\theta}_1\sin\theta_1), \qquad (l\dot{\theta}_2\cos\theta_2, l\dot{\theta}_2\sin\theta_2)$$

Hàm Lagrange của hệ là

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}_1^2 + l^2\dot{\theta}_2^2) - mgl(2 - \cos\theta_1 - \cos\theta_2) \\ &\quad - \frac{1}{2}k(a + l\sin\theta_2 - l\sin\theta_1 - a)^2 \\ &\approx \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - \frac{1}{2}mgl(\theta_1^2 + \theta_2^2) - \frac{1}{2}kl^2(\theta_2 - \theta_1)^2 \end{aligned}$$

đối với các dao động nhỏ.

Các phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

cho

$$\begin{aligned} ml^2\ddot{\theta}_1 + mgl\theta_1 - kl^2(\theta_2 - \theta_1) = 0\ , \\ ml^2\ddot{\theta}_2 + mgl\theta_2 + kl^2(\theta_2 - \theta_1) = 0\ . \end{aligned}$$

Đặt $\xi = \theta_1 + \theta_2$, $\eta = \theta_1 - \theta_2$. Tổng và hiệu của hai phương trình trên

$$\begin{aligned} l\ddot{\xi} + g\xi = 0\ , \\ ml\ddot{\eta} + (mg + 2kl)\eta = 0\ . \end{aligned}$$

Do đó ξ và η là hai tọa độ chuẩn tắc của hệ với các tần số góc chuẩn tắc là

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}\ .$$

Do

$$\theta_1 = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \qquad \theta_2 = \frac{1}{2}(\xi - \eta)\ ,$$

các biên độ u_1, u_2 của chúng có tỉ lệ

$$u_1 : u_2 = 1 : 1$$

cho kiểu dao động ω_1, mà đối với $\eta = 0$, và

$$u_1 : u_2 = 1 : -1$$

cho kiểu dao động ω_2 mà đối với nó $\xi = 0$.

(b) Khảo sát tương tự câu (a) ta có

$$\begin{aligned}
L &= T - V \\
&= \frac{1}{2}ml^2(\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2 + \cdots + \dot\theta_n^2 + \cdots) - \frac{1}{2}mgl(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_n^2 + \cdots) \\
&\quad - \frac{1}{2}kl^2[(\theta_2 - \theta_1)^2 + (\theta_3 - \theta_2)^2 + \cdots \\
&\quad + (\theta_n - \theta_{n-1})^2 + (\theta_{n+1} - \theta_n)^2 + \cdots]\ .
\end{aligned}$$

Các phương trình Lagrange khi đó cho

$$ml^2\ddot\theta_n + mgl\theta_n + kl^2[(\theta_n - \theta_{n-1}) - (\theta_{n+1} - \theta_n)] = 0\ ,$$

nghĩa là

$$ml\ddot\theta_n + mg\theta_n + kl(2\theta_n - \theta_{n+1} - \theta_{n-1}) = 0\ .$$

Do θ_n vẫn hữu hạn khi $n \to \infty$, giả sử biên độ dao động thay đổi tuần hoàn dọc theo trục x và thử

$$\theta_n = Ae^{i(\kappa na - \omega t)}\ ,$$

trong đó "số sóng" $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}$, với "bước sóng" λ là số nguyên lần a, tức là $\lambda = pa$, $p = 1, 2, 3, \ldots$. Thay vào phương trình ta có

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}[1 - \cos(\kappa a)]}\ .$$

Một vài tần số góc chuẩn tắc đầu tiên là đối với

$$
\begin{array}{ll}
p = 1, & \omega_1 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}, \\
p = 2, & \omega_2 = \sqrt{\dfrac{g}{l} + \dfrac{4k}{m}}, \\
p = 3, & \omega_3 = \sqrt{\dfrac{g}{l} + \dfrac{3k}{m}}, \\
p = 4, & \omega_4 = \sqrt{\dfrac{g}{l} + \dfrac{2k}{m}}, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Các kiểu dao động chuẩn tắc tương ứng (đối với $p = 1, 2, 3, 4, \ldots$) là

$$
\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} Ae^{-i\omega t}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} Ae^{-i\omega t},
$$

$$
\begin{pmatrix} e^{i\frac{2}{3}\pi} \\ e^{i\frac{4}{3}\pi} \\ 1 \\ e^{i\frac{2}{3}\pi} \\ e^{i\frac{4}{3}\pi} \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} Ae^{-i\omega t}, \begin{pmatrix} e^{i\frac{1}{2}\pi} \\ e^{i\pi} \\ e^{i\frac{3}{2}\pi} \\ 1 \\ e^{i\frac{1}{2}\pi} \\ e^{i\pi} \\ e^{i\frac{3}{2}\pi} \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} Ae^{-i\omega t}, \ldots .
$$

2056

Xét một hạt khối lượng m chuyển động trong trường thế hai chiều

$$
V(x, y) = -\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}\lambda_0 x^2 y^2 + \frac{1}{4}\lambda_1 x^4, \qquad k, \lambda_0, \lambda_1 > 0 .
$$

(a) Tại điểm (x_0, y_0) như thế nào hạt sẽ ở trong cân bằng bền?

(b) Tìm hàm Lagrange thích hợp cho các dao động nhỏ quanh vị trí cân bằng đó.

(c) Tìm các tần số dao động chuẩn tắc trong câu (b).

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) Điểm tại đó $\partial V/\partial x = 0$, $\partial V/\partial y = 0$, $\partial^2 V/\partial x^2 > 0$, $\partial^2 V/\partial y^2 > 0$ và

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(dy)^2 > 0$$

là một điểm cân bằng bền của hệ. Đối với thế đã cho ta tìm được hai điểm cân bằng bền $(\sqrt{k/\lambda_1}, 0)$ và $(-\sqrt{k/\lambda_1}, 0)$.

(b) V đạt cực tiểu tại một điểm cân bằng bền (x_0, y_0). Tại điểm (x, y) lân cận ta có tới bậc hai của các đại lượng nhỏ $x - x_0$, $y - y_0$,

$$V(x,y) = V(x_0, y_0) + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{x_0, y_0}(x - x_0)^2 \right.$$
$$\left. +2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right)_{x_0, y_0}(x - x_0)(y - y_0) + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_{x_0, y_0}(y - y_0)^2\right] + \cdots$$
$$\approx -\frac{k^2}{4\lambda_1} + \frac{1}{2}\left[2k\left(x - \sqrt{\frac{k}{\lambda_1}}\right)^2 + \frac{k\lambda_0 y^2}{\lambda_1}\right]$$

đối với điểm cân bằng $\left(\sqrt{\frac{k}{\lambda_1}}, 0\right)$.

Tịnh tiến hệ tọa độ tới vị trí gốc mới $\left(\sqrt{\frac{k}{\lambda_1}}, 0\right)$:

$$x' = x - \sqrt{\frac{k}{\lambda}}, \qquad y' = y,$$

và lấy gốc tọa độ mới làm mốc thế năng. Khi đó

$$V(x', y') = \frac{1}{2}k\left(x'^2 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}y'^2\right)$$

và hàm Lagrange của hệ là

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2) - \frac{1}{2}k\left(x'^2 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}y'^2\right).$$

Tương tự với điểm cân bằng còn lại, ta đặt

$$x'' = x + \sqrt{\frac{k}{\lambda}}, \qquad y'' = y$$

và nhận được cùng hàm Lagrange giống thế nhưng với x'', y'' thay thế cho x', y'.

(c) Phương trình đặc trưng

$$|V - \omega^2 T| = 0 ,$$

hay

$$\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & 0 \\ 0 & \frac{k\lambda_0}{\lambda_1} - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

có các nghiệm dương

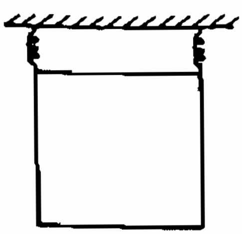
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k\lambda_0}{m\lambda_1}} .$$

Đó là các tần số góc chuẩn tắc đối với dao động nhỏ của hệ quanh mỗi vị trí cân bằng.

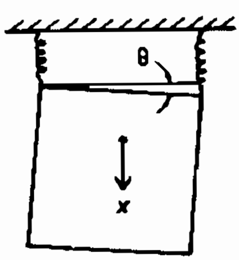
2057

Một hình vuông bằng kim loại có thể bỏ qua chiều dày, có khối lượng m được treo bằng hai lò xo hoàn toàn giống nhau tại hai góc như trên hình 2.58. Các lò xo chỉ có thể di chuyển trong mặt phẳng thẳng đứng. Tìm các tần số của các kiểu dao động chuẩn tắc đối với các dao động biên độ nhỏ.

(*UC, Berkeley*)



Hình 2.58



Hình 2.59

Lời giải:

Đặt x là độ dịch chuyển theo chiều thẳng đứng của khối tâm của miếng kim loại tính từ vị trí cân bằng và θ là góc quay của nó trong mặt phẳng thẳng đứng chứa các lò xo như trên hình 2.59. Miếng kim loại có momen quán tính là $\frac{1}{6}ms^2$, s là chiều dài của cạnh của miếng kim loại vuông. Với góc θ bé, độ giãn của lò xo là $x + \frac{1}{2}s\theta$ và $x - \frac{1}{2}s\theta$. Do đó động năng và thế năng của hệ là

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{12}ms^2\dot{\theta}^2 ,$$

$$V = -mgx + \frac{1}{2}k\left[\left(x + \frac{1}{2}s\theta\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}s\theta\right)^2\right] ,$$

trong đó k là hệ số đàn hồi của các lò xo, lấy vị trí cân bằng làm mốc thế năng và hàm Lagrange là

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{12}ms^2\dot{\theta}^2 + mgx - k\left(x^2 + \frac{1}{4}s^2\theta^2\right) .$$

Các phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

cho

$$m\ddot{x} + 2kx - mg = 0,$$
$$\frac{1}{6}ms^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2}ks^2\theta = 0 .$$

Đặt $x' = x - \frac{mg}{2k}$ và ta có thể viết phương trình đầu tiên như

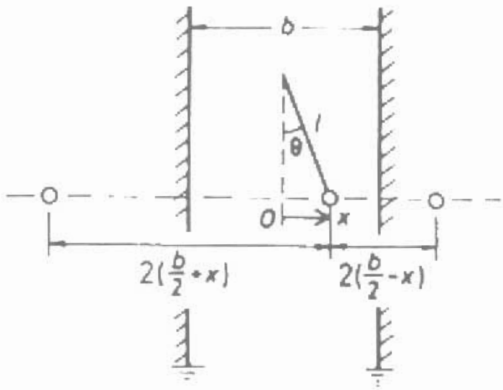
$$m\ddot{x}' + 2kx' = 0 .$$

Do đó x' và θ là tọa độ chuẩn tắc của hệ với các tần số góc chuẩn tắc tương ứng

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} .$$

2058

Một hình cầu nhỏ có khối lượng m và bán kính r, được treo như một con lắc giữa hai bản tụ điện phẳng như trên hình 2.60 bằng một thanh không dẫn điện chiều dài l. Hai bản tụ được nối đất và điện thế của hình cầu là V.



Hình 2.60

Hình cầu bị dịch chuyển một đoạn Δx. Tìm tần số của các dao động nhỏ và chỉ rõ với những điều kiện như thế nào của điện áp V thì các dao động đó xảy ra. Sử dụng các gần đúng thích hợp để đơn giản hóa tính toán.

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

Giả sử rằng khối lượng thanh cách điện và bán kính của hình cầu là rất nhỏ và có thể bỏ qua. Điện tích của hình cầu là

$$q = 4\pi\varepsilon_0 rV ,$$

ε_0 là hằng số điện môi của không gian tự do. Sử dụng phương pháp ảnh, các lực tương tác giữa các bản tụ và hình cầu giống như lực tương tác giữa các điện tích của hình cầu và các ảnh của nó nằm đối xứng ở các vị trí như trên hình 2.60. Lấy trục x là trục nằm ngang có gốc tại vị trí cân bằng. Động năng và thế năng của hệ lần lượt là

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 , \\ V &= -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{b+2x} + \frac{1}{b-2x}\right] + mgl(1-\cos\theta) \\ &= -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2b}{b^2-4x^2} + mgl(1-\cos\theta) . \end{aligned}$$

Với x nhỏ, $x \approx l\theta$,

$$\frac{1}{b^2-4x^2} \approx \frac{1}{b^2}\left(1 + \frac{4l^2\theta^2}{b^2}\right) ,$$

và hàm Lagrange của hệ là

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 b}\left(1 + \frac{4l^2\theta^2}{b^2}\right) - \frac{1}{2}mgl\theta^2 .$$

Phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

cho

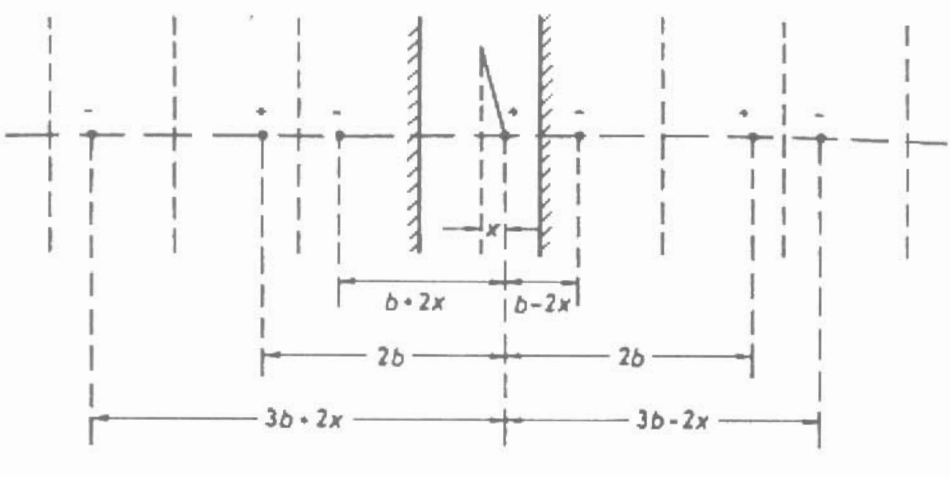
$$ml^2\ddot{\theta} - \frac{4q^2}{\pi\varepsilon_0}\frac{l^2\theta}{b^3} + mgl\theta = 0 .$$

Do đó tần số góc của các dao động nhỏ là

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l} - \frac{4q^2}{\pi\varepsilon_0}\frac{1}{mb^3}} = \sqrt{\frac{g}{l} - \frac{64\pi\varepsilon_0 r^2 V^2}{mb^3}} .$$

Điều kiện để các dao động như thể xảy ra là ω phải là số thực, nghĩa là

$$V < \sqrt{\frac{gmb^3}{64\pi\varepsilon_0 r^2 l}} .$$



Hình 2.61

Chú ý rằng nghiệm trên chỉ là gần đúng do chính các ảnh cũng tạo thêm ảnh, một số trang chúng được chỉ ra như trên hình 2.61 mà cũng phải được tính đến. Do đó thế do tương tác tĩnh điện là

$$U = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)b-2x}+\frac{1}{(2n-1)b+2x}-\frac{2}{2nb}\right]$$

$$\approx -\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(2n-1)b}\left[1+\frac{4x^2}{(2n-1)^2b^2}\right]-\frac{1}{2nb}\right\}$$

$$= -\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 b}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)+\frac{4x^2}{(2n-1)^3b^2}\right]$$

$$= -\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 b}\left(\alpha+\frac{4l^2\theta^2\beta}{b^2}\right)$$

với

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n-1)}, \qquad \beta = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\,.$$

Nó có thể cho

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}-\frac{64\pi\varepsilon_0 r^2V^2\beta}{mb^3}}$$

và điều kiện để có dao động

$$V < \sqrt{\frac{gmb^3}{64\pi\varepsilon_0 r^2 l\beta}}\,.$$

Chuỗi β hội tụ rất nhanh. Với cực đại $n = 3$, $\beta = 1,05$ và số thập phân thứ ba vẫn không thay đổi khi cộng thêm nhiều số hạng hơn nữa. Do $\beta^{-\frac{1}{2}} = 0,98$, tính toán hai ảnh cho ta một gần đúng tốt.

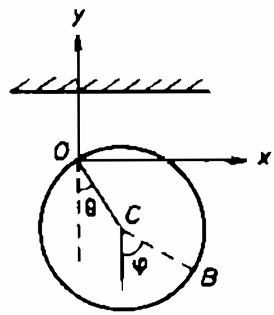
2059

Một vành tròn nhẵn và đồng chất có khối lượng M và bán kính a lắc trong một mặt phẳng thẳng đứng quanh điểm O tại đó nó được treo tự do với một giá cố định. Một hạt B khối lượng m trượt không ma sát trên vành tròn. Kí hiệu độ nghiêng OC (trong đó C là tâm vòng) so với đường thẳng đứng hướng xuống là φ.

(a) Tìm các phương trình chuyển động theo θ và φ.

(b) Tìm các tần số đặc trưng và các kiểu dao động chuẩn tắc đối với các dao động bé quanh vị trí cân bằng bền.

(*Chicago*)



Hình 2.62

Lời giải:

(a) Momen quán tính của vành tròn đối với O là

$$I = Ma^2 + Ma^2 = 2Ma^2 \ .$$

Sử dụng hệ tọa độ như trên hình 2.62. Tọa độ và vận tốc của hạt B lần lượt là

$$(a\sin\theta + a\sin\varphi, -a\cos\theta - a\cos\varphi), (a\dot\theta\cos\theta + a\dot\varphi\cos\varphi, a\dot\theta\sin\theta + a\dot\varphi\sin\varphi) \ .$$

Hàm Lagrange của hệ là

$$\begin{aligned} L = T - V &= Ma^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}ma^2[\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 + 2\dot\theta\dot\varphi\cos(\theta - \varphi)] \\ &\quad + Mga\cos\theta + mga(\cos\theta + \cos\varphi) \\ &= \frac{1}{2}(2M + m)a^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}ma^2\dot\varphi^2 + ma^2\dot\theta\dot\varphi\cos(\theta - \varphi) \\ &\quad + (M + m)ga\cos\theta + mga\cos\varphi \ . \end{aligned}$$

Các phương trình Lagrange cho

$$(2M + m)a\ddot\theta + ma\ddot\varphi\cos(\theta - \varphi) + ma\dot\varphi^2\sin(\theta - \varphi) + (M + m)g\sin\theta = 0 \ ,$$
$$a\ddot\theta\cos(\theta - \varphi) + a\ddot\varphi - a\dot\theta^2\sin(\theta - \varphi) + g\sin\varphi = 0 \ .$$

(b) Với các dao động nhỏ, chỉ giữ lại các số hạng tới bậc hai ở các đại lượng nhỏ $\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$, từ các phương trình ở trên ta có

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{M+m}{2M+m}\right)\frac{g\theta}{a} + \frac{m}{2M+m}\ddot{\varphi} = 0 \, ,$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{a}\varphi + \ddot{\varphi} = 0 \, .$$

Với nghiệm có dạng $\theta = A\exp(i\omega t)$, $\varphi = B\exp(i\omega t)$, các phương trình trên trở thành

$$\left[\left(\frac{M+m}{2M+m}\right)\frac{g}{a} - \omega^2\right]A - \frac{m\omega^2}{2M+m}B = 0 \, ,$$

$$-\omega^2 A + \left(\frac{g}{a} - \omega^2\right)B = 0 \, .$$

Để có các nghiệm khác không định thức của các hệ số phải triệt tiêu. Như vậy

$$\left[M\omega^2 - \frac{(M+m)g}{a}\right]\left(2\omega^2 - \frac{g}{a}\right) = 0 \, ,$$

hai nghiệm dương của nó là

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{2a}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\left(\frac{M+m}{M}\right)\frac{g}{a}}$$

là các tần số góc đặc trưng của hệ đối với các dao động nhỏ. Do $\frac{A}{B} = \frac{g}{a\omega^2} - 1$, ta có đối với $\omega = \omega_1$, $\frac{A}{B} = 1$ và kiểu chuẩn tắc $\binom{1}{1}$, đối với $\omega = \omega_2$, $\frac{A}{B} = -\frac{m}{M+m}$ và kiểu chuẩn tắc $\binom{1}{-\frac{M+m}{m}}$.

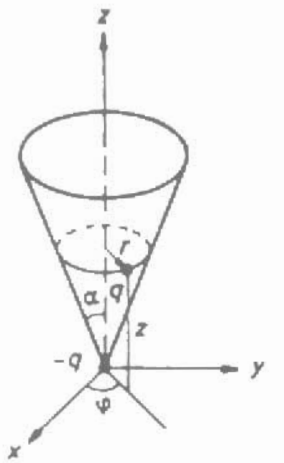
2060

Một vật khối lượng m và điện tích q chỉ có thể di chuyển không ma sát trong mặt bên trong của hình nón có góc mở 2α. Một điện tích $-q$ được cố định tại đỉnh của hình nón như trên hình 2.63. Hệ không nằm trong trường trọng lực. Tìm tần số dao động nhỏ quanh quỹ đạo cân bằng của vật chuyển động theo $\dot{\varphi}_0$, vận tốc góc để cho vật chuyển động cân bằng bên trong hình nón. Giả thiết $v \ll c$ do đó bức xạ là không đáng kể.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Sử dụng hệ tọa độ như trên hình 2.63. Trong hệ tọa độ Descartes, m có tọa độ $(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$, hay, do $z = r\text{cotg}\alpha$, $(r\cos\varphi, r\sin\varphi, r\text{cotg}\alpha)$, và vận



Hình 2.63

tốc

$$(\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, r\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi, \dot{r}\mathrm{cotg}\alpha) \ .$$

Hàm Lagrange của hệ khi đó là

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2\cot^2\alpha) + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\sin\alpha}{r}$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2\csc^2\alpha + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{q^2\sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r} \ .$$

Các phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

cho

$$m\ddot{r}\csc^2\alpha - mr\dot{\varphi}^2 + \frac{q^2\sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 0 \ ,$$

$$mr^2\dot{\varphi} = J \ (\text{constant}) \ ,$$

hay, kết hợp các phương trình trên

$$m\ddot{r}\csc^2\alpha - \frac{J^2}{mr^3} + \frac{q^2\sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 0 \ . \qquad (1)$$

Đối với quỹ đạo cân bằng

$$\ddot{r} = 0, \qquad r = r_0, \qquad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0\,,$$

các phương trình trên trở thành

$$\frac{J^2}{mr_0^3} = \frac{q^2 \sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}\,.$$

Đối với các dao động nhỏ xung quanh quỹ đạo cân bằng, đặt $r = r_0 + \xi$, trong đó $\xi \ll r_0$. Khi đó

$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{1}{r_0^2}\left(1 - \frac{2\xi}{r_0}\right), \qquad \frac{1}{r^3} = \frac{1}{r_0^3}\left(1 - \frac{3\xi}{r_0}\right),$$

và phương trình (1) trở thành

$$m\ddot{\xi} + \frac{q^2 \sin^3\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0^3}\xi = 0\,.$$

Do đó tần số góc cho các dao động nhỏ là

$$\omega = \sqrt{\frac{q^2 \sin^3\alpha}{4\pi\varepsilon_0 m r_0^3}} = \dot{\varphi}_0 \sin\alpha\,,$$

do

$$\dot{\varphi}_0 = \sqrt{\frac{J^2}{m^2 r_0^4}} = \sqrt{\frac{q^2 \sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 m r_0^3}}\,.$$

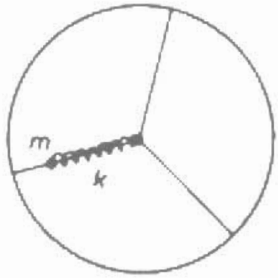
2061

Một bánh đà có momen quán tính I quay xung quanh tâm của nó trong mặt phẳng nằm ngang. Một khối lượng m có thể trượt tự do dọc theo một trong các nan hoa và được gắn với tâm bánh đà bằng một lò xo có chiều dài tự nhiên l và hệ số đàn hồi k như trên hình 2.64.

(a) Tìm biểu thức cho năng lượng của hệ này theo r, $\dot{r}$, và momen động lượng J.

(b) Giả sử bánh đà ban đầu có vận tốc góc không đổi Ω_0 và lò xo có độ dãn ổn định $r = r_0$. Sử dụng kết quả trong câu (a) để xác định liên hệ giữa Ω_0 và r_0 và tần số của các dao động nhỏ quanh cấu hình ban đầu này.

(*MIT*)



Hình 2.64

Lời giải:

(a) Gọi r là khoảng cách giữa m và tâm và $\dot{\theta}$ là vận tốc góc của bánh đà tại thời điểm t. Hệ có momen động lượng

$$J = I\dot{\theta} + mr^2\dot{\theta}$$

và năng lượng

$$\begin{aligned} T + V &= \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}k(r-l)^2 \\ &= \frac{J^2}{2(I+mr^2)} + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}k(r-l)^2 \, . \end{aligned}$$

(b) Hàm Lagrange của hệ là

$$L = T - V = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(r-l)^2 \, .$$

Các phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

cho

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + k(r-l) = 0 \, , \tag{1}$$

$$(I + mr^2)\dot{\theta} = \text{ hằng số } = J \, ,$$

hay, kết hợp hai phương trình

$$m\ddot{r} - \frac{mrJ^2}{(I+mr^2)^2} + k(r-l) = 0 \, . \tag{2}$$

Ban đầu, $\ddot{r} = 0$, $r = r_0$, $\dot{\theta} = \Omega_0$, $J = (I + mr_0^2)\Omega_0$. Đối với các dao động nhỏ quanh cấu hình cân bằng này, đặt $r = r_0 + \rho$, trong đó $\rho \ll r_0$. Do

$$\begin{aligned}
\frac{mrJ^2}{(I+mr^2)^2} &\approx \frac{m(r_0+\rho)J^2}{(I+mr_0^2+2mr_0\rho)^2} \\
&\approx \frac{mr_0J^2}{(I+mr_0^2)^2}\left(1+\frac{\rho}{r_0}-\frac{4mr_0\rho}{I+mr_0^2}\right) \\
&\approx \frac{mr_0J^2}{(I+mr_0^2)^2}\left[1-\left(\frac{3mr_0^2-I}{I+mr_0^2}\right)\frac{\rho}{r_0}\right] \\
&\approx \frac{mr_0J^2}{(I+mr_0^2)^2}-\left(\frac{3mr_0^2-I}{I+mr_0^2}\right)m\Omega_0^2\rho\,,
\end{aligned}$$

$$\frac{mr_0J^2}{(I+mr_0^2)^2} = mr_0\Omega_0^2 = k(r_0-l)\,,$$

phương trình (2) trở thành

$$\ddot{\rho}+\left[\frac{k}{m}+\left(\frac{3mr_0^2-I}{I+mr_0^2}\right)\Omega_0^2\right]\rho = 0\,.$$

Do đó, với điều kiện I phải thỏa mãn

$$\left(\frac{I-3mr_0^2}{I+mr_0^2}\right)\Omega_0^2 < \frac{k}{m}\,,$$

hệ sẽ dao động quanh cấu hình ban đầu với tần số góc

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}+\left(\frac{3mr_0^2-I}{I+mr_0^2}\right)\Omega_0^2}$$

sau một nhiễu loạn nhỏ. Chú ý phương trình (1) cho ta

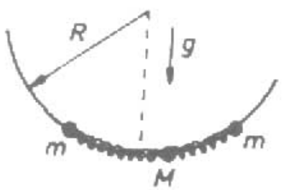
$$r_0 = \frac{kl}{k-m\Omega_0^2}\,,$$

tức là r_0 bản thân nó có liên hệ với Ω_0.

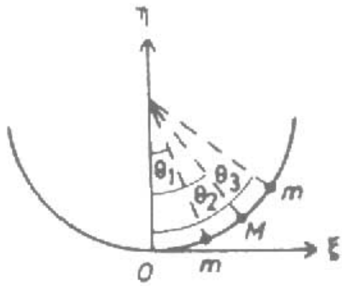
2062

Ba chất điểm (hai trong số chúng giống nhau) và các lò xo không khối lượng (hằng số K) nối chúng với nhau và bị ràng buộc chuyển động trong một ống không ma sát bán kính R. Hệ nằm trong trường hấp dẫn (g) như trên hình 2.65. Các lò xo có chiều dài bằng không tại vị trí cân bằng và các chất điểm có thể di chuyển qua nhau. Sử dụng phương pháp Lagrange, tìm các kiểu chuẩn tắc của các dao động nhỏ quanh vị trí cân bằng của hệ và mô tả từng kiểu dao động đó.

(UC, Berkeley)



Hình 2.65



Hình 2.66

Lời giải:

Sử dụng hệ tọa độ Descartes (ξ, η) như trên hình 2.66. Khối lượng thứ i có tọa độ $(R\sin\theta_i, R(1-\cos\theta_i))$. Với dao động nhỏ các tọa độ này gần đúng là $(R\theta_i, \frac{1}{2}R\theta_i^2)$, hay $(x_i, \frac{1}{2}x_i^2)$ với $x_i = R\theta_i$. Do đó, bỏ qua các số hạng có bậc lớn hơn hai ở các đại lượng nhỏ $x_i, \dot{x}_i$, ta có động năng và thế năng của hệ là

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2\,,$$

$$V = \frac{1}{2}K(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}K(x_2 - x_3)^2 + \frac{1}{2}m(x_1^2 + x_3^2) + \frac{1}{2}Mx_2^2\,,$$

và hàm Lagrange của hệ là

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2 - \left[\frac{1}{2}\left(K + \frac{mg}{R}\right)(x_1^2 + x_3^2) + \frac{1}{2}\left(2K + \frac{Mg}{R}\right)x_2^2 - K(x_1x_2 + x_2x_3)\right]\,.$$

Các phương trình Lagrange cho

$$m\ddot{x}_1 + \left(K + \frac{mg}{R}\right)x_1 - Kx_2 = 0\,,$$

$$M\ddot{x}_2 + \left(2K + \frac{Mg}{R}\right)x_2 - K(x_1 + x_3) = 0\,,$$

$$m\ddot{x}_3 + \left(K + \frac{mg}{R}\right)x_3 - Kx_2 = 0\,.$$

Đặt

$$x_j = A_j e^{i\omega t}$$

ở các phương trình bên trên ta rút ra phương trình ma trận

$$\begin{pmatrix} K + \frac{mg}{R} - m\omega^2 & -K & 0 \\ -K & 2K + \frac{Mg}{R} - M\omega^2 & -K \\ 0 & -K & K + \frac{mg}{R} - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0\,. \qquad (1)$$

Để có các nghiệm mà không phải tất cả A_i đều bằng không ta cần có

$$\begin{vmatrix} K + \frac{mg}{R} - m\omega^2 & -K & 0 \\ -K & 2K + \frac{Mg}{R} - M\omega^2 & -K \\ 0 & -K & K + \frac{mg}{R} - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0\,,$$

ba nghiệm không âm của nó là các tần số góc của các kiểu chuẩn tắc của hệ

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{R} + \frac{K}{m}}\,,$$

$$\left.\begin{matrix}\omega_2 \\ \omega_3\end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{g}{R} + \frac{K}{2m} + \frac{K}{M} \pm K\left(\frac{1}{4m^2} + \frac{1}{mM} + \frac{1}{M^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\,.$$

Phương trình (1) suy ra

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{A_2}{A_3} = 1 + \frac{mg}{RK} - \frac{m\omega^2}{K}\,,$$

$$KA_1 - \left(2K + \frac{Mg}{R} - M\omega^2\right)A_2 + KA_3 = 0\,.$$

Các phương trình này cho đối với ω_1 $A_3 = -A_1$, $A_2 = 0$;

đối với ω_2: $\quad B_3 = B_1, \quad \dfrac{B_2}{B_1} =$ âm;

đối với ω_3: $\quad C_3 = C_1, \quad \dfrac{C_2}{C_1} =$ dương.

Do đó ba kiểu dao động chuẩn tắc tương ứng là

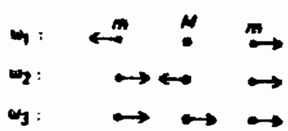
$$\begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \\ -A_1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_1 \end{pmatrix}$$

lần lượt tương ứng với ω_1, ω_2, ω_3, trong đó

$$B_2 = \left[\frac{1}{2} - \frac{m}{M} - m\sqrt{\frac{1}{4m^2} + \frac{1}{mM} + \frac{1}{M^2}}\right] B_1 ,$$

$$C_2 = \left[\frac{1}{2} - \frac{m}{M} + m\sqrt{\frac{1}{4m^2} + \frac{1}{mM} + \frac{1}{M^2}}\right] C_1 .$$

Ba kiểu dao động chuẩn tắc được mô tả như hình 2.67.



Hình 2.67

2063

Trong lý thuyết về các dao động nhỏ người ta thường sử dụng hàm Lagrange có dạng $L = T - V$, trong đó

$$T = \sum_{i,j=1}^{N} \dot{q}_i a_{ij} \dot{q}_j, \qquad V = \sum_{i,j=1}^{N} q_i b_{ij} q_j .$$

Các ma trận $\mathbf{A} = (a_{ij})$ và $\mathbf{B} = (b_{ij})$ là thực và đối xứng.

(a) Chứng minh rằng A dương, có tính xác định nghĩa là

$$\mathbf{x}^+ \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$$

đối với một ma trận cột **x** tùy ý. Chứng minh rằng thông thường trị riêng của ma trận này lớn hơn hoặc bằng không. Chỉ ra rằng ta không cần quan tâm tới các trị riêng bằng không của nó.

(b) Chứng minh sự tồn tại của ma trận $\mathbf{A}^{\pm\frac{1}{2}}$.

(c) Đưa vào tọa độ mới θ_j qua biểu thức

$$q_i = \sum_{j=1}^{N} (\mathbf{A}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{S})_{ij}\theta_j \ ,$$

trong đó **S** là ma trận $N \times N$. Chỉ ra rằng có thể chọn **S** sao cho **A** và **B** được chéo hóa. Giải thích các phần tử đường chéo của ma trận chuyển vị **B**.

(*SUNY, Buffalo*)

Lời giải:

(a) Theo định nghĩa

$$T = \frac{1}{2}\sum_k m_k \dot{x}_k^2 \geq 0$$

trong hệ tọa độ Descartes. Sau phép biến đổi tuyến tính

$$x_k = x_k(q_1, q_2, \dots, q_N) \ ,$$

nó trở thành

$$T = \sum_{i,j}^{n} \dot{q}_i a_{ij} \dot{q}_j \ ,$$

nhưng vẫn lớn hơn hay bằng không (≥ 0). Dưới dạng ma trận

$$\mathbf{T} = \dot{\mathbf{q}}^\dagger \mathbf{A}\dot{\mathbf{q}} \ ,$$

trong đó

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_N \end{pmatrix}$$

dấu chữ thập là kí hiệu ma trận chuyển vị. Do các vận tốc $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots$ và từ đó các vận tốc suy rộng $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots$ là tùy ý, ta có

$$\mathbf{T} = \mathbf{x}^\dagger \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$$

đối với một ma trận cột **x** bất kì. Có nghĩa là **A** xác định dương.

Giả sử $\mathbf{x}_g$ là vectơ riêng của A với trị riêng λ_g. Theo định nghĩa

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_g = \lambda_g \mathbf{x}_g ,$$

trong đó λ_g là một số thực do A là đối xứng và thực. Khi đó

$$\mathbf{x}_g^\dagger \mathbf{A}\mathbf{x}_g = \mathbf{x}_g^\dagger \lambda_g \mathbf{x}_g = \lambda_g \mathbf{x}_g^\dagger \mathbf{x}_g = \lambda_g \sum_{i=1}^{N} x_{gi}^2 .$$

Do biểu thức lớn hơn hay bằng không như chỉ ra ở phần trên, nên các trị riêng $\lambda_g \geq 0$.

Nếu $\lambda_g = 0$, thì sẽ không xuất hiện dao động đối với kiểu dao động tương ứng, khi đó nó không làm ta quan tâm. Các bậc tự do của dao động đơn giản giảm đi một.

(b) Để các ma trận $\mathbf{A}^{\pm\frac{1}{2}}$ tồn tại ta cần có

$$\det|\mathbf{A}| > 0 .$$

Một ma trận thực đối xứng có thể được chéo hóa bằng ma trận trực giao S, nghĩa là ma trận mà đối với nó $\mathbf{S}^\dagger\mathbf{S} = I$, với I là ma trận đơn vị

$$\mathbf{S}^\dagger \mathbf{A}\mathbf{S} = \boldsymbol{\lambda} ,$$

trong đó $\boldsymbol{\lambda}$ là các phần tử ma trận có đường chéo $\lambda_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$. Kí hiệu $|\mathbf{A}|$ cho định thức $\det|\mathbf{A}|$, ta có

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}||\mathbf{S}^\dagger||\mathbf{S}| = |\mathbf{S}^\dagger\mathbf{A}\mathbf{S}| = |\boldsymbol{\lambda}| = \prod_{i=1}^{N} \lambda_i > 0$$

bằng kết quả trong phần (a) (bỏ hết mọi λ=0). Do đó $\mathbf{A}^{\pm\frac{1}{2}}$ tồn tại.

(c) Dưa vào các tọa độ mới θ_j, qua biểu thức

$$q_i = \sum_{j=1}^{N} (\mathbf{A}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{S})_{ij}\theta_j ,$$

trong đó S chéo hóa A là ma trận trực giao. Xét

$$\begin{aligned} T = \dot{\mathbf{q}}^\dagger \mathbf{A}\dot{\mathbf{q}} &= (\mathbf{A}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{S}\dot{\boldsymbol{\theta}})^\dagger \mathbf{A}\mathbf{A}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{S}\dot{\boldsymbol{\theta}} \\ &= \dot{\boldsymbol{\theta}}^\dagger \mathbf{S}^\dagger (\mathbf{A}^{-\frac{1}{2}})^\dagger \mathbf{A}\mathbf{A}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{S}\dot{\boldsymbol{\theta}} . \end{aligned}$$

Do $\mathbf{A}$ là ma trận đối xứng thực, $\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{A}$ và

$$(\mathbf{A}^{-\frac{1}{2}})^{\dagger} = (\mathbf{A}^{\dagger})^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{A}^{-\frac{1}{2}} ,$$

phương trình trên chuyển thành

$$\mathbf{T} = \dot{\boldsymbol{\theta}}^{\dagger}\mathbf{S}^{\dagger}\mathbf{S}\dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\boldsymbol{\theta}}^{\dagger}\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\theta}} .$$

Tương tự

$$\mathbf{V} = \mathbf{q}^{\dagger}\mathbf{B}\mathbf{q} = \boldsymbol{\theta}^{\dagger}\mathbf{S}^{\dagger}\mathbf{A}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{S}\boldsymbol{\theta} .$$

Do $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ là ma trận đối xứng thực,

$$(\mathbf{A}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-\frac{1}{2}})^{\dagger} = (\mathbf{A}^{-\frac{1}{2}})^{\dagger}\mathbf{B}^{\dagger}(\mathbf{A}^{-\frac{1}{2}})^{\dagger} = \mathbf{A}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-\frac{1}{2}} .$$

$\mathbf{A}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-\frac{1}{2}}$ là ma trận đối xứng thực và có thể chéo hóa bằng ma trận trực giao $\mathbf{S}$. Nên ta có

$$T = \sum_{j=1}^{N} \dot{\theta}_j^2, \qquad V = \sum_{j=1}^{N} B_j\theta_j^2 ,$$

trong đó B_j là các thành phần đường chéo của ma trận chéo hoá $\mathbf{A}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-\frac{1}{2}}$, nghĩa là

$$(\mathbf{S}^{\dagger}\mathbf{A}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{S})_{ij} = B_j\delta_{ij} .$$

Hàm Lagrange là

$$L = T - V = \sum_{j=1}^{N}(\dot{\theta}_j^2 - B_j\theta_j^2)$$

và các phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0$$

suy ra

$$\ddot{\theta}_i + B_i\theta_i = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, N .$$

Do đó B_i là bình phương của các tần số góc chuẩn tắc ω_i của hệ.

2064

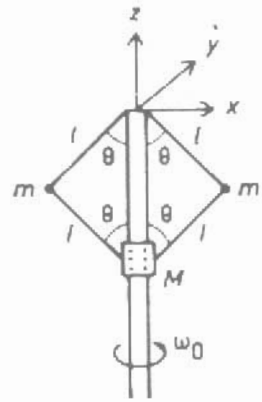
Một máy điều tốc kiểu quả cầu văng cấu tạo gồm hai khối lượng m nối các thanh có chiều dài l khối lượng M như trên hình 2.68. Cơ hệ bị bắt buộc phải quay quanh trục trên đó vật M có thể trượt lên trượt xuống không ma sát. Bỏ qua khối lượng của hai thanh và sức cản của không khí và giả thiết bán kinh của vật M là nhỏ. Giả sử đầu tiên trục quay bị buộc với vận tốc góc ω_0.

(a) Tìm chiều cao cân bằng của vật M.

(b) Tìm tần số của các dao động nhỏ xung quanh giá trị đó. Giả sử rằng trục quay bây giờ có thể quay tự do.

(c) Tần số của dao động nhỏ có thay đổi không? Nếu thay đổi thì tính giá trị mới.

(*Princeton*)



Hình 2.68

Lời giải:

(a) Sử dụng hệ tọa độ quay có trục x nằm trong mặt phẳng chứa các thanh của máy điều tốc như trên hình 2.68. Trong hệ tọa độ này các vật m, m và M lần lượt có tọa độ $(-l\sin\theta, 0, -l\cos\theta)$, $(l\sin\theta, 0, -l\cos\theta)$, $(0, 0, \; 2l\cos\theta)$. Trong hệ tọa độ cố định với cùng gốc và trục z vận tốc được cho bởi $\dot{\mathbf{r}}' = \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}$, trong đó $\boldsymbol{\omega}_0 = (0, 0, \omega_0)$. Do đó vận tốc tương ứng là $(-l\dot{\theta}\cos\theta, l\omega_0\sin\theta, l\dot{\theta}\sin\theta)$, $(l\dot{\theta}\cos\theta, -l\omega_0\sin\theta, l\dot{\theta}\sin\theta)$, $(0, 0, -2l\dot{\theta}\sin\theta)$. Như vậy động năng, thế năng hàm Lagrange của hệ lần lượt là

$$T - ml^2\omega_0^2\sin^2\theta + ml^2\dot{\theta}^2 + 2Ml^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta ,$$

$$V = -2mgl\cos\theta - 2Mgl\cos\theta ,$$

$$L = T - V = ml^2\omega_0^2\sin^2\theta + ml^2\dot{\theta}^2 + 2Ml^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta + 2(M + m)gl\cos\theta .$$

Phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

khi đó cho

$$2(m + 2M\sin^2\theta)l\ddot{\theta} + 2Ml\dot{\theta}^2\sin 2\theta - ml\omega_0^2\sin 2\theta + 2(m+M)g\sin\theta = 0\ .$$

Tại vị trí cân bằng, $\ddot{\theta} = 0$, $\dot{\theta} = 0$, $\theta = \theta_0$ và các phương trình trên trở thành

$$ml\omega_0^2\sin 2\theta_0 = 2(m+M)g\sin\theta_0\ . \tag{1}$$

Giải tìm θ_0 ta thu được hai vị trí cân bằng

(i) $\theta_0 = 0$,

(ii) $\cos\theta_0 = \dfrac{(m+M)g}{ml\omega_0^2}$.

Khoảng cách của vật M tới đỉnh của trục ở hai vị trí cân bằng lần lượt là

(i) $2l\cos\theta_0 = 2l$,

(ii) $2l\cos\theta_0 = \dfrac{2(m+M)g}{m\omega_0^2}$.

(b) Khi $\theta_0 = 0$, máy điều tốc sập lại và không có dao động. Xét trạng thái cân bằng cho bởi (ii). Đặt $\theta' = \theta - \theta_0$, suy ra $\dot{\theta} = \dot{\theta}'$. Với các dao động nhỏ, $\theta' \ll \theta_0$,

$$\sin\theta \approx \sin\theta_0 + \theta'\cos\theta_0\ ,$$
$$\sin 2\theta \approx \sin 2\theta_0 + 2\theta'\cos 2\theta_0\ .$$

Phương trình chuyển động nếu chỉ giữ lại các số hạng bậc nhất của các đại lượng nhỏ θ', $\dot{\theta}'$, $\ddot{\theta}'$ và sử dụng (1), sẽ trở thành

$$(m + 2M\sin^2\theta_0)l\ddot{\theta}' + [(m+M)g\cos\theta_0 - ml\omega_0^2\cos 2\theta_0]\theta' = 0\ .$$

Do đó tần số dao động là

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(m+M)g\cos\theta_0 - ml\omega_0^2\cos 2\theta_0}{(m + 2M\sin^2\theta_0)l}}\ .$$

(c) Ta có thể chờ đợi tần số dao động khác đi do vận tốc góc ω_0 ở phương trình trên là tùy ý. Đặt φ là góc quay quanh trục. Thay $\omega = \dot{\varphi}$ vào hàm Lagrange ta có

$$L = ml^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + ml^2\dot{\theta}^2 + 2Ml^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta + 2(m+M)gl\cos\theta\ .$$

Các phương trình Lagrange cho

$$\dot\varphi \sin^2\theta = c \qquad \text{(một hằng số)} ,$$

$$2(m+2M\sin^2\theta)l\ddot\theta + 2Ml\dot\theta^2\sin 2\theta - ml\dot\varphi^2\sin 2\theta + 2(m+M)g\sin\theta = 0 ,$$

kết hợp ta có

$$(m+2M\sin^2\theta)l\ddot\theta + Ml\dot\theta^2\sin 2\theta - mlc^2\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} + (m+M)g\sin\theta = 0 . \qquad (2)$$

Tại vị trí cân bằng, $\ddot\theta = 0$, $\dot\theta = 0$ và $\theta = \theta_0$, được cho bởi

$$mlc^2\frac{\cos\theta_0}{\sin^3\theta_0} = (m+M)g\sin\theta_0 .$$

Đối với các dao động nhỏ quanh θ_0, đặt $\theta = \theta_0 + \theta'$, trong đó $\theta' \ll \theta_0$. Do

$$\begin{aligned} mlc^2\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} &\approx mlc^2\frac{\cos\theta_0 - \theta'\sin\theta_0}{(\sin\theta_0+\theta'\cos\theta_0)^3} \\ &\approx mlc^2\frac{\cos\theta_0}{\sin^3\theta_0}(1-\theta'\tan\theta_0 - 3\theta'\cot\theta_0) \\ &= (m+M)g\sin\theta_0\left[1-\left(\frac{1+2\cos^2\theta_0}{\sin\theta_0\cos\theta_0}\right)\theta'\right] , \end{aligned}$$

phương trình (2) trở thành

$$(m+2M\sin^2\theta_0)l\ddot\theta' + (m+M)g\frac{(1+3\cos^2\theta_0)}{\cos\theta_0}\theta' = 0 .$$

Do đó tần số của các dao động nhỏ là

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(m+M)g(1+3\cos^2\theta_0)}{(m+2M\sin^2\theta_0)l\cos\theta_0}} .$$

2065

Một hạt khối lượng M chuyển động dọc theo trục x dưới ảnh hưởng của thế năng $V(x) = -Kx\exp(-ax)$, ở đây K và a là hằng số dương. Hãy tìm vị trí cân bằng và chu kì của dao động nhỏ xung quanh vị trí cân bằng đó. Cũng xét các trường hợp khi K và/hoặc a là âm.

(*Princeton*)

Lời giải:

Khai triển thế gần điểm x_0

$$V(x) = V(x_0) + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_0}(x - x_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{x_0}(x - x_0)^2 + \dots .$$

Đối với x_0 là vị trí cân bằng,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_0} = K(ax_0 - 1)e^{-ax_0} = 0 ,$$

suy ra

$$x_0 = \frac{1}{a} .$$

Do

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{V_0} = aK(2 - ax_0)e^{-ax_0} = \frac{ak}{e} > 0 ,$$

cân bằng là bền.

Đặt

$$\xi = x - x_0 = x - \frac{1}{a}$$

và lấy x_0 như mực so sánh của thế năng. Khi đó thế năng tại ξ là

$$V(\xi) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{x_0}\xi^2 = \frac{aK}{2e}\xi^2 .$$

Hàm Lagrange khi đó là

$$L = T - V = \frac{1}{2}M\dot{\xi}^2 - \frac{aK}{2e}\xi^2 .$$

Phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \xi} = 0$$

cho ra

$$M\ddot{\xi} + \frac{aK}{e}\xi = 0 .$$

Phương trình này cho thấy rằng tần số góc của dao động nhỏ xung quanh vị trí cân bằng là

$$\omega = \sqrt{\frac{aK}{Me}} ,$$

và chu kì là

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{Me}{aK}} .$$

Nếu cả hai a và K là âm, khi đó aK là dương và các kết quả trên vẫn đúng.

Nếu chỉ một trong a, K là âm thì khi đó

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{x_0} < 0 ,$$

có nghĩa là thế tại cân bằng là cực đại và cân bằng là không bền. Do đó dao động không xảy ra. Điều đó cũng có thể thấy từ phương trình chuyển động, chúng có thể cho ω ảo.

2066

Một hạt khối lượng m chuyển động dưới tác dụng của trọng trường trên một bề mặt nhẵn phương trình là $z = x^2 + y^2 - xy$, trục z là trục thẳng đứng, trỏ lên trên

(a) Hãy tìm phương trình chuyển động của hạt.

(b) Hãy tìm tần số của kiểu dao động chuẩn tắc đối với các dao động nhỏ xung quanh vị trí cân bằng bền.

(c) Nếu hạt được dịch chuyển nhẹ khỏi vị trí cân bằng và sau đó, tỉ số của các dịch chuyển x và y phải là như thế nào để đảm bảo chỉ kiểu dao động chuẩn tắc tần số cao hơn được kích thích?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Khi

$$z = x^2 + y^2 - xy ,$$
$$\dot{z} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} - \dot{x}y - x\dot{y} = \dot{x}(2x - y) + \dot{y}(2y - x) .$$

Hàm Lagrange là

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{x}^2(2x - y)^2 + \dot{y}^2(2y - x)^2 + 2\dot{x}\dot{y}(2x - y)(2y - x)] \\ &\quad - mg(x^2 + y^2 - xy) . \end{aligned}$$

Các phương trình Lagrange là

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

cho ta

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}[\dot{x} + \dot{x}(2x-y)^2 + \dot{y}(2x-y)(2y-x)] \\
&= 2\dot{x}^2(2x-y) - \dot{y}^2(2y-x) + 2\dot{x}\dot{y}(2y-x) - \dot{x}\dot{y}(2x-y) - 2gx + gy\,, \\
&\frac{d}{dt}[\dot{y} + \dot{y}(2y-x)^2 + \dot{x}(2x-y)(2y-x)] \\
&= 2\dot{y}^2(2y-x) - \dot{x}^2(2x-y) + 2\dot{x}\dot{y}(2x-y) - \dot{x}\dot{y}(2y-x) - 2gy + gx\,.
\end{aligned}$$

(b) Khi

$$\frac{\partial V}{\partial x} = mg(2x-y), \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = mg(2y-x)\,,$$

cân bằng xảy ra tại điểm gốc $(0,0)$. Với dao động nhỏ xung quanh gốc, $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ là các đại lượng nhỏ và các phương trình chuyển động giản ước thành

$$\begin{aligned}
\ddot{x} + 2gx - gy = 0\,, \\
\ddot{y} + 2gy - gx = 0\,.
\end{aligned}$$

Khi xét một nghiệm theo kiểu

$$x = x_0 e^{i\omega t}, \qquad y = y_0 e^{i\omega t}\,,$$

ta tìm thấy phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} 2g-\omega^2 & -g \\ -g & 2g-\omega^2 \end{vmatrix} = (g-\omega^2)(3g-\omega^2) = 0\,.$$

các nghiệm dương của nó

$$\omega_1 = \sqrt{g}, \qquad \omega_2 = \sqrt{3g}$$

là các tần số góc của kiểu dao động chuẩn tắc của hệ. Chú ý rằng do ω_1, ω_2 là các đại lượng thực nên cân bằng là bền.

(c) Do

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{2g-\omega^2}{g}\,,$$

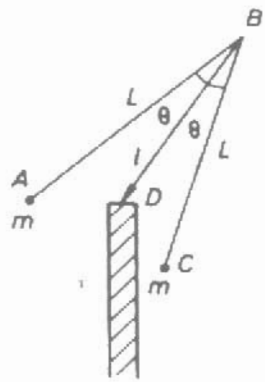
để kiểu dao động tần số cao hơn được kích thích ta cần $\frac{y_0}{x_0} = -1$. Do đó các dịch chuyển ban đầu của x và y cần phải bằng nhau về độ lớn và ngược dấu.

Chú ý rằng dưới điều kiện đó kiểu dao động tần số thấp hơn, vốn đòi hỏi $y_0/x_0 = 1$, không được kích thích.

2067

Một cấu trúc cứng bao gồm ba que không khối lượng được nối tại một điểm gắn với hai chất điểm (khối lượng mỗi chất điểm là m) như hình 2.69, với $AB = BC = L$, $BD = l$, góc $ABD = DBC = \theta$. Hệ cứng này được đỡ tại điểm D và đu đưa qua lại, với một biên độ dao động nhỏ. Tần số dao động bằng bao nhiêu? Giới hạn l bao nhiêu để dao động là bền?

(*CUSPEA*)



Hình 2.69

Lời giải:

Cấu trúc dao động trong một mặt phẳng thẳng đứng. Lấy mặt phẳng đó là mặt phẳng xy như chỉ ra trong hình 2.70 với gốc tọa độ tại điểm đỡ D và trục y hướng thẳng đứng lên trên. Ta có

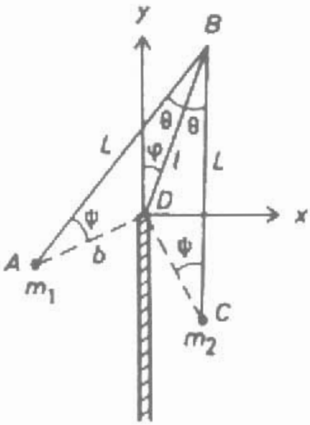
$$\overline{AD} = \overline{CD} = b = \sqrt{L^2 + l^2 - 2Ll\cos\theta}\ ,$$

và các góc giữa $\overline{AD}$ và $\overline{CD}$ với phương thẳng đứng tương ứng là $\alpha + \varphi$, $\alpha - \varphi$, ở đây $\alpha = \theta + \psi$, ψ được cho bởi

$$\frac{b}{\sin\theta} = \frac{l}{\sin\psi}\ .$$

Các khối lượng m_1, m_2 có các toạ độ

$$(-b\sin(\alpha + \varphi), -b\cos(\alpha + \varphi)),\ (b\sin(\alpha - \varphi), -b\cos(\alpha - \varphi))$$



Hình 2.70

và tương ứng vận tốc

$$(-b\dot{\varphi}\cos(\alpha+\varphi), b\dot{\varphi}\sin(\alpha+\varphi)),\ (-b\dot{\varphi}\cos(\alpha-\varphi), -b\dot{\varphi}\sin(\alpha-\varphi))$$

Như vậy hàm Lagrange là

$$L = T - V = mb^2\dot{\varphi}^2 + mgb[\cos(\alpha+\varphi) + \cos(\alpha-\varphi)] \ .$$

Phương trình Lagrange là

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

khi đó cho

$$2mb^2\ddot{\varphi} + mgb[\sin(\alpha+\varphi) - \sin(\alpha-\varphi)] = 0 \ .$$

Với dao động nhỏ, $\varphi \ll \alpha$ và

$$\sin(\alpha \pm \varphi) \approx \sin\alpha \pm \varphi\cos\alpha \ ,$$

do đó phương trình chuyển động rút gọn thành

$$b\ddot{\varphi} + \varphi g\cos\alpha = 0 \ ,$$

suy ra tần số góc là

$$\omega = \sqrt{\frac{g\cos\alpha}{b}} \ .$$

Do

$$\cos\alpha = \cos(\theta+\psi) = \cos\theta\cos\psi - \sin\theta\sin\psi$$
$$= \frac{1}{b}\left(\sqrt{b^2 - l^2\sin^2\theta}\,\cos\theta - l\sin^2\theta\right)$$
$$= \frac{1}{b}(L\cos\theta - l)\,,$$

ta có

$$\omega = \sqrt{\frac{g(L\cos\theta - l)}{L^2 + l^2 - 2Ll\cos\theta}}\,.$$

Bởi vì

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = mgb[\cos(\alpha+\varphi) + \cos(\alpha-\varphi)]$$
$$= 2mgb\cos\alpha$$

tại vị trí cân bằng $\varphi = 0$, các dao động là bền nếu $\cos\alpha > 0$. Điều đó đòi hỏi

$$L\cos\theta - l > 0\,,$$

hoặc

$$l < L\cos\theta\,.$$

3. CÁC PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC HAMILTON (2068 –2084)

2068

Một bộ điều tốc kiểu quả răng dùng cho cơ lưu nước gồm hai quả cầu, mỗi quả khối lượng m, được gắn bằng bốn cần có khớp nối, mỗi cần dài l, với các ống lồng nằm trên một thanh thẳng đứng. Ống lồng dưới có khối lượng M và momen quán tính không đáng kể, và trượt tự do lên, xuống không ma sát. Ống lồng trên được gắn chặt vào thanh. Hệ bị buộc quay với vận tốc góc ω không đổi.

(a) Hãy chọn toạ độ thích hợp và viết hàm Lagrange và Hamilton đối với hệ. Bỏ qua trọng lượng của cần và thanh, bỏ qua ma sát.

(b) Thảo luận chuyển động.

(c) Hãy xác định chiều cao z của ống lồng so với trên vị trí thấp nhất của nó, như hàm của ω đối với chuyển động dừng. Hãy tìm tần số của dao động nhỏ quanh chuyển động dừng đó.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Bộ điều tốc được chỉ ra như ở hình 2.68 của bài 2064. Dựa vào toạ độ như được chỉ ra và sử dụng các kết quả đã nhận được ở đó, ta có

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= ml^2\omega^2\sin^2\theta + ml^2\dot{\theta}^2 + 2Ml^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta + 2(m+M)gl\cos\theta \, . \end{aligned}$$

Hàm Hamilton là

$$H = \dot{\theta}p_\theta - L$$

Với động lượng suy rộng p_θ được định nghĩa như sau

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2(m + 2M\sin^2\theta)l^2\dot{\theta} \, .$$

Như vậy

$$\begin{aligned} H &= \dot{\theta}p_\theta - ml^2\omega^2\sin^2\theta - (m + 2M\sin^2\theta)l^2\dot{\theta}^2 - 2(m+M)gl\cos\theta \\ &= \frac{p_\theta^2}{4(m + 2M\sin^2\theta)l^2} - ml^2\omega^2\sin^2\theta - 2(m+M)gl\cos\theta \, . \end{aligned}$$

(b) Phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

cho

$$2(m + 2M\sin^2\theta)l\ddot{\theta} + 2Ml\dot{\theta}^2\sin 2\theta - ml\omega^2\sin 2\theta + 2(m+M)g\sin\theta = 0 \, .$$

Chuyển động được thảo luận trong bài 2064. Tóm tắt, M sẽ dao động lên xuống trên thanh thẳng đứng xung quanh vị trí cân bằng được cho bởi

$$\cos\theta_0 = \frac{(m+M)g}{ml\omega^2} \, .$$

(c) Tại cân bằng, M có toạ độ z là $-2l\cos\theta_0$. Do đó chiều cao của nó trên điểm thấp nhất là

$$2l - 2l\cos\theta_0 = 2l\left[1 - \frac{(m+M)g}{ml\omega^2}\right] \, .$$

Tần số góc của các dao động nhỏ xung quanh vị trí cân bằng là (Bài 2064)

$$\Omega = \sqrt{\frac{(m+M)g\cos\theta_0 - ml\omega^2\cos 2\theta_0}{(m+2M\sin^2\theta_0)l}}$$

$$= \omega\sqrt{\frac{m\sin^2\theta_0}{m+2M\sin^2\theta_0}}$$

với

$$\sin^2\theta_0 = 1 - \left[\frac{(m+M)g}{ml\omega^2}\right]^2 .$$

2069

Xét hai hệ vật thể bao gồm (1) chất điểm m và (2) một khối rắn quay kích thước giới hạn và khối lượng M (xem hình 2.71). Khối quay là một vật thể cứng mật độ đồng nhất, có trục đối xứng, và giống như chất điểm m, nó tự do chuyển động. Hãy thảo luận về chuyển động của hệ này nếu chất điểm bị hút về mỗi phân tố của khối quay bằng lực Culông hay lực hấp dẫn. Trong thảo luận trả lời một số câu hỏi sau:

(a) Hệ có bao nhiêu bậc tự do?

(b) Hệ tọa độ nào có thể là thích hợp?

(c) Lập hàm Lagrange (hay hàm Hamilton)? (Viết nó ra hoặc nói cách bạn có thể viết.)

(d) Tương tác giữa hạt và khối quay phụ thuộc vào toạ độ nào?

(e) Bạn có thể suy ra bao nhiêu hằng số chuyển động, và ý nghĩa vật lý của chúng thế nào?

(f) Quỹ đạo nào của hệ này rất giống với quỹ đạo của hai chất điểm? Hãy mô tả bản chất khác nhau (nhỏ) của chúng. Bản chất chuyển động của khối quay so với khối tâm của nó là gì?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Hệ có 9 bậc tự do, 3 thuộc về chất điểm m và 6 thuộc về khối quay cứng.

(b) Người ta có thể lấy toạ độ suy rộng như sau: 3 toạ độ x, y, z mô tả vị trí của m, 3 toạ độ X, Y, Z mô tả vị trí của khối tâm của khối quay cứng, 3

Hình 2.71

góc Euler φ, θ, ψ mô tả sự quay đối với khối tâm của khối quay, trục đối xứng của khối quay được lấy như trục Z' của hệ toạ độ nghỉ của khối quay.

(c) Động năng của hệ bao gồm ba phần: động năng của chất điểm m và động năng tịnh tiến và động năng quay của khối quay cụ thể,

$$T = T_1 + T_2 + T_3 ,$$

với

$$T_1 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) ,$$

$$T_2 = \frac{1}{2}M(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) ,$$

$$T_3 = \frac{1}{2}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{21} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} ,$$

ở đây $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ liên hệ với các góc Euler (bài 1212) bởi

$$\omega_1 = \dot{\theta} \cos\psi + \dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi ,$$

$$\omega_2 = -\dot{\theta} \sin\psi + \dot{\varphi} \sin\theta \cos\psi ,$$

$$\omega_3 = \dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi} ,$$

và tenxơ quán tính ứng với khối tâm của khối quay với trục Z' theo hướng trục đối xứng. Tính toán thế năng thì phức tạp hơn. Hãy tưởng tượng một chuỗi vỏ cầu mà tâm là chất điểm m và xét một vỏ bán kính trong và ngoài tương ứng là r và $r + dr$. Thế gây ra do tương tác Culông giữa phần tử dM của khối quay trong vỏ và chất điểm là

$$dV = -\frac{GmdM}{r} ,$$

ở đây G là hằng số hấp dẫn. Khi đó thế năng toàn phần của hệ là

$$V = -Gm \int \frac{dM}{r} .$$

Hàm Lagrange của hệ, $L = T - V$, khi đó có thể nhận được.

(d) Tương tác giữa chất điểm và khối quay phụ thuộc vào $X - x$, $Y - y$, $Z - z$, φ và θ.

(e) Do tương tác được bảo toàn và không gian là đồng nhất và đẳng hướng, các hằng số chuyển động là năng lượng $T + V$, momen động lượng toàn phần của chuyển động quay (một trong ba thành phần) và động lượng toàn phần (một trong ba thành phần) của hệ.

(f) Khi chất điểm và khối quay chuyển động tách rời nhau, các quỹ đạo của chúng sẽ rất giống quỹ đạo của hai chất điểm. Sự khác nhau bắt nguồn từ sự kiện là đối với khối quay khối tâm và tâm lực hấp dẫn không trùng nhau. Do đó momen quay của lực hấp dẫn quanh tâm khối khiến cho khối quay xoay quanh khối tâm của nó.

2070

Một môtơ làm quay một trục thẳng đứng gắn với một con lắc đơn dài l và khối lượng m, như hình 2.72. Con lắc bị buộc chuyển động trong một mặt phẳng. Mặt phẳng này được môtơ làm quay với tốc độ góc ω không đổi.

(a) Hãy tìm phương trình chuyển động của chất điểm m.

(b) Giải phương trình chuyển động, rút ra vị trí của chất điểm như là hàm của thời gian đối với mọi khả năng chuyển động của hệ. Trong trường hợp này sử dụng gần đúng góc nhỏ.

(c) Tìm tần số góc của mọi kiểu dao động.

(d) Tìm biểu thức cho momen quay mà môtơ phải cung cấp.

(e) Năng lượng toàn phần của hệ không đổi với thời gian? Hàm Hamilton là không đổi với thời gian? Hãy giải thích ngắn gọn.

(*UC, Berkeley*)

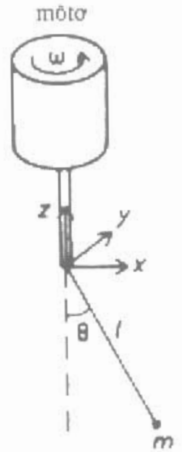
Lời giải:

(a) Sử dụng toạ độ quay như ở hình 2.72 với các trục x và z trong mặt phẳng dao động của con lắc. Trong hệ quy chiếu này khối chất m có toạ độ

$$(l\sin\theta, 0, -l\cos\theta)$$

và vận tốc

$$(l\dot{\theta}\cos\theta, 0, l\dot{\theta}\sin\theta)\,.$$



Hình 2.72

Trong hệ quy chiếu cố định m có vận tốc bổ sung là

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} &= (0, 0, \omega) \times (l \sin\theta, 0, -l\cos\theta) \\ &= (0, \omega l \sin\theta, 0)\ .\end{aligned}$$

Do đó hàm Lagrange của hệ là

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\omega^2\sin^2\theta + mgl\cos\theta\ .$$

Phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

khi đó cho

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l} - \omega^2\cos\theta\right)\sin\theta = 0\ .$$

(b) Để cân bằng, $\ddot{\theta} = 0$. Phương trình chuyển động cho vị trí cân bằng sau

$$\theta_1 = 0, \qquad \theta_2 = \arccos\left(\frac{g}{l\omega^2}\right)\ .$$

Với dao động gần $\theta_1 = 0$, trong gần đúng góc nhỏ phương trình chuyển động rút gọn về

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l} - \omega^2\right)\theta = 0\ .$$

Nếu $\omega < \sqrt{\frac{g}{l}}$, cân bằng là bền. θ là điều hòa và có thể được biểu thị bởi

$$\theta(t) = A_1 \cos(\Omega_1 t + \varphi_1) ,$$

ở đây A_1, φ_1 là các hằng số cần xác định từ điều kiện ban đầu, và $\Omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l} - \omega^2}$ là tần số góc của dao động góc nhỏ. Nếu $\omega > \sqrt{\frac{g}{l}}$, cân bằng không là bền.

Đối với dao động gần θ_2, đặt $\theta = \theta_2 + \alpha$, ở đây $\alpha \ll \theta_2$. Phương trình chuyển động khi đó với gần đúng bậc nhất là

$$\ddot{\alpha} + \left(\frac{g}{l} - \omega^2 \cos\theta_2 + \omega^2 \alpha \sin\theta_2\right)(\sin\theta_2 + \alpha\cos\theta_2) = 0 ,$$

hay

$$\ddot{\alpha} + \alpha\omega^2 \sin^2\theta_2 = 0 .$$

Nghiệm là

$$\alpha(t) = A_2 \cos(\Omega_2 t + \varphi_2) ,$$

ở đây $\Omega_2 = \omega \sin\theta_2 = \frac{1}{l\omega}\sqrt{l^2\omega^4 - g^2}$ là tần số góc của dao động nhỏ quanh θ_2, A_2, φ_2 là hằng số được xác định từ điều kiện ban đầu. Do đó

$$\theta(t) = A_2 \cos(\Omega_2 t + \varphi_2) + \theta_2 .$$

(c) Với dao động góc nhỏ quanh θ_1, tần số góc là $\Omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l} - \omega^2}$; và xung quanh θ_2, $\Omega_2 = \frac{1}{l\omega}\sqrt{l^2\omega^4 - g^2}$.

(d) Momen xung lượng quanh trục z là

$$J = ml\sin\theta \cdot l\sin\theta \cdot \omega = ml^2\omega\sin^2\theta .$$

Vì thế momen lực môtơ phải cung cấp là

$$M = \frac{dJ}{dt} = ml^2\omega\sin(2\theta)\frac{d\theta}{dt} ,$$

ở đây đối với θ các biểu thức nhận được trong phần (b) phải được sử dụng.

(e) Động năng trong hệ quy chiếu cố định, T, không phải là hàm bậc nhất cuả vận tốc suy rộng, do đó cơ năng không được bảo toàn. Về mặt vật lý, một con lắc bị buộc phải dao động trong mặt phẳng quay. Như vậy ràng buộc không phải ràng buộc ổn định và cơ năng không được bảo toàn. Mặt khác, không phải là hàm hiện của t, hàm Hamilton H được bảo toàn.

Lưu ý rằng trong khi trong hệ quy chiếu cố định cơ năng không được bảo toàn, do hệ là hệ chỉnh hình không ổn định và toàn bộ lực ngoài là bảo toàn, nên năng lượng suy rộng H được bảo toàn. Ta có

$$\begin{aligned} H &= \dot\theta\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} - L \\ &= \frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2 - \frac{1}{2}ml^2\omega^2\sin^2\theta - mgl\cos\theta = \text{ hằng số }. \end{aligned}$$

Trong hệ quy chiếu quay cố định với môtơ, do lực ly tâm tưởng tượng

$$ml\omega^2\sin\theta = -\frac{\partial V}{\partial(l\sin\theta)} ,$$

do đó thế năng là

$$V = -\frac{1}{2}ml^2\omega^2\sin^2\theta - mgl\cos\theta ,$$

năng lượng toàn phần là

$$\frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2 + V = H = \text{ hằng số } .$$

Vì vậy, hoặc cơ năng được bảo toàn hoặc không phụ thuộc vào việc chọn hệ quy chiếu so sánh.

2071

Tương tác cổ điển giữa hai nguyên tử khí trơ, mà mỗi nguyên tử có khối lượng m, được cho bởi thế

$$V(r) = -\frac{2A}{r^6} + \frac{B}{r^{12}}, \qquad A, B > 0, \quad r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| .$$

(a) Hãy đưa ra hàm Hamilton đối với hệ hai nguyên tử.

(b) Hãy mô tả đầy đủ các trạng thái năng lượng cổ điểm thấp nhất cuả hệ này.

(c) Nếu năng lượng là hơi cao hơn năng lượng thấp nhất [phần (b)], thì các tần số có thể của chuyển động của hệ sẽ như thế nào?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Khối tâm của hệ được cho bởi $\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) = (x, y, z)$, khối lượng rút gọn $\mu = \frac{m^2}{m+m} = \frac{m}{2}$, và khối lượng toàn phần là $M = 2m$. Đặt $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Khi đó động năng của hệ là

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}} \\ &= \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) \end{aligned}$$

và hàm Lagrange

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + \frac{2A}{r^6} - \frac{B}{r^{12}}, \end{aligned}$$

ở đây r, θ, φ là toạ độ cầu của hệ quy chiếu cố định tại khối tâm. Động lượng suy rộng là

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x}, \qquad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = M\dot{y}, \qquad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = M\dot{z},$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \mu\dot{r}, \qquad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2\dot{\theta}, \qquad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta.$$

Hàm Hamilton là

$$\begin{aligned} H &= \sum_i p_i\dot{q}_i - L \\ &= \frac{1}{2M}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2\mu}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\varphi^2\right) - \frac{2A}{r^6} + \frac{B}{r^{12}}. \end{aligned}$$

(b) Trạng thái năng lượng thấp nhất tương ứng với $p_x = p_y = p_z = p_r = p_\theta = p_\varphi = 0$ và một r_0 cực tiểu hóa

$$-\frac{2A}{r^6} + \frac{B}{r^{12}}.$$

Đặt

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{2A}{r^6} + \frac{B}{r^{12}}\right) = 0,$$

ta nhận được $r_0 = (B/A)^{\frac{1}{6}}$ như là khoảng cách giữa hai nguyên tử với trạng thái năng lượng cổ điển thấp nhất. Đối với trạng thái này năng lượng của hệ là

$$H = \frac{-A^2}{B}.$$

(c) Nếu năng lượng chỉ cao hơn năng lượng thấp nhất một chút và các bậc tự do tương ứng với x, y, z, θ, φ vẫn chưa bị kích thích ($p_x = p_y = p_z = p_\theta = p_\varphi = 0$), thì ta có

$$H = \frac{p_r^2}{2\mu} - \frac{2A}{r^6} + \frac{B}{r^{12}} \,.$$

Do

$$\left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)_{r_0} = 72A\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{4}{3}} ,$$

hàm Lagrange là

$$L = T - V = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - 36A\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{4}{3}}(r - r_0)^2 = \frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2 - 36A\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{4}{3}}\rho^2 ,$$

ở đây $\rho = r - r_0 \ll r_0$. Phương trình Lagrange cho ta

$$\mu\ddot{\rho} + 72A\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{4}{3}}\rho = 0 \,.$$

Do đó

$$\omega = \sqrt{\frac{72A}{\mu}\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{4}{3}}} = 12\left(\frac{A}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{2}{3}} .$$

2072

Xét chất điểm m bị buộc chuyển động trên mặt cầu bán kính R. Không có bất kì loại ngoại lực nào tác dụng lên chất điểm.

(a) Số các toạ độ suy rộng cần thiết để mô tả bài toán là bao nhiêu?

(b) Chọn và viết hàm Lagrange của hệ.

(c) Hàm Hamilton của hệ như thế nào? Nó có được bảo toàn không?

(d) Chứng tỏ rằng chuyển động của chất điểm là dọc theo một đường tròn lớn của hình cầu.

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) Do hạt bị buộc chuyển động trên mặt cầu, có hai bậc tự do và do đó cần có hai toạ độ suy rộng.

(b) Chọn (θ, φ) của toạ độ cầu như toạ độ suy rộng. Khi không có ngoại lực, $V = 0$. Hàm Lagrange của hệ là

$$L = T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) .$$

(c) Do $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, ta có

$$p_\theta = mR^2\dot{\theta}, \qquad p_\varphi = mR^2\dot{\varphi}\sin^2\theta ,$$

và

$$H = p_\theta\dot{\theta} + p_\varphi\dot{\varphi} - L = \frac{1}{2mR^2}\left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right) .$$

Vì hàm Hamilton H không phải là hàm hiện của thời gian, nên nó là hằng số của chuyển động, hay nói cách khác, nó được bảo toàn.

(d) Phương trình Hamilton

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}$$

cho ta

$$p_\varphi = \dot{\varphi}\sin^2\theta = \text{ hằng số} .$$

Ta chọn hệ toạ độ (θ, φ) sao cho để điều kiện ban đầu là $\dot{\varphi} = 0$ tại $t = 0$. Khi đó hằng số trên là 0 tại mọi thời điểm $\dot{\varphi}\sin^2\theta = 0$. Do θ không bằng không tại mọi thời điểm thì $\dot{\varphi} = 0$, hay $\varphi =$ hằng số, chuyển động của hạt là dọc theo đường tròn lớn nhất của hình cầu.

2073

Một ống nhẹ, hình chữ U được chứa một phần thuỷ ngân (tổng khối lượng là M, khối lượng trên đơn vị dài là ρ) như ở hình 2.73. Ống được lắp sao cho nó có thể quay quanh một trong hai chân thẳng đứng. Bỏ qua ma sát, khối lượng và momen quán tính của ống thuỷ tinh, và momen quán tính của cột thuỷ ngân trên trục quay.

(a) Hãy tính thế năng của cột thuỷ ngân và mô tả chuyển động khả dĩ của nó khi ống không quay.

(b) Ống được cho quay với vận tốc góc ban đầu ω_0 và với cột thuỷ ngân đứng yên và dịch chuyển z_0 từ vị trí cân bằng.

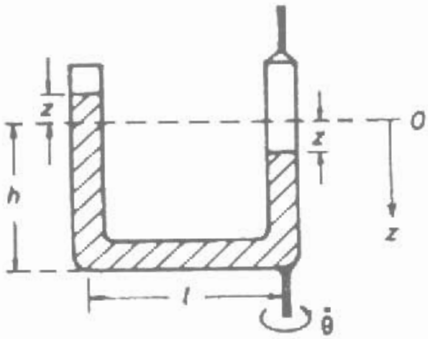
1) Viết hàm Lagrange của hệ.

2) Viết phương trình chuyển động.

3) Những đại lượng nào được bảo toàn trong chuyển động? Cho biểu thức của các đại lượng đó.

4) Mô tả chuyển động một cách định tính càng đầy đủ càng tốt.

(*Wisconsin*)



Hình 2.73

Lời giải:

(a) Đặt z là khoảng cách của đỉnh cột thuỷ ngân từ vị trí cân bằng của nó. Giả thiết một ngoại lực F tác dụng lên đỉnh đi xuống của cột thuỷ ngân làm cho nó đi xuống từ từ một khoảng dz. Khi đó $F = 2\rho zg$ và công nó thực hiện là

$$dW = Fdz = 2z\rho gdz \ .$$

Công này được trữ như thế năng dV. Do đó thế năng của cột thuỷ ngân là $V = \rho gz^2$. Nếu ống không quay, cột thuỷ ngân sẽ dao động quanh vị trí cân bằng và hàm Lagrange của hệ là

$$L = \frac{1}{2}\rho s\dot{z}^2 - \rho gz^2 \ ,$$

ở đây $s = l + 2h$. Phương trình Lagrange cho ta

$$\ddot{z} + \frac{2g}{s}z = 0 \ .$$

Do đó cột thuỷ ngân sẽ dao động với tần số góc

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{s}} = \sqrt{\frac{2g}{l+2h}} \ .$$

(b) Hệ có hai bậc tự do khi ống chữ U quay. z và góc quay θ được lấy như toạ độ suy rộng.

1) Ta có

$$T = \frac{1}{2}\rho(h-z)\dot{z}^2 + \frac{1}{2}\rho\int_0^l(\dot{z}^2 + x^2\dot{\theta}^2)dx + \frac{1}{2}\rho(h+z)(\dot{z}^2 + l^2\dot{\theta}^2) ,$$

$$V = \rho g z^2 ,$$

như vậy hàm Lagrange là

$$L = T - V = \frac{1}{2}\rho s\dot{z}^2 + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{l}{3} + h + z\right)l^2\dot{\theta}^2 - \rho g z^2 .$$

2) Các phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

cho ta

$$s\ddot{z} + 2gz - \frac{1}{2}l^2\dot{\theta}^2 = 0 ,$$

$$\rho\left(\frac{l}{3} + h + z\right)l^2\dot{\theta} = \text{ hằng số.}$$

Do $p_\theta = \frac{\partial L}{\dot{\theta}}$, phương trình cuối cùng có thể viết như $p_\theta =$ hằng số. Với điều kiện ban đầu $\dot{\theta} = \omega_0$, $\dot{z} = 0$, $z = z_0$ tại $t = 0$, ta có

$$p_\theta = \rho\left(\frac{l}{3} + h + z_0\right)l^2\omega_0 .$$

3) Hàm Hamilton của hệ là

$$\begin{aligned} H &= p_z\dot{z} + p_\theta\dot{\theta} - L \\ &= \frac{1}{2}\rho s\dot{z}^2 + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{l}{3} + h + z\right)l^2\dot{\theta}^2 + \rho g z^2 = T + V , \end{aligned}$$

trong đó $p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \rho s\dot{z}$. Như vậy H bằng năng lượng toàn phần của hệ. Theo biến chính tắc ta có

$$H = \frac{p_z^2}{2\rho s} + \frac{p_\theta^2}{2\left(\frac{l}{3} + h + z\right)\rho l^2} + \rho g z^2 .$$

Do H không phụ thuộc vào t một cách tường minh nó là hằng số chuyển động, cộng với hằng số

$$p_\theta = \rho\left(\frac{l}{3} + h + z\right)l^2\dot{\theta} .$$

Khi sử dụng điều kiện ban đầu đã cho ta thu được

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{l}{3} + h + z_0\right)\rho l^2\omega_0^2 + \rho g z_0^2 .$$

4) Chuyển động của cột thuỷ ngân bao gồm hai thành phần. Một thành phần là quay cùng với ống. Vận tốc góc của sự quay thay đổi cùng với chuyển động lên xuống của cột thuỷ ngân. Khi z tăng sự quay chậm lại và ngược lại, để giữ momen xung lượng quanh trục đứng là không đổi. Thành phần kia là chuyển động của cột thuỷ ngân trong ống. Phương trình chuyển động theo z là

$$s\ddot{z} + 2gz = \frac{A}{\left(\frac{l}{3} + h + z\right)^2} ,$$

ở đây $A = \frac{p_\theta^2}{2\rho^2 l^2}$ là một hằng số. Nói chung, có ba vị trí cân bằng tương ứng với ba nghiệm của phương trình

$$2gz = \frac{A}{\left(\frac{l}{3} + h + z\right)^2} .$$

Gần mỗi vị trí cân bằng, cột chịu các dao động nhỏ. Giả thiết rằng z_1 là một trong các vị trí cân bằng, có nghĩa là

$$2gz_1 = \frac{A}{\left(\frac{l}{3} + h + z_1\right)^2} .$$

Đối với các dao động nhỏ đặt $z = z_1 + z'$, ở đây z' là một đại lượng bé. Phương trình chuyển động trở thành

$$s\ddot{z}' + 2gz' = \frac{-2Az'}{\left(\frac{l}{3} + h + z_1\right)^3} ,$$

nó cho tần số góc của dao động là

$$\Omega = \sqrt{\frac{2g}{s} + \frac{2A}{s\left(\frac{l}{3} + h + z_1\right)^3}} .$$

Do Ω là thực, các vị trí cân bằng là bền.

2074

Một hạt dưới tác dụng của trọng lực trượt trên bề mặt trong của một paraboloit tròn xoay nhẵn có trục thẳng đứng. Sử dụng khoảng cách từ trục, r, và góc phương vị φ như toạ độ suy rộng, hãy tìm

(a) Viết hàm Lagrange của hệ.

(b) Các động lượng suy rộng và hàm Hamilton tương ứng.

(c) Phương trình chuyển động của toạ độ r như hàm thời gian.

(d) Nếu $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, hãy chứng minh rằng hạt có thể thực hiện các dao động nhỏ quanh điểm thấp nhất của paraboloit, và tìm tần số của những dao động đó.

(Columbia)

Lời giải:

Giả thiết paraboloit tròn xoay được tạo ra bởi một parabon mà trong toạ độ trụ (r, φ, z) được biểu diễn bởi

$$z = Ar^2 ,$$

ở đây A là hằng số dương.

(a) Hàm Lagrange của hệ là

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz \\ &= \frac{1}{2}m(1 + 4A^2r^2)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - Amgr^2 . \end{aligned}$$

(b) Các xung lương suy rộng là

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m(1 + 4A^2r^2)\dot{r} ,$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} ,$$

Và hàm Hamilton là

$$\begin{aligned} H &= p_r\dot{r} + p_\varphi\dot{\varphi} - L \\ &= \frac{1}{2}m(1 + 4A^2r^2)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + Amgr^2 \\ &= \frac{p_r^2}{2m(1 + 4A^2r^2)} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + Amgr^2 . \end{aligned}$$

(c) Các phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

cho ta

$$m(1 + 4A^2r^2)\ddot{r} + 4mA^2r\dot{r}^2 - mr\dot{\varphi}^2 + 2Amgr = 0 \, ,$$
$$mr^2\dot{\varphi} = \text{ hằng số} \, .$$

Khi đặt hằng số là mh và khử bỏ $\dot{\varphi}$ khỏi phương trình đầu tiên, ta nhận được phương trình đối với r là

$$(1 + 4A^2r^2)r^3\ddot{r} + 4A^2r^4\dot{r}^2 + 2Agr^4 = h^2 \, .$$

(d) Nếu $\dot{\varphi} = 0$, thì phương trình thứ nhất của (c) trở thành

$$(1 + 4A^2r^2)\ddot{r} + 4A^2r\dot{r}^2 + 2Agr = 0 \, .$$

Điểm thấp nhất của paraboloit được cho bởi $r = 0$. Đối với các dao động nhỏ trong lân cận của nó, r, $\dot{r}$, $\ddot{r}$ là các đại lượng nhỏ. Khi đó với gần đúng bậc nhất phương trình ở trên trở thành

$$\ddot{r} + 2Agr = 0 \, .$$

Do hệ số của r là dương, hạt thực hiện chuyển động điều hòa đơn giản quanh $r = 0$ với tần số góc

$$\omega = \sqrt{2Ag} \, .$$

2075

Một điện tử phi tương đối tính khối lượng m, điện tích $-e$ trong một manheton hình trụ chuyển động giữa một dây bán kính a dưới điện thế âm $-\phi_0$ và vật dẫn trụ đồng tâm bán kính R tại thế 0. Có từ trường không đổi đều B song song với trục. Sử dụng toạ độ trụ r, θ, z. Các thế vectơ điện và từ có thể được viết như sau

$$\phi = -\phi_0 \frac{\ln(r/R)}{\ln(a/R)}, \qquad \mathbf{A} = \frac{1}{2}Br\mathbf{e}_\theta$$

($\mathbf{e}_\theta$ là vectơ đơn vị trong hướng tăng θ).

(a) Viết các hàm Lagrange và Hamilton.

(b) Chứng minh rằng có ba hằng số chuyển động. Viết chúng ra và thảo luận các loại chuyển động có thể xảy ra.

(c) Giả sử rằng điện tử rời dây trong với vận tốc ban đầu bằng không, có một giá trị của từ trường B_c như thế nào để với $B \leq B_c$ điện tử có thể đạt tới trụ ngoài, và với $B > B_c$ điện tử không thể tới trụ ngoài. Tìm B_c và phác thảo quỹ đạo của điện tử cho trường hợp này.
Có thể cho rằng $R \gg a$.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Trong hệ SI, hàm Lagrange là

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + e\phi - e\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} .$$

Vì

$$\dot{\mathbf{r}} = (\dot{r}, r\dot{\theta}, \dot{z}), \qquad \mathbf{A} = (0, \frac{1}{2}Br, 0) ,$$

hàm trên trở thành

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + e\phi - \frac{1}{2}eBr^2\dot{\theta} .$$

Động lượng suy rộng là

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \qquad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} - \frac{1}{2}eBr^2, \qquad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} ,$$

Và hàm Hamilton là

$$\begin{aligned} H &= p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} + p_z\dot{z} - L \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - e\phi \\ &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{1}{2mr^2}\left(p_\theta + \frac{1}{2}eBr^2\right)^2 + \frac{p_z^2}{2m} - e\phi \\ &= \frac{1}{2m}\left[p_r^2 + \left(\frac{p_\theta}{r} + \frac{1}{2}eBr\right)^2 + p_z^2\right] - e\phi . \end{aligned}$$

(b) Khi H không là hàm hiện của thời gian, nó là một hằng số chuyển động. Ngoài ra do

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} ,$$

nếu H không chứa q_i một cách tường minh, thì p_i là một hằng số của chuyển động. Từ đó p_θ, p_z là các hằng số chuyển động. Một cách tường minh,

$$H = \frac{1}{2m}\left[p_r^2 + \left(\frac{p_\theta}{r} + \frac{1}{2}eBr\right)^2 + p_z^2\right] - e\phi = E ,$$

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta} - \frac{1}{2}eBr^2 = C_1 ,$$

$$p_z = m\dot{z} = C_2 ,$$

ở đây E, C_1, C_2 là các hằng số.

(c) Điều kiện ban đầu $r = a$, $\dot{r} = \dot{\theta} = \dot{z} = 0$ tại $t = 0$ cho ta

$$E = -e\phi = e\phi_0, \qquad C_1 = -\frac{1}{2}eBa^2, \qquad C_2 = 0 .$$

$p_z = C_2 = 0$ nghĩa là không có chuyển động theo trục z. $H = E$ cho ta

$$\frac{1}{2m}\left[p_r^2 + \left(\frac{1}{2}eB\right)^2\left(r - \frac{a^2}{r}\right)^2\right] + e\phi_0\left[\frac{\ln\left(\frac{r}{R}\right)}{\ln\left(\frac{a}{R}\right)}\right] = e\phi_0 .$$

Giả thiết một giá trị B_c của từ trường sẽ chỉ khiến cho điện tử đạt tới hình trụ ngoài. Khi đó, do $p_r = 0$ tại $r = R$, biểu thức trên cho ta

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{1}{2}eB_c\right)^2\left(R - \frac{a^2}{R}\right)^2 = e\phi_0 .$$

nếu ta cho rằng $a \ll R$, nó rút gọn về

$$B_c = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{2m\phi_0}{e}} .$$

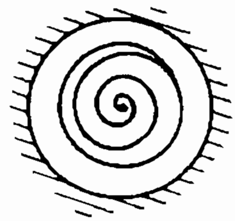
Tại $r = R$, p_r được cho bởi

$$\frac{1}{2m}\left[p_r^2 + \left(\frac{1}{2}eBR\right)^2\right] = e\phi_0 ,$$

hay

$$p_r^2 = 2me\phi_0 - \left(\frac{1}{2}eBR\right)^2 = (B_c^2 - B^2)\left(\frac{1}{2}eR\right)^2 .$$

p_r là thực tại $r = R$ nếu $B \leq B_c$. Do đó dưới điều kiện này điện tử có thể tới trụ ngoài. Nếu $B > B_c$, p_r là ảo tại $r = R$ và điện tử không thể tới trụ ngoài. Với trường hợp sau quỹ đạo của điện tử được phác họa trên hình 2.74.



Hình 2.74

2076

Xét hàm Lagrange

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)e^{\gamma t}$$

đối với chuyển động của chất điểm m trong một chiều (x). Các hằng số m, γ và ω là thực và dương.

(a) Tìm phương trình chuyển động.

(b) Giải thích phương trình chuyển động bằng cách nêu các loại lực mà chất điểm chịu tác dụng.

(c) Tìm động lượng chính tắc và từ đó xây dựng hàm Hamilton.

(d) Hàm Hamilton có phải là hằng số của chuyển động? Năng lượng có được bảo toàn không? Giải thích.

(e) Với điều kiện ban đầu $x(0) = 0$ và $\dot{x}(0) = v_0$, $x(t)$ tiệm cận đến cái gì khi $t \to \infty$?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

cho phương trình chuyển động

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -\gamma \dot{x} \ .$$

(b) Hạt chuyển động như một dao động tử điều hòa tắt dần. Nó chịu một lực hồi phục $-m\omega^2 x$ và lực làm suy giảm $-m\gamma\dot{x}$ tỉ lệ với tốc độ của nó.

(c) Động lượng chính tắc là

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = me^{\gamma t}\dot{x}$$

và hàm Hamilton là

$$\begin{aligned} H &= p\dot{x} - L \\ &= me^{\gamma t}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}me^{\gamma t}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}me^{\gamma t}\omega^2 x^2 \\ &= \frac{p^2 e^{-\gamma t}}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 e^{\gamma t} \ . \end{aligned}$$

(d) Vì H phụ thuộc tường minh vào thời gian, nên nó không phải là một hằng số chuyển động. Điều đó suy ra năng lượng cũng không được bảo toàn. Về mặt vật lý, trong quá trình chuyển động, lực làm tắt dần thực hiện liên tục công âm, gây nên tiêu tán năng lượng.

(e) Thử một nghiệm kiểu $x \sim e^{i\Omega t}$. Thay thế vào phương trình chuyển động cho ta

$$\Omega^2 - i\gamma\Omega - \omega^2 = 0 \ ,$$

nó cho các nghiệm

$$\Omega = \frac{i}{2}\left(\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}\right) \ .$$

Do đó

$$x = A\exp\left[-\frac{1}{2}(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2})t\right] + B\exp\left[-\frac{1}{2}(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2})t\right] \ .$$

Các điều kiện ban đầu $x = 0$, $\dot{x} = v_0$ tại $t = 0$ cho ta

$$B = -A, \qquad A = -\frac{v_0}{\sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}} \ .$$

Nếu $\gamma < 2\omega$, đặt $\frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2} = i\omega_1$. Khi đó

$$x = -\frac{v_0}{2i\omega_1}e^{-\frac{\gamma t}{2}}\left(e^{-i\omega_1 t} - e^{i\omega_1 t}\right) = \frac{v_0}{\omega_1}e^{-\frac{\gamma t}{2}}\sin(\omega_1 t) \ ,$$

do đó $x \to 0$ khi $t \to \infty$.

Nếu $\gamma > 2\omega$, thì cả hai $\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}$ đều là thực và dương do đó sẽ không có dao động và x sẽ giảm đơn điệu tới 0 khi $t \to \infty$.

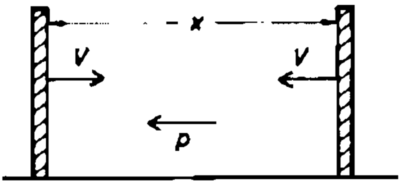
2077

Một hạt bị giam ở bên trong một cái hộp và chỉ có thể chuyển động dọc theo trục x. Các vách hai đầu chuyển động tới tâm với tốc độ nhỏ so với tốc độ hạt (hình 2.75).

(a) Nếu động lượng của hạt là p_0 khi các vách hộp ở cách nhau một khoảng x_0, tìm động lượng của hạt ở thời điểm bất kì sau đó. Va chạm với vách là hoàn toàn đàn hồi. Thừa nhận trong suốt thời gian tốc độ của hạt nhỏ hơn rất nhiều so với tốc độ ánh sáng.

(b) Khi các vách ở cách nhau một khoảng x ngoại lực trung bình phải đặt vào mỗi vách là bao nhiêu để nó chuyển động với vận tốc không đổi V?

(UC, Berkeley)



Hình 2.75

Lời giải:

(a) Xét va chạm của hạt với một trong các vách. Khi va chạm là hoàn toàn đàn hồi, các tốc độ tương đối trước và sau va chạm là bằng nhau. Nếu hạt là hạt tới với vận tốc v và phản xạ lại với vận tốc v' và vách có vận tốc V hướng tới hạt, thì ta có

$$v + V = v' - V,$$

có nghĩa là

$$v' = v + 2V .$$

Như vậy sau mỗi va chạm, độ lớn của động lượng hạt tăng thêm một lượng $2mV$, m là khối lượng hạt. Khi các vách ở khoảng cách x, do V nhỏ hơn nhiều so với tốc độ của hạt, nên quãng thời gian giữa hai va chạm liên tiếp là

$$T = \frac{x}{\left(\frac{p}{m}\right)} = \frac{xm}{p} ,$$

p là động lượng hạt. Độ thay đổi động lượng trong thời gian dt là

$$dp = 2mV\frac{dt}{T} = \frac{2Vpdt}{x} .$$

Khi các vách chuyển động lại với nhau với vận tốc V,

$$x = x_0 - 2Vt\,,$$

đo thời gian từ thời điểm $x = x_0$. Khi đó

$$dp = -\frac{pdx}{x}.$$

Do $p = p_0$ khi đó $x = x_0$, tích phân của nó cho ta

$$p = \frac{p_0 x_0}{x} = \frac{p_0 x_0}{x_0 - 2Vt}\,.$$

(b) Xét va chạm của hạt với *một* vách. Động lượng hạt đạt được là

$$\mathbf{p} + 2m\mathbf{V} - (-\mathbf{p}) = 2\mathbf{p} + 2m\mathbf{V}\,.$$

Khoảng thời gian giữa hai va chạm liên tiếp với vách *đó* là

$$T' = \frac{2x}{\left(\frac{p}{m}\right)} = \frac{2xm}{p}\,,$$

do đó độ thay đổi động lượng gây ra do va chạm với vách trong thời gian dt là

$$dp = 2(p + mV)\frac{dt}{T'}\,.$$

Từ đó

$$\frac{dp}{dt} = \frac{(p + mV)p}{xm} \approx \frac{p^2}{xm} = \frac{p_0^2 x_0^2}{mx^3}$$

do $\frac{p}{m} \gg V$. Đó là lực mà vách tác dụng lên hạt. Để giữ vách chuyển động với vận tốc không đổi, lực cùng giá trị phải tác dụng vào mỗi vách. Bài toán cũng có thể được giải nhờ sử dụng hình thức luận Hamilton. Sử dụng hệ quy chiếu gắn vào một trong các vách, thí dụ vách bên trái. Như ở hình 2.75, hạt có vận tốc $-\frac{p}{m} - V$. Hàm Hamilton là

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m} + V\right)^2 \\ &= \frac{1}{2m}(p + mV)^2 \approx \frac{p^2}{2m} = \frac{p_0^2 x_0^2}{2mx^2}\,. \end{aligned}$$

Lực trên hạt là $\dot{p}$, nó được cho bởi phương trình Hamilton

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{p_0^2 x_0^2}{mx^3}\,.$$

2078

Dấu ngoặc Poisson được định nghĩa bởi

$$[a,b] = \sum_k \left(\frac{\partial a}{\partial q_k} \frac{\partial b}{\partial p_k} - \frac{\partial a}{\partial p_k} \frac{\partial b}{\partial q_k} \right) .$$

(a) Hãy chỉ ra rằng đối với một đại lượng động lực $a(q,p,t)$

$$\frac{da}{dt} = [a, H] + \frac{\partial a}{\partial t} .$$

Dao động tử hai chiều có các năng lượng

$$T(\dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) ,$$
$$V(x, y) = \frac{1}{2} K(x^2 + y^2) + Cxy ,$$

ở đây C và K là các hằng số.

(b) Hãy chỉ ra bằng một phép biến đổi toạ độ rằng dao động tử này là tương đương với một dao động tử điều hòa không đẳng hướng.

(c) Hãy tìm hai hằng số độc lập của chuyển động và kiểm tra có sử dụng phần (a).

(d) Nếu $C = 0$ hãy tìm hằng số thứ ba của chuyển động.

(e) Chứng minh rằng đối với dao động tử đẳng hướng ma trận đối xứng.

$$A_{ij} = \frac{p_i p_j}{2m} + \frac{1}{2} K x_i x_j$$

là một hằng số chuyển động bằng cách biểu diễn mỗi phần tử theo các hằng số chuyển động đã biết.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Sử dụng các phương trình chính tắc Hamilton

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} ,$$

ta tìm được

$$\frac{da}{dt} = \sum_k \frac{\partial a}{\partial q_k}\dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial a}{\partial p_k}\dot{p}_k + \frac{\partial a}{\partial t}$$

$$= \sum_k \frac{\partial a}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \sum_k \frac{\partial a}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k} + \frac{\partial a}{\partial t}$$

$$= [a, H] + \frac{\partial a}{\partial t} .$$

(b) Đưa vào các biến số mới

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y), \qquad \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) ,$$

ta có

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta + \xi), \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta - \xi) .$$

Khi đó

$$T = \frac{1}{4}m\left[(\dot{\eta} + \dot{\xi})^2 + (\dot{\eta} - \dot{\xi})^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{\eta}^2 + \dot{\xi}^2) ,$$

$$V = \frac{1}{4}K[(\eta + \xi)^2 + (\eta - \xi)^2] + \frac{1}{2}C(\eta^2 - \xi^2)$$

$$= \frac{1}{2}K(\eta^2 + \xi^2) + \frac{1}{2}C(\eta^2 - \xi^2)$$

$$= \frac{1}{2}(K + C)\eta^2 + \frac{1}{2}(K - C)\xi^2 ,$$

$$L = L_1 + L_2 ,$$

với

$$L_1 = \frac{1}{2}m\dot{\eta}^2 - \frac{1}{2}(K + C)\eta^2 ,$$

$$L_2 = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 - \frac{1}{2}(K - C)\xi^2 .$$

Lưu ý rằng dạng của L_1 và L_2 chỉ thị rằng η và ξ là các toạ độ chuẩn tắc. Do đó hệ tương đương với hai dao động tử điều hòa tương ứng với các tần số góc

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K + C}{m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{K - C}{m}} .$$

Do các tần số là khác nhau hệ tác dụng như một dao động tử điều hòa không đẳng hướng.

(c) Do theo định nghĩa các xung lượng chính tắc là

$$p_\eta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} = m\dot{\eta}\,, \qquad p_\xi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = m\dot{\xi}\,,$$

$$\begin{aligned} H &= p_\eta \dot{\eta} + p_\xi \dot{\xi} - L \\ &= \frac{1}{2m}p_\eta^2 + \frac{1}{2m}p_\xi^2 + \frac{1}{2}(K+C)\eta^2 + \frac{1}{2}(K-C)\xi^2\,. \end{aligned}$$

Cũng có thể viết H như sau

$$H = H_1 + H_2$$

Với H_1, H_2 tương ứng lần lượt với L_1, L_2, nghĩa là

$$H_1 = \frac{p_\eta^2}{2m} + \frac{1}{2}(K+C)\eta^2, \qquad H_2 = \frac{p_\xi^2}{2m} + \frac{1}{2}(K-C)\xi^2\,.$$

Vì H_1, H_2 không chứa t một cách tương minh, ta có

$$\begin{aligned} \frac{dH_1}{dt} &= [H_1, H] = [H_1, H_1 + H_2] = [H_1, H_1] + [H_1, H_2] = [H_1, H_2] \\ &= \frac{\partial H_1}{\partial \eta}\frac{\partial H_2}{\partial p_\eta} + \frac{\partial H_1}{\partial \xi}\frac{\partial H_2}{\partial p_\xi} - \frac{\partial H_1}{\partial p_\eta}\frac{\partial H_2}{\partial \eta} - \frac{\partial H_1}{\partial p_\xi}\frac{\partial H_2}{\partial \xi} = 0 \end{aligned}$$

và, tương tự

$$\frac{dH_2}{dt} = 0\,.$$

Do đó H_1, H_2 là hai hằng số độc lập của chuyển động.

(d) Nếu $C = 0$, $\omega_1 = \omega_2$ và dao động tử trở thành dao động tử đẳng hướng. Hàm Hamilton là

$$H = \frac{1}{2m}p_\eta^2 + \frac{1}{2m}p_\xi^2 + \frac{1}{2}K\eta^2 + \frac{1}{2}K\xi^2\,.$$

Đặt $J = m(\eta p_\xi - \xi p_\eta)$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= [J, H] \\ &= \frac{\partial J}{\partial \eta}\frac{\partial H}{\partial p_\eta} - \frac{\partial J}{\partial p_\eta}\frac{\partial H}{\partial \eta} + \frac{\partial J}{\partial \xi}\frac{\partial H}{\partial p_\xi} - \frac{\partial J}{\partial p_\xi}\frac{\partial H}{\partial \xi} \\ &= p_\xi p_\eta + mK\xi\eta - p_\eta p_\xi - mK\eta\xi = 0\,, \end{aligned}$$

J cũng là một hằng số chuyển động.

(e) Với dao động tử đẳng hướng, $C = 0$ và x, y đã là những toạ độ chuẩn tắc. Như chỉ ra ở trên, có ba hằng số chuyển động đã biết

$$E_1 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}Kx^2, \qquad E_2 = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}Ky^2, \qquad J = m(xp_y - yp_x) .$$

Do $A_{11} = E_1$, $A_{22} = E_2$, các phần tử đường chéo của ma trận A_{ij} là các hằng số chuyển động. Xét

$$\begin{aligned} E_1E_2 - \frac{KJ^2}{4m^3} &= \left(\frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}Kx^2\right)\left(\frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}Ky^2\right) - \frac{K}{4m}(xp_y - yp_x)^2 \\ &= \left(\frac{p_xp_y}{2m} + \frac{1}{2}Kxy\right)^2 . \end{aligned}$$

Vì vế bên trái là hằng số, $A_{12} = A_{21} =$ hằng số. Do đó A là ma trận của các phần tử không đổi.

2079

Xét hệ hạt $m_1 = m_2$ được nối bởi một sợi dây thừng dài l với m_2 bị ràng buộc ở tại bề mặt một hình nón thẳng mà bán góc là α và m_1 được treo tự do bên trong hình nón, dây đi qua một lỗ ở đỉnh nón như ở hình 2.76. Bỏ qua ma sát.

(a) Hãy đưa ra một hệ tọa độ suy rộng thích hợp cho bài toán.

(b) Hãy viết hàm Lagrange của hệ và phương trình chuyển động cho mỗi toạ độ suy rộng.

(c) Viết hàm Hamilton của hệ.

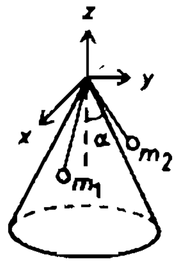
(d) Biểu diễn tần số góc đối với m_2 chuyển động theo quỹ đạo tròn theo các biến số của bài toán.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Sử dụng các toạ độ cầu với gốc tại đỉnh nón như ở hình 2.76. Toạ độ của m_1, m_2 tương ứng là $(r, 0, \varphi)$, $(l - r, \pi - \alpha, \beta)$. Các biến số $r, \theta, \varphi, \beta$ được lấy là toạ độ suy rộng.

(b) Các vận tốc của m_1, m_2 tương ứng là $(\dot{r}, r\dot{\theta}, r\dot{\varphi}\sin\theta)$, $(-\dot{r}, 0, (l -$



Hình 2.76

$r)\dot{\beta}\sin(\pi-\alpha))$. Hàm Lagrange của hệ khi đó là

$$\begin{aligned}L &= T - V\\ &= \frac{1}{2}m[2\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + (l-r)^2\dot{\beta}^2\sin^2(\pi-\alpha)]\\ &\quad - mgr\cos\theta + mg(l-r)\cos\alpha\,.\end{aligned}$$

Các phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

cho ta

$$mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta = p_\varphi, \quad \text{một hằng số}\,,$$

$$m(l-r)^2\dot{\beta}\sin^2(\pi-\alpha) = p_\beta, \quad \text{một hằng số}\,,$$

$$2\ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + (l-r)\dot{\beta}^2\sin^2\alpha + g(\cos\theta + \cos\alpha) = 0\,,$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta - g\sin\theta = 0\,.$$

(c) Hai xung lượng chính tắc khác là

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 2m\dot{r}, \qquad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}\,.$$

Hàm Hamilton là

$$\begin{aligned}H &= p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} + p_\varphi\dot{\varphi} + p_\beta\dot{\beta} - L\\ &= \frac{p_r^2}{4m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\theta} + \frac{p_\beta^2}{2m(l-r)^2\sin^2\alpha}\\ &\quad + mgr\cos\theta - mg(L-r)\cos\alpha\,.\end{aligned}$$

(d) Nếu m_2 chuyển động trong quỹ đạo tròn, r = hằng số và tần số góc của chuyển động quay là

$$\dot{\beta} = \frac{p_\beta}{m(l-r)^2 \sin^2\alpha} \ .$$

2080

Các phương trình biến đổi giữa hai hệ toạ độ là

$$Q = \ln(1 + q^{\frac{1}{2}} \cos p)$$
$$P = 2(1 + q^{\frac{1}{2}} \cos p) q^{\frac{1}{2}} \sin p \ .$$

(a) Hãy chứng minh trực tiếp từ các phương trình biến đổi rằng Q, P là các biến số chính tắc nếu q và p cũng là các biến chính tắc.

(b) Hãy chứng minh rằng hàm sinh ra từ phép biến đổi giữa hai tập biến chính tắc đó là

$$F_3 = -[\exp(Q) - 1]^2 \tan p \ .$$

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

(a) Do $[Q, Q] = 0$, $[P, P] = 0$,

$$\begin{aligned}[Q, P] &= \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} \\ &= \frac{q^{-\frac{1}{2}}\cos p}{1 + q^{\frac{1}{2}}\cos p}[-q\sin^2 p + (1 + q^{\frac{1}{2}}\cos p)q^{\frac{1}{2}}\cos p] \\ &\quad + \frac{q^{\frac{1}{2}}\sin^2 p}{1 + q^{\frac{1}{2}}\cos p}[\cos p + (1 + q^{\frac{1}{2}}\cos p)q^{-\frac{1}{2}}] = 1 \ ,\end{aligned}$$

Phép biến đổi là chính tắc. Nếu q, p là các biến chính tắc, thì Q, P cũng như vậy.

(b) Khi giải các phương trình biến đổi đối với q và p ta nhận được

$$q = (e^Q - 1)^2 \sec^2 p \ ,$$
$$P = 2e^Q(e^Q - 1)\tan p \ .$$

Vì phép biến đổi là chính tắc, nên tồn tại một hàm sinh $F_3(Q,p)$ sao cho

$$q = -\frac{\partial F_3}{\partial p}, \qquad P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q} .$$

cho các phương trình biến đổi. Do

$$\begin{aligned} dF_3 &= \frac{\partial F_3}{\partial Q}dQ + \frac{\partial F_3}{\partial p}dp = -PdQ - qdp \\ &= -d[(e^Q-1)^2]\text{tg}p - (e^Q-1)^2 d\text{tg}p \\ &= -d[(e^Q-1)^2\text{tg}p] , \end{aligned}$$

ta nhận được

$$F_3 = -(e^Q-1)^2\text{tg}p .$$

2081

Một hạt khối lượng m chuyển động theo một chiều q trong trường thế năng $V(q)$ và bị trễ bởi lực làm tắt dần $-2m\gamma\dot{q}$ tỉ lệ với vận tốc của nó.

(a) Chứng minh rằng phương trình chuyển động có thể nhận được từ hàm Lagrange

$$L = \exp(2\gamma t)\left[\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)\right]$$

và hàm Hamilton là

$$H = \frac{p^2\exp(-2\gamma t)}{2m} + V(q)\exp(2\gamma t) ,$$

ở đây $p = m\dot{q}\exp(2\gamma t)$ là xung lượng liên hợp với q.

(b) Đối với hàm sinh

$$F_2(q,P,t) = \exp(\gamma t)qP$$

hãy tìm hàm Hamilton biến đổi $K(Q,P,t)$. Đối với một thế dao động tử

$$V(q) = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

chứng minh rằng hàm Hamilton biến đổi sinh ra một hằng số chuyển động

$$K = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 Q + \gamma QP .$$

(c) Hãy rút ra nghiệm $q(t)$ cho dao động tử tắt dần từ hằng số chuyển động trong (b) trong trường hợp tắt dần quá yếu $\gamma < \omega$. Bạn có thể cần phải tích phân

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x \, .$$

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

cho ta

$$m\ddot{q} = -\frac{\partial V}{\partial q} - 2m\gamma\dot{q} \, .$$

Hạt được xem là chịu tác dụng của lực thế $-\frac{\partial V}{\partial q}$ và lực làm tắt dần $-2m\gamma\dot{q}$ tỉ lệ với tốc độ của nó. Do đó hàm Lagrange đã cho là thích hợp. Hàm Hamilton được cho bởi

$$H = p\dot{q} - L$$

với

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}e^{2\gamma t} \, .$$

Như vậy

$$H = \left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 + V\right)e^{2\gamma t} = \frac{p^2 e^{-2\gamma t}}{2m} + V(q)e^{2\gamma t} \, .$$

(b) Đối với hàm sinh là $F_2(q, P, t)$ ta có

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q}, \qquad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}, \qquad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \, .$$

Vì $F_2 = qPe^{\gamma t}$,

$$p = Pe^{\gamma t}, \qquad Q = qe^{\gamma t} \, ,$$

$$K = \frac{p^2 e^{-2\gamma t}}{2m} + V(q)e^{2\gamma t} + \gamma qPe^{\gamma t} \, .$$

Đối với dao động tử của thế

$$V = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 Q^2 e^{-2\gamma t} \, ,$$

hàm Hamilton biến đổi là

$$K = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 Q^2 + \gamma QP \ .$$

Vì nó không phụ thuộc tường minh vào thời gian, K là một hằng số chuyển động.

(c) Các phương trình Hamilton chính tắc là

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = -m\omega^2 Q - \gamma P \ ,$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \frac{P}{m} + \gamma Q \ .$$

Lấy đạo hàm phương trình thứ hai và sử dụng các phương trình gốc ta có

$$\ddot{Q} + (\omega^2 - \gamma^2)Q = 0 \ .$$

Trong trường hợp tắt dần quá yếu, $\omega > \gamma$ và ta có thể đặt

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \ ,$$

trong đó ω_1 là số thực dương. Khi đó nghiệm là

$$Q = A\sin(\omega_1 t + \varphi) \ ,$$

ở đây A, φ là hằng số. Do

$$P = m(\dot{Q} - \gamma Q) \ ,$$

ta có

$$K = \frac{1}{2}m[(\dot{Q} - \gamma Q)^2 + \omega^2 Q^2 + 2\gamma Q(\dot{Q} - \gamma Q)] = \frac{1}{2}m(\dot{Q}^2 + \omega_1^2 Q^2) = \frac{1}{2}m\omega_1^2 A^2,$$

suy ra

$$A = \frac{1}{\omega_1}\sqrt{\frac{2K}{m}} \ .$$

Từ đó nghiệm là

$$q = Qe^{-\gamma t} = \frac{1}{\omega_1}\sqrt{\frac{2K}{m}} e^{-\gamma t}\sin(\omega_1 t + \varphi) \ .$$

2082

Giả sử rằng một hệ với hàm Hamilton không phụ thuộc thời gian $H_0(q, p)$ đã áp đặt lên nó một trường ngoài dao động, do đó hàm Hamilton trở thành $H = H_0(q, p) - \varepsilon q \sin \omega t$, ở đây ε và ω là các hằng số đã cho.

(a) Ý nghĩa vật lý của $\varepsilon \sin\omega t$ là gì?

(b) Phương trình chính tắc của chuyển động đã bị biến đổi thế nào?

(c) Tìm phép biến đổi chính tắc giữ được dạng chính tắc của các phương trình chuyển động. Hàm Hamilton "mới" là gì?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Cách giải thích khả dĩ như được chỉ ra ở thí dụ sau. Một hạt điện tích e chuyển động trong điện trường đều trong không gian nhưng dao động theo thời gian, cụ thể một điện trường mà cường độ của nó được biểu diễn bằng $(\varepsilon/e)\sin\omega t$. Khi đó $\varepsilon \sin\omega t$ là lực do điện trường tác dụng lên hạt.

(b) Các phương trình chính tắc Hamilton của chuyển động bây giờ là

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H_0}{\partial p} ,$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial H_0}{\partial q} + \varepsilon \sin(\omega t) .$$

(c) Ta có

$$H(q, p, t) = H_0(q, p) - \varepsilon q \sin(\omega t)$$

và muốn tìm một Hamilton mới

$$K(Q, P) = H_0(q, p)$$

qua một phép biến đổi chính tắc. Đặt hàm sinh là $F_2(q, P, t)$. Khi

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = K - H = \varepsilon q \sin(\omega t) ,$$

ta lấy

$$F_2 = qP - \frac{\varepsilon q}{\omega}\cos(\omega t) .$$

Các phương trình biến đổi là

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = P - \frac{\varepsilon}{\omega}\cos(\omega t) ,$$

hay

$$P = p + \frac{\varepsilon}{\omega}\cos(\omega t) ,$$

và

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = q .$$

Khi đó

$$K(Q,P) = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$
$$= H_0(q,p) - \varepsilon q \sin(\omega t) + \varepsilon q \sin(\omega t)$$
$$= H_0(Q, P - \frac{\varepsilon}{\omega}\cos(\omega t)) ,$$
$$\frac{\partial K}{\partial P} = \frac{\partial H_0}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial P} = \frac{\partial H_0}{\partial p} = \dot{q} = \dot{Q} ,$$
$$-\frac{\partial K}{\partial Q} = -\frac{\partial H_0}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial Q} = -\frac{\partial H_0}{\partial q} = \dot{p} - \varepsilon \sin(\omega t) = \dot{P} ,$$

có sử dụng kết quả trong (b). Do đó phép biến đổi khôi phục dạng chính tắc của các phương trình chuyển động với hàm Hamilton H_0.

2083

(a) Hãy giải phương trình Hamilton-Jacobi đối với hàm sinh $S(q,\alpha,t)$ trong trường hợp của một hạt đơn chuyển động dưới tác dụng hàm Hamilton $H = \frac{1}{2}p^2$. Hãy tìm phép biến đổi chính tắc $q = q(\beta,\alpha)$, và $p = p(\beta,\alpha)$, ở đây β và α tương ứng là tọa độ và xung lượng. Giải thích kết quả.

(b) Nếu có hàm Hamilton nhiễu loạn $H' = \frac{1}{2}q^2$, khi đó α sẽ không còn là hằng số. Biểu thị hàm Hamilton đã biến đổi K (sử dụng chính phép biến đổi đã tìm được trong phần (a)) theo α, β và t. Hãy giải với $\beta(t)$ và $\alpha(t)$ và chứng minh rằng nghiệm bị nhiễu loạn

$$q[\beta(t),\alpha(t)], \qquad p[\beta(t),\alpha(t)]$$

là hàm điều hòa đơn giản. Bạn có thể cần tích phân

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \mathrm{tg}^{-1}x ,$$
$$-\int \mathrm{tg}x dx = \ln(\cos x) .$$

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Phương trình Hamilton-Jacobi là

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q,p,t) = 0$$

với $p = \frac{\partial S}{\partial q}$ đối với trường này trở thành

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 = 0 .$$

Vì H không phụ thuộc một cách tường minh vào q, t, ta có thể lấy hai số hạng ở vế bên trái lần lượt bằng $-\gamma, \gamma$, ở đây γ nhiều nhất là một hàm của p. Khi đó

$$S = \sqrt{2\gamma}\, q - \gamma t .$$

Đặt $\alpha = \sqrt{2\gamma}$, ta có hàm sinh

$$S = \alpha q - \frac{1}{2}\alpha^2 t .$$

Hằng số α có thể được lấy là xung lượng mới P. Các phương trình biến đổi như vậy là

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \alpha ,$$

$$Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = q - \alpha t = \beta, \qquad \text{chẳng hạn} .$$

khi $g = \beta + \alpha t$, hạt chuyển động với vận tốc đồng nhất β trong hệ q, p.

(b) Hàm Hamilton nhiễu loạn là

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2} .$$

Nó được biến đổi thành

$$K = H + \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2} = \frac{1}{2}(\beta + \alpha t)^2$$

như các phương trình biến đổi trong (a). Các phương trình Hamilton

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P}, \qquad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q}$$

cho ta

$$\dot{\beta} = (\beta + \alpha t)t, \qquad \dot{\alpha} = -(\beta + \alpha t) .$$

Lưu ý rằng $\alpha \equiv P$, $\beta \equiv Q$ có thể không còn được xem là hằng số nữa vì H đã bị biến đổi. Các phương trình cuối cùng kết hợp lại thành

$$\ddot{\alpha} + \alpha = 0 ,$$

chỉ ra rằng α là hàm điều hòa

$$\alpha = \alpha_0 \sin(t + \varphi) ,$$

ở đây α_0, φ là hằng số, và như thế

$$\beta = -\dot{\alpha} - \alpha t = -\alpha_0[\cos(t + \varphi) + t\sin(t + \varphi)] .$$

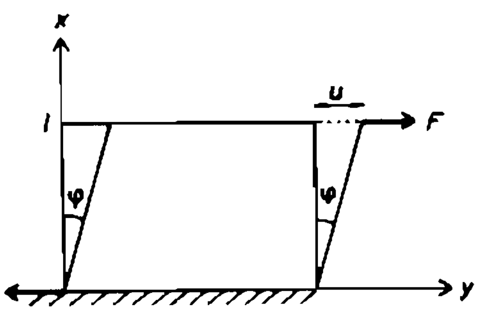
Các phương trình biến đổi khi đó cho

$$p = \alpha = \alpha_0 \sin(t + \varphi) ,$$
$$q = \beta + \alpha t = -\dot{\alpha} = -\alpha_0 \cos(t + \varphi) .$$

Do đó nghiệm đối với hệ bị nhiễu loạn là hàm điều hòa.

2084

(a) Ta hãy đặt một lực trượt lên một khối rắn hình chữ nhật như ở hình 2.77. Hãy tìm quan hệ giữa dịch chuyển u và lực được đặt vào trong giới hạn đàn hồi.



Hình 2.77

(b) Các tính chất đàn hồi của vật rắn chấp nhận sóng đàn hồi. Giả sử một sóng phẳng ngang truyền theo hướng x và dao động của nó theo hướng y. Hãy đưa ra phương trình chuyển động đối với dịch chuyển.

(c) Hãy tìm biểu thức cho tốc độ truyền sóng đàn hồi ngang.

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

(a) Định luật Hooke cho sự trượt

$$\frac{F}{A} = n\varphi ,$$

ở đây F là lực trượt, n là suất trượt của vật liệu của khối, φ là góc trượt, và A là tiết diện ngang của khối song song với F, đưa đến dịch chuyển kết quả như

$$u = l\varphi = \frac{lF}{An} ,$$

do φ là góc nhỏ

(b) Thế năng của một đơn vị thể tích của khối gây ra do biến dạng trượt là

$$\frac{1}{lA}\int_0^u F du' = \frac{1}{lA}\int_0^{\varphi} An\varphi' l d\varphi' = \frac{1}{2}n\varphi^2 = \frac{1}{2}n\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 .$$

Động năng của khối trong quá trình trượt là

$$\int_0^l \frac{1}{2}\rho A\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx ,$$

ρ là mật độ của khối. Trong giới hạn đàn hồi, năng lượng được xem xét và nguyên lý Hamilton

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

được áp dụng. Như vậy

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T - V)dt = \delta\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l \left[\frac{n}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] A dx dt = 0 .$$

Do tích phân từng phần ta có

$$\int_0^l \delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx = 2\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}(\delta u)dx$$

$$= 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\delta u\Big|_0^l - 2\int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\delta u dx ,$$

$$\int_0^l \delta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dt = 2\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\delta u\Big|_{t_1}^{t_2} - 2\int_0^l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\delta u dt ,$$

và do $\delta u = 0$ tại $y = 0, l$ và $t = t_1, t_2$, các biểu thức trên thành

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l \left(n\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\delta u A dx dt = 0 ,$$

suy ra

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{n}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

như là phương trình chuyển động cho dịch chuyển u.

(c) Phương trình chỉ ra rằng dịch chuyển u, vốn nằm ở hướng y lại lan truyền dọc theo hướng x như một sóng với vận tốc

$$v = \sqrt{\frac{n}{\rho}}\,.$$

PHẦN III

THUYẾT TƯƠNG ĐỐI HẸP

THUYẾT TƯƠNG ĐỐI HẸP (3001 –3054)

3001

(a) Mô tả tóm tắt tình trạng khó xử khiến phải phát triển lý thuyết tương đối hẹp.

(b) Mô tả một lý thuyết trước đó mà có thể gạt bỏ nhu cầu về thuyết tương đối hẹp và nêu thí nghiệm chứng tỏ lý thuyết đó là sai.

(c) Mô tả một thí nghiệm hiện đại làm tăng sự tin tưởng vào của thuyết tương đối hẹp.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Theo lý thuyết điện từ của Maxwell, tốc độ truyền sóng đện từ trong không gian tự do, c, là một hằng số không phụ thuộc vào tốc độ nguồn bức xạ điện từ. Điều này ngược với phép biến đổi Galileo vốn được áp dụng cho các hệ quy chiếu quán tính. Nếu lý thuyết Maxwell đúng trong một hệ quy chiếu quán tính, thì nó có thể không đúng trong các hệ quy chiếu quán tính khác chuyển động tương đối so với hệ đầu. Tình trạng khó xử là ở chỗ hoặc lý thuyết điện từ Maxwell đúng hoặc cơ học Newton đúng chứ không thể cả hai, mặc dù vậy cả hai lý thuyết đều có vẻ có nền tảng vững chắc.

(b) Một lý thuyết trước đây đã được thử dùng để giải quyết tình trạng khó xử, đó là lý thuyết ête. Nó phỏng đoán rằng vũ trụ được chứa đầy bởi môi trường tưởng tượng lan tỏa khắp nơi được gọi là ête và lý thuyết Maxwell chỉ đúng trong hệ quy chiếu đứng yên so với ête. Nhưng thí nghiệm Michelson đã định đo vận tốc của trái đất so với ête luôn cho kết quả bằng không mặc dù trái đất chuyển động trong hệ mặt trời và hệ mặt trời tự nó cũng chuyển động. Như vậy không thể chứng minh được sự có mặt của ête và lý thuyết ête bị bác bỏ.

(c) Lấy thí dụ thí nghiệm Herter đo thời gian tới của hai photon được phát ra do sự hủy của positron trong khi bay. Các detectơ đặt ở các vị trí khác nhau với cùng một khoảng cách từ vị trí mà ở đó xảy ra sự hủy. Người ta đã phát hiện ra rằng hai photon đến detectơ đồng thời. Điều đó chỉ ra rằng ánh sáng phát ra theo các hướng khác nhau từ một nguồn chuyển động nhanh có vận tốc không đổi?

3002

Một người đi du lịch trong không gian (trên tàu vũ trụ) với vận tốc là v, so khớp đồng hồ của anh ta ($t' = 0$) với đồng hồ của người bạn trên mặt đất ($t = 0$). Sau đó người bạn trên mặt đất quan sát đồng thời cả hai đồng hồ t một cách trực tiếp và t' thông qua một kính viễn vọng. Hỏi rằng khi t' chỉ một giờ thì t chỉ mấy giờ?

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Gọi Σ, Σ' là các hệ quy chiếu tương ứng trên mặt đất và tàu vũ trụ với các trục x dọc theo hướng vận tốc tương đối và đặt $t_1 = t'_1 = 0$, $x_1 = x'_1 = 0$ khi các đồng hồ được so khớp. Ta xem xét sự kiện khi đồng hồ trên tàu vũ trụ chỉ t'_2. Các phương trình biến đổi là

$$ct_2 = \gamma(ct'_2 + \beta x'_2) = \gamma ct'_2 \, ,$$
$$x_2 = \gamma(x'_2 + \beta ct'_2) = \gamma\beta ct'_2 \, ,$$

ở đây $\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, do $x'_2 = x'_1 = 0$. Tín hiệu ánh sáng truyền trong khoảng thời gian

$$\Delta t = \frac{x_2}{c} = \gamma\beta t'_2$$

để tới người bạn trên mặt đất. Bởi vậy đồng hồ của anh ấy chỉ

$$t_2 + \Delta t = \gamma(1+\beta)t'_2 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\, t'_2 = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

khi anh ấy nhìn $t'_2 = 1$ giờ qua kính viễn vọng.

3003

Một nguồn sáng đứng yên ở vị trí $x = 0$ trong hệ quy chiếu S ra hai phát 2 xung ánh sáng (gọi là P_1 và P_2), P_1 tại thời điểm $t = 0$ và P_2 tại thời điểm $t = \tau$. Một hệ quy chiếu S' chuyển động với vận tốc $v\hat{x}$ so với S. Một người quan sát trong hệ quy chiếu S' nhận xung ban đầu P_1 tại thời điểm $t' = 0$ tại vị trí $x' = 0$.

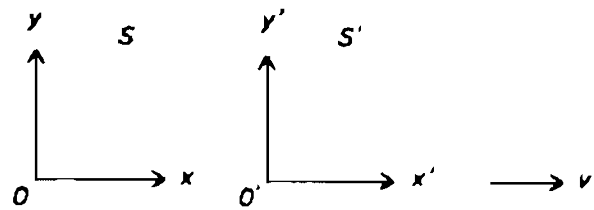
(a) Xác định thời gian τ' giữa hai lần thu các xung ở $x' = 0$ như hàm của τ và $\beta = \frac{v}{c}$.

(b) Từ (a) xác định một biểu thức chính xác cho hiệu ứng Doppler dọc, có nghĩa là tính λ' dựa trên λ và β, trong đó λ và λ' là các bước sóng ánh sáng trong chân không được đo tương ứng trong S và S'.

(c) Xác định dịch chuyển Doppler tới các số hạng bậc nhất và bậc hai của $\frac{v}{c}$ đối với phát xạ H_β ($\lambda = 4861,33$ Å) từ mức trung hòa đối với các nguyên tử H các proton được gia tốc nhờ một thế 20 kV. Giả sử rằng sự phát xạ xảy ra sau khi gia tốc và trong khi các proton chuyển động với vận tốc không đổi. Cũng giả sử rằng trục quang của quang phổ kế song song với chuyển động của các proton.

(*Chicago*)

Lời giải:



Hình 3.1

(a) Các hệ quy chiếu quán tính S, S' được chỉ ra trong hình 3.1. Giả sử rằng các gốc tọa độ O và O' trùng nhau tại thời điểm $t = t' = 0$ do đó sự phát xạ P_1 và sự tới chỗ người quan sát của nó cả hai đều xảy ra ở $x = 0$, $t = 0$, $x' = 0$, $t' = 0$ như đã cho. Sự phát xạ P_2 ở $x = 0$, $t = \tau$ trong hệ S và

$$x' = \gamma(x - \beta ct) = -\gamma\beta c\tau ,$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta x}{c}\right) = \gamma\tau$$

trong hệ S. Tín hiệu truyền trong khoảng thời gian

$$\Delta t' = \frac{|x'|}{c} = \gamma\beta\tau$$

để đến người quan sát. Bởi vậy người quan sát ghi nhận được thời gian tới là

$$t' + \Delta t' = \gamma(1 + \beta)\tau ,$$

hoặc

$$\tau' = \tau\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} .$$

(b) Gọi τ, τ' là các khoảng giữa hai xung liên tiếp tương ứng trong hệ S, S', ta có các tần số

$$\nu = \frac{1}{\tau}, \qquad \nu' = \frac{1}{\tau'}$$

và các bước sóng

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = c\tau, \qquad \lambda' = c\tau' = \lambda\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

tương ứng trong hệ S và S'.

(c) Mỗi proton có năng lượng 20 keV, nhỏ hơn nhiều so với năng lượng khối lượng nghỉ 936 MeV, do đó vận tốc của các proton có thể thu được theo cách phi tương đối tính. Bởi vậy

$$\beta = \frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2E}{mc^2}} = \sqrt{\frac{40 \times 10^{-3}}{936}} = 0,00654 .$$

Do β nhỏ, ta có thể khai triển $\lambda'(\beta)$ như một chuỗi lũy thừa

$$\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \approx \lambda\left(1 + \beta + \frac{1}{2}\beta^2 + \cdots\right) .$$

Dịch chuyển bậc nhất của phát xạ H_β là

$$\Delta\lambda = \lambda\beta = 4861 \times 6,54 \times 10^{-3} = 31,8 \text{ Å},$$

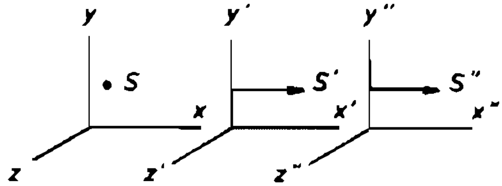
và dịch chuyển bậc hai là

$$\Delta\lambda = \frac{1}{2}\lambda\beta^2 = 0,10 \text{ Å}.$$

3004

(a) Xét các phép biến đổi Lorentz (LT) giữa các hệ toạ độ S, S' và S'' được chỉ ra ở hình 3.2, ở đó tất cả trục x song song với nhau, và S' và S'' chuyển động theo hướng dương của x. Chứng minh rằng đối với kiểu biến đổi này nghịch đảo của LT là một LT, và kết quả tổng hợp của hai phép biến đổi LT là một LT khác.

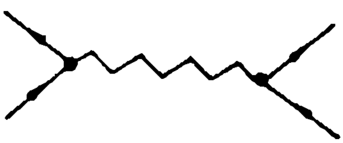
Nếu vận tốc tương đối của S' so với S là v_1, và vận tốc của S'' so với S' là v_2, hãy đưa ra biểu thức vận tốc tương đối của S'' so với S.



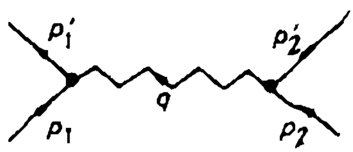
Hình 3.2

(b) Trong vật lý hạt, tương tác giữa các hạt được cho là xuất phát từ sự trao đổi một hạt như được chỉ ra ở hình 3.3. Chứng minh rằng hạt được trao đổi không phải là hạt thực mà là hạt ảo.

(*SUNY, Buffalo*)



Hình 3.3



Hình 3.4

Lời giải:

Phép biến đổi Lorentz giữa các hệ tọa độ S, S' được cho bởi

$$x' = \gamma_1(x - \beta_1 ct), \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad ct' = \gamma_1(ct - \beta_1 x) ,$$

ở đó

$$\beta_1 = \frac{v_1}{c}, \qquad \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} .$$

Theo nguyên lý tương đối, tất cả các hệ quy chiếu quán tính là tương đương, do đó phép biến đổi từ S sang S' phải có dạng giống như phép biến đổi từ S' sang S. Tuy nhiên, khi vận tốc tương đối của S' so với S là v_1 thì vận tốc tương đối của S so với S' là $-v_1$. Vì thế, phép biến đổi từ S' sang S, nghĩa là biến đổi ngược, là

$$x = \gamma_1(x' + \beta_1 ct'), \qquad y = y', \qquad z = z', \qquad ct = \gamma_1(ct' + \beta_1 x') ,$$

ta thấy chúng cũng là một phép biến đổi Lorentz.

Xét

$$\begin{aligned} x'' &= \gamma_2(x' - \beta_2 ct') = \gamma_2\gamma_1[(x - \beta_1 ct) - \beta_2(ct - \beta_1 x)] \\ &= \gamma_2\gamma_1[(1 + \beta_1\beta_2)x - (\beta_1 + \beta_2)ct] , \\ ct'' &= \gamma_2(ct' - \beta_2 x') = \gamma_2\gamma_1[(1 + \beta_1\beta_2)ct - (\beta_1 + \beta_2)x] , \end{aligned}$$

ở đó

$$\beta_2 = \frac{v_2}{c}, \qquad \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_2^2}} .$$

Khi viết

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} ,$$

ta có

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}\right)^2 = \frac{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)}{(1 + \beta_1\beta_2)^2} = \frac{1}{\gamma_1^2\gamma_2^2(1 + \beta_1\beta_2)^2} ,$$

hay

$$\gamma = \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2) .$$

Do đó, phép biến đổi từ S sang S'' được cho bởi

$$x'' = \gamma(x - \beta ct), \qquad y'' = y, \qquad z'' = z, \qquad ct'' = \gamma(ct - \beta x) ,$$

chứng tỏ rằng nó cũng là một phép biến đổi Lorentz. Như vậy, kết quả tổng hợp của hai phép biến đổi LT cũng là một LT.

Chú ý rằng βc là vận tốc của S'' so với S. Điều đó có thể chứng minh trực tiếp như sau. Xét phép biến đổi giữa S và S'. Lấy vi phân ta có

$$\begin{aligned} dx &= \gamma_1(dx' + \beta_1 cdt') , \\ cdt &= \gamma_1(cdt' + \beta_1 dx') , \end{aligned}$$

và

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{v' + v_1}{1 + \frac{v_1 v'}{c^2}} .$$

Như vậy, với v', vận tốc của một điểm tương đối với S', và v_1, vận tốc của S' đối với S, vận tốc của điểm đó so với S được cho bởi biểu thức trên. Nếu điểm đó đứng yên trong S'', thì khi đó $v' = v_2$ và quan hệ đó cho

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}$$

như mong đợi.

(b) Như chỉ ra ở hình 3.4, bằng cách trao đổi một hạt có xung lượng bốn chiều q trong tương tác, xung lượng bốn chiều của các hạt 1 và 2, p_1 và p_2 tương ứng đổi thành p'_1 và p'_2. Bảo toàn xung lượng bốn chiều đòi hỏi

$$p'_1 = p_1 + q, \qquad p'_2 = p_2 - q .$$

Đặt khối lượng hạt 1 là m_1 và khối lượng của hạt trao đổi có xung lượng bốn chiều q là m và xét phương trình xung lượng bốn chiều thứ nhất. Phần xung lương cho

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1 ,$$

hay

$$q^2 = p_1'^2 + p_1^2 - 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}'_1 ,$$

nghĩa là

$$m^2\gamma^2\beta^2 = m_1^2\gamma_1'^2\beta_1'^2 + m^2\gamma_1^2\beta_1^2 - 2m^2\gamma_1\gamma_1'\beta_1\beta_1'\cos^2\theta , \tag{1}$$

θ là góc giữa $\mathbf{p}_1$ và $\mathbf{p}'_1$, và

$$m\gamma = m_1\gamma_1' - m_1\gamma_1 ,$$

hay

$$m^2\gamma^2 = m_1^2\gamma_1'^2 + m_1^2\gamma_1^2 - 2m_1^2\gamma_1\gamma_1' . \tag{2}$$

Các phương trình (1) và (2) kết hợp lại để cho

$$m^2 = 2m_1^2(1 - \gamma_1\gamma_1' + \gamma_1\gamma_1'\beta_1\beta_1'\cos\theta) .$$

Ta phải chứng minh rằng $m^2 < 0$ sao cho tương tác không thể là thực mà phải là ảo. Do $\gamma^2\beta^2 = \gamma^2 - 1$, ta phải chứng minh

$$\sqrt{\gamma_1^2 - 1}\sqrt{\gamma_1'^2 - 1}\cos\theta < \gamma_1\gamma_1' - 1 ,$$

hay

$$(\gamma_1^2 - 1)(\gamma_1'^2 - 1)\cos^2\theta < (\gamma_1\gamma_1' - 1)^2 .$$

Điều đó là đúng nếu biểu thức sau đúng

$$(\gamma_1^2 - 1)(\gamma_1'^2 - 1) < (\gamma_1\gamma_1' - 1)^2 ,$$

nghĩa là

$$-\gamma_1^2 - \gamma_1'^2 < -2\gamma_1\gamma_1' ,$$

hay

$$-(\gamma_1 - \gamma_1')^2 < 0 \, .$$

Vì hệ thức này luôn luôn đúng nên tương tác phải là ảo.

3005

(a) Cho rằng $(\mathbf{r}, ct)$ là vectơ bốn chiều tương đối tính, chứng minh mệnh đề nói rằng $(c\mathbf{k}, \omega)$ là vectơ bốn chiều tương đối tính.

(b) Cho rằng nguyên tử ở trạng thái đứng yên phát ra ánh sáng tần số góc ω_0 và nguyên tử này dịch chuyển với vận tốc v hoặc là hướng thẳng tới hoặc là đi xa khỏi một người quan sát, sử dụng phép biến đổi Lorentz để đưa ra công thức cho tần số quan sát được bởi người quan sát đối với hai trường hợp (hướng thẳng tới hoặc đi xa khỏi người quan sát).

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Xét một sóng điện từ phẳng

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$$

trong một hệ quy chiếu quán tính Σ. Trong hệ quy chiếu quán tính khác Σ' chuyển động với vận tốc tương đối v dọc theo hướng x, các vectơ trường $\mathbf{E}', \mathbf{H}'$ được cho bởi

$$\begin{aligned} E'_\parallel &= E_\parallel, \qquad H'_\parallel = H_\parallel \, , \\ \mathbf{E}'_\perp &= \gamma(\mathbf{E}_\perp + \mu_0 \mathbf{v} \times \mathbf{H}_\perp) \, , \\ \mathbf{H}'_\perp &= \gamma(\mathbf{H}_\perp - \varepsilon_0 \mathbf{v} \times \mathbf{E}_\perp) \, . \end{aligned}$$

Các hệ thức này đòi hỏi hàm mũ ở $\mathbf{E}$ và $\mathbf{H}$ là bất biến

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}' - \omega' t' = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t \, .$$

Vì $(\mathbf{r}, ct)$ là vectơ bốn chiều, các thành phần của nó biến đổi theo

$$x' = \gamma(x - \beta ct), \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad ct' = \gamma(ct - \beta x) \, .$$

Đặt $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$, $\mathbf{k}' = (k'_1, k'_2, k'_3)$ ta có

$$\begin{aligned}\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}' - \omega' t' &= k'_1\gamma(x - \beta ct) + k'_2 y + k'_3 z - \omega'\gamma\left(t - \frac{\beta x}{c}\right) \\ &= \gamma\left(k'_1 + \frac{\beta\omega'}{c}\right)x + k'_2 y + k'_3 z - \gamma(\omega' + \beta c k'_1)t \\ &= k_1 x + k_2 y + k_3 z - \omega t\ .\end{aligned}$$

Khi so sánh các hệ số của các biến số độc lập x, y, z, t trên hai vế của phương trình, ta tìm được

$$ck_1 = \gamma(ck'_1 + \beta\omega'), \qquad ck_2 = ck'_2, \qquad ck_3 = ck'_3, \qquad \omega = \gamma(\omega' + \beta ck'_1)\ .$$

Các hệ thức này hoàn toàn giống với các hệ thức đối với $(\mathbf{r}, ct)$

$$x = \gamma(x' + \beta ct'), \qquad y = y', \qquad z = z', \qquad ct = \gamma(ct' + \beta x')\ .$$

Do đó $(c\mathbf{k}, \omega)$ là vectơ bốn chiều tương đối tính.

(b) Giả sử người quan sát tại gốc của Σ và nguyên tử tại gốc của Σ' (nguyên tử chuyển động rời khỏi người quan sát với vận tốc βc). Tần số góc được đo bởi người quan sát là ω. Vì ánh sáng phát ra từ nguyên tử đạt đến người quan sát phải được phát theo hướng $-x$, nên theo định nghĩa ta có

$$\mathbf{k}' = (-k', 0, 0) = \left(-\frac{\omega'}{c}, 0, 0\right)\ .$$

Hệ thức biến đổi khi đó cho

$$\omega = \gamma(\omega' - \beta\omega') = \gamma(1 - \beta)\omega_0 = \omega_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \omega_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\ .$$

Nếu nguyên tử chuyển động tới người quan sát, βc trong biểu thức trên phải được thay bởi $-\beta c$ và ta có

$$\omega = \omega_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \omega_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\ .$$

3006

Một con tàu vũ trụ rời khỏi trái đất với vận tốc $v = 0,8c$. Khi con tàu ở cách trái đất $6,66 \times 10^8$ km, đo trong hệ quy chiếu gắn với trái đất, một tín hiệu vô tuyến được gửi đi cho con tàu vũ trụ từ người quan sát trên trái đất. Bao lâu tín hiệu sẽ tới được con tàu:

(a) Khi đo trên hệ quy chiếu gắn với con tàu?

(b) Khi đo trên hệ quy chiếu gắn với trái đất?

(c) Ngoài ra, cho vị trí của con tàu, khi nó nhận được tín hiệu, trong cả hai hệ quy chiếu.

(*SUNY, Buffalo*)

Lời giải:

Giả sử người quan sát trên trái đất ở gốc của hệ quy chiếu quán tính Σ và con tàu ở trạng thái đứng yên ở hệ quy chiếu quán tính Σ' chuyển động với vận tốc βc so với Σ dọc theo hướng x. Để thuận tiện ta xét (b) trước.

(b) Xét bài toán trong Σ. Tại thời điểm $t = t_0$ khi con tàu tại x_s, tín hiệu vô tuyến gửi đi từ người quan sát. Con tàu nhận được tín hiệu tại t_1. Vì vận tốc truyền tín hiệu là c ta có

$$(t_1 - t_0)c = x_s + (t_1 - t_0)\beta c \ ,$$

kết quả là

$$t_1 - t_0 = \frac{x_s}{(1-\beta)c} = \frac{6,66 \times 10^8}{0,2 \times 3 \times 10^5} = 1,11 \times 10^4 \text{ s}$$

đó là thời gian để tín hiệu đạt đến con tàu.

(a) Xét hai sự kiện:

E_0 : tín hiệu được gửi từ người quan sát trên trái đất,

E_1 : tín hiệu tới con tàu.

Trong Σ, các tọa độ x và t là

$$E_0 : (x_0, t_0) = (0, t_0) \ ,$$
$$E_1 : (x_1, t_1) = ((t_1 - t_0)c, t_1) \ .$$

Trong Σ'

$$t'_0 = \gamma\left(t_0 - \frac{\beta x_0}{c}\right) = \gamma t_0 \ ,$$

$$t'_1 = \gamma\left(t_1 - \frac{\beta x_1}{c}\right) = \gamma[(1-\beta)t_1 + \beta t_0] \ .$$

Do đó thời gian truyền của tín hiệu trong hệ quy chiếu của con tàu là

$$t_1' - t_0' = \gamma(1-\beta)(t_1 - t_0) = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}(t_1 - t_0) = 3.7 \times 10^3 \text{ s}.$$

(c) Vị trí con tàu khi tín hiệu đến là

$$x_1 = (t_1 - t_0)c = 1.11 \times 10^4 \times 3 \times 10^5 = 3.33 \times 10^9 \text{ km}$$

Trong hệ quy chiếu trái đất, và $x_1' = 0$ trong hệ quy chiếu con tàu.

3007

Một thiên cầu bán kính (tĩnh) R_0, trên đó có những dấu mốc dễ nhận ra, chuyển động với vận tốc v so với một người quan sát ở một khoảng cách rất xa. Người quan sát chụp một bức ảnh thiên cầu tại thời điểm mà anh ta thấy thiên cầu chuyển động vuông góc với đường nối anh ta với thiên cầu. Anh ta nhìn thấy gì khi anh ta rửa phim?

(*Columbia*)

Lời giải:

Xét một hình vuông nhỏ $ABCD$ cạnh (tĩnh) l chuyển động với vận tốc v so với một người quan sát P ở một khoảng cách lớn l sao cho mặt phẳng của hình vuông chứa đường nhìn như chỉ ra ở hình 3.5 và vào thời điểm khi AB vuông góc với đường nhìn. Ánh sáng từ D' phát ra ở một thời điểm sớm hơn khi D ở vị trí D' cắt phần kéo dài của đường AB tại E' ở thời điểm đang xét. Khi đó

$$\frac{\overline{D'D}}{v} = \frac{\overline{D'E'}}{c} = \frac{l}{c\cos\theta},$$

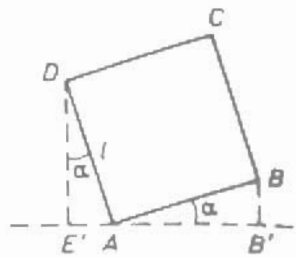
$$\overline{E'A} = \overline{D'D} - l\text{tg}\theta = l\left(\frac{v}{c}\sec\theta - \text{tg}\theta\right) \approx \frac{lv}{c} = \beta l$$

với $\beta = \frac{v}{c}$, vì đối với $L \gg l$, $\theta \approx 0$. Khi $\overline{AB}$ chuyển động với vận tốc v, do phép co Lorentz nó sẽ được nhìn thấy như $\overline{AB'} = \frac{\overline{AB}}{\gamma} = l\sqrt{1-\beta^2}$, trong đó $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Bây giờ xét hình vuông $ABCD$ sau khi quay một góc α, như ở xem hình 3.6, với α được cho bởi hệ thức $\sin\alpha = \beta$. Ta có

$$\overline{E'A} = l\sin\alpha = l\beta, \qquad \overline{AB'} = l\cos\alpha = l\sqrt{1-\beta^2}.$$

Hình 3.5



Hình 3.6

Mối quan hệ giữa các điểm E', A, B' trong hai trường hợp trên là đúng giống hết nhau. Do đó hình vuông chuyển động trong hình 3.5 sẽ được chụp ảnh giống như hình vuông đứng yên được chỉ ra trong hình 3.6. Vì vật là một hình cầu, nó sẽ vẫn được chụp ảnh như một hình cầu.

3008

Một đồng hồ nguyên tử được mang đi một vòng quanh thế giới trên một máy bay phản lực, sau đó được so sánh với một đồng hồ giống như thế và đã được so khớp thời gian từ trước nhưng không được mang đi. Hãy xác định gần đúng sự sai khác giữa hai đồng hồ theo thuyết dương đối hẹp?

(*Columbia*)

Lời giải:

Giả sử máy bay phản lực đó chuyển động với vận tốc βc. Gọi hệ quy chiếu tĩnh của máy bay là S' và hệ quy chiếu của trái đất là S. Hai hệ quy chiếu này có thể được coi gần đúng là quán tính. Phép biến đổi Lorentz $ct = \gamma(ct' + \beta x')$ cho $\Delta x' = 0$, vì đồng hồ được cố định trong Σ', $\Delta t = \gamma \Delta t'$, trong đó $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Khi đó đối với $\beta \ll 1$, ta có

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Delta t' \simeq \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right) \Delta t' ,$$

hoặc

$$\Delta t - \Delta t' \simeq \frac{1}{2}\beta^2 \Delta t' .$$

Ví dụ, một chiếc máy bay chiến đấu phản lực bay với tốc độ 1000 m/s, khoảng gấp ba lần vận tốc của âm thanh. Bán kính của trái đất là 6400 km, vì vậy máy bay phải mất

$$\frac{2\pi \times 6400 \times 10^3}{1000} = 4,02 \times 10^4 \text{ s}$$

để bay một vòng quanh trái đất. Đồng hồ được mang trên máy bay sẽ chậm hơn một khoảng thời gian là

$$\Delta t - \Delta t' \approx \left(\frac{1000}{3 \times 10^8}\right)^2 \times \frac{4,02 \times 10^4}{2} = 2,2 \times 10^{-7} \text{ s} .$$

3009

(a) Viết phép biến đổi Lorentz cho vectơ vị trí bốn chiều và xác định phép biến đổi cho vectơ xung lượng bốn chiều.

(b) Hãy chỉ ra rằng hiệu ứng Doppler về tần số ánh sáng có thể được biểu diễn là

i) $\nu = \nu_0\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}}$ khi nguồn và người quan sát tiến lại gần nhau;

ii) $\nu = \nu_0\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}}$ khi nguồn và người quan sát rời xa nhau;

iii) $\nu = \dfrac{\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ khi nguồn và người quan sát chuyển động theo các hướng vuông góc với nhau.

(*SUNY, Buffalo*)

Lời giải:

(a) Xét hai hệ quy chiếu quán tính Σ, Σ' có các trục tương ứng song song với nhau sao cho Σ' chuyển động với vận tốc $v = \beta c$ dọc theo phương x và các gốc tọa độ trùng nhau ở thời điểm $t = t' = 0$. Phép biến đổi Lorentz cho vectơ vị trí bốn chiều $x^\alpha \equiv (\mathbf{r}, ct) \equiv (x, y, z, ct)$ là

$$x'^\alpha = Q^\alpha_\beta x^\beta ,$$

trong đó

$$Q^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

với $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Vectơ xung lượng bốn chiều được định nghĩa là

$$p^\alpha \equiv (\mathbf{p}c, E) ,$$

trong đó $E = mc^2$ là năng lượng toàn phần. Vì tất cả các vectơ bốn chiều biến đổi theo cùng một cách nên phép biến đổi của nó được cho bởi

$$\begin{pmatrix} p'_x c \\ p'_y c \\ p'_z c \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x c \\ p_y c \\ p_z c \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(p_x c - \beta E) \\ p_y c \\ p_z c \\ \gamma(E - \beta p_x c) \end{pmatrix} .$$

(b) Vectơ sóng bốn chiều được định nghĩa là

$$k^\alpha \equiv (\mathbf{k}c, \omega) .$$

Phép biến đổi của nó là

$$k'^\alpha = Q^\alpha_\beta k^\beta$$

có thể được viết là

$$k'_x = \gamma\left(k_x - \frac{\beta\omega}{c}\right), \qquad k'_y = k_y, \qquad k'_z = k_z, \qquad \omega' = \gamma(\omega - \beta k_x c) .$$

Để thu được hiệu ứng Doppler, giả sử các hệ quy chiếu của nguồn sáng và người quan sát tương ứng là Σ', Σ.

i) Khi nguồn sáng và người quan sát lại gần nhau, lấy $\beta_0 c$ là vận tốc tương đối của nguồn so với người quan sát. Khi đó $\beta = -\beta_0$. Phép biến đổi ngược ta được

$$\omega = \gamma(\omega' + \beta k'_x c) = \gamma(\omega' - \beta_0 k'_x c) .$$

Vì $k'_y = k'_z = 0$, $k'_x = -k' = -\frac{\omega'}{c}$, ta có

$$\omega = \gamma(1 + \beta_0)\omega' = \omega'\sqrt{\frac{1+\beta_0}{1-\beta_0}} ,$$

hoặc

$$\nu = \nu_0\sqrt{\frac{1+\beta_0}{1-\beta_0}} ,$$

trong đó $\omega' = 2\pi\nu_0$ Là tần số góc riêng của ánh sáng và ω là tần số góc khi được đo bởi người quan sát. Chú ý rằng $k_x = -k$ ánh sáng phải được phát ngược trở lại để đạt tới người quan sát.

ii) Khi nguồn sáng và người quan sát lùi xa nhau ra, ta có $\beta = \beta_0$, $\beta_0 c$ là vận tốc của của nguồn sáng so với người quan sát. Như vậy

$$\omega = \gamma(1 - \beta_0)\omega' = \omega'\sqrt{\frac{1-\beta_0}{1+\beta_0}} ,$$

hay

$$\nu = \nu_0\sqrt{\frac{1-\beta_0}{1+\beta_0}} .$$

iii) Khi nguồn sáng và người quan sát chuyển động vuông góc với nhau, giả sử nguồn sáng ở toạ độ $(0, y', 0)$ trong hệ Σ' và người quan sát ở toạ độ $(0, 0, 0)$ trong hệ Σ. Nguồn và người quan sát chuyển động cắt nhau tại $t = t' = 0$, khi $k'_x = 0$, $k'_y = -k$, $k'_z = 0$. Phương trình biến đổi đối với ω khi đó cho

$$\omega = \gamma(\omega' + \beta k'_x c) = \gamma\omega' = \frac{\omega'}{\sqrt{1-\beta^2}} ,$$

hoặc

$$\nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}} .$$

3010

Một sóng ngang đơn sắc với tần số ν lan truyền theo hướng tạo với trục x một góc 60° trong hệ quy chiếu K gắn với nguồn. Nguồn chuyển động theo hướng x với vận tốc $v = \frac{4}{5}c$ theo hướng về phía người quan sát đứng yên trong hệ quy chiếu K' (trong đó trục x' của người quan sát song song với trục x). Người quan sát đo tần số sóng.

(a) Xác định tần số đo được ν' theo tần số riêng ν của sóng.

(b) Xác định góc quan sát trong hệ quy chiếu K'.

(*SUNY, Buffalo*)

Lời giải:

Hệ quy chiếu K của nguồn sáng chuyển động với vận tốc βc so với hệ quy chiếu K' (hệ quy chiếu gắn với người quan sát). Phép biến đổi ngược của các thành phần vectơ sóng bốn chiều được cho bởi

$$k'_x c = \gamma(k_x c + \beta\omega), \qquad k'_y c = k_y c, \qquad k'_z c = k_z c, \qquad \omega' = \gamma(\omega + \beta k_x c)\ ,$$

trong đó $\gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$. Tần số góc của sóng trong hệ K là $\omega = 2\pi\nu$. Nếu góc giữa ánh sáng và trục x là θ, thì

$$k_x = k\cos\theta, \qquad k_y = k\sin\theta, \qquad k_z = 0, \qquad \omega = kc\ .$$

Do đó

$$\omega' = \gamma(\omega + \beta\omega\cos\theta) = \gamma(1+\beta\cos\theta)\omega\ ,$$

hoặc

$$\nu' = \frac{(1+\beta\cos\theta)\nu}{\sqrt{1-\beta^2}}\ .$$

Công thức trên cũng có thể viết lại thành

$$k' = \gamma(1+\beta\cos\theta)k\ .$$

Vì

$$k'_x = \gamma\left(k_x + \frac{\beta\omega}{c}\right) = \gamma k(\cos\theta + \beta)\ ,$$

góc k$'$ tạo với trục x' được cho bởi

$$\cos\theta' = \frac{k'_x}{k'} = \frac{\cos\theta+\beta}{1+\beta\cos\theta}\ .$$

với $\beta = 0,8$, $\theta = 60^\circ$, ta có (a)

$$\nu' = \left(\frac{1+0,8\cos 60^\circ}{\sqrt{1-0,8^2}}\right)\nu = \frac{1,4}{0,6}\nu = \frac{7}{3}\nu\ ,$$

(b)

$$\cos\theta' = \frac{0,5+0,8}{1+0,8\times 0,5} = \frac{13}{14}\,,$$

suy ra $\theta' = 21,8^\circ$.

3011

Xét hai anh em sinh đôi. Tim của mỗi người đập một lần trong một giây và tương ứng mỗi nhịp tim mỗi người truyền một xung vô tuyến. Một người ở lại tĩnh tại trên Trái Đất trong một hệ quy chiếu quán tính. Một người bay vào vũ trụ, lúc đầu đứng yên tại thời điểm 0 sau đó gia tốc rất nhanh lên vận tốc v (trong vòng chưa đến một nhịp tim và không làm rối loạn nhịp tim của anh ta!). Người du hành đi trong thời gian t_1 đo bằng đồng hồ của anh ấy, bao gồm cả quá trình phát xung và nhận xung từ nhà. Sau đó vào thời điểm t_1 anh ấy bất ngờ đảo vận tốc và trở về Trái Đất ở thời điểm $2t_1$. Anh ấy đã phát ra bao nhiêu xung? Bao nhiêu xung anh ấy đã nhận được trong quá trình bay đi? Bao nhiêu xung anh ấy đã nhận được trong nửa hành trình bay về? Tỉ số tổng xung nhận được và xung gửi đi bằng bao nhiêu? Tiếp theo xét đến người ở nhà. Anh ấy gửi xung trong toàn bộ hành trình của người du hành. Anh ấy nhận xung từ người du hành. Từ thời điểm 0 đến t_2 (đo bởi đồng hồ của anh ấy) anh ấy nhận các xung tần số giảm do hiệu ứng Doppler. Ở thời điểm t_2 anh ấy bắt đầu nhận các xung tần số tăng do hiệu ứng Doppler. Lấy t_3 là khoảng thời gian từ thời điểm t_2 cho tới khi kết thúc chuyến đi. Anh ấy nhận được bao nhiêu xung trong khoảng thời gian t_2? Trong khoảng t_3? Tỉ số giữa những xung này là bao nhiêu? Tỉ số của tổng số các xung anh ấy gửi và nhận là bao nhiêu? So sánh kết quả này với kết quả tương tự trong trường hợp người du hành.

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

Xét các hệ quy chiếu quán tính Σ, Σ' với Σ' chuyển động với vận tốc v so với Σ theo hướng của trục x. Các hệ thức biến đổi với các vectơ không-thời gian và tần số góc bốn chiều là

$$ax' = \gamma(x - vt), \qquad x = \gamma(x' + vt')\,,$$

$$y' = y, \qquad z' = z\,,$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right), \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right),$$

$$\omega' = \gamma(\omega - vk_x), \qquad \omega = \gamma(\omega' + vk'_x)\,,$$

$$k'_y = k_y, \qquad\qquad k'_z = k_z\ ,$$

trong đó

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{với} \quad \beta = \frac{|v|}{c}, \qquad |\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c}, \qquad \omega = 2\pi\nu\ ,$$

ν là tần số.

Gọi Σ, Σ' là các hệ quy chiếu nghỉ tương ứng của anh A (người ở lại nhà) và của anh B (người du hành), với A, B đặt ở các gốc tọa độ tương ứng. Vì các thời gian gia tốc và giảm tốc của anh B nhỏ hơn so với thời gian của chuyến đi, Σ' có thể vẫn được coi là hệ quán tính. Đo thời gian theo giây sao cho ν có trị số là một trong hệ quy chiếu đứng yên. Lúc bắt đầu chuyến đi của người B, $t = t' = 0$.

Xét trên quan điểm của anh B

(i) Tổng thời gian của chuyến đi là $\Delta t' = 2t_1$. Do vậy anh B gửi $2t_1$ xung trong toàn chuyến đi.

(ii) Đối với hành trình bay đi, $\beta = \frac{v}{c}$, $k_x = \frac{\omega}{c}$, và các xung được nhận bởi anh B có tần số

$$\nu' = \gamma\left(\nu - \frac{1}{2\pi}\beta c k_x\right) = \gamma(1-\beta)\nu = \gamma(1-\beta)$$

vì $\nu = 1$ khi Σ là hệ quy chiếu nghỉ của A. Do đó anh B nhận

$$\nu' t_1 = \gamma(1-\beta)t_1 = t_1\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

xung trong quá trình bay đi.

(iii) Đối với hành trình bay về, $\beta = -\frac{v}{c}$, $k_x = \frac{\omega}{c}$, và

$$\nu' = \gamma(1+\beta)\nu = \gamma(1+\beta)\ .$$

Bởi vậy anh B nhận

$$\nu' t_1 = \gamma(1+\beta)t_1 = t_1\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

xung trong quá trình bay về.

(iv)

$$\frac{\text{tổng số xung nhận được bởi } B}{\text{tổng số xung gửi bởi } B} = \frac{\gamma(1-\beta)t_1 + \gamma(1+\beta)t_1}{2t_1} = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\ .$$

Xét trên quan điểm của người A

(i) Trong thời khoảng $t = 0$ tới $t = t_2$, người A nhận các xung tần số giảm do hiệu ứng Doppler chỉ ra rằng B chuyển động rời khỏi trong khoảng thời gian đó, nghĩa là $\beta = \frac{v}{c}$. Vì các xung được phát ra trong hướng $-x'$ để đạt đến A, $k'_x = -\frac{\omega}{c}$. Như vậy

$$\nu = \gamma(\nu' - \beta\nu') = \gamma(1 - \beta)\nu' = \gamma(1 - \beta)\ ,$$

bởi vì $\nu' = 1$ khi Σ' là hệ quy chiếu đứng yên của B, và số các xung nhận được là $\gamma(1 - \beta)t_2$. Khoảng thời gian trong đó B, bắt đầu tại $t = t' = 0$, chuyển động rời khỏi A được biến đổi bởi

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{\beta\Delta x'}{c}\right) = \gamma\Delta t' = \gamma t_1$$

vì $\Delta x' = 0$, B đứng yên trong Σ'. Tuy nhiên, A và B thông tin bằng xung ánh sáng, toàn bộ thời gian hành trình của các xung đó

$$\frac{x}{c} = \frac{\gamma(x' + \beta ct')}{c} = \gamma\beta t' = \gamma\beta t_1\ ,$$

ở đây x là toạ độ của B trong Σ, cần phải được tính đến. Do đó

$$t_2 = \Delta t + \frac{x}{c} = \gamma(1 + \beta)t_1 = t_1\sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}\ ,$$

nghĩa là số xung nhận được là

$$\gamma(1 - \beta)t_2 = t_2\sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} = t_1\ .$$

(ii) Trong khoảng thời gian t_3 từ $t = t_2$ đến cuối hành trình, A nhận xung tần số tăng so hiệu ứng Doppler, chỉ ra rằng Σ' chuyển động theo hướng Σ, nghĩa là $\beta = -\frac{v}{c}$. Vì $k'_x = -\frac{\omega}{c}$,

$$\nu = \gamma(\nu' + \beta\nu') = \gamma(1 + \beta)\nu' = \gamma(1 + \beta)\ .$$

Bằng lập luận tương tự như trong phần (i) ta có

$$t_3 = \gamma t_1 - \gamma\beta t_1 = \gamma(1 - \beta)t_1\ .$$

Vì số xung nhận được là

$$\gamma(1 + \beta)t_3 = t_1\ .$$

(iii)

$$\frac{\text{số xung tần số giảm } A \text{ nhận được}}{\text{số xung tần số tăng } A \text{ nhận được}} = \frac{t_1}{t_1} = 1 \ .$$

(iv)

$$\frac{\text{tổng số xung gửi bởi } A}{\text{tổng số xung nhận được bởi } A}$$

$$= \frac{t_2 + t_3}{2t_1} = \frac{\gamma(1+\beta)t_1 + \gamma(1-\beta)t_1}{2t_1} = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \ .$$

Tỉ số này giống như tỉ số của số xung nhận được bởi B trên số xung gửi đi bởi B trong thời gian toàn bộ hành trình, như mong đợi, bởi vì sự đến số xung là bất biến trong phép biến đổi Lorentz.

3012

Một con tàu có một máy phát và một máy thu tín hiệu. Con tàu, rời khỏi trái đất với vận tốc không đổi, gửi trở lại trái đất một xung tín hiệu và nó bị phản xạ từ trái đất. Bốn mươi giây sau trên đồng hồ con tàu, con tàu nhận được tín hiệu và tần số tín hiệu nhận được bằng một nửa tần số phát ra.

(a) Tại thời điểm khi xung rađa bị phản xạ khỏi trái đất, thì trái đất ở vị trí nào khi đo nó trong hệ quy chiếu con tàu?

(b) Vận tốc con tàu bằng bao nhiêu so với trái đất?

(c) Tại thời điểm khi con tàu nhận lại được xung rađa thì con tàu ở đâu khi đo trong hệ quy chiếu trái đất?

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

Con tàu và trái đất đặt tại các gốc toạ độ tương ứng của các hệ quy chiếu Σ' và Σ, với Σ' chuyển động với vận tốc βc so với Σ trong hướng x sao cho $x' = x = 0$ tại $t = t' = 0$.

(a) Vận tốc của xung rađa là c theo tất cả các hướng. Như vậy trong Σ' xung cần thời gian $\frac{40}{2} = 20$ s để tới trái đất. Vì vậy vị trí của trái đất khi xung phản xạ từ trái đất là $x' = -20$ c $= -6 \times 10^9$ m được đo trên hệ quy chiếu con tàu.

(b) Trong Σ tần số góc ω của tín hiệu được quan sát là

$$\omega = \gamma(\omega' + \beta c k'_x)$$

với $\omega' = \omega_0$, tần số góc riêng của tín hiệu, $k'_x = -\frac{\omega_0}{c}$ khi tín hiệu phải đi theo hướng $-x'$ đến trái đất, và $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Như vậy

$$\omega = \gamma(1-\beta)\omega_0 \ .$$

Sau khi phản xạ từ trái đất tần số góc sẽ được quan sát trong Σ' như sau

$$\omega'' = \gamma(\omega - \beta c k_x)$$

với $k_x = \frac{\omega}{c}$, $\omega = \gamma(1-\beta)\omega_0$. Như vậy

$$\omega'' = \gamma(1-\beta)\omega = \gamma^2(1-\beta)^2\omega_0 = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)\omega_0 = \frac{1}{2}\omega_0 \ ,$$

ta được kết quả

$$\beta = \frac{1}{3} \ .$$

Do đó vận tốc con tàu so với trái đất là

$$v = \frac{1}{3} \times 3 \times 10^8 = 10^8 \text{m/s} \ .$$

(c) Trong Σ', khi tín hiệu phản xạ từ trái đất, thời gian là

$$t' = \frac{-20c}{-\beta c} = 60 \text{ s}$$

Vì trái đất chuyển động với vận tốc tương đối $-\beta c$. Khi con tàu nhận được tín hiệu thì thời gian là $t' = 60 + 20 = 80$ s. Vì con tàu đứng yên tại gốc của $\Sigma', x' = 0$. Thời điểm đó được cảm nhận trong hệ Σ như thời gian

$$t = \gamma\left(t' + \frac{\beta x'}{c}\right) = \gamma t' = 80\gamma \ .$$

Vì con tàu rời khỏi trái đất với vận tốc $\beta c = \frac{1}{3}c$, vị trí của nó trong Σ tại thời điểm đó là

$$x = \beta c t = \frac{80}{3}\gamma c = 8,5 \times 10^9 \text{ m} \ .$$

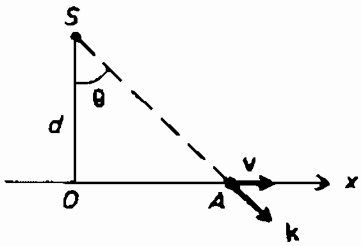
3013

Một nguồn điểm S của ánh sáng đơn sắc phát bức xạ có tần số f. Một người quan sát A chuyển động với tốc độ không đổi v dọc theo một đường thẳng cách nguồn S một khoảng d (hình 3.7).

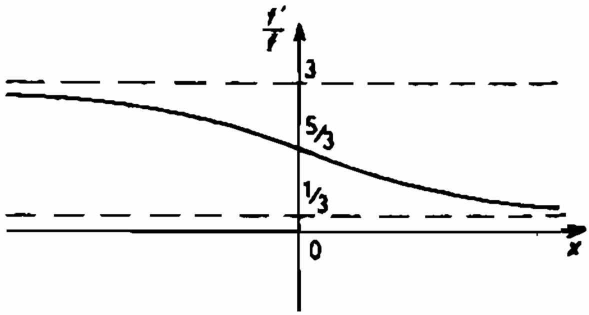
(a) Hãy xác định một biểu thức cho tần số được quan sát như một hàm của khoảng cách x từ điểm gần gốc O nhất.

(b) Hãy vẽ đồ thị gần đúng trong trường hợp (a) nếu cho $\frac{v}{c} = 0,80$.

(UC, Berkeley)



Hình 3.7



Hình 3.8

Lời giải:

(a) Gọi các hệ quy chiếu đứng yên của nguồn sáng S và người quan sát A tương ứng là Σ và Σ', lấy hướng của vận tốc tương đối v dọc theo các trục x, x'. Phép biến đổi các thành phần của vectơ sóng bốn chiều là

$$ck'_x = \gamma(ck_x - \beta\omega), \qquad k_y = k'_y, \qquad k'_z = k_z, \qquad \omega' = \gamma(\omega - \beta ck_x)\ ,$$

trong đó $|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c}$, $\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Vì $k_x = k\sin\theta$, $k = \frac{\omega}{c}$, ta có

$$\omega' = \gamma(\omega - \beta\omega\sin\theta) = \gamma\omega(1 - \beta\sin\theta)\ .$$

Với $\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{d^2+x^2}}$, $\omega = 2\pi f'$, $\omega = 2\pi f$, các biểu thức trên cho tần số được quan sát là

$$f' = \left(1 - \frac{\beta x}{\sqrt{d^2+x^2}}\right)\frac{f}{\sqrt{1-\beta^2}}\ .$$

(b) Nếu $\beta = 0,8$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0,64}} = \frac{10}{6}$ và

$$f' = \frac{1}{3}\left(5 - \frac{4x}{\sqrt{d^2+x^2}}\right)f\ .$$

Để tìm dạng của $\frac{f'}{f}$, ta xét các giới hạn sau

$$x \to -\infty, \qquad \frac{f'}{f} = \frac{1}{3}\left(5 + \frac{4}{\sqrt{\left(\frac{d}{x}\right)^2 + 1}}\right) \to 3\,,$$

$$x \to \infty, \qquad \frac{f'}{f} = \frac{1}{3}\left(5 - \frac{4}{\sqrt{\left(\frac{d}{x}\right)^2 + 1}}\right) \to \frac{1}{3}\,,$$

$$x = 0, \qquad \frac{f'}{f} = \frac{5}{3}\,.$$

Đồ thị gần đúng của $\frac{f'}{f}$ được chỉ ra ở hình 3.8.

3014

Xét bức xạ đơn sắc phát ra ở mặt trời có tần số là ν_s cps, và nhận được ở trái đất với tần số ν_e Mz. Sử dụng dạng ma trận Riemann

$$g_{00} = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right), \qquad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \qquad g_{\mu\neq\nu} = 0\,,$$

trong đó Φ là thế năng hấp dẫn trên một đơn vị khối lượng để rút ra "dịch chuyển đỏ hấp dẫn" $\frac{(\nu_e - \nu_s)}{\nu_s}$ như là một hàm của hiệu các thế hấp dẫn ở mặt trời và trái đất.

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

Trong một trường hấp dẫn, ta luôn có thể định nghĩa một hệ quy chiếu mà đối với nó trường hấp dẫn triệt tiêu trên một vùng được giới hạn và nó thể hiện như một hệ quy chiếu quán tính. Một hệ quy chiếu rơi tự do trong trường hấp dẫn là một hệ quy chiếu như vậy. Một đồng hồ chuẩn bất động trong một hệ quy chiếu như vậy đo khoảng thời gian riêng địa phương.

Xét sự phát ra bức xạ đơn sắc bởi một nguyên tử đứng yên ở P_1 trong một trường hấp dẫn và sử dụng một hệ tọa độ trong đó nguyên tử ở trạnh thái nghỉ. Nếu chu kì là t trong thời gian tọa độ, chu kì τ trong thời gian riêng địa phương là

$$\tau = t\sqrt{g_{00}(P_1)}\,.$$

Giả sử các đỉnh liên tiếp của bức xạ phát ra từ P_1 ở các thời gian tọa độ t_0, $t_0 + t$ được nhận ở điểm P_2 cố định khác ở các thời gian tọa độ $t_0 + T$ và $t_0 + T + t$, trong đó T là hiệu giữa các thời gian tọa độ của phát xạ ở P_1 và tiếp nhận được ở P_2. Nếu trường hấp dẫn là tĩnh, T là hằng số và chu kì được đo trong thời gian tọa độ là

$$(t_0 + T + t) - (t_0 + T) = t \, .$$

Tuy nhiên, một đồng hồ chuẩn đo thời gian riêng địa phương ở P_2 sẽ cho chu kì là

$$\tau' = t\sqrt{g_{00}(P_2)} \, .$$

Bởi vậy tần số ν của vạch phát xạ ở P_1 và tần số ν' quan sát được ở P_2, khi được đo bởi các đồng hồ chuẩn giống nhau được liên hệ bởi

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{\tau}{\tau'} = \sqrt{\frac{g_{00}(P_1)}{g_{00}(P_2)}} \, .$$

Nếu P_1, P_2 tương ứng ở trên mặt trời và trên trái đất, ta có dịch chuyển đỏ hấp dẫn là

$$\begin{aligned}
\frac{\nu_e - \nu_s}{\nu_s} &= \sqrt{\frac{g_{00}(\mathbf{r}_s)}{g_{00}(\mathbf{r}_e)}} - 1 \\
&= \sqrt{\frac{1 + \frac{2\Phi(\mathbf{r}_s)}{c^2}}{1 + \frac{2\Phi(\mathbf{r}_e)}{c^2}}} - 1 \\
&\approx \frac{\Phi(\mathbf{r}_s) - \Phi(\mathbf{r}_e)}{c^2} \, .
\end{aligned}$$

3015

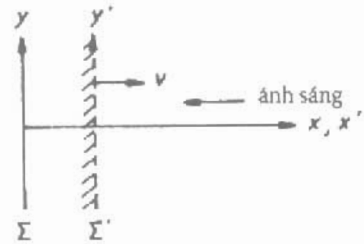
Một chiếc gương đang chuyển động trong chân không với tốc độ tương đối tính v theo hướng trục x. Một chùm sáng có tần số ω_i là chùm tới vuông góc (từ $x = +\infty$) lên gương, như được chỉ trên hình 3.9.

(a) Xác định tần số của ánh sáng bị phản xạ biểu thị ω_i, c và v?

(b) Xác định năng lượng của mỗi photon bị phản xạ.

(c) Thông lượng năng lượng trung bình của chùm tới là P_i (oat/m^2). Xác định thông lượng năng lượng trung bình của chùm phản xạ.

(MIT)



Hình 3.9

Lời giải:

(a) Gọi Σ, Σ' tương ứng là các hệ quy chiếu của nguồn sáng và người quan sát, và của gương. Phép biến đổi đối với tần số góc được cho bởi

$$\omega' = \gamma(\omega - \beta c k_x), \qquad \omega = \gamma(\omega' + \beta c k'_x) ,$$

trong đó $\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Đối với ánh sáng tới, $\omega = \omega_i$, $k_x = -\frac{\omega_i}{c}$, gương nhận

$$\omega'_i = \gamma(\omega_i + \beta\omega_i) = \gamma(1+\beta)\omega_i .$$

Trong sự phản xạ, $\omega'_r = \omega'_i$. Người quan sát trong hệ Σ sẽ nhận

$$\omega_r = \gamma(\omega'_r + \beta c k'_x)$$

với $k'_x = \omega'_r/c$, hoặc

$$\omega_r = \gamma(1+\beta)\omega'_r = \gamma^2(1+\beta)^2\omega_i$$

$$= \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)\omega_i = \left(\frac{c+v}{c-v}\right)\omega_i$$

Đó là tần số góc của ánh sáng phản xạ.

(b) Năng lượng của mỗi photon phản xạ là

$$\hbar\omega_r = \left(\frac{c+v}{c-v}\right)\hbar\omega_i .$$

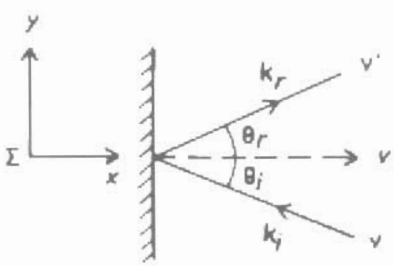
(c) Nếu n là số photon trên một đơn vị thể tích của chùm sáng thông lượng năng lượng trung bình của nó là $nc\hbar\omega$. Thông lượng năng lượng trung bình của chùm phản xạ do đó là

$$P_r = nc\hbar\omega_r = \left(\frac{c+v}{c-v}\right)nc\hbar\omega_i = \left(\frac{c+v}{c-v}\right)P_i .$$

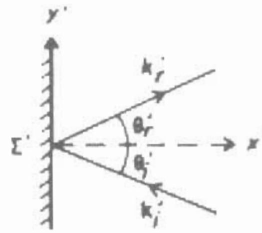
3016

Như được chứng kiến bởi một người quan sát quán tính O, các photon có tần số ν là photon tới một gương phẳng, lệch một góc θ_i so với pháp tuyến. Các photon này bị phản xạ trở lại với góc θ_r so với pháp tuyến và với tần số ν' (hình 3.10). Hãy xác định θ_r và ν' theo θ_i và ν trong trường hợp gương chuyển động theo phương x với vận tốc v so với O. Kết quả sẽ như thế nào nếu gương chuyển động với vận tốc v theo phương y?

(*Princeton*)



Hình 3.10



Hình 3.11

Lời giải:

Gọi Σ, Σ' tương ứng là các hệ quy chiếu đứng yên của người quan sát và gương (xem hình 3.10 và 3.11) và dùng các hệ thức biến đổi

$$ck'_x = \gamma(ck_x - \beta\omega), \qquad ck_x = \gamma(ck'_x + \beta\omega'),$$
$$ck'_y = ck_y, \qquad ck'_z = ck_z,$$
$$\omega' = \gamma(\omega - \beta ck_x), \qquad \omega = \gamma(\omega' + \beta ck'_x).$$

Với $k_i = \frac{\omega_i}{c} = \frac{2\pi\nu}{c}$, $k_r = \frac{\omega_r}{c} = \frac{2\pi\nu'}{c}$, ta có đối với ánh sáng tới

$$-k'_i \cos\theta'_i = \gamma\left(-k_i\cos\theta_i - \frac{\beta\omega_i}{c}\right) = -\gamma k_i(\cos\theta_i + \beta),$$
$$\omega'_i = \gamma(\omega_i + \beta ck_i\cos\theta_i) = \gamma\omega_i(1 + \beta\cos\theta_i),$$

hay

$$k'_i\cos\theta'_i = \gamma k_i(\cos\theta_i + \beta), \qquad k'_i = \gamma k_i(1 + \beta\cos\theta_i).$$

Trong sự phản xạ, $\omega'_r = \omega'_i$, $\theta'_r = \theta'_i$, do đó đối với ánh sáng phản xạ chúng ta có

$$\omega_r = \gamma(\omega'_r + \beta ck'_r\cos\theta'_r) = \gamma(\omega'_i + \beta\omega'_i\cos\theta'_i),$$
$$k_r\cos\theta_r = \gamma k'_r(\cos\theta'_r + \beta) = \gamma k'_i(\cos\theta'_i + \beta),$$

hoặc

$$\begin{aligned} k_r &= \gamma k_i'(1 + \beta\cos\theta_i') \\ &= \gamma^2 k_i(1 + \beta\cos\theta_i) + \gamma^2\beta k_i(\cos\theta_i + \beta) \\ &= \gamma^2 k_i(1 + 2\beta\cos\theta_i + \beta^2) , \\ k_r\cos\theta_r &= \gamma^2 k_i[(1+\beta^2)\cos\theta_i + 2\beta] , \end{aligned}$$

nghĩa là

$$\nu' = \frac{\nu(1 + 2\beta\cos\theta_i + \beta^2)}{1-\beta^2} ,$$

$$\cos\theta_r = \frac{(1+\beta^2)\cos\theta_i + 2\beta}{1 + 2\beta\cos\theta_i + \beta^2} .$$

Nếu gương chuyển động theo phương y, sự chuyển động sẽ không ảnh hưởng tới quá trình phản xạ và chúng ta vẫn có

$$\nu' = \nu, \qquad \theta_r = \theta_i .$$

3017

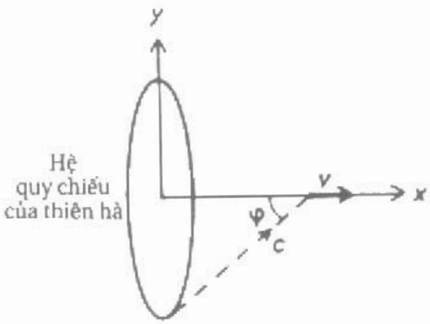
Trong một phiên bản đã được đơn giản hoá về kết cục của một trong những tiểu thuyết của Fred Hoyle, nhân vật du hành với thừa số Lorentz cao theo phương vuông góc với mặt phẳng thiên hà của chúng ta (hình 3.12), đã nói rằng anh ta có vẻ như ở bên trong và hướng về phía miệng của một "bát cá vàng" với một mép màu xanh và một thân màu đỏ (hình 3.13). Feynman đã đánh cuộc 25 cent rằng ánh sáng từ thiên hà sẽ không trông giống như vậy. Chúng ta sẽ kiểm tra xem ai đúng. Lấy tốc độ tương đối là $\beta = 0,99$ và góc φ trong hệ quy chiếu của thiên hà là 45° (hình 3.12).

(a) Xác định biểu thức cho quang sai tương đối và dùng nó để tính (hình 3.13) phương từ đó ánh sáng từ rìa của thiên hà có vẻ truyền tới khi được nhìn trên tàu vũ trụ.

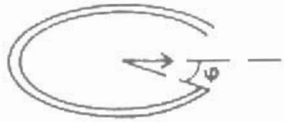
(b) Xác định hiệu ứng Doppler tương đối tính và dùng nó để tính tỉ số tần số ν'/ν cho ánh sáng từ rìa thiên hà.

(c) Tính φ' và ν'/ν ở góc φ đủ để xem ai đã thắng trong vụ cá cược.

(UC, Berkeley)



Hình 3.12



Hình 3.13

Lời giải:

a) Giả sử Σ', Σ tương ứng là các hệ quy chiếu quán tính gắn đối với tàu vũ trụ và thiên hà, với Σ' chuyển động với tốc độ v dọc theo hướng trục x, trong đó trục x vuông góc với mặt phẳng thiên hà (hình 3.12). Các vận tốc của một điểm, u và u′, trong hệ Σ và Σ' được liên hệ với nhau bởi phép biến đổi vận tốc.

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}, \qquad u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}, \qquad u'_z = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)},$$

trong đó $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ với $\beta = \frac{v}{c}$. Xét ánh sáng tới từ một điểm ở rìa của vòng tròn ngân hà như được chỉ ra trong hình vẽ, đối với nó

$$u_x = c\cos\varphi, \qquad u_y = c\sin\varphi, \qquad u_z = 0\,.$$

Khi đó

$$u'_x = c\cos\varphi' = \frac{c\cos\varphi - v}{1 - \beta\cos\varphi}\,,$$

hoặc

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \beta}{1 - \beta\cos\varphi} = \frac{0,707 - 0,99}{1 - 0,99 \times 0,707} = -0,943\,.$$

Lấy $\varphi' = 160,6^\circ$. Đây là góc mà hướng của ánh sáng tạo với hướng chuyển động của tàu vũ trụ khi được nhìn bởi nhà du hành. Góc này là góc bù của góc φ đã được chỉ ra trong hình 3.13.

(b) Phép biến đổi đối với tần số góc

$$\begin{aligned}\omega' &= \gamma(\omega - \beta c k_x)\\ &= \gamma(\omega - \beta ck\cos\varphi)\\ &= \gamma\omega(1 - \beta\cos\varphi)\,,\end{aligned}$$

cho ta

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{\omega'}{\omega} = \gamma(1 - \beta\cos\varphi) = \frac{1 - 0,99 \times 0,707}{\sqrt{1 - 0,99^2}} = 2,13\ .$$

(c) Kết quả trên chỉ ra rằng ánh sáng từ rìa đã bị dịch chuyển về phía xanh. Đối với ánh sáng từ tâm, $\varphi = 0$ và

$$\frac{\nu'}{\nu} = \gamma(1 - \beta) = 0,071\ ,$$

cho thấy rằng nó bị dịch chuyển về phía đỏ. Hướng tới hạn giữa dịch chuyển xanh và dịch chuyển đỏ được đưa ra bởi công $\nu' = \nu$, hoặc

$$\cos\varphi = \frac{1}{\beta}\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) = 0,868\ ,$$

tức là $\varphi = 29,8°$.

Khi tàu vũ trụ rời tâm của thiên hà, lúc đầu $\varphi = 90°$ và

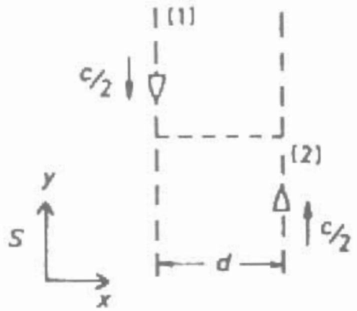
$$\frac{\nu'}{\nu} = \gamma = 7,09\ ,$$

vì vậy tất cả ánh sáng từ thiên hà xuất hiện như bị dịch chuyển xanh. Khi nó rời xa dần từ thiên hà, ánh sáng từ tâm bắt đầu chuyển thành dịch chuyển đỏ. Khi tàu vũ trụ đi xa hơn, ánh sáng từ vùng tâm càng lớn hơn sẽ có vẻ như dịch chuyển đỏ. Chỉ ánh sáng từ rìa là dịch chuyển xanh. Rốt cục ở một khoảng cách lớn $\varphi = 0$ và $\frac{\nu'}{\nu} = 0,071$, tất cả ánh sáng thiên hà là dịch chuyển đỏ. Bởi vậy tuyên bố của nhân vật trong tiểu thuyết Fred Hoyle là đúng và Feynman thua cuộc.

3018

Khi được quan sát trong một hệ quy chiếu quán tính S, hai tàu vũ trụ bay ngược hướng dọc theo một đường thẳng, các quỹ đạo song song cách nhau một khoảng cách d (hình 3.14). Tốc độ của mỗi tàu là $c/2$, trong đó c là tốc độ ánh sáng.

(a) Ở thời điểm (khi nhìn từ S) khi các con tàu ở các điểm có khoảng cách gần nhất (được chỉ ra bằng đường đứt nét trong hình), tàu (1) phóng ra gói nhỏ có vận tốc $3c/4$ (cũng được quan sát từ S). Theo quan điểm của người quan sát trên tàu (1), góc phóng gói nhỏ bằng bao nhiêu để có thể nhận được trên tàu (2)? Giả sử người quan sát trên tàu (1) có một hệ tọa độ mà trục của



Hình 3.14

nó song song với trục của S và như trên hình vẽ hướng của chuyển động song song với trục y.

(b) Tốc độ của gói nhỏ mà người ngồi trong con tàu (1) quan sát được là bao nhiêu?

(*CUSPEA*)

Lời giải:

(a) Hãy xét các sự kiện xảy ra trong hệ quy chiếu S. Gói nhỏ phải có $u_y = \frac{c}{2}$ để sau khi chuyển động một khoảng cách $\Delta x = d$ nó sẽ có cùng tọa độ y như với con tàu (2). Do đó, trong hệ S, gói nhỏ phải có các thành phần vận tốc

$$u_y = \frac{c}{2}, \qquad u_x = \sqrt{u^2 - u_y^2} = \sqrt{\left(\frac{3c}{4}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}c}{4}\,.$$

Gọi S' là hệ quy chiếu quán tính gắn với tàu (1) có các trục tọa độ x', y', z' của nó song song với các trục x, y, z tương ứng của S. Vì tương ứng S' có vận tốc $v_1 = -\frac{c}{2}$, theo phương y đối với hệ quy chiếu S, phép biến đổi đối với vận tốc được cho bởi

$$u'_y = \frac{u_y - v_1}{1 - \frac{v_1 u_y}{c^2}}; \qquad u'_x = \frac{u_x}{\gamma\left(1 - \frac{v_1 u_y}{c^2}\right)}\,,$$

trong đó

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,.$$

Do đó

$$u'_y = \frac{\frac{c}{2} + \frac{c}{2}}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{4}{5}c\,,$$

$$u'_x = \frac{\frac{\sqrt{5}}{4}c}{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{15}}{10}c\,.$$

Như vậy tàu (1) phải phóng gói nhỏ theo góc α so với hướng của tàu (2) được xác định bởi

$$\text{tg}\alpha = \frac{u'_y}{u'_x} = \frac{8}{\sqrt{15}}\,,$$

hay

$$\alpha = 64,2^\circ\,.$$

(b) Tốc độ của gói nhỏ khi nó được nhìn bởi người quan sát trên con tàu (1) là

$$u' = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{15}{100}}\,c = \sqrt{\frac{79}{100}}\,c = 0,889c\,.$$

3019

Hai hạt có cùng khối lượng m được phát ra theo cùng một hướng, với các xung lượng tương ứng là $5mc$ và $10mc$. Khi nhìn từ hạt có xung lượng nhỏ hơn, chậm hơn thì vận tốc của hạt có xung lượng lớn hơn nhanh hơn là bao nhiêu, và ngược lại (c = tốc độ ánh sáng).

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm K_0, hạt chậm hơn có xung lượng

$$m\gamma_1 v_1 = m\gamma_1\beta_1 c = 5mc\,;$$

suy ra

$$\gamma_1\beta_1 = \sqrt{\gamma_1^2 - 1} = 5\,,$$

hoặc

$$\gamma_1^2 = 26\,.$$

Do vậy

$$\beta_1^2 = 1 - \frac{1}{26} = \frac{25}{26}, \qquad \text{hoặc} \qquad v_1 = \sqrt{\frac{25}{26}}\,c\,.$$

Tương tự cho hạt nhanh hơn, vận tốc là

$$v_2 = \sqrt{\frac{100}{101}}\, c\,.$$

Giả sử K_1, K_2 là các hệ quy chiếu tĩnh tương ứng của các hạt chậm hơn và nhanh hơn. Phép biến đổi vận tốc giữa hệ K_0 và K, chuyển động với K_0 với vận tốc v theo phương x là

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{u_x v}{c^2}}\,.$$

Do đó, trong hệ K_1, vận tốc của hạt nhanh hơn là

$$v'_2 = \frac{v_2 - v_1}{1 - \dfrac{u_2 v_1}{c^2}} = \left(\frac{\sqrt{\frac{100}{101}} - \sqrt{\frac{25}{26}}}{1 - \sqrt{\frac{100}{101}\cdot\frac{25}{26}}}\right) c = 0,595c\,.$$

Trong hệ K_2, vận tốc của hạt chậm hơn là

$$v'_1 = \frac{v_1 - v_2}{1 - \dfrac{v_1 v_2}{c^2}} = -0,595c\,.$$

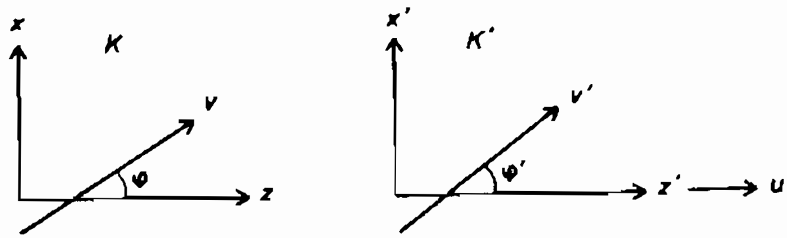
3020

Người quan sát 1 nhìn một hạt đang chuyển động với vận tốc v trên một quỹ đạo là một đường thẳng lệch một góc φ đối với trục z. Người quan sát 2 chuyển động với vận tốc u so với người quan sát 1 dọc theo phương z. Xác định công thức tính vận tốc và hướng chuyển động của hạt khi được nhìn từ người quan sát 2. Kiểm tra kết quả trong giới hạn $v \to c$.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Giả sử K, K' tương ứng là các hệ quy chiếu nghỉ của người quan sát 1 và người quan sát 2 có các trục song song sao cho trục x nằm trong mặt phẳng của v và u như ở trên hình 3.15. Phép biến đổi vận tốc cho



Hình 3.15

$$v'_z = \frac{v_z - u}{1 - \frac{uv_z}{c^2}} = \frac{v\cos\varphi - u}{1 - \frac{uv\cos\varphi}{c^2}},$$

$$v'_x = \frac{v_x}{\gamma\left(1 - \frac{uv_z}{c^2}\right)} = \frac{v\sin\varphi\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{uv\cos\varphi}{c^2}}, \qquad v'_y = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{uv_z}{c^2}\right)} = 0,$$

với $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$. Do đó

$$v' = \sqrt{v_z'^2 + v_x'^2}$$

$$= \frac{\sqrt{v^2 + u^2 - 2vu\cos\varphi - \frac{u^2v^2\sin^2\varphi}{c^2}}}{1 - \frac{uv\cos\varphi}{c^2}}$$

$$\tan\varphi' = \frac{v'_x}{v'_z} = \frac{v\sin\varphi\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{v\cos\varphi - u}.$$

Như vậy người quan sát thứ hai nhìn thấy một hạt chuyển động với vận tốc v' trên một quỹ đạo là đường thẳng lệch góc φ' so với trục z'.

Trong giới hạn $v \to c$,

$$v' \to \frac{\sqrt{c^2 + u^2 - 2cu\cos\varphi - u^2\sin^2\varphi}}{1 - \frac{u\cos\varphi}{c}} = \frac{c - u\cos\varphi}{1 - \frac{u\cos\varphi}{c}} = c.$$

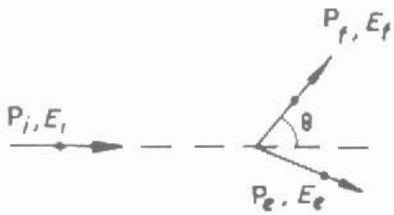
Điều đó nói nên rằng c trong bất kì hướng nào đều được biến đổi thành c, phù hợp với các giả thuyết cơ bản của thuyết tương đối hẹp là c như nhau theo mọi hướng và trong mọi hệ quy chiếu quán tính. Điều đó chứng tỏ kết quả của chúng ta là đúng.

3021

(a) Một photon có năng lượng E_i bị tán xạ bởi một electron có khối lượng m_e ban đầu ở trạng thái nghỉ như ở hình 3.16. Photon có năng lượng cuối E_f. Sử dụng thuyết tương đối hẹp, xác định công thức liên hệ E_f và E_i với θ, trong đó θ là góc giữa photon tới và photon bị tán xạ.

(b) Trong các buồng bọt (bubble chambers), người ta thường quan sát sự sinh một cặp electron-positon từ một photon. Hãy chỉ ra rằng một quá trình như thế là không thể xảy ra trừ khi có một vật khác liên quan, ví dụ như một hạt nhân. Giả thiết rằng hạt nhân có khối lượng M và electron có khối lượng m_e. Năng lượng nhỏ nhất mà photon phải có để tạo ra một cặp electron-positon là bao nhiêu?

(*Princeton*)



Hình 3.16

Lời giải:

(a) Sự tán xạ được biết như hiệu ứng Compton. Theo định luật bảo toàn năng lượng, ta có

$$E_i + m_e c^2 = E_f + E_e ,$$

ở đây E_e là năng lượng của electron sau khi tán xạ. Theo định luật bảo toàn xung lượng, ta có

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_f + \mathbf{P}_e ,$$

trong đó $\mathbf{P}_i$ và $\mathbf{P}_f$ tương ứng là xung lượng của photon trước và sau khi tán xạ, $\mathbf{P}_e$ là xung lượng của electron sau khi tán xạ. Chúng ta cũng có từ dạng rút gọn của vectơ xung lượng bốn chiều của electron

$$E_e^2 = m_e^2 c^4 + P_e^2 c^2 ,$$

hoặc

$$(m_e c^2 + E_i - E_f)^2 = m_e^2 c^4 + (\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_f)^2 c^2 \ .$$

Đối với photon, $E_i = P_i c$, $E_f = P_f c$, và biểu thức trên trở thành

$$2m_e c^2(E_i - E_f) + (E_i - E_f)^2 = E_i^2 + E_f^2 - 2E_i E_f \cos\theta \ ,$$

hoặc

$$\left(\frac{1}{E_f} - \frac{1}{E_i}\right) m_e c^2 = 1 - \cos\theta.$$

(b) Giả sử phản ứng $\gamma \to e^- + e^+$ là có thể xảy ra. Khi đó năng lượng và xung lượng của hệ phải được bảo toàn trong tất cả các hệ quy chiếu quán tính. Hãy xét một hệ quy chiếu gắn với tâm khối lượng của cặp được tạo ra. Trong hệ quy chiếu này, electron và positon sẽ chuyển động trên một đường thẳng qua gốc tọa độ rời xa khỏi nhau với cùng với tốc độ v và xung lượng toàn phần bằng 0. Bảo toàn xung lượng đòi hỏi xung lượng của photon ban đầu cũng bằng 0. Tuy nhiên mỗi hạt có năng lượng $m_e \gamma c^2$, trong đó $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, và hệ có năng lượng toàn phần $2m_e \gamma c^2$. Đây cũng phải là năng lượng của photon ban đầu, do bảo toàn năng lượng. Điều đó kéo theo photon ban đầu phải có một xung lượng $2m_e \gamma c$, mâu thuẫn với kết quả thu được từ bảo toàn xung lượng. Vậy phản ứng không thể xảy ra.

Năng lượng và xung lượng của cả hai có thể được bảo toàn nếu một hạt khác, một hạt nhân khối lượng M chẳng hạn, có liên quan. Trong trường hợp photon có vừa đủ năng lượng E để tạo ra một cặp như thế và M là khối lượng nghỉ ban đầu, cặp này sẽ được tạo ra trong trạng thái nghỉ, nghĩa là

$$E + Mc^2 = M\gamma c^2 + 2m_e c^2 \ ,$$

ở đây $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ với $\beta = \frac{v}{c}$, v là vận tốc của hạt nhân sau khi tạo cặp. Bảo toàn xung lượng cho

$$\frac{E}{c} = M\gamma\beta c \ .$$

Vì $\gamma\beta = \sqrt{\gamma^2 - 1}$, ta có

$$\gamma^2 = 1 + \left(\frac{E}{Mc^2}\right)^2$$

và phương trình năng lượng trở thành

$$(E + Mc^2 - 2m_e c^2)^2 = E^2 + M^2 c^4 \ ,$$

suy ra

$$E = 2\left(\frac{M - m_e}{M - 2m_e}\right) m_e c^2 .$$

Vì $M \gg m_e$, năng lượng photon nhỏ nhất được yêu cầu là chỉ nhiều hơn một chút so với năng lượng nghỉ của cặp được tạo ra, $2m_e c^2$.

3022

(a) Một proton trong tia vũ trụ va chạm với một proton đứng yên để đưa ra một hệ kích thích chuyển động va chạm tương đối tính cao ($\gamma = 1000$). Trong hệ này (các meson) được phát ra với vận tốc $\bar{\beta}c$. Nếu trong hệ chuyển động, một meson được phát ra dưới góc $\bar{\theta}$ so với hướng phía trước, thì ở một góc θ nào đó sẽ được quan sát thấy ở phòng thí nghiệm?

(b) Áp dụng kết quả thu được ở câu (a) trên đối với các meson (năng lượng nghỉ là 140 Mev) phát ra trong hệ chuyển động với xung lượng 0,5 GeV/c. Giá trị θ là bao nhiêu nếu $\bar{\theta}$ là 90°? Giá trị lớn nhất của θ có thể quan sát được trong phòng thí nghiệm là bao nhiêu?

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Giả sử Σ, Σ' tương ứng là hệ quy chiếu phòng thí nghiệm và một hệ quy chiếu gắn với tâm khối của hệ được kích thích với Σ' chuyển động với vận tốc βc so với Σ trong phương x. Vận tốc của một meson phát ra trong hệ Σ' với vận tốc $\bar{\beta}c$ dưới góc $\bar{\theta}$ đối với trục x' được biến đổi sang hệ Σ như sau

$$u_x = \frac{u'_x + \beta c}{1 + \dfrac{u'_x \beta}{c}} = \frac{(\bar{\beta}\cos\bar{\theta} + \beta)c}{1 + \beta\bar{\beta}\cos\bar{\theta}}, \quad u_y = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \dfrac{u'_x\beta}{c}\right)} = \frac{\bar{\beta}c\sin\bar{\theta}}{\gamma(1 + \beta\bar{\beta}\cos\bar{\theta})} .$$

Do đó hạt meson được phát ra trong hệ Σ dưới góc θ đối với trục x được cho bởi

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{\bar{\beta}\sin\bar{\theta}}{\gamma(\bar{\beta}\cos\bar{\theta} + \beta)} ,$$

trong đó

$$\gamma = 1000 ,$$

$$\beta = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$$

$$= 1 - 0,5 \times 10^{-6} = 0,9999995 .$$

(b) Nếu $\bar{\theta} = 90°$, góc phát xạ θ trong hệ Σ được xác định bởi

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{\bar{\beta}}{\gamma\beta} = \frac{\bar{\beta}}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} .$$

Xung lượng của các meson phát ra là

$$\bar{p} = m\bar{\gamma}\bar{\beta}c = 0,5 \text{ GeV/c} ,$$

với $\bar{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{1-\bar{\beta}^2}}$, m là khối lượng nghỉ của meson. Khi đó

$$\gamma\beta = \frac{0,5}{0,14} = 3,571 .$$

hoặc

$$\beta = \frac{3,571}{\bar{\gamma}} = \frac{3,571}{\sqrt{1 + 3,571^2}} = 0,963 ,$$

từ đó

$$(\gamma\beta)^2 = \bar{\gamma}^2 - 1 .$$

Do đó

$$\theta \approx \mathrm{tg}\theta = \frac{0,963}{\sqrt{10^6 - 1}} = 9,63 \times 10^{-4} \text{ rad } = 5,52 \times 10^{-2} \text{ độ } = 3,31' .$$

Giá trị lớn nhất của θ được xác định bởi

$$\frac{d\mathrm{tg}\theta}{d\bar{\theta}} = 0 ,$$

nghĩa là

$$(\bar{\beta}\cos\bar{\theta} + \beta)\cos\bar{\theta} + \bar{\beta}\sin^2\bar{\theta} = 0 ,$$

hoặc bởi

$$\cos\bar{\theta} = -\frac{\bar{\beta}}{\beta} .$$

Do đó

$$\bar{\theta} = \arccos\left(-\frac{0,963}{0,9999995}\right) = 164,4° ,$$

suy ra

$$\theta = \mathrm{arctg}\left[\frac{0,963 \times \sin 164,4°}{1000 \times (0,963\cos 164,4° + 0,9999995)}\right] = 0,205° = 12,3' .$$

Đây rõ ràng là góc lớn nhất quan sát được trong phòng thí nghiệm vì góc nhỏ nhất là 0° đối với $\bar{\theta} = 0°$ và $\theta = 180°$.

3023

(a) Tính xung lượng của các pion (π) có cùng vận tốc như các proton có xung lượng 400 GeV/c. Đó là xung lượng có thể lớn nhất mà các pion sinh ra có khi các proton 400 GeV/c đập vào bia tại Phòng thí nghiệm Fermi. Pion có khối lượng nghỉ là 0,14 GeV/c^2. Khối lượng nghỉ của proton là 0,94 GeV/c^2.

(b) Các pion đó sau đó dịch chuyển theo ống phân rã dài 400 m ở đó một số trong chúng bị phân rã thành tia nơtrino, cho một đầu thu nơtrino đặt ở xa hơn 1 km như chỉ ra ở hình 3.17. Bao nhiêu phần nơtrino phân rã trong 400 m? Thời gian sống riêng trung bình của pion là $2,6 \times 10^{-8}$ s.

(c) Chiều dài của ống phân rã là bao nhiêu khi đo bởi người quan sát đứng ở hệ quy chiếu pion đứng yên?

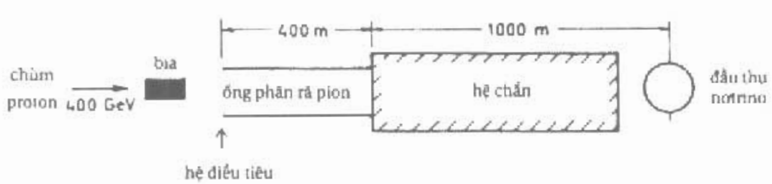
(d) Pion (π) phân rã thành một muyon (μ) và một nơtrino (ν). (Nơtrino có khối lượng nghỉ là 0). Sử dụng quan hệ giữa năng lượng tương đối tính toàn phần và xung lượng chỉ ra rằng độ lớn đại lượng động lượng của các mảnh vỡ trong hệ quy chiếu pion đứng yên, q, được cho bởi

$$\frac{q}{c} = \frac{M^2 - m^2}{2M} ,$$

ở đây M là khối lượng nghỉ của pion và m là khối lượng nghỉ của muyon.

(e) Máy thu nhận nơtrino, tính trung bình, đặt ở xa khoảng 1,2 km từ điểm các pion phân rã. Kích thước ngang (bán kính) của máy thu máy thu nhận phải lớn cỡ nào để có cơ hội nhận được tất cả các nơtrino được tạo ra trong bán cầu nằm hướng về phía trước trong hệ quy chiếu pion đứng yên.

(*UC, Berkeley*)



Hình 3.17

Lời giải:

(a) Động lượng của hạt có khối lượg nghỉ m và vận tốc βc là

$$p = m\gamma\beta c \ .$$

ở đây $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Đối với cùng vận tốc $\frac{p}{m}$ là một hằng số. Do đó momen động lượng của pion là

$$p_\pi = \left(\frac{m_\pi}{m_p}\right) p_p = \frac{0,14}{0,94} \times 400 = 59,6 \text{ GeV/c} \ .$$

(b) Giả sử Σ, Σ' tương ứng là hệ quy chiếu phòng thí nghiệm và hệ quy chiếu nghỉ của pion. Vì

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{\beta \Delta x'}{c}\right) = \gamma \Delta t' \ ,$$

thời gian sống trong phòng thí nghiệm τ của pion bằng $\gamma\tau_0$, ở đây τ_0 là thời gian sống riêng của pion và γ là thừa số Lorentz của nó trong Σ. Nếu n là số pion trong tia ta có

$$-\frac{dn}{n} = \frac{dt}{\tau} \ ,$$

hay

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \ ,$$

n_0 là số pion tại $t = 0$. Đối với pion có mô men động luợng 59,6 GeV/c,

$$\gamma\beta = \frac{59,6}{0,14} = 425,5 \ ,$$

và

$$\frac{t}{\tau} = \frac{l}{\gamma\beta c\tau_0} = \frac{400}{425,5 \times 3 \times 10^8 \times 2,6 \times 10^{-8}} = 0,1205 \ .$$

Do đó tỷ phần pion bị phân rã trong ống là

$$1 - e^{-0,1205} = 0,1135 = 11,35\% \ .$$

(c) Chiều dài của ống phân rã trong Σ' theo định nghĩa là $l' = x_2' - x_1'$, ở đây x_1', x_2' là toạ độ của hai đầu của nó tính tại cùng một thời khắc t'. Vì

$$x_1 = \gamma(x_1' + \beta c t'), \qquad x_2 = \gamma(x_2' + \beta c t') \ ,$$

ta có

$$x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 - x'_1)$$

hay

$$l = \gamma l' ,$$

nghĩa là

$$l' = \frac{l}{\gamma} = \frac{400}{\gamma} \approx \frac{400}{\gamma\beta} = \frac{400}{425,5} = 0,94 \text{ m} .$$

(d) Năng lượng của hạt khối lượng nghỉ m, động lượng p, vận tốc βc, thừa số Lorentz γ là

$$\begin{aligned} E &= m\gamma c^2 = mc^2\sqrt{\gamma^2\beta^2 + 1} = \sqrt{m^2c^4\gamma^2\beta^2 + m^2c^4} \\ &= \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \end{aligned}$$

vì $p = m\gamma\beta c$. Xét sự phân rã $\pi \to \mu + \nu$ trong hệ quy chiếu đứng yên của pion. Vì động lượng ban đầu bằng 0, các động lượng của μ và ν phải bằng về độ lớn và ngược hướng, $|\mathbf{p}_\mu| = |\mathbf{p}_\nu| = q$. Bảo toàn năng lượng cho

$$Mc^2 = \sqrt{q^2c^2 + m^2c^4} + qc ,$$

có sử dụng sự kiện rằng pion đứng yên trong Σ' và có khối lượng nghỉ bằng không mà đến lượt lại cho

$$q = \left(\frac{M^2 - m^2}{2M}\right) c .$$

(e) Một nơtrino được phát ra với vận tốc $\beta' c$ tại góc θ' so với trục x' trong hệ quy chiếu đứng yên của pion, Σ', được quan sát dịch chuyển theo hướng tạo góc θ với trục x trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm Σ, ở đây θ được cho bởi (Bài toán 3022).

$$\text{tg}\theta = \frac{\beta' \sin\theta'}{\gamma(\beta' \cos\theta' + \beta)} = \frac{\sin\theta'}{\gamma(\cos\theta' + \beta)} ,$$

vì nơtrino có khối lượng nghỉ 0, luôn luôn phải chuyển động với vận tốc c. Với $\theta' \le \frac{\pi}{2}$,

$$\text{tg}\theta \le \frac{1}{\gamma(\cos\theta' + \beta)} \le \frac{1}{\gamma\beta} = \frac{1}{425,5} .$$

Do đó $\theta \le 2,35 \times 10^{-3}$ rad. Để máy nhận tín hiệu ở xa 1,2 km nhận được tất cả nơtrino với $\theta' \le \frac{\pi}{2}$, máy phải có kích thước ngang

$$R = 1,2 \times 10^3 \times 2,35 \times 10^{-3} = 2,82 \text{ m} .$$

3024

Trong mô hình đơn giản hoá về va chạm tương đối tính giữa hạt nhân với hạt nhân, một hạt nhân có khối lượng nghỉ m_1 và vận tốc β_1 va chạm trực diện với một hạt nhân bia có khối lượng m_2 đứng yên. Hệ hạt tạo thành chuyển động giật lùi với vận tốc là β_0 và năng lượng khối tâm là ε_0. Giả thiết quá trình trên không sinh ra hạt nào mới.

(a) Hãy dẫn ra các hệ thức có hiệu chính tương đối tính của β_0 và ε_0.

(b) Tính β_0 và ε_0 (tính ra MeV) trong trường hợp hạt nhân ^{40}Ar có vận tốc $\beta_1 = 0.8$ va chạm vào hạt nhân ^{238}U.

(c) Một proton được phát ra với vận tốc là $\beta_c = 0,2$ và lệch với hướng tiến một góc $\theta_c = 60°$ trong hệ quy chiếu gắn với hệ Ar + U giật lùi. Xác định tốc độ β_l và hướng θ_l của vận tốc của proton trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm với độ chính xác vài phần trăm, sử dụng các xấp xỉ phi tương đối tính nếu chúng được đảm bảo.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Như câu hỏi đã ngụ ý, để thuận tiện thì vận tốc của ánh sáng được lấy bằng 1.

(a) Đối với một hệ thì $E^2 - p^2$ là bất biến đối với phép biến đổi Lorentz. Trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm Σ, đặt $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}$,

$$E^2 - p^2 = (m_1\gamma_1 + m_2)^2 - (m_1\gamma_1\beta_1)^2 .$$

Trong hệ quy chiếu khối tâm Σ', $E'^2 - p'^2 = \varepsilon_0^2$. Vì vậy ta có

$$\begin{aligned}\varepsilon_0^2 &= (m_1\gamma_1 + m_2)^2 - (m_1\gamma_1\beta_1)^2\\ &= m_1^2\gamma_1^2(1-\beta_1^2) + 2m_1m_2\gamma_1 + m_2^2\\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\gamma_1 ,\end{aligned}$$

hay

$$\varepsilon_0 = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \frac{2m_1m_2}{\sqrt{1-\beta_1^2}}} .$$

Trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm, hệ m_1, m_2 có xung lượng toàn phần $m_1\gamma_1\beta_1$ và năng lượng toàn phần $m_1\gamma_1 + m_2$. Những đại lượng này là những đại lượng bảo toàn nên sau khi va chạm hệ phức hợp sẽ chuyển động với vận tốc là

$$\beta_0 = \frac{m_1\gamma_1\beta_1}{m_1\gamma_1 + m_2} = \frac{m_1\beta_1}{m_1 + m_2\sqrt{1-\beta_1^2}} .$$

(b) Khối lượng của các hạt nhân xấp xỉ bằng

$$m_1 = 40 \times 0,94 = 37,6 \text{ GeV} ,$$
$$m_2 = 238 \times 0,94 = 223,7 \text{ GeV} .$$

Khi đó

$$\varepsilon_0 = \sqrt{37,6^2 + 223,7^2 + \frac{2 \times 37,6 \times 223,7}{\sqrt{1 - 0,64}}}$$
$$= 282 \text{ GeV} = 2,82 \times 10^5 \text{ MeV} ,$$
$$\beta_0 = \frac{37,6 \times 0,8}{37,6 + 223,7 \times \sqrt{1 - 0,64}} = 0,175 .$$

(c) Các thành phần của vận tốc được biến đổi theo công thức

$$\beta_{lx} = \frac{\beta_{cx} + \beta_0}{1 + \beta_{cx}\beta_0} = \frac{0,2 \cos 60^\circ + 0,175}{1 + 0,2 \cos 60^\circ \times 0,175} = 0,270 ,$$
$$\beta_{ly} = \frac{\beta_{cy}\sqrt{1 - \beta_0^2}}{1 + \beta_{cx}\beta_0} = \frac{0,2 \sin 60^\circ \sqrt{1 - 0,175^2}}{1 + 0,2 \cos 60^\circ \times 0,175} = 0,168 ,$$

do đó trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm thì độ lớn và hướng của vận tốc của proton lần lượt là

$$\beta_l = \sqrt{0,27^2 + 0,168^2} = 0,318 ,$$
$$\theta_l = \text{arctg}\left(\frac{0,168}{0,27}\right) = 31,9^\circ .$$

Để ý rằng

$$\frac{1}{1 + \beta_{cx}\beta_0} = \frac{1}{1 + 0,1 \times 0,175} = 0,983 ,$$
$$\frac{\sqrt{1 - \beta_0^2}}{1 + \beta_{cx}\beta_0} = \frac{\sqrt{1 - 0,175^2}}{1 + 0,1 \times 0,175} = 0,968 ,$$

cả hai giá trị trên đều sai khác so với 1 không quá 4%, vì vậy áp dụng các xấp xỉ phi tương đối tính chúng ta vẫn thu được những kết quả với độ chính xác trên 96%

$$\beta_{lx} \approx \beta_{cx} + \beta_0 = 0,275 ,$$
$$\beta_{ly} = \beta_{cy} = 0,173 ,$$
$$\theta_l = \text{arctg}\left(\frac{0,173}{0,275}\right) = 32,2^\circ .$$

3025

Trong các va chạm proton – proton năng lượng cao, một hoặc cả hai proton có thể "phân ly nhiễu xạ" thành một hệ một proton và vài pion tích điện. Các phản ứng đó là

(1) $p + p \to p + (p + n\pi)$,

(2) $p + p \to (p + n\pi) + (p + m\pi)$.

Trong đó n và m là số pion được tạo thành.

Trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm, một proton tới có năng lượng toàn phần E (proton đạn) bắn phá vào một proton khác đứng yên (proton bia). Xác định năng lượng của proton tới E_0 để làm

(a) năng lượng cực tiểu để phản ứng (1) xảy ra khi proton bia phân ly thành 1 proton và 4 pion.

(b) năng lượng cực tiểu để phản ứng (1) xảy ra khi proton đạn phân ly thành 1 proton và 4 pion.

(c) năng lượng cực tiểu để phản ứng (2) xảy ra khi cả hai proton phân ly thành 1 proton và 4 pion.

$$m_\pi = 0,140 \text{ GeV}, \qquad m_p = 0,938 \text{ GeV} .$$

(*Chicago*)

Lời giải:

Để thuận tiện ta lấy $c = 1$, khi đó đối với một hệ, đại lượng $E^2 - p^2$ là bất biến đối với phép biến đổi Lorentz. Nếu hệ trải qua một phản ứng hạt nhân mà phản ứng này bảo toàn năng lượng và xung lượng thì đại lượng trên cũng sẽ không thay đổi sau phản ứng. Xét riêng cho một hạt có khối lượng nghỉ m ta có,

$$E^2 - p^2 = m^2 .$$

(a) Năng lượng của phản ứng

$$p + p \to p + (p + 4\pi)$$

đạt cực tiểu khi tất cả các hạt sau phản ứng đều đứng yên trong một hệ quy chiếu quán tính mà trường hợp riêng là hệ quy chiếu khối tâm Σ'. Khi đó trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm Σ ta có,

$$E^2 - p^2 = (E_0 + m_p)^2 - (E_0^2 - m_p^2) = 2m_pE_0 + 2m_p^2 ,$$

và trong Σ' ta có

$$E'^2 - p'^2 = (2m_p + 4m_\pi)^2 ,$$

vì vậy ta có

$$2m_p E_0 = 2m_p^2 + 16m_p m_\pi + 16m_\pi^2 ,$$

từ đó ta tính được năng lượng cực tiểu E_0 của proton đạn để có thể gây ra phản ứng là

$$E_0 = \frac{m_p^2 + 8m_p m_\pi + 8m_\pi^2}{m_p} = 2,225 \text{ GeV} .$$

(b) Vì cả hai hạt ban đầu đều là các proton và các hạt ở trạng thái cuối đều giống với trường hợp trước (câu a) nên năng lượng cực tiểu vẫn giữ nguyên, 2,225 GeV.

(c) Trong trường hợp phản ứng

$$p + p \to (p + 4\pi) + (p + 4\pi) .$$

ta có

$$(E_0 + m_p)^2 - (E_0^2 - m_p^2) = (2m_p + 8m_\pi)^2 ,$$

từ đó ta tính được năng lượng tới cực tiểu của proton đạn trong trường hợp này là

$$E_0 = \frac{m_p^2 + 16m_p m_\pi + 32m_\pi^2}{m_p} = 3,847 \text{ GeV} .$$

3026

Xét tán xạ đàn hồi của hai hạt có spin bằng 0 có khối lượng là m và μ như chỉ ra trên hình 3.18. Biên độ tán xạ bất biến Lorentz (phần tử ma trận S) có thể được xem là một hàm của hai biến bất biến

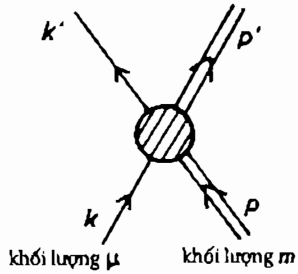
$$s = (K_0 + P_0)^2 - (\mathbf{K} + \mathbf{P})^2$$

và

$$t = (K_0' - K_0)^2 - (\mathbf{K}' - \mathbf{K})^2$$

với $K^2 = K'^2 = \mu^2$ và $P^2 = P'^2 = m^2$. Tìm vùng vật lý (nghĩa là được phép) trong đa tạp (s, t). Tính đường cong biên $t(s)$ rồi vẽ đồ thị một cách định tính.

(*Chicago*)



Hình 3.18

Lời giải:

Trong tán xạ đàn hồi ta có

$$k + p \to k' + p' ,$$

nếu hệ cô lập thì vectơ năng - xung lượng toàn phần bốn chiều được bảo toàn

$$K + P = K' + P' .$$

Trong hệ quy chiếu khối tâm của hệ, xung lượng toàn phần bằng 0

$$\mathbf{K}' + \mathbf{P}' = \mathbf{K} + \mathbf{P} = 0 .$$

Như vậy

$$\begin{aligned} s &= (K_0 + P_0)^2 - (\mathbf{K} + \mathbf{P})^2 = (K_0 + P_0)^2 \\ &= (\sqrt{\mathbf{K}^2 + \mu^2} + \sqrt{\mathbf{P}^2 + m^2})^2 \\ &= (\sqrt{\mathbf{K}^2 + \mu^2} + \sqrt{\mathbf{K}^2 + m^2})^2 , \end{aligned}$$

vì $\mathbf{P}^2 = \mathbf{K}^2$ trong hệ quy chiếu khối tâm, và

$$\begin{aligned} t &= (K_0' - K_0)^2 - (\mathbf{K}' - \mathbf{K})^2 \\ &= -(\mathbf{K}' - \mathbf{K})^2 \\ &= -(\mathbf{K}'^2 + \mathbf{K}^2 - 2\mathbf{K}' \cdot \mathbf{K}) \\ &= -2\mathbf{K}^2(1 - \cos\theta) , \end{aligned}$$

trong đó θ là góc tán xạ của k, vì tán xạ có tính đàn hồi.

Để tìm vùng vật lý trong đa tạp (s, t), xét $\cos\theta$, trong đó θ biến thiên từ 0 đến π

$$\begin{aligned} &\theta = 0, \qquad \cos\theta = 1, \qquad t = 0 ; \\ &\theta = \pi, \qquad \cos\theta = -1, \qquad t = -4\mathbf{K}^2 . \end{aligned}$$

Vì vậy vùng vật lý được cho bởi

$$t \le 0 \qquad \text{và} \qquad s \ge \left(\sqrt{\mu^2 - \frac{t}{4}} + \sqrt{m^2 - \frac{t}{4}}\right)^2 ,$$

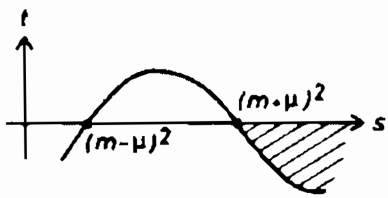
các điều kiện biên là $t = 0$ và được cho bởi

$$s = \left(\sqrt{\mu^2 - \frac{t}{4}} + \sqrt{m^2 - \frac{t}{4}}\right)^2 ,$$

hay

$$t = \frac{4m^2\mu^2 - (s - m^2 - \mu^2)^2}{s}$$
$$= -\frac{1}{s}[s - (m + \mu)^2][s - (m - \mu)^2] .$$

Vùng vật lý là phần gạch trên hình 3.19.



Hình 3.19

3027

Xét phản ứng quang sinh pion

$$\gamma + p \to p + \pi^\circ ,$$

trong đó năng lượng nghỉ của proton và pion trung hoà lần lượt là 938 MeV và 135 MeV.

(a) Nếu proton ban đầu đứng yên trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm, tìm ngưỡng năng lượng của tia gamma trong hệ quy chiếu này để phản ứng trên xảy ra.

(b) Bức xạ vật đen vi ba vũ trụ đẳng hướng nhiệt độ $3K$ có năng lượng photon trung bình khoảng 10^{-3} eV. Xét va chạm trực diện giữa một proton và một photon có năng lượng 10^{-3} eV. Tìm cực tiểu năng lượng của proton để phản ứng quang phát sinh pion đó xảy ra.

(c) Biện luận ngắn gọn về hệ quả của các kết quả đã tìm ra ở câu (b) cho trường hợp phổ năng lượng của proton trong tia vũ trụ.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Đại lượng $E^2 - P^2c^2$ bất biến đối với phép biến đổi Lorentz và đối với một hệ cô lập thì đại lượng này không đổi trước và sau phản ứng. Ngưỡng năng lượng của tia γ là giá trị năng lượng của tia γ thoả mãn điều kiện tất cả các hạt sau phản ứng đều đứng yên trong hệ quy chiếu khối tâm. Như vậy

$$(E_\gamma + m_pc^2)^2 - \left(\frac{E_\gamma}{c}\right)^2 c^2 = (m_p + m_\pi)^2c^4 \,,$$

trong đó E_γ và $\frac{E_\gamma}{c}$ lần lượt là năng lượng và xung lượng của photon, từ đó ta tính được

$$E_\gamma = \frac{(m_\pi^2 + 2m_\pi m_p)c^4}{2m_pc^2} = 144,7 \text{ MeV}$$

là ngưỡng năng lượng của tia γ.

(b) Một proton va chạm trực diện với một photon có nghĩa là xung lượng của hai hạt này ngược chiều nhau. Khi đó ta có

$$(m_p\gamma c^2 + E_\gamma)^2 - \left(m_p\gamma\beta c - \frac{E_\gamma}{c}\right)^2 c^2 = (m_p + m_\pi)^2c^4 \,,$$

trong đó $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, βc là vận tốc của proton có năng lượng tối thiểu đủ để kích hoạt phản ứng quang phát sinh pion, từ đó ta tính được

$$\gamma(1+\beta) = \frac{(m_\pi^2 + 2m_\pi m_p)c^4}{2E_\gamma m_pc^2} = 1,447 \times 10^{11}$$

với $E_\gamma = 10^{-9}$ MeV. Vì $\gamma \gg 1$, ta có thể cho $\beta = 1$. Vì điều đó có nghĩa là $\gamma \gg 1$, ta có thể cho $\beta = 1$. Vì thế ta có $\gamma = 7,235 \times 10^{10}$ và cực tiểu năng lượng của proton là

$$E_p = 0,938 \times 7,235 \times 10^{10} = 6,787 \times 10^{10} \text{ GeV} \,.$$

(c) Kết quả câu (b) ngụ ý rằng phần $E > 6,79 \times 10^{10}$ GeV trong phổ năng lượng của proton trong tia vũ trụ sẽ nghèo đi ở một mức độ nào đó do tương tác với bức xạ phóng vi ba vũ trụ.

3028

Khảo sát tương tác của một chùm 10^6 K_l^o meson trên giây có $\beta = \frac{v}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ với một viên chì theo phản ứng

$$K_l^o + \text{ viên chì } \to K_s^o + \text{ viên chì}$$

với trạng thái nội tại của viên chì giống nhau trước và sau phản ứng. Hướng chuyển động của K_l^o tới và K_s^o thoát ra cũng có thể được xem như giống nhau. (Quá trình này gọi là sự tái sinh kết hợp).

Sử dụng

$$m(K_l) = 5 \times 10^8 \text{ eV/c}^2 ,$$
$$m(K_l) - m(K_s) = 3,5 \times 10^{-6} \text{ eV/c}^2 ,$$

tính độ lớn (tính ra dyn hoặc niutơn) và hướng của lực trung bình tác dụng lên viên chì trong quá trình trên.

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

Kí hiệu $m(K_l), m(K_s)$ lần lượt là m_l, m_s. Năng lượng và xung lượng của một K_l meson tới lần lượt là

$$E_l = m_l \gamma c^2 = \frac{m_l c^2}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}}} = \sqrt{2} m_l c^2 ,$$

$$P_l = m_l \gamma \beta c = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} m_l c = m_l c .$$

Vì trạng thái nội tại của viên chì sau phản ứng không đổi nên năng lượng của chùm meson trước và sau phản ứng cũng phải bằng nhau. Do đó ta có

$$E_l = E_s .$$

Vì

$$\begin{aligned} P_s^2 c^2 &= E_s^2 - m_s^2 c^4 \\ &= E_l^2 - m_s^2 c^4 = 2m_l^2 c^4 - [m_l - (m_l - m_s)]^2 c^4 \\ &\approx m_l^2 c^4 + 2m_l (m_l - m_s) c^4 , \end{aligned}$$

hay

$$P_s c \approx m_l c^2 + (m_l - m_s)c^2 = P_l c + (m_l - m_s)c^2 \ ,$$

do $m_l - m_s \ll m_l$. Từ đó

$$(P_s - P_l) \approx (m_l - m_s)c = 3,5 \times 10^{-6} \text{ eV/c} \ .$$

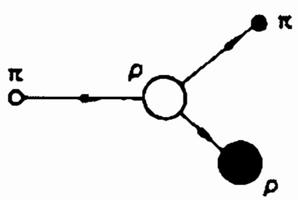
Biến thiên xung lượng trong thời gian 1 giây của chùm meson do phản ứng với viên chì là

$$(P_s - P_l) \times 10^6 = 3,5 \text{ eV/c/s} = \frac{3,5 \times 1,6 \times 10^{-19}}{3 \times 10^8} = 1,87 \times 10^{-27} \text{ N} \ .$$

Đó chính là lực trung bình mà viên chì tác dụng lên chùm meson. Vì xung lượng của chùm meson tăng lên sau tương tác nên lực này cùng chiều với chuyển động của chùm meson. Từ đó suy ra lực mà chùm meson tác dụng lên viên chì ngược với chiều chuyển động của chùm tia và có độ lớn là $1,87 \times 10^{-27}$ N.

3029

Một meson π có xung lượng $5m_\pi c$ va chạm đàn hồi với một proton ($m_p = 7m_\pi$) ban đầu đứng yên (hình 3.20).



Hình 3.20

(a) Tìm vận tốc của hệ quy chiếu khối tâm?

(b) Tìm năng lượng toàn phần trong hệ quy chiếu khối tâm?

(c) Xác định xung lượng của pion tới trong hệ quy chiếu khối tâm.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Hệ đã cho có động lượng toàn phần là $P = p_\pi = 5m_\pi c$ và năng lượng toàn phần là

$$E = \sqrt{p_\pi^2 + m_\pi^2 c^4} + m_p c^2 = \sqrt{26} m_\pi c^2 + 7m_\pi c^2 \ .$$

Vì vậy nó chuyển động với một vận tốc v mà cũng là vận tốc của hệ khối tâm, trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm được cho bởi

$$\bar{v} = \frac{Pc^2}{E} = \frac{5c}{\sqrt{26}+7} = 0,413c\ .$$

(b) $E^2 - P^2c^2$ là bất biến đối với phép biến đổi Lorentz, nên năng lượng toàn phần E' trong hệ quy chiếu khối tâm được cho bởi công thức

$$E^2 - P^2c^2 = E'^2\ ,$$

do xung lượng toàn phần trong hệ quy chiếu khối tâm bằng 0 theo định nghĩa. Từ đó ta có

$$E'^2 = (\sqrt{26}+7)^2 m_\pi^2 c^4 - 25 m_\pi^2 c^4 = (14\sqrt{26}+50) m_\pi^2 c^4\ ,$$

hay

$$E' = \sqrt{14\sqrt{26}+50}\, m_\pi c^2 = 11,02 m_\pi c^2\ .$$

(c) Năng lượng toàn phần trong hệ quy chiếu khối tâm là

$$\begin{aligned} E' &= \sqrt{p_\pi'^2 + m_\pi^2 c^4} + \sqrt{p_p'^2 + m_p^2 c^4} \\ &= \sqrt{p_\pi'^2 + m_\pi^2 c^4} + \sqrt{p_\pi'^2 + 49 m_\pi^2 c^4}\ , \end{aligned}$$

vì $|\mathbf{p}'_p| = |\mathbf{p}'_\pi|$ trong hệ quy chiếu khối tâm và $m_p = 7m_\pi$. Từ câu (b) chúng ta có $E' = \sqrt{50+14\sqrt{26}}\, m_\pi c^2$. Thay vào biểu thức trên và giải ra p'_π, ta có xung lượng của pion tới trong hệ quy chiếu khối tâm là

$$p'_\pi = \frac{35 m_\pi c}{\sqrt{50+14\sqrt{26}}} = 3,18 m_\pi c\ .$$

3030

Tại phòng thí nghiệm Fermi, để tạo ra những chùm nơtrino năng lượng cao trước tiên người ta tạo ra chùm π^+ (hoặc K^+) đơn năng lượng và rồi sau đó cho các pion này phân rã theo phản ứng $\pi^+ \to \mu^+ + \nu$. Cho khối lượng của pion và muyon lần lượt là 140 MeV/c^2 và 106 MeV/c^2.

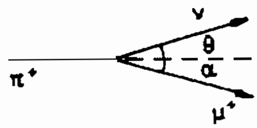
(a) Tìm năng lượng của nơtrino sinh ra trong quá trình phân rã trong hệ quy chiếu đứng yên gắn với π^+.

Trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm, năng lượng của nơtrino phụ thuộc vào góc phân rã θ (hình 3.21). Giả sử chùm π^+ có năng lượng 200 GeV.

(b) Tìm năng lượng của nơtrino tạo thành hướng tiến ($\theta = 0$).

(c) Tìm giá trị của góc phân rã θ mà tại đó năng lượng của nơtrino bằng một nửa năng lượng cực đại của nó.

(*Chicago*)



Hình 3.21

Lời giải:

(a) Để thuận tiện ta sử dụng hệ đơn vị sao cho $c = 1$ (m, E, p tất cả đều có đơn vị MeV). Xét đại lượng bất biến đối với phép biến đổi Lorentz và bảo toàn $E^2 - p^2$. Trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm, trước phản ứng phân rã ta có

$$E^2 - p^2 = E_\pi^2 - p_\pi^2 = m_\pi^2 \ .$$

Trong hệ quy chiếu gắn với pion, sau phản ứng phân rã ta có

$$\begin{aligned} E'^2 - p'^2 &= (E'_\mu + E'_\nu)^2 - (\mathbf{p}'_\mu + \mathbf{p}'_\nu)^2 \\ &= (E'_\mu + E'_\nu)^2 = p'^2_\mu + m_\mu^2 + p'^2_\nu + 2p'_\nu\sqrt{p'^2_\mu + m_\mu^2} \\ &= 2p'^2_\nu + m_\mu^2 + 2p'_\nu\sqrt{p'^2_\nu + m_\mu^2} \ , \end{aligned}$$

vì $\mathbf{p}'_\mu = -\mathbf{p}'_\nu$, và $E'_\nu = p'_\nu$ (giả sử rằng khối lượng nghỉ của nơtrino bằng 0). Cân bằng hai biểu thức trên ta có

$$E'_\nu = p'_\nu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} = 29,9 \text{ MeV} \ .$$

(b) Trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm (hình 3.21), áp dụng định luật bảo toàn xung lượng ta có

$$p_\pi = p_\nu \cos\theta + p_\mu \cos\alpha, \qquad p_\nu \sin\theta = p_\mu \sin\alpha \ ,$$

hay

$$p_\mu^2 = p_\pi^2 + p_\nu^2 - 2p_\pi p_\nu \cos\theta \ ,$$

và áp dụng định luật bảo toàn năng lượng ta có

$$E_\pi = E_\nu + E_\mu \; .$$

Vì $p_\nu = E_\nu$, $p_\mu^2 = E_\mu^2 - m_\mu^2$, từ hai phương trình cuối ta có

$$p_\nu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2(E_\pi - p_\pi \cos\theta)} \; .$$

Vì $E_\pi \gg m_\pi$, nên ta có

$$p_\pi = E_\pi \sqrt{1 - \frac{m_\pi^2}{E_\pi^2}} \approx E_\pi \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{m_\pi}{E_\pi}\right)^2\right] ,$$

và vì vậy ta có

$$E_\nu = p_\nu \approx \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)E_\pi}{2E_\pi^2(1-\cos\theta) + m_\pi^2 \cos\theta} \; .$$

Đối với các nơtrino được được phát ra trong hướng tiến, $\theta = 0$ và

$$E_\nu \approx \left[1 - \left(\frac{m_\mu}{m_\pi}\right)^2\right] E_\pi = 85,4 \text{ GeV} \; .$$

(c) Vì

$$E_\nu \approx \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)E_\pi}{2E_\pi^2 - (2E_\pi^2 - m_\pi^2)\cos\theta} ,$$

E_ν là cực đại đối với các nơtrino phát ra ở $\theta = 0$. Đối với E_ν ở nửa giá trị cực đại, nghĩa là

$$\left(\frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2}\right) \frac{E_\pi}{2} = \frac{(m_\pi^2 - E_\mu^2)E_\pi}{2E_\pi^2 - (2E_\pi^2 - m_\pi^2)\cos\theta} ,$$

ta có

$$\cos\theta = \frac{2(E_\pi^2 - m_\pi^2)}{2E_\pi^2 - m_\pi^2} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{m_\pi}{E_\pi}\right)^2 \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

vì θ rõ ràng là nhỏ. Do vậy ta tính được góc θ cần tìm là

$$\theta = \frac{m_\pi}{E_\pi} = 0,0007 \text{ rad} = 2,4' \; .$$

3031

(a) Một hạt có khối lượng $m_1 = 1$ g chuyển động với vận tốc bằng 0,9 lần vận tốc ánh sáng va chạm trực diện rồi dính vào một hạt khác đang đứng yên có khối lượng $m_2 = 10$ g. Tìm khối lượng nghỉ và vận tốc của hạt phức hợp tạo thành?

(b) Bây giờ giả sử m_1 đứng yên. Hạt m_2 phải chuyển động với vận tốc bằng bao nhiêu để hạt phức hợp tạo thành có khối lượng nghỉ đúng bằng kết quả đã tìm được ở câu (a)?

(c) Vẫn giả sử m_1 đứng yên, m_2 phải chuyển động với vận tốc bằng bao nhiêu để hạt phức hợp tạo thành có vận tốc đúng bằng kết quả đã tìm được ở câu (a)?

(*SUNY, Buffalo*)

Lời giải:

(a) Gọi khối lượng và vận tốc của hạt phức hợp tạo thành lần lượt là m và βc. Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng và xung lượng, ta có

$$m\gamma c^2 = (m_1\gamma_1 + m_2)c^2, \qquad m\gamma\beta c = m_1\gamma_1\beta_1 c\ ,$$

trong đó $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, tương tự với γ_1. Vì thế ta có

$$\beta = \frac{m_1\gamma_1\beta_1}{m_1\gamma_1 + m_2} = \frac{m_1\beta_1}{m_1 + m_2\sqrt{1-\beta_1^2}} = \frac{0,9}{1 + 10\sqrt{1-0,9^2}} = 0,168\ ,$$

$$\begin{aligned} m^2 &= (m\gamma)^2 - (m\gamma\beta)^2 = (m_1\gamma_1 + m_2)^2 - (m_1\gamma_1\beta_1)^2 \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2\gamma_1 m_1 m_2\ , \end{aligned}$$

vì $(\gamma\beta)^2 = \gamma^2 - 1$, tương tự với γ_1 và β_1 , hay

$$m = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \frac{2m_1m_2}{\sqrt{1-\beta_1^2}}} = \sqrt{1 + 100 + \frac{20}{\sqrt{1-0,9^2}}} = 12,1 \text{ g}\ .$$

Vậy hạt phức hợp tạo thành có khối lượng nghỉ 12,1 g và vận tốc 0,168c.

(b) Trong trường hợp này vai trò của m_1 và m_2 được hoán đổi cho nhau vì vậy mà

$$m = \sqrt{m_2^2 + m_1^2 + \frac{2m_2m_1}{\sqrt{1-\beta_2^2}}}\ ,$$

biểu thức này giống với biểu thức trước với $\beta_1 \to \beta_2$. Vì m_1, m_2, m giữ nguyên không đổi, để khối lượng nghỉ của hạt phức hợp tạo thành bằng với kết quả ở câu (a) thì β_2 phải bằng giá trị của β_1 đã cho ở câu (a). Vậy m_2 phải chuyển động với vận tốc $0,9c$.

(c) Giống như câu (b), ta có

$$\beta = \frac{m_2\beta_2}{m_2 + m_1\sqrt{1-\beta_2^2}} ,$$

hay

$$(m_2^2 + m_1^2\beta^2)\beta_2^2 - 2m_2^2\beta\beta_2 + (m_2^2 - m_1^2)\beta^2 = 0 .$$

Vì $m_2^2 \gg m_1^2\beta^2$, phương trình trên có thể được rút gọn thành

$$m_2^2\beta_2^2 - 2m_2^2\beta\beta_2 + (m_2^2 - m_1^2)\beta^2 = 0 ,$$

nghĩa là

$$[m_2\beta_2 - (m_2 + m_1)\beta][m_2\beta_2 - (m_2 - m_1)\beta] = 0 ,$$

từ đó tính được

$$\beta_2 = \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)\beta = 0,185, \qquad \beta = \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right)\beta = 0,151 .$$

Vậy m_2 phải chuyển động với vận tốc bằng $0,185c$ hoặc $0,151c$.

3032

Một hạt có khối lượng nghỉ m và năng lượng toàn phần E_0 đang chuyển động với vận tốc không đổi **V** có thể tiến gần với vận tốc ánh sáng. Sau đó nó va chạm với một hạt khác có cùng khối lượng m, đang đứng yên. Hai hạt này được xem như tán xạ đàn hồi ở góc tán xạ tương đối θ với cùng động năng.

(a) Tính θ, theo m và E_0.

(b) Tính giá trị số của θ trong các trường hợp giới hạn sau:

(i) năng lượng thấp ($V \ll c$),

(ii) năng lượng cao ($V \sim c$).

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

(a) Vì các hạt sau khi tán xạ đàn hồi có cùng khối lượng và cùng động năng nên các xung lượng của chúng phải tạo với phương chuyển động của hạt ban đầu cùng một góc $\frac{\theta}{2}$ và có cùng độ lớn. Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng và bảo toàn xung lượng ta có

$$mc^2 + E_0 = 2E, \qquad p_0 = 2p\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) ,$$

trong đó E, p lần lượt là năng lượng và xung lượng của mỗi hạt sau khi tán xạ. Bình phương hai vế của phương trình bảo toàn năng lượng ta có

$$m^2c^4 + E_0^2 + 2E_0mc^2 = 4(p^2c^2 + m^2c^4) ,$$

hay

$$E_0^2 + 2E_0mc^2 - 3m^2c^4 = \frac{p_0^2c^2}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{E_0^2 - m^2c^4}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} ,$$

từ đó tính được

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{E_0^2 - m^2c^4}{(E_0 - mc^2)(E_0 + 3mc^2)}} = \sqrt{\frac{E_0 + mc^2}{E_0 + 3mc^2}} .$$

(b) (i) $V \ll c$, $E_0 \approx mc^2$,

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \simeq \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} ,$$

từ đó tính được

$$\theta \approx \frac{\pi}{2} .$$

(ii) $V \to c$, $E_0 \gg mc^2$,

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \approx 1 ,$$

từ đó tính được $\theta \approx 0$.

3033

Một vấn đề hiện được đặc biệt quan tâm nghiên cứu trong vật lý hạt cơ bản là những tương tác yếu ở những năng lượng cao. Những tương tác này được nghiên cứu thông qua việc khảo sát những tương tác của nơtrino năng lượng cao. Người ta có thể tạo ra những chùm nơtrino bằng cách cho các meson π và K phân rã trong trạng thái chuyển động. Giả sử ta sử dụng một chùm meson π có xung lượng 200 GeV/c để tạo ra các nơtrino thông qua sự phân rã $\pi \to \mu + \nu$. Cho thời gian sống của mỗi meson π trong hệ quy chiếu riêng của nó là $\tau_{\pi^\pm} = 2,60 \times 10^{-8}$ s và năng lượng nghỉ của nó là 139,6 MeV. Năng lượng nghỉ của muyon là 105,7 MeV, và nơtrino thì không có khối lượng.

(a) Tính khoảng cách trung bình mà pion chuyển động được trước khi nó phân rã.

(b) Tính giá trị cực đại của góc tạo bởi phương chuyển động của muyon so với phương chuyển động của pion trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm.

(c) Tính giá trị cực đại và cực tiểu xung lượng của nơtrino.

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

(a) Đặt m là khối lượng nghỉ của pion. Vì $m\gamma\beta c^2 = 200$ GeV, ta có

$$\gamma\beta = \sqrt{\gamma^2 - 1} = \frac{200}{0,1396} = 1432,7$$

và có thể lấy

$$\beta \approx 1, \qquad \gamma = 1433 \ .$$

Khi tính đến sự giãn của thời gian thì thời gian sống của pion trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm là $\tau = \gamma\tau_\pi = 1433 \times 2,6 \times 10^{-8} = 3,726 \times 10^{-5}$ s. Vì vậy khoảng cách trung bình mà pion chuyển động được trước khi phân rã là

$$\tau c = 3,726 \times 10^{-5} \times 3 \times 10^8 = 1,12 \times 10^4 \text{ m} \ = 11,2 \text{ km} \ .$$

(b) Năng lượng toàn phần của hệ trong hệ quy chiếu Σ' gắn với pion là năng lượng nghỉ của pion $m_\pi c^2$. Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng cho quá trình phân rã $\pi \to \mu + \nu$,

$$m_\pi c^2 = E'_\mu + E'_\nu \ ,$$

trong đó dấu phẩy dùng để kí hiệu các đại lượng trong hệ quy chiếu Σ'. Vì xung lượng toàn phần bằng 0 trong hệ quy chiếu Σ', $\mathbf{p}'_\mu = -\mathbf{p}'_\nu$ và $E'_\nu = p'_\nu c = p'_\mu c$, (giả thiết nơtrino không có khối lượng). Vì vậy ta có

$$(m_\pi c^2 - E'_\mu)^2 = p'^2_\nu c^2 = p'^2_\mu c^2 = E'^2_\mu - m^2_\mu c^4 \ ,$$

từ đó tính được

$$E'_\mu = \frac{(m^2_\pi + m^2_\mu)c^2}{2m_\pi} = 109,8 \text{ MeV} \ .$$

Chọn trục x' dọc theo phương chuyển động của pion. Xung lượng của muyon biến đổi theo các công thức

$$p_\mu \cos\theta = \gamma\left(p'_\mu \cos\theta' + \frac{\beta E'_\mu}{c}\right),$$

$$p_\mu \sin\theta = p'_\mu \sin\theta',$$

từ đó suy ra

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{p'_\mu \sin\theta'}{\gamma\left(p'_\mu \cos\theta' + \frac{\beta E'_\mu}{c}\right)}.$$

Điều kiện cần để θ đạt cực đại là

$$\frac{d\mathrm{tg}\theta}{d\theta'} = 0,$$

từ đó suy ra

$$\cos\theta' = -\frac{p'_\mu c}{\beta E'_\mu} \approx -\frac{p'_\mu c}{E'_\mu} = -\frac{\sqrt{E'^2_\mu - m^2_\mu c^4}}{E'_\mu} = -0,271,$$

hay $\theta' = 105,7°$. Thay trở lại biểu thức liên hệ giữa θ và θ' ta tính được

$$\theta = 0,0112° = 0,675'.$$

Chú ý rằng giá trị này của θ chính là góc phát xạ cực đại trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm vì góc phát xạ cực tiểu là $\theta = 0$, tương ứng với $\theta' = 0$.

(c) Năng lượng của nơtrino là

$$E'_\nu = m_\pi c^2 - E'_\mu = 139,6 - 109,8 = 29,8 \text{ MeV}$$

và xung lượng của nó $p'_\nu = 29,8$ MeV/c trong hệ quy chiếu Σ'. E'_ν có thể được biến đổi thành hệ quy chiếu Σ bởi

$$E_\nu = \gamma(E'_\nu + \beta p'_\nu c \cos\theta').$$

Vì $E_\nu = p_\nu c$, $E'_\nu = p'_\nu c$, biểu thức trên có thể được viết lại thành

$$p_\nu = \gamma(1 + \beta\cos\theta')p'_\nu.$$

Vì vậy mà những nơtrino được phát xạ hướng về phía trước trong hệ quy chiếu gắn với pion, nghĩa là $\theta' = 0$, sẽ có xung lượng xét trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm đạt giá trị lớn nhất và bằng

$$(p_\nu)_{\max} = \gamma(1+\beta)p'_\nu \approx \frac{2\gamma E'_\nu}{c} = 8,54 \times 10^4 \text{ MeV}/c,$$

trong khi đó những nơtrino được phát xạ về phía sau trong hệ quy chiếu Σ' sẽ có xung lượng xét trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm đạt giá trị nhỏ nhất và bằng

$$(p_\nu)_{\min} = \gamma(1-\beta)p_\nu' = (\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1})p_\nu' \approx \frac{1}{2\gamma}\frac{E_\nu'}{c} = 1,04 \times 10^{-2}\ \text{MeV}/c\ .$$

3034

Một meson K có năng lượng nghỉ 494 MeV phân rã thành một meson μ có năng lượng nghỉ 106 MeV và một nơtrino có khối lượng nghỉ bằng 0. Tìm động năng của meson μ và của nơtrino trong trường hợp meson K phân rã trong trạng thái nghỉ.

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng ta có

$$m_K c^2 = E_\mu + E_\nu = \sqrt{p_\mu^2 c^2 + m_\mu^2 c^4} + p_\nu c = \sqrt{p_\mu^2 c^2 + m_\mu^2 c^4} + p_\mu c\ ,$$

vì $\mathbf{p}_\mu = -\mathbf{p}_\nu$, hay $p_\mu = p_\nu$, (theo định luật bảo toàn xung lượng). Do đó ta có

$$p_\mu = \left(\frac{m_K^2 - m_\mu^2}{2m_K}\right)c\ .$$

Như vậy

$$\begin{aligned} E_\nu &= p_\nu c = p_\mu c = \left(\frac{m_K^2 - m_\mu^2}{2m_K}\right)c^2 \\ &= 235,6\ \text{MeV}\ , \\ E_\mu &= \sqrt{p_\mu^2 c^2 + m_\mu^2 c^4} = \left(\frac{m_K^2 + m_\mu^2}{2m_K}\right)c^2 \\ &= 258,4\ \text{MeV}\ . \end{aligned}$$

Vậy động năng của nơtrino và muyon lần lượt là 235,6 MeV, và $258,4 - 106 = 152,4$ MeV.

3035

Trong không gian 4 chiều, tích vô hướng của hai vectơ bốn chiều

$$A^\mu = (A^\circ, \mathbf{A}) \qquad \text{và} \qquad B^\mu = (B^\circ, \mathbf{B})$$

được định nghĩa là

$$A^\mu B_\mu = A^\circ B^\circ - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \; .$$

Xét phản ứng được mô tả trên hình 3.22 trong đó các hạt có khối lượng m_1 và m_2 là các hạt tham gia phản ứng còn các hạt có khối lượng m_3 và m_4 là các hạt tạo thành. Gọi p' và q' là xung lượng bốn chiều của các hạt. Các biến số sau đây thường được sử dụng để mô tả những phản ứng kiểu này

$$s = (q_1 + p_1)^2, \qquad t = (q_1 - q_2)^2, \qquad u = (q_1 - p_2)^2 \; .$$

(a) Chứng tỏ rằng

$$s + t + u = \sum_{i=1}^{4} m_i^2 \; .$$

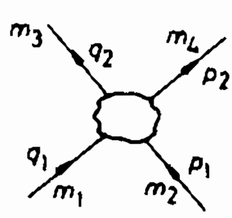
(b) Giả sử phản ứng là quá trình tán xạ đàn hồi và cho

$$m_1 = m_3 = \mu, \qquad m_2 = m_4 = m \; .$$

Xét trong hệ quy chiếu khối tâm, cho xung lượng 3 chiều ban đầu và cuối cùng của các hạt có khối lượng μ tương ứng là $\mathbf{k}$ và $\mathbf{k}'$. Tính s, t và u theo $\mathbf{k}$ và $\mathbf{k}'$, ở dạng càng đơn giản càng tốt. Biện luận về ý nghĩa của s, t và u.

(c) Giả sử ban đầu hạt có khối lượng m đứng yên trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm. Tính năng lượng ban đầu và năng lượng cuối cùng của hạt có khối lượng μ, trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm cùng với góc tán xạ theo s, t và u.

(SUNY, Buffalo)



Hình 3.22

Lời giải:

Để thuận tiện ta sử dụng hệ đơn vị trong đó vận tốc ánh sáng $c = 1$.

(a) q^2 được định nghĩa là $q^\alpha q_\alpha$ với $q^\alpha = (q^\circ, \mathbf{q})$, $q_\alpha = (q^\circ, -\mathbf{q})$. Đại lượng $q^\alpha q_\alpha$ là bất biến đối với phép biến đổi Lorentz. Tính toán đại lượng này trong hệ quy chiếu gắn với hạt ta có

$$q^2 = (q^\circ)^2 - \mathbf{q}^2 = E^2 - \mathbf{q}^2 = m^2 .$$

Bây giờ

$$\begin{aligned} s + t + u &= (q_1 + p_1)^2 + (q_1 - q_2)^2 + (q_1 - p_2)^2 \\ &= q_1^2 + q_2^2 + p_1^2 + p_2^2 + 2q_1 \cdot (q_1 - q_2 + p_1 - p_2) \\ &= m_1^2 + m_3^2 + m_2^2 + m_4^2 + 2q_1 \cdot (q_1 - q_2 + p_1 - p_2) . \end{aligned}$$

Vì xung lượng 4 chiều tuân theo định luật bảo toàn năng xung lượng

$$q_1 + p_1 = q_2 + p_2 ,$$

vì vậy ta có

$$s + t + u = \sum_{i=1}^{4} m_i^2 .$$

(b) Trong hệ quy chiếu khối tâm ta có

$$\mathbf{q}_1 + \mathbf{p}_1 = \mathbf{q}_2 + \mathbf{p}_2 = 0 .$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} q_1^\alpha &= (\sqrt{\mu^2 + \mathbf{k}^2}, \mathbf{k}), & q_2^\alpha &= (\sqrt{\mu^2 + \mathbf{k}'^2}, \mathbf{k}'), \\ p_1^\alpha &= (\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}, -\mathbf{k}), & p_2^\alpha &= (\sqrt{m^2 + \mathbf{k}'^2}, -\mathbf{k}') , \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} s &= (q_1 + p_1)^2 = q_1^2 + p_1^2 + 2q_1 \cdot p_1 \\ &= \mu^2 + k^2 - k^2 + m^2 + k^2 - k^2 + 2\sqrt{(\mu^2 + k^2)(m^2 + k^2)} + 2k^2 \\ &= \mu^2 + m^2 + 2\sqrt{(\mu^2 + k^2)(m^2 + k^2)} + 2k^2 , \\ t &= (q_1 - q_2)^2 = q_1^2 + q_2^2 - 2q_1 \cdot q_2 \\ &= 2\mu^2 - 2\sqrt{(\mu^2 + k^2)(\mu^2 + k'^2)} + 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' , \\ u &= (q_1 - p_2)^2 = q_1^2 + p_2^2 - 2q_1 \cdot p_2 \\ &= \mu^2 + m^2 - 2\sqrt{(\mu^2 + k^2)(m^2 + k'^2)} - 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' . \end{aligned}$$

Như vậy

$$s = \left(\sqrt{\mu^2 + k^2} + \sqrt{m^2 + k^2}\right)^2$$

là bình phương năng lượng toàn phần của hai hạt trước phản ứng trong hệ quy chiếu khối tâm, t là bình phương của lượng chuyển về phía trước và u là bình phương của lượng chuyển về phía sau của xung lượng 4 chiều trong quá trình va chạm. s, t, u (các đại lượng bất biến đối với phép biến đổi Lorentz) được gọi là các biến Mandelstam.

(c) Trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm ta có

$$q_1^\alpha = (q_1^\circ, \mathbf{q}_1), \qquad q_2^\alpha = (q_2^\circ, \mathbf{q}_2), \qquad p_1^\alpha = (m, 0)$$

và

$$q_1^2 = q_1^\alpha q_{1\alpha} = \mu^2, \qquad q_2^2 = \mu^2 \,,$$
$$q_1 + p_1 = q_2 + p_2 \,.$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned}
s &= (q_1 + p_1)^2 = q_1^2 + p_1^2 + 2q_1 \cdot p_1 \\
&= \mu^2 + m^2 + 2q_1^\circ m \,, \\
t &= (q_1 - q_2)^2 = q_1^2 + q_2^2 - 2q_1 \cdot q_2 \\
&= 2\mu^2 - 2q_1^\circ q_2^\circ + 2\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 \,, \\
u &= (q_1 - p_2)^2 = (q_2 - p_1)^2 = q_2^2 + p_1^2 - 2q_2 \cdot p_1 \\
&= \mu^2 + m^2 - 2q_2^\circ m \,.
\end{aligned}$$

Vì vậy trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm năng lượng trước phản ứng của hạt có khối lượng μ là

$$q_1^\circ = \frac{s - \mu^2 - m^2}{2m} \,,$$

còn năng lượng của hạt này sau phản ứng là

$$q_2^\circ = \frac{-u + \mu^2 + m^2}{2m} \,,$$

và góc tán xạ θ được tính theo công thức

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2}{|\mathbf{q}_1|\,|\mathbf{q}_2|} = \frac{\frac{t}{2} - \mu^2 + q_1^\circ q_2^\circ}{\sqrt{[(q_1^\circ)^2 - \mu^2]\,[(q_2^\circ)^2 - \mu^2]}} \,.$$

3036

Câu hỏi sau là một câu hỏi về lý thuyết hấp dẫn của Newton.

(a) Tính bán kính và mật độ của một ngôi sao có khối lượng bằng khối lượng mặt trời ($M = 2 \times 10^{33}$ g) sao cho ánh sáng không thể thoát khỏi ngôi sao này.

(b) Coi vũ trụ như một khối cầu khí có mật độ đồng nhất $\rho(t)$ và có năng lượng toàn phần bằng 0 đang giãn nở chống lại sự tự hấp dẫn của nó. Chứng minh rằng nếu bỏ qua áp suất thì khoảng cách giữ các hạt tăng theo $t^{2/3}$.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Theo tính tương đương khối lượng với năng lượng, một photon có năng lượng $E = mc^2$ có khối lượng tương đương là m. Thế của một hạt có khối lượng m nằm ở bề mặt của một ngôi sao khối lượng M và bán kính R là

$$V = -\frac{GMm}{R} ,$$

trong đó G là hằng số hấp dẫn. Do đó điều kiện để một photon thoát khỏi ngôi sao là $E + V \geq 0$, hay $E \geq -V$. Ngược lại, một photon sẽ bị giam giữ trong ngôi sao nếu $E \leq -V$, nghĩa là

$$mc^2 \leq \frac{GMm}{R} ,$$

hay

$$R \leq \frac{GM}{c^2} = \frac{6,67 \times 10^{-8} \times 2 \times 10^{33}}{(3 \times 10^{10})^2} = 1,48 \times 10^5 \text{ cm } = 1,48 \text{ km} .$$

Khi đó mật độ ρ của mặt trời phải thoả mãn điều kiện

$$\rho \geq M\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)^{-1} = \left(\frac{3}{4\pi}\right) \times \frac{2 \times 10^{33}}{(1,48 \times 10^5)^3}$$

$$= 1,47 \times 10^{-1} \times \frac{10^{33}}{10^{15}} = 1,47 \times 10^{17} \text{ g/cm}^3 .$$

Chú ý rằng kết quả này phù hợp với sự dịch chuyển về phía đỏ do hiện tượng hấp dẫn. Ở một khoảng cách lớn một photon có tần số ν phát ra từ một ngôi sao sẽ có tần số ν', trong đó

$$\nu' = \nu\left(1 - \frac{GM}{Rc^2}\right) .$$

Điều kiện để photon *thoát khỏi* trường hấp dẫn của ngôi sao là $\nu' \geq 0$, hay

$$R \geq \frac{GM}{c^2} .$$

(b) Trong quá trình giãn nở của một khối khí thoả mãn điều kiện mật độ đều, khoảng cách giữa hai hạt cho trước tỉ lệ với kích thước dài của khối khí và ta có thể chọn vị trí của bất kì hạt khí nào là tâm của sự giãn nở. Xét hai phần tử khí A, B cách nhau một khoảng R. Coi A là tâm của sự giãn nở còn B nằm ở bề mặt của khối cầu tâm A. Theo định luật về sự hấp dẫn Newton, mỗi đơn vị khối lượng của B chịu một lực hút $-\frac{GM}{R^2}$ hướng về phía A, trong đó khối lượng của khối cầu tâm A là $M = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$, ρ là mật độ của khối khí. Để ý rằng tổng hợp lực hấp dẫn tác dụng lên B của phần khối khí nằm ngoài khối cầu tâm A bán kính R bằng 0. Bỏ qua áp suất ta có phương trình chuyển động của B là

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{GM}{R^2} .$$

Ta có

$$\frac{d^2R}{dt^2} = \frac{d\dot{R}}{dR}\frac{dR}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{R}^2}{dR}$$

và để ý rằng M không đổi trong suốt quá trình giãn nở, bằng phép lấy tích phân ta có

$$\frac{\dot{R}^2}{2} = \frac{GM}{R} + K ,$$

hay

$$K = \frac{\dot{R}^2}{2} - \frac{GM}{R} = T + V ,$$

T, V là động năng và thế năng tính cho một đơn vị khối lượng của B. Nếu năng lượng toàn phần bằng 0 ta có $K = 0$. Vì vậy ta có

$$\frac{dR}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2GM}{R}} .$$

Quá trình đang xét là quá trình giãn nở nên trong biểu thức trên ta chọn dấu $+$. Thực hiện phép tích phân, với điều kiện $R = R_0$ tại $t = t_0$, ta có

$$\frac{2}{3}\left(R^{\frac{3}{2}} - R_0^{\frac{3}{2}}\right) = \sqrt{2GM}(t - t_0) .$$

Khi $t \gg t_0$, $R \gg R_0$ thì

$$R \propto t^{\frac{2}{3}} .$$

3037

Một phi hành gia mang theo một đèn pin, bật đèn sáng rồi bỏ nó lại trong không gian (tự quay xung quanh trục của nó). Tìm phần vận tốc tăng thêm của "súng photon" nhận được sau hai giờ hết pin?

(*Columbia*)

Lời giải:

Giả sử đèn pin được để ở tiêu điểm của một gương phản xạ paraboloit sao cho hầu hết toàn bộ ánh sáng phát ra theo một hướng. Nếu công suất của đèn là N oat (W) và thời gian đèn sáng là t, thì năng lượng toàn phần của các photon được phát ra là $E = Nt$. Nếu hướng của đèn không đổi thì xung lượng của nó sẽ tăng thêm một lượng là

$$mv = \frac{E}{c} = \frac{Nt}{c},$$

hay vận tốc của nó tăng thêm một lượng

$$v = \frac{Nt}{mc},$$

m là khối lượng của đèn pin, kết quả trên là do mỗi photon có năng lượng ε có xung lượng tương ứng là $\frac{\varepsilon}{c}$.

Lấy ví dụ, nếu $N = 1$ W, $m = 0,3$ kg, $t = 2$ giờ, thì

$$v = \frac{1 \times 2 \times 3600}{0,3 \times 3 \times 10^8} = 8 \times 10^{-5} \text{ m/s}.$$

3038

Một đèn chớp giả định phát ra một chùm sáng rất chuẩn trực và có khả năng chuyển đổi một phần lớn khối lượng nghỉ của nó thành ánh sáng. Giả sử ban đầu đèn ở trạng thái nghỉ với khối lượng m_0, sau đó nó được bật và cho chuyển động tự do dọc theo một đường thẳng. Tìm khối lượng nghỉ m của đèn khi nó đạt vận tốc v so với hệ quy chiếu gắn với trạng thái đứng yên ban đầu của nó. Không giả thiết $c \gg v$.

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

Gọi E là năng lượng toàn phần của các photon đã được phát ra cho tới khi đèn đạt vận tốc $v = \beta c$. Khi đó xung lượng toàn phần của các photon có độ lớn $\frac{E}{c}$ và ngược chiều với v. Gọi m là khối lượng nghỉ của đèn khi nó có vận tốc v. Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng, ta có

$$m\gamma c^2 + E = m_0 c^2 \, .$$

$$m\gamma c^2 + E = m_0 c^2 \, ,$$

và áp dụng định luật bảo toàn xung lượng, ta có

$$m\gamma\beta c - \frac{E}{c} = 0 \, ,$$

với $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Khử E trong các biểu thức trên, ta có

$$m\gamma(1+\beta) = m_0 \, ,$$

hay

$$m = \frac{m_0}{\gamma(1+\beta)} = m_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = m_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \, .$$

3039

Một hạt có điện tích q, khối lượng m chuyển động trên một quỹ đạo tròn bán kính R trong mặt phẳng xy trong một từ trường đều $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$.

(a) Tính B theo q, R, m, và tần số góc ω.

(b) Vận tốc của hạt không đổi vì từ trường $\mathbf{B}$ không sinh công lên hạt. Tuy nhiên, một người quan sát chuyển động với vận tốc đều $\beta\hat{\mathbf{x}}$ lại không thấy vận tốc của hạt là hằng số. Tìm u'_0 (thành phần không của vectơ vận tốc 4 chiều của hạt) mà người quan sát đo được.

(c) Tính $\frac{du'_0}{d\tau}$ và rồi $\frac{dp'_0}{d\tau}$. Bằng cách nào mà năng lượng của hạt đã thay đổi?

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Phương trình chuyển động của hạt trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm là

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{u} \times \mathbf{B} \, .$$

Vì $\mathbf{p}$ và $\mathbf{u}$ song song với nhau nên,

$$\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dp^2}{dt} = q\mathbf{p} \cdot \mathbf{u} \times \mathbf{B} = 0 \, .$$

Vì vậy p^2 và do đó độ lớn của $\mathbf{p}$ và $\mathbf{u}$ là không đổi. Từ đó suy ra

$$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

cũng là một hằng số. Khi đó, vì $\mathbf{p} = m\gamma_u\mathbf{u}$, ta có thể viết lại phương trình chuyển động thành

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$$

với $\boldsymbol{\omega} = q\mathbf{B}/m\gamma_u$. Vì

$$\mathbf{u} = (\dot{x}, \dot{y}, 0), \qquad \boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega) ,$$

phương trình trên tương đương với

$$\ddot{x} = \dot{y}\omega, \qquad \ddot{y} = -\dot{x}\omega, \qquad \ddot{z} = 0 .$$

Vì chuyển động chỉ giới hạn trong mặt phẳng xy nên ta không cần xét đến phương trình chuyển động theo trục z. Phối hợp hai phương trình còn lại ta có

$$\ddot{\xi} + i\omega\dot{\xi} = 0$$

bằng cách đặt $x + iy = \xi$. Phương trình này có nghiệm tổng quát

$$\xi = \rho e^{-i(\omega t + \varphi)} + \xi_0 ,$$

trong đó ρ, φ là những hằng số thực còn ξ_0 là một hằng số phức. Nghiệm này tương đương với

$$x - x_0 = R\cos(\omega t + \varphi), \qquad y - y_0 = -R\sin(\omega t + \varphi) ,$$

những biểu thức này cho thấy quỹ đạo chuyển động là đường tròn với bán kính R được cho bởi

$$u = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = R\omega ,$$

ω vận tốc góc quay. Từ đó

$$B = \frac{m\gamma_u\omega}{q} = \frac{m\omega}{q}\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} = \frac{m\omega}{q}\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{R\omega}{c}\right)^2}} .$$

(b) Giả sử S, S' tương ứng là hệ quy chiếu phòng thí nghiệm và hệ quy chiếu đứng yên của người quan sát chuyển động. Thành phần thứ không của vectơ vận tốc bốn chiều, được định nghĩa như $u^\alpha = (\gamma_u c, \gamma_u \mathbf{u})$, biến đổi theo

$$\gamma_u' c = \gamma(\gamma_u c - \beta\gamma_u u_1) ,$$

trong đó $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Như vậy

$$\begin{aligned} u'_0 \equiv \gamma'_u c &= \gamma\gamma_u(c - \beta\dot{x}) \\ &= \gamma\gamma_u[c + \beta\omega R\sin(\omega t + \varphi)] \\ &= \gamma\gamma_u[c + \beta u\sin(\omega\gamma_u\tau + \varphi)] \,, \end{aligned}$$

trong đó τ là thời gian riêng của hạt. Như vậy u'_0 không phải là hằng số trong S'.

(c)

$$\begin{aligned} \frac{du'_0}{d\tau} &= \gamma\gamma_u^2\beta\omega u\cos(\omega\gamma_u\tau + \varphi) \\ &= R\left(\frac{qB}{m}\right)^2 \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\cos\left(\frac{qB\tau}{m} + \varphi\right) \,. \end{aligned}$$

Nếu xung lượng 4 chiều được định nghĩa như $p^\alpha = (mu_0, \mathbf{p})$, thì do m là một hằng số,

$$\frac{dp'_0}{d\tau} = m\frac{du'_0}{d\tau} = \frac{Rq^2B^2}{m}\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\cos\left(\frac{qB\tau}{m} + \varphi\right) \,,$$

biểu thức này chứng tỏ là năng lượng thay đổi

$$\frac{dE}{d\tau} = c\frac{dp'_0}{d\tau} \,.$$

Chú ý rằng trong hệ quy chiếu S', trường điện từ được xác định bởi

$$\begin{aligned} E'_\parallel &= E_\parallel = 0 \\ E'_\perp &= \gamma(\mathbf{E}_\perp + \mathbf{v}\times\mathbf{B}_\perp) \\ &= \gamma\mathbf{v}\times\mathbf{B}_\perp \\ &= \gamma\beta\hat{\mathbf{x}}\times B\hat{\mathbf{z}} = -\gamma\beta B\hat{\mathbf{y}} \,, \end{aligned}$$

vì vậy trong hệ quy chiếu S' có cả trường điện và trường này sinh công lên hạt làm thay đổi năng lượng của nó.

3040

Xét va chạm của các chùm proton. Trong trường hợp thứ nhất hai chùm proton có động năng T va chạm trực diện với nhau. Trong trường hợp thứ hai một chùm proton đang chuyển động va chạm vào các proton đứng yên. Để năng lượng sẵn sàng cho phản ứng trong hai trường hợp bằng nhau thì ở trường hợp thứ hai chùm proton chuyển động phải có động năng bằng bao nhiêu? (Sử dụng các biểu thức tương đối tính).

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

Đối với một hệ thì đại lượng $E^2 - p^2$ là bất biến đối với phép biến đổi Lorentz. Xét va chạm trực diện của hai chùm proton cùng có động năng T, và giả sử rằng trong hệ quy chiếu đứng yên S' gắn với một chùm proton thì chùm proton còn lại có năng lượng toàn phần E' và xung lượng p'. Vì trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm xung lượng toàn phần của hai chùm proton bằng 0 nên ta có

$$\begin{aligned}(2mc^2 + 2T)^2 &= (E' + mc^2)^2 - p'^2c^2 \\ &= (E' + mc^2)^2 - (E'^2 - m^2c^4) \\ &= 2E'mc^2 + 2m^2c^4 .\end{aligned}$$

hay

$$E' = \frac{2T^2 + 4Tmc^2 + m^2c^4}{mc^2}$$

trong đó m là khối lượng nghỉ của proton. Từ đó năng lượng sẵn có cho các phản ứng là

$$E' - mc^2 = \frac{2T^2 + 4Tmc^2}{mc^2} .$$

3041

Một photon có xung lượng p tiến đến va đập một hạt đang đứng yên có khối lượng m.

(a) Tìm năng lượng tương đối tính toàn phần của photon và hạt trong hệ quy chiếu khối tâm.

(b) Tìm độ lớn xung lượng của hạt trong hệ quy chiếu khối tâm.

(c) Nếu xảy ra sự tán xạ ngược đàn hồi của photon thì xung lượng ở trạng thái cuối của photon trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm là bao nhiêu?

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

(a) Xét đại lượng $E^2 - P^2c^2$ của hệ là đại lượng bất biến đối với phép biến đổi Lorentz

$$(pc + mc^2)^2 - p^2c^2 = E'^2 ,$$

trong đó E' là năng lượng toàn phần của hệ trong hệ quy chiếu khối tâm (là hệ quy chiếu mà theo định nghĩa thì trong đó xung lượng toàn phần của hệ phải bằng 0). Vì vậy ta có

$$E' = \sqrt{2pmc^3 + m^2c^4} .$$

(b) Trong hệ quy chiếu khối tâm xung lượng toàn phần $P' = 0$ và xung lượng p của hạt bằng về độ lớn nhưng ngược chiều so với xung lượng p' của photon. Xung lượng biến đổi theo công thức

$$P' = 0 = \gamma\left(P - \frac{\beta E}{c}\right)$$

từ đó suy ra

$$\beta = \frac{Pc}{E} = \frac{pc}{pc + mc^2} , \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

trong hệ quy chiếu khối tâm. Áp dụng phương trình biến đổi của xung lượng một lần nữa ta tìm được xung lượng của hạt trong hệ quy chiếu khối tâm là

$$p' = \gamma(0 - \beta mc) = -\gamma\beta mc = \frac{-pmc}{\sqrt{2pmc + m^2c^2}} .$$

(c) Gọi xung lượng của photon và của hạt ở trạng thái cuối lần lượt là p_1 và p_2. Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng và xung lượng ta có

$$pc + mc^2 = p_1c + \sqrt{p_2^2c^2 + m^2c^4} ,$$
$$p = -p_1 + p_2 .$$

Kết hợp hai phương trình trên ta có

$$(p - p_1)^2 + 2(p - p_1)mc = (p + p_1)^2 ,$$

hay

$$p_1 = \frac{pmc}{2p + mc} .$$

3042

Xem xét khả năng tạo thành một trong những hạt mới được phát hiện, đó là hạt ψ' (3,7), khi một photon va chạm với một proton theo phản ứng sau

$$\gamma + p \to p + \psi' \ .$$

Trong bài toán này chúng ta có cơ sở để lấy xấp xỉ khối lượng của ψ' là $4M_p$, với M_p là khối lượng của proton. Ban đầu proton bia ở trạng thái nghỉ còn photon chiếu tới có năng lượng E trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm.

(a) Tìm giá trị tối thiểu của năng lượng E của photon để phản ứng trên có thể xảy ra. Có thể tính kết quả theo đơn vị M_pc^2 (=938 MeV).

(b) Tìm vận tốc, nghĩa là tỉ số v/c, của hạt ψ' khi photon có năng lượng E vừa đủ vượt quá năng lượng ngưỡng E_0.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Tại ngưỡng để phản ứng xảy ra, ở trạng thái cuối cùng các hạt p, ψ' đều đứng yên trong hệ quy chiếu khối tâm. Vì $E^2 - P^2c^2$ là bất biến đối với phép biến đổi Lorentz và đối với hệ cô lập thì nó được bảo toàn và vì một photon có năng lượng E thì có xung lượng là $\frac{E}{c}$, nên ta có

$$(E_0 + M_pc^2)^2 - E_0^2 = (M_pc^2 + 4M_pc^2)^2 \ ,$$

từ đó tính được

$$E_0 = 12M_pc^2$$

là năng lượng ngưỡng của photon.

(b) Ở gần ngưỡng năng lượng để phản ứng xảy ra, hạt ψ' tạo thành ở trạng thái đứng yên trong hệ quy chiếu khối tâm, vì vậy vận tốc của nó trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm chính là vận tốc của khối tâm hay vận tốc của hệ

$$v = \frac{Pc^2}{E} = \frac{E_0c}{E_0 + M_pc^2} = \frac{12}{13}c \ .$$

3043

Một phản proton có năng lượng E_0 tương tác với một proton ở trạng thái nghỉ để tạo ra hai hạt có cùng khối lượng m_x. Trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm, người ta phát hiện được một trong hai hạt tạo thành ở góc 90° so với chùm tới. Tìm năng lượng toàn phần (E_s) của hạt đó và chứng tỏ rằng nó không phụ thuộc vào m_x cũng như vào E_0.

(UC, Berkeley)

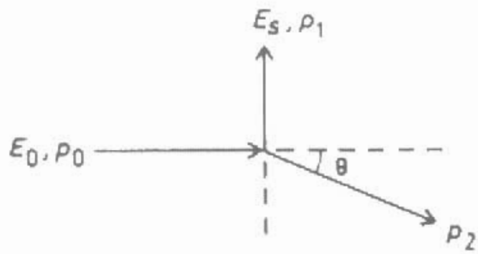
Lời giải:

Ta biết phản proton và proton có cùng khối lượng m. Hình 3.23 mô tả va chạm giữa phản proton và proton. Áp dụng định luật bảo toàn xung lượng ta có

$$p_0 = p_2 \cos\theta , \qquad p_1 = p_2 \sin\theta ,$$

hay

$$p_2^2 = p_0^2 + p_1^2 .$$



Hình 3.23

Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng ta có

$$E_0 + mc^2 = E_s + \sqrt{p_2^2c^2 + m_x^2c^4} .$$

Phối hợp hai phương trình cuối ta có

$$(E_0 + mc^2)^2 + E_s^2 - 2(E_0 + mc^2)E_s = p_0^2c^2 + p_1^2c^2 + m_x^2c^4 ,$$

hay

$$2m^2c^4 + 2E_0mc^2 = 2(E_0 + mc^2)E_s ,$$

vì $E_0^2 = p_0^2c^2 + m^2c^4$, $E_s^2 = p_1^2c^2 + m_x^2c^4$. Do đó ta có

$$E_s = mc^2 .$$

Như vậy E_s chỉ phụ thuộc vào khối lượng của proton mà không phụ thuộc vào m_x và E_0.

3044

(a) Một hạt có khối lượng m và điện tích e chuyển động với vận tốc tương đối tính v trên một đường tròn bán kính R, quỹ đạo này vuông góc với một từ trường tĩnh đồng nhất $\mathbf{B}$ như mô tả trên hình 3.24. Tính R theo các thông số còn lại (bỏ qua sự bức xạ).

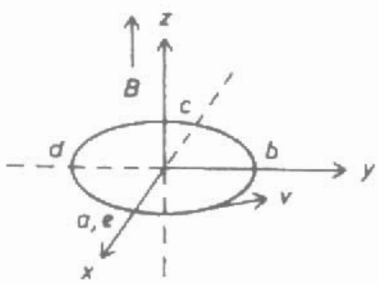
(b) Quan sát viên O' chuyển động với vận tốc cố định v dọc theo trục y thấy quỹ đạo có dạng như hình 3.25. Các điểm a, b, c, d, e ở hai hình tương ứng với nhau.

(i) Tính khoảng cách $y'_d - y'_b$ mà quan sát viên O' đo được.

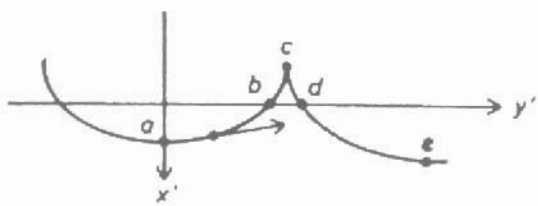
(ii) Tìm gia tốc $\frac{d^2x'}{dt'^2}$ của hạt tại c, là điểm mà hạt ở trạng thái nghỉ một cách tức thời.

(iii) Giải thích nguồn gốc gia tốc của hạt tại c trong hệ quy chiếu gắn với O'?

(Princeton)



Hình 3.24



Hình 3.25

Lời giải:

(a) Gọi $\mathbf{p}$ là xung lượng của hạt, ta có

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B} ,$$

và như vậy

$$\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dp^2}{dt} = em\gamma\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 ,$$

trong đó $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Do đó $\mathbf{p}$, γ và cả v đều có độ lớn không đổi. Như đã tính toán ở Bài 3039, quỹ đạo của hạt là đường tròn bán kính R cho bởi công thức $v = R\omega$, với

$$\omega = \frac{eB}{m\gamma} .$$

(b) Gọi Σ, Σ' lần lượt là hệ quy chiếu phòng thí nghiệm và hệ quy chiếu gắn với quan sát viên, trong đó Σ chuyển động với vận tốc $-v$ dọc theo trục y so với Σ'. Sử dụng phép biến đổi Lorentz ta có

$$\begin{aligned}
y' &= \gamma(y - \beta ct) = \gamma(y + vt) , \\
z' &= z, \qquad x' = x , \\
ct' &= \gamma(ct - \beta y) = \gamma\left(ct + \frac{vy}{c}\right) ,
\end{aligned}$$

với $\beta = -\frac{v}{c}$.

(i) Ta có

$$\begin{aligned}
y_d - y_b &= -2R, \qquad t_d - t_b = \frac{\pi}{\omega} , \\
y'_d - y'_b &= \gamma(y_d - y_b) + \gamma v(t_d - t_b) \\
&= \gamma\left(-2R + \frac{v\pi}{\omega}\right) \\
&= \frac{(\pi - 2)\gamma v}{\omega} = \frac{(\pi - 2)mv}{eB\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} .
\end{aligned}$$

(ii) Tại điểm c, $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = -v$,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-v^2}{R} \qquad \text{(gia tốc hướng tâm)} ,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0 \qquad \text{(gia tốc tiếp tuyến)} .$$

Thành phần vận tốc $\frac{dx}{dt}$ biến đổi theo công thức

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} \Big/ \left(\frac{dt'}{dt}\right) = \frac{\frac{dx}{dt}}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}\frac{dy}{dt}\right)} .$$

Tương tự ta có

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d}{dt'}\left(\frac{dx'}{dt'}\right) = \frac{1}{\gamma\left(1+\frac{v}{c^2}\frac{dy}{dt}\right)}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{dx'}{dt'}\right)$$

$$= \frac{1}{\gamma\left(1+\frac{v}{c^2}\frac{dy}{dt}\right)}\cdot\frac{d}{dt}\left[\frac{\frac{dx}{dt}}{\gamma\left(1+\frac{v}{c^2}\frac{dy}{dt}\right)}\right]$$

$$= \frac{\left(1+\frac{v}{c^2}\frac{dy}{dt}\right)\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{v}{c^2}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt}}{\gamma^2\left(1+\frac{v}{c^2}\frac{dy}{dt}\right)^3}$$

$$= \frac{-\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{v^2}{R}}{\gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}$$

$$= -\gamma^2 v\omega = \frac{-\gamma evB}{m}\,.$$

Tại điểm c ta có

$$\frac{dy'}{dt'} = \frac{\frac{dy}{dt}+v}{1+\frac{v}{c^2}\frac{dy}{dt}} = \frac{-v+v}{1-\frac{v^2}{c^2}} = 0\,.$$

Vì $\frac{dx'}{dt'} = 0$, $\frac{dz'}{dt'} = 0$ nên vận tốc của hạt $\mathbf{u}' = 0$.

(iii) Các phương trình biến đổi đối với trường điện từ có dạng

$$\begin{aligned}
&E'_y = E_y = 0, \qquad B'_y = B_y = 0,\\
&E'_z = \gamma(E_z - \beta c B_x) = 0,\\
&E'_x = \gamma(E_x + \beta c B_z) = -\gamma v B\,,\\
&B'_z = \gamma\left(B_z + \frac{\beta}{c}E_x\right) = \gamma B\,,\\
&B'_x = \gamma\left(B_x - \frac{\beta}{c}E_z\right) = 0\,.
\end{aligned}$$

(Để thu được các phương trình trên ta thay các trục y cho x, z cho y, x cho z). Khi đó trong hệ quy chiếu Σ' lực Lorentz tác dụng lên hạt tại điểm c là

$$\mathbf{F}' = e(\mathbf{E}' + \mathbf{u}'\times\mathbf{B}') = e\mathbf{E}'\,,$$

hay

$$F' = F'_x = -\gamma evB ,$$

và gia tốc của vật là $-\frac{\gamma evB}{m}$, giống như kết quả tìm được ở câu (ii). Vì vậy gia tốc của hạt tại c là do trường điện trong hệ quy chiếu Σ' gây ra.

3045

Một hạt mang điện (điện tích e và khối lượng nghỉ m) chuyển động trong một trường điện từ không đổi theo không gian và thời gian với các thành phần của nó là $\mathbf{E} = (a, 0, 0)$ và $\mathbf{B} = (0, 0, b)$ trong hệ quy chiếu Lorentz S. Giả thiết rằng $|\mathbf{E}| \neq |\mathbf{B}|$. Hãy đưa ra các phương trình vi phân cho vectơ vận tốc 4 chiều của hạt như là một hàm của thời gian riêng. Hãy chỉ ra rằng nghiệm của phương trình đó có thể biểu diễn dưới dạng chồng chập của các hàm mũ và tìm các số hạng ở phần mũ. Tìm điều kiện (của $\mathbf{E}$ và $\mathbf{B}$) sao cho tất cả các thành phần của vectơ vận tốc 4 chiều đều liên kết dọc theo từng quỹ đạo?

(*Princeton*)

Lời giải:

Chuyển động của hạt được mô tả bằng phương trình vectơ 4 chiều

$$\frac{dp^\alpha}{ds} = F^\alpha ,$$

trong đó $ds = cd\tau$, τ là thời gian riêng của hạt,

$$p^\alpha = mc^2 u^\alpha = mc^2 \left(\frac{\gamma}{c}\mathrm{u}, \gamma\right) ,$$

$$F^\alpha = (\gamma \mathbf{F}, \frac{\gamma}{c}\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}) ,$$

với $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ và u là vận tốc của hạt.

Lực tác dụng lên hạt là lực Lorentz

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) .$$

Với $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$, $\mathbf{E} = (a, 0, 0)$, $\mathbf{B} = (0, 0, b)$, và $\mathbf{u} \cdot \mathbf{F} = e\mathbf{u} \cdot \mathbf{E} = eau_x$, ta có

$$F^\alpha = e\gamma \left(a + bu_y, -bu_x, 0, \frac{au_x}{c}\right)$$

$$= e(au_4 + cbu_2, -cbu_1, 0, au_1) .$$

Từ đó các phương trình chuyển động là

$$m\frac{du_1}{d\tau} = \frac{e}{c}(cbu_2 + au_4),$$

$$m\frac{du_2}{d\tau} = -ebu_1 ,$$

$$m\frac{du_3}{d\tau} = 0 ,$$

$$m\frac{du_4}{d\tau} = \frac{eau_1}{c} .$$

Như vậy u_3 là hằng số và không cần xem xét gì thêm. Để giải các phương trình còn lại ta đặt

$$u_j = A_j e^{\lambda\tau}, \quad j = 1, 2, 4 .$$

Khi đó các phương trình trở thành

$$m\lambda A_1 - ebA_2 - \frac{e}{c}aA_4 = 0 ,$$
$$ebA_1 + m\lambda A_2 = 0 ,$$
$$-\frac{e}{c}aA_1 + m\lambda A_4 = 0 .$$

Điều kiện để hệ phương trình này có nghiệm mà không phải khử bỏ tất cả các A' là

$$\begin{vmatrix} m\lambda & -eb & -\frac{ea}{c} \\ eb & m\lambda & 0 \\ -\frac{ea}{c} & 0 & m\lambda \end{vmatrix} = 0 ,$$

nghĩa là

$$m\lambda\left(m^2\lambda^2 + e^2b^2 - \frac{e^2a^2}{c^2}\right) = 0 .$$

Các nghiệm của phương trình là

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = \frac{e}{mc}\sqrt{a^2 - c^2b^2}, \qquad \lambda_3 = -\frac{e}{mc}\sqrt{a^2 - c^2b^2} .$$

Như vậy nghiệm tổng quát của phương trình chuyển động là chồng chập của các hàm mũ với các số mũ vừa tìm được. Điều kiện để tất cả các thành phần của vectơ vận tốc 4 chiều của hạt đều liên kết dọc theo từng quỹ đạo là các λ phải bằng 0 hoặc là số ảo, nghĩa là

$$a \le cb, \qquad \text{hay} \qquad |\mathbf{E}| \le c|\mathbf{B}| .$$

3046

Một hạt có điện tích e, năng lượng E, chuyển động với vận tốc v trong một từ trường sinh ra bởi một lưỡng cực từ có cường độ M nằm ở gốc toạ độ và hướng dọc theo trục z. Nếu ban đầu hạt nằm trong mặt phẳng xy cách gốc toạ độ một khoảng R và chuyển động theo phương xuyên tâm ra phía ngoài, hãy tìm giá trị cực đại và cực tiểu của bán kính của hạt (giả sử quỹ đạo của hạt bị giới hạn).

(*Chicago*)

Lời giải:

Hàm Lagrange của một hạt có điện tích e, khối lượng nghỉ m chuyển động với vận tốc u trong trường điện từ có thế vô hướng Φ và thế vectơ **A** là

$$L = -\frac{mc^2}{\gamma} - e\Phi + e\mathbf{u}\cdot\mathbf{A}\,.$$

trong đó $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$. Trong bài toán này không có trường điện nên $\Phi = 0$. Thế vectơ do lưỡng cực từ có momen **M** nằm ở gốc toạ độ gây ra là

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{M}\times\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{M}\times\mathbf{r}}{r^3}\,.$$

Trong hệ toạ độ cầu như hình 3.26 ta có

$$\mathbf{M} = (M\cos\theta, -M\sin\theta, 0)\,,$$
$$\mathbf{r} = (r, 0, 0)\,,$$

do đó ta có

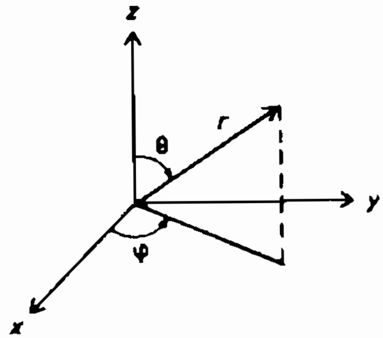
$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{M\sin\theta}{r^2}\mathbf{i}_\varphi\,.$$

Với $\mathbf{u} = (\dot{r}, r\dot{\theta}, r\dot{\varphi}\sin\theta)$, hàm Lagrange có dạng

$$L = -\frac{mc^2}{\gamma} + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{eM\sin^2\theta}{r}\dot{\varphi}\,.$$

Chú ý rằng $u^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta$, L không phụ thuộc tường minh vào φ. Do đó ta có

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \left(m\gamma r^2\dot{\varphi} + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{eM}{r}\right)\sin^2\theta = \text{ hằng số}\,.$$



Hình 3.26

Ban đầu hạt ở vị trí có $r = R$ và chuyển động với vận tốc $v = \dot{r}$ trong mặt phẳng xy nghĩa là $r = R$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\varphi} = 0$ tại thời điểm ban đầu, từ đó ta có $\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{eM}{R}$ là hằng số. Hơn nữa, tác dụng lên vật chỉ có lực từ do lưỡng cực từ nằm ở gốc toạ độ gây ra. Lưỡng cự từ này gây ra một từ trường có các đường sức từ vuông góc với mặt phẳng xy nên lực từ tác dụng lên hạt cũng nằm trong mặt phẳng này và do đó hạt chỉ chuyển động trong mặt phẳng xy. Do đó $\dot{\theta} = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ tại mọi thời điểm. Vì vậy ta có

$$m\gamma r^2\dot{\varphi} + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{eM}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{eM}{R} .$$

Tại các bán kính cực đại và cực tiểu, $\dot{r} = 0$ và $\mathbf{u} = r\dot{\varphi}\mathbf{i}_\varphi$. Vì lực từ không sinh công do

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\times(\nabla\times\mathbf{A}) = 0 ,$$

nên u có độ lớn bằng với vận tốc ban đầu v, nghĩa là $r\dot{\varphi} = \pm v$, và γ là một hằng số. Đặt

$$\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{eM}{m\gamma v} ,$$

ta có

$$\pm Rr^2 - \alpha r + \alpha R = 0 .$$

Nghiệm của phương trình ứng với dấu + là

$$r = \frac{\alpha}{2R}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4R^2}{\alpha}}\right) .$$

Nghiệm của phương trình ứng với dấu - là

$$r = \frac{\alpha}{2R}\left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4R^2}{\alpha}}\right) ,$$

trong hai công thức trên ta dùng nghiệm ứng với các dấu + vì r là số dương. So sánh hai nghiệm tìm được ta tìm được giá trị cực đại, cực tiểu của bán kính là

$$r_{\max} = \frac{\alpha}{2R}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4R^2}{\alpha}}\right),$$

$$r_{\min} = \frac{\alpha}{2R}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4R^2}{\alpha}}\right).$$

3047

Như chúng ta đã biết các hành tinh chuyển động trên những quỹ đạo hình elip xung quanh mặt trời và việc dẫn ra phương trình quỹ đạo là một bài toán mẫu trong cơ học cổ điển. Tuy nhiên, chỉ cần tính đến những hiệu ứng của thuyết tương đối hẹp thôi là quỹ đạo sẽ trở thành elip tiến động có dạng

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0}\{1 + \epsilon\cos[\alpha(\theta - \theta_0)]\},$$

trong đó $\alpha = 1$ tương ứng với kết quả cổ điển không có tiến động.

(a) Dẫn ra phương trình nêu trên và biểu diễn α và r_0 theo các hằng số cơ bản của quỹ đạo (như năng lượng, momen động lượng, v.v.)

(b) Cho bán kính quỹ đạo trung bình của sao Thuỷ là 58×10^6 km và chu kì quỹ đạo của nó là 88 ngày, tính toán mức tiến động của quỹ đạo của sao Thuỷ theo giây cung sau 1 thế kỉ. (Tất nhiên là hiệu ứng này không phải là nguyên nhân duy nhất gây ra sự tiến động của sao Thuỷ).

(*Chicago*)

Lời giải:

(a) Xét một hành tinh có khối lượng m và vận tốc **v**. Vì nó chuyển động trên quỹ đạo elip, nghĩa là trong một mặt phẳng, nên ta sử dụng hệ toạ độ cực (r, θ) với mặt trời là gốc toạ độ. Hàm Lagrange của hệ là

$$L = -\frac{mc^2}{\gamma} + \frac{GmM}{r},$$

trong đó $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ với

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2} = \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}{c^2},$$

M là khối lượng của mặt trời. Vì

$$\frac{\partial}{\partial \dot{r}}\left(\frac{1}{\gamma}\right) = \frac{-\gamma \dot{r}}{c^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left(\frac{1}{\gamma}\right) = \frac{-\gamma r^2 \dot{\theta}}{c^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\gamma}\right) = \frac{-\gamma r \dot{\theta}^2}{c^2},$$

Các phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

cho

$$\frac{d}{dt}(m\gamma \dot{r}) - m\gamma r \dot{\theta}^2 + \frac{GmM}{r^2} = 0\,,$$

$$m\gamma r^2 \dot{\theta} = b, \text{ một hằng số.}$$

Đặt $u = \frac{1}{r}$, kết hợp hai phương trình cuối ta có

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{b}{\dot{\theta}}\frac{du}{dt}\right) + bu\dot{\theta} - GmMu^2 = 0\,,$$

hay

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GmMu^2}{b\dot{\theta}}\,, \tag{1}$$

vì

$$\frac{du}{dt} = \dot{\theta}\frac{du}{d\theta}\,.$$

Năng lượng toàn phần của hành tinh là

$$E = m\gamma c^2 - \frac{GmM}{r}\,.$$

Như vậy

$$\frac{GmMu^2}{b\dot{\theta}} = \frac{GmM}{b^2c^2}(E + GmM\mu)$$

và phương trình (1) được biến đổi thành

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \alpha^2 u = \frac{GmME}{b^2c^2}\,, \tag{2}$$

trong đó

$$\alpha^2 = 1 - \left(\frac{GmM}{bc}\right)^2\,.$$

Phương trình (2) có một nghiệm riêng là

$$u = \frac{GmME}{b^2c^2\alpha^2} ,$$

và do đó nghiệm tổng quát của nó là

$$u = A\cos[\alpha(\theta - \theta_0)] + \frac{GmME}{b^2c^2\alpha^2} ,$$

trong đó A và θ_0 là các hằng số. Vì vậy phương trình quỹ đạo có dạng

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0}\{1 + \epsilon\cos[\alpha(\theta - \theta_0)]\}$$

với

$$r_0 = \frac{b^2c^2\alpha^2}{GmME} = \frac{(bc)^2 - (GmM)^2}{GmME}, \quad \epsilon = Ar_0, \quad \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{GmM}{bc}\right)^2} ,$$

A, θ_0 là các hằng số và b, E lần lượt là momen động lượng đối với mặt trời và năng lượng toàn phần của hành tinh.

(b) Giả sử r đạt cực tiểu tại θ_1 và trở lại giá trị cực tiểu này tại θ_2. Khi đó $\alpha(\theta_2 - \theta_1) = 2\pi$. Do đó điểm cận nhật tăng một góc

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{\alpha} - 2\pi = 2\pi\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)$$

sau mỗi chu kì quay. Chú ý rằng khi $\alpha = 1$ thì không có sự tiến động. Vì độ lớn góc tiến động nhỏ so với 2π, nên α gần với đơn vị và có thể được biểu diễn như

$$\alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{GmM}{bc}\right)^2 ,$$

và ta có

$$\Delta\theta \approx \pi\left(\frac{GmM}{bc}\right)^2$$

sau mỗi chu kì quay. Xét đến vai trò của lực hấp dẫn ta có

$$\frac{GmM}{\bar{r}^2} = m\gamma\bar{r}\dot{\theta}^2 ,$$

trong đó $\bar{r}$ là bán kính quỹ đạo trung bình của sao Thuỷ. Vì

$$b = m\gamma\bar{r}^2\dot{\theta} ,$$

$$\frac{GmM}{bc} = \frac{\bar{r}\dot{\theta}}{c} = \frac{2\pi\bar{r}}{\tau c} ,$$

trong đó $\tau = 88$ ngày là chu kì quay của sao Thuỷ nên trong một thế kỉ số vòng quay mà sao Thuỷ thực hiện là

$$\frac{100 \times 365}{88} = 414,8$$

do đó góc tiến động sau một thế kỉ là

$$\begin{aligned}\Theta &= 414,8 \times 4\pi^3 \times \left(\frac{58 \times 10^6}{88 \times 24 \times 3600 \times 3 \times 10^5}\right)^2 \\ &= 3,326 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ &= 6,86 \text{ giây cung}.\end{aligned}$$

Kết quả này chỉ bằng $\frac{1}{6}$ kết quả quan sát được. Kết quả thực tế quan sát được chỉ có thể được giải thích bằng những tính toán liên quan đến thuyết tương đối tổng quát.

3048

Hãy dẫn ra hàm Hamilton của một hạt chuyển động với xung lượng $\mathbf{p} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ trong trường điện từ được mô tả bởi các phương trình sau

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

(*SUNY, Buffalo*)

Lời giải:

Hàm Lagrange của một hạt tích điện q trong hệ đơn vị Gauss là

$$L = -\frac{m_0c^2}{\gamma} - q\Phi + \frac{q}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A},$$

và theo định nghĩa thì Hamilton của nó là

$$H = \sum_i \dot{x}_i p_i - L,$$

trong đó $\dot{x}_i$ là thành phần vận tốc trong hệ toạ độ Descartes cho bởi $\mathbf{v} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ và p_i là xung lượng chính tắc cho bởi công thức $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$. Vì

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}{c^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left(\frac{1}{\gamma}\right) = -\frac{\gamma\dot{x}_i}{c^2},$$

và

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} = \sum_i \dot{x}_i A_i \ ,$$

nên ta có

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_0 \gamma \dot{x}_i + \frac{qA_i}{c}$$

và

$$\begin{aligned} H &= \sum_i \dot{x}_i p_i - L = m_0 \gamma \sum_i \dot{x}_i^2 + \frac{m_0 c^2}{\gamma} + q\Phi \\ &= \frac{m_0 c^2}{\gamma} \left(\frac{\gamma^2 v^2}{c^2} + 1 \right) + q\Phi \\ &= m_0 \gamma c^2 + q\Phi \ . \end{aligned}$$

Để biểu diễn H theo $\mathbf{p}$, chúng ta sử dụng hệ thức

$$\sum_i (m_0 \gamma \dot{x}_i)^2 = \sum_i \left(p_i - \frac{qA_i}{c} \right)^2 \ ,$$

hay

$$m_0^2 \gamma^2 v^2 = \left(\mathbf{p} - \frac{q\mathbf{A}}{c} \right)^2 \ ,$$

do đó ta có

$$m_0^2 \gamma^2 c^4 = m_0^2 \left(\frac{\gamma^2 v^2}{c^2} + 1 \right) c^4 = \left(\mathbf{p} - \frac{q\mathbf{A}}{c} \right)^2 c^2 + m_0^2 c^4 \ .$$

Vậy hàm Hamilton của hệ là

$$H = \sqrt{\left(\mathbf{p} - \frac{q\mathbf{A}}{c} \right)^2 c^2 + m_0^2 c^4} + q\Phi \ .$$

3049

Tìm vận tốc của hạt biết rằng động năng của nó bằng năng lượng nghỉ.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Động năng của một hạt có khối lượng nghỉ m_0 là

$$T = E - m_0c^2 = m_0c^2(\gamma - 1) ,$$

trong đó $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Vì động năng của hạt bằng năng lượng nghỉ m_0c^2 nên $\gamma = 2$. Từ đó ta có

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} ,$$

hay

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}c .$$

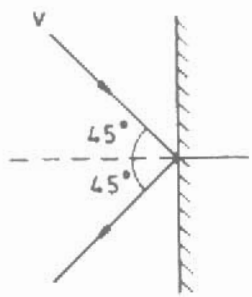
3050

Một chùm electron bị tán xạ bởi một bia tán xạ cố định như trên hình 3.27. Các electron bị tán xạ đàn hồi. Mỗi electron có năng lượng $E = \frac{5}{3}m_0c^2$ và chùm electron có thông lượng là Q electron/giây.

(a) Tìm vận tốc của chùm electron tới.

(b) Tìm độ lớn và phương của lực mà chùm electron tác dụng lên bia tán xạ?

(*Wisconsin*)



Hình 3.27

Lời giải:

(a) Vì $E = m_0\gamma c^2 = \frac{5}{3}m_0c^2$, nên $\gamma = \frac{5}{3}$ và $\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \frac{4}{5}$. Từ đó vận tốc của electron là $0,8c$.

(b) Vì các electron bị tán xạ đàn hồi nên vận tốc của chúng trước và sau tán xạ bằng nhau. Thành phần xung lượng song song với bia tán xạ cần được bảo toàn nên chùm electron tới và chùm electron tán xạ phải tạo với bia tán xạ những góc bằng nhau. Do đó sau quá trình tán xạ thì thành phần xung lượng vuông góc với bia tán xạ chỉ đổi dấu mà không thay đổi độ lớn. Vì vậy ta có

$$\Delta p = 2p_n = 2m_0\gamma v\cos 45^\circ = \frac{4\sqrt{2}}{3}m_0c\,.$$

Lực F mà chùm electron tác dụng lên bia tán xạ bằng với xung lực mà chùm electron tác dụng bia trong một đơn vị thời gian. Vì có Q electron đập vào bia trong một đơn vị thời gian nên lực F có cường độ là

$$F = 2p_nQ = \frac{4\sqrt{2}}{3}Qm_0c\,.$$

và có phương thẳng đứng (vuông góc với bia tán xạ).

3051

Theo nguyên lý tương đương thì khối lượng hấp dẫn và khối lượng quán tính bằng nhau. Hãy lý giải xem liệu một photon có khối lượng hấp dẫn khác 0 hay không? Giả sử có một photon rơi thẳng về phía trái đất và khoảng cách mà photon này rơi được là 10 m. Tính toán ảnh hưởng của quá trình rơi nói trên lên tần số của photon. Có thể dùng kĩ thuật thực nghiệm nào để đo đạc được sự thay đổi tần số đó?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Mặc dù khối lượng nghỉ của photon bằng 0 nhưng theo nguyên lý tương đương thì khối lượng hấp dẫn của nó không bằng 0 mà bằng khối lượng quán tính

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}\,.$$

Khi photon rơi một đoạn l trong trường hấp dẫn g, thì năng lượng và cả tần số của nó đều tăng

$$h\nu' \approx h\nu + mgl = h\nu\left(1 + \frac{gl}{c^2}\right)\,.$$

Thay $\nu' = \nu + \Delta\nu$, ta có

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx \frac{gl}{c^2} = \frac{9,8 \times 10}{(3 \times 10^8)^2} = 1,1 \times 10^{-15} .$$

Như vậy khi rơi một đoạn 10 m trong trường hấp dẫn của trái đất thì tần số của photon tăng (dịch chuyển về phía xanh) theo hệ số $1 + 1,1 \times 10^{-15}$. Thực nghiệm có thể sử dụng hiệu ứng Mössbauer để phát hiện sự thay đổi tần số nhỏ này.

3052

Xét thí nghiệm tán xạ ở năng lượng rất cao giữa hai hạt có cùng khối lượng nghỉ m_0, trong đó một hạt ban đầu đứng yên còn hạt kia tiến tới với xung lượng p và năng lượng toàn phần E.

(a) Tìm vận tốc khối tâm của hệ $\beta^* = \frac{v^*}{c}$.

(b) Trong giới hạn tương đối tính cực hạn $pc \gg m_0c^2$, tìm năng lượng toàn phần E^* của hệ trong hệ quy chiếu khối tâm (là hệ quy chiếu trong đó tổng xung lượng 3 chiều toàn phần bằng 0).

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm, hệ hai hạt có năng lượng toàn phần là $E + m_0c^2$ và xung lượng tòan phần là p. Vận tốc khối tâm của hệ (vận tốc của hệ khi xét nó như một tổng thể) tính theo đơn vị c khi đó là

$$\beta^* = \frac{pc}{E + m_0c^2} .$$

(b) Đối với một hệ thì các đại lượng $E^2 - p^2c^2$ là bất biến đối với phép biến đổi Lorentz. Trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm đại lượng này bằng

$$(E + m_0c^2)^2 - p^2c^2 = 2Em_0c^2 + 2m_0^2c^4$$

vì $E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4$. Trong hệ quy chiếu khối tâm đại lượng này bằng $(2\bar{E})^2$, trong đó $\bar{E}$ là năng lượng toàn phần của mỗi hạt. Vì vậy

$$E^* = 2\bar{E} = \sqrt{2Em_0c^2 + 2m_0^2c^4}$$
$$\approx \sqrt{2Em_0c^2} \approx \sqrt{2pm_0c^3}$$

trong giới hạn tương đối tính cực hạn với $pc \gg m_0c^2$, ta có

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} \approx pc \gg m_0c^2 \ .$$

3053

Một hạt có khối lượng nghỉ m và có vận tốc ban đầu v_0 dọc theo trục x. Từ thời điểm $t = 0$ hạt chịu tác dụng của lực F dọc theo trục y. Tìm vận tốc của hạt tại thời điểm t bất kì, và chứng tỏ rằng $|\mathbf{v}| \to c$ khi $t \to \infty$.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Phương trình chuyển động của hạt

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\gamma\mathbf{v}) \ ,$$

trong đó $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, trong bài toán này phương trình đó có thể viết dưới dạng

$$0 = \frac{d}{dt}(m\gamma\dot{x}), \qquad F = \frac{d}{dt}(m\gamma\dot{y})$$

với $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y})$, $\mathbf{F} = (0, F)$. Vì F là hằng số với mọi $t > 0$ và tại thời điểm ban đầu $\dot{x} = v_0$, $\dot{y} = 0$, $F = 0$, nên sau khi tích phân các phương trình trên ta có

$$m\gamma\dot{x} = m\gamma_0 v_0, \qquad m\gamma\dot{y} = Ft \ ,$$

trong đó $\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}$. Do đó ta có

$$\beta^2c^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \frac{1}{m^2\gamma^2}(m^2\gamma_0^2v_0^2 + F^2t^2) \ ,$$

hay

$$\gamma^2\beta^2 = \frac{\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{m^2\gamma_0^2v_0^2 + F^2t^2}{m^2c^2} \ ,$$

từ đó tính được

$$\beta^2 = \frac{m^2\gamma_0^2v_0^2 + F^2t^2}{m^2\gamma_0^2v_0^2 + m^2c^2 + F^2t^2} \ .$$

Vì $\gamma_0^2 \frac{v_0^2}{c^2} = \gamma_0^2 - 1$, nên ta có

$$v = \beta c = \sqrt{\frac{m^2\gamma_0^2 v_0^2 + F^2t^2}{m^2\gamma_0^2 c^2 + F^2t^2}}\, c\,.$$

Các thành phần vận tốc là

$$\dot{x} = \frac{\gamma_0 v_0}{\gamma}, \qquad \dot{y} = \frac{Ft}{m\gamma}\,,$$

trong đó

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sqrt{\frac{m^2\gamma_0^2 c^2 + F^2t^2}{m^2c^2}}\,.$$

Khi $t \to \infty$, vì $m\gamma_0 v_0$, $m\gamma_0 c$ vẫn là các hằng số nên ta có

$$v \to \left(\frac{Ft}{Ft}\right) c = c\,.$$

3054

Một electron có năng lượng $E \gg mc^2$ và một photon có năng lượng W va chạm vào nhau.

(a) Tìm năng lượng W' của photon trong hệ quy chiếu gắn với electron (hệ quy chiếu e).

(b) Nếu $W' \ll mc^2$, có thể bỏ qua sự giật lùi của electron và năng lượng của photon trong hệ quy chiếu e không thay đổi do quá trình tán xạ. Tìm giá trị cực tiểu và cực đại năng lượng của photon trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm (hệ quy chiếu L) sau khi tán xạ.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Chọn trục x trùng với phương chuyển động của electron. Gọi θ và θ' lần lượt là góc tạo bởi chùm photon với phương chuyển động của electron (trục x) trong hệ quy chiếu L và hệ quy chiếu e. Vì (pc, E) là một vectơ 4 chiều nên năng lượng của photon biến đổi theo công thức

$$W' = \gamma\left(W - \frac{\beta W}{c}\cdot c\cos\theta\right) = \gamma(1-\beta\cos\theta)W\,,$$

trong đó $\gamma = \frac{E}{mc^2}$, $\beta = \frac{pc}{E}$ với $p = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - m^2c^4}$ là xung lượng của electron trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm L. Vì $E \gg mc^2$ ta có

$$pc \approx E\left(1 - \frac{m^2c^4}{2E^2}\right)\,.$$

Từ đó

$$W' \approx \frac{E}{mc^2}\left[1-\left(1-\frac{m^2c^4}{2E^2}\right)\cos\theta\right]W$$

$$= \left[\frac{E}{mc^2}(1-\cos\theta)+\frac{mc^2}{2E}\cos\theta\right]W\,. \quad (1)$$

(b) Trong hệ quy chiếu e ban đầu electron đứng yên. Nếu bỏ qua sự giật lùi của electron thì chùm phonton tới phải bị tán xạ trở lại dọc theo phương chùm tới với năng lượng không thay đổi vì năng lượng và xung lượng bảo toàn. Năng lượng và xung lượng của photon biến đổi theo công thức

$$W'\cos\theta' = \gamma W(\cos\theta-\beta), \qquad W'\sin\theta' = W\sin\theta\,,$$

hay

$$\mathrm{tg}\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta-\beta)}\,, \quad (2)$$

và

$$W = \gamma(1+\beta\cos\theta')W' \approx \left[\frac{E}{mc^2}(1+\cos\theta')-\frac{mc^2}{2E}\cos\theta'\right]W'\,. \quad (3)$$

Từ phương trình (1) ta thấy W' đạt giá trị cực đại khi $\cos\theta = -1$ hay $\theta = \pi$ và giá trị cực đại này bằng

$$W'_{\max} \approx \frac{2E}{mc^2}\,.$$

Từ phương trình (2) ta có $\theta' = \pi$. Photon bị tán xạ trở lại nên sau va chạm thì $\theta' = 0$. Thay kết quả này vào phương trình (3) ta tìm được giá trị năng lượng tương ứng trong hệ quy chiếu L là

$$W_{\max} \approx \frac{2E}{mc^2}W'_{\max} \approx \left(\frac{2E}{mc^2}\right)^2 W\,.$$

Hoàn toàn tương tự, W' đạt giá trị cực tiểu khi $\cos\theta = 1$, hay $\theta = 0$, và giá trị cực tiểu này bằng

$$W'_{\min} \approx \frac{mc^2}{2E}W, \qquad \theta' = 0\,.$$

Sau quá trình tán xạ $\theta' = \pi$ và năng lượng cực tiểu của photon trong hệ quy chiếu L là

$$W_{\min} \approx \frac{mc^2}{2E}W'_{\min} \approx \left(\frac{mc^2}{2E}\right)^2 W\,.$$

Bài tập và lời giải của các
Trường Đại học nổi tiếng Hoa Kỳ

Bộ sách gồm 7 cuốn:

Bài tập và lời giải

1. Cơ học
2. Cơ học lượng tử
3. Quang học
4. Nhiệt động lực học và vật lý thống kê
5. Điện từ học
6. Vật lý nguyên tử, hạt nhân và các hạt cơ bản
7. Vật lý chất rắn, thuyết tương đối và các vấn đề liên quan

Bộ sách tuyển chọn 2550 bài tập từ các bài thi kiểm tra chất lượng và kiểm tra đầu vào của các trường đại học nổi tiếng ở Hoa Kỳ, bao quát toàn diện các vấn đề của vật lý học. Các câu hỏi trải rộng trên nhiều chủ đề, có những bài vận dụng nhiều lĩnh vực khác nhau của vật lý, áp dụng linh hoạt nhiều nguyên lý và định luật vật lý, đưa ra các tình huống sát thực và cập nhật, không đòi hỏi nhiều các kỹ năng về toán.

Các lời giải được đưa ra để gợi ý sinh viên tự giải quyết vấn đề hơn là hướng dẫn thao tác từng bước.

Bộ sách là tài liệu tham khảo quý bổ trợ cho các sách giáo khoa, giáo trình chuyên ngành vật lý.

Công ty cổ phần Sách dịch và Từ điển Giáo dục
25 Hàn Thuyên - Hai Bà Trưng - Hà Nội
Tel/Fax: 04.39726508 - 04.38266359
www.tudiengiaoduc.com.vn
Mua sách tại: www.sach24.vn; www.vinabook.com

BT và lời giải cơ học
1709090000007
128,000

Giá: 128.000 đ