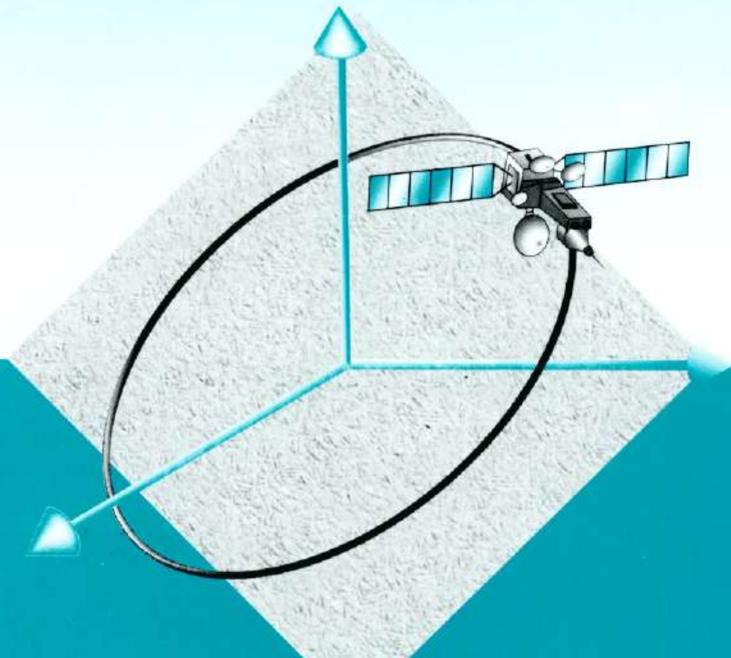
P.F.I.E.V

CƠ HỌC
1



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

HACHETTE
Supérieur

"***Cuốn sách này được xuất bản trong khuôn khổ Chương trình Đào tạo Kĩ sư Chất lượng cao tại Việt Nam, với sự trợ giúp của Bộ phận Văn hóa và Hợp tác của Đại Sứ quán Pháp tại nước Cộng hòa Xã hội Chủ nghĩa Việt Nam***".

*

* *

"***Cet ouvrage, publié dans le cadre du Programme de Formation d'Ingénieurs d' Excellence au Vietnam bénéficie du soutien du Service Culturel et de Coopération de l'Ambassade de France en République socialiste du Vietnam***".

- CH$_1$

Cơ học I

(Tái bản lần thứ năm)

Dưới sự hướng dẫn của

JEAN - MARIE BRÉBEC
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Saint - Louis ở Paris

PHILIPPE DENÈVE
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Henri - Wallon ở Valenciennes

THIERRY DESMARAIS
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Sainte - Marrie - Fénelon ở Paris

MARC MÉNÉTRIER
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Thiers ở Marseille

BRUNO NOËL
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Champollion ở Grenoble

CLAUDE ORSINI
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Dumont - d'Urville ở Toulon

Năm thứ nhất

MPSI - PCSI

PTSI

Người dịch : LÊ BĂNG SƯƠNG

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Mécanique I

Sous la dirction de

JEAN-MARIE BRÉBEC
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Saint-Louis à Paris

PHILIPPE DENÈVE
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Henri-Wallon à Valenciennes

THIERRY DESMARAIS
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Sainte-Marie-Fénelon à Paris

MARC MÉNÉTRIER
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Thiers à Marseille

BRUNO NOEL
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Champollion à Grenoble

CLAUDE ORSINI
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Dumont-d'Urville à Toulon

1re année
MPSI - PCSI
PTSI

HACHETTE
Supérieur

Lời nói đầu

Bộ giáo trình này có liên quan đến các chương trình mới của các lớp dự bị vào các trường đại học (Grandes Ecoles), được áp dụng cho kì tựu trường tháng 9/1995 đối với các lớp năm thứ nhất MPSI, PCSI và PTSI, và cho kì tựu trường tháng 9/1996 đối với các lớp năm thứ hai MP, PC, PSI.

Theo tinh thần của các chương trình mới, bộ giáo trình này đưa ra một sự đổi mới trong việc giảng dạy môn Vật lí ở các lớp dự bị đại học.

• Trái với truyền thống đã in sâu đậm nét, theo đó Vật lí bị xếp vào hàng môn học thứ yếu sau Toán học, các hiện tượng đã bị che lấp bởi khía cạnh tính toán, các tác giả đã cố gắng sắp xếp để đặt Toán học vào đúng chỗ của nó bằng cách ưu tiên dẫn dắt tư duy và lập luận Vật lí, đồng thời nhấn mạnh lên các tham số có ý nghĩa và các hệ thức kết hợp chúng.

• Vật lí là một môn khoa học thực nghiệm nên phải được giảng dạy theo tinh thần đó. Các tác giả đã quan tâm đặc biệt đến việc mô tả các thiết bị thí nghiệm nhưng vẫn không bỏ qua khía cạnh thực hành. Mong sao những cố gắng của các tác giả sẽ thúc đẩy thày và trò cải tiến hoặc sáng tạo nên các thí nghiệm luôn tràn đầy tính sáng tạo.

• Vật lí không phải là một khoa học coi thường vật chất, chỉ chú trọng lí thuyết mà dửng dưng với thực tế công nghệ. Mỗi khi vấn đề được nêu lên, các tác giả đều dành chỗ xứng đáng cho các áp dụng khoa học hay công nghiệp, đặc biệt để thúc đẩy các nhà nghiên cứu và kĩ sư tương lai.

• Vật lí không phải là một khoa học thiếu tính độc đáo và vĩnh hằng, mà là sản phẩm của một thời đại, không tự tách ra khỏi phạm vi hoạt động của con người.

Các tác giả không coi thường các cứ liệu về lịch sử các khoa học trong việc mô tả sự tiến triển của các mô hình lí thuyết cũng như để thay thế các thí nghiệm trong bối cảnh của chúng.

Nhóm tác giả mà Jean-Marie Brébec phối hợp, gồm các giáo sư các lớp dự bị rất từng trải, đã có một bề dày kinh nghiệm trong các kì thi tuyển vào các trường đại học và có năng lực khoa học cao được mọi người nhất trí công nhận. Nhóm này đã cộng tác chặt chẽ với các tác giả của các bộ giáo trình của Durandeau và Durupthy cho các trường trung học phổ thông. Sách cho các lớp dự bị đã kế tiếp hoàn hảo sách ở cấp trung học cả về hình thức lẫn nội dung.

Chúng tôi bảo đảm rằng các cuốn sách này là những công cụ quý báu cho sinh viên để chuẩn bị có hiệu quả cho các kì thi tuyển, cũng như để có được một sự trau dồi khoa học vững chắc.

J.P.DURANDEAU

Mục lục

ĐỘNG HỌC 1

Mở đầu

Động học là một môn cơ học chuyên nghiên cứu mô tả chuyển động.

Các khái niệm không gian, thời gian và chuyển động là những khái niệm rất phổ biến, nhưng không được mô tả chính xác và định lượng ngay. Để đạt tới trạng thái hiện nay của động học, người ta đã phải tự đề ra và giải quyết một loạt các vấn đề vừa có tính khái niệm, vừa có tính kĩ thuật.

Vậy làm thế nào để đánh dấu chính xác một biến cố trong không gian và thời gian ?

Làm thế nào để đo được thời gian ?

Và chuyển động là gì ?

Việc thấu hiểu ngày càng tinh tế này về các hiện tượng vật lí phải đi song hành với việc hiệu chỉnh các phương pháp toán học thích hợp.

MỤC TIÊU

- Xác định vị trí một biến cố trong không gian và thời gian.
- Các hệ tọa độ thường dùng.
- Đạo hàm của một đại lượng vectơ.
- Khái niệm về hệ quy chiếu.
- Các biểu thức vectơ vận tốc và vectơ gia tốc của một động điểm.
- Xác định quỹ đạo và thời gian quãng đường đi.

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

- Phép tính vectơ.

Các khái niệm về không gian, thời gian và chuyển động

I.I. Các quan niệm cổ điển

Sự tiếp cận ngày càng chặt chẽ về mặt định lượng của cơ học đã được tiến hành trong các thế kỷ XVII - XIX để tạo thành lí thuyết cơ học gọi là cơ học cổ điển áp dụng cho mọi vật thể thông thường. Ở thế kỷ XX, việc nghiên cứu các nguyên tử, các hạt sơ cấp và một số hiện tượng thiên văn đã dẫn đến việc hình thành các lí thuyết khác : cơ học lượng tử và thuyết tương đối.

I.I.I. Đo khoảng cách và thời gian

Nói chung, đo một đại lượng bất kì có nghĩa là đếm số lần mà đại lượng đó chứa đựng một mẫu chuẩn tương ứng.

Đối với khoảng cách, thì thao tác đó là khá tự nhiên, vì mẫu chuẩn có thể được cụ thể hóa dưới dạng một cái thước chia độ.

Các tiến bộ khoa học kĩ thuật đã cho phép xác định được các mẫu chuẩn càng ngày càng chính xác, phổ biến và có thể tái tạo được.

Thao tác đo thời gian lại tỏ ra tinh tế hơn nhiều, vì ta không thể so sánh trực tiếp hai khoảng thời gian khác nhau.

Chuẩn thời gian chỉ có thể được định nghĩa như chu kì của một hiện tượng mà ta có thể tiên đề hóa tính tuần hoàn của nó.

Phép đo chính xác các khoảng thời gian ngắn hơn một ngày chỉ có thể được thực hiện nhờ sự phát hiện ra tính đều đặn của các chuyển động con lắc vào thế kỉ XVII.

Hiện nay, giây được định nghĩa là "9.192.634.770 chu kì của bức xạ điện từ, tương ứng với sự chuyển dời giữa hai mức siêu tinh tế của trạng thái cơ bản của xezi - 133" và mét là "chiều dài quãng đường mà ánh sáng đi qua chân không trong $\frac{1}{299792458}$ giây".

I.I.2. Tính tương đối của chuyển động

Cho đến tận cuối thời Trung cổ, người ta vẫn coi Vũ trụ vận hành chung quanh Trái Đất đứng im là điều tất yếu. Như vậy đứng yên hay chuyển động có một ý nghĩa tuyệt đối. Rất muộn về sau, mới rõ ra là các khái niệm đó chỉ có thể được xác định một cách tương đối với từng người quan sát.

Hai người quan sát khác nhau sẽ nhận thấy hai chuyển động khác nhau đối với cùng một vật chuyển động.

- đối với người hành khách trên xe lửa thì cửa kính đứng yên, còn phong cảnh chạy diễu qua cửa sổ ;
- nhưng hiện tượng trên không còn đúng đối với người đang dạo chơi đứng lại nhìn xe lửa chạy qua.

Thành thử chuyển động được quan sát tùy thuộc vào người quan sát. Tuy nhiên, theo lí thuyết cổ điển thì không có bất cứ cái gì phụ thuộc vào người quan sát cả : dù là chiều dài của một cái thước hay đó là khoảng thời gian ngăn cách giữa hai biến cố.

I.I.3. Vận tốc và gia tốc

Nếu trên bình diện định tính, các khái niệm này được hình thành một cách trực tiếp cụ thể, thì vấn đề lại trở nên tế nhị hơn nhiều khi xác định cho chúng một ý nghĩa định lượng chặt chẽ. Ý tưởng về vận tốc tức thời và gia tốc mà GALILÉE ước đoán đã được gắn với khái niệm toán học là đạo hàm do NEWTON và LEIBNIZ đưa vào.

GALILÉE cũng đã có ý tưởng phân tích chuyển động của một viên bi trong trường trọng lực thành một thành phần thẳng đứng và một thành phần nằm ngang. Trong thí nghiệm này, ông nhận thấy rằng vận tốc nằm ngang gần như không đổi và vận tốc thẳng đứng tăng đều (*H.1*).

Theo ngôn ngữ hiện đại, thì vấn đề là phép gần đúng bậc nhất của đặc tính các vectơ vị trí, vận tốc, gia tốc của một điểm.

H.1. *GALILÉE. Ông đã nghiên cứu chuyển động của một viên bi được phóng đi với vận tốc cho trước từ một mặt bàn ở độ cao thay đổi.*

I.2. Thuyết tương đối

Năm 1905, Albert EINSTEIN đưa ra một lí thuyết làm đảo lộn các khái niệm về không gian và thời gian.

Theo thí nghiệm, thì vận tốc ánh sáng trong chân không, độc lập với chuyển động của người quan sát đang đo nó. Muốn giải thích kết quả nghịch lí này, ta phải từ bỏ khái niệm thông thường về thời gian. Trái ngược với điều mà lí thuyết cổ điển đã tiên đề hóa và trái ngược với tính hiển nhiên trực tiếp, hai người quan sát có chuyển động tương đối với nhau, không đo được cùng một khoảng thời gian như nhau giữa hai biến cố. Theo thuyết tương đối, thì không có một không gian ba chiều và một thời gian độc lập với nhau, mà chỉ có một không - thời gian bốn chiều, trong đó thời gian tác động như một tọa độ phụ.

Lí thuyết cổ điển và thuyết tương đối hẹp năm 1905 giả thiết có một không gian với những tính chất hình học hoàn toàn xác định, mà trong đó các vật thể, liên kết với nhau theo các định luật tương tác, đang di động.

EINSTEIN đã đào sâu các công trình của mình và công bố vào năm 1916 thuyết tương đối rộng làm tiêu tan sự ngăn cách giữa hình học và cơ học. Các tính chất hình học của không gian (ví dụ khái niệm về khoảng cách) phụ thuộc vào số lượng vật chất hiện có.

Các kết luận của thuyết tương đối dường như mâu thuẫn với thí nghiệm thường ngày, nên EINSTEIN, trước tiên đã bị nhân danh sự hiển nhiên và lương tri phản bác. Thực tế, có thể bỏ qua các hiệu ứng nghịch lí đó chừng nào mà các vận tốc tương đối vẫn còn nhỏ hơn nhiều vận tốc ánh sáng và mật độ vật chất chưa đạt tới các giá trị khổng lồ mà người ta có thể tìm thấy trong các hố đen. Ngược lại, các bài toán gắn liền với các hạt sơ cấp thực tế chỉ có thể được giải quyết trong khuôn khổ của thuyết tương đối. Ta cũng cảnh báo rằng sự trệch chậm rãi ra khỏi quỹ đạo của sao Thuỷ chỉ có thể được giải thích nhờ thuyết tương đối rộng.

Cơ học cổ điển (đối lập với thuyết tương đối) vẫn là một phép gần đúng tuyệt vời ở các vận tốc và các mật độ khối thông thường.

I.3. Cơ học lượng tử

Một cuộc cách mạng lớn lao khác về khái niệm ở thế kỷ XX được đề xuất, trước hết cũng là để giải thích sự phát xạ và hấp thụ ánh sáng bởi các nguyên tử. Trên thực tế, lí thuyết cơ lượng tử đã cho phép hiểu được một cách thỏa đáng các nguyên tử và hạt sơ cấp.

Các tiên đề, phương pháp và kết quả của cơ lượng tử dường như tất cả cũng đều nghịch lí, và nếu không nghịch lí hơn các tiên đề, phương pháp và kết quả của thuyết tương đối cũng bởi vì ta không thể quan sát được những sai lệch giữa cơ học lượng tử và cơ học cổ điển ở quy mô tỉ lệ của chúng ta.

Kết quả đo một số đại lượng (ví dụ năng lượng) chỉ có thể có vài giá trị, xác định bởi các số nguyên : các đại lượng này đã bị lượng tử hóa, do đó có tên cơ học lượng tử.

Khoảng cách giữa các giá trị cho phép, nhỏ đến mức mà ta không thể quan sát được sự lượng tử hóa đó đối với các vật thể thông thường.

H.2. *A. EINSTEIN* (1879-1955)

Ngay cả khái niệm vị trí và vận tốc, hoàn toàn có thể đánh dấu được, cũng phải bị từ bỏ. Chỉ có thể tiên đoán được một xác suất hiện diện, xác định bởi một sóng kết hợp với từng vật thể.

Thành thử, ánh sáng có thể biểu hiện dưới dạng một sóng (bức xạ điện từ) hay dưới dạng một dòng hạt (photon), và đối tính đó được mở rộng cho mọi vật thể.

Bước sóng kết hợp λ được xác định bởi hệ thức de BROGLIE (1923) :

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

với p là động lượng và $h \approx 6{,}6.10^{-34}\,J.s^{-1}$ (hằng số PLANK).

Chú ý :

Đối với các vật thể thông thường, thì bước sóng quá nhỏ đến mức không thể quan sát được dáng vẻ sóng của nó.


PRINCIPES
MATHÉMATIQUES
DE LA
PHILOSOPHIE NATURELLE,
Par feue Madame la Marquise DU CHASTELLET.
TOME PREMIER.
A PARIS,
Chez { DESAINT & SAILLANT, rue S. Jean de Beauvais, LAMBERT, Imprimeur-Libraire, rue & à côté de la Comédie Françoise, au Parnasse.
M. DCCLIX.
AVEC APPROBATION ET PRIVILÉGE DU ROI.

H.3.

Không thể đo đồng thời một vài cặp đại lượng nào đó với cùng một độ chính xác tùy ý như nhau.

Thành thử, đối với một hạt chuyển động dọc theo trục (x'x), thì độ bất định Δx về vị trí và độ bất định Δp_x về động lượng $p_x = mv_x$ của nó, liên kết với nhau theo hệ thức bất định HEISENBERG :

$$\Delta x \Delta p_x \approx h$$

Độ bất định này không biểu hiện rõ ở qui mô tỉ lệ của chúng ta vì giá trị của hằng số Plank h. Tuy nhiên nó trở thành quan trọng để nghiên cứu một electron có khối lượng $m_e = 9.10^{-31}$kg ở trong một nguyên tử có kích thước vào cỡ 10^{-10}m.

Cơ học cổ điển (nghĩa là phi tương đối tính và phi lượng tử) là lí thuyết áp dụng thích hợp cho các vật thể vĩ mô thông thường. Đây chính là lí thuyết sẽ được phát triển trong phần tiếp sau của cuốn sách này.

I.4. Một số sự kiện

• Năm 1638, GALILÉE xuất bản cuốn "*Luận giải và chứng minh toán học liên quan tới hai khoa học mới*".

Cuốn sách này một phần bàn về sức bền vật liệu, một phần về chuyển động của các vật có trọng lượng. Ông đã trình bày các quan sát theo ngôn ngữ toán học chính xác, định nghĩa định lượng vận tốc và đưa vào khái niệm chuyển động nhanh dần đều.

• Năm 1657, HUYGENS đã chế tạo ra chiếc đồng hồ quả lắc đầu tiên, và hai năm sau, sáng chế ra chiếc đồng hồ quả lắc và lò xo xoắn ốc đầu tiên.

• Năm 1687, NEWTON xuất bản cuốn "*Những nguyên lí toán học của triết học tự nhiên*" (*H.3*). Công trình này chủ yếu trình bày cơ sở của cơ học cổ điển ; ông định nghĩa các khái niệm về lực và gia tốc và chứng tỏ rằng chuyển động của các hành tinh có thể được giải thích bằng tương tác hấp dẫn.

• Ở thế kỷ XVIII và đầu thế kỷ XIX, các nhà cơ học như d'ALAMBERT, LAGRANGE và CORIOLIS đã hoàn thành việc hình thức hóa lí thuyết với các khái niệm toán học rất gần gũi với các khái niệm đang được sử dụng hiện nay.

• Năm 1905, EINSTEIN công bố bài báo đầu tiên về thuyết tương đối.

• Trong khoảng từ 1900 đến 1930, người ta đã xây dựng nên những cơ sở của cơ học lượng tử.

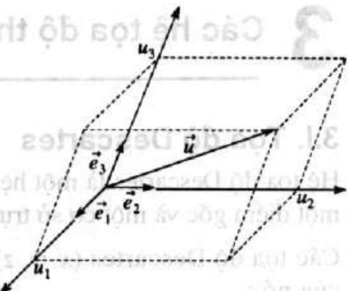
2 Xác định vị trí của một điểm

2.l. Vectơ vị trí

Theo cơ học cổ điển, các vật thể vận động trong không gian ba chiều của hình học Euclide.

Nếu xác định được một điểm gốc O, thì một điểm M sẽ được xác định vị trí bởi vectơ vị trí của nó :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM}.$$



H.4. *u_1, u_2 và u_3 là các thành phần của $\vec{U}$ trong cơ sở $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.*

2.2. Cơ sở vectơ

Trong không gian ba chiều, một cơ sở vectơ chuẩn hóa là một tập hợp ba vectơ đơn vị không đồng phẳng : $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ *(H.4)*.

Nếu cơ sở $\mathscr{B}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ được cho trước, thì một vectơ sẽ được phân tích theo một cách duy nhất :

$$\vec{U} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3.$$

Ba số thực (u_1, u_2, u_3) là các thành phần của vectơ $\vec{u}$ trong cơ sở $\mathscr{B}$. Cơ sở $\mathscr{B}$ là trực giao chuẩn hóa nếu $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, và $\vec{e}_3$ là các vectơ đơn vị trực giao và cơ sở sẽ là thuận nếu :

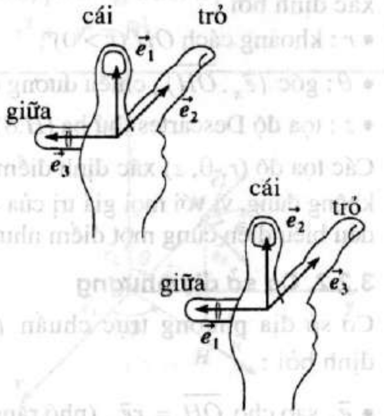
$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$$

hay $$\vec{e}_1 = \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3$$

hay $$\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1.$$

Thực tế, ta cần nhớ rằng : một cơ sở trực giao chuẩn hóa được gọi là thuận khi ta có thể xếp chồng các vectơ $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ và $\vec{e}_3$ lần lượt lên ngón tay cái, ngón tay trỏ và ngón tay giữa của bàn tay phải *(H.5)*.

Nói chung, ta sẽ dùng các cơ sở trực giao chuẩn hóa thuận (gọi tắt là trực chuẩn thuận).



H.5. *Một số cơ sở trực giao chuẩn hóa thuận.*

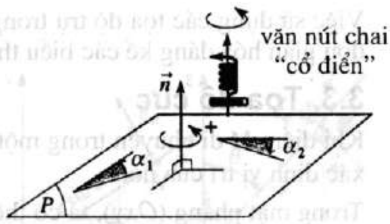
2.3. Góc ở trong một mặt phẳng

Sự đo một góc phụ thuộc vào chiều dương đã chọn của một phép quay.

Trong hình học phẳng, ta có thể xác định được một chiều dương quy ước ("chiều lượng giác", ngược với "chiều kim giờ"). Trái lại, trong không gian, một góc trên mặt phẳng P được định hướng theo chiều lượng giác hay chiều kim giờ tùy thuộc vào người quan sát "ở trên" hay "ở dưới" mặt phẳng đó.

Như vậy, cần phải xác định một chiều dương, độc lập với vị trí của người quan sát.

Theo quy ước, hướng của pháp tuyến với một mặt phẳng sẽ được định hướng bởi một vectơ đơn vị $\vec{n}$. Một cái vặn nút chai thường dùng, khi tiến theo chiều của $\vec{n}$, sẽ quay theo chiều dương *(H.6)*. Đây là quy ước tổng quát gắn sự định hướng của một pháp tuyến với một mặt với một chiều dương của phép quay. Quy ước này được dùng trong mọi lĩnh vực của vật lí.



H.6. *Sự định hướng của các góc trên mặt phẳng P : $\alpha_1 > 0$ và $\alpha_2 < 0$*

2.4. Hệ tọa độ

Một hệ tọa độ trong không gian $(O\,;\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ được cấu thành bởi một điểm gốc và một cơ sở vectơ chuẩn hóa.

Khi đã xác định được một hệ tọa độ, thì chỉ cần ba tọa độ là đủ để xác định vị trí của một điểm.

Có nhiều quy ước để xác định chính xác vị trí của một điểm bằng ba số thực mà không nhầm lẫn.

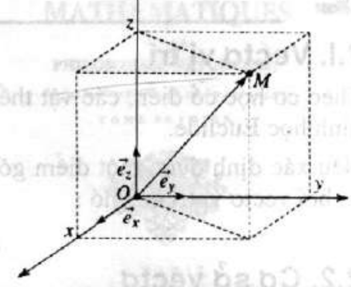
3 Các hệ tọa độ thường dùng

3.I. Tọa độ Descartes

Hệ tọa độ Descartes là một hệ tọa độ trực chuẩn thuận, được xác định bởi một điểm gốc và một cơ sở trực chuẩn thuận $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ *(H.7)*.

Các tọa độ Descartes (x, y, z) của M là các thành phần của vectơ vị trí của nó :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$



H.7. *Tọa độ Descartes*
$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$.

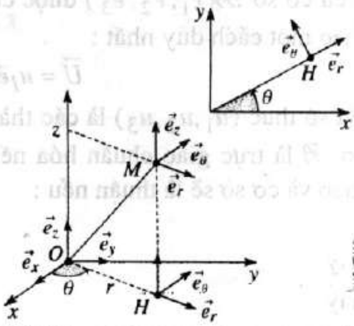
3.2. Tọa độ trụ

3.2.I. Xác định vị trí của một điểm

Cho một hệ tọa độ Descartes $(O; \vec{e}_x; \vec{e}_y; \vec{e}_z)$. H là hình chiếu trực giao của M lên mặt phẳng (Oxy). Các tọa độ trụ (r, θ, z) của điểm M được xác định bởi :

- r : khoảng cách OH $(r > 0)$;
- θ: góc $(\vec{e}_x, \overrightarrow{OH})$, chiều dương của θ được xác định bởi $\vec{e}_z$;
- z : tọa độ Descartes thứ ba *(H.8)*.

Các tọa độ (r, θ, z) xác định điểm M một cách duy nhất, nhưng đảo lại thì không đúng, vì với mọi giá trị của số nguyên n, thì (r, θ, z) và $(r, \theta + 2n\pi, z)$ đều biểu diễn cùng một điểm như nhau.



H.8. *Tọa độ trụ :*
$\overrightarrow{OH} = r\vec{e}_r$; $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$

3.2.2. Cơ sở địa phương

Cơ sở địa phương trực chuẩn $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ gắn với điểm M được xác định bởi :

- $\vec{e}_r$ sao cho $\overrightarrow{OH} = r\vec{e}_r$ (nhớ rằng : $r \geq 0$) ;
- $\vec{e}_\theta = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r$.

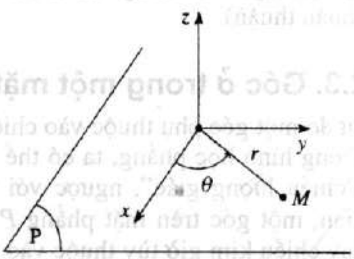
<u>*Chú ý :*</u>

- *$\vec{e}_r$ và $\vec{e}_\theta$ đều song song với mặt phẳng (Oxy) ;*
- *$\vec{e}_\theta$ chỉ về chiều các góc θ tăng.*

Tính hay thay đổi của cơ sở địa phương (nó thay đổi theo vị trí của M) tuyệt không ngăn cấm việc biểu thị theo cơ sở này các tọa độ của một vectơ liên quan tới điểm M. Thành thử, vectơ vị trí được viết là :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

Việc sử dụng các tọa độ trụ trong một vài trường hợp, có thể dẫn đến việc đơn giản hóa đáng kể các biểu thức so với các tọa độ Descartes.



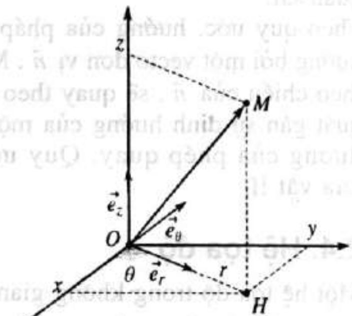
H.9. *Tọa độ cực.*

3.3. Tọa độ cực

Khi điểm M di chuyển trong một mặt phẳng thì chỉ cần hai tọa độ là đủ để xác định vị trí của nó.

Trong mặt phẳng (Oxy), ta có thể dùng các tọa độ Descartes (x, y) hay tọa độ cực (r, θ) *(H.9)*.

Chiều thứ ba (z) không hiện ra trực tiếp nhưng các tích vectơ của hai vectơ trong mặt phẳng (Oxy) đều thẳng hàng (cộng tuyến) với $\vec{e}_z$ *(H.10)*.



H.10. *Hệ thức giữa các tọa độ trụ và tọa độ Descartes :*
$x = r\cos\theta$; $y = r\sin\theta$.

3.4. Hệ thức giữa các tọa độ trụ (hay cực) và Descartes.

Các hệ thức sau đây được trực tiếp suy ra từ các định nghĩa (H.10) :

$$\vec{e}_r = \cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y \; ; \qquad \vec{e}_\theta = -\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y \; ;$$

$$x = r\cos\theta \; ; \; y = r\sin\theta \; ; \; r = \sqrt{x^2 + y^2} \; .$$

Áp dụng 1

Hình trụ tròn xoay

Cho một hình trụ tròn xoay có bán kính R và trục (Oz).

Xác định phương trình của nó theo tọa độ trụ và tọa độ Descartes.

Tập hợp các điểm của hình trụ được xác định bởi :

$$r = R.$$

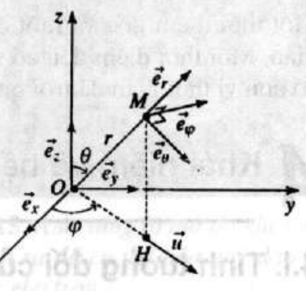
Theo tọa độ Descartes, phương trình trở thành :

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

▸ **Để tập luyện : bài tập 2 và 3.**

3.5. Tọa độ cầu

Cho một hệ tọa độ Descartes *(0; $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$),* một điểm *M* và hình chiếu *H* của nó lên mặt phẳng *(Oxy).*



H.11. *Tọa độ cầu.*

3.5.1. Cơ sở địa phương

Cơ sở địa phương trực chuẩn thuận $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ được xác định bởi *(H.11)* :

- $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$, với $r \geq 0$;
- $\vec{e}_\varphi = \dfrac{\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{OH}}{OH}$;
- $\vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r$.

<u>*Chú ý :*</u>

- $\vec{e}_\varphi$ *song song với mặt phẳng (Oxy).*
- $\vec{e}_\theta$ *song song với mặt phẳng xác định bởi (Oz) và OM (H.11).*

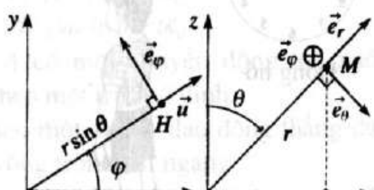
3.5.2. Các tọa độ của một điểm

Các tọa độ cầu (r, θ, φ) của M, theo định nghĩa, là :

- $r = OM$ $(r > 0)$;
- θ : góc $(\vec{e}_z, \vec{e}_r)$ được định hướng bởi $\vec{e}_\varphi$;
- φ : góc $(\vec{e}_x, \overrightarrow{OH})$ được định hướng bởi $\vec{e}_z$.

<u>*Chú ý :*</u>

- $\vec{e}_\theta$ *chỉ về hướng θ tăng và* $\vec{e}_\varphi$ *về hướng φ tăng ;*
- *r không có cùng ý nghĩa như nhau trong tọa độ cầu hoặc tọa độ trụ ;*
- *trong mọi mặt phẳng* $\varphi = cte$, *r và θ là các tọa độ cực của điểm M (H.12).*



H.12. *Các mặt phẳng : z = 0 và φ = cte.*

Các tọa độ địa lí (vĩ độ và kinh độ) đều được suy ra từ các tọa độ cầu :

- (Oz) : trục cực nam - cực bắc ;
- (Ox) : trục cắt xích đạo và kinh tuyến Greenwitch ;
- kinh độ : tọa độ φ được xác định trong khoảng giữa -180° và +180° ;
- vĩ độ λ : $\lambda = 90^o - \theta$;
- $\vec{e}_r$: đường thẳng đứng tại một chỗ (hướng lên cao) ;
- $\vec{e}_\theta$: hướng về phía nam ;
- $\vec{e}_\varphi$: hướng về phía đông.

▸ **Để tập luyện : bài tập 1, 4, 5 và 6.**

3.6. Thời gian

3.6.1. Giả thiết về thời gian tuyệt đối

Thuyết động học cổ điển đã tiên đề hóa rằng thời gian trôi qua như nhau đối với mọi người quan sát. Khoảng thời gian giữa hai biến cố không phụ thuộc vào người quan sát.

3.6.2. Xác định một thời điểm

Một thời điểm gốc và một đơn vị thời gian lập thành một hệ tọa độ thời gian. Mọi thời điểm đều có thể được xác định bởi một số thực t biểu diễn số đơn vị thời gian đã trôi qua tính từ thời điểm gốc.

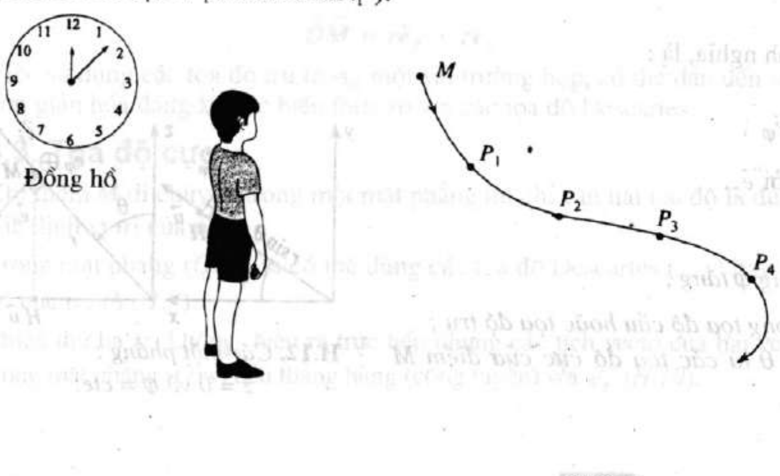
4 Khái niệm về hệ quy chiếu

4.1. Tính tương đối của chuyển động

Chuyển động của một vật thể được nhận thấy theo cách khác nhau bởi hai người quan sát đang chuyển động tương đối với nhau. Như vậy, các đại lượng động học không phải là các đại lượng tuyệt đối, mà là tương đối so với một lớp người quan sát.

4.2. Định nghĩa một hệ quy chiếu

Theo định nghĩa, tập hợp cứng các điểm cố định đối với một người quan sát kết hợp với một đồng hồ, là hệ quy chiếu của người quan sát đó (*H.13*). Ta tiên đề hóa sự tồn tại của hệ quy chiếu này đối với mọi người quan sát, họ có thể vạch được lúc đó một chuyển động ("động tử M đã đi qua điểm cố định P_1 ở thời điểm t_1").



◂ **H.13.** *Hệ quy chiếu của một người quan sát.*

Chú ý :

• Thời gian, với giả thiết là đồng nhất cho mọi người, cùng với tập hợp cứng của các điểm được gắn liền vào một người quan sát là đủ để xác định hệ quy chiếu của người đó.

• Thực tế, chỉ cần một hệ tọa độ không gian gắn vào người quan sát là đủ để đặc trưng cho hệ quy chiếu.

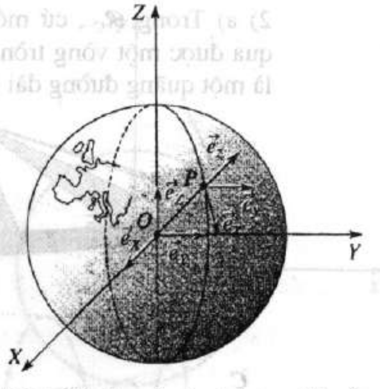
• Tồn tại vô số hệ tọa độ gắn vào một hệ quy chiếu cho trước ; mọi điểm gốc cố định và mọi cơ sở được cấu thành từ các vectơ không đổi, đều phù hợp với người quan sát đó.

Lấy ví dụ hệ quy chiếu Trái Đất $\mathcal{R}_T$ gắn vào mặt đất mà ta giả định là cứng. Trong vô số các hệ tọa độ, ta có thể sử dụng hai tọa độ Descartes $\mathcal{R}_1$ và $\mathcal{R}_2$, cả hai đều gắn vào $\mathcal{R}_T$:

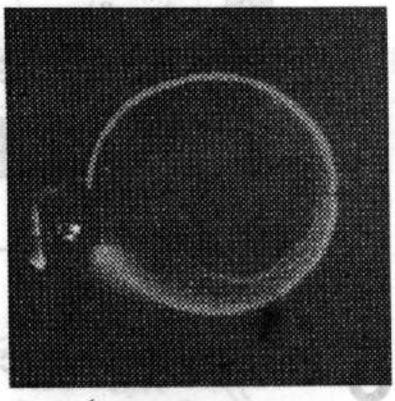
$$\mathcal{R}_1(0;\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)\begin{cases} O : \text{tâm Trái Đất} \\ (Oz) : \text{trục cực bắc - cực nam} \end{cases}$$

$$\mathcal{R}_2(P;\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)\begin{cases} P : \text{điểm gắn vào mặt đất} \\ \vec{e}_z : \text{hướng theo bán kính Trái Đất đi qua } P \\ \vec{e}_x : \text{hướng về phía nam} \\ \vec{e}_y : \text{hướng về phía đông} \end{cases}$$

Thông thường, $\mathcal{R}_1$ được dùng ở quy mô Trái Đất, còn $\mathcal{R}_2$ được sử dụng ở lân cận điểm P (H.14).



H.14. *Ví dụ về các hệ tọa độ gắn vào mặt đất.*



H.15. *Ánh sáng lờ mờ do khí loãng phát ra đã cụ thể hóa quỹ đạo của các electron.*

4.3. Quỹ đạo của một động điểm

Cho $\mathcal{R}$ là một hệ quy chiếu và M là một động điểm, thì ở mỗi thời điểm luôn tồn tại một điểm cố định của $\mathcal{R}$ có vị trí trùng hợp với vị trí của M. Tập hợp các điểm trùng hợp đó tạo thành trong $\mathcal{R}$ một đường liên tục gọi là quỹ đạo của M.

Ý tưởng về quỹ đạo được thể hiện đầy đủ bởi dấu vết mà động điểm để lại: các viên sỏi của cậu bé tí hon là những điểm cố định của hệ quy chiếu Trái Đất và dãy sỏi đó đã cụ thể hóa quỹ đạo của cậu bé.

Quỹ đạo chỉ được xác định đối với một hệ quy chiếu xác định.

Áp dụng 2

Mâm quay

Ở hội chợ phiên, một người quan sát C đứng trên mặt đất nhìn một mâm quay. Người đó quan sát một con ngựa gỗ A chuyển động lên xuống theo đường thẳng đứng so với mâm quay và một xe ôtô mui gấp B, cố định vào mâm quay (H.16).

Cho $\mathcal{R}_A$, $\mathcal{R}_B$ và $\mathcal{R}_C$ là các hệ quy chiếu gắn vào A, B và C. Xe B ở cách trục quay của mâm một khoảng d_B = 5m và người quan sát C ở d_C = 10m.

1) Hãy vạch :

a) Quỹ đạo của A trong $\mathcal{R}_B$ và trong $\mathcal{R}_C$;

b) Quỹ đạo của C trong $\mathcal{R}_B$.

2) Xác định, đối với một vòng của mâm quay :

a) quãng đường B đi qua trong $\mathcal{R}_C$

b) quãng đường C đi qua trong $\mathcal{R}_B$

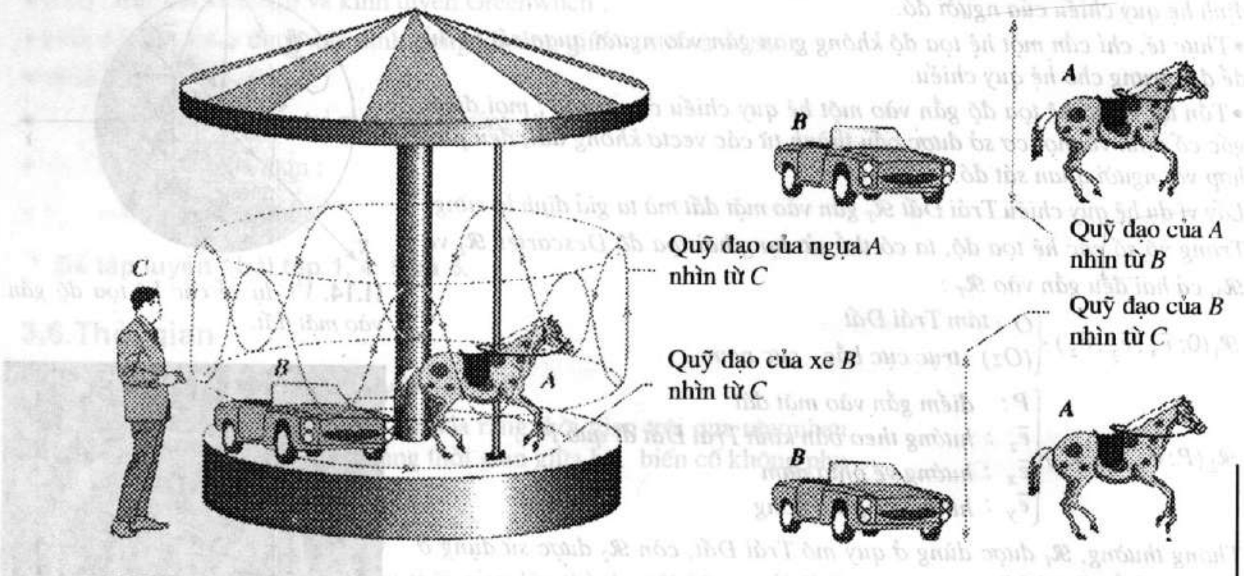
1) a) Trong $\mathcal{R}_B$, A có một chuyển động lên xuống thẳng đứng, dọc theo một trục cố định.

Trong $\mathcal{R}_C$, A đi theo một đường dao động thẳng đứng xung quanh một vòng tròn nằm ngang.

b) $\mathcal{R}_B$ cũng là hệ quy chiếu gắn với mâm quay. C ở cách trục của mâm quay một khoảng cách không đổi. C vạch trong $\mathcal{R}_B$ một vòng tròn bán kính d_C.

2) a) Trong $\mathcal{R}_C$, cứ mỗi vòng, B lại chạy qua được một vòng tròn bán kính d_B, nghĩa là một quãng đường dài 31m.

b) Trong $\mathcal{R}_B$, sau mỗi vòng vị trí của C lại y hệt trước. C vạch một vòng tròn do sự quay của mâm quay, nghĩa là một quãng đường dài 63m.



H.16. *Mâm quay.*

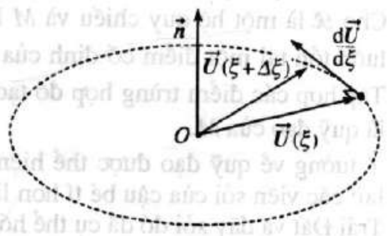
▸ **Để tập luyện : bài tập 13.**

5 Phép lấy đạo hàm của một hàm vectơ

5.I. Định nghĩa

Cho $\vec{U}(\xi)$ là một đại lượng vectơ phụ thuộc vào biến số ξ. Đạo hàm của $\vec{U}$ đối với ξ là (*H.17*) :

$$\frac{d\vec{U}}{d\xi} = \lim_{\Delta\xi \to 0} \frac{\vec{U}(\xi + \Delta\xi) - \vec{U}(\xi)}{\Delta\xi}$$



H.17. *Độ biến thiên của một vectơ có độ dài không đổi, trực giao với* $\vec{n}$.

Đạo hàm của một đại lượng vectơ phụ thuộc vào hệ quy chiếu.

Khi nào cần thiết phải xác định rõ hệ quy chiếu mà trong đó ta thực hiện phép lấy đạo hàm, thì ta kí hiệu $\left(\frac{d\vec{U}}{d\xi}\right)_{/\mathcal{R}}$ là đạo hàm của $\vec{U}$ đối với ξ ở trong $\mathcal{R}$.

Trong cả phần tiếp theo của chương này, $\mathcal{R}$ biểu diễn hệ quy chiếu của người quan sát (hay hệ quy chiếu khảo sát), và hệ tọa độ Descartes $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ là cố định đối với $\mathcal{R}$.

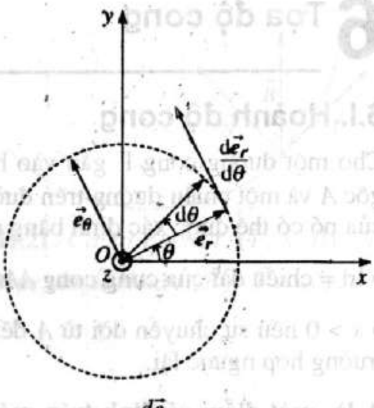
5.2. Tính chất

Ta thừa nhận các tính chất sau đây là những chuyển vị của các tính chất cổ điển của các đạo hàm cho các hàm vectơ :

- nếu $\vec{W}(\xi) = \lambda(\xi)\vec{U}(\xi)$ thì $\frac{d\vec{W}}{d\xi} = \frac{d\lambda}{d\xi}\vec{U} + \lambda\frac{d\vec{U}}{d\xi}$;
- nếu $\vec{W}(\xi) = \vec{U}(\xi) + \vec{V}(\xi)$, thì $\frac{d\vec{W}}{d\xi} = \frac{d\vec{U}}{d\xi} + \frac{d\vec{V}}{d\xi}$;

∘ nếu $A(\xi) = \vec{U}(\xi).\vec{V}(\xi)$, thì $\dfrac{dA}{d\xi} = \dfrac{d\vec{U}}{d\xi}.\vec{V} + \vec{U}.\dfrac{d\vec{V}}{d\xi}$;

• nếu $\vec{W}(\xi) = \vec{U}(\xi) \wedge \vec{V}(\xi)$, thì $\dfrac{d\vec{W}}{d\xi} = \dfrac{d\vec{U}}{d\xi} \wedge \vec{V} + \vec{U} \wedge \dfrac{d\vec{V}}{d\xi}$.



H.18. $\vec{e}_\theta = \dfrac{d\vec{e}_r}{d\theta}$.

5.3. Đạo hàm của một vectơ có độ dài không đổi

Cho $\vec{U}(\xi)$ là một vectơ có độ dài U không đổi. Vectơ này không phải vì thế mà là không đổi, vì hướng của nó có thể thay đổi.

$$\frac{dU^2}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}(\vec{U}.\vec{U}) = 0 \text{. Vậy nên } 2\vec{U}.\frac{d\vec{U}}{d\xi} = 0 \text{.}$$

Đạo hàm của một vectơ có độ dài không đổi thì trực giao với vectơ đó hoặc bằng không. Đó là trường hợp của các vectơ đơn vị.

5.4. Biểu thức đạo hàm theo tọa độ Descartes

Hàm vectơ $\vec{U}(\xi)$ được biểu thị theo :

$$\vec{U} = U_x\vec{e}_x + U_y\vec{e}_y + U_z\vec{e}_z.$$

Vì $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ và $\vec{e}_z$ đều không đổi trong $\mathcal{R}$, nên đạo hàm của $\vec{U}$ trong $\mathcal{R}$ sẽ là :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{d\xi}\right)_{/\mathcal{R}} = \frac{dU_x}{d\xi}\vec{e}_x + \frac{dU_y}{d\xi}\vec{e}_y + \frac{dU_z}{d\xi}\vec{e}_z.$$

5.5. Đạo hàm của các vectơ của cơ sở địa phương trong tọa độ trụ

Xét một điểm *M* chuyển động đối với $\mathcal{R}$ và cơ sở địa phương $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ gắn với *M*.

Đối với một người quan sát gắn với $\mathcal{R}$, các vectơ $\vec{e}_r$ và $\vec{e}_\theta$ phụ thuộc vào θ và đạo hàm của chúng khác không (*H.18*) :

$\vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y$ cho ta : $\left(\dfrac{d\vec{e}_r}{d\theta}\right)_{/\mathcal{R}} = -\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y$;

$\vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y$ cho ta : $\left(\dfrac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}\right)_{/\mathcal{R}} = -\cos\theta\,\vec{e}_x - \sin\theta\,\vec{e}_y$.

Trong tọa độ trụ, các vectơ của cơ sở địa phương phụ thuộc vào θ

$$\left(\frac{d\vec{\mathbf{e}}_r}{d\theta}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{\mathbf{e}}_\theta \text{ và } \left(\frac{d\vec{\mathbf{e}}_\theta}{d\theta}\right)_{/\mathcal{R}} = -\vec{\mathbf{e}}_r.$$

Chú ý là ta đã biểu thị vectơ đạo hàm đối với hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ theo một cơ sở chuyển động đối với $\mathcal{R}$.

Có thể lại tìm thấy các kết quả trên theo cách kém chặt chẽ hơn, nhưng lại cụ thể hơn.

Trong một phép quay nguyên tố dθ, đầu mút vectơ đơn vị $\vec{e}_r$ vạch một đoạn dθ, trực giao với $\vec{e}_r$, nên :

$$d\vec{e}_r = d\theta\vec{e}_\theta \text{ và } \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta; \quad d\vec{e}_\theta = -d\theta\,\vec{e}_r \text{ và } \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r.$$

6 Tọa độ cong

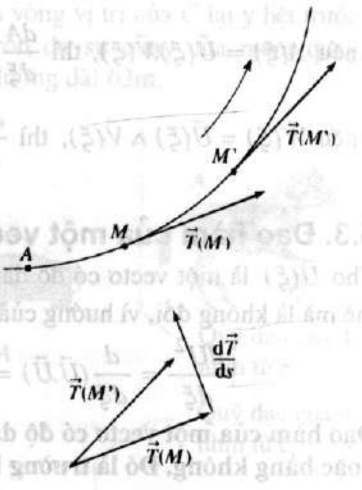
6.1. Hoành độ cong

Cho một đường cong Γ gắn vào hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ (*H.19*). Γ có một điểm gốc *A* và một chiều dương trên đường đi. Vị trí của một trong các điểm *M* của nó có thể được xác định bằng một số thực duy nhất *s* :

• $|s|$ = chiều dài của cung cong *AM* :

• $s > 0$ nếu sự chuyển dời từ *A* đến *M* đi theo chiều dương và $s < 0$ trong trường hợp ngược lại.

A là một điểm cố định trên một đường cong Γ. Hoành độ cong của điểm *M* trên Γ sẽ bằng số đo đại số của cung *AM*.



H.19. *Vectơ đơn vị tiếp tuyến và đạo hàm của nó ; ds = MM'.*

6.2. Vectơ đơn vị tiếp tuyến

Chú ý rằng $\vec{T}$ là vectơ đơn vị tiếp tuyến với đường cong Γ và định hướng theo chiều dương (*H.19*).

Cho một độ dời nguyên tố từ *M*, và *O* là một điểm cố định trong $\mathcal{R}$:

• $d\overrightarrow{OM}$ biểu diễn vectơ độ dời nguyên tố ;

• *ds* biểu diễn số đo đại số của cung mà $d\overrightarrow{OM}$ là dây cung.

Ta thừa nhận rằng $d\overrightarrow{OM} = ds\vec{T}$ và do đó :

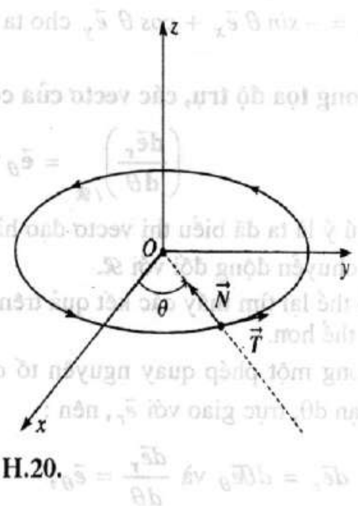
Vectơ đơn vị tiếp tuyến là $\vec{T} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$.

6.3. Bán kính cong

Vectơ đơn vị tiếp tuyến $\vec{T}$, thẳng góc với đạo hàm của nó theo hoành độ cong *s*.

Bán kính cong R và vectơ đơn vị pháp tuyến của quỹ đạo được xác định bởi : $\dfrac{d\vec{T}}{ds} = \dfrac{1}{R}\vec{N}$

Ta sẽ đặt $R \geq 0$. Với quy ước này, $\vec{N}$ luôn luôn hướng vào phía trong của chỗ lõm.



H.20.

Chú ý :

• *Nếu đường cong Γ gần như thẳng, thì phương của $\vec{T}$ biến đổi chậm theo s, nên $\left\|\dfrac{d\vec{T}}{ds}\right\|$ nhỏ và $|R|$ lớn.*

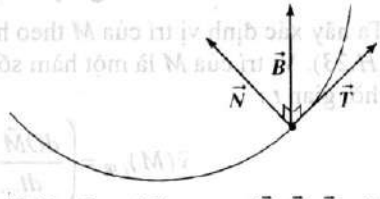
• *Ngược lại, giá trị tuyệt đối của bán kính cong lại nhỏ trên một đường rất cong.*

• *Tên gọi "bán kính cong" bắt nguồn từ R là bán kính của vòng tròn tiếp cận tốt nhất với đường cong ở lân cận điểm M. Đặc biệt, bán kính một vòng tròn trùng với bán kính cong của nó (xem áp dụng 3).*

6.4. Cơ sở địa phương hay cơ sở Frenet

Cho $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$. Cơ sở trực chuẩn thuận $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ theo định nghĩa, là cơ sở FRENET kết hợp với điểm M.

$\vec{B}$ cũng pháp tuyến với Γ và, nếu đường cong là phẳng, thì $\vec{N}$ sẽ ở trong mặt phẳng của đường cong và $\vec{B}$ sẽ pháp tuyến với nó.



H.21. *Cơ sở FRENET $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ là trực chuẩn thuận $(\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N})$.*

Áp dụng 3

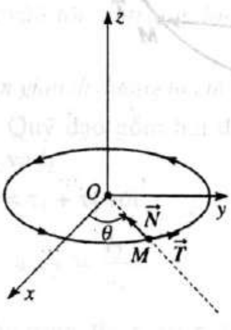
Tọa độ cong trên một vòng tròn

Cho một vòng tròn tâm O, bán kính a và nằm trong mặt phẳng (Oxy).

1) Viết biểu thức của hoành độ cong trên vòng tròn đó theo θ.

2) Xác định cơ sở FRENET đối với một điểm.

3) Xác định bán kính cong tại M.



H.22.

Ta xác định điểm gốc ở A và định hướng vòng tròn (H.22).

1) Hoành độ cong trên vòng tròn này là :

$$s = a\theta \; (\theta \text{ bằng rad}).$$

2) Cơ sở FRENET được suy ra từ cơ sở địa phương $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ của các tọa độ trụ :

$$\vec{T} = \vec{e}_\theta, \; \vec{N} = -\vec{e}_r \text{ và } \vec{B} = \vec{e}_z.$$

3) $\dfrac{d\vec{T}}{ds} = \dfrac{d\vec{T}}{d\theta}\dfrac{d\theta}{ds} = \dfrac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}\dfrac{1}{a} = -\dfrac{\vec{e}_r}{a}$;

nhưng $\dfrac{d\vec{T}}{ds} = \dfrac{1}{R}\vec{N}$, *do đó* $R = a$

7 Vận tốc của một điểm

7.1. Vectơ vận tốc

Cho một điểm cố định O trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}$. Vectơ vận tốc của động điểm M đối với hệ quy chiếu đó là :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}.$$

7.2. Đạo hàm đối với thời gian

Thông thường, việc lấy đạo hàm đối với biến số thời gian được kí hiệu bằng một chấm :

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} \text{ và } \ddot{s} = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

7.3. Biểu thức trong tọa độ cong

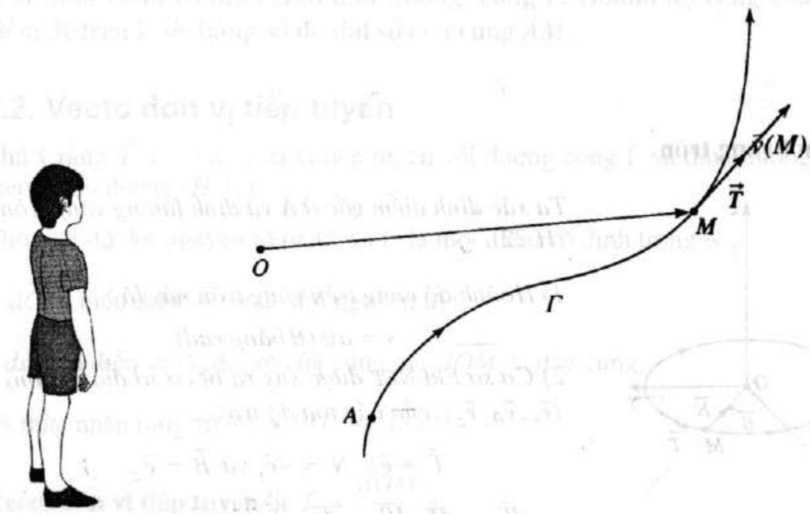
Ta hãy xác định vị trí của M theo hoành độ cong s trên quỹ đạo Γ của nó ($H.23$). Vị trí của M là một hàm số của s ($s = AM$), và s là một hàm số của thời gian t :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}\right)_{/\mathcal{R}} \frac{ds}{dt};$$

nhưng, $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{ds} = \vec{T}$: vectơ đơn vị tiếp tuyến với quỹ đạo ; do đó :

Trong tọa độ cong, vectơ vận tốc có biểu thức :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{s}\vec{T}$$



H.23. *Vectơ vận tốc :* $\vec{v}(M) = \dfrac{dAM}{dt}\vec{T} = \dot{s}\vec{T}$.

Chú ý :

Vectơ vận tốc tiếp tuyến với quỹ đạo.

7.4. Vận tốc (vô hướng)

Đại lượng vô hướng $\dot{s}$ biểu diễn vận tốc theo ý nghĩa thông thường của thuật ngữ, ví như vận tốc đo bằng tốc độ kế ("đồng hồ đo tốc độ") của một chiếc xe.

Kí hiệu vận tốc là $v(M)_{/\mathcal{R}}$, ta có thể đặt :

$$v(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{s} \text{ và } \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = v(M)_{/\mathcal{R}}\vec{T}.$$

Tùy theo ngữ cảnh, từ "vận tốc" có thể chỉ vectơ $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$ hay vô hướng $v(M)_{/\mathcal{R}}$.

7.5. Kí hiệu đơn giản hóa

Khi không xảy ra hiểu nhầm lẫn lộn về hệ quy chiếu và về động tử, thì người ta thường dùng các kí hiệu đã được đơn giản hóa như :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = v\vec{T}.$$

7.6. Trường hợp của chuyển động đều

Một động điểm sẽ chuyển động đều, nếu vận tốc (vô hướng) không đổi. Quãng đường đi l, vận tốc v và thời gian đi đường τ liên kết với nhau theo :

$$l = v\tau.$$

Áp dụng 4

Một chỗ ngoặt nhanh

Một người bộ hành đang đi dạo trên một con đường thẳng thì nhận thấy có một người bù nhìn ở giữa cánh đồng, cách xa đường đi một khoảng cách d. Người đó quyết định lại gần để xem và đi vào cánh đồng ở điểm P (H.24). Người bộ hành có vận tốc v_1 trên đường và vận tốc v_2 trong đồng (v_1 và v_2 đều không đổi).

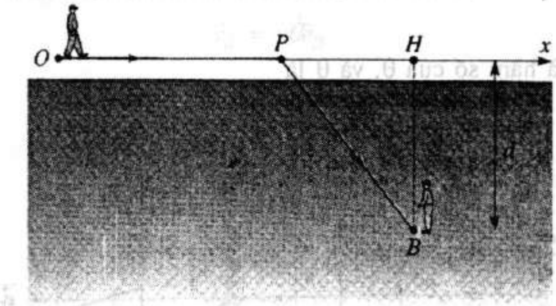
Xác định vị trí của P để thời gian đi đường là cực tiểu.

Cho O là vị trí ban đầu. Quỹ đạo gồm hai đoạn : OP và PB có chiều dài l_1 và l_2.

Thời gian đi đường là $\tau = \tau_1 + \tau_2$ với :

$$\tau_1 = \frac{l_1}{v_1} \text{ và } \tau_2 = \frac{l_2}{v_2}.$$

Đối với một điểm P cho trước thì τ_1 và τ_2 là cực tiểu nếu l_1 và l_2 là cực tiểu, nghĩa là nếu cả hai đoạn đường đó đều thẳng. Gọi H là hình chiếu của B lên con đường, l_0 là chiều dài OH và x là chiều dài PH.



H.24.

τ là hàm số của x :

$$\tau(x) = \frac{l_0 - x}{v_1} + \frac{\sqrt{x^2 + d^2}}{v_2}.$$

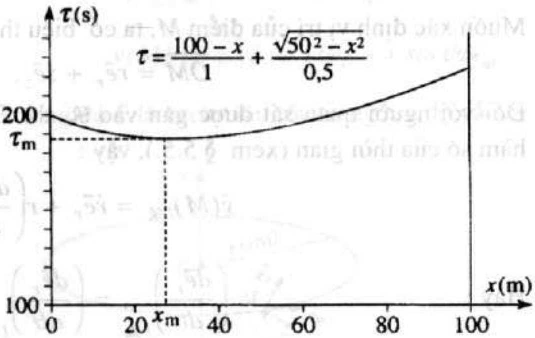
Nghiệm tương ứng với cực tiểu của $\tau(x)$ được xác định bởi $\frac{d\tau}{dx} = 0$, do đó :

$$x = PH = \frac{d}{\sqrt{-1 + \frac{v_1^2}{v_2^2}}} \quad (H.25).$$

Biện luận và kiểm nghiệm :

• Nếu $v_2 > v_1$ thì $\tau(x)$ là một hàm giảm đơn điệu của x. Như vậy người bộ hành sẽ có lợi khi đi vào cánh đồng ngay.

• Nếu v_2 tiến về 0, thì lúc đó, người bộ hành phải giảm cực tiểu đường đi trong đồng và P tiến về H.



H.25. *$\tau(x)$ với $l_0 = 100m$, $d = 50m$, $v_1 = 1{,}0m.s^{-1}$, $v_2 = 0{,}50m.s^{-1}$, $x_m = 29m$ để $\tau_m = 187s$.*

7.7. Biểu thức trong tọa độ Descartes

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z.$$

Trong tọa độ Descartes, vectơ vận tốc $\vec{v}$ có biểu thức :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z.$$

Chú ý :

Các thành phần của vectơ vận tốc là các vận tốc chuyển dời của các hình chiếu của M lên các trục. Trị số của vận tốc có biểu thức :

$$v(M)_{/\mathcal{R}} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

Áp dụng 5

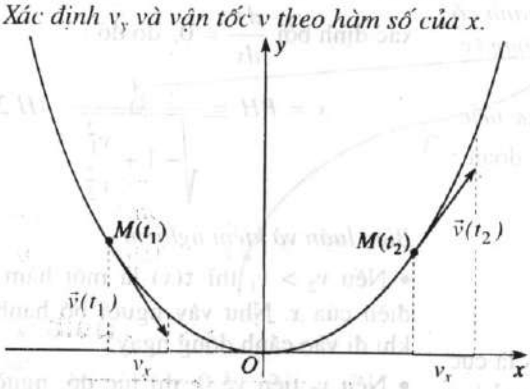
Chuyển động parabôn

Một động điểm M vạch một đường parabôn có phương trình :

$$y = \alpha x^2 (\alpha > 0).$$

Thành phần vận tốc v_x của nó là không đổi.

Xác định v_y và vận tốc v theo hàm số của x.



Tuy không định rõ hệ quy chiếu nhưng đề bà
đã giả định ngầm là các trục (Ox) và (Oy) đề
cố định đối với $\mathcal{R}$ và kí hiệu đơn giản đượ
dùng hợp lệ.

y là hàm số của x và x là hàm số của t, do đó :

$$v_y = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}. \text{ Vậy : } v_y = 2\alpha x v_x ;$$

v_y tăng tuyến tính theo hàm số của x.

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2$$

$$v^2 = v_x^2(1 + 4\alpha^2 x^2).$$

H.26. *Quỹ đạo parabôn.*

7.8. Biểu thức trong tọa độ trụ

Muốn xác định vị trí của điểm M, ta có biểu thức sau đây (*H.27*) :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z.$$

Đối với người quan sát được gắn vào $\mathcal{R}$, thì $\vec{e}_r$ là hàm số của θ, và θ là hàm số của thời gian (xem § 5.5.). vậy :

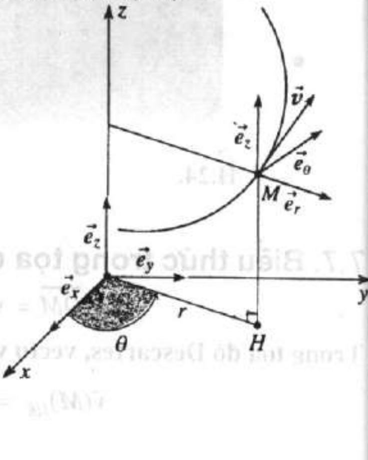
$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} + \dot{z}\vec{e}_z.$$

Hay : $$\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\right)_{/\mathcal{R}} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta,$$ do đó :

Trong tọa độ trụ, vectơ vận tốc có biểu thức :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z.$$

H.27. *Tọa độ trụ.*



Vectơ $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$ được xác định trong $\mathcal{R}$ và ta đã biểu thị vectơ vận tốc đó theo cơ sở địa phương linh động trong $\mathcal{R}$.

Nhất thiết phải phân biệt rõ hệ quy chiếu được định nghĩa và cơ sở của phép chiếu.

▸ **Để tập luyện : ví dụ 7.**

7.9. Sự tổng hợp (hay sự chồng chất) các vận tốc

Vị trí của điểm M trong không gian được xác định bởi ba tọa độ. Có thể chứng minh rằng vectơ vận tốc của M bằng tổng các vectơ vận tốc mà ta sẽ thu được bằng cách làm thay đổi lần lượt, chỉ một trong các tọa độ (*H.28*).

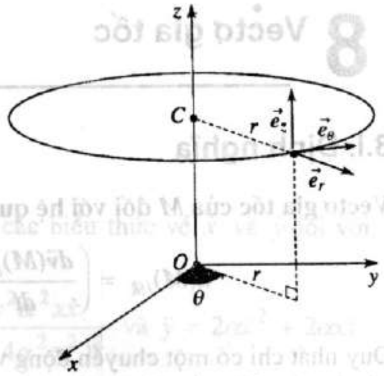
Ta thừa nhận tính chất này và kiểm chứng nó đối với các tọa độ trụ.

- Nếu chỉ duy nhất r biến đổi, thì động điểm vạch một đường thẳng, nghĩa là : $\vec{v}(M)_{/\mathfrak{R}} = \vec{v}_r = \dot{r}\vec{e}_r$.
- Nếu chỉ duy nhất θ biến đổi, thì động điểm vạch một vòng tròn với vận tốc $r\dot{\theta}$ định hướng theo $\vec{e}_\theta$ (*H.28*), nghĩa là : $\vec{v}(M)_{/\mathfrak{R}} = \vec{v}_\theta = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.
- Nếu chỉ duy nhất z biến đổi, thì động điểm vạch một đường thẳng, nghĩa là: $\vec{v}(M)_{/\mathfrak{R}} = \vec{v}_z = \dot{z}\vec{e}_z$.

Biểu thức tổng quát của vectơ vận tốc cho phép kiểm chứng là :

$$\vec{v}(M)_{/\mathfrak{R}} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta + \vec{v}_z$$

Ngay từ bây giờ, cần lưu ý là tính chất chồng chất này không thể trực tiếp áp dụng cho vectơ gia tốc.



H.28. *Quỹ đạo của M khi r và z không đổi.*

Áp dụng 6

Vectơ vận tốc trong tọa độ cầu

Cho hệ tọa độ Descartes $(0; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ gắn với $\mathfrak{R}$, biểu thị $\vec{v}(M)_{/\mathfrak{R}}$ trong tọa độ cầu.

Nếu chỉ mình r biến đổi, thì động điểm vạch một đường thẳng, vậy :

$$\vec{v}_r = \dot{r}\vec{e}_r.$$

Nếu chỉ mình θ biến đổi, thì động điểm vạch một vòng tròn bán kính r với vận tốc $r\dot{\theta}$, nên :

$$\vec{v}_\theta = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta.$$

Nếu chỉ mình φ biến đổi, thì động điểm vạch một vòng tròn bán kính $r\sin\theta$, song song với mặt phẳng (Oxy), với vận tốc góc $\dot{\varphi}$, vậy :

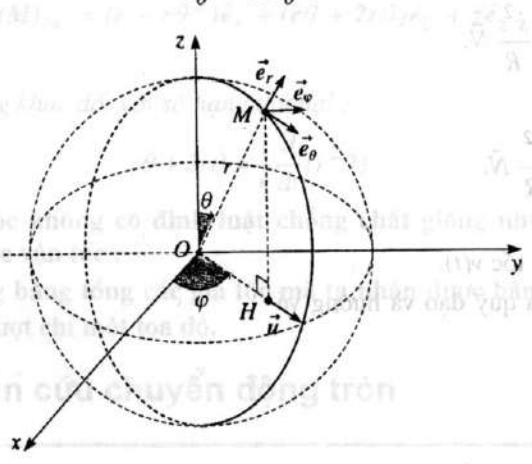
$$\vec{v}_\varphi = r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi.$$

Áp dụng sự chồng chất các vận tốc, ta được :

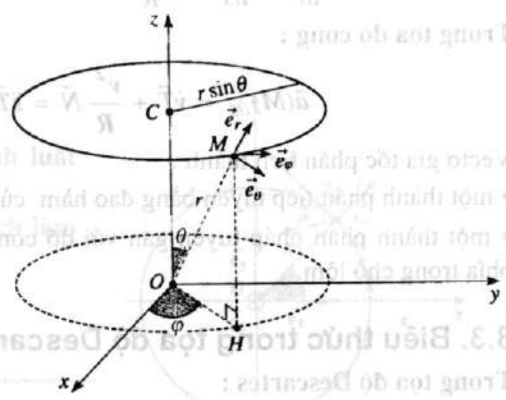
$\vec{v}(M)_{/\mathfrak{R}} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta + \vec{v}_\varphi$, nghĩa là :

$$\vec{v}(M)_{/\mathfrak{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi,$$

trong đó $\vec{v}$ là vectơ vận tốc trong tọa độ cầu.



H.29. *Vòng tròn do M vạch ra khi r và φ không đổi ; mặt phẳng của vòng tròn là mặt phẳng $(0; \vec{u}, \vec{e}_z)$.*



H.30. *Vòng tròn do M vạch ra khi r và θ không đổi.*

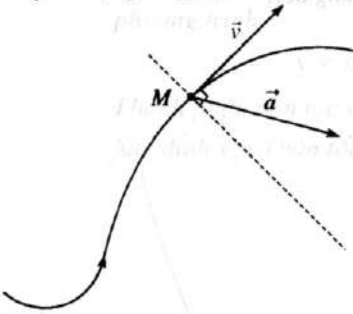
8 Vectơ gia tốc

8.I. Định nghĩa

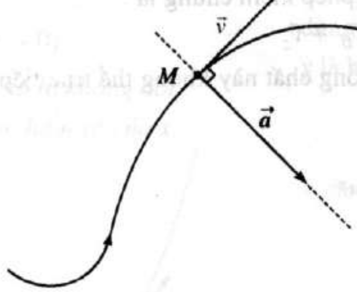
Vectơ gia tốc của *M* đối với hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ là :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{/\mathcal{R}}.$$

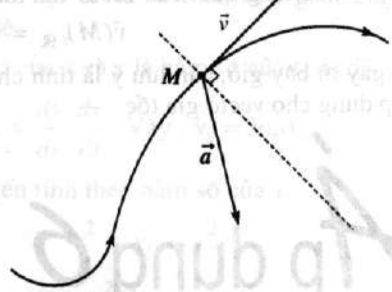
Duy nhất chỉ có một chuyển động vừa thẳng và đều là chuyển động không có gia tốc. Chuyển động đều (vận tốc không đổi), nhưng không thẳng là chuyển động có gia tốc, vì phương của vectơ vận tốc thay đổi *(H.31)*.



H.31a. *Vận tốc v tăng.*



H.31b. *Vận tốc v đều.*



H.31c. *Vận tốc v giảm.*

8.2. Biểu thức trong tọa độ cong

Ta xác định vị trí của một động điểm *M* bằng hoành độ cong *s* trên quỹ đạo của nó cố định trong $\mathcal{R}$.

Cho $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ là cơ sở địa phương của FREMET và *R* là bán kính cong.

$$\vec{v} = \dot{s}\vec{T}, \text{ do đó } \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{s}\vec{T} + \dot{s}\,\frac{d\vec{T}}{dt}.$$

$\vec{T}$ là hàm số của *s* và *s* là hàm số của thời gian *t*, nên :

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{ds}\,\dot{s} = \frac{1}{R}\dot{s}\vec{N} \text{ và } \vec{a} = \ddot{s}\vec{T} + \frac{\dot{s}^2}{R}\vec{N}.$$

Trong tọa độ cong :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{v}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N} = \ddot{s}\vec{T} + \frac{\dot{s}^2}{R}\vec{N}.$$

Vectơ gia tốc phân tích thành :

- một thành phần tiếp tuyến bằng đạo hàm của vận tốc *v(t)*.
- một thành phần pháp tuyến gắn với độ cong của quỹ đạo và hướng về phía trong chỗ lõm.

8.3. Biểu thức trong tọa độ Descartes

Trong tọa độ Descartes :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z.$$

Áp dụng 7

Chuyển động parabôn đều

Một động điểm M vạch một đường parabôn có phương trình :

$$y = \alpha x^2$$

với vận tốc không đổi v.

Xác định vectơ gia tốc của nó khi nó đi qua điểm O.

Khi không sợ nhầm lẫn, ta chấp nhận các kí hiệu đã giản lược :

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \text{ và } \dot{y} = 2\alpha x\dot{x},$$

do đó: $\dot{x}^2 = \dfrac{v^2}{1 + 4\alpha^2 x^2}$

Lấy đạo hàm các biểu thức về $\dot{x}$ và $\dot{y}$ đối với thời gian :

$$2\dot{x}\ddot{x} = -\frac{8v^2\alpha^2 x\dot{x}}{(1 + 4\alpha^2 x^2)^2} \text{ và } \ddot{y} = 2\alpha\dot{x}^2 + 2\alpha x\ddot{x}.$$

nhưng tại điểm O : $x = 0$ và $\dot{x} = v$. Vậy ở thời điểm mà động điểm M ở O, ta có :

$$\vec{a} = 2\alpha v^2 \vec{e}_y.$$

Vectơ gia tốc thực sự thẳng góc với quỹ đạo (vận tốc không đổi) và bán kính cong của parabôn tại O là :

$$R = \frac{1}{2\alpha}.$$

8.4. Biểu thức trong tọa độ trụ

Đối với một người quan sát của $\mathcal{R}$, thì hệ tọa độ Descartes $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ là đứng yên. Các vectơ $\vec{e}_r$ và $\vec{e}_\theta$ đều là hàm số của θ và θ là hàm số của thời gian. Cho :

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \text{ và } \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r\,;$$

Nhưng $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$, do đó :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + \ddot{z}\vec{e}_z.$$

Trong tọa độ trụ :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z.$$

Chú ý :

Lưu ý một dạng khác đối với số hạng thứ hai :

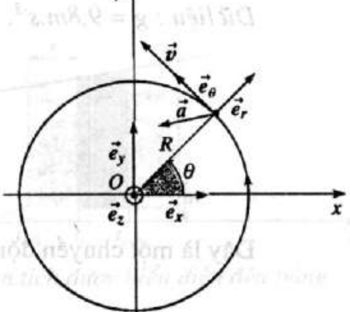
$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}).$$

Đối với gia tốc không có định luật chồng chất giống như định luật chồng chất các vận tốc :

$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}$ không bằng tổng các gia tốc mà ta nhận được bằng cách làm thay đổi lần lượt chỉ một tọa độ.

9 Nghiên cứu chuyển động tròn

Cho một vòng tròn tâm O và bán kính R, cố định trong $\mathcal{R}$ và trên có một động điểm chuyển động với vận tốc v (*H.32*).



H.32. *Chuyển động tròn*

9.I. Vectơ vận tốc

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = v\vec{T}.$$

Trong tọa độ cực :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

9.2. Vectơ gia tốc

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{v}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}.$$

Nếu M vạch một vòng tròn tâm *O* và bán kính *R* :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r + \dot{v}\vec{e}_\theta.$$

9.3.Trường hợp chuyển động tròn đều

Nếu $\dot{\theta}$ là không đổi, thì vectơ gia tốc có dạng rút gọn :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r$$

Trong trường hợp này, gia tốc là gia tốc *hướng tâm*. Nếu gia tốc bằng không, thì động điểm chuyển động theo quỹ đạo thẳng, tiếp tuyến với vòng tròn. Để giữ cho quỹ đạo tròn, thì ở mỗi thời điểm phải làm lệch vectơ vận tốc về phía tâm.

Áp dụng 8

Máy quay li tâm

Trong khi huấn luyện, để cơ thể quen chịu đựng các gia tốc lớn lúc cất cánh và lúc bay vào khí quyển, người ta đặt các nhà du hành vũ trụ lên một ghế ngồi cố định ở đầu mút một cái cần chiều dài l, quay với vận tốc góc ω.

Tính ω ra số vòng trong một phút, nếu $l = 5{,}0m$ và nếu gia tốc đạt được có giá trị 6g.

Dữ liệu : $g = 9{,}8 m.s^{-2}$.

Đây là một chuyển động tròn đều :

$$\omega^2 l = 6g,$$

do đó : $\omega = 3{,}4(3)$ rad.s^{-1}.

Nhưng $1 rad.s^{-1} = \dfrac{1/2\pi}{\dfrac{1}{60}} tr.min^{-1}$

nên ω=33tr.min^{-1} (33 vòng/phút).

Với các dữ liệu số cho trên, máy tính sẽ hiển thị kết quả sau : 32,747266.

Nhưng các số liệu chỉ gồm hai chữ số có nghĩa : 5,0m có nghĩa là khoảng cách bằng 5 mét, với một giới hạn về độ không chính xác cỡ 0,1m. Trong kết quả, tất cả các chữ số ở bên ngoài chữ số thứ hai đều vô nghĩa, vì chúng nằm trong giới hạn độ không chính xác gắn với tính chất gần đúng của các dữ liệu trong đề bài.

Nói chung, chúng là dữ liệu kém chính xác nhất trong các dữ liệu quyết định độ chính xác của kết quả.

10 Đồ thị v(t)

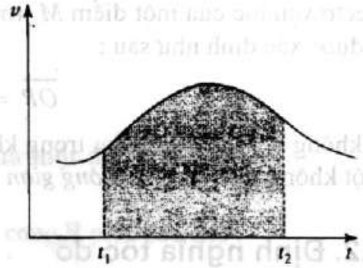
Ta vẽ đồ thị biểu diễn sự thay đổi của vận tốc v của một điểm theo hàm số của thời gian t (*H.33*).

Độ dốc của tiếp tuyến bằng $\dfrac{dv}{dt}$.

Chú ý rằng đại lượng này chỉ bằng gia tốc trong trường hợp chuyển động thẳng. Đối với một quỹ đạo cong, thì phải kể thêm thành phần pháp tuyến của gia tốc.

Quãng đường l đi được giữa các thời điểm t_1 và t_2 được biểu diễn bởi diện tích :

$$l = \int_{t_1}^{t_2} v dt.$$



H.33. *Biểu diễn đồ thị của quãng đường đi được.*

Áp dụng 9

Chuyển động thẳng nhanh dần đều

Cho một động điểm chuyển động với gia tốc không đổi a, dọc theo trục thẳng (Ox). Các điều kiện ban đầu lúc t = 0 là :

$$x(0) = x_0 \text{ và } v(0) = v_0.$$

1) Lập phương trình chuyển động theo thời gian x(t).

2) Chỉ rõ rằng số gia của bình phương vận tốc tỉ lệ với quãng đường đi được.

3) Chỉ rõ rằng các quãng đường đi được trong những khoảng thời gian liên tiếp và bằng nhau, lập thành một cấp số cộng.

Hai phương pháp có thể được chú ý tới :

- tính $v(t)$ rồi tính $x(t)$ bằng phép lấy tích phân.
- sử dụng đồ thị $v(t)$. Ta chọn giải pháp đồ thị.

1) $x - x_0$ = diện tích của hình thang $OBCD$

$$= \frac{1}{2}t[v_0 + (v_0 + at)].$$

nên : $$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0.$$

2) Thay thế t bằng $\dfrac{v - v_0}{a}$, thì khi đó :

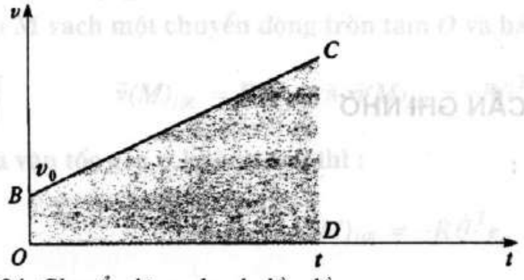
$$x - x_0 = \frac{v - v_0}{2a}(v_0 + v) = \frac{v^2 - v_0^2}{2a},$$

vậy : $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$.

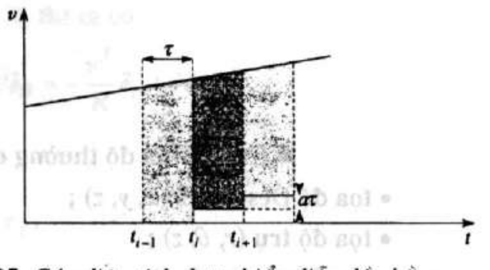
3) Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các hoành độ ở các thời điểm $t_1, t_2 = t_1 + \tau, \ldots, t_n = t_1 + (n-1)\tau$.

Sự phân tích đồ thị chứng tỏ rằng với mọi giá trị của i, ta có :

$$(x_{i+1} - x_i) - (x_i - x_{i-1}) = a\tau^2.$$



H.34. *Chuyển động nhanh dần đều.*



H.35. *Các diện tích được biểu diễn đều bằng nhau.*

▸ **Để tập luyện : bài tập 8 và 9.**

II Tốc đồ

II.1. Không gian các vận tốc

Vectơ vận tốc của một điểm M trong $\mathcal{R}$ có thể được kết hợp với một điểm P được xác định như sau :

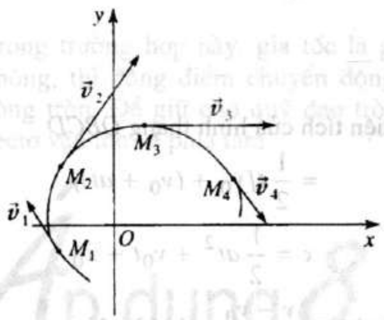
$$\overrightarrow{OP} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}.$$

P không phải là một điểm trong không gian các vị trí. Nó vận động trong một không gian khác : *không gian các vận tốc* (*H.36*).

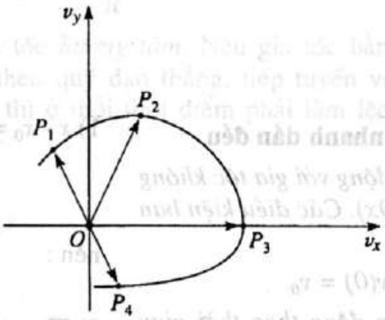
II.2. Định nghĩa tốc đồ

Trong một hệ quy chiếu $\mathcal{R}$, tốc đồ chuyển động của một động điểm là quỹ đạo của một điểm liên hợp trong không gian các vận tốc.

- Vectơ gia tốc bằng với "vận tốc" của P.
- Tốc đồ của một chuyển động thẳng đều rút gọn về một điểm.



H.36a. *Quỹ đạo trong không gian các vị trí.*



H.36b. *Tốc đồ trong không gian các vận tốc* $\overrightarrow{OP_i} = \vec{v}_i$.

▸ **Để tập luyện : bài tập 12.**

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ **Các hệ tọa độ thường dùng là :**

- **tọa độ Descartes (x, y, z) ;**
- **tọa độ trụ (r, θ, z) ;**
- **tọa độ cầu (r, θ, φ).**

■ **Một chuyển động hay đạo hàm của một đại lượng vectơ chỉ được xác định đối với một hệ quy chiếu (hay một người quan sát) xác định.**

■ **Đạo hàm của một vectơ có độ dài không đổi thì trực giao với vectơ đó hoặc bằng không. Đó là trường hợp của các vectơ đơn vị.**

■ **Trong tọa độ trụ hay tọa độ cực, các vectơ của cơ sở địa phương phụ thuộc vào θ :**

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta \text{ và } \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r.$$

■ TỌA ĐỘ CONG

• **A là một điểm cố định của đường cong *Γ*, hoành độ cong s của một điểm *M* trên *Γ* thì bằng số đo đại số của cung *AM*.**

• **Vectơ đơn vị tiếp tuyến $\vec{T}$, vectơ đơn vị pháp tuyến $\vec{N}$ và bán kính cong R phải sao cho :**

$$\vec{T} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \text{ và } \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{R}\vec{N}$$

■ VECTƠ VẬN TỐC VÀ VECTƠ GIA TỐC

• **Cho *O* là một điểm cố định của hệ quy chiếu $\mathcal{R}$: các vectơ vận tốc và gia tốc của điểm M trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ là :**

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} \text{ và } \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{/\mathcal{R}}$$

• **Tọa độ cong**

M **được xác định vị trí bởi hoành độ cong s trên quỹ đạo Γ của nó trong $\mathcal{R}$, các vectơ này có biểu thức :**

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{s}\vec{T} \text{ và } \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \ddot{s}\vec{T} + \frac{\dot{s}^2}{R}\vec{N}.$$

• **Tọa độ Descartes**

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z \text{ và } \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z.$$

• **Tọa độ trụ**

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z \text{ và } \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z.$$

• **Nếu gia tốc $\vec{a}$ bằng không, thì vận tốc $\vec{v}$ là không đổi và quỹ đạo là thẳng.**

• **Chuyển động tròn**

Nếu M vạch một chuyển động tròn tâm *O* và bán kính *R*, thì ta có :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \text{ và } \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r + \dot{v}\vec{e}_\theta.$$

Nếu vận tốc góc $\dot{\theta}$ không đổi, thì :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r.$$

Bài tập có lời giải

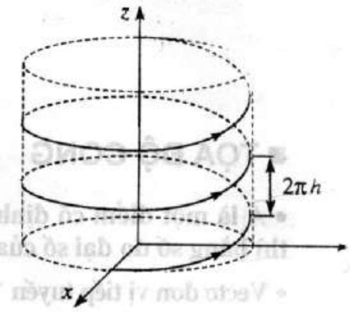
Chuyển động xoắn ốc

ĐỀ BÀI

Cho một đường xoắn ốc thẳng xác định trong tọa độ trụ theo các phương trình :

$r = R$ và $z = h\theta$ (h không đổi)

và được định hướng theo chiều θ tăng. Gốc là điểm được xác định vị trí bởi $z = 0$.



1) Xác định hoành độ cong, bán kính cong R_c và cơ sở FRENET $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$.

2) Trên đường xoắn ốc này có một điểm M chuyển động với vận tốc không đổi v.

a) Xác định vectơ vận tốc và vectơ gia tốc.

b) Vẽ tốc đồ.

HƯỚNG DẪN

Phương pháp tiến hành như sau :

1) Tính $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}$ *để suy ra* $\dfrac{ds}{d\theta}$ *và* $\vec{T}$.

Tính $\dfrac{d\vec{T}}{ds}$ *để suy ra* R_c *và* $\vec{N}$.

Nhớ rằng các véctơ $\vec{e}_r$ *và* $\vec{e}_\theta$ *đều là hàm số của* θ.

2) a) Để tính vận tốc và gia tốc, ta có thể, hoặc sử dụng các kết quả ở trên, hoặc sử dụng các biểu thức của $\vec{v}$ *và* $\vec{a}$ *trong tọa độ trụ. Theo phương pháp thứ hai, thì phải bắt đầu bằng biểu diễn* $\dot{\theta}$.

LỜI GIẢI

1) $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r + z\vec{e}_z$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} = R\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} + \frac{dz}{d\theta}\vec{e}_z = R\vec{e}_\theta + h\vec{e}_z, \text{ và } \frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}\frac{ds}{d\theta} = \vec{T}\frac{ds}{d\theta}.$$

Đồng nhất hai biểu thức trên ta được $\dfrac{ds}{d\theta} = \left\| R\vec{e}_\theta + h\vec{e}_z \right\| = \sqrt{R^2 + h^2}$.

$s = 0$ nếu $\theta = 0$, vậy $s = \theta\sqrt{R^2 + h^2}$ và $\vec{T} = \dfrac{R\vec{e}_\theta + h\vec{e}_z}{\sqrt{R^2 + h^2}}$.

$\dfrac{d\vec{T}}{d\theta} = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}}\dfrac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}$ và $\dfrac{d\theta}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}}$, do đó :

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{d\theta}\frac{d\theta}{ds} = \frac{R}{R^2 + h^2}\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \quad \frac{R}{R^2 + h^2}\vec{e}_r.$$

Theo định nghĩa, $\dfrac{d\vec{T}}{ds} = \dfrac{1}{R_c}\vec{N}$, vậy :

$$\vec{N} = -\vec{e}_r,\ R_c = \frac{R^2 + h^2}{R} \text{ và } \vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N} = \frac{R\vec{e}_z - h\vec{e}_\theta}{\sqrt{R^2 + h^2}}.$$

2) a) *Phương pháp thứ nhất* : sử dụng các kết quả ở trên :

- $\vec{v} = v\vec{T} = v\dfrac{R\vec{e}_\theta + h\vec{e}_z}{\sqrt{R^2 + h^2}}$ và $\vec{a} = \dfrac{v^2}{R_c}\vec{N} = -R\dfrac{v^2}{R^2 + h^2}\vec{e}_r$

Phương pháp thứ hai : tính toán trực tiếp

- $v = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta + h\dot{\theta}\vec{e}_z$, do đó : $\dot{\theta} = \dfrac{v}{\sqrt{R^2 + h^2}}$

Khi đó : $\vec{v} = \dfrac{v}{\sqrt{R^2 + h^2}}(R\vec{e}_\theta + h\vec{e}_z)$.

- $\dot{r}, \ddot{\theta}$ và $\ddot{z}$ đều bằng không, $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{e}_r$, do đó : $\vec{a} = -R\dfrac{v^2}{R^2 + h^2}\vec{e}_r$.

b) Tốc đồ là một vòng tròn song song với mặt phẳng (Oxy), độ cao h và bán kính $\rho = \dfrac{Rv}{\sqrt{R^2 + h^2}}$.

*B*ài tập

Khi không có các điều chỉ dẫn thì phải giả định rằng hệ tọa độ đang sử dụng được gắn với hệ quy chiếu nghiên cứu. Nói chung dùng các kí hiệu giản lược là đủ.

ÁP DỤNG BÀI GIẢNG

1 Điện trường của một hạt tích điện

Một hạt điểm điện tích q, được đặt tại gốc O của một hệ tọa độ Descartes sinh ra tại M một điện trường mà biểu thức trong tọa độ cầu có dạng :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r$$

Biểu thị $\vec{E}(M)$ trong tọa độ Descartes.

• *Lời giải*

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z)$$

2 Từ trường của một dây dẫn thẳng

Từ trường, sinh ra tại M bởi một dòng điện I chạy qua một dây dẫn thẳng rất dài, trùng với trục (Oz), có biểu thức trong tọa độ trụ :

$$\vec{B}(M) = \mu_0\frac{I}{2\pi r}\vec{e}_\theta$$

μ_0 là hằng số phổ biến.

Biểu thị $\vec{B}(M)$ trong tọa độ Descartes.

• *Lời giải*

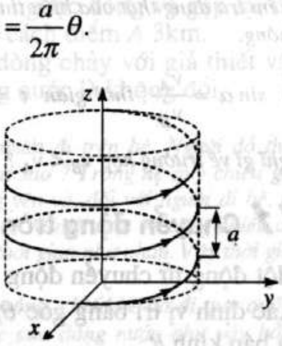
$$\vec{B}(M) = \mu_0\frac{I}{2\pi r^2}(-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y).$$

3 Các phương trình của đường xoắn ốc (hay đường đinh ốc)

Cho một đường xoắn ốc xác định trong tọa độ trụ theo :

$$r = R \text{ và } z = \frac{a}{2\pi}\theta.$$

Hãy xác định các phương trình của đường xoắn ốc trong tọa độ Descartes.



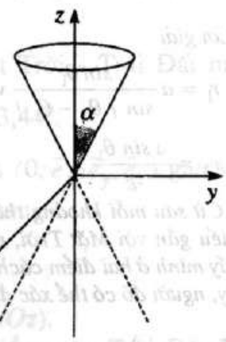
• *Lời giải*

$x = R\cos\dfrac{2\pi z}{a}$

và $y = R\sin\dfrac{2\pi z}{a}$

4 Nón tròn xoay

Cho một nón tròn xoay có trục (Oz), và nửa góc mở α. Hãy xác định phương trình của nó trong tọa độ Descartes và tọa độ cầu.



• *Lời giải*

Tọa độ Descartes :

$$|z| = \cos(\alpha)\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Tọa độ cầu : $\theta = \alpha$.

5 Vòng tròn trên một mặt cầu

Cho một hệ tọa độ Descartes $(0;\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ và mặt cầu bán kính R.

Trên mặt cầu này, ta vẽ đường cong Γ được xác định trong tọa độ cầu theo $\theta = \theta_0$.

1) Xác định bán kính cong của Γ.

2) Biểu diễn theo cách đơn giản nhất có thể được các vectơ $\vec{T}$, $\vec{N}$ và $\vec{B}$ của cơ sở địa phương FRENET kết hợp với một điểm M trên Γ.

3) Cho A, điểm gốc của Γ, được xác định bởi $\varphi = 0$.

Xác định các tọa độ Descartes của một điểm có hoành độ cong s.

• *Lời giải*

1) Γ *là một vòng tròn bán kính* $R_c = R\sin\theta_0$

2) Trong tọa độ trụ : $\vec{T} = \vec{e}_\theta$, $\vec{N} = -\vec{e}_r$, $\vec{B} = \vec{e}_z$.

3) $x = R\sin\theta_0\cos\left(\dfrac{s}{R\sin\theta_0}\right)$; $y = R\sin\theta_0\sin\left(\dfrac{s}{R\sin\theta_0}\right)$; $z = \cos\theta_0$.

6 Thị sai

Cho hai hệ tọa độ Descartes có cùng cơ sở $(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ và các điểm gốc O_1, O_2 phải sao cho $\overrightarrow{O_1O_2} = a\vec{e}_z$.

Các tọa độ cầu của M lần lượt trong hai hệ tọa độ là (θ_1,φ_1) và (θ_2,φ_2), với :

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi.$$

1) Biểu diễn r_1 và r_2 theo hàm số của a, θ_1 và θ_2.

2) $\theta_2 = \theta_1 + \varepsilon$ ($\varepsilon << 1$ rad). Tìm một biểu thức gần đúng dạng $r_1 = k(\theta_1)\dfrac{a}{\varepsilon}$.

3) Hãy đề xuất một ứng dụng trong thiên văn.

Nhắc lại : Các cạnh và các góc của một tam giác ABC nghiệm đúng hệ thức $\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin B}{CA} = \frac{\sin C}{AB}$.

• *Lời giải*

1) $r_1 = a\frac{\sin\theta_1}{\sin|\theta_2 - \theta_1|}$ *và* $r_2 = a\frac{\sin\theta_2}{\sin|\theta_2 - \theta_1|}$.

2) $r_2 = \frac{a\sin\theta_1}{\varepsilon}$.

3) Cứ sau mỗi khoảng thời gian sáu tháng, trong một hệ quy chiếu gắn với Mặt Trời, một người quan sát trên mặt đất lại thấy mình ở hai điểm cách nhau một khoảng $a = 3.10^{11}$*m. Như vậy, người đó có thể xác định vị trí của các ngôi sao gần.*

7 Chuyển động đều trên một đường xoắn

Một động tử M, chạy với vận tốc không đổi v, trên một đường xoắn có phương trình cực :

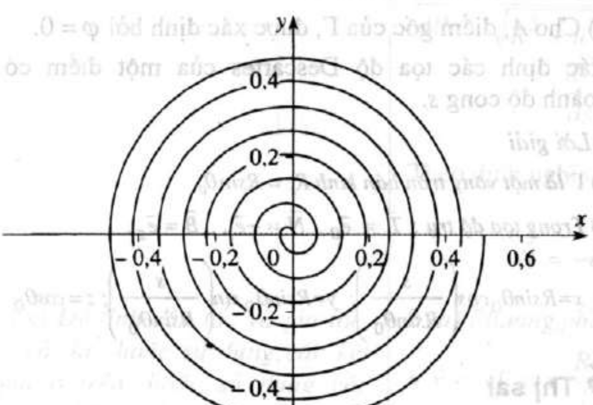
$$r = a\theta.$$

Biểu diễn vectơ vận tốc của M theo θ.

• *Lời giải.*

$v^2 = \dot{r} + r^2\dot{\theta}^2$ và $\dot{r} = a\dot{\theta}$, do đó : $\dot{r} = \frac{v}{\sqrt{1+\theta^2}}$.

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \frac{v}{\sqrt{1+\theta^2}}\left(\vec{e}_r + \theta\vec{e}_\theta\right).$$



8 Cuộc đua nước rút

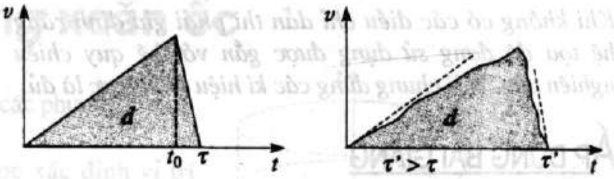
Để chạy thử chiếc xe đạp mới, một người đua xe đạp tự bấm giờ giữa hai mốc cách nhau một khoảng d = 100m. Gia tốc cực đại của người đó là $a = 1,0$ m.s^{-2}. Khi hãm, thì gia tốc đó về giá trị tuyệt đối, lớn nhất là bằng $a' = 5,0$ m.s^{-2}.

Vận tốc ban đầu và vận tốc cuối cùng đều bằng không.

1) Giải thích ngắn gọn rằng thời gian là cực tiểu nếu chuyển động được phân tích thành một giai đoạn mà gia tốc là cực đại, kèm theo một giai đoạn hãm cực đại.

2) Xác định thời gian cực tiểu đó.

• *Lời giải*



1) Sử dụng đồ thị v(t), diện tích màu xám biểu diễn quãng đường đi qua.

2) $v_{max} = at_0 = a'(\tau - t_0)$, *do đó* $v_{max} = \frac{aa'}{a+a'}\tau$.

$d = \frac{1}{2}\tau v_{max}$ *, do đó* $\tau^2 = 2d\frac{a+a'}{aa'}$ *;* $\tau = 15,5s$.

9 Một người lái xe thận trọng

Một người lái xe con đi xe trên một đoạn đường $d = 1,0$km. Con đường chạy thẳng. Chuyển động là nhanh dần đều ($a = 3$m.s^{-2}), rồi đều với vận tốc không đổi và cuối cùng là chậm dần đều (gia tốc $-a$). Vận tốc trung bình là 72 kmh^{-1}. Xác định thời gian của chuyển động đều và vận tốc cực đại.

• *Lời giải*

Chỉ sử dụng đồ thị v(t).

$t_1 = 50s$, $d = \frac{1}{4}(t_1^2 - \tau^2)$, $\tau = 34s$ *và* $v_{max} = 85km.h^{-1}$.

10 Hàng hải

Hai tàu thủy ở trên cùng một kinh tuyến, A ở phía bắc của B và cách một khoảng d_0. A hướng về phía đông với vận tốc v_A, còn B hướng về phía bắc với vận tốc v_B. Độ cong của mặt đất là không đáng kể.

1) Xác định khoảng cách cực tiểu giữa A và B.

2) B phải chạy theo hướng nào để bắt kịp A theo một chuyển động thẳng ?

Xác định khoảng thời gian rượt đuổi.

• *Lời giải*

1) $d_{min}^2 = d_0^2\frac{v_A^2}{v_A^2 + v_B^2}$.

Kiểm tra dạng thật của biểu thức tìm thấy, nếu v_B *hay* v_A *bằng không.*

2) $\sin\alpha = \frac{v_A}{v_B}$ *; thời gian* $\tau = \sqrt{\frac{d_0^2}{v_B^2 - v_A^2}}$ *nếu* $v_B > v_A$*. Bạn nghĩ gì về trường hợp* $v_B < v_A$ *?*

11 Chuyển động tròn nhanh dần đều

Một động tử chuyển động nhanh dần đều từ vị trí M (xác định vị trí bằng góc θ) trên một vòng tròn tâm O và bán kính R.

Ở thời điểm ban đầu, $\theta = 0$ và vận tốc bằng không.
φ là góc $(\vec{e}_r, \vec{a})$, biểu diễn φ theo hàm số của θ.

• Lời giải

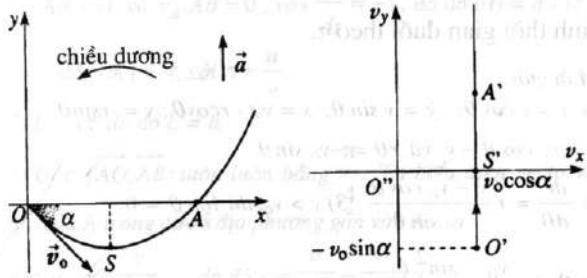
$cotan\varphi = -2\theta$, *với* $\frac{\pi}{2} \le \varphi < \pi$.

12 Tốc độ của một chuyển động parabôn

Cho một điểm M chuyển động trong mặt phẳng (Oxy). Chuyển động của nó đối với $\mathfrak{R}$ được xác định bởi :

- một vectơ gia tốc không đổi : $\vec{a} = a\vec{e}_y$;
- một vectơ vận tốc ban đầu ở $t = 0$.

$$\|\vec{v}(0)\| = v_0 \text{ và } (\vec{e}_x, \vec{v}(0)) = \alpha;$$



- một vị trí ban đầu : gốc O của hệ tọa độ.

Các điểm A' và S' của không gian vận tốc tương ứng với các điểm A và S của không gian các vị trí. Hãy xác định, đối với $t > 0$, quỹ đạo và tốc đồ của chuyển động. Vẽ các đường cong đối với $a > 0$ và $\alpha = -\frac{\pi}{4}$.

• Lời giải

Tốc đồ là một nửa đường thẳng và quỹ đạo là một parabôn theo phương trình :

$$y = \frac{a}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + v_0\tan(\alpha)x.$$

đỉnh S của nó tương ứng với giao điểm của tốc đồ với trục $(O''v_x)$.

13 Hệ quy chiếu đúng

Một con sông có vận tốc dòng chảy giả thiết là đều, nghĩa là giống hệt nhau tại mọi điểm, và không đổi (vận tốc không phụ thuộc thời gian). Một chiếc thuyền, chạy xuôi theo chiều dòng nước, vượt qua một cái bè tại điểm A. Nửa giờ sau, chiếc thuyền quay ngược trở lại. Thuyền chạy ngược dòng và gặp lại cái bè tại điểm B ở phía hạ lưu cách điểm A 3km.
Hãy xác định vận tốc của dòng chảy với giả thiết vận tốc của thuyền đối với dòng nước là không đổi.

• Lời giải

Ta thừa nhận quan điểm của người đi trên bè. Người đó thấy chuyển động của chiếc thuyền ra sao ? Trong hệ quy chiếu gắn với dòng nước, chiếc bè là đứng yên và, đối với người đi bè, thì chiếc thuyền thực hiện một lượt đi và một lượt về cùng chiều dài như nhau, do vậy mất cùng một thời gian như nhau. Vậy thời gian giữa hai lần gặp bằng 1 giờ.
Trong hệ quy chiếu gắn với bờ sông, chiếc bè đã đi qua quãng đường AB trong 1 giờ. Vận tốc của dòng nước như vậy bằng 3km.h⁻¹.

SỬ DỤNG VỐN KIẾN THỨC

14 * Điểm chí

Trục các cực hợp với trục Mặt Trời - Trái Đất một góc $\frac{\pi}{2} + \alpha$. Lúc đông chí, $\alpha = 23{,}44^0$.

Ta sử dụng hệ tọa độ Descartes $(0; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ gắn với Trái Đất và được xác định như sau :

- O : tâm của Trái Đất ;
- $\vec{e}_z$: trục nối các cực ;
- Mặt Trời ở trong mặt phẳng (xOz).

1) Hãy xác định tọa độ các điểm trên Trái Đất lúc Mặt Trời mọc và lúc Mặt Trời lặn.
2) Tính thời gian giữa lúc Mặt Trời mọc và lúc Mặt Trời lặn tại một điểm trên vĩ độ λ. Để đơn giản, có thể bỏ qua chuyển động quay hằng năm của Trái Đất chung quanh Mặt Trời.

Dữ liệu : Ở Lille : $\lambda = 50^0 38'$; ở Toulon : $\lambda = 43^0 07'$; 60 phút góc = 1 độ.

• Lời giải :

Lúc mọc : $\varphi = \varphi_1$, *với* $\cos\varphi_1 = \frac{\tan\alpha}{\tan\theta}$.

Lúc lặn : $\varphi_C = -\varphi_1$ *(chỉ cần viết $\vec{e}_r$ pháp tuyến với trục Trái Đất - Mặt Trời).*

$\theta < \alpha$: vùng Bắc Cực, Mặt Trời không mọc.
$\theta > \pi - \alpha$: vùng Nam Cực, Mặt Trời không lặn.

Nhớ rằng $\theta = \frac{\pi}{2} - \lambda$.

Ngày dài : $t = 24h\frac{2\varphi_1}{\pi}$.

Lille : 7h41ph. ; Toulon : 8h46ph.

15 * Con đường ngắn nhất

Trên một mặt cầu bán kính R, vòng tròn lớn (nghĩa là vòng tròn bán kính R) là con đường ngắn nhất giữa hai điểm (tính chất phải thừa nhận).

λ là vĩ độ và Ψ là kinh độ, bạn hãy xác định chiều dài của con đường ngắn nhất giữa Paris ($\lambda_1 = 48^0 52'$; $\Psi_1 = 2^0 20'$) và Tokyo ($\lambda_2 = 35^0 42'$; $\Psi_2 = 139^0 30'$).

Dữ liệu : bán kính Trái Đất : $(6{,}37 \pm 0{,}01).10^6$m (Trái Đất không tuyệt đối là hình cầu).

• Lời giải

$d = R\alpha$, *với* $\cos\alpha = \vec{e}_{r_1}.\vec{e}_{r_2}$. *Khi sử dụng hệ tọa độ cầu, ta được :*

$$\cos\alpha = \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \cos\theta_1\cos\theta_2,$$

với $\theta_1 = 90^0 - \lambda_1$ *và* $\theta_2 = 90^0 - \lambda_2$, *do đó :*

$$\alpha = 87^0 20' \text{ và } d = 9{,}70.10^3\text{km}.$$

Chú ý :

Tính toán giả thiết Trái Đất có hình cầu. Kết quả trở thành không đúng, nếu được biểu thị với độ chính xác quá cao.

16 * Bình đồ (bản đồ mặt phẳng)

Giữa các tọa độ (x, y) trên một bình đồ và các tọa độ địa lí (kinh độ Ψ, vĩ độ λ), tồn tại một sự tương ứng có dạng :

$$x = a\Psi \text{ và } y = f(\lambda).$$

1) Xác định hàm số f sao cho phép chiếu bảo toàn các góc. Đó là phép chiếu Mercator (1512 - 1594).

2) Cho trên Trái Đất một bề mặt kích thước rất nhỏ so với bán kính Trái Đất R. Liệu mặt đó có bị biến dạng trong phép chiếu bảo giác nói trên ?

Tìm tỉ số giữa diện tích S của mặt đó với diện tích S' của ảnh của mặt đó ?

Gợi ý : *Ở lân cận điểm $P(\Psi, \lambda)$, ta biểu thị vectơ độ dời $d\vec{l}$ trên bề mặt Trái Đất và ảnh $d\vec{l}'$ của nó trên bình đồ theo hàm số của $d\Psi$ và $d\lambda$.*

• *Lời giải*

1) $d\vec{l} = R(-d\theta\vec{e}_\theta + \cos\lambda d\Psi\vec{e}_\Psi)$,

$d\vec{l}' = ad\Psi\vec{e}_x + f'(\lambda)d\lambda\vec{e}_y$.

Các góc sẽ được bảo toàn nếu $f'(\lambda) = \dfrac{a}{\cos\lambda}$, *do đó :*

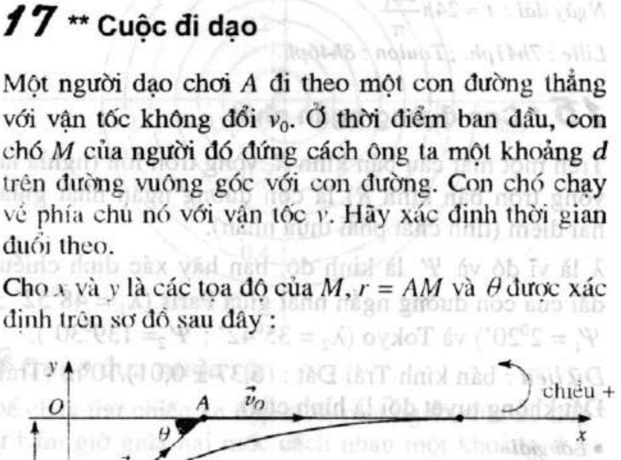
$$f(\lambda) = a\ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{2}\right)\right].$$

2) Hình dạng được bảo toàn : $S = S'\dfrac{R^2}{a^2\cos^2\lambda}$

17 ** Cuộc đi dạo

Một người dạo chơi A đi theo một con đường thẳng với vận tốc không đổi v_0. Ở thời điểm ban đầu, con chó M của người đó đứng cách ông ta một khoảng d trên đường vuông góc với con đường. Con chó chạy về phía chủ nó với vận tốc v. Hãy xác định thời gian đuổi theo.

Cho x và y là các tọa độ của M, $r = AM$ và θ được xác định trên sơ đồ sau đây :



1) Biểu diễn $\dot{x}$ và $\dot{y}$ theo hàm số của v và θ, rồi x và y theo hàm số của v_0, r, θ và t. Từ đó suy ra hai phương trình vi phân theo $r(t)$ và $\theta(t)$.

2) Từ đó suy ra một phương trình vi phân theo $r(\theta)$.

Xác minh rằng $r = \dfrac{d}{\sin\theta}\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)^{\frac{v}{v_0}}$ là nghiệm có kể đến các điều kiện ban đầu.

3) Tìm điều kiện mà v và v_0 phải thỏa mãn để bài toán có một lời giải.

Trong trường hợp này, giá trị cuối cùng của θ là bao nhiêu ?

4) Viết một phương trình vi phân của $\theta(t)$.

5) Biết rằng $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{\lambda} d\theta = \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1}$, hãy xác định thời gian đuổi theo τ.

• *Lời giải*

1) $\dot{x} = v\cos\theta$; $\dot{y} = v\sin\theta$; $x = v_0t - r\cos\theta$; $y = -r\sin\theta$.

$\dot{r} = v_0\cos\theta - v$ *và* $r\dot{\theta} = -v_0\sin\theta$.

2) $\dfrac{dr}{d\theta} = r\dfrac{v - v_0\cos\theta}{v_0\sin\theta}$. *3)* $v > v_0$, *thì* $\lim\limits_{r \to 0}\theta = 0$.

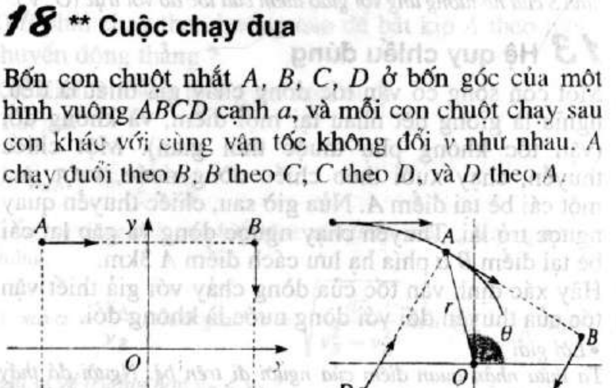
4) $\dot{\theta} = -\dfrac{v_0}{d}\dfrac{\sin^2\theta}{\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)^{\frac{v}{v_0}}}$.

5) $\tau = \dfrac{d}{v_0}\dfrac{\frac{v}{v_0}}{\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 - 1}$. *$\tau$ chỉ được xác định nếu $v > v_0$*

Nếu $v = v_0$: τ có khuynh hướng tiến về vô cùng. Nếu v tiến về vô cùng, thì τ tiến về O. Các trường hợp giới hạn kể trên mà lời giải là hiển nhiên, đã cho phép xác minh điều có thể xảy ra của lời giải.

18 ** Cuộc chạy đua

Bốn con chuột nhắt A, B, C, D ở bốn góc của một hình vuông $ABCD$ cạnh a, và mỗi con chuột chạy sau con khác với cùng vận tốc không đổi v như nhau. A chạy đuổi theo B, B theo C, C theo D, và D theo A.



1) Sau bao lâu thì chúng gặp nhau ?

2) Tìm quãng đường L mà các con chuột đã chạy qua.

3) Xác định quỹ đạo của chuột A với các vị trí ban đầu trong tọa độ cực :

$$A\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{3\pi}{4}\right),\ B\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{4}\right),\ C\left(\frac{a}{\sqrt{2}},-\frac{\pi}{4}\right),\ D\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{3\pi}{4}\right).$$

• *Lời giải*

Bài toán giống hệt nhau đối với cả bốn con chuột. Các quỹ đạo cũng giống hệt nhau, chỉ sai khác một phép quay và tạo thành ở mỗi thời điểm một hình vuông cạnh l(t) biến đổi được.

1) $l^2 = \overrightarrow{AB}^2$*, do đó* $l\frac{dl}{dt} = \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}.\overrightarrow{AB} = (\vec{v}_B - \vec{v}_A).\overrightarrow{AB}.$

$\vec{v}_A$ *cùng đường thẳng với* $\overrightarrow{AB}$ *và* $\vec{v}_B$ *vuông góc với* $\overrightarrow{AB}$ *:*

$\vec{v}_A.\overrightarrow{AB} = vl$ *và* $\vec{v}_B.\overrightarrow{AB} = 0$ *, vậy* $\frac{dl}{dt} = -v$*, do đó* $l(t) = a - vt$.

$l = 0$ *đối với* $t = \tau$*, với* $\tau = \frac{a}{v}$.

2) $L = v\tau$*, do đó* $L = a$.

3) Góc $(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB})$ *luôn luôn bằng* $\frac{\pi}{4}$*. Ta biểu diễn vectơ vận tốc của A trong cơ sở địa phương gắn vào A:*

$\dot r = v_r = -\frac{v}{\sqrt{2}}$*, do đó* $r = \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{v}{\sqrt{2}}t$*;*

$r\dot\theta = v_\theta = -\frac{v}{\sqrt{2}}$*, do đó* $r\frac{d\theta}{dr}\frac{dr}{dt} = -\frac{v}{\sqrt{2}}$*,*

vậy $\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{r}$.

$$r = \frac{a}{\sqrt{2}}\exp\left[-\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right)\right].$$

Vậy quỹ đạo là một đường xoắn ốc gồm vô số vòng. Bán kính hội tụ theo hàm mũ về 0, quãng đường đi qua là hữu hạn.

19 * Quỹ đạo xicloit

Một bánh xe bán kính r và tâm C lăn không trượt trên trục (Ox) trong khi vẫn ở trong mặt phẳng (Ozx).

M là một điểm gắn với bánh xe và ở trên đường chu vi . Ở thời điểm $t = 0$, M trùng với gốc 0. Vận tốc của C là không đổi và bằng v.

1) Làm thế nào để biểu thị được điều kiện : "bánh xe không trượt".

2) Xác định ở thời điểm t :

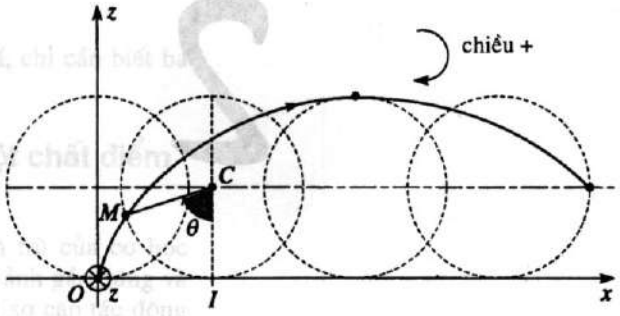
a) vị trí của M ;

b) vectơ vận tốc $\vec{v}_M$ của điểm M ;

c) vectơ gia tốc $\vec{a}_M$ của M.

3) Xác định $\vec{v}_M$ và $\vec{a}_M$ khi M tiếp xúc với trục(0x).

• *Lời giải*



Cho x và z là các toạ độ của M : $\theta = \left(-\vec{e}_z,\overrightarrow{CM}\right)$ *và* $\theta > 0$ *nếu* $vt > 0$.

1) I là điểm tiếp xúc ở thời điểm t giữa bánh xe và trục (0x), chiều dài của cung vòng tròn IM bằng OI : $x_I = vt = r\theta$.

2) a) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}$ *;* $x = x_I - r\sin\theta$ *và* $z = r - \cos\theta$ *, do đó:*

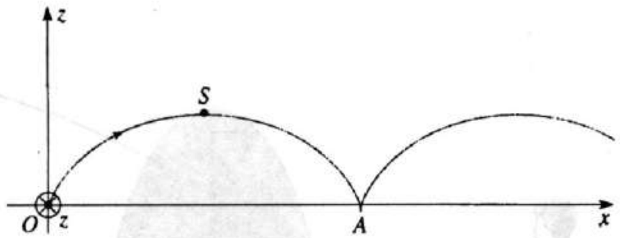
$$x = r\left[\frac{vt}{r} - \sin\left(\frac{vt}{r}\right)\right] \text{ và } z = r\left[1 - \cos\left(\frac{vt}{r}\right)\right].$$

Quỹ đạo là một xicloit.

b) Các thành phần của $\vec{v}_M$ *là :* $\dot x = v\left[1 - \cos\left(\frac{vt}{r}\right)\right]$ *và*

$\dot z = v\sin\left(\frac{vt}{r}\right)$

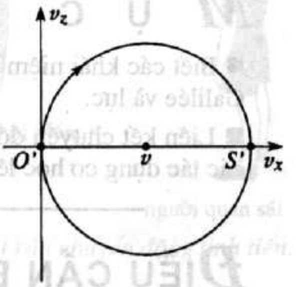
Chú thích : *Tốc đồ là một vòng tròn định tâm ở (v,0) và có bán kính v.*



$\ddot x = \frac{v^2}{r}\sin\left(\frac{vt}{r}\right)$

và $\ddot z = \frac{v^2}{r}\cos\left(\frac{vt}{r}\right)$.

Vectơ gia tốc cùng đường thẳng với CM, định hướng về phía C và có độ dài không đổi $a = \frac{v^2}{r}$.



3) Nếu $z = 0$*,* $\vec{v} = \vec{0}$ *và* $\vec{a} = \frac{v^2}{r}\vec{e}_z$.

2 ĐỘNG LỰC HỌC CỦA CHẤT ĐIỂM

MỤC TIÊU

■ Biết các khái niệm về quán tính, hệ quy chiếu Galilée và lực.

■ Liên kết chuyển động của một động điểm với các tác dụng cơ học lên nó.

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

■ Hệ quy chiếu gắn với người quan sát.

■ Vận tốc và gia tốc của một điểm.

■ Các phương trình vi phân đơn giản.

Mở đầu

Lí thuyết của động lực học cổ điển (hay của Newton) được xây dựng dần dần trong các thế kỉ XVII, XVIII và XIX. Sự bác bỏ các khái niệm đã từng thống trị đến lúc đó, được kèm theo sự xuất hiện những ý tưởng mới mẻ và đặc biệt phong phú.

Vậy nên, nguyên lí quán tính mâu thuẫn với lí thuyết cổ điển kết hợp chuyển động với lực kéo.

Khái niệm tương tác, mô tả bởi các định luật định lượng, là một ý tưởng quan trọng của cơ học hiện đại. Một quả táo không rơi vì (do nặng nên khuynh hướng tự nhiên của nó là đi xuống phía dưới) lí do tồn tại lực hút tương hỗ giữa quả táo và Trái Đất.

I Chất điểm

I.1. Định nghĩa

Một chất điểm là một vật thể điểm mà để xác định vị trí, chỉ cần biết ba tọa độ về vị trí của nó.

I.2. Các vật thể có thể được biểu diễn bởi một chất điểm

I.2.1. Hạt

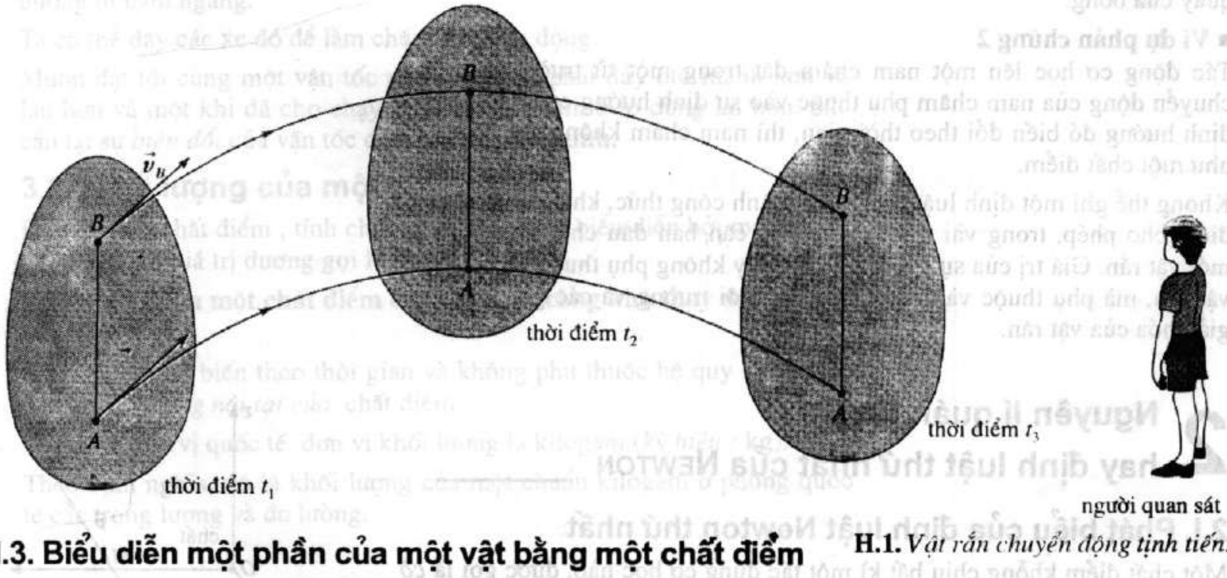
Việc mô tả các hạt sơ cấp (ví dụ electron) thuộc phạm trù của cơ học lượng tử. Cơ học cổ điển chỉ có thể cho được những hình ảnh gần đúng và đôi khi lại nghịch lí. Vậy nên, mặc dù là dạng điểm, hạt sơ cấp tác động như một nam châm con có mômen từ $\vec{\mathcal{M}}$ mà sự "định hướng" được đặc trưng bởi một thông số gọi là *số lượng tử spin*.

Nhớ rằng khi ta có thể bỏ qua các hiệu ứng gắn với spin , thì một hạt sẽ hành động như một chất điểm.

I.2.2. Vật rắn chuyển động tịnh tiến

Một vật rắn là một vật cứng. Đối với hệ quy chiếu $\mathcal{R}$, thì nó chuyển động tịnh tiến nếu chuyển động của nó được thực hiện mà không quay, nghĩa là nếu các vectơ gắn với vật rắn đều không đổi đối với một người quan sát gắn với $\mathcal{R}$ *(H1)*.

Tất cả các điểm của một vật rắn chuyển động tịnh tiến đều đi theo các quỹ đạo song song và có cùng vận tốc như nhau. Vị trí của một trong các điểm của nó đủ để xác định vị trí của vật rắn và có thể được biểu diễn bằng một chất điểm.

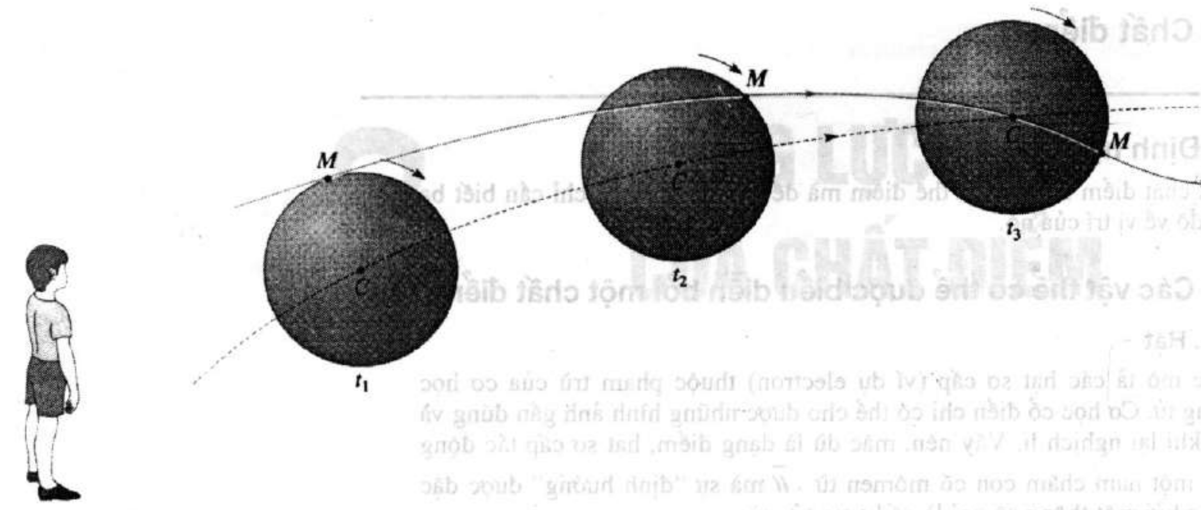


H.1. *Vật rắn chuyển động tịnh tiến.*

I.3. Biểu diễn một phần của một vật bằng một chất điểm

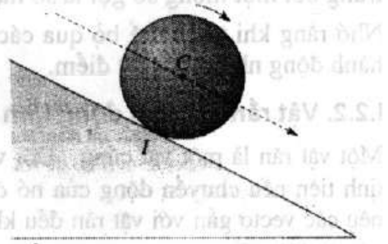
■ **Ví dụ :**

Xét một quả bóng đang bay *(H.2)*. Nếu có thể bỏ qua ảnh hưởng của không khí thì chuyển động của tâm *C* của bóng sẽ độc lập với sự định hướng của nó. Ta có thể coi bóng như một chất điểm nếu ta rút gọn quả bóng về tâm của nó.



H.2. *Chuyển động của C độc lập với sự quay của quả bóng.*

Sự mô hình hóa này tuy cho phép nghiên cứu quỹ đạo của tâm quả bóng, nhưng không đầy đủ, vì nó không cho biết chuyển động của từng điểm của bóng. Nói chung, quả bóng cũng quay, nên vận tốc của một điểm *M* ở vỏ quả bóng sẽ khác vận tốc của điểm *C*.



H.3. *Chuyển động của C ở đây phụ thuộc sự quay của quả bóng.*

■ **Ví dụ phản chứng 1**

Cũng cùng một quả bóng đó lăn trên một mặt phẳng nghiêng *(H.3)*. Bản chất của sự tiếp xúc tại *I* giữa mặt phẳng nghiêng và quả bóng có một ảnh hưởng quan trọng. Vận tốc của tâm quả bóng lăn không giống như vận tốc của một vật trượt tịnh tiến trên mặt phẳng nghiêng.

Như vậy ngay trong khi tiếp cận ban đầu cũng không thể không kể đến sự quay của bóng.

■ **Ví dụ phản chứng 2**

Tác động cơ học lên một nam châm đặt trong một từ trường làm cho chuyển động của nam châm phụ thuộc vào sự định hướng của nó. Nếu sự định hướng đó biến đổi theo thời gian, thì nam châm không thể được coi như một chất điểm.

Không thể ghi một định luật tổng quát thành công thức, khái niệm về chất điểm cho phép, trong vài trường hợp tiếp cận ban đầu chuyển động của một vật rắn. Giá trị của **sự mô hình hóa** này không phụ thuộc vào kích cỡ vật rắn, mà phụ thuộc vào bản chất, vào môi trường và các giả thiết đơn giản hóa của vật rắn.

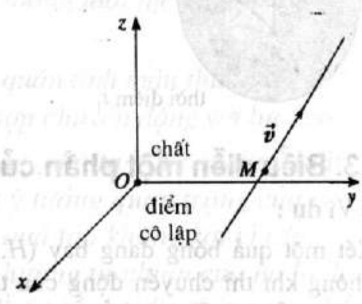
2 Nguyên lí quán tính, hay định luật thứ nhất của NEWTON

2.I. Phát biểu của định luật Newton thứ nhất

Một chất điểm không chịu bất kì một tác dụng cơ học nào, được gọi là *cô lập*. Ta phát biểu thành tiên đề :

Tồn tại một lớp các hệ quy chiếu, gọi là các hệ quy chiếu Galilée, mà đối với chúng thì một chất điểm cô lập sẽ chuyển động thẳng đều.

Nhớ rằng một chuyển động thẳng đều được đặc trưng bởi một vectơ vận tốc không đổi *(H.4)*.

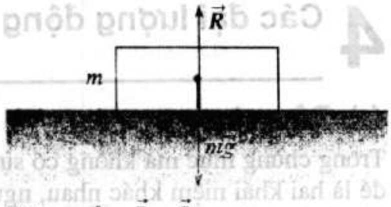


H.4. *Vận tốc $\vec{v}$ của một chất điểm là không đổi.*

2.2. Trường hợp của hệ quy chiếu Trái Đất

Trong phần lớn các thí nghiệm thường ngày, hệ quy chiếu Trái Đất, gắn với mặt đất, có thể được coi như hệ quy chiếu Galilée. Quan điểm này sẽ được bàn luận trong tập cơ học II, chương 2.

Trong mọi áp dụng của chương này, ta đều giả thiết hệ quy chiếu Trái Đất là hệ Galilée.



H.5. $m\vec{g} + \vec{R} = \vec{0}$

2.3. Chất điểm giả cô lập

Một chất điểm cô lập là một sự trừu tượng hoá không thể thực hiện được, tuy nhiên điều có thể xảy ra là các tác dụng cơ học bù trừ chính xác cho nhau. Lúc đó, chất điểm được gọi là *giả cô lập* và có thể áp dụng cho nó nguyên lí quán tính.

Ví dụ:

Trên một cái bàn nằm ngang có đệm không khí, vận tốc của một động tử khối lượng m là không đổi với độ chính xác của sai số đo. Để giải thích, ta có thể đưa ra các giả thiết sau đây:

- *động tử là giả cô lập, vì phản lực của bàn bù trừ đúng trọng lượng (H5):*

$$m\vec{g} + \vec{R} = \vec{0}\ ;$$

- *hệ quy chiếu gắn với bàn, cũng gắn với mặt đất, là gần đúng hệ Galilée*

3 Khối lượng của một chất điểm

3.I.Quán tính cơ học

Ta tưởng tượng có một xe đẩy trẻ em và một xe ôtô đang đứng yên trên đường đi nằm ngang.

Ta có thể đẩy các xe đó để làm chúng chuyển động.

Muốn đạt tới cùng một vận tốc như nhau, thì phải đẩy ôtô mạnh hơn và lâu hơn và một khi đã cho chạy thì cũng khó làm ô tô dừng lại hơn. Sức cản lại sự *biến đổi* của vận tốc được gọi là **quán tính.**

3.2. Khối lượng của một chất điểm

Đối với một chất điểm , tính chất quán tính được biểu diễn bởi một yếu tố vô hướng, có giá trị dương gọi là **khối lượng.**

Khối lượng của một chất điểm càng lớn, thì càng khó thay đổi vận tốc của nó.

Khối lượng bất biến theo thời gian và không phụ thuộc hệ quy chiếu. Đó là *một đặc trưng nội tại của* chất điểm.

Trong hệ đơn vị quốc tế, đơn vị khối lượng là kilogam (*ký hiệu :* kg).

Theo định nghĩa, đó là khối lượng của một chuẩn kilogam ở phòng quốc tế các trọng lượng và đo lường.

3.3.Tính cộng được của khối lượng (cơ học phi tương đối tính)

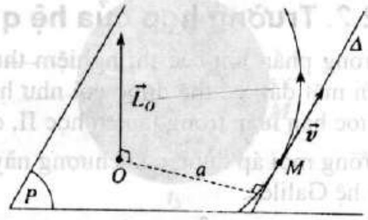
Cho hai chất điểm khối lượng m_1 và m_2. Nếu chúng được hợp lại để tạo thành một chất điểm duy nhất khối lượng m, thì khi đó :

$$m = m_1 + m_2.$$

4 Các đại lượng động học

4.I. Động lượng

Trong chừng mực mà không có sự nhầm lẫn có thể xảy ra, và dù rằng vấn đề là hai khái niệm khác nhau, người ta vẫn thường chỉ định chất điểm và vị trí của nó bằng cùng một chữ như nhau.



H.6. *Mômen động lượng.*

Động lượng đối với hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ của một chất điểm M có khối lượng m và vị trí M đối với hệ quy chiếu $\mathcal{R}$, là:

$$\vec{p} = (M)_{/\mathcal{R}} = m\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$$

4.2. Mômen động lượng

Mômen động lượng ở 0 trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}$, của một chất điểm M có khối lượng m là:

$$\vec{L}_o(M)_{/\mathcal{R}} = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$$

Khi không nhầm lẫn nghĩa thì có thể dùng các kí hiệu đã giản ước :

$$\vec{p} = m\vec{v} \text{ và } \vec{L}_o = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$$

Chú ý :

- *Cho Δ là đường thẳng qua M , song song với $\vec{v}$, và a là khoảng cách giữa O và Δ (H.6.). Mômen động lượng ở 0 của M, vuông góc với mặt phẳng xác định bởi Δ và 0 và sẽ có biểu thức :*

$$L_0 = mav.$$

- ***Nếu M chuyển động trên đường tròn** tâm 0 , bán kính r với vận tốc góc ω, trong một mặt phẳng mà vectơ đơn vị pháp tuyến là $\vec{e}_z$, lúc đó (H.7) :*

$$\vec{L}_0 = mr^2\omega\vec{e}_z.$$

4.3. Mômen động lượng đối với một trục

Cho trục định hướng Δ, xác định bởi điểm O và vectơ đơn vị $\vec{e}$. Chứng tỏ rằng tích vô hướng $\vec{e}.\vec{L}_o(M)_{/\mathcal{R}}$ không phụ thuộc điểm 0 lựa chọn trên Δ.

Muốn thế, ta hãy xét hai điểm 0 và $0'$ của Δ :

$$\vec{e}.\vec{L}_o - \vec{e}\vec{L}_{o'} = m\vec{e}.\left(OO' \wedge \vec{v}\right).$$

$\vec{e}$ và $00'$ song song nhau, vậy nên :

$$\vec{e}.\vec{L}_0 = \vec{e}\vec{L}_{0'}$$

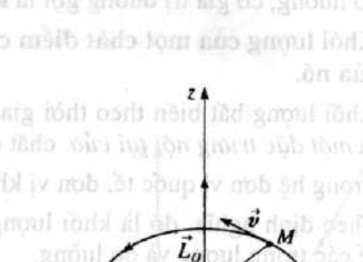
Mômen động lượng đối với trục Δ, xác định bởi điểm 0 và vectơ chỉ hướng $\vec{e}$, của chất điểm M trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ là đại lượng vô hướng :

$$\vec{L}_\Delta(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{e}.\vec{L}_0(M)_{/\mathcal{R}}.$$

Đại lượng này độc lập với sự chọn điểm 0, một điểm bất kì của trục Δ

$\vec{L}_\Delta$ là hình chiếu trên Δ của mômen động lượng $\vec{L}_0$

Nối chung, L_Δ khác với L_0.



H.7. *Chuyển động tròn : mômen động lượng ở 0.*

Áp dụng 1

Mômen động lượng trong tọa độ trụ

Hệ tọa độ Descartes (O; $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) được cố định trong $\mathcal{R}$, hãy biểu diễn mômen động lượng ở 0 và mômen động lượng đối với trục (Oz) theo tọa độ trụ của điểm M (H.8).

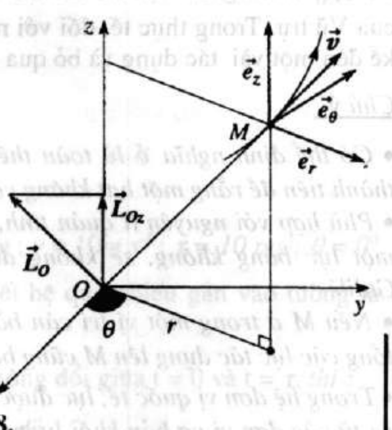
Ta có (kí hiệu giản ước) :

$$\vec{L}_0 = m\left[(r\vec{e}_r + z\vec{e}_r) \wedge (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z)\right]$$

$$\vec{L}_0 = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z + m(z\dot{r} - r\dot{z})\vec{e}_\theta - mrz\dot{\theta}\vec{e}_r ;$$

do đó : $L_{(Oz)} = mr^2\dot{\theta}$.

Trong trường hợp của chuyển động trên mặt phẳng (Oxy), và chỉ ở trường hợp này : $\vec{L}_0 = L_{(Oz)}\vec{e}_z$.



H.8.

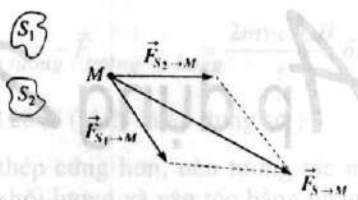
5 Các tiên đề của động lực học chất điểm

Giống như mọi lí thuyết, cơ học cổ điển (hay cơ học Newton) cũng dựa trên một số tiên đề nhất định.

5.1. Khái niệm về lực

Tác dụng cơ học của một vật thể S lên một chất điểm M được đặc trưng bởi một vectơ gọi là lực mà ta kí hiệu là $\vec{F}_{S\to M}$.

Ta thừa nhận rằng *lực không phụ thuộc vào hệ quy chiếu.* Đó là một đại lượng nội tại, đặc trưng cho tương tác giữa S và M.



H.9. Tính cộng được của các lực.

$S = S_1 + S_2$,

Vậy $\vec{F}_{S\to M} = \vec{F}_{S_1\to M} + \vec{F}_{S_2\to M}$.

5.2. Tính cộng được của các lực

Lực tổng hợp của nhiều tác dụng cơ học bằng tổng vectơ của các lực do mỗi một trong các tác dụng đó gây ra. Nếu S được cấu thành bởi sự hợp lại của các S_i (*H.9*), thì cộng tính đó sẽ được thể hiện bởi :

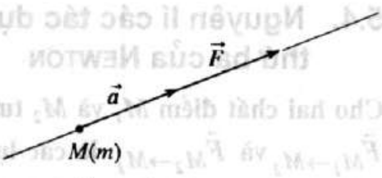
$$\vec{F}_{S\to M} = \sum_i \vec{F}_{S_i\to M}.$$

5.3. Hệ thức cơ bản của động lực học, hay định luật thứ hai của NEWTON

$\mathcal{R}_g$ là một hệ quy chiếu Galilée, M là một chất điểm khối lượng m và $\mathcal{E}$ là toàn thể vũ trụ ngoại trừ M, thì các lực tác dụng lên M và chuyển động của nó liên kết với nhau bởi định luật (*H.10*) :

Hệ thức cơ bản của động lực học :

$$\vec{F}_{\mathcal{E}\to M} = m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g}.$$



H.10. $\vec{F} = m\vec{a}$.

Hệ thức này cấu thành định luật thứ hai của Newton, còn có dạng :

Định lí về động lượng :

$$\vec{F}_{\mathscr{E}\to M} = \left(\frac{d\vec{p}(M)_{/\mathscr{R}_g}}{dt}\right)_{\mathscr{R}_g}$$

$\vec{F}_{\mathscr{E}\to M}$ là tổng các lực do các tác dụng lên M của tất cả các vật thể khác của Vũ trụ. Trong thực tế, đối với một bài toán cho trước, thì người ta chỉ kể đến một vài tác dụng và bỏ qua các tác dụng khác.

<u>*Chú ý :*</u>

- *Có thể định nghĩa $\mathscr{E}$ là toàn thể Vũ trụ đầy đủ, bằng cách phát biểu thành tiên đề rằng một hạt không có tác dụng lên chính nó.*
- *Phù hợp với nguyên lí quán tính, thì một chất điểm, chịu tác dụng của một lực bằng không, sẽ không được gia tốc trong một hệ quy chiếu Galilée.*
- *Nếu M ở trong một vị trí cân bằng, thì gia tốc của nó bằng không và tổng các lực tác dụng lên M cũng bằng không.*
- *Trong hệ đơn vị quốc tế, lực được biểu thị bằng niutơn (N); nó được suy ra từ các đơn vị cơ bản khối lượng (kg), chiều dài (m) và thời gian (s) từ hệ thức $\vec{f} = m\vec{a}$: $1N = 1kg.m.s^{-2}$.*

Áp dụng 2

Ném tạ

Một vận động viên điền kinh ném một "quả tạ" khối lượng $m = 7,3$ kg với một vận tốc $v_0 = 15m.s^{-1}$.

Tính cỡ độ lớn của lực F mà vận động viên tác dụng lên quả tạ đó. Để đơn giản hoá, ta giả thiết rằng lực không đổi này có tác dụng trên một quãng đường thẳng chiều dài $l = 1,5m$, còn các lực khác (trọng lực, ..) là không đáng kể so với F (H.11).

Gọi τ là thời gian ném tạ. Vấn đề ở đây là một chuyển động thẳng nhanh dần đều, vậy nên :

$$l = \frac{F}{2m}\tau^2 = \frac{mv_o^2}{2F};\ F \approx 500N.$$

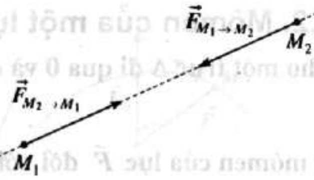
H.11. *Ném tạ.*

5.4. Nguyên lí các tác dụng tương hỗ, hay định luật thứ ba của NEWTON

Cho hai chất điểm M_1 và M_2 tương tác với nhau. Các lực tương tác $\vec{F}_{M_1\to M_2}$ và $\vec{F}_{M_2\to M_1}$ là các lực đối nhau và cùng trên một đường thẳng với trục (M_1M_2).

Nguyên lí các tác dụng tương hỗ này, đôi khi được gọi là nguyên lí tác dụng và phản tác dụng, được thể hiện bởi *(H.12)* :

$$\vec{F}_{M_1\to M_2} = -\vec{F}_{M_2\to M_1}$$
$$\vec{F}_{M_1\to M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{0}$$



H.12. *Các tác dụng tương hỗ*

Áp dụng 3

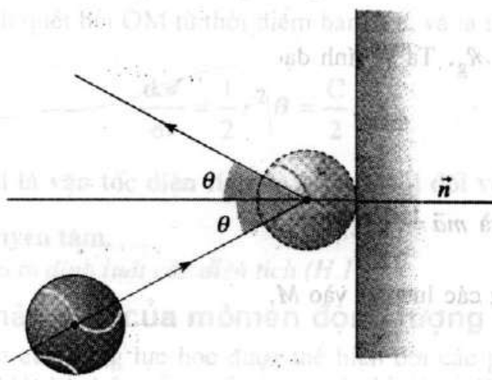
Sự nẩy lên của quả bóng trên tường

Một quả bóng, được coi như một chất điểm khối lượng m, nẩy trở lại trên một bức tường (H.13). Vận tốc quả bóng được bảo toàn và góc nẩy bằng góc tới θ.

Hãy xác định lực do quả bóng tác dụng lên tường với giả thiết là lực đó không đổi trong suốt thời gian tiếp xúc τ và coi tất cả các lực khác là không đáng kể.

Tìm sự khác nhau giữa một quả bóng quần vợt và một viên bi thép ?

Bình luận các giả thiết và kết quả.



H.13. *Sự nảy lên .*

Dữ liệu :

$m = 60g$; $v = 10 m.s^{-1}$; $\tau = 10$ ms ; $\theta = 0^0$.

Ta giả thiết hệ quy chiếu gắn vào tường là hệ Galilée.

Nếu $\vec{F}$ không đổi giữa t = 0 và t = τ, thì :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \text{ do đó } \vec{p}(\tau) - \vec{p}(0) = \vec{F}\tau.$$

Vậy nên :

$$\vec{F}_{bóng \to tường} = -\vec{F}_{tường \to bóng} = \frac{2mv\cos\theta}{\tau}\vec{n}.$$

A.N. : $F = 120$ N (A.N là áp dụng số)

Vì viên bi thép cứng hơn, nên tương tác ngắn hơn và với khối lượng và vận tốc bằng nhau thì lực sẽ mạnh hơn. Một viên bi cứng được ném vào một vách rắn, sẽ tác động lên điểm tiếp xúc trong một thời gian rất ngắn, một lực rất mạnh có thể gây ra sự rạn nứt. Trọng lượng quả bóng rất không đáng kể so với F.

Thực tế thì lực không phải là không đổi. Giá trị tính toán được tương ứng với lực trung bình.

6 Định lí mômen động lượng

6.I. Mômen của một lực

Theo định nghĩa, mômen đối với điểm 0 của một lực $\vec{F}$ đặt vào M là :

$$\mathscr{M}_0 = O\vec{M} \wedge \vec{F}.$$

Nếu $\vec{F}$ ở trên cùng một đường thẳng với $\overrightarrow{OM}$, thì $\mathscr{M}_0 = 0$.

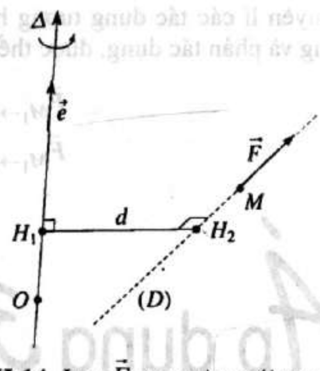
6.2. Mômen của một lực đối với một trục

Cho một trục Δ đi qua 0 và có vectơ đơn vị $\vec{e}$. Tích vô hướng :

$$\mathcal{M}_\Delta = \vec{\mathcal{M}}_0.\vec{e}$$

là mômen của lực $\vec{F}$ đối với trục Δ.

Tích vô hướng có cùng một giá trị như nhau đối với mọi điểm 0 của Δ.



H.14. *Lực $\vec{F}$ trực giao với trục Δ: $\mathcal{M}_\Delta = Fd$*

6.2.I. Lực song song với trục Δ

Mômen đối với Δ của một lực song song với Δ thì bằng không.

6.2.2. Lực trực giao với trục Δ

Cho một lực $\vec{F}$, trực giao với Δ, đặt vào điểm M và D là đường thẳng cùng trên một tuyến với $\vec{F}$ đi qua M. Nhớ rằng d là chiều dài của đoạn H_1H_2 (cánh tay đòn) của đường vuông góc chung với Δ và D *(H.14)*:

$$\mathcal{M}_\Delta = \left(\overrightarrow{H_1M} \wedge \vec{F}\right).\vec{e} = \left(\overrightarrow{H_1H_2} \wedge \vec{F}\right).\vec{e}.$$

Như vậy ta có thể nhớ *quy tắc tính* sau :

- $|\mathcal{M}_\Delta| = Fd;$
- $\mathcal{M}_\Delta > 0$ nếu $\vec{F}$ " làm quay " M chung quanh Δ theo chiều dương;
- $\mathcal{M}_\Delta < 0$ trong trường hợp ngược lại.

Chú ý :

Quy tắc tính toán này có thể được áp dụng cho một lực bất kì, bằng cách phân tích lực đó thành một lực song song với Δ và một lực trực giao với Δ.

6.3. Các định lí

O là một điểm cố định đối với hệ quy chiếu Galilée $\mathcal{R}_g$. Ta sẽ tính đạo hàm trong $\mathcal{R}_g$ của $\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}_g}$ đối với thời gian.

Đơn giản hóa các kí hiệu ta có:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = m\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \vec{v} + m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{a}, \text{ với } \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{v} \text{ và } m\vec{a} = \vec{F}_{\mathscr{E} \to M}.$$

Nếu $\vec{\mathcal{M}}_{O\mathscr{E} \to M}$ biểu diễn mômen đối với O của tổng các lực đặt vào M, thì kết quả là :

Định lí mômen động lượng :

$$\vec{\mathcal{M}}_{O\mathscr{E} \to M} = \left(\frac{d\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}_g}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g}, \ \textbf{O là một điểm cố định trong } \mathcal{R}_g.$$

Cho Δ là một trục cố định trong $\mathcal{R}_g$. Nếu chiếu hai số hạng của phương trình trên lên Δ, thì ta được :

Định lí vô hướng của mômen động lượng đối với Δ :

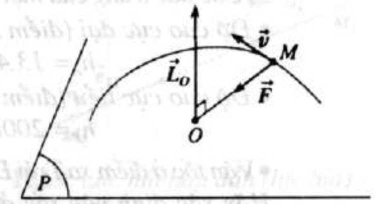
$$\mathcal{M}_{\Delta\mathscr{E} \to M} = \frac{dL_\Delta(M)_{/\mathcal{R}_g}}{dt}, \ \Delta \textbf{ là một trục cố định trong } \mathcal{R}_g.$$

▸ **Để tập luyện : bài tập 9.**

7 Chuyển động do lực xuyên tâm

7.l. Định nghĩa

Cho một điểm *O* cố định của một hệ quy chiếu Galilée $\mathcal{R}_g$. Một chất điểm *M* sẽ chịu tác dụng của một trường lực xuyên tâm có tâm ở *O* nếu tại mỗi thời điểm, lực $\vec{F}$ được đặt vào *M* ở trên cùng một đường thẳng với $\overrightarrow{OM}$.



H.15. *Dưới tác dụng của một lực xuyên tâm, M vạch một quỹ đạo phẳng.*

7.2. Sự bảo toàn mômen động lượng

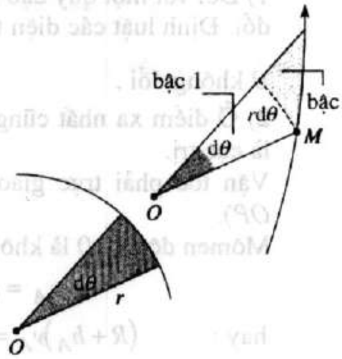
Trong trường hợp một lực xuyên tâm thì $\mathcal{M}_O$ bằng không. Như vậy, tại mỗi thời điểm, $\overrightarrow{OM}$ vuông góc với vectơ không đổi $\vec{L}_O$. Quỹ đạo của *M* là phẳng ; mặt phẳng quỹ đạo vuông góc với vectơ $\vec{L}_O$ và chứa điểm *O* (*H.15*).

7.3. Định luật các diện tích

Ta xác định vị trí của M theo các tọa độ cực của nó trong mặt phẳng quỹ đạo của *M*. Sự bảo toàn của $\vec{L}_O$ được thể hiện bởi :

$$r^2\dot{\theta} = C \text{ (hằng số).}$$

Đại lượng $r^2\dot{\theta}$ được giải thích bằng hình học. *Hình 16* gợi cho chúng ta một ý là, đối với một độ biến thiên nguyên tố dθ, diện tích $d\mathcal{A}$ " quét " bởi bán kính *OM* sẽ tương đương với diện tích của hình quạt tròn bán kính *r* và góc $d\theta$:



H.16. *Diện tích quét bởi bán kính* OM: $d\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}r^2 d\theta$

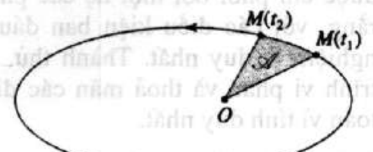
$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2}r^2 d\theta \;.$$

$\mathcal{A}(t)$ là diện tích quét bởi OM từ thời điểm ban đầu, và ta thừa nhận chính xác là :

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{C}{2}$$

$\dfrac{d\mathcal{A}}{dt}$, được gọi là vận tốc diện tích, là không đổi đối với một chuyển động do lực xuyên tâm.

Kết quả này tạo ra *định luật các diện tích (H.17)*.



H.17. *Định luật các diện tích $\mathcal{A}$ tỉ lệ với $t_2 - t_1$.*

7.4. Tích phân đầu của mômen động lượng

Hệ thức cơ bản của động lực học được thể hiện bởi các phương trình vi phân cấp hai. Một hệ thức về sự bảo toàn mà chỉ dùng đến các đạo hàm cấp một, gọi là *tích phân đầu* .

Hệ thức $r^2\dot{\theta} = C$ thể hiện tích phân đầu của mômen động lượng.

Áp dụng 4

Vệ tinh nhân tạo

Trong gần đúng bậc nhất thì một vệ tinh nhân tạo của Trái Đất phải chịu tác dụng của một lực hút xuyên tâm hướng về tâm 0 của Trái Đất giả thiết là cố định đối với một hệ quy chiếu Galilée $\mathcal{R}_g$.

1) Chứng minh vận tốc là đều trên một quỹ đạo tròn.

2) Các đặc trưng của một quỹ đạo elip (H.18) là :

• *Độ cao cực đại (điểm xa Trái Đất nhất):*

$h_A = 13.400\ km$;

• *Độ cao cực tiểu (điểm gần Trái Đất nhất) :*

$h_P = 200km$;

• *Vận tốc ở điểm xa Trái Đất nhất :* $v_A = 4{,}5\ km.s^{-1}$

Hãy xác định vận tốc ở điểm gần Trái Đất nhất và chu kì quay trong $\mathcal{R}_g$.

Dữ liệu : bán kính Trái Đất : $R = 6{,}4.10^6\ m$;

diện tích của một elip : $S = \pi ab = \pi a\sqrt{a^2 - c^2}$

1) Đối với một quỹ đạo tròn, bán kính r là không đổi. Định luật các diện tích như vậy sẽ kéo theo $\dot{\theta}$ không đổi .

2) Ở điểm xa nhất cũng như ở điểm gần nhất, *r* là cực trị.

Vận tốc phải trực giao với bán kính *OA* (hay *OP*).

Mômen động ở 0 là không đổi :

$$r_A v_A = r_P v_P ,$$

hay : $(R + h_A)v_A = (R + h_P)v_P$.

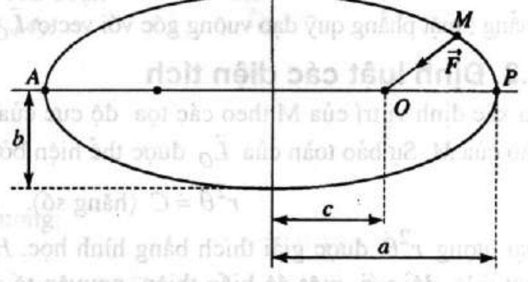
Do đó : $v_P = 9{,}1 km.s^{-1}$

Diện tích của elip là $S = 2{,}95.10^8\ km^2$.

Nếu T là chu kì, thì vận tốc diện tích là :

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2} r_A v_A = \frac{S}{T} .$$

Do đó : $T = 9{,}8.10^3$ s .



H.18. *Quỹ đạo elip tiêu điểm O.*

8 Nghiệm của các phương trình cơ học

8.I. Tính duy nhất

Các lực được biểu diễn theo hàm số của các vị trí, các vận tốc, các gia tốc và thời gian. Như vậy, sự vận động của một tập hợp các chất điểm được chi phối bởi một hệ các phương trình vi phân cấp 2. Ta thừa nhận rằng, với các điều kiện ban đầu (các vị trí và các vận tốc) cho trước, nghiệm là duy nhất. Thành thử, một nghiệm, nghiệm đúng các phương trình vi phân và thoả mãn các điều kiện ban đầu, sẽ là nghiệm của bài toán vì tính duy nhất.

8.2. Thuyết quyết định cơ học

Như vậy, các phương trình cơ học về mặt lí thuyết có tính chất quyết định luận. Thực tế, các điều kiện ban đầu chỉ được nhận biết với một độ không chính xác nào đó và, đối với các hệ phức tạp, thì một sự biến đổi nhỏ của các điều kiện ban đầu có thể được thể hiện, sau một thời gian nào đó, bằng nghiệm rất khác nhau.

Sự tiên đoán dài hạn như vậy, cũng biểu hiện một tính chất ngẫu nhiên. Ngay cả khi ta đã biết các vị trí ban đầu của các viên bi được đánh số và đặt trong rổ đồ chơi lôtô, thì vẫn không thể tiên đoán được số trúng giải.

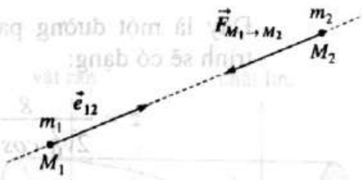
9 Lực trọng trường

Trong mọi điều tiếp theo, nếu không ghi ngược lại, thì tất cả các đại lượng đều được xác định trong hệ quy chiếu Trái Đất $\mathcal{R}$ được giả thiết là hệ Galilée.

9.1.Tương tác hấp dẫn

Hai chất điểm M_1 và M_2 có khối lượng m_1, m_2 và cách nhau một khoảng r, tác dụng lên nhau một lực hút, gọi là lực hấp dẫn sao cho:

$$\vec{F}_{M_1 \to M_2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_{12}.$$



H.19. *Lực hút hấp dẫn (lực hút).*

$G = 6{,}672.10^{-11}$ N.m^2. kg^{-2} là một hằng số vũ trụ.

$\vec{e}_{12}$ là vectơ đơn vị của trục M_1M_2 định hướng từ M_1 về M_2 (*H.19*).

Định luật này, gọi là *định luật vạn vật hấp dẫn*, đã được NEWTON lập thành công thức để giải thích các quỹ đạo hành tinh.

Khối lượng trọng lượng có mặt trong biểu thức của lực hấp dẫn giống hệt như *khối lượng quán tính* trong hệ thức cơ bản của động lực học. Đây là *một tiên đề phụ* mà hiệu lực của nó đã được tất cả các thí nghiệm xác nhận.

9.2. Trọng lực Trái Đất

Ở lân cận bề mặt Trái Đất, một vật thể khối lượng m phải chịu tác dụng của **trọng lượng** của nó:

$$\vec{P} = m\vec{g}.$$

Trong gần đúng bậc nhất, thì trọng lượng bằng lực hấp dẫn do Trái Đất thực hiện. Lực này gần như đồng đều trong một phạm vi mà các kích thước còn nhỏ so với bán kính Trái Đất R_T. Do đó:

$$\vec{g} \approx -G \frac{m_T}{R_T^2} \vec{e}_r.$$

Giá trị của $\vec{g}$ xấp xỉ g = 9,8 m. s^{-2}.

Định nghĩa trọng lượng và trường trọng lực sẽ được chính xác hóa trong tập Cơ học II, *chương 2*.

Theo định nghĩa, thì ở một nơi cho trước, **đường thẳng đứng** là phương của $\vec{g}$.

Áp dụng 5

Chuyển động của một viên đạn ở gần mặt đất

Ta giả thiết rằng trường trọng lực $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ là đều, còn các lực khác, đặc biệt là lực do ma sát của không khí gây ra, đều không đáng kể.

Viên đạn được phóng đi ở thời điểm $t = 0$ từ điểm 0.

Vectơ vận tốc ban đầu, song song với mặt phẳng (Oxz), được xác định bởi giá trị v_0 và góc α.

1/ Xác định quỹ đạo của viên đạn.

2/ Cho trước vận tốc $\vec{v}_0$, tính các giá trị góc α để viên đạn tới được một bia C ở tọa độ $(x_C, 0, z_C)$.

Từ đó suy ra tập hợp các điểm mà viên đạn, với một vận tốc ban đầu $\vec{v}_0$ cho trước, có thể tới được.

1/ $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{g}$, cho $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = 0$, $\ddot{z} = -g$.

Khi kể đến các điều kiện ban đầu ở $t = 0$, ta thu được lần lượt :

$\ddot{x} = 0$, $\quad \dot{x} = v_0 \cos\alpha \quad x = v_0 \cos\alpha t$;

$\ddot{y} = 0 \quad \dot{y} = 0, \quad y = 0$

$\ddot{z} = -g$, $\dot{z} = -gt + v_0 \sin\alpha$,

$z = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin\alpha t$.

Quỹ đạo ở trong mặt phẳng thẳng đứng chứa vận tốc ban đầu.

Đây là một đường parabôn (*H.20*) mà phương trình sẽ có dạng:

$$z=-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2+\tan\alpha x.$$

bằng cách khử t.

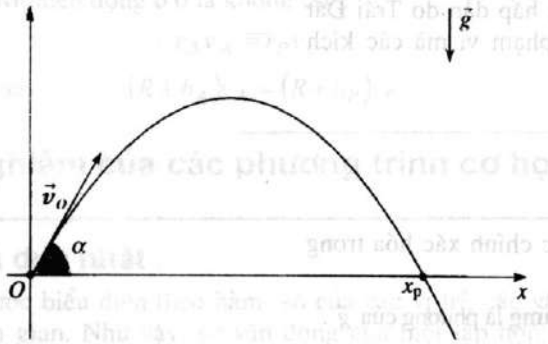
Tầm bắn x_P là giá trị của x mà theo đó, viên đạn lại rơi ở độ cao $z=0$:

$$x_P=\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha.$$

Tầm bắn là cực đại nếu $\alpha=\frac{\pi}{4}$

2/ x_C và z_C phải nghiệm đúng phương trình quỹ đạo :

$$z_c=-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x_c^2+\tan\alpha x_c.$$



H.20. *Quỹ đạo và tầm bắn.*

H.21. *Hai quỹ đạo giữa O và C.*

Vậy α là nghiệm của phương trình :

$$\frac{gx_c^2}{2v_0^2}\tan^2\alpha+x_c\tan\alpha-\frac{gx_c^2}{2v_0^2}-z_c=0$$

mà biệt số là :

$$\Delta=x_c^2-4\frac{gx_c^2}{2v_0^2}\left(\frac{gx_c^2}{2v_0^2}+z_c\right).$$

- $\Delta<0$: bài toán không có nghiệm; không thể tới được C.
- $\Delta=0$: bài toán có một nghiệm.
- $\Delta>0$: bài toán có hai nghiệm : *bắn thẳng và bắn cầu vồng* (*H.21*).

Có thể tới được điểm C nếu $\Delta\geq 0$, nghĩa là nếu :

$$z_c\leq-\frac{g}{2v_0^2}x_c^2+\frac{v_0^2}{2g}$$

Các điểm có thể tới được của mặt phẳng (Oxz) đều ở dưới đường *parabôn an toàn* (*H.22*) có phương trình :

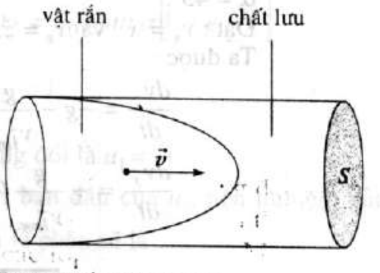
$$z=-\frac{g}{2v_0^2}x^2+\frac{v_0^2}{2g}.$$

H.22. *Parabôn an toàn : đường cong màu đen.*

10 Lực ma sát trong một chất lưu

10.1. Lực ma sát

Không thể phân tích hết tất cả các tương tác vi mô giữa một vật rắn và các hạt cấu thành một chất lưu. Tuy nhiên, tập hợp các tương tác đó có thể được mô hình hóa bằng một lực trung bình gọi là *lực ma sát*. Không có một định luật tổng quát để biểu thị lực này, nhưng có các định luật gần đúng áp dụng cho từng trường hợp.



H.23. *Tiết diện ngang.*

Ta sẽ sử dụng hai định luật ma sát của chất lưu tương ứng với hai trường hợp giới hạn :

- lực ma sát tỉ lệ với v^2 đối với các vận tốc lớn;
- lực ma sát tỉ lệ với v đối với các vận tốc nhỏ.

10.2. Vật rắn tịnh tiến với vận tốc lớn

10.2.1. Định luật ma sát

Cho một vật rắn tịnh tiến với vectơ vận tốc $\vec{v} = v\vec{T}$.

Nếu vận tốc v đủ lớn (không cần chính xác hóa hơn nữa tiêu chuẩn này), thì lực ma sát, với tính xấp xỉ cao, sẽ bằng :

$$\vec{F}_{frot} = -KSv^2\vec{T}$$

S là **tiết diện ngang** của hình trụ sinh ra bởi vật rắn khi nó chuyển động tịnh tiến (*H.23*).

K là một hằng số phụ thuộc vào hình dạng của vật rắn và bản chất của chất lưu.

10.2.2. Sự rơi tự do trong không khí. Vận tốc giới hạn

Với định luật ma sát nói trên, chuyển động của một chất điểm trong khí quyển sẽ được xác định bởi phương trình vi phân :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - KSv^2\vec{T}$$

Phương trình vi phân này có một nghiệm không đổi :

$$\vec{v}_0 = -\sqrt{\frac{mg}{KS}}\vec{e}_z$$

Dù các điều kiện ban đầu có thế nào đi nữa, thì tất cả các nghiệm đều hội tụ về vận tốc này gọi là **vận tốc giới hạn**.

Chỉ có thể dùng phương pháp giải tích để giải đối với một chuyển động thẳng đứng. Trong các trường hợp khác, phải dùng cách giải số.

Áp dụng 6

Bắn một viên đạn vào khí quyển

Một viên đạn được bắn từ mặt đất, từ điểm 0, với vận tốc ban đầu xác định bởi v_0 và α. Lực ma sát của không khí có thể được mô hình hóa bằng một lực tỉ lệ với bình phương của vận tốc, với vận tốc giới hạn v_{lim}. Hãy xác định quỹ đạo bằng cách sử dụng một phần mềm tích phân số các phương trình vi phân. Hãy tính độ cao cực đại và tầm bắn..

Dữ liệu : $g = 9{,}8 m.s^{-2}$; $v_{lim} = 20 m.s^{-1}$; $v_0 = 40\ m.s^{-1}$; $\alpha = 45^0$.

Đặt : $v_x = \dot{x}$ và $v_z = \dot{z}$.

Ta được :

$$\frac{dv_z}{dt} = -g - \frac{g}{v_{lim}^2}(v_x^2 + v_z^2)^{1/2} v_z.$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{g}{v_{lim}^2}(v_x^2 + v_z^2)^{1/2} v_x.$$

Phép giải số của hệ này cho ta quỹ đạo (*H.24*).

Viên đạn lại rơi xuống đất ở $x = x_P = 48$ m (tầm bắn) sau 3,8s.

Khi không có lực ma sát, ta sẽ tìm được tầm bắn 163m (xem áp dụng 5).

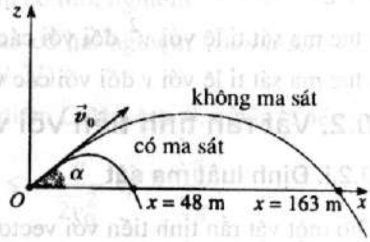
▸ **Để tập luyện : bài tập 7.**

I0.3. Vật rắn tịnh tiến với vận tốc nhỏ

I0.3.I. Định luật ma sát

Nếu vận tốc tịnh tiến khá nhỏ (không cần chính xác hóa hơn nữa tiêu chuẩn này), thì lực ma sát với tính xấp xỉ cao, sẽ bằng :

$$\vec{F}_{frot} = -h\vec{v}$$



H.24. *Quỹ đạo trong khí quyển.*

Lúc này, ta nói về **lực ma sát nhớt**. h là một hệ số, phụ thuộc vào chất lưu, các kích thước của vật rắn và nếu như vật rắn không phải là hình cầu, thì còn phụ thuộc vào sự định hướng của nó đối với $\vec{v}$.

I0.3.2. Rơi tự do trong một chất lưu nhớt

Theo định luật ma sát này, thì chuyển động của một chất điểm, chịu tác dụng của trọng lượng của nó và tác dụng của chất lưu, sẽ nghiệm đúng phương trình vi phân :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - h\vec{v} + \vec{f}'.$$

$\vec{f}'$ biểu diễn các lực do chất lưu gây ra, nhưng không kể đến lực ma sát.

Với tính gần đúng cao, và mặc dù có chuyển động, các lực đó vẫn có thể coi như lực đẩy Archimède.

Vì M là khối lượng của chất lưu chiếm một thể tích bằng thể tích của vật rắn được biểu diễn bằng chất điểm, nên phương trình trở thành :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = (m - M)\vec{g} - h\vec{v}.$$

Tồn tại một nghiệm không đổi hiển nhiên là :

$$\vec{v}_0 = \frac{m\ M}{h}\vec{g}.$$

Tất cả các nghiệm đều hội tụ về vận tốc này. Và như vậy, đây là vận tốc giới hạn.

Áp dụng 7

Sự rơi của một quả cầu vào trong nước

Một quả cầu khối lượng m xuyên sâu vào trong nước tại điểm 0, ở thời điểm t = 0 với vận tốc ban đầu xác định bởi giá trị v_0 và góc α (H.25). Đối với hệ quy chiếu Trái Đất, thì nước đứng yên và tác dụng của nó quy về lực đẩy Archimède có giá trị Mg và một lực ma sát tỉ lệ với vận tốc. Vận tốc có khuynh hướng tiến về một giá trị giới hạn v_{lim}.

1/ Nghiên cứu sự chuyển động của quả cầu. Lời khuyên: nên dùng các biến số không thứ nguyên:

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{v_{lim}},\ \xi = \frac{t}{\tau} \ \text{ và } \ \zeta = \frac{z}{l}$$

với $\tau = \frac{m}{h}$ *và* $l = v_{lim}\tau$.

Giải thích sự thay đổi về các biến số nói trên.

2/ Mô tả tốc đồ và quỹ đạo.

3/ Tính giá trị cực đại x_{lim} cũng như độ sâu z_{lim} đạt tới, khi $x = 0,99\,x_{lim}$.

Dữ liệu : $v_0 = 2,0m.s^{-1}$; $\alpha = 45^0$; $m = 1,4kg$;

$M = 0,40kg$; $g = 10m.s^{-2}$; $v_{lim} = 1,0m.s^{-1}$

4/ Đối với một hình cầu, hệ số ma sát tỉ lệ với bán kính. Vậy phải sửa đổi các đại lượng đặc trưng (v_{lim}, τ và l) như thế nào đối với một quả cầu được làm bằng cùng vật liệu như nhau nhưng nặng hơn hai lần ?

1/Theo hệ thức cơ bản của động lực học thì ta có:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -(m - M)g\vec{e}_z - h\vec{v},$$

hay
$$\frac{d\vec{u}}{d\xi} + \vec{u} = -\vec{e}_z.$$

Phương trình vi phân đã giản ước này, độc lập với các thông số riêng biệt của bài toán. v_{lim} và τ là vận tốc và thời gian đặc trưng của bài toán. Cũng như vậy, l xuất hiện như là khoảng cách đặc trưng.

Gọi u_x, u_y, u_z là các thành phần của vectơ $\vec{u}$.

• $u_y = 0$, do đó $v_y = 0$ và $y = 0$.

• $\frac{du_x}{d\xi} = -u_x$, do đó : $u_x = u_{x0}e^{-\xi}$.

và $v_x = v_0 \sin\alpha e^{-t/\tau}$.

Sau một phép lấy tích phân nữa, ta được.

$$x(t) = v_0\tau \sin\alpha\left[1 - e^{-t/\tau}\right]$$

• $\frac{du_z}{d\xi} = -u_z - 1.$

Nghiệm không đổi là $u_1 = -1$.

u_{z0} là giá trị ban đầu của u_z, nên nghiệm của phương trình vi phân sẽ là :

$$u_z = -1 + (1 + u_{z0})e^{-\xi}$$

hay
$$u_z = \frac{1}{v_{lim}}\frac{dz}{dt} = \frac{d\zeta}{d\xi}.$$

Nếu $\zeta = 0$ đối với $\xi = 0$, thì bằng cách lấy tích phân, ta được :

$$\zeta = -\xi + (1 - u_{z0})\left[1 - e^{-\xi}\right]$$

Và khi quay về các biến có thứ nguyên, ta có :

$$v_z = -v_{lim} + (v_{lim} - v_0\cos\alpha)e^{-t/\tau},$$

và
$$z = -v_{lim}t + (l - v_0\tau\cos\alpha)\left[1 - e^{-t/\tau}\right]$$

2/ Tốc đồ (sự vận động của vectơ $\vec{v}(t)$ trong không gian (v_x, v_z) là một đoạn thẳng có phương trình (*H.26*):

$$v_z = \frac{v_{lim} - v_0\cos\alpha}{v_0\sin\alpha}v_x - v_{lim}.$$

Quỹ đạo có một đường tiệm cận $x_{lim} = v_0\tau\sin\alpha$.

Khi x tiến về x_{lim}, thì vận tốc gần như thẳng đứng và ở lân cận vận tốc giới hạn.

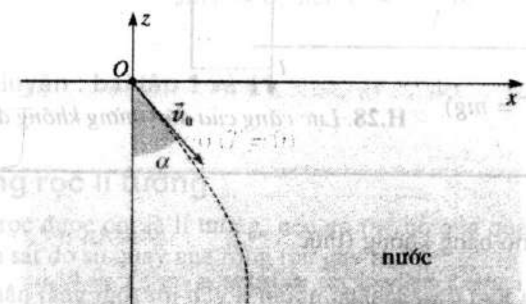
3/ $x_{lim} = 0,20m$; $\tau = 0,14s$; $l = 0,14m$.

$x = 0,99x_{lim}$, do đó : $e^{-t/\tau} = 10^{-2}$

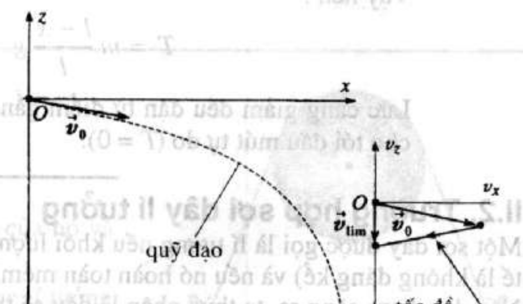
do đó $t = \tau\ln 100$, $t = 0,64s$, và $z_{lim} = 0,70m$.

4/ v_{lim} và τ phải nhân với $2^{2/3} = 1,6$.

l phải nhân với $2^{4/3} = 2,5$.



H.25. *Sự rơi trong một chất lỏng nhớt.*



H.26. *Quỹ đạo và tốc đồ.*

II Lực căng của một sợi dây

I.I. Định nghĩa

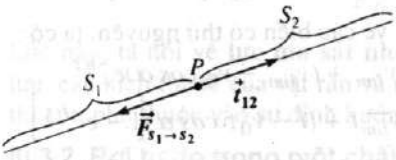
Một sợi dây *mềm* căng thẳng sẽ tách thành hai phần S_1 và S_2 nếu ta cắt dây tại một điểm P. Như vậy, ta thấy tồn tại một lực bảo đảm sự cố kết của sợi dây tại mỗi điểm của nó.

Ta kí hiệu $\vec{t}_{12}$ là vectơ đơn vị tiếp tuyến với sợi dây ở P, định hướng từ S_1 đến S_2. **Lực căng T của sợi dây tại điểm P là một đại lượng vô hướng xác định bởi** (*H.27*):

$$\vec{F}_{S_1 \to S_2} = -T\vec{t}_{12} \quad \text{hay} \quad \vec{F}_{S_2 \to S_1} = T\vec{t}_{12}.$$

Nếu sợi dây căng ra, thì lực căng T là dương.

Lực căng T có liên quan tới một điểm và, trong trường hợp chung, biến đổi dọc theo chiều dài của sợi dây.



H.27. *Lực căng.*

Áp dụng 8

Lực căng của một sợi dây treo

Một sợi dây thừng, mà khối lượng m được phân bố đều trên chiều dài l, đang bất động và được treo ở một đầu.

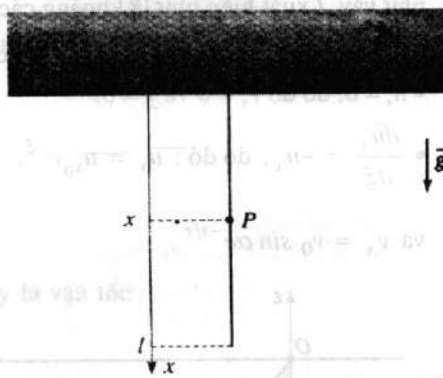
Hãy biểu diễn lực căng tại một điểm, cách xa điểm treo một khoảng x.

Tại P, phần trên tác dụng lên phần dưới một lực làm bù trừ trọng lượng của nó (*H.28*).

Vậy nên :

$$T = m\,\frac{l - x}{l}\,g.$$

Lực căng giảm đều đặn từ điểm gắn kết ($T = mg$) cho tới đầu mút tự do ($T = 0$).



H.28. *Lực căng của dây thừng không đồng đều.*

II.2. Trường hợp sợi dây lí tưởng

Một sợi dây được gọi là lí tưởng nếu khối lượng của nó bằng không (thực tế là không đáng kể) và nếu nó hoàn toàn mềm mại.

Nếu dây được căng ra, ta thừa nhận là dây sẽ thẳng và lực căng của dây là đồng đều (nghĩa là giống hệt nhau tại mọi điểm).

Hai sợi dây lí tưởng nối đầu nhau và căng ra sẽ tương đương với một sợi duy nhất và có cùng lực căng như nhau.

Áp dụng 9

Con lắc đơn

Một con lắc được cấu thành bởi một sợi dây lí tưởng có chiều dài l, cố định ở O và ở đầu có treo một vật thể có hình điểm M, khối lượng m. Con lắc dao động trong mặt phẳng (Oxz), và vị trí của nó được xác định bởi góc θ (H.29).

1/ Tìm phương trình vi phân mà θ nghiệm đúng ?

2/ Xác định chu kì của các dao động nhỏ.

1) • *Phương pháp thứ nhất*

Ta kí hiệu Δ là trục (Oy) và áp dụng định lí mômen động (vô hướng). Mômen đối với trục Δ của lực căng bằng không.

$$L_\Delta = ml^2\dot{\theta} \text{ và } \mu_\Delta = -mgl\sin\theta ;$$

$$\frac{dl_\Delta}{dt} = \mu_\Delta \text{ nên } \ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta.$$

• *Phương pháp thứ 2*

Ta áp dụng hệ thức cơ bản của động lực học. Gọi T là lực căng của sợi dây :

$$m\vec{g} - T\vec{e}_r = m\vec{a}.$$

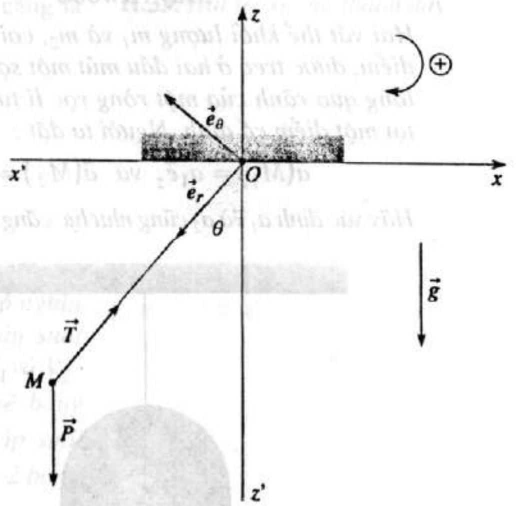
Do đó :

$$\begin{cases} -mg\sin\theta = ml\ddot{\theta}, \\ mg\cos\theta - T = m\dot{\theta}^2 l. \end{cases}$$

Phương trình thứ nhất là phương trình vi phân của chuyển động. Phương trình thứ hai cho phép ta tính được lực căng T.

2) Đối với các giá trị nhỏ của θ , tính gần đúng bậc một cho :

$$\sin\theta \approx \theta, \text{ nên } \ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta.$$



H.29. *Dao động của con lắc đơn.*

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân này là :

$$\theta = \theta_0\cos(\omega t + \varphi) \text{ với } \omega^2 = \frac{g}{l}.$$

θ_0 và φ là hai thông số phụ thuộc vào vị trí và vận tốc ban đầu. Ví dụ, nếu con lắc được buông ra không vận tốc ban đầu từ vị trí xác định bởi θ_0, thì nghiệm sẽ là $\theta = \theta_0\cos\omega t$.

Trong một dao động, ωt biến đổi 2π . Thành thử chu kì τ bằng :

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

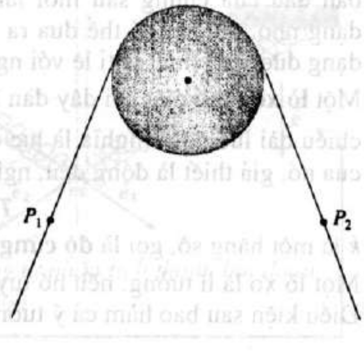
Chu kì này độc lập với biên độ các dao động.

▸ **Để tập luyện : bài tập 1 và 11**

II.3. Ròng rọc lí tưởng

Một ròng rọc được coi là lí tưởng, nếu có thể bỏ qua quán tính của nó và các lực ma sát do sự quay của ròng rọc gây ra.

Ta thừa nhận rằng một sợi dây lí tưởng quấn quanh một ròng rọc lí tưởng sẽ bảo toàn lực căng đồng đều (*H.30*).



H.30. *Nếu ròng rọc và sợi dây là lí tưởng, thì lực căng giống hệt nhau ở P_1 và P_2.* ▸

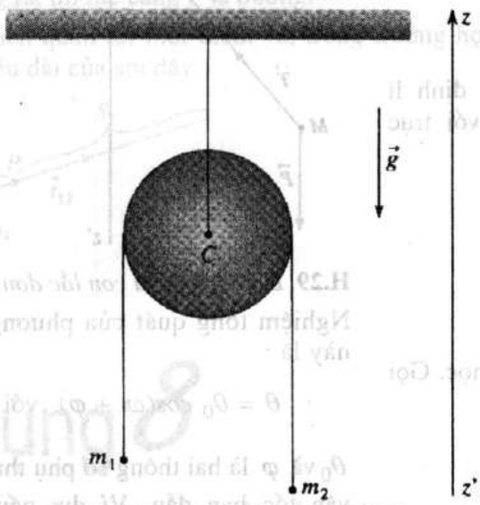
Áp dụng 10

Máy Atwood

Hai vật thể khối lượng m_1 và m_2, coi như hai chất điểm, được treo ở hai đầu mút một sợi dây lí tưởng lồng qua rãnh của một ròng rọc lí tưởng móc treo tại một điểm cố định. Người ta đặt :

$$\vec{a}(M_1) = a_1\vec{e}_z \text{ và } \vec{a}(M_2) = a_2\vec{e}_z.$$

Hãy xác định a_1 và a_2 cũng như lực căng T của sợi dây.



H.31. *Lực căng có cùng giá trị như nhau tại M_1 và M_2.*

Ta định hướng trục thẳng đứng (Oz) lên phía trên (*H.31*).

Chiều dài của sợi dây là không đổi, các vận tốc và gia tốc đều ngược chiều nhau : $a_1 = - a_2$

Lực căng T của sợi dây là đồng đều. Hệ thức cơ bản đối với hai vật thể là :

$$m_1a_1 = T - m_1g \text{ và } m_2a_2 = T - m_2g.$$

Ba phương trình độc lập nhau liên kết ba ẩn số a_1, a_2 và T.

Ta thu được :

$$a_1 = -a_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}g \text{ và } T = \frac{2m_1m_2g}{m_2 + m_1}.$$

Lời bình.

- a_1 dương (M_1 đi lên) nếu $m_2 > m_1$.
- Nếu $m_1 = m_2$, cả hai vật thể đều không được tăng tốc, nên :

$$T = m_1g = m_2g.$$

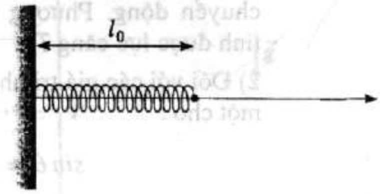
- Nếu $m_1 = 0$, thì M_2 sẽ rơi tự do : $a_2 = - g$ và $T = 0$.
- *Chú ý* : Lực căng T của sợi dây chỉ bằng trọng lượng của vật thể bị treo trong trường hợp tĩnh !

Để tập luyện : bài tập 2 và 6.

I2 Lực kéo về đàn hồi

I2.I. Lò xo lí tưởng

Tính đàn hồi là đặc tính của một số vật liệu có khả năng lấy lại hình dạng ban đầu của chúng sau mỗi lần biến dạng. Trong trường hợp các biến dạng nhỏ, thường có thể đưa ra giả thiết về tính chất tuyến tính : sự biến dạng được giả thiết là tỉ lệ với nguyên nhân gây ra nó.



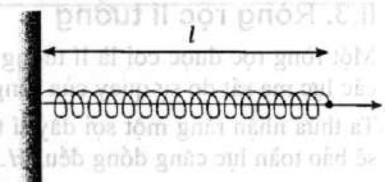
H.32a. *Lò xo không căng thẳng.*

Một **lò xo** (hay một sợi dây đàn hồi) là **tuyến tính**, nếu chiều dài l của nó, chiều dài lúc nghỉ (nghĩa là lực căng bằng không) l_0 (*H.32*) và lực căng T của nó, giả thiết là đồng đều, nghiệm đúng hệ thức :

$$T = k\,(l - l_0)$$

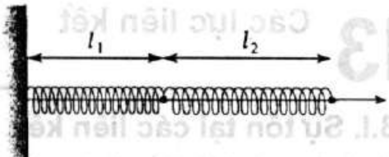
k là một hằng số, gọi là **độ cứng của lò xo.**

Một lò xo là lí tưởng, nếu nó tuyến tính và có khối lượng không đáng kể ? Điều kiện sau bao hàm cả ý tưởng lực căng là đồng đều.



H.32b. *Lò xo căng thẳng.*

12.2. Liên kết hai lò xo thành dãy



H.33. *Hai lò xo nối thành dãy.*

Hai lò xo lí tưởng, độ cứng k_1 và k_2 được nối thành dãy (*H.33*). Hãy xác định độ cứng k của lò xo tương đương.

• Chiều dài l của lò xo tương đương bằng tổng các chiều dài của hai lò xo. Điều đó cũng xảy ra đối với các chiều dài lúc nghỉ :

$$l = l_1 + l_2 \text{ và } l_0 = l_{01} + l_{02}.$$

• Lực căng T có cùng giá trị như nhau tại mọi điểm. Như vậy lực căng là đồng nhất đối với mỗi lò xo và đối với lò xo tương đương :

$$T = k_1(l_1 - l_{01}) = k_2(l_2 - l_{02}) = k(l - l_0),$$

$$\frac{T}{k} = (l - l_0) = (l_1 - l_{01}) + (l_2 - l_{02}) = \frac{T}{k_1} + \frac{T}{k_2}, \text{ do đó :}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Chú ý:

Cần nhớ rằng lực căng là một đại lượng xác định ở địa phương (có nghĩa là ở tại một điểm). Tình huống này cũng tương tự như đối với áp suất trong một chất khí. Ta hãy xét một căn hộ có hai phòng, thể tích V_1 và V_2. Các thể tích đều có tính cộng được, và thể tích của căn hộ sẽ bằng $V_1 + V_2$. Áp suất, đo tại mọi điểm không có tính chất đó : nếu áp suất trong mỗi phòng bằng 1 bar, thì áp suất trong căn hộ sẽ không phải là 2 bar !

Áp dụng 11

Sợi dây đàn hồi bị dằn

Một lò xo khối lượng không đáng kể, có độ cứng k và chiều dài lúc nghỉ l_0, được giữ cố định bởi hai đầu mút của nó tại hai điểm A, B ở cùng độ cao và cách nhau một khoảng d. Nó bị dằn ở giữa bởi một vật thể gần như là chất điểm, có khối lượng m (H.34).

Hãy nêu đặc tính vị trí cân bằng.

Dữ liệu: $m = 2{,}0kg$; $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$; $k = 1{,}0.10^2\ N.m^{-1}$; $l_0 = 1{,}0m$; $d = 80cm$.

Ở vị trí cân bằng, tổng các lực tác dụng bằng không. T_1 và T_2 là các lực căng ở hai phía của chất tải thêm, nên $m\vec{g} = T_1\vec{e}_1 + T_2\vec{e}_2$.

Chiếu lên một trục thẳng đứng, rồi chiếu lên một trục nằm ngang, ta có :

$$\begin{cases} T_1 \sin\theta_1 + T_2 \sin\theta_2 = mg \\ T_1 \cos\theta_1 - T_2 \cos\theta_2 = 0. \end{cases}$$

Cả hai phía đều tương đương, nên cho:

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta,\ T_1 = T_2 = \frac{mg}{2\sin\theta},$$

và với $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$: $k_1 = k_2 = 2k$.

$$T_1 = \frac{mg}{2\sin\theta} = 2k(l_1 - l_{01}) = k\left(\frac{d}{\cos\theta} - l_0\right);$$

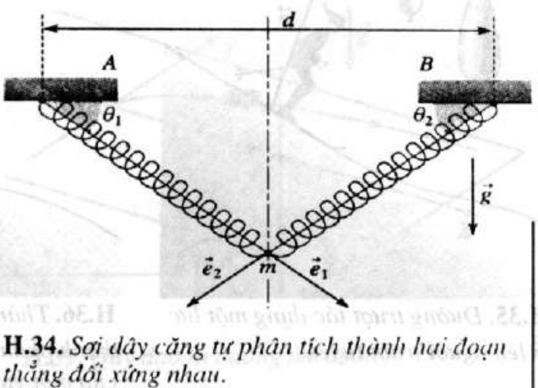
do đó : $\dfrac{mg}{2k} = d\tan\theta - l_0 \sin\theta$.

Có thể giải phương trình về θ này bằng phương pháp số hay bằng các khai triển hữu hạn.

$9{,}8.10^{-2} = 0{,}8\tan\theta - \sin\theta$, do đó $\theta = 0{,}79$ rad.

Nếu $0 > l_0$, thì θ, với các giá trị nhỏ của nó, sẽ gần đúng là một hàm tuyến tính của m :

$$\theta \approx \frac{mg}{2k(d - l_0)}.$$



H.34. *Sợi dây căng tự phân tích thành hai đoạn thẳng đối xứng nhau.*

I3 Các lực liên kết

I3.I. Sự tồn tại các liên kết

Vị trí của một chất điểm hoàn toàn tự do là hàm số của ba tọa độ độc lập với nhau của nó. Ta nói một chất điểm như vậy, có *ba bậc tự do*.

Số bậc tự do sẽ giảm, nếu chất điểm bị bắt buộc phải di chuyển trên một bề mặt (hai bậc tự do) hay trên một đường cong (một bậc tự do duy nhất).

I3.2. Phản lực của giá đỡ

Xét một chất điểm M bị buộc phải di chuyển trên một giá đỡ S : ví như một động tử được hướng dẫn bởi những đường ray một vòng khuyên trượt dọc theo một thanh dẫn, người trượt tuyết trượt (mà không bứt khỏi) trên một đường đua (*H.35*),v.v...

Giá đỡ áp đặt một quỹ đạo tại điểm M ; muốn thế, giá đỡ phải tác dụng lên M một lực gọi là "**phản lực của giá đỡ**".

$$\vec{F}_{S\to M} = \vec{R}$$

I3.3. Liên kết một bên

Liên kết được gọi là *một bên*, nếu vật thể được mô hình hoá bằng chất điểm M, và chỉ được đặt nằm trên bề mặt S. Giá đỡ đẩy M ra, nhưng lại không thể kéo M trở về. $\vec{n}$ là vectơ đơn vị pháp tuyến với giá đỡ tại M, và điều này được thể hiện nhờ:

$$\vec{R}.\vec{n} \geq 0.$$

Bất đẳng thức trên là một điều kiện cần của sự tiếp xúc.

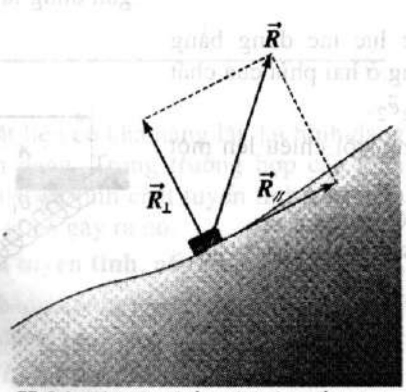
I3.4. Liên kết không ma sát

$\vec{R}$ là tổng của một thành phần thẳng góc với S : $\vec{R}_\perp$, và một thành phần tiếp tuyến với S : $\vec{R}_{//}$ (*H.36*).

Liên kết là không ma sát nếu $\vec{R}_{//} = \vec{0}$.

Trong trường hợp, này tác dụng của giá đỡ chỉ hạn chế ở thành phần $\vec{R}_\perp$; thành phần này có hiệu quả là bắt buộc động tử vẫn gắn vào giá đỡ, mà không hãm nó lại.

H.35. *Đường trượt tác dụng một lực $\vec{R}$ lên người trượt tuyết.*



H.36. *Thành phần pháp tuyến và thành phần tiếp tuyến của phản lực của một giá đỡ.*

Áp dụng 12

Mặt phẳng nghiêng

Có một vật thể, được biểu diễn bằng một chất điểm M, trượt không ma sát trên một mặt phẳng nghiêng (H.37). Được xác định đối với mặt phẳng trên là những yếu tố sau đây :

(0z) : trục thẳng đứng ;

(0X) : trục có độ dốc lớn nhất hướng về phía dưới;

(0Z) : trục pháp tuyến của mặt phẳng nghiêng ;

α: góc (0z, 0Z).

α cũng đồng thời là góc giữa đường có độ dốc lớn nhất và đường nằm ngang.

Vị trí của một điểm trên mặt phẳng nghiêng được biểu diễn bởi các tọa độ (X,Y).

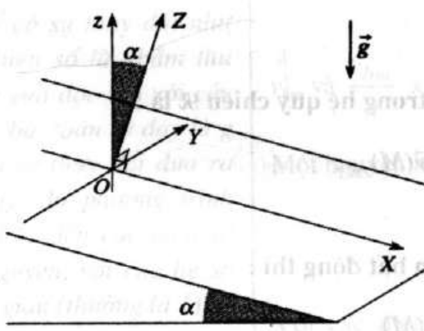
1/ Nghiên cứu tĩnh

M bất động, được giữ yên bởi một sợi dây song song với mặt phẳng nghiêng (H.38). Xác định lực căng của sợi dây cũng như phản lực của mặt phẳng nghiêng.

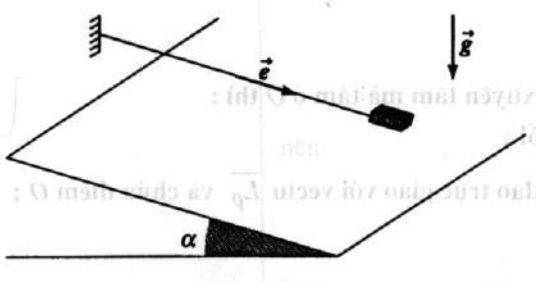
2/ Nghiên cứu động lực

Xác định gia tốc của M, phản lực của mặt phẳng, và bản chất các quỹ đạo.

Khi không có ma sát, thì phản lực của giá đỡ có dạng $\vec{R} = R\vec{e}_Z$.



H.37. *Mặt phẳng nghiêng.*



H38. *Vật thể được giữ yên bằng một sợi dây.*

1). Cho $\vec{e}$ là vectơ đơn vị theo phương của sợi dây và **T** là lực căng của sợi dây. Lúc cân bằng, tổng các lực tác dụng bằng không

$$\vec{0} = -mg\vec{e}_z + R\vec{e}_z - T\vec{e}.$$

$\vec{e}$, $\vec{e}_z$ và $\vec{e}_Z$ là đồng phẳng và $\vec{e}$ vuông góc với $\vec{e}_Z$.

Vậy $\vec{e} = \vec{e}_X$: sợi dây được căng thẳng song song với đường có độ dốc lớn nhất. Ta chiếu hệ thức trên lên các trục (OX) và (OZ) :

$$\begin{cases} 0 = mg\sin\alpha + 0 - T \\ 0 = -mg\cos\alpha + R; \end{cases} \text{ do đó } \begin{cases} T = mg\sin\alpha \\ R = mg\cos\alpha \end{cases}$$

Mặt phẳng nghiêng được sử dụng từ thời cổ đại để nâng các vật rất nặng lên cao. Lực phải thực hiện, để làm cân bằng trọng lượng, thì nhỏ hơn trọng lượng.

2) Ta áp dụng hệ thức cơ bản của động lực học :

$$m\vec{a} = -mg\vec{e}_z + R\vec{e}_Z.$$

Chiếu lên các trục (OX) và (OZ) biết rằng $a_Z = 0$ (động tử vẫn ở trên mặt phẳng nghiêng) :

$$\begin{cases} ma_x = mg\sin\alpha \\ 0 = -mg\cos\alpha + R, \end{cases} \text{ do đó } \begin{cases} \vec{a} = g\sin\alpha\vec{e}_X \\ \vec{R} = mg\cos\alpha\vec{e}_Z. \end{cases}$$

Các phương trình vi phân là :

$$\ddot{X} = g\sin\alpha \text{ và } \ddot{Y} = 0.$$

Với các điều kiện ban đầu lúc t = 0 :

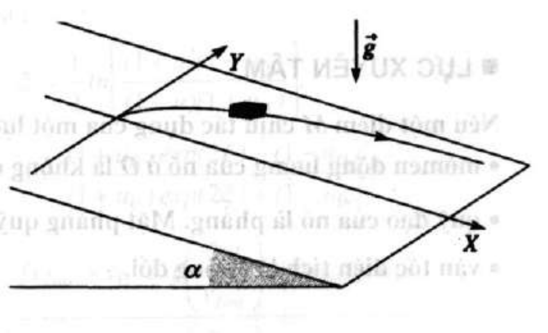
$$X(0)=0, Y(0)=0, \dot{X}(0)=v_{X_0} \text{ và } \dot{Y}(0) = v_{Y_0},$$

Các phương trình đó có nghiệm là :

$$X = \frac{1}{2}g\sin\alpha t^2 + v_{X_0}t \text{ và } Y = v_{Y_0}t.$$

Do đó : $X = \dfrac{g\sin\alpha}{2v_{Y_0}^2}Y^2 + \dfrac{v_{X_0}}{v_{Y_0}}Y$

Các quỹ đạo đều là các đường parabôn (*H.39*).



H.39. *Quỹ đạo là đường parabôn*

▸ **Để tập luyện : bài tập 4, 8, 11 và 12.**

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ ĐỊNH LUẬT NEWTON

Ba định luật Newton là các định luật cơ bản của cơ học chất điểm

• Nguyên lí quán tính

Tồn tại một lớp các hệ quy chiếu, gọi là các hệ quy chiếu Galilée mà đối với chúng thì một chất điểm cô lập sẽ chuyển động thẳng đều.

• Hệ thức cơ bản của động lực học

Trong một hệ quy chiếu Galilée, thì tổng vectơ của các lực tác dụng vào một điểm M có khối lượng m, liên hệ với gia tốc của chất điểm theo :

$$\mathbf{F}_{\mathscr{E}\to M} = m\vec{a}(M) = \frac{d\vec{p}(M)}{dt}.$$

• Nguyên lí các tác dụng tương hỗ

Các lực tương tác do hai chất điểm M_1 và M_2 tác dụng lên nhau đều ngược nhau và cùng trên đường thẳng với trục (M_1M_2).

■ MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG

Mômen động lượng đối với điểm O của chất điểm M trong hệ quy chiếu $\mathfrak{R}$ là :

$$\overrightarrow{L_0}(M)_{/\mathfrak{R}} = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathfrak{R}}.$$

• Định lí về mômen động lượng

Trong một hệ quy chiếu Galilée và nếu O là một điểm bất động thì :

$$\mathscr{M}_{O\,\mathscr{E}\to R} = \frac{d\overrightarrow{L_0}(M)}{dt}$$

■ LỰC XUYÊN TÂM

Nếu một điểm M chịu tác dụng của một lực xuyên tâm mà tâm ở O thì :

- **mômen động lượng của nó ở O là không đổi ;**
- **quỹ đạo của nó là phẳng. Mặt phẳng quỹ đạo trực giao với vectơ $\overrightarrow{L_0}$ và chứa điểm O ;**
- **vận tốc diện tích là không đổi.**

Bài tập có lời giải

Sự rơi thẳng đứng

ĐỀ BÀI

Một quả cầu khối lượng m được ném thẳng đứng xuống phía dưới với vận tốc ban đầu $\vec{v}_0$. Sau một thời gian đủ dài, quả cầu rơi xuống với vận tốc v_{lim}. Lực ma sát của không khí có thể được mô hình hóa bởi một lực $F = KSv^2$.

1) Xác định vận tốc v của quả cầu theo hàm số của thời gian t.
2) Xác định vận tốc v theo hàm số của quãng đường z đã đi qua.
3) Vận tốc ban đầu bằng không, hãy xác định với giá trị nào của z thì vận tốc bằng v_{lim} hơn kém 1%.

Dữ liệu : $v_{lim} = 10\ m.s^{-1}$; $g = 9,8\ m.s^{-2}$.

4) Các kết quả đó sẽ thay đổi như thế nào đối với một quả cầu có cùng khối lượng thể tích như nhau, nhưng nặng hơn hai lần ?

Lời khuyên nên sử dụng các biến số không thứ nguyên u, ξ và ζ được xác định theo :

$$v = uv_{lim},\ t = \xi\frac{v_{lim}}{g}\ \text{và}\ z = \zeta\frac{v_{lim}^2}{2g}$$

Minh giải các sự thay đổi của các biến số.

HƯỚNG DẪN

Cần chọn hướng nào cho trục thẳng đứng ? Nếu tất cả các đại lượng (độ cao, vận tốc, v.v.) có cùng dấu như nhau, thì tốt hơn hết là lập luận theo các đại lượng dương. Vậy lực ma sát có dấu như thế nào ?

Mục đích để có sự thay đổi như vậy về các biến số là nhằm thu được một lời giải độc lập với các thông số của bài toán (ở đây là g và v_{lim}). Nếu sự thay đổi đưa ra là thích đáng, thì phương trình thu được chỉ kể đến các biến số không thứ nguyên, với các hệ số bằng số đơn giản (thường là 1).

LỜI GIẢI

1) Ta định hướng trục thẳng đứng (Oz) về phía dưới v luôn luôn dương, ta được phương trình vi phân :

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{g}{v_{lim}^2}v^2.$$

Ta thực hiện sự thay đổi biến số ; kết quả là một phương trình vi phân đơn giản hóa sẽ chỉ làm xuất hiện các đại lượng không thứ nguyên.

$$\frac{du}{dt} = \frac{g}{v_{lim}}(1 - u^2) \quad \text{hay} \quad \frac{du}{d\xi} = 1 - u^2.$$

v_{lim} và $\frac{v_{lim}}{g}$ xuất hiện như là vận tốc và thời gian đặc trưng của hiện tượng.

Một nguyên hàm của $f(u) = \frac{1}{1-u^2}$ có dạng

$$F(u) = \frac{1}{2}ln\frac{1+u}{1-u} + cte.$$

Với các điều kiện ban đầu $u = u_0 = \frac{v_0}{v_{lim}}$ nếu $\xi = 0$, thì nghiệm của phương trình vi phân sẽ là :

$$\xi = \frac{1}{2}ln\left[\frac{(1+u)(1-u_0)}{(1-u)(1+u_0)}\right],$$

nên : $$u = \frac{(1+u_0)exp(2\xi) - (1-u_0)}{(1+u_0)exp(2\xi) + (1-u_0)}.$$

hay : $$v = v_{lim}\frac{(v_{lim}+v_0)exp\left(\frac{2gt}{v_{lim}}\right) - (v_{lim}-v_0)}{(v_{lim}+v_0)exp\left(\frac{2gt}{v_{lim}}\right) + (v_{lim}-v_0)}.$$

Mỗi khi có thể, bao giờ ta cũng phải so sánh kết quả tổng quát của một phép tính với những trường hợp đặc biệt đơn giản đã biết. Ta có thể đưa ra những kiểm chứng nào đối với các kết quả của 1) và 2) ?

Để biểu diễn v theo hàm số của z, thì sẽ là vụng về nếu ta xuất phát từ các biểu thức của z(t) và v(t), rồi khử biến số t. Sẽ đơn giản hơn nhiều nếu ta dùng các quy tắc lấy đạo hàm các hàm số kép để thu được một phương trình vi phân mới, được kiểm chứng bởi hàm số v(z).

Kết quả mong đợi ở 3) là một sự ước tính quãng đường đi được trước khi đạt tới chế độ ổn định. Thành thử, đáng lẽ giải trực tiếp phương trình về z : v(z) = 0,99, thì sẽ tốt hơn nếu ta tuyến tính hóa phương trình đó, nghĩa là biến đổi nó thành phương trình gần đúng tuyến tính. Ví dụ, nếu y quá nhỏ so với 1, thì có thể viết e^y ≈ 1 + y.

Ta có thể kiểm chứng lại khi : $t = 0$, $v = v_0$ và $t \to \infty$, $v \to v_{lim}$.

2) $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{g}{v_{lim}}(1-u^2)$.

u là hàm số của z và z là hàm số của t ; vậy

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dz}\frac{dz}{dt} = v_{lim}u\frac{du}{dz}, \quad \text{nên : } \frac{v_{lim}^2}{2g}\frac{d(u^2)}{dz} = 1 - u^2.$$

Đặt $z = \zeta\dfrac{v_{lim}^2}{2g}$.

Ta lại thu được một phương trình vi phân giản lược :

$$\frac{2u}{1-u^2}\frac{du}{d\zeta} = 1.$$

$l = \dfrac{v_{lim}^2}{2g}$ là khoảng cách đặc trưng của bài toán.

Nghiệm kiểm chứng các điều kiện ban đầu là :

$$\zeta = ln\frac{1-u_0^2}{1-u^2} \text{ hay } u^2 = 1 - (1-u_0^2)\,exp(-\zeta).$$

Trở lại các biến số ban đầu :

$$v^2 = v_{lim}^2\left[1 - \left(1 - \frac{v_0^2}{v_{lim}^2}\right)exp\left(-\frac{2gz}{v_{lim}^2}\right)\right].$$

Ta có thể minh chứng rằng v_{lim} đúng là vận tốc giới hạn.

3) Từ kết quả ở trên, ta suy ra :

$$\frac{v}{v_{lim}} = \left[1 - exp\left(-\frac{z}{l}\right)\right]^{1/2}$$

Khi $\dfrac{v}{v_{lim}}$ gần 1, thì $\exp\left(-\dfrac{z}{l}\right)$ sẽ nhỏ so với 1.

Nếu sử dụng dạng gần đúng, ta có :

$$\frac{v}{v_{lim}} = 1 - \frac{1}{2}exp\left(-\frac{z}{l}\right) > 0{,}99 \text{ , nên } \exp\left(-\frac{z}{l}\right) < 2.10^{-2},$$

Vậy $z > -l\ln(2.10^{-2})$ và $z > 3{,}9\,\dfrac{v_{lim}^2}{2g}$ do đó : $z > 19{,}9m$.

$l = \dfrac{v_{lim}^2}{2g}$ chính là khoảng cách đặc trưng của bài toán, và chế độ ổn định thực tế sẽ đạt được sau một khoảng cách vào cỡ vài l.

4) $v_{lim}^2 = \dfrac{mg}{KS}$. Nếu quả cầu nặng hơn hai lần, thì bán kính của nó phải nhân với $2^{1/3}$, S với $2^{2/3}$ và do vậy v_{lim} với $2^{1/6}$.

Bài tập

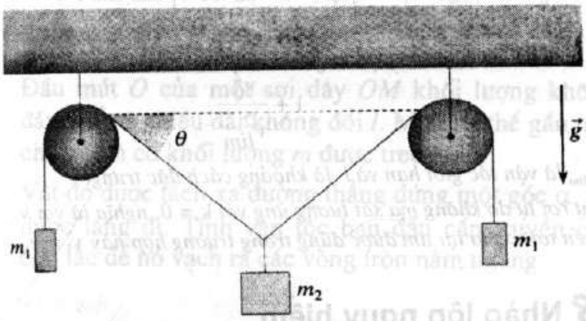
ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

1 Sợi dây bị dằn giữa hai ròng rọc

Các ròng rọc và các dây được bố trí trên sơ đồ đều là lí tưởng. Hãy xác định góc θ lúc cân bằng.

• *Lời giải*

$\sin\theta = \dfrac{m_2}{2m_1}$ *nếu* $m_2 < 2m_1$.



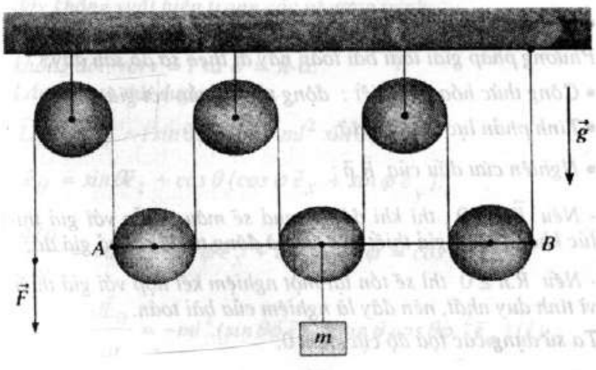
2 Palăng

Một palăng được cấu thành từ $2n$ ròng rọc và một sợi dây được bố trí theo sơ đồ dưới đây. Các trục của các ròng rọc phía trên thì cố định còn các trục của các ròng rọc phía dưới được gắn vào một cái cần AB có thể di chuyển tịnh tiến theo phương thẳng đứng. Người ta giả thiết các ròng rọc và sợi dây đều là lí tưởng.Một người vận hành thực hiện một lực $\vec{F}$ vào đầu mút tự do của sợi dây.

Hãy xác định gia tốc của vật thể được nâng lên có khối lượng m.

• *Lời giải*

$a = 2n\dfrac{F}{m} - g$. *Như vậy, người vận hành có thể nâng vật thể lên nếu người đó thực hiện được một lực lớn hơn* $\dfrac{mg}{2n}$.



3 Cuộc hành trình bằng khí cầu

Một khí cầu bơm hêli đã mất khí. Khí cầu rơi xuống đất với gia tốc a.

Khối lượng tổng cộng là m, hãy xác định khối lượng của tải trọng dằn cần được các nhà du hành ném đi để khí cầu có một gia tốc với cùng giá trị tuyệt đối như khi rơi, nhưng bây giờ lại hướng lên cao. Ta bỏ qua các lực ma sát.

• *Lời giải*

$\Delta m = 2m\dfrac{a}{g+a}$.

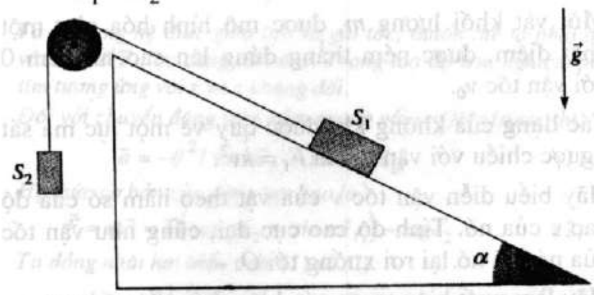
4 Mặt phẳng nghiêng và ròng rọc

S_1 trượt (xem sơ đồ) không ma sát trên mặt phẳng nghiêng và S_2 di chuyển thẳng đứng. Các vật rắn chuyển động tịnh tiến này được coi như các chất điểm.

Hãy xác định gia tốc của các vật đó, biết rằng ròng rọc và dây đều là lí tưởng.

• *Lời giải*

$\vec{a} = \dfrac{m_1\sin\alpha - m_2}{m_1 + m_2}g\vec{e}_z$ *(cho* S_2*)*.



5 Để chiến thắng mà không nguy hiểm

Một đấu thủ phóng phi tiêu khối lượng m với vận tốc v_0. Các mũi tiêu cắm sâu vào bia gỗ đến độ sâu e. Bia tác dụng một lực cản mà ta giả thiết là độc lập với vận tốc.

Để đánh dấu "dễ dàng" các điểm, người đó cắm mũi tiêu vào số "1000" mà không phóng nó.

Hỏi người đó phải ấn với một lực bằng bao nhiêu ?

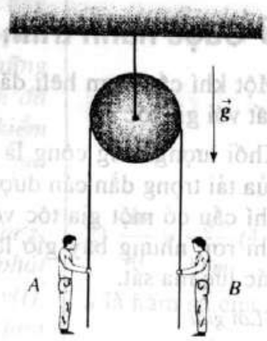
Dữ liệu : $m = 10$g ; $v_0 = 10$m. s^{-1} ; $e = 5{,}0$ mm.

• *Lời giải*

$F = \dfrac{mv_0^2}{2e} = 100N$.

6 Một cuộc đua công minh

Hai người bạn, A là nhà thể thao tồi, và B là nhà vô địch thể dục, đề xuất một cuộc đua hữu nghị leo dây. Họ quấn một sợi dây quanh một ròng rọc treo trên trần nhà và đứng dưới chân dây, mỗi người cầm một đầu dây. Để cuộc đua thật bình đẳng, người nhẹ hơn được đeo thêm một tải trọng, sao cho cả hai người có cùng một khối lượng như nhau.



Sợi dây và ròng rọc là lí tưởng. Vậy người nào leo lên cao trước nhất ?

• *Lời giải*

Lực căng T của sợi dây là đồng đều.

Ta áp dụng định luật cơ bản của động lực học cho từng đấu thủ :

Đối với A : $ma_A = T - mg$;

Đối với B : $ma_B = T - mg$.

Các gia tốc a_A và a_B bằng nhau và, các điều kiện ban đầu giống hệt nhau, nên cả hai đấu thủ cùng tới đích.

Một bài toán cơ học phải được phân tích chặt chẽ. Đặc biệt, không được nhầm lẫn lực với cảm giác cố gắng của cơ bắp. Nếu ròng rọc và sợi dây không phải là lí tưởng, thì lúc đó, phải tôn trọng cấp bậc thể thao.

7 Chuyển động thẳng đứng trong không khí

Một vật khối lượng m, được mô hình hóa như một chất điểm, được ném thẳng đứng lên cao từ điểm 0 với vận tốc v_0.

Tác dụng của không khí được quy về một lực ma sát ngược chiều với vận tốc là $F_f = kv^2$.

Hãy biểu diễn vận tốc v của vật theo hàm số của độ cao z của nó. Tính độ cao cực đại, cũng như vận tốc của nó khi nó lại rơi xuống tới O.

Hãy làm xuất hiện trong các biểu thức các số hạng :

$$v_{lim} = \sqrt{\frac{mg}{k}} \quad \text{và} \quad l = \frac{m}{2k}$$

Hãy nêu thật chính xác ý nghĩa của các số hạng đó.

• *Lời giải*

Hệ thức cơ bản được thể hiện bằng phương trình vi phân :

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - \varepsilon kv^2, \text{ trong đó : } \begin{cases} \varepsilon = +1 & \text{nếu } v > 0 \\ \varepsilon = -1 & \text{nếu } v < 0 \end{cases}$$

Ta đi tìm v(z) chứ không phải v(t).

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dt}, \text{ do đó : } mv\frac{dv}{dz} = -mg - \varepsilon kv^2$$

Đặt $U = v^2$, *ta được :* $\frac{dU}{dz} = -2g - 2\varepsilon\frac{k}{m}U$

Đây là vấn đề của một phương trình vi phân tuyến tính cấp 1. Ta hãy tìm các nghiệm U (z) của nó, tương thích với giá trị ban đầu của v.

• ***Đi lên**:* $v^2 = -v_{lim}^2 + (v_0^2 + v_{lim}^2)\exp\left(-\frac{z}{l}\right)$

Độ cao cực đại đạt tới khi v = 0 là :

$$z_{max} = l\ln\left(1 + \frac{v_0^2}{v_{lim}^2}\right)$$

• ***Đi xuống**: Với các điều kiện ban đầu $z = z_{max}$ và $v = 0$, thì nghiệm là :*

$$v^2 = -v_{lim}^2\left[1 - \exp\left(-\frac{z_{max} - z}{l}\right)\right].$$

Khi z = 0, động tử lại đi qua 0 với vận tốc v_1 sao cho :

$$v_1^2 = v_0^2\frac{1}{1 + \frac{v_0^2}{v_{lim}^2}}.$$

v_{lim} là vận tốc giới hạn và l là khoảng cách đặc trưng.

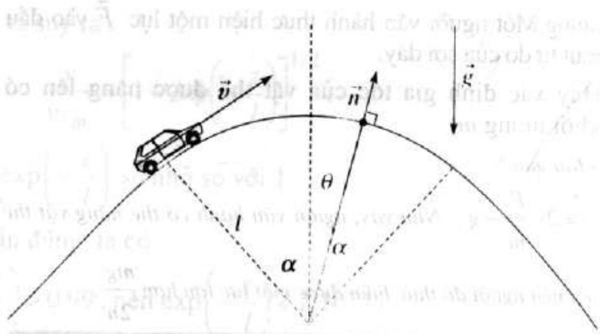
Sự rơi tự do không ma sát tương ứng với k = 0, nghĩa là với v_{lim} tiến tới ∞ ; ta lại tìm được đúng trong trường hợp này $v_1 = v_0$.

8 Nhào lộn nguy hiểm

Một ôtô, được coi như một chất điểm, chạy với vận tốc đều v, trên một đường đua có mặt cắt mấp mô. Ô tô vượt qua một ụ đất được mô hình hoá bởi hai đoạn thẳng nối với nhau bằng một cung tròn bán kính l và gốc mở 2α.

Tìm điều kiện để ô tô duy trì được sự tiếp xúc với đất ?

Dữ liệu : $\alpha = 10^0$ và $l = 5$m.



• *Lời giải*

Phương pháp giải loại bài toán này đi theo sơ đồ sau đây:

• *Công thức hóa giả thiết : động tử vẫn gắn với giá đỡ nó;*

• *Tính phản lực của giá đỡ;*

• *Nghiên cứu dấu của $\vec{R}.\vec{n}$:*

- Nếu $\vec{R}.\vec{n} < 0$, thì khi đó kết quả sẽ mâu thuẫn với giả thiết lúc khởi hành : giả thiết này sai và động tử đã rời bỏ giá đỡ;

- Nếu $\vec{R}.\vec{n} \geq 0$ thì sẽ tồn tại một nghiệm kết hợp với giả thiết : vì tính duy nhất, nên đây là nghiệm của bài toán.

Ta sử dụng các tọa độ cực, tâm 0.

Với $\vec{a} = -\frac{v^2}{l}\vec{e}_r$ và $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}$, ta thu được :

$$\vec{R}.\vec{e}_r = -m\frac{v^2}{l} + mg\cos\theta.$$

Xe chạy nhanh vẫn gắn với đường đua nếu $\vec{R}.\vec{e}_r \geq 0$, nghĩa là nếu $gl\cos\theta \geq v^2$ đối với tất cả các giá trị của θ.

Ta sẽ thu được giá trị nhỏ nhất của $\cos\theta$ đối với $\theta = \alpha$. Điều kiện tìm được sẽ là $v^2 < gl\cos\alpha$, thành thử $v < 6{,}9\ m.s^{-1}$.

Xin chú ý rằng, nếu điều kiện không bứt khỏi đường đua được kiểm chứng đối với $\theta = \alpha$, thì điều kiện này sẽ luôn luôn nghiệm đúng. Sự bứt khỏi đường đi chỉ xảy ra ở đầu đoạn đường tròn.

9 Con lắc

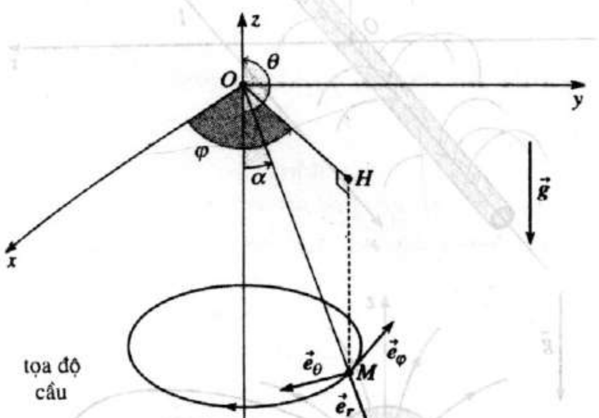
Đầu mút O của một sợi dây OM khối lượng không đáng kể và chiều dài không đổi l. Một vật thể gần như chất điểm có khối lượng m được treo tại M.

Vật đó được tách xa đường thẳng đứng một góc α, rồi được lăng đi. Tính vận tốc ban đầu cần truyền cho con lắc để nó vạch ra các vòng tròn nằm ngang.

• Lời giải

Chất điểm M chịu hai lực tác dụng trọng lượng của nó và lực căng của sợi dây.

• Phương pháp thứ nhất.



Ta áp dụng định lí mômen động lượng ở O; lực căng của sợi dây không xuất hiện trong các phương trình.

Trong tọa độ cầu, thì nghiệm phải tìm tương ứng với r và θ không đổi, với $r = l$ và $\theta = \pi - \alpha$.

Lần lượt ta thu được :

$$\vec{L}_0 = ml\vec{e}_r \wedge l\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = -ml^2\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\theta;$$

$$\vec{e}_\theta = \sin\theta\vec{e}_z + \cos\theta(\cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y);$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \cos\theta(-\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y)\dot{\varphi} = \cos\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = -ml^2(\sin\theta\ddot{\varphi}\vec{e}_\theta + \sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2\vec{e}_\varphi)\ (1)$$

Theo định lí mômen động lượng :

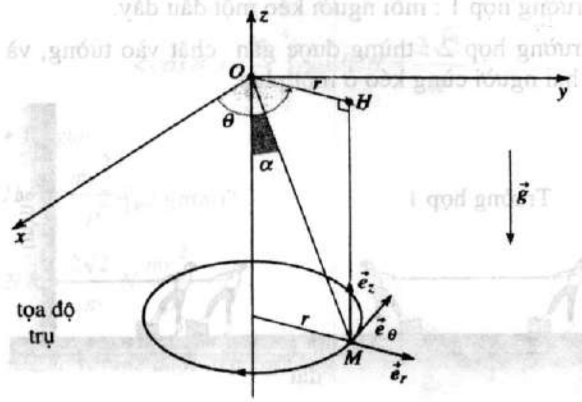
$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{g} = -mlg\vec{e}_r \wedge \vec{e}_z = mlg\sin\theta\vec{e}_\varphi\ (2)$$

Đồng nhất hai biểu thức (1) và (2):

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} = 0: \text{ sự quay là đều} \\ l\dot{\varphi}^2\cos\alpha = g. \end{cases}$$

Nhưng $\dot{\varphi} = \frac{v}{l\sin\alpha}$, vậy $v^2 = \frac{gl\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$

• Phương pháp thứ hai



Ta sử dụng hệ thức giữa lực và gia tốc; muốn thế ta phải đưa vào ẩn số T: lực căng của dây. Trong toạ độ trụ, nghiệm phải tìm tương ứng với r và z không đổi.

Đối với chuyển động tròn nằm ngang với r=OH=lsinα, thì:

$$\vec{a} = -\dot{\theta}^2 l\sin\alpha\vec{e}_r + l\sin\alpha\ddot{\theta}\vec{e}_\theta \qquad (1)$$

Hệ thức cơ bản của động lực học là :

$$\vec{F} = m\vec{a} = T(\cos\alpha\vec{e}_z - \sin\alpha\vec{e}_r) - mg\vec{e}_z \qquad (2)$$

Ta đồng nhất hai biểu thức (1) và (2):

$$ml\dot{\theta}^2 = T, \quad \ddot{\theta} = 0, \quad T\cos\alpha - mg = 0$$

Sự quay là đều và

$$ml\dot{\theta}^2 = \frac{mg}{\cos\alpha}, \text{ do đó } v^2 = \frac{gl\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$$

Chu kì quay là $\tau = \frac{2\pi}{\dot{\theta}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\cos\alpha}}$

Đối với những góc nhỏ, gần đúng bậc một về α, thì :

$\cos\alpha \approx 1$ và $\tau \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, giá trị đó độc lập với α.

10 Khối lượng Trái Đất

Tính giá trị gần đúng của khối lượng Trái Đất và khối lượng trung bình ρ_m của nó.

• Lời giải :

$g = G\frac{m_T}{R_T}$. Với các giá trị đã biết của g, R_T và G, ta thu được :

• $m_T = \dfrac{gR^2}{G} = 6{,}0.10^{24}\ kg$;

• $\rho_m = \dfrac{m_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} = 5{,}5.10^3\ kg.m^{-3}$

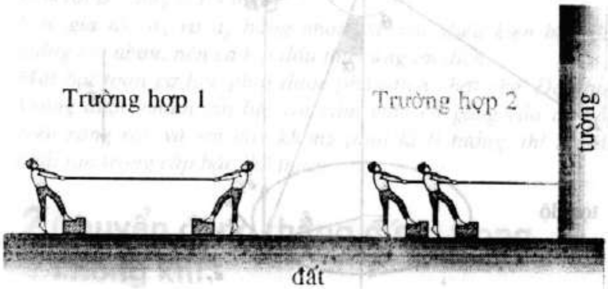
11 Lực và lực căng

Hai người kéo căng một sợi thừng AB, mỗi người thực hiện một lực chuẩn F.

Hãy xác định lực căng của dây thừng nếu :

• trường hợp 1 : mỗi người kéo một đầu dây.

• trường hợp 2 : thừng được gắn chặt vào tường, và cả hai người cùng kéo ở một phía.



• Lời giải :

Ta hãy nghiên cứu, trong cả hai trường hợp, sự cân bằng của nửa trái sợi thừng :

• Trường hợp 1 : $0 = -T + F$, vậy $T = F$;

• Trường hợp 2 : $0 = -T + 2F$, vậy $T = 2F$.

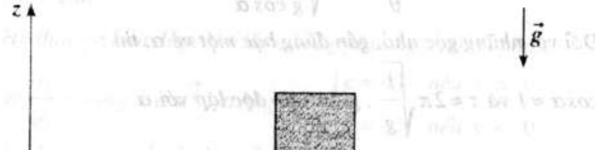
Kết quả này chứng tỏ rằng không được lẫn lộn lực được định nghĩa chặt chẽ trong cơ học với sự gắng sức của cơ bắp. Trong trường hợp 2, tường tác dụng vào dây thừng một lực $2F$.

12 Mâm rung động

Một vật thể rắn khối lượng m được đặt trên một cái mâm ở độ cao z_p rung động theo phương thẳng đứng :

$$z_p = a\cos\omega t.$$

Trong điều kiện nào vật thể vẫn gắn liền vào mâm ?



• Lời giải

Ta giả thiết là sự liên kết với mâm được duy trì. Vật thể cũng có thể được biểu diễn bởi một chất điểm có độ cao z sao cho :

$z = h + a\cos\omega t$, với h là một hằng số

R là phản lực của mâm, ta viết hệ thức cơ bản :

$-mg + R = m\ddot{z}$, do đó : $R = m(g - a\omega^2\cos\omega t)$

Vật thể không rời khỏi mâm nếu R vẫn dương, nghĩa là nếu, với mọi giá trị của t :

$$g \geq a\omega^2\cos\omega t$$

Giá trị cực đại của $\cos\omega t$ là 1, điều kiện này tương đương với

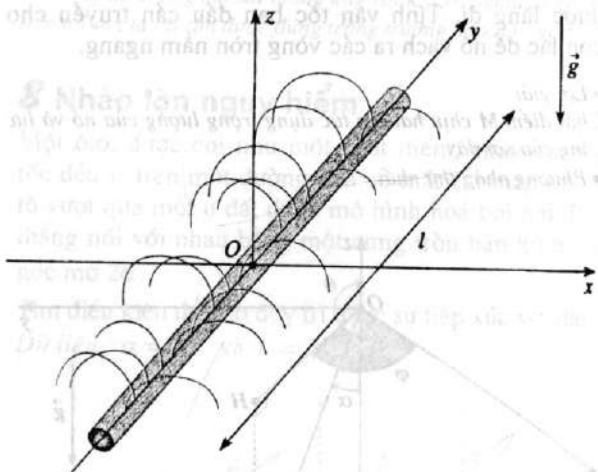
$$g \geq \omega^2 a$$

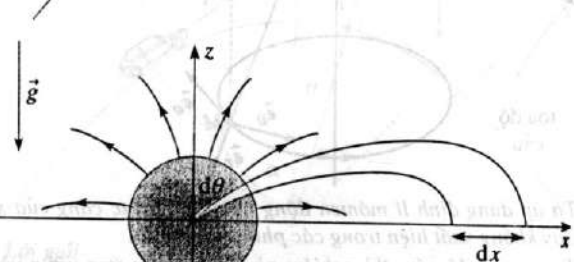
Đối với một mâm rung ở 100Hz : $\omega = 614\ rad.s^{-1}$, và sự liên kết hãy còn tồn tại nếu $a \leq 25\mu m$.

SỬ DỤNG VỐN KIẾN THỨC

13** Tưới nước

Người ta đặt trên mặt đất một ống hình trụ. Suốt chiều dài l, ở nửa hình trụ trên, người ta đục rất nhiều lỗ nhỏ phân bố đều đặn. Từ đó, phát ra các tia nước, tất cả đều vuông góc với ống, cùng một lưu lượng và cùng một vận tốc v_0 như nhau. Lưu lượng tổng cộng (khối lượng nước phân tán trong đơn vị thời gian) là D_T.





Hãy xác định mật độ tưới d, được định nghĩa là khối lượng nước nhận được trên đơn vị diện tích trong đơn vị thời gian, theo hàm số của x là khoảng cách từ một điểm trên mặt đất đến ống nước.

Các tia nước gồm những tập hợp các chất điểm độc lập nhau, được phóng đi từ ống nước, và để đơn giản, ta có thể bỏ qua lực ma sát của không khí. Đối với một cung $d\theta$ trên hình trụ, ta có thể xác định lưu lượng nguyên tố dD và diện tích dS của bề mặt được tưới (xem sơ đồ)

• *Lời giải*

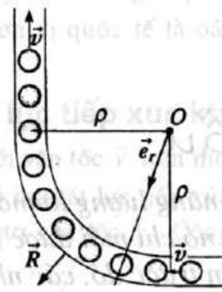
$$dD = D_T \frac{d\theta}{\pi} \text{ và } x = \frac{v_0^2}{g} sin 2\theta, \text{ vậy } dS = ldx = 2l\frac{v_0^2}{g} cos 2\theta d\theta ;$$

$$d = D_T \frac{g}{2\pi l v_0^2 \cos 2\theta}, \text{ với } sin 2\theta = \frac{gx}{v_0^2}$$

Về lí thuyết thì mật độ đó là vô hạn ở giới hạn của bề mặt được tưới. Tuy nhiên đây không phải là nghịch lí, vì tích phân của d trên toàn bề mặt lại hội tụ và bằng D_T

14 **Các chất điểm được dẫn đường

Một ống, nằm yên trong một hệ quy chiếu Galilée, có dạng của một phần tư vòng tròn bán kính ρ. Ống dẫn đường, không ma sát cho các vật thể được coi như các chất điểm khối lượng m, lưu thông với vận tốc không đổi v.



1/ Biểu diễn lực do mỗi vật thể tác dụng lên ống.

2/Có N vật thể giống hệt nhau được xếp cách quãng đều đặn trong ống. Nếu số N rất lớn, hãy xác định lực tổng hợp $\vec{R}$ mà chúng tác dụng lên ống.

3/ Theo định nghĩa, lưu lượng D là khối lượng đi vào ống trong đơn vị thời gian. Hãy biểu diễn R theo hàm số của D.

<u>Chú ý :</u> *Giá trị trung bình của $cos\theta$ trong khoảng 0 và $\frac{\pi}{4}$ là :*

$$<cos\,\theta> = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos\,\theta d\theta = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

• *lời giải*

1/ $\vec{F} = \frac{mv^2}{\rho}\vec{e}_r$.

2/ $R = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} N \frac{mv^2}{\rho}$.

3/ Các vật thể được xếp cách quãng $e = \frac{mv}{D}$ *do đó* $N = \frac{\pi\rho}{2e}$

và $R = \sqrt{2}Dv$.

3 CÔNG SUẤT VÀ NĂNG LƯỢNG TRONG HỆ QUY CHIẾU GALILÉE

Mở đầu

Khái niệm về năng lượng là mới. Các dạng cơ học và nhiệt học của nó chỉ mới được nhận thức rõ ràng vào thế kỉ XIX. Còn trước đó, các nhà cơ khí không phân biệt được rõ ràng điều mà ngày nay chúng ta gọi là công suất và lực. Đoạn trích này trong cuốn Từ điển lí giải về Vật lí, *xuất bản năm* 1781 *của M.*B*RISSON, thuộc Viện hàn lâm khoa học hoàng gia đã nêu rõ :*

"Hoạt lực:

là lực của một vật đang chuyển động, tác động lên một vật chướng ngại, gây cho nó một hiệu ứng khiến nó phải nhượng bộ. Ví dụ như Lực *của một vật rơi từ một độ cao nào đó do trọng lực và va vào một vật chướng ngại mà nó gặp phải. Đó cũng là* Lực *cuả một lò xo khi giãn ra, bật vào một vật cản khiến vật cản phải di chuyển.*

Cho đến thời của L*EIBNITZ, người ta luôn nghĩ rằng* Hoạt Lực *cũng như* Tử Lực *phải được đánh giá là tích của khối lượng nhân với vận tốc đơn thuần.*

Còn Leibnitz lại suy nghĩ khác. Ông tin rằng phải coi Hoạt lực *như là tích của khối lượng nhân với bình phương của vận tốc (hãy đọc tác phẩm của ông có tên sách là :* Brevis demonstratio erronis memorabilis Cartefii et aliorum. *Act. Erud. Lipf*, 1686, *p.* 161.)

Dù ý kiến đó có trái ngược đến đâu với những nguyên lí đã biết và được chấp nhận qua mọi thời đại, thì nó vẫn có những người bảo vệ, bênh vực nó dựa trên các thí nghiệm và các lập luận chỉ đúng bề ngoài".

MỤC TIÊU

- Các khái niệm về công suất và công
- Định lí về động năng
- Sự bảo toàn cơ năng đối với các hệ bảo toàn

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

- Hiểu biết về toán tử gradient
- Động lực học của chất điểm trong hệ quy chiếu Galilée *(chương 2)*

1 Công suất của một lực trong một hệ quy chiếu $\mathcal{R}$

1.1. Định nghĩa

Cho một chất điểm khối lượng *m*, ở tại điểm *M* của hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ với véctơ vận tốc $\vec{v}\,(M)_{/\mathcal{R}}$.

Chất điểm lúc đó chịu một lực $\vec{F}$ và theo định nghĩa, thì công suất $\mathcal{P}(\vec{F}_{/\mathcal{R}})$của lực đó là :

$$\mathcal{P}(\vec{F})_{/\mathcal{R}} = \vec{F}.\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$$

Công suất của một lực phụ thuộc vào hệ quy chiếu nghiên cứu, cho dù hệ đó có là hệ Galilée hay không. Thật vậy, mặc dù lực là bất biến, nhưng vận tốc lại phụ thuộc vào hệ quy chiếu đang được xem xét.

Đơn vị công suất trong hệ đơn vị quốc tế là oát (watt) (*kí hiệu* : *W* ; $1W = 1kg.m^2.s^{-3}$).

1.2. Công suất của một lực tiếp xúc không ma sát

Một chất điểm chuyển động với vận tốc $\vec{v}$ trên một giá đỡ nằm yên trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}$. Khi không có ma sát lực tiếp xúc $\vec{R}$ pháp tuyến với giá đỡ và do đó trực giao với vectơ vận tốc $\vec{v}$. Công suất của lực đó bằng không trong hệ $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{P}(\vec{R}) = \vec{R}.\vec{v} = 0$$

1.3. Tính cộng được

Có hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ tác dụng vào một chất điểm ở thời điểm *t*. Công suất tổng cộng trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}$, theo tính chất cộng được của các lực, sẽ bằng tổng các công suất :

$$\mathcal{P}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2).\vec{v} = \vec{F}_1.\vec{v} + \vec{F}_2.\vec{v} = \mathcal{P}(\vec{F}_1) + \mathcal{P}(\vec{F}_2) = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$$

Tính chất này được mở rộng trực tiếp cho trường hợp N lực tách biệt.

2 Công của một lực trong một hệ quy chiếu $\mathcal{R}$

2.1. Định nghĩa

Công nguyên tố $dW(\vec{F})$ của lực $\vec{F}$ tác dụng vào một chất điểm *M* trong thời gian vô cùng nhỏ dt, thì bằng :

$$dW(\vec{F})_{/\mathcal{R}} = \mathcal{P}(\vec{F})_{/\mathcal{R}}\,dt.$$

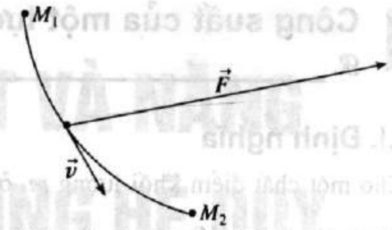
Công nguyên tố phụ thuộc vào hệ quy chiếu. Khi giản lược các kí hiệu, có thể viết công thức về công nguyên tố trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ như sau :

$$dW = \vec{F}.\vec{v}dt = \vec{F}.d\vec{M}.$$

0 là điểm cố định trong $\mathcal{R}$, $d\vec{M} = d\overrightarrow{OM}$, là vectơ chuyển dời nguyên tố của điểm *M* ; *dW* là *lưu thông nguyên tố* của lực $\vec{F}$.

Tính cộng được của các công suất kéo theo tính cộng được của các công. Đơn vị công trong hệ đơn vị quốc tế, là Jun (*kí hiệu :* J; $1J = 1kg.m^2.s^{-2}$).

2.2. Trường hợp của một chuyển dời hữu hạn



H.1. *Trường hợp của một chuyển dời hữu hạn*

Có một hạt (*H.1*) ở tại M_1 lúc t_1 và ở M_2 lúc t_2, công thực hiện trong $\mathscr{R}$ bởi lực $\vec{F}$ giữa hai thời điểm đó là :

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{P}(t)dt = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.d\vec{M}.$$

Sự lưu thông này thoạt nhìn thì phụ thuộc vào hình dạng của quỹ đạo giữa M_1 và M_2.

2.3. Trường hợp của một lực không đổi

Trong trường hợp đặc biệt của một lực không đổi thực hiện một chuyển dời hữu hạn, thì biểu thức trên được viết đơn giản thành:

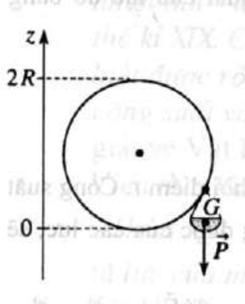
$$W = \vec{F}.\overrightarrow{M_1 M_2}$$

Áp dụng 1

Công của các lực trọng trường

Ta khảo sát một cái nôi, khối lượng m, của một bánh xe lớn bán kính R. Tính công do trọng lượng của nó gây ra khi, xuất phát từ điểm thấp nhất A, nôi vạch một nửa vòng ? một vòng ?

Ta thừa nhận rằng các tác dụng của trọng lực đều tương đương với một lực bằng trọng lượng tổng cộng tác dụng vào tâm quán tính G.



H.2. *Cái nôi phải "treo" dưới bánh xe*

Tâm quán tính của nôi cũng vạch một vòng tròn bán kính R. Gọi z là độ cao của nôi ở một thời điểm cho trước, trên một trục thẳng đứng đi lên của hệ quy chiếu gắn với mặt đất. Công của trọng lượng trong một chuyển dời nguyên tố bằng :

$$dW(m\vec{g}) = -mg\vec{e}_z.d(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) = -mgdz$$

Đối với một chuyển dời hữu hạn, $W = mg\ (z_1 - z_2)$, z_1 là độ cao của điểm xuất phát và z_2 là độ cao của điểm tới nơi.

Đối với nửa vòng : $W_{1/2} = -2Rmg$; đối với một vòng trọn vẹn thì : $W_1 = 0$.

3 Các định lí về công suất động học và về động năng

3.I. Định lí về công suất động học

Cho $\vec{F}$ là lực tổng cộng áp dụng vào một chất điểm M, khối lượng m, đang chuyển động với vận tốc $\vec{v}$ trong hệ quy chiếu Galilée $\mathscr{R}$ đang nghiên cứu.

Nhân hai vế của hệ thức cơ bản của động lực học $\vec{F} = m\vec{a} = m\left(\dfrac{d\vec{v}}{dt}\right)$ với $\vec{v}$, thì ta được :

$$\vec{F}.\vec{v} = \mathscr{P}_{/\mathscr{R}} = m\vec{v}.\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(\dfrac{m\vec{v}^2}{2}\right)}{dt} = \frac{d\mathscr{E}_K}{dt}.$$

Lượng $\frac{mv^2}{2}$, theo định nghĩa, là động năng $\mathscr{E}_K(M)_{/\mathscr{R}_g}$ của hạt trong hệ quy chiếu $\mathscr{R}_g$.

Ta có thể kiểm nghiệm $\mathscr{E}_K$ cùng thứ nguyên như công. Trong hệ đơn vị quốc tế, động năng biểu thị ra kg.m^2.s^{-2}, nghĩa là ra jun.

Trong một hệ quy chiếu Galilée, công suất của lực tổng cộng áp dụng vào một chất điểm, thì bằng đạo hàm đối với thời gian của động năng của nó.

$$\mathscr{P} = \frac{d\mathscr{E}_K}{dt}$$

3.2. Định lí về động năng

Công nguyên tố của lực tổng cộng trong thời gian nguyên tố dt là :

$$\mathscr{P}dt = dW = d\mathscr{E}_K$$

Ta xét chuyển dời của chất điểm M từ vị trí M_1 lúc t_1, sang vị trí M_2 lúc t_2, dọc theo một đường cong Γ ; khi đó, ta có :

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{P}dt = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.d\vec{M} = \mathscr{E}_K(t_2) - \mathscr{E}_K(t_1)$$

Kết quả này cấu thành định lí về động năng. Công W nói chung phụ thuộc vào đường đi Γ.

Độ biến thiên động năng của một chất điểm giữa hai thời điểm thì bằng công của lực tổng cộng áp dụng vào chất điểm.

▸ **Để tập luyện : bài tập 1 và 2.**

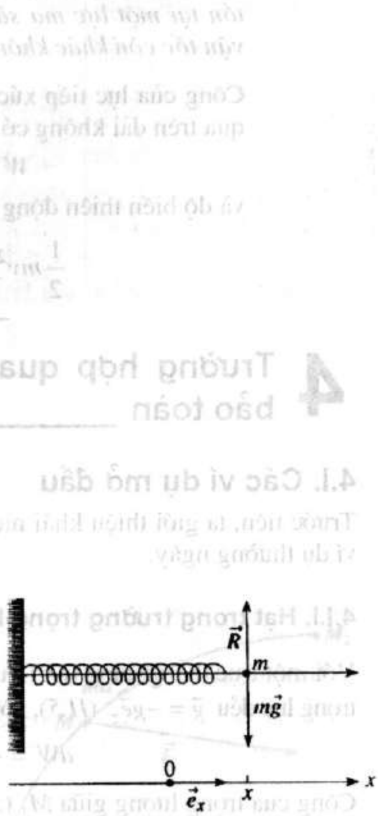
3.3. Định lí về động năng và phương trình chuyển động

Ta lấy một ví dụ để chứng minh rằng định lí về động năng cho phép ta tìm được phương trình vi phân của chuyển động của M.

Một vòng khuyên nhỏ khối lượng m, gắn với một lò xo đàn hồi, độ cứng k, chuyển động không ma sát trên một trục nằm ngang (Ox) giả thiết là hệ Galilée ($H.3$).

Gốc O của trục (Ox) trùng với vị trí cân bằng của hệ ; lực tổng cộng tác dụng lên vòng khi nó chiếm vị trí ở hoành độ x là $\vec{F} = -kx\vec{e}_x$. Vòng được thả lỏng, không vận tốc ban đầu, từ một vị trí có hoành độ a. Hãy xác định chuyển động sau đó của vòng.

Theo hệ thức cơ bản của động lực học : $m\ddot{x} = -kx$. Khi kể đến các điều kiện ban đầu, nghiệm có dạng $x = a\cos(\omega_0 t)$, với $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.



H.3. *Phản lực của giá đỡ khử trọng lượng.*

Áp dụng định lí về động năng giữa thời điểm ban đầu và một thời điểm sau nào đó :

$$\mathscr{E}_K(t) - \mathscr{E}_K(0) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \int_a^x -kx'\,dx' = \frac{1}{2}ka^2 - \frac{1}{2}kx^2.$$

Vậy nên : $\dot{x}^2 = \omega_0^2(x^2 - a^2)$.

Bây giờ ta lấy đạo hàm phương trình này đối với thời gian. Ta được :

$$\dot{x}(\ddot{x} + \omega_0^2 x) = 0.$$

Tồn tại hai nghiệm toán học : một mặt ta được $\dot{x} = 0$, mặt khác là phương trình chuyển động đã nhận được nhờ hệ thức cơ bản.

Nghiệm thứ nhất $\dot{x} = 0$ dẫn tới x = cte ; nghiệm này không phù hợp.

Sự có mặt của nghiệm sai này rất dễ phát hiện ; điều này là do việc thiết lập định lí động năng trước đây khi ta nhân cả hai vế của hệ thức cơ bản với vectơ vận tốc $\vec{v}$; nhờ đó, nó cho ta khả năng có một nghiệm vận tốc không.

Như vậy, ta có thể được phép khử nghiệm "nhiễu" này, mà không cần thảo luận sâu, khi xuất hiện các tình huống tương tự.

Áp dụng 2

Hãm phanh nhờ ma sát

Một hòn đáo khối lượng m được ném đi trên con đường đầy váng băng, với vận tốc ban đầu $\vec{v}_0$. *Tìm điều kiện cho* $\vec{v}_0$ *để hòn đáo có thể vượt qua một dải chiều rộng d, mà nếu không có băng thì sẽ tồn tại một lực ma sát độ lớn fmg chừng nào mà vận tốc còn khác không ?*

Công của lực tiếp xúc đối với khoảng cách x vượt qua trên dải không có váng băng như vậy sẽ bằng :

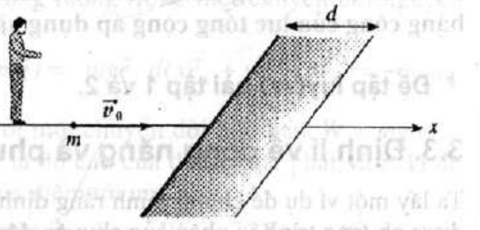
$$W = -fmgx,$$

và độ biến thiên động năng :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W.$$

Như vậy, hòn đáo có thể vượt qua dải nếu vận tốc không triệt tiêu trước khi hoành độ $x = d$, thành thử :

$$v_0 > (2fgd)^{1/2}$$



H.4. *Hãm lại bằng ma sát.*

4 Trường hợp quan trọng của các trường lực bảo toàn

4.1. Các ví dụ mở đầu

Trước tiên, ta giới thiệu khái niệm về trường lực bảo toàn dựa vào một số ví dụ thường ngày.

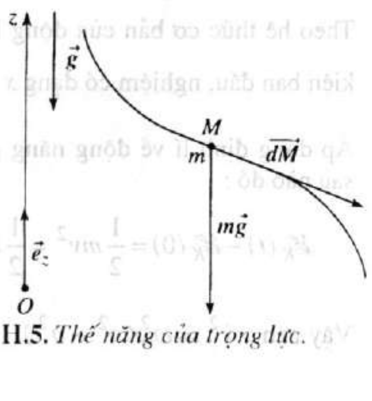
4.1.1. Hạt trong trường trọng lực đều

Với một trục thẳng đứng (Oz) hướng lên trên, và với giả thiết về một trường trọng lực đều $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ (*H.5*), công nguyên tố của trọng lượng bằng :

$$dW = -mgdz = -d(mgz).$$

Công của trọng lượng giữa M_1 (z_1) và M_2 (z_2) là :

$$W = -(mgz_2 - mgz_1).$$



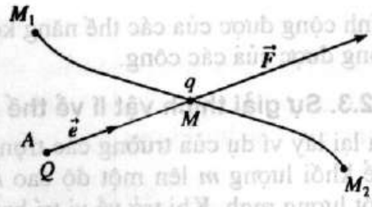
H.5. *Thế năng của trọng lực.*

Công này không phụ thuộc đường đi giữa M_1 và M_2 và biểu diễn sự giảm của hàm số $\mathscr{E}_{P_P} = mgz + \text{cte}$, gọi là *thế năng của trọng lực*. Chú ý rằng thế năng này được xác định sai kém một hằng số cộng.

4.1.2. Hạt tích điện trong trường tĩnh điện do một điện tích điểm tạo ra

Lực tĩnh điện do hạt tích điện Q đặt ở A tác dụng lên hạt tích điện q đặt ở M được tính theo định luật Coulomb (*H.6*) :

$$\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{AM}}{AM^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\vec{e}.$$



H.6. *Tương tác tĩnh điện :*
$Q_q > 0$ và $\vec{AM} = r\vec{e}$.

Công nguyên tố của lực này là :

$$dW = \vec{F}.d\vec{M} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}dr = -\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r}\right).$$

Ở đây, ta còn nhận thấy rằng công của lực tĩnh điện giữa hai vị trí M_1 và M_2 không phụ thuộc đường đi và biểu diễn sự giảm của một thế năng :

$$W = \mathscr{E}_{P_1} - \mathscr{E}_{P_2}.$$

Thường người ta chọn $\mathscr{E}_P = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qQ}{r}$, điều đó dẫn đến việc coi thế năng này sẽ bằng không khi hai điện tích ở xa nhau vô hạn.

4.2. Thế năng

4.2.1. Định nghĩa

Một lực không phụ thuộc vị trí điểm đặt của nó, sẽ xác định *một trường lực*.

<u>*Chú ý :*</u>

Tồn tại những lực không tuân theo một định nghĩa như trên ; ví dụ, đó là trường hợp của các lực tiếp xúc.

Một trường lực, trong một hệ quy chiếu $\mathscr{R}_1$ được xuất phát từ một thế năng nếu tồn tại một hàm số $\mathscr{E}_p(\vec{r})$ sao cho công nguyên tố của lực nghiệm đúng :

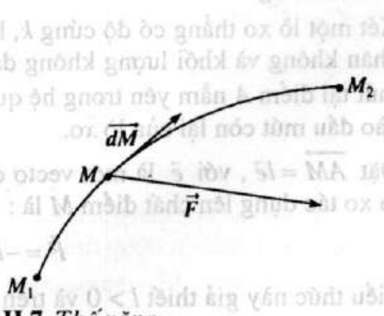
$$dW = -d\mathscr{E}_p$$

$\mathscr{E}_p$, được xác định sai kém một hằng số cộng, là thế năng kết hợp với trường các lực đó.

4.2.2. Tính chất *(H.7)*.

■ Ta hãy tính công của một trường lực như thế dọc theo đường đi từ điểm ban đầu M_1 đến điểm cuối cùng M_2 :

$$W = \int_{M_1}^{M_2} F(r)dr = \int_{M_1}^{M_2} -d\mathscr{E}_p = \mathscr{E}_p(M_1) - \mathscr{E}_p(M_2).$$



H.7. *Thế năng.*

Công của lực đang xét ở trên không phụ thuộc vào đường đi ; trường lực được gọi là *bảo toàn*.

Công của một lực như thế dọc theo một đường cong kín thì bằng không.

▸ **Để tập luyện : bài tập 4.**

Tính cộng được của các thế năng kết hợp với hai trường lực, sinh ra từ tính cộng được của các công.

4.2.3. Sự giải thích vật lí về thế năng

Ta lại lấy ví dụ của trường các trọng lực. Một người thao tác nâng một vật thể khối lượng m lên một độ cao h đã làm thế năng của vật đó tăng lên một lượng mgh. Khi trở về vị trí ban đầu (đi xuống), công của trọng lượng là dương và bằng mgh. Thế năng biểu diễn một năng lượng có thể gọi là *năng lượng tích lũy*. Năng lượng này sẽ được trả lại khi nó trở về trạng thái ban đầu. Cũng theo cách đó, một lò xo bị nén sẽ tích lũy năng lượng (thế năng) mà nó sẽ trả lại khi nó dãn ra.

4.2.4. Biểu thức của trường lực

Cho một chất điểm có ba bậc tự do, nghĩa là tự do chuyển động trong không gian. Công nguyên tố của lực $\vec{F}$ trong một chuyển dời nguyên tố $d\vec{M}$ là :

$$\vec{F}.d\vec{M} = -d\mathscr{E}_p \quad \text{(theo định nghĩa của thế năng).}$$

Mặt khác, theo định nghĩa của gradient :

$$d\mathscr{E}_p = \overrightarrow{grad}\,\mathscr{E}_p.d\vec{M}.$$

Các hệ thức đó được nghiệm đúng đối với mọi chuyển dời nguyên tố $d\vec{M}$, vì vậy khi đồng nhất hóa, ta sẽ thu được :

$$\vec{F}(r) = -\overrightarrow{grad}\,(\mathscr{E}_p(r)).$$

Một trường lực bảo toàn được suy ra từ một hàm thế năng theo hệ thức :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,\mathscr{E}_p.$$

<u>*Chú ý :*</u>

Đối với một chất điểm liên kết, hệ thức $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,\mathscr{E}_p$ không cho phép thu được tất cả các thành phần của lực. Thực vậy, lực liên kết không được suy ra từ một hàm thế năng.

4.3. Các ví dụ vật lí về thế năng

Ta đã từng gặp một vài ví dụ cổ điển như thế năng của trọng lực kết hợp với một trường $\vec{g}$ đều $\mathscr{E}_P = mgz$, hay như thế năng tĩnh điện $\mathscr{E}_P = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1q_2}{r_{12}}$.

Ta sẽ bổ sung thêm nhiều ví dụ quan trọng khác.

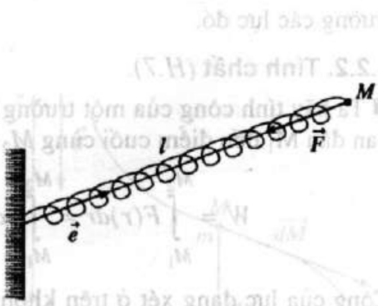
■ Thế năng đàn hồi

Xét một lò xo thẳng có độ cứng k, hoàn toàn đàn hồi, có chiều dài l_0 trong chân không và khối lượng không đáng kể, và được giữ cố định ở một đầu mút tại điểm A nằm yên trong hệ quy chiếu $\mathscr{R}$. Một chất điểm M được gắn vào đầu mút còn lại của lò xo.

Đặt $\overrightarrow{AM} = l\vec{e}$, với $\vec{e}$ là một vectơ đơn vị hướng từ A tới M (H.8). Lực do lò xo tác dụng lên chất điểm M là :

$$\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{e}$$

Biểu thức này giả thiết $l > 0$ và trên thực tế, nó chỉ có hiệu lực trong phạm vi lò xo còn tính đàn hồi.



H.8. *Thế năng kết hợp với một dạng của lực kéo về đàn hồi :* $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{e}$

Khi xem xét một chuyển động nào đó của chất điểm trong $\mathcal{R}$, thì công nguyên tố của lực $\vec{F}$ là :

$$dW = \vec{F}.d\vec{M} = -k(l - l_0)\vec{e}.d(l\vec{e}), \text{ với } d(l\vec{e}) = ld\vec{e} + \vec{e}dl,$$

$\vec{e}$ là vectơ đơn vị, $d\vec{e}$ trực giao với $\vec{e}$ và $\vec{e}.d(l\vec{e}) = dl$.

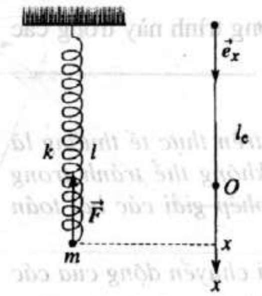
Do đó : $dW = -k(l - l_0)dl = -d\mathscr{E}_P$, với $\mathscr{E}_P = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$.

Theo quy ước, ta đã chọn thế năng đàn hồi bằng không, khi lò xo ở trạng thái nghỉ (lực căng bằng không).

Áp dụng 3

Thế năng của một chất điểm treo ở đầu một lò xo

Với các kí hiệu trên H.9, ta kí hiệu x là độ dài ra của lò xo đối với vị trí cân bằng được chọn làm gốc hoành độ và ta sẽ giới hạn chỉ ở các chuyển động thẳng đứng của khối lượng m. Hãy xác định thế năng kết hợp với lực tổng cộng (trọng lượng $\vec{P}$ + lực đàn hồi $\vec{F}$) tác dụng lên khối lượng m.



H.9. *Chất điểm chịu tác dụng trọng lượng của nó và lực đàn hồi.*

Thế năng là tổng các thế năng của trọng lực $-mgx$ + cte, và thế năng đàn hồi : $\frac{1}{2}k(l - l_0)^2$.

Nhưng $l = l_e + x$, l_e chỉ chiều dài ở trạng thái cân bằng của lò xo sao cho :

$$mg = k(l_e - l_0)$$

Do đó :

$$\mathscr{E}_P = -mgx + \frac{1}{2}k(l_e + x - l_0)^2$$

$$= \frac{1}{2}kx^2 + \text{cte}$$

Cần lưu ý rằng l_e phụ thuộc khối lượng được sử dụng.

4.4. Cơ năng của một chất điểm trong một hệ quy chiếu Galilée $\mathcal{R}_g$

4.4.1. Cơ năng

Xét chuyển động của một chất điểm khối lượng m trong một hệ quy chiếu Galilée $\mathcal{R}_g$, chịu tác dụng của một lực tổng cộng :

$$\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_{nc}.$$

$\vec{F}_c$ là tổng hợp các lực bảo toàn được suy ra từ thế năng tổng cộng $\mathscr{E}_P$.

Các lực khác $\vec{F}_{nc}$ (không bảo toàn) không được suy ra từ một thế năng.

Khi đó định lí động năng cho ta :

$$\mathscr{E}_{K_2} - \mathscr{E}_{K_1} = W_{nc} + \mathscr{E}_{P_1} - \mathscr{E}_{P_2}.$$

Do đó : $(\mathscr{E}_{K_2} + \mathscr{E}_{P_2}) - (\mathscr{E}_{K_1} + \mathscr{E}_{P_1}) = W_{nc}$.

Ta đặt : $\mathscr{E}_M = \mathscr{E}_P + \mathscr{E}_K$, và gọi đó là cơ năng của hạt trong $\mathcal{R}_g$. Nó phụ thuộc vào việc chọn $\mathcal{R}_g$, nhưng cũng phụ thuộc vào hằng số có liên quan tới thế năng.

Trong một hệ quy chiếu Galilée, độ biến thiên của cơ năng thì bằng công của các lực không bảo toàn :

$$d\mathscr{E}_M = dW_{nc} \text{ hay } \frac{d\mathscr{E}_M}{dt} = \mathscr{P}_{nc}$$

4.4.2. Sự vận động bảo toàn và tích phân đầu của năng lượng

Một chất điểm đang vận động bảo toàn trong $\mathcal{R}_g$ nếu cơ năng của nó trong hệ quy chiếu này, vẫn không đổi theo thời gian, nghĩa là nếu công suất được tiêu tán bởi mỗi một lực trong các lực không bảo toàn luôn bằng không ở mọi thời điểm.

Phương trình :

$$\mathscr{E}_M = cte$$

được gọi là tích phân đầu của năng lượng.

Nếu chỉ có một tọa độ duy nhất là đủ để xác định vị trí của M, thì phương trình đó sẽ có dạng :

$$f(x, \dot{x}) = 0$$

Người ta khuyến khích mạnh mẽ việc sử dụng phương trình này trong các bài toán một bậc tự do.

Chú ý :

• *Một tình huống như vậy về cơ năng không đổi, trên thực tế thường là một sự gần đúng, tuy có kể đến các lực ma sát không thể tránh trong trường hợp có các lực liên kết. Tuy nhiên nó cho phép giải các bài toán trong gần đúng bậc nhất.*

• *Phương pháp trên nghiệm đúng hoàn toàn đối với chuyển động của các hành tinh và vệ tinh.*

5 Các ví dụ về chuyển động của một hạt trong sự vận động bảo toàn

Theo giả thiết, các lực không bảo toàn không sinh công trong hệ quy chiếu đang xét $\mathcal{R}_g$.

5.I. Chuyển động một bậc tự do

5.I.I. Dao tử thẳng

Trở lại trường hợp của một chất điểm treo ở đầu một lò xo trong trường trọng lực đều của Trái Đất.

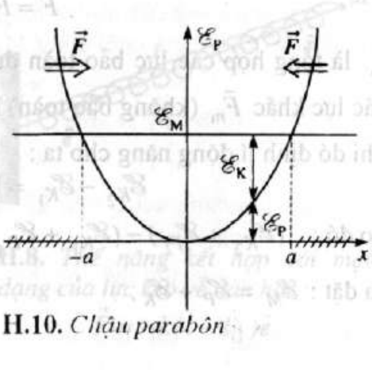
Lực tổng cộng mà một chất điểm phải chịu, được suy ra từ thế năng $\mathscr{E}_P = \frac{1}{2}kx^2$ (gốc được chọn ở vị trí cân bằng). Nếu các lực ma sát nhỏ không đáng kể, thì cơ năng sẽ được bảo toàn :

$$\mathscr{E}_M = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2.$$

$\mathscr{E}_M$ được xác định bởi các điều kiện ban đầu, từ đó có thể suy ra một vài tính chất nào đó của chuyển động mà không cần tiến hành phép lấy tích phân phương trình chuyển động thu được từ hệ thức cơ bản của động lực học.

Muốn thế, ta biểu diễn đường cong $\mathscr{E}_P$ theo hàm số của x (*H.10*).

Đường cong $\mathscr{E}_P = \mathscr{E}_P(x)$ có dạng hình *chậu parabôn*.



H.10. *Chậu parabôn*

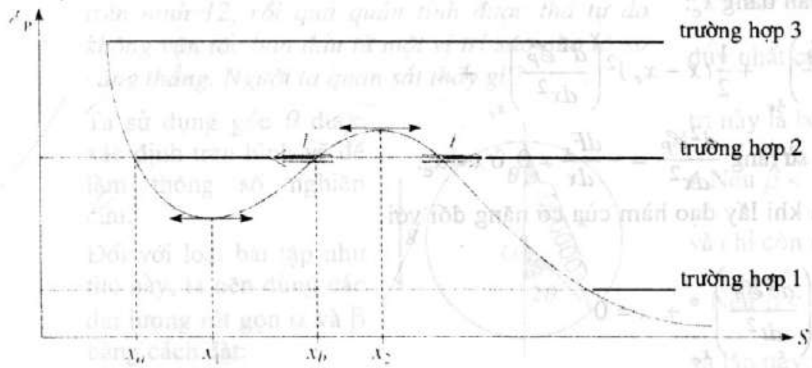
Ta vẽ đường thẳng $y = \mathscr{E}_M = cte$ (giả thiết là đã biết và là dương). Phương trình bảo toàn cơ năng cho phép giải thích trực tiếp bằng đồ thị $\mathscr{E}_K = \mathscr{E}_M - \mathscr{E}_P$.

Vì $\mathscr{E}_K \geq 0$, nên chuyển động bị hạn chế trong trường hợp $-a \leq x \leq a$, với $\mathscr{E}_P(a) = \mathscr{E}_M$. Tại điểm x = ± a *(điểm dừng)*, vận tốc triệt tiêu, nhưng lực $F(x) = -\dfrac{d\mathscr{E}_p}{dt}$ khác không, nên hạt lại khởi hành theo chiều ngược lại.

Trong trường hợp này, do sự tồn tại của cực tiểu của thế năng (ở đây, tại $x = 0$), nên hạt sẽ thực hiện một chuyển động tuần hoàn ở lân cận cực tiểu đó. Cực tiểu này ứng với một vị trí cân bằng bền.

5.I.2. Tổng quát hóa

Giả sử có một hạt vật chất khối lượng m buộc phải chuyển động trên trục (Ox) của một hệ quy chiếu Galilée, trong một trường lực bảo toàn có thế năng $\mathscr{E}_p(x)$ Ta biểu diễn thế năng này bằng đồ thị và giả thiết là đã biết



các điều kiện ban đầu (vị trí x_0 và vận tốc v_0) của hạt (*H.11*).

◀ **H.11.** *Ví dụ về thế năng.*

• Các vị trí kí hiệu là (1) và (2) được gọi là *vị trí cân bằng* của hạt. Thật vậy, các nghiệm không đổi $x(t) = x_1$ hay $x(t) = x_2$ thỏa mãn phương trình chuyển động $\ddot{x} = \dfrac{d\mathscr{E}_p}{dx}$ và thỏa mãn các điều kiện ban đầu ($x_0 = x_1$ hay $x_0 = x_2$ và $v_0 = 0$).

• Ta thỏa thuận rằng một vị trí cân bằng là bền, nếu hạt được buộng ra không vận tốc ban đầu ở lân cận vị trí đó, thì hạt sau đó cũng ở lân cận đấy.
Trong trường hợp ngược lại thì vị trí được gọi là không bền.
Ta hiểu một cách đơn giản từ "lân cận là khoảng cách vị trí cân bằng rất nhỏ so với một chiều dài tiêu biểu của bài toán".

■ Bình luận bằng đồ thị

Ta hãy xem xét các trường hợp khác nhau có thể có tùy theo giá trị của cơ năng $\mathscr{E}_M$ trong ví dụ ở trên.

Ta giới hạn ở trường hợp $v_0 = 0$. Vị trí xuất phát x_0 như vậy sẽ tương ứng với giao điểm giữa đường cong $\mathscr{E}_p(x)$ và đường thẳng $\mathscr{E}_M$ = cte.

• Trường hợp 1: $\mathscr{E}_M < \mathscr{E}_p(x_1)$

Hạt được buông ra ở x_0, sẽ thoát khỏi đó và hướng về các x dương (lực $F(x_0)$ cũng là dương): trường hợp này tương ứng với một trạng thái *khuếch tán*.

• Trường hợp 2: $\mathscr{E}_P(x_1) < \mathscr{E}_M < \mathscr{E}_P(x_2)$.

Nếu x_0 nhỏ hơn x_2, thì hạt sẽ dao động giữa hai điểm dừng có hoành độ x_a và x_b. Ta nói đó là vấn đề về một *trạng thái liên kết*.

Đặc biệt, các điểm đó vẫn ở rất gần (1) nếu $\mathscr{E}_M$ rất gần $\mathscr{E}_P(x_1)$: như vậy, vị trí (1) là một vị trí cân bằng bền. Do đó có sự tổng quát hóa.

Mọi cực tiểu của thế năng đều tương ứng với một vị trí cân bằng bền.

Ta hãy chú ý rằng nếu $x_0 > x_2$, thì ta lại tìm được trường hợp 1.

Vị trí (2) là một vị trí cân bằng không bền. Tình hình cũng như thế đối với mọi cực đại của thế năng trong kiểu bài toán này.

• *Trường hợp 3:* $\mathscr{E}_P(x_2) < \mathscr{E}_M$.

Rất dễ dàng thử nghiệm rằng hạt thoát ra hướng về vô cùng. Đây lại là vấn đề về một trạng thái khuếch tán, ngay cả khi nếu $\mathscr{E}_M$ rất gần với $\mathscr{E}_P(x_2)$.

■ Kĩ thuật tuyến tính hóa

Ta kí hiệu x_e là một vị trí cân bằng. Ta có thể tìm lại được các kết quả trước bằng cách quan tâm đến chuyển động của một chất điểm ở lân cận vị trí cân bằng này.

Ta khai triển $\mathscr{E}_P(x)$ ở lân cận vị trí cân bằng x_e:

$$\mathscr{E}_P(x) = \mathscr{E}_P(x_e) + (x - x_e)\left(\frac{d\mathscr{E}_P}{dx}\right)_{x_e} + \frac{1}{2}(x - x_e)^2\left(\frac{d^2\mathscr{E}_P}{dx^2}\right)_{x_e} + ...$$

$\dfrac{d\mathscr{E}_P}{dx} = -F_x = 0$ ở $x = x_e$; Ở đây, ta giả sử rằng $\dfrac{d^2\mathscr{E}_P}{dx^2} = -\dfrac{dF_x}{dx} \neq 0$ ở $x = x_e$.

Khi thể hiện sự bảo toàn cơ năng và khi lấy đạo hàm của cơ năng đối với thời gian, thì ta được:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + (x - x_e)\left(\frac{d^2\mathscr{E}_P}{dt^2}\right)_{x_e} + ... = 0$$

Khi đặt $\xi = x - x_e$ và $k = \left(\dfrac{d^2\mathscr{E}_P}{dx^2}\right)_{x_e} = -\left(\dfrac{dF_x}{dx}\right)_{x_e}$, thì lúc đó, ta thu được phương trình tuyến tính gần đúng:

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} + k\xi = 0$$

mà nghiệm hình sin bị giới hạn nếu k dương; lúc này, vị trí cân bằng là một cực tiểu của thế năng; ở lân cận vị trí này, F_x là một *lực kéo về*, và cân bằng là bền.

Nếu $k < 0$, thì nghiệm không bị giới hạn; hạt thoát ra khỏi vùng đang xét ; lúc đó, người ta đi ra ngoài phạm vi hiệu lực của phương trình gần đúng, nhưng ít nhất người ta có thể kết luận rằng cân bằng là không bền.

Cuối cùng, đối với $k = 0$, ta phải tiếp tục thảo luận. Ở đây, ta hãy bằng lòng với khía cạnh đồ thị.

Ta dễ dàng khái quát hóa các kết quả trên cho trường hợp của các vận động bảo toàn một bậc tự do (biến số x được thay bằng một tọa độ nào đó, ví dụ tọa độ góc chẳng hạn).

Trong trường hợp của một vận động bảo toàn một bậc tự do, các vị trí tương ứng với một cực tiểu của thế năng (lực kéo về) đều là các vị trí cân bằng bền, và các cực đại của thế năng là không bền.

Trường hợp của một vận động bảo toàn có nhiều bậc tự do thì tinh tế hơn nhiều : các kết luận nêu lên ở trên vẫn còn đúng nếu tất cả các lực đều được suy ra từ thế năng. Nhưng một cực đại của thế năng có thể tùy tình thế "được ổn định" nhờ sự tồn tại của các lực khác có công suất bằng không, ví như lực từ.

Ta giới hạn ở một ví dụ duy nhất, còn sự nghiên cứu hết mọi mặt thì vượt ra ngoài khuôn khổ chương trình của chúng ta.

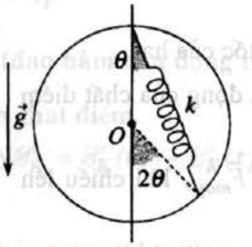
Áp dụng 4

Lò xo trên vòng tròn

Một quả quán tính, khối lượng m, có thể trượt không ma sát trên một vòng tròn cứng bán kính R. Chất điểm này được gắn cố định vào một đầu mút của một lò xo đàn hồi, không khối lượng, độ cứng k, còn đầu mút kia của lò xo được gắn với điểm A của vòng tròn. Toàn bộ được xếp thẳng đứng như trên hình 12, rồi quả quán tính được thả tự do không vận tốc ban đầu từ một vị trí sao cho lò xo căng thẳng. Người ta quan sát thấy gì ?

Ta sử dụng góc θ được xác định trên hình vẽ để làm thông số nghiên cứu.

Đối với loại bài tập như thế này, ta nên dùng các đại lượng rút gọn α và β bằng cách đặt:
$l_0 = 2R\alpha$ và $mg = \beta kR$.



H.12. $l_0 = 2R\alpha$ và $mg = \beta kR$.

Thế năng tổng cộng ($\mathscr{E}_{P_p} + \mathscr{E}_{P_e}$) trở thành :

$$\mathscr{E}_P = 2kR^2\left[(\alpha - \cos\theta)^2 - \beta\cos^2\theta\right]$$

Vì $AM = 2R\cos\theta$ và $\mathscr{E}_{P_p} = -2mgR\cos^2\theta$.

Như vậy ta có thể nghiên cứu $\mathscr{E}_P(\theta)$:

$$\frac{d\mathscr{E}_P}{d\theta} = 4kR^2\sin\theta[\alpha - (1-\beta)\cos\theta]$$

và $\dfrac{d^2\mathscr{E}_P}{d\theta^2} = 4kR^2[\alpha\cos\theta - (1-\beta)\cos(2\theta)]$

Các cực trị hữu ích đối với θ trong khoảng $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ nghiệm đúng $\sin\theta = 0$ và $\cos\theta = \dfrac{\alpha}{(1-\beta)}$.

- Nếu $\beta > 1$ ($mg > kR$), $\theta = 0$ là vị trí cân bằng duy nhất có thể có và $\dfrac{d^2\mathscr{E}_P}{d\theta^2(0)}$ là dương, thì vị trí này là bền.
- Nếu $\beta < 1$ và nếu $\dfrac{\alpha}{(1-\beta)} > 1$, thì $\alpha + \beta > 1$, và chỉ còn tồn tại một vị trí cân bằng $\theta = 0$.
- Nếu $\beta < 1$ và nếu $\dfrac{\alpha}{(1-\beta)} < 1$, thì $\alpha + \beta < 1$, và lần này tồn tại hai vị trí cân bằng :

$$\theta_1 = 0 \text{ và } \theta_2 = \text{arc cos}\left(\frac{\alpha}{(1-\beta)}\right).$$

Ta có thể kiểm nghiệm đạo hàm cấp hai của $\mathscr{E}_P$ là âm ở θ_1 và dương ở θ_2.

Vị trí sau cùng này là bền trái ngược với vị trí thứ nhất. Sơ đồ đường cong $\mathscr{E}_P(\theta)$ đối với các giá trị khác nhau của α và β xác nhận kết quả đó.

Chú ý:

Trục (Oz) là trục đối xứng, vị trí đối xứng của θ_2 cũng phù hợp.

▸ **Để tập luyện: bài tập 5, 6, 7, 8, 9, 10 và 11.**

5.2. Ví dụ về sự vận động bảo toàn hai bậc tự do

Ta lại xét một sự vận động bảo toàn của một chất điểm, nhưng lần này có kể tới sự tồn tại của hai hay ba thông số (các biến số về vị trí hay các tọa độ độc lập). Thành thử, giả sử cũng giống như trong trường hợp của chuyển động do lực xuyên tâm đẳng hướng, ta sẽ thấy (trong *chương 6* tập Cơ học II) rằng sự bảo toàn mômen động lại đưa ta về trường hợp trước. Những tình huống tương tự như trên với một thông số chính, sẽ được đề cập đến trong một số bài tập ở cuối chương này.

5.3. Ví dụ về bẫy Penning

Ở đây ta đề cập đến một điểm tinh tế. Trong một vài cấu trúc của các điện cực, thì một hạt tích điện chịu tác dụng của một lực điện được sinh ra từ một thế năng:

$$\mathscr{E}_P(x,y,z) = \mathscr{E}_{P_0} - m\frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2 - 2z^2),$$

trong đó α là dương.

Lực $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, U$ có các thành phần:

$$F_x = m\alpha x;\ F_y = m\alpha y;\ F_z = -2m\alpha z.$$

Như vậy gốc O của hệ tọa độ là một vị trí cân bằng $(\vec{F}(0) = \vec{O})$, nhưng vị trí cân bằng này *không bền* vì rằng hệ thức cơ bản của động lực học khi chiếu lên (Ox) và (Oy) sẽ chấp nhận các nghiệm không bị giới hạn (dạng hypecbolic).

Nếu ta áp dụng một từ trường đều và song song với (Oz), thì sẽ xuất hiện một lực phụ:

$$\vec{F}_{moy} = mA\vec{e}_z \wedge \vec{v}.$$

trong đó A là một hằng số và trong đó $\vec{v}$ là vectơ vận tốc của hạt.

Một lực như thế sẽ không sinh công trong $\mathscr{R}$; sự vận động của chất điểm vì thế mà luôn luôn bảo toàn.

Hệ thức cơ bản của động lực học $m\vec{a} = -\overrightarrow{grad}\ \mathscr{E}_P + \vec{F}_{moy}$, khi chiếu lên (Ox) và (Oy), sẽ cho:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha x - A\frac{dy}{dt} \text{ và } \frac{d^2y}{dt^2} = \alpha y + A\frac{dx}{dt}.$$

Đặt $u = x + iy$ (u biểu diễn tọa vị của vectơ $\overrightarrow{OM}$ đối với một chuyển động phẳng như thế), ta được:

$$\frac{d^2u}{dt^2} - iA\frac{du}{dt} - \alpha u = 0$$

Nghiệm của một phương trình vi phân như trên có dạng:

$$u = ae^{r_1t} + be^{r_2t},$$

trong đó r_1 và r_2 đều là các nghiệm của phương trình đặc trưng

$$r^2 - iAr - \alpha = 0.$$

Biệt số là : $\Delta = -A^2 + 4\alpha$, ta nhận xét thấy rằng nếu $A^2 > 4\alpha$, r_1 và r_2 sẽ thuần túy là ảo, do đó u sẽ có môđun hữu hạn, kéo theo hạt vẫn sẽ ở lân cận vị trí O. Lực từ cho phép quỹ đạo uốn cong khiến cho vị trí O lúc đó sẽ trở thành ổn định.

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

• Công suất $\mathscr{P}$ của lực $\vec{F}$ thì bằng tích vô hướng của lực đó với vận tốc dịch chuyển $\vec{v}$ của điểm đặt của nó:

$$\mathscr{P} = \vec{F}.\vec{v}.$$

• Công W của một lực thì bằng $\int_{t_1}^{t_2} \mathscr{P}\, dt$. Công này bằng sự lưu thông của $\vec{F}$.

• Công suất động học $\frac{d\mathscr{E}_K}{dt}$ (đạo hàm của động năng đối với thời gian) thì bằng công suất của tất cả các lực tác dụng lên chất điểm.

• Độ biến thiên động năng $\Delta\mathscr{E}_K = \mathscr{E}_K(t_2) - \mathscr{E}_K(t_1)$ thì bằng công của tất cả các lực trong khoảng thời gian $[t_1, t_2]$.

• Nếu tồn tại một trường lực bảo toàn, thì trường này được sinh ra từ một thế năng:

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\mathscr{E}_P \quad \text{hay} \quad d\mathscr{E}_P = -\vec{F}.d\vec{M}.$$

• Cơ năng của một chất điểm là $\mathscr{E}_M = \mathscr{E}_P + \mathscr{E}_K$.

Độ biến thiên của $\mathscr{E}_M$ bằng công của các lực không được sinh ra từ thế năng, nghĩa là bằng công của các lực không bảo toàn.

• Trong trường hợp của một chuyển động bảo toàn có một bậc tự do:

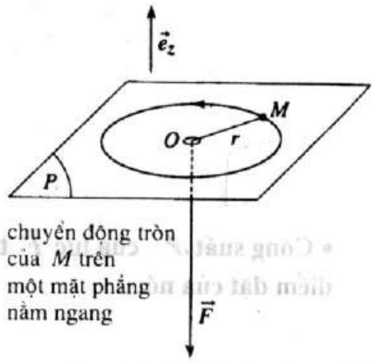
. phương trình chuyển động có thể được suy ra từ $\mathscr{E}_M$ = cte;

. các cực đại của $\mathscr{E}_P$ tương ứng với các vị trí cân bằng bền và các cực tiểu tương ứng với các vị trí cân bằng không bền.

Bài tập có lời giải

Hòn đáo trên mặt phẳng nằm ngang

ĐỀ BÀI



Một hòn đáo khối lượng m vạch một quỹ đạo tròn trên một mặt phẳng nằm ngang rất nhẵn. Một sợi dây không dãn buộc chặt vào hòn đáo và luồn qua một lỗ nhỏ O đục trên mặt phẳng. Một người thao tác thực hiện một lực $\vec{F}$ lên sợi dây.

1) Viết biểu thức về độ lớn của lực $\vec{F}_1$ kết hợp với chuyển động tròn đều bán kính r_1 của hòn đáo. Ta kí hiệu $\vec{L}_1$ là mômen động ở O của chất điểm.

2) Trong một khoảng thời gian rất ngắn τ, người thao tác thực hiện một lực $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{f}$ trên phần thẳng đứng của sợi dây, trong đó $\vec{f}$ là một lực không đổi. Chất điểm có một vận tốc xuyên tâm $\vec{u}$ hướng về điểm O. Tính giá trị của f và công kết hợp, với giả thiết là độ chuyển dời xuyên tâm Δr của hòn đáo nhỏ không đáng kể so với r_1 trong thời gian τ. Phải chọn τ như thế nào để đạt được tình huống như vậy ?

3) Thao tác trên hoàn thành, người vận hành luôn luôn tác dụng một lực thích hợp $\vec{F}$ để sợi dây thẳng đứng rơi xuống với vận tốc u. Hãy tính công của người vận hành khi khoảng cách của hòn đáo tới lỗ O đi từ r_1 đến r_2 sao cho $r_2 < r_1$. Điều gì sẽ xảy ra đối với $r_2 = 0$?

HƯỚNG DẪN

Ôn lại :

- *các biểu thức về vận tốc và gia tốc trong tọa độ cực ;*
- *biểu thức của gia tốc đối với một chuyển động tròn đều (chương 1) ;*
- *các tính chất của những chuyển động do lực xuyên tâm (chương 2).*

Trong trường hợp của một chuyển động tròn, làm thế nào để biểu diễn mômen động ở O ?

Lực tác dụng lên M có giá đỡ của nó đi qua O. Do vậy chuyển động động học được bảo toàn.

Một lực rất mạnh f có thể gây ra một sự biến thiên vận tốc không bỏ qua được u trong khoảng thời gian rất ngắn τ. Tuy nhiên, vận tốc vẫn bị giới hạn và tích phân của nó từ 0 đến τ tiến về 0 khi τ tiến về 0. Sự gần đúng (r không đổi trong thời gian τ) có hiệu lực nếu kết quả tìm được tương thích với điều kiện $\Delta r << r_1$. Người ta có thể sử dụng những phương pháp nào để tính một công ? So sánh phép tính trực tiếp (bằng phép lấy tích phân lực) và sự cân bằng động năng. Sự bảo toàn mômen động sẽ kéo theo điều gì nếu bán kính r trở thành không ?

LỜI GIẢI

1) Cho $\vec{L}_1 = mr_1 v\vec{e}_z$. Lực tác dụng vào M là lực xuyên tâm, $\vec{L}_1$ không đổi cũng như v.

Đặt $\vec{F} = -F_1\vec{e}_r$, ta có $+m\dfrac{v^2}{r_1} = +F_1$ (phép chiếu trên pháp tuyến với chuyển động của M của nguyên lí cơ bản của động lực học áp dụng vào M).

Do đó $F_1 = \dfrac{L_1^2}{mr_1^3}$.

2) Ta sử dụng các tọa độ cực (r, θ). Chuyển động của M phải sao cho :

$$mr^2\dot{\theta} = L_1 \text{ và } m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -F_1 - f,$$

với $mr\dot{\theta}^2 = \dfrac{L_1^2}{mr^3} \approx \dfrac{L_1^2}{mr_1^3} = F_1$ (τ rất ngắn).

Do đó $m\ddot{r} = -f$, nên $\dot{r} = -\dfrac{ft}{m}$ $\quad (\dot{r}(0) = 0)$.

Biết rằng $\dot{r}(\tau) = -u$, lúc đó $f = \dfrac{mu}{\tau}$, và công kết hợp bằng :

$$W = \int_0^{\tau} -f\dot{r}dt = \int_0^{\tau} +f^2\frac{t}{m}dt = \frac{f^2\tau^2}{2m}, \text{ do đó } W = \frac{mu^2}{2}.$$

$\Delta r \approx \dfrac{u}{2\tau}$. Giả thiết của phép tính được chứng thực nếu $\tau << \dfrac{2r_1}{u}$.

3) $\dot{r} = -u = cte$, do đó $F = \dfrac{L_1^2}{mr^3}$ (L = cte). Do đó $W = \dfrac{L_1^3}{2m}\left(\dfrac{1}{r_2^2} - \dfrac{1}{r_1^2}\right)$,

công thức biểu diễn đúng độ biến thiên động năng của hòn đáo.

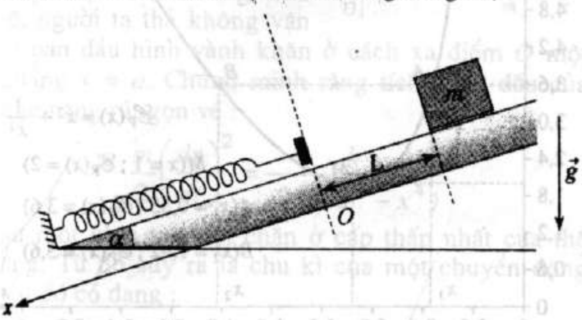
Đối với $r_2 \approx 0$, W là vô hạn vì F trở thành vô hạn, cũng như vận tốc của hòn đáo !

Bài tập

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

1 Hình lập phương

Người ta thả không vận tốc ban đầu một hình lập phương khối lượng m trên một mặt phẳng bằng vật liệu nhẵn, nghiêng một góc α so với mặt nằm ngang. Hình lập phương lúc đó sẽ trượt trên đường có độ dốc lớn nhất một khoảng cách L, trước khi gặp phải một cái chặn gắn vào một lò xo (lí tưởng) dài, có độ cứng k, được bố trí theo sơ đồ dưới đây. (Các khối lượng của lò xo và của cái chặn đều không đáng kể)



1) Xác định chiều dài mà lò xo bị nén.

2) Ở điểm nào thì vận tốc của hình lập phương là cực đại ?

• Lời giải

1) Hình lập phương chuyển động không ma sát trên mặt phẳng nghiêng. Khi lò xo bị nén một khoảng x, ta có :

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 0 = mg(L+x)\sin\alpha + \int_0^x -kxdx$$

Vì vậy $\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = mg(L+x)\sin\alpha - \frac{1}{2}kx^2$.

$x = x_m$ *khi* $\frac{dx}{dt} = 0$, *nên* $mg\sin\alpha\,(L+x_m) - \frac{kx_m^2}{2} = 0$,

do đó $x_m = a + \sqrt{a^2 + 2aL}$, *với* $a = \frac{mg\sin\alpha}{k}$.

2) Động năng là cực đại đối với x sao cho :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2 - a(L+x)\right) = 0, \text{ vậy } x = a$$

2 Các định luật về lực

Ta tưởng tượng trong một vùng không gian nào đó chứa điểm O, có hai lực chỉ phụ thuộc vào vectơ vị trí $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ theo các định luật :

$$\vec{F}_1 = kx\vec{e}_x \text{ và } \vec{F}_2 = ky\vec{e}_x,$$

trong đó, k là một hằng số.

Trước tiên, ta hãy thừa nhận có khả năng thực hiện về mặt vật lí các trường lực như vậy.

1) Chứng minh rằng $\vec{F}_1$ được sinh ra từ một thế năng $\mathscr{E}_{P_1}$ mà ta sẽ diễn đạt với việc chọn $\mathscr{E}_{P_1}(0) = 0$.

Bằng cách nhìn các đường sức của $\vec{F}_1$, hãy xác minh rằng trường lực này có sự lưu thông được bảo toàn.

2) Với một đường chu vi hình chữ nhật rất đơn giản, hãy ghi nhận rằng $\vec{F}_2$ không phải là một lực có sự lưu thông bảo toàn.

Vậy liệu ta có thể xác định được một thế năng mà từ đó sinh ra lực $\vec{F}_2$ không ?

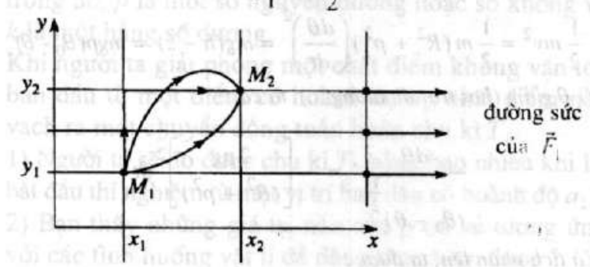
Hãy tính sự lưu thông của $\vec{F}_2$ trên vòng tròn tâm O và bán kính R, nằm trong mặt phẳng (xOy).

Cần phải nghĩ gì về kết quả nhận được ?

• Lời giải

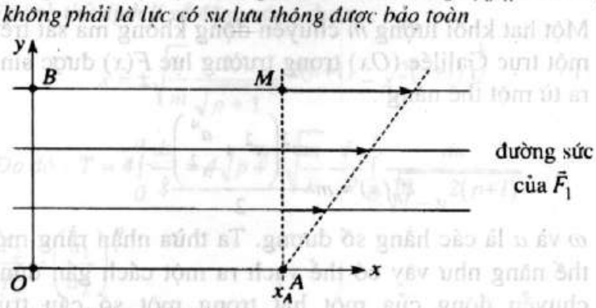
1) $\vec{F}_1 = +kx\vec{e}_x$, *do đó :*

$$\mathscr{E}_{P_1} = -\frac{1}{2}kx^2$$



$\int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_1.d\vec{M} = \int_{x_1}^{x_2} +kxdx = \mathscr{E}_{P_1}(x_1) - \mathscr{E}_{P_2}(x_2)$, *dù đường đi có dạng như thế nào.*

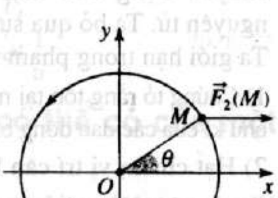
2) Sự lưu thông của F_2 trên quãng đường OAM bằng không, trong khi trên đoạn đường OBM thì nó bằng $ky_Bx_A \neq 0$: F_2 không phải là lực có sự lưu thông được bảo toàn



Vậy ta không thể kết hợp thế năng cho F_2.

$$\oint_C \vec{F}_2(M)d\vec{M} = \int_0^{2\pi} -ky\sin\theta\, rd\theta$$

$$= -\pi kR^2.$$

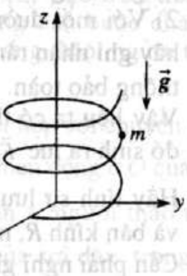


Công khác không và phụ thuộc vào đường chu vi lựa chọn.

3 Chuyển động của một hạt trai trên một đường xoắn ốc

Người ta xâu các hạt trai vào một sợi dây kim loại thể hiện một đường xoắn ốc tròn có trục (Oz) thẳng đứng đi lên và có các phương trình :

$x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$ và $z = p\theta$, $p > 0$ là bước rút gọn của đường xoắn ốc.



Một hạt trai được thả không vận tốc ban đầu từ một điểm ở độ cao $z = h = p\theta_0$. Hãy nghiên cứu chuyển động của hạt trai từ đó về sau, khi không có ma sát.

• *Lời giải*

Chỉ duy nhất trọng lượng mới sinh công ; định lí về động năng cho ta:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(R^2 + p^2)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = mg(h - z) = mgp(\theta_0 - \theta).$$

Vì θ giảm (hạt trai đi xuống ...), ta có :

$$\frac{d\theta}{(\theta_0 - \theta)^{\frac{1}{2}}} = -\left[\frac{2pg}{(R^2 + p^2)}\right]^{\frac{1}{2}} dt$$

Và tích phân lên, ta được :

$$\theta(t) = -\theta_0 - \frac{1}{2}\frac{gp}{R^2 + p^2}t^2.$$

Kết quả này vẫn còn có hiệu lực chừng nào mà hạt trai chưa tới mặt đất.

4 Hạt ở trong một thế năng $\mathscr{E}_p(x)$.

Một hạt khối lượng m chuyển động không ma sát trên một trục Galilée (Ox) trong trường lực $F(x)$ được sinh ra từ một thế năng :

$$\mathscr{E}_p(x) = m\frac{\omega^2\left(x^2 + \dfrac{a^4}{x^2}\right)}{2},$$

ω và a là các hằng số dương. Ta thừa nhận rằng một thế năng như vậy có thể vạch ra một cách gần đúng chuyển động của một hạt trong một số cấu trúc nguyên tử. Ta bỏ qua sự tồn tại của mọi loại lực khác. Ta giới hạn trong phạm vi $x > 0$.

1) Chứng tỏ rằng tồn tại một vị trí cân bằng bền. Hãy tính chu kì của các dao động biên độ nhỏ ở hai bên vị trí này.

2) Hạt chiếm vị trí cân bằng với một vận tốc ban đầu v_0 nào đó. Hãy chứng tỏ rằng từ đó về sau, hạt vạch một chuyển động tuần hoàn. Hãy nêu lên nguyên lí của phép tính chu kì kết hợp.

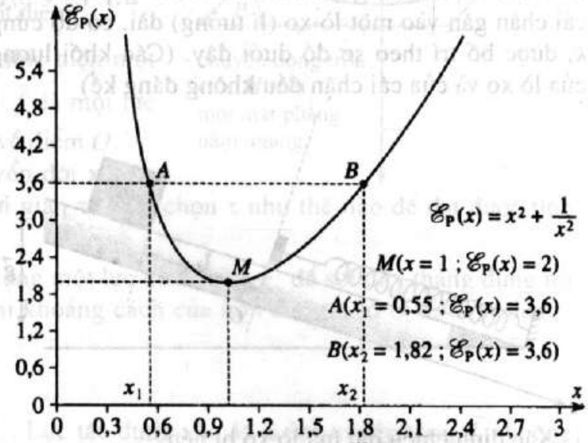
Người ta biểu diễn kết quả bằng một công thức dưới dạng một tích phân. Ta có thể giải thích như thế nào điều, mà bằng phép tích phân, ta lại tìm thấy cùng một kết quả như nhau đối với các chuyển động nhỏ ?

• *Lời giải*

1) Đồ thị $\mathscr{E}_p(x)$ (xem đường cong dưới đây) chứng tỏ rằng tồn tại một cực tiểu, do đó tồn tại một vị trí cân bằng bền $x = a$. Ở lân cận điểm $x = a$, nếu bỏ qua các số hạng cấp cao hơn 2 ở $(x - a)$, thì ta có :

$$\mathscr{E}_p(x) = m\omega^2 a^2 + 2m\omega^2(x - a)^2$$

do vậy, mạch số của các dao động nhỏ là $\omega_0 = 2\omega$.



2) Áp dụng định lí về động năng ta được :

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + \frac{a^4}{x^2}\right) = \frac{mv_0^2}{2} + m\omega^2 a^2.$$

Cho $T = \displaystyle\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\dot{x}}$ *với :* $\dot{x} = \left[v_0^2 + \omega^2\left[2a^2 - \left(x^2 + \frac{a^4}{x^2}\right)\right]\right]^{1/2}$

$\dot{x}$ triệt tiêu khi $x = x_1$ và $x = x_2$,

$$T = \frac{2}{\omega}\int_{x_1}^{x_2}\frac{xdx}{\left[(x_2^2 - x^2)(x^2 - x_1^2)\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\omega}\int_{y_1 = x_1^2}^{y_2 = x_2^2}\frac{dy}{\left[(y_2 - y)(y - y_1)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Cũng có thể còn cho $T = \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^1\frac{du}{\sqrt{u(1-u)}}$ *với* $u = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y}$.

Kết quả độc lập với v_0. Người ta có thể kiểm nghiệm $\displaystyle\int_0^1\frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} = \pi$.

5 Lò xo

Người ta bố trí một lò xo đàn hồi, độ cứng k, chiều dài tự nhiên l_0 (chiều dài lúc nghỉ) và có khối lượng không đáng kể.

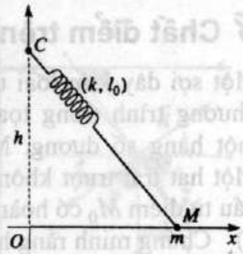
Một đầu mút của lò xo được gắn với một điểm C còn đầu kia gắn với một vòng khuyên khối lượng m, trượt không ma sát trên một trục nằm ngang (Ox) mà khoảng cách h tới điểm C có thể được điều chỉnh tùy ý.

1) Người ta có thể tiên đoán được điều gì liên quan đến hành vi của hệ trong những trường hợp :

a) $l_0 < h$?   b) $l_0 > h$?

Trước tiên ta hãy xem xét kĩ một lời giải trực giác, sau đó ta tiến hành một nghiên cứu về đồ thị thế năng của hệ này đang vận động bảo toàn để kiểm nghiệm những lời khẳng định trên.

2) Trường hợp $l_0 = h$ là trường hợp giới hạn lí thú tương ứng với các dao động gọi là *không điều hòa*, vì các dao động không phải là hình sin. Khi đã điều chỉnh khoảng cách OC để có thể ở trong một tình huống như thế, người ta thả không vận tốc ban đầu hình vành khăn ở cách xa điểm O một khoảng $x = a$. Chứng minh rằng tích phân đầu của động năng rút gọn về :



$$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{k}{(8l_0^2)(a^4 - x^4)}$$

Sau một khai triển bị chặn ở cấp thấp nhất của thế năng. Từ đó suy ra là chu kì của một chuyển động kiểu đó có dạng :

$$T = 8I\left(\frac{l_0}{a}\right)\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{1}{2}},$$

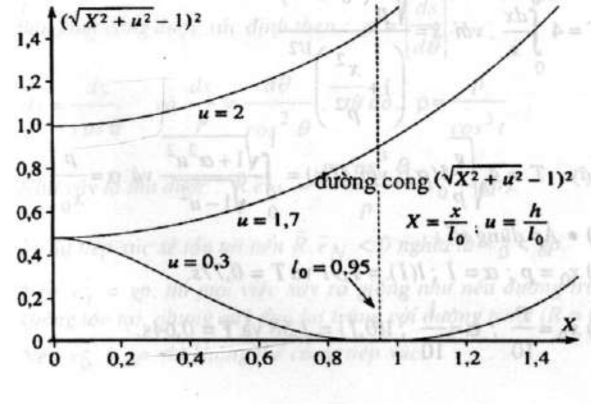
trong đó, I là một tích phân mà ta xác định bằng số và có giá trị vào khoảng 1,31.

• *Lời giải*

1) • Trực giác cho thấy nếu $l_0 < h$, thì $x = 0$ là vị trí cân bằng bền và nếu $l_0 > h$, thì $x = \pm\sqrt{l_0^2 - h^2}$ cũng là các vị trí cân bằng bền.

$$\bullet\ \mathscr{E}_p = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2 + h^2} - l_0\right)^2 = \frac{1}{2}kl_0^2\left(\sqrt{\left(\frac{x}{l_0}\right)^2 + \left(\frac{h}{l_0}\right)^2} - 1\right)^2.$$

Ta hãy nghiên cứu hàm số $\left(\sqrt{X^2 + u^2} - 1\right)^2$ theo các giá trị của u (xem đường cong dưới đây) : kết quả đã có thể được nhìn thấy trước.



2) Nếu u = 1, thì ở lân cận của X = 0, ta có :

$$\left(\sqrt{X^2 + 1} - 1\right)^2 \approx \frac{X^4}{4}.$$

Do đó : $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{k}{8}l_0^2(a^4 - x^4)$. *Một phần tư chu kì trôi qua giữa chiều dài ban đầu và độ dãn cực đại :*

$$T = 4\int_0^a \frac{dx}{\dot{x}} = 8\sqrt{\frac{m}{k}}l_0\int_0^a \frac{dx}{\left(a^4 - x^4\right)^{1/2}} = 8\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{l_0}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \sin^2\varphi}}$$

Chu kì biến đổi theo độ dãn như là $\frac{l}{a}$.

6 Chất điểm trong một hố thế nằng

Một chất điểm có thể chuyển động không ma sát trên một trục nằm ngang (Ox) khi chịu một lực kéo về :

$$\vec{F} = -kx^{2p+1}\vec{e}_x$$

trong đó, p là một số nguyên dương hoặc số không và k là một hằng số dương.

Khi người ta giải phóng một chất điểm không vận tốc ban đầu từ một điểm có hoành độ a_1, chất điểm này vạch ra một chuyển động tuần hoàn chu kì T_1.

1) Người ta sẽ đo được chu kì T_2 bằng bao nhiêu khi lại bắt đầu thí nghiệm từ một vị trí ban đầu có hoành độ a_2 ?

2) Bạn thấy những giá trị nào của p có vẻ tương ứng với các tình huống vật lí dễ dàng thực hiện được ?

• *Lời giải*

1) Thế năng kết hợp với F thì bằng

$$\mathscr{E}_p = \frac{k}{2(p+1)}x^{2(p+1)},$$

sai kém một hằng số cộng.

Thành thử định lí về động năng cho ta :

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\frac{1}{\sqrt{p+1}}\left(a^{2(p+1)} - x^{2(p+1)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Do đó : } T = 4\int_0^a \frac{dx}{\dot{x}} = 4\sqrt{p+1}\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{1}{a^p}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^{2(p+1)}}}.$$

$$\frac{T_2}{T_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^p.$$

2) p = 0 : dao tử có hình sin $T_2 = T_1$.

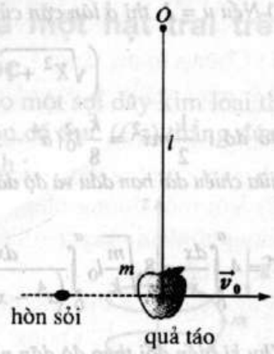
p = 1 : *(xem bài tập 5) T tỉ lệ với $\frac{1}{a}$.*

7 Các chuyển động có thể có của một con lắc

Một quả táo được buộc vào một đầu sợi dây chiều dài l, đầu kia được cố định vào một điểm O nằm yên. Người ta bắn một hòn sỏi nhờ một cái súng cao su. Hòn sỏi trúng quả táo và ăn sâu vào đó.

Hệ (quả táo - hòn sỏi) được coi như một chất điểm và được kích động, ngay sau va chạm, một vận tốc ban đầu nằm ngang $\vec{v}_0$.

Người ta quan sát thấy con lắc có các chuyển động nào ?



Chứng minh rằng :

a) nếu $v_0 < (2gl)^{1/2}$, thì chuyển động là chuyển động con lắc ;

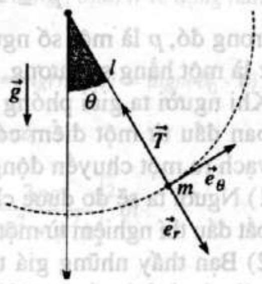
b) nếu $(2gl)^{1/2} < v_0 < (5gl)^{1/2}$, thì có sự thay đổi về bản chất của bài toán, sức căng của sợi dây triệt tiêu ;

c) nếu $v_0 > (5gl)^{1/2}$, thì chuyển động là quay tròn.

• *Lời giải*

Ta hãy nghiên cứu lực căng T của sợi dây giả thiết là căng.

Áp dụng định lí về động năng cho khối lượng m, ta được :



$$v^2 = v_0^2 - 2gl(1 - \cos\theta).$$

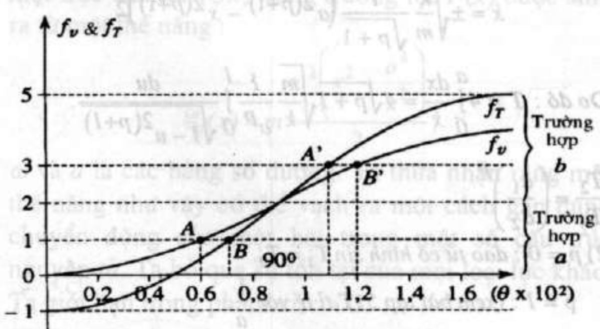
Áp dụng hệ thức cơ bản của động lực học cho khối lượng m, ta được (bằng phép chiếu lên $\vec{e}_r$)

$$-m\frac{v^2}{l} = mg\cos\theta - T,$$

$$Vậy : T = m\left[\frac{v_0^2}{l} + g(3\cos\theta - 2)\right]$$

v triệt tiêu khi $\frac{v_0^2}{gl} = f_v = 2(1 - \cos\theta);$

T triệt tiêu khi $\frac{v_0^2}{gl} = f_T = 2 - 3\cos\theta.$



Ta vẽ trên cùng một đồ thị f_v và f_T đối với θ biến thiên từ 0 đến 180^0 :

a) $0 < \frac{v_0^2}{gl} < 2$ *: v triệt tiêu trước T, chuyển động là chuyển động con lắc.*

b) $0 < \frac{v_0^2}{gl} < 5$ *: T triệt tiêu trước v, sợi dây không còn bị căng nữa.*

c) $\frac{v_0^2}{gl} > 5$ *: T > 0, chuyển động là quay tròn.*

8 Chất điểm trên một parabôn

Một sợi dây kim loại uốn thành một đường cong có phương trình trong tọa độ Descartes $x^2 = 2py$, p là một hằng số dương. Mặt phẳng (xOy) thẳng đứng. Một hạt trai trượt không ma sát trên đường cong bắt đầu từ điểm M_0 có hoành độ dương x_0.

1) Chứng minh rằng hạt trai thực hiện các dao động tuần hoàn.

2) Hãy ước tính giá trị số học của chu kì $T(x_0)$ trong mỗi trường hợp sau đây :

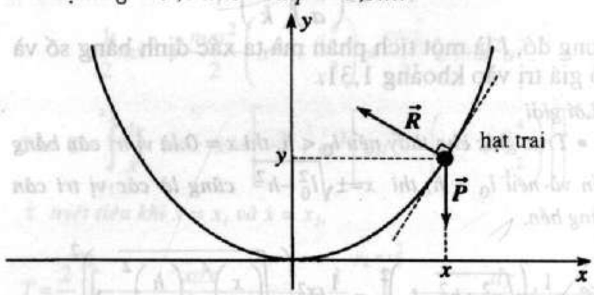
a) $x_0 = p$; b) $x_0 = \frac{p}{10}$.

Hãy kiểm nghiệm :

nếu $\frac{x_0}{p}$ tiến tới 0, thì chu kì $T(x_0)$ tiến tới $2\pi\sqrt{\frac{p}{g}}$.

Ta có thể giải thích kết quả này như thế nào ?

Dữ liệu : g = 9,8 m.s⁻² và p = 0,1m.



• *Lời giải*

Định lí về động năng cho ta :

Chất điểm dao động giữa $-x_0$ và x_0 vì ở điểm x_0 ($-x_0$), lực tác dụng lên hạt trai là khác không. Chu kì chuyển động T bằng :

$$T = 4\int_0^{x_0}\frac{dx}{\dot{x}}, \text{ với } \dot{x} = \frac{\sqrt{\frac{g}{p}\left(x_0^2 - x^2\right)}}{\left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right)^{1/2}}.$$

$$Vậy : T = 4\sqrt{\frac{g}{p}}I(\alpha), \text{ với } I(\alpha) = \int_0^1\frac{\sqrt{1 + \alpha^2u^2}}{\sqrt{1 - u^2}} \text{ và } \alpha = \frac{p}{x_0}.$$

2) • Áp dụng số :

a) $x_0 = p$; $\alpha = 1$; $I(1) = 1,91$ và $T = 0,77s$.

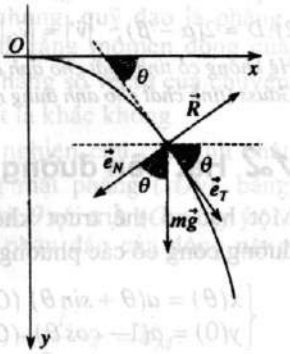
b) $x_0 = \frac{p}{10}$; $\alpha = \frac{1}{10}$; $I(0,1) = 1,58$ và $T = 0,64s$.

• Nếu α tiến tới O. $I(0)= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\pi}{2}$ và $T = T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{p}{g}}$.

• p biểu diễn bán kính cong của parabôn ở x = 0. và ta có một con lắc đơn chiều dài l = p.

9 Đường trượt parabolic

Một em bé ngồi ở đỉnh O của một đường trượt có mặt cắt parabolic với phương trình trong tọa độ Descartes $y = \frac{x^2}{2p}$, p là một hằng số dương.



Đột nhiên em bé lao đi với vận tốc ban đầu nằm ngang $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$, và trượt không ma sát trên đường trượt.

1) Chứng minh rằng phản lực, do đường trượt tác dụng lên em bé coi như một chất điểm khối lượng m, được biểu diễn như sau :

$$\vec{R}.\vec{e}_N = \frac{m\cos^3(\theta)}{p}\left[v_0^2 - gp\right]$$

θ là góc giữa tiếp tuyến với đường trượt ở M và đường nằm ngang.

2) Hãy bình luận về những khả năng xảy ra sự mất tiếp xúc với đường trượt. Vậy trường hợp giới hạn $v_0^2 = gp$ sẽ tương ứng với điều gì ?

• *Lời giải*

1) Sự áp dụng nguyên lí cơ bản của động lực học chiếu trên $\vec{e}_N$ cho ta :

$$m\frac{v^2}{\rho} = R + g\cos\theta, \ \rho \text{ là bán kính cong.}$$

Định lí về động năng cho $v^2 = v_0^2 + 2gy$

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{p}, \quad \text{do đó : } \cos\theta = \left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Bán kính cong được xác định theo : $\rho = \left|\frac{ds}{d\theta}\right|$

$$ds = \frac{dx}{\cos\theta} \text{ và } \frac{dx}{P} = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}. \text{ từ đó : } \rho = \frac{p}{\cos^3 t}$$

Như vậy ta thu được : $\vec{R}.\vec{e}_N = \frac{m\cos^3\theta}{p}(v_0^2 - gp).$

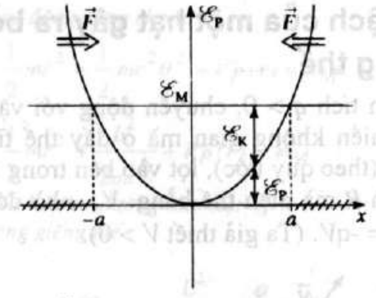
2) Sự tiếp xúc sẽ tồn tại nếu $\vec{R}.\vec{e}_N < 0$ nghĩa là $v_0^2 < gp$.

Nếu $v_0^2 = gp$, thì mọi việc xảy ra giống như nếu đường trượt không tồn tại, nhưng quỹ đạo lại trùng với đường trượt (R = 0).

Nếu $v_0^2 > gp$, thì không thể có sự tiếp xúc.

10 Một con lắc đặc biệt

Một hạt trai được xâu vào một sợi dây không dãn chiều dài $2a$ mà hai đầu dây được gắn cố định ở hai điểm F_1 và F_2 của trục nằm ngang (Ox) với các hoành độ $+c$ và $-c$.



Hạt trai có thể trượt không ma sát trên sợi dây. Hãy nghiên cứu các chuyển động nhỏ vạch ra trong mặt phẳng thẳng đứng (xOy) khi hạt trai bị đẩy nhẹ ra khỏi vị trí cân bằng.

Tìm chu kì của các dao động xảy ra.

• *Lời giải*

• *Hạt trai vạch một elip với các tiêu điểm F_1 và F_2 ($b^2 = a^2 - c^2$), mà phương trình có dạng :*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Nghiên cứu hệ thức y(x) ở lân cận điểm x = 0 :

$$y = -b + \frac{bx^2}{2a^2}$$

Sự áp dụng định lí về động năng cho ta :

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = mgy_0. \text{ với } v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

$$\left(\text{vì } \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \text{ là bậc 4, trong khi ta chỉ giải với bậc 2}\right)$$

$$\text{Do đó : } \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + mg\left(-b+\frac{bx^2}{2a^2}\right) = mg\left(-b+\frac{bx_0^2}{2a^2}\right)$$

$$\text{thành thử : } \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{gb}{2a^2}(x_0^2 - x^2).$$

$$\text{suy ra : } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}, \text{ với } \omega_0 = \sqrt{\frac{gb}{a^2}}.$$

<u>Chú ý</u> :

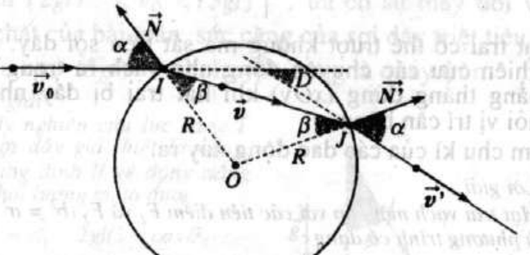
$$\text{cấp 1 ở } x_0 \begin{cases} x = x_0\cos\omega t \\ \frac{dx}{dt} = -\omega_0 x_0 \sin\omega_0 t \\ y = -b \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{cases} \quad \text{cấp 2 ở } x_0 \begin{cases} x^2 = x_0^2\cos^2\omega_0 t \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \omega_0^2 x_0^2 \sin^2\omega_0 t \\ y = -b + \frac{bx_0^2}{2a^2}\cos^2\omega_0 t \\ \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 0 \end{cases}$$

Bài tập

Sử dụng vốn kiến thức

11* Độ lệch của một hạt gây ra bởi một giếng thế

Một hạt điện tích $q > 0$, chuyển động với vận tốc v_0 trong một miền không gian mà ở đấy thế tĩnh điện bằng không (theo quy ước), lọt vào bên trong một quả cầu bán kính R mà điện thế bằng $-V$; nhờ đó, hạt có thế năng $\mathscr{E}_P = -qV$. (Ta giả thiết $V > 0$).



Người ta thừa nhận rằng có thể cũng đạt được kết quả như trên với hai lưới kim loại hình cầu đồng tâm bán kính rất gần nhau và bằng R. Lưới ngoài ở điện thế không, còn lưới trong ở điện thế $-V$. Trường tĩnh điện giữa hai lưới, trong một màng chiều dày rất nhỏ, là xuyên tâm. Ngoài ra, người ta giả thiết rằng các lưới đó đều có thể cho hạt thấm qua và bỏ qua các tác động của trọng lực. Hệ quy chiếu đang dùng là hệ Galilée.

Hạt gặp lưới ngoài dưới góc tới α.

1) Chứng minh rằng lúc đó hạt xuyên vào giữa hai lưới ($r < R$, dưới góc β đối với pháp tuyến OI mà ta sẽ biểu diễn theo hàm số của α, U và động năng ban đầu $\mathscr{E}_{K_0}$.

Chứng thực rằng sự khúc xạ quan sát thấy, tuân theo định luật Descartes, tương tự như trong quang học. Và ta sẽ định nghĩa một chiết suất tương đương.

2) Hãy mô tả chuyển động về sau của hạt và xác định góc lệch do giếng cầu gây ra. Hệ thống nêu trên có cho ảnh đúng như nguyên hình theo ý nghĩa của quang hình học không ?

• *Lời giải*

1) Hệ có tính đối xứng cầu chung quanh điểm O. $\vec{E}$ bằng không khắp nơi trừ ở lân cận R mà tại đó $\vec{E}$ là xuyên tâm, từ đó,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \wedge \vec{N} = 0 \text{ và } \vec{p}_0 \wedge \vec{N} = \vec{p} \wedge \vec{N}.$$

nên $v_0 sin\alpha = v sin\beta$ (hệ thức này diễn đạt tính liên tục của thành phần tiếp tuyến của $\vec{p}$).

Định lí về động năng cho :

$$\frac{1}{2}mv^2 = \mathscr{E}_{K_0} - \mathscr{E}_P, \qquad sin\,\alpha = \sqrt{1 - \frac{\mathscr{E}_P}{\mathscr{E}_{K_0}}}\, sin\,\beta.$$

Chiết suất tương đương là : $n = \sqrt{1 - \dfrac{\mathscr{E}_P}{\mathscr{E}_{K_0}}}$.

2) $D = 2(\alpha - \beta)$; $|\vec{v}'| = |\vec{v}_0|$;

Hệ không có tính chất cho ảnh đúng như vật, trừ trong gần đúng Gauss (tính chất cho ảnh đúng nguyên hình một cách xấp xỉ).

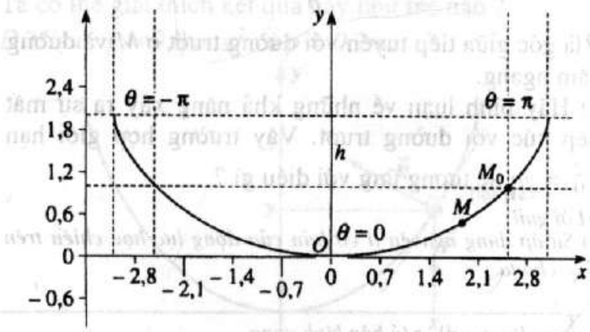
12 Hạt trên đường xicloit

Một hạt có thể trượt không ma sát dọc theo một đường cong có các phương trình thông số :

$$\begin{cases} x(\theta) = a(\theta + sin\,\theta)\ (Ox) & \text{là đường nằm ngang} \\ y(0) = a(1 - cos\,\theta)\ (Oy) & \text{là thẳng đứng đi lên} \end{cases}$$

Người ta thả hạt rơi tự do từ một độ cao h ở phía trên điểm 0, không vận tốc ban đầu ($h = a(1 - cos\theta_0)$.

Chứng minh rằng chuyển động là tuần hoàn, và chu kì độc lập với h.



• *Lời giải*

Việc áp dụng định lí về động năng vào khối lượng m cho ta :

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = mgh$$

Ta biểu diễn phương trình này theo hàm số của hoành độ cong s của điểm M (gốc O) :

$$dx = a(1 + cos\theta)d\theta\,;\ dy = a sin\theta d\theta\,;\ ds = a\sqrt{2(1 + cos\theta)}d\theta.$$

Cho $\dfrac{ds}{d\theta} = 2a\cos\dfrac{\theta}{2}$, *do đó* : $s = 4a\sin\dfrac{\theta}{2}$ *và*

$$y = 2a\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{s^2}{8a}.$$

$\dot{s}^2 + 2g\dfrac{s^2 - s_0^2}{8a} = 0$, $\ddot{s} = -\dfrac{g}{4a}s$ *và T độc lập với s :*

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{4a}{g}}.$$

13 **Hạt bị bẫy

Một hạt M, khối lượng m, chịu tác dụng, trong một hệ quy chiếu Galilée $\mathcal{R}$, của một lực tổng cộng chấp nhận thế năng $\mathcal{E}_P(r)$, với $r = OM$. O là một điểm cố định trong $\mathcal{R}$ gọi là tâm của các lực.

1) Lực kết hợp $\vec{F}$ là xuyên tâm (giá đỡ của nó đi qua O), chứng minh rằng, nói chung, quỹ đạo là phẳng. Muốn thế, ta sẽ chứng minh rằng mômen động của hạt ở O, kí hiệu $\vec{L}_0$, là một hằng số vectơ của chuyển động, mà sau này ta giả thiết là khác không.

2) Ta đặt $\vec{L}_0 = L\vec{e}_z$, và ta nghiên cứu các tính chất của quỹ đạo của hạt trong mặt phẳng (xOy), bằng cách dùng các tọa độ cực r và θ với trục (Ox) tùy ý. Hãy chứng minh rằng tích phân đầu của động năng được thể hiện bởi :

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \mathcal{E}_P(r) + \frac{L^2}{2mr^2} = \mathcal{E}_M.$$

Tương tự như trường hợp của một chuyển động một bậc tự do, ta có thể rút ra từ biểu thức trên những điều chỉ dẫn quý báu về chuyển động "theo r" của hạt bởi sự biểu diễn bằng đồ thị của *thế năng hiệu dụng* xác định bởi :

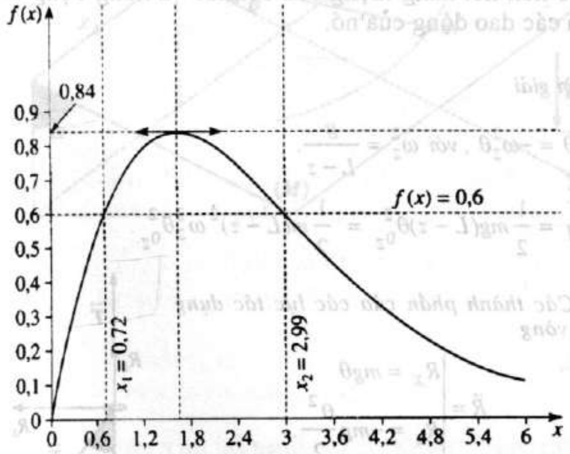
$$\mathcal{E}_{P_{eff}} = \mathcal{E}_P(r) + \frac{L^2}{2mr^2}.$$

3) Áp dụng nghiên cứu này cho trường hợp thế có dạng Yukawa :

$$\mathcal{E}_P(r) = -\frac{\alpha}{r}e^{-\frac{r}{a}},$$

α và a đều là hai hằng số dương.

Chứng minh rằng sự đánh bẫy hạt trong một trường lực như thế chỉ có thể xảy ra nếu L thỏa mãn một bất đẳng thức cần định rõ.



Với giả thiết là đẳng thức trên nghiệm đúng, thì trong điều kiện phụ nào, hạt sẽ thực sự ở trong một trạng thái liên kết ?

• *Lời giải.*

1) $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = 0$; $\vec{L}_0 = cte$; $\vec{OM} \perp \vec{L}_0$ *: chuyển động là phẳng.*

$\vec{L}_0 = L\vec{e}_z$.

2) Định lí về động năng cho ta :

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \mathcal{E}_P(r) = \mathcal{E}_M,$$

nên: $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \mathcal{E}_P(r) = \mathcal{E}_M$.

3) Mọi điều xảy ra dường như hạt dịch chuyển trên trục của các "r" trong giếng thế :

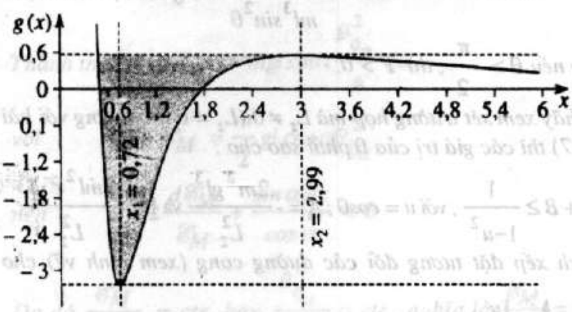
$$\mathcal{E}_{P_{eff}} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}e^{-\frac{r}{a}}.$$

Đặt $x = \frac{r}{a}$, $\mathcal{E}_{P_{eff}} = \frac{L^2}{2ma^2}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{A}{x}e^{-x}\right)$, *với* $A = \frac{2m\alpha a}{L^2}$.

$\mathcal{E}_{P_{eff}}$ *chấp nhận các cực trị nếu* $e^{-x}(x + x^2) = \frac{2}{A}$.

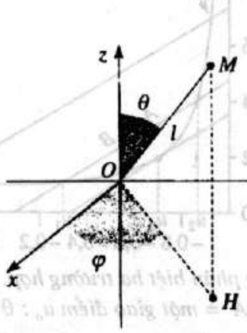
Sự nghiên cứu đường cong $f(x) = e^{-x}(x + x^2)$ *chứng tỏ rằng nếu* $A > 2{,}34$, *thì có các cực trị (thành thử, đối với* $A = \frac{10}{3}$, *các cực trị thu được ở* $x_1 = 0{,}72$ *và* $x_2 = 2{,}99$*).*

Đồ thị của $g(x) = \frac{2ma^2}{L^2}\mathcal{E}_{P_{eff}} = \frac{1}{x^2} - \frac{A}{x}e^{-x}$ *làm nổi bật sự tồn tại của một trạng thái liên kết nếu* $L^2 < 0{,}84\ m\alpha a$.



14 ** Con lắc cầu

Một con lắc đơn được cấu tạo như một chất điểm khối lượng m gắn vào một sợi dây mềm không dãn chiều dài l, được cố định ở một điểm O là gốc của hệ tọa độ $(O\ ;\ x,\ y,\ z)$ của hệ quy chiếu Trái Đất giả thiết là hệ Galilée.



Trục (Oz) được chọn thẳng đứng đi lên và ta sử dụng các tọa độ cầu $(r,\ \theta,\ \varphi)$ tâm O và trục (Oz).

Các điều kiện ban đầu là bất kì, nhưng giả thiết là đã biết. Hãy nghiên cứu chuyển động của con lắc trong trường hợp sợi dây luôn căng.

Chỉ dẫn : Bằng cách thể hiện sự bảo toàn của một thành phần của mômen động và của cơ năng, ta sẽ đi đến một phương trình vi phân về θ.

Một cách giải bằng đồ thị như vậy cho phép chứng minh được rằng, nói chung, chất điểm vạch trên mặt cầu (O, l) các dải viền nằm giữa hai vòng tròn song song ở các góc giới hạn θ_1 và θ_2 phụ thuộc vào các điều kiện ban đầu.

• *Lời giải*

Định lí về động năng áp dụng cho chất điểm cho ta :

$$\frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\theta}^2 + l^2m^2\theta\dot{\varphi}^2\right) + mgl\cos\theta = \mathscr{E}_M$$

Thành phần của mômen động chiếu trên trục (Oz) là bất biến trong thời gian chuyển động

$$ml^2\sin^2\theta\dot{\varphi} = L_z = \text{hằng số} \ (\dot{\varphi} \text{ giữ một dấu không đổi}).$$

Do đó có phương trình về θ :

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{L_z^2}{ml^2\sin^2\theta} + mgl\cos\theta = \mathscr{E}_M.$$

Chú ý rằng lực căng $\vec{T} = -T\vec{e}_r$ của sợi dây ($T > 0$) phải sao cho :

$$T = ml\dot{\theta}^2 + ml\dot{\varphi}^2\sin^2\theta - mg\cos\theta$$

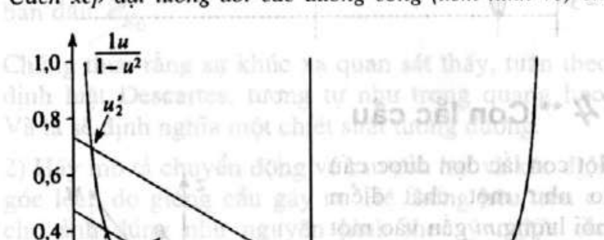
$$= ml\dot{\theta}^2 + \frac{L_z^2}{ml^3\sin^2\theta} - mg\cos\theta,$$

Vậy nếu $\theta > \frac{\pi}{2}$, thì $T > 0$.

Ta hãy xem xét trường hợp mà $L_z \neq 0$ ($L_z = 0$ tương ứng với bài tập 7) thì các giá trị của θ phải sao cho :

$$Au + B \geq \frac{1}{1-u^2}, \text{ với } u = \cos\theta; A = -\frac{2m^2gl^3}{L_z^2} \text{ và } B = \frac{2ml^2\mathscr{E}_M}{L_z^2}.$$

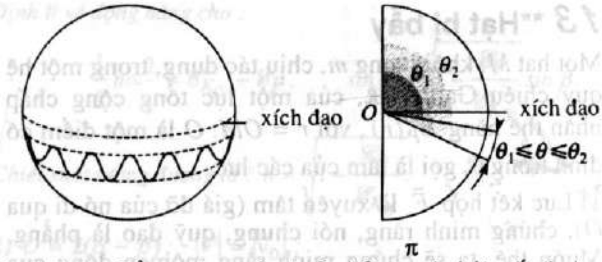
Cách xếp đặt tương đối các đường cong (xem hình vẽ) cho



phép phân biệt ba trường hợp.

A = một giao điểm u_o : θ = hằng số và $\dot{\varphi}$ = hằng số.

(con lắc "cônic"). *($\theta > \frac{\pi}{2}$, sợi dây rất căng).*



B = hai giao điểm, u_1 và $u_2 < 0$, nên θ_1 và $\theta_2 > \frac{\pi}{2}$ (sợi dây rất căng).

C = hai điểm, $u_1 > 0$ và $u_2 < 0$, nên : $\theta_1 < \frac{\pi}{2}$ và $\theta_2 > \frac{\pi}{2}$.

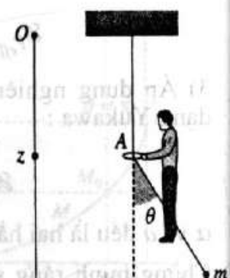
Chuyển động sẽ tiến triển tốt giữa θ_1 và θ_2 nếu sợi dây vẫn căng, nghĩa là nếu :

$$\frac{L_z^2}{ml^3\sin^2\theta} > mg\cos\theta, \text{ nên } \frac{1}{1-u_1^2} > -\frac{Au_1}{2}.$$

Các điều kiện ban đầu chính xác (áp đặt cho L_z và $\mathscr{E}_M$) cho phép bình luận đúng trường hợp này.

15 **Con lắc đơn có chiều dài biến đổi chậm

Cho một sợi dây không dãn (chiều dài *L*) và móc vào đó một khối lượng *m* hình điểm. Một người thao tác giữ một vòng khuyên nhỏ khối lượng không đáng kể ở độ cao *z* (sợi dây luôn qua vòng đó).



1) Nghiên cứu chuyển động của khối lượng *m*.

2) Người thao tác thả vòng xuống từ từ, nghiên cứu hệ thức liên kết năng lượng của con lắc và xung động ω của các dao động của nó.

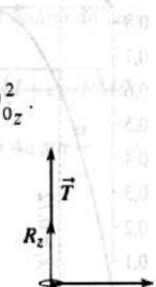
• *Lời giải*

1) $\ddot{\theta} = -\omega_z^2\theta$, *với* $\omega_z^2 = \frac{g}{L-z}$.

$$\mathscr{E}_M = \frac{1}{2}mg(L-z)\theta_{0_z}^2 = \frac{1}{2}m(L-z)^2\omega_z^2\theta_{0_z}^2.$$

2) *Các thành phần của các lực tác dụng lên vòng*

$$\vec{R} = \begin{cases} R_X = mg\theta \\ R_Z = -mg\dfrac{\theta^2}{2} \end{cases}$$



Cho $\langle R_x \rangle = 0$ và $\langle R_z \rangle = -mg\frac{\theta^2}{4}$.

Ta hãy xét kĩ công của người thao tác làm dịch chuyển vòng đi một đoạn dz trong một thời gian $\tau >> \dfrac{1}{\omega_z}$ (nó tác dụng lực $-\vec{R}$ lên vòng) :

$$\delta W_{op} = +\ mg\frac{\theta_{0z}^2}{4}dz = d\mathcal{E}_M = +\frac{1}{2}\frac{\mathcal{E}_M}{L-z}dz,$$

Công thức còn được viết dưới dạng :

$$2\frac{d\mathcal{E}_M}{m} + \frac{d(L-z)}{L-z} = 0,$$

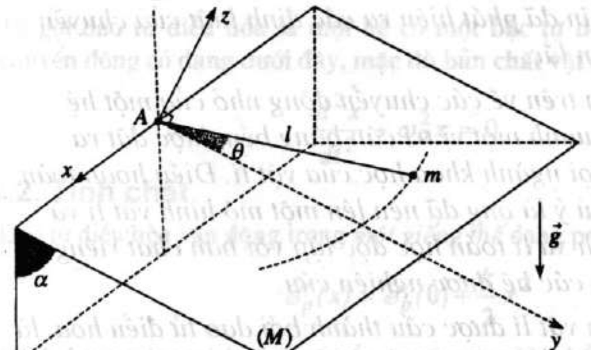
Vậy $\mathcal{E}_M^2(L-z) = cte$ *hay* $\dfrac{\mathcal{E}_M}{\omega_z} = cte.$

16** Con lắc trên mặt phẳng nghiêng

Một con lắc đơn được tạo thành bởi một sợi dây mềm không dãn, khối lượng không đáng kể, chiều dài l, cố định tại điểm A, và một chất điểm M khối lượng m, gắn vào đầu còn lại của sợi dây, và trượt không ma sát trên mặt phẳng vật chất (P) chứa điểm A, và nghiêng một góc α so với mặt phẳng thẳng đứng.

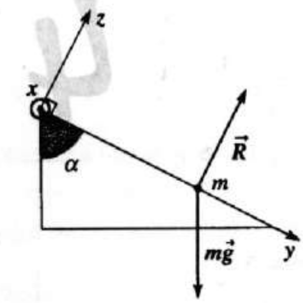
Biên độ góc ban đầu của con lắc là θ_0 ($\theta_0 << 1$) ; người ta làm thay đổi rất chậm góc α (thời gian tiêu biểu rõ ràng là dài hơn chu kì dao động của con lắc).

Hãy xác định các định luật biến đổi của cơ năng của con lắc và của biên độ góc các dao động theo góc α.



• Lời giải

Với một giá trị α cho trước, phương trình vi phân của chuyển động của con lắc là :



$$\ddot{\theta} = -\omega_\alpha^2\theta,$$

với $\omega_\alpha^2 = \omega_0^2\cos\alpha$

và $\omega_0^2 = \dfrac{g}{l}.$

Cơ năng của con lắc là :

$$\mathcal{E}_M = \frac{ml^2}{2}\omega_\alpha^2\theta_{0_\alpha}^2$$

(θ_{0_α} : độ dời góc cực đại hay li giác cực đại liên kết với α).

Trong thời gian biến đổi chậm từ α đến $\alpha + d\alpha$ công nguyên tố của người thao tác bên ngoài (ví dụ người làm quay từ từ mặt phẳng một góc $d\alpha$ chung quanh A_z) thì đồng nhất với công của $\vec{R}$:

$$\delta W_{op} = \left< mgl\sin\alpha\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\right> d\alpha\,.$$

Số hạng thứ nhất : $mgl\sin\alpha d\alpha$ biểu diễn số gia của thế năng của trọng lực, không tham gia vào trong $\mathcal{E}_M$: vậy ta không quan tâm tới nó. Vì thế, số hạng hữu ích bằng :

$$-mgl\sin\alpha\frac{\theta_{0_\alpha}^2}{4}d\alpha\,.$$

Thành thử $\quad d\mathcal{E}_M = -mgl\sin\alpha\dfrac{\theta_{0_\alpha}^2}{4}d\alpha\,,$

với $\quad \mathcal{E}_M = \dfrac{m}{2}gl\cos\alpha\theta_{0_\alpha}^2$

nên $\quad 2\dfrac{d\mathcal{E}_M}{\mathcal{E}_M} + \dfrac{\sin\alpha d\alpha}{\cos\alpha} = 0.$

Do đó $\dfrac{\mathcal{E}_M^2}{\cos\alpha} = cte$*, hay* $\dfrac{\theta_{0_\alpha}^4}{\cos\alpha} = cte$ *, nghĩa là* $\dfrac{\mathcal{E}_M}{\omega_\alpha} = cte.$

4 DAO ĐỘNG TỰ DO

MỤC TIÊU

■ Nghiên cứu dao tử điều hòa

■ Phân tích ảnh hưởng của lực ma sát nhớt lên hành vi của dao tử.

■ Tổng quát hóa các kết quả nhận được cho các dao tử điều hòa không gian.

■ Suy nghĩ về ảnh hưởng của một lực ma sát nhớt

■ Nghiên cứu trường hợp các dao tử không điều hòa.

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

■ VẬT LÍ

- Thế năng
- Tích phân đầu của năng lượng.
- Lực ma sát nhớt.

■ TOÁN HỌC

- Phương trình vi phân tuyến tính có hệ số không đổi cấp hai.
- Phương trình thông số của một elip.
- Khai triển bị chặn.

Mở đầu

Dao tử điều hòa đầu tiên trở thành đối tượng của một cuộc thí nghiệm, theo truyền thống, là chiếc đèn chùm treo ở trần nhà thờ Pise. Chính trong khi quan sát sự đu đưa của đèn mà GALILÉE (1564 - 1642) mới ở tuổi mười chín đã phát hiện ra các định luật của chuyển động con lắc.

Bài toán trên về các chuyển động nhỏ của một hệ chung quanh một vị trí cân bằng bền được đặt ra trong mọi ngành khoa học của vật lí. Điều hoàn toàn đáng chú ý là ông đã nêu lên một mô hình vật lí và một cách xử lí toán học độc lập với bản chất riêng biệt của các hệ được nghiên cứu.

Mô hình vật lí được cấu thành bởi dao tử điều hòa, là đối tượng nghiên cứu của chương này.

Còn về cách xử lí toán học, đó là cách xử lí các phương trình vi phân tuyến tính cấp hai có hệ số không đổi.

Chú thích:

Trong chương này, người ta sử dụng hệ quy chiếu Galilée và tất cả các phép lấy đạo hàm theo thời gian liên quan tới hệ quy chiếu này.

Dao tử điều hòa

I.1. Định nghĩa

Ta hãy xét một chất điểm M, khối lượng m, chịu tác dụng của một lực bảo toàn $\vec{f}$ và buộc phải di chuyển trên một trục $(0, \vec{e}_x)$. Nếu gốc O của trục là *một vị trí cân bằng bền*, thì ta được:

$$\left(\frac{d\mathscr{E}_p}{dx}\right)_{x=0} = 0 \text{ và } \left(\frac{d^2\mathscr{E}_p}{dx^2}\right)_{x=0} = k > 0$$

Ta khai triển $\mathscr{E}_p(x)$ chung quanh vị trí cân bằng, và ta giới hạn ở cấp 2, nghĩa là ở số hạng thứ nhất có ý nghĩa khác không:

$$\mathscr{E}_p(x) = \mathscr{E}_p(0) + \left(\frac{d\mathscr{E}_p}{dx}\right)_{x=0} . x + \left(\frac{d^2\mathscr{E}_p}{dx^2}\right)_{x=0} . \frac{x^2}{2}.$$

Hằng số $\mathscr{E}_p(0)$ với giá trị quy ước của nó, không có bất kì một nội dung vật lí nào. Nếu chất điểm M vẫn ở lân cận vị trí cân bằng bền, thì nguyên lí cơ bản của động lực học được biểu diễn theo:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f = -\frac{d\mathscr{E}_p}{dx},$$

nên : $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + kx = 0.$

Đặt $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$; phương trình chuyển động trở thành $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0.$

Ta gọi dao tử điều hòa là mọi hệ có một bậc tự do, mà phương trình chuyển động có dạng dưới đây, mặc dù bản chất vật lí của biến số x là gì:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0.$$

I.2. Tính chất

Dao tử điều hòa vận động trong *một giếng thế* dạng parabôn:

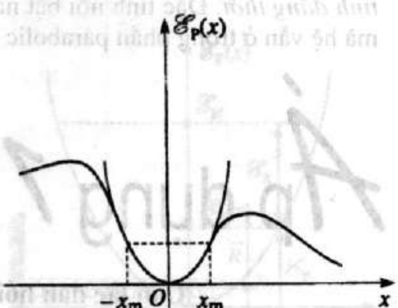
$$\mathscr{E}_p(x) = \mathscr{E}_p(0) + \frac{k}{2}x^2$$

Hình 1 minh họa tính chất rất tổng quát trên. Nó thể hiện rõ số hạng thứ nhất *có ý nghĩa khác không* của khai triển $\mathscr{E}_p(x)$ là một số hạng của x^2. Điều đó cũng đúng đối với nhiều hệ cơ học, điện học, âm học, nhiệt động học, v.v...

Ở lân cận một vị trí cân bằng bền, một hệ chuyển động như một dao tử điều hòa, nếu nó chịu tác dụng của một lực kéo về tỉ lệ với độ dãn của nó:

$$f = -\frac{d\mathscr{E}_p}{dx} = -kx,$$

nếu $x = 0$ biểu diễn một vị trí cân bằng bền.



***H.1.** Trong khoảng $[-x_m, x_m]$ hệ vận động trong một giếng thế năng parabolic: đó là một dao tử điều hòa.*

I.3. Phép lấy tích phân của phương trình chuyển động

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai có hệ số không đổi :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0.$$

là một tổ hợp tuyến tính của hai nghiệm đặc biệt độc lập tuyến tính, do đó :

$$x(t) = A_1\cos(\omega_0 t) + A_2\sin(\omega_0 t),$$

trong đó A_1 và A_2 là các hằng số tích phân mà ta xác định từ các điều kiện ban đầu:

$$x(0) = x_0 \text{ và } \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = v_0.$$

Sau khi lập công thức $v = \frac{dx}{dt}$ và biểu diễn các điều kiện ban đầu, thì ta sẽ lập được nghiệm tổng quát không mấy khó khăn:

$$x(t) = x_0\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t).$$

nghiệm tổng quát còn có thể viết dưới dạng:

$$x(t) = x_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

trong đó x_m ($x_m > 0$) là biên độ dao động và φ là pha ở gốc, tất cả đều là các biểu thức mới của các hằng tích phân.

Khi khai triển biểu thức sau và đồng nhất các thừa số của cos $(\omega_0 t)$ và của sin $(\omega_0 t)$ với các thừa số của biểu thức trước, thì ta được:

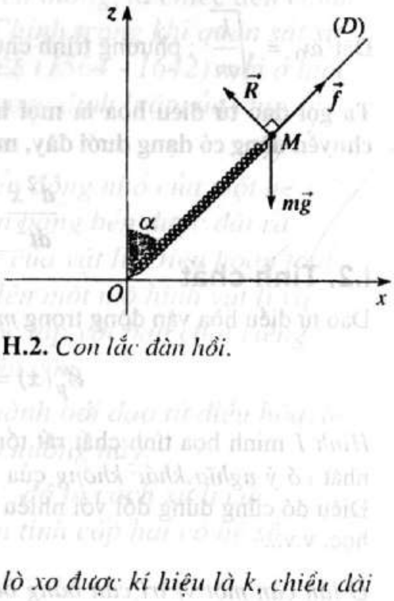
$$x_m\cos\varphi = x_0 \text{ và } x_m\sin\varphi = -\frac{v_0}{\omega_0},$$

Do đó: $x_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$, $\tan\varphi = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0}$ và $\cos\varphi$ có dấu của x_0.

Chu kì gọi là chu kì riêng của các dao động của dao tử bằng:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Chu kì này độc lập với biên độ các dao động. Như vậy, *các dao động có tính đẳng thời*. Đặc tính nổi bật này của dao tử điều hòa là thực chừng nào mà hệ vẫn ở trong phần parabolic của giếng thế năng.



H.2. *Con lắc đàn hồi.*

Áp dụng 1

Con lắc đàn hồi

Một chất điểm M, khối lượng m buộc phải trượt không ma sát trên một thanh D hợp với đường thẳng đứng một góc α (H.2).

Chất điểm được gắn ở đầu mút một lò xo mà đầu mút còn lại được cố định ở O.

Độ cứng của lò xo được kí hiệu là k, chiều dài của lò xo lúc không là l_0 và chiều dài lúc ở vị trí cân bằng là l_{eq}.

Lúc $t = 0$, người ta truyền cho khối lượng một vận tốc $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}$ kể từ vị trí cân bằng của nó.

Tính chu kì T của con lắc đàn hồi này.

Cho l là chiều dài tức thời của lò xo.

Theo nguyên lí cơ bản của động lực học thì:

$$m\ddot{l} = -k(l - l_0) - mg\sin\alpha$$

Lúc cân bằng, ta có: $0 = -k(l_{eq} - l_0) - mg\sin\alpha$.

Vậy $x = (l - l_{eq})$ là li độ của chất điểm.

Phương trình trở thành:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \text{ với } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Đây là một dao tử điều hòa mà chu kì $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ là độc lập với độ nghiêng α.

2 Nghiên cứu năng lượng

2.1. Lượng bất biến của cơ năng

Ta thỏa thuận chọn *gốc các thế năng là thế năng của dao tử ở vị trí cân bằng của nó* : $\mathscr{E}_p(0) = 0$.

Trong các điều kiện đó, biểu thức của thế năng có dạng:

$$\mathscr{E}_p(x) = \frac{k}{2}x^2 = \frac{k}{2}x_m^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi).$$

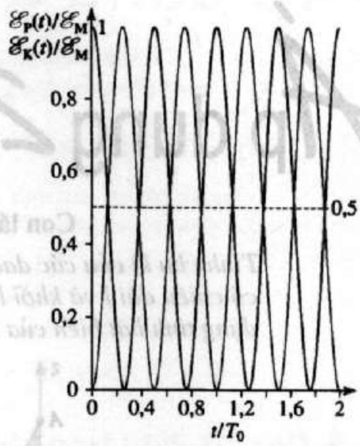
Mặt khác, động năng của dao tử có dạng (với $m\omega_0^2 = k$) :

$$\mathscr{E}_K = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}mx_m^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2}kx_m^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi).$$

Từ đó ta suy ra biểu thức về cơ năng $\mathscr{E}_M$ của dao tử.

Cơ năng của một dao tử điều hòa là không đổi và giá trị của nó tỉ lệ với bình phương biên độ x_m của các dao động.

$$\mathscr{E}_M = \mathscr{E}_K + \mathscr{E}_P = \frac{1}{2}kx_m^2$$



H.3. *Khía cạnh thời gian của sự trao đổi tương hỗ giữa các dạng động năng và thế năng của cơ năng.*

2.2. Phân bố đều của thế năng và động năng

Thế năng $\mathscr{E}_P$ và động năng $\mathscr{E}_K$ biến đổi theo thời gian, nhưng tổng của chúng là $\mathscr{E}_M$ vẫn không đổi. *Trong thời gian chuyển động có sự trao đổi tương hỗ và thường xuyên giữa các dạng động năng và thế năng của năng lượng.* Các hình 3 và hình 4 minh họa lần lượt khía cạnh thời gian và không gian của sự trao đổi đó.

Ta hãy tính *trung bình theo thời gian* $<\mathscr{E}_p>$ của thế năng. Theo định nghĩa, đó là giá trị trung bình của $\mathscr{E}_p(t)$ trong một khoảng thời gian Δt rất dài, và nếu nói chính xác thì là vô cùng:

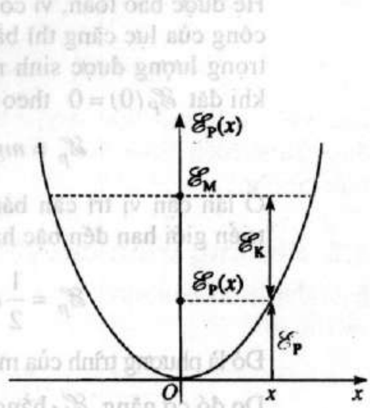
$$<\mathscr{E}_p> = \lim_{\Delta t\to\infty}\frac{1}{\Delta t}\int_{\Delta t}\mathscr{E}_p(t)dt$$

Trong trường hợp của một hàm số tuần hoàn, thì đại lượng đó bằng giá trị trung bình của nó trong một chu kì T, khi đó, ta được:

$$<\mathscr{E}_p> = \frac{1}{T}\int_T\mathscr{E}_p(t)dt.$$

$$<\mathscr{E}_p> = \frac{kx_m^2}{2}<\cos^2(\omega_0 t + \varphi)> = \frac{kx_m^2}{2}<\frac{1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi)}{2}> = \frac{kx_m^2}{4},$$

vì $\cos(2\omega_0 t + 2\varphi)$ có một giá trị trung bình bằng không trên toàn khoảng thời gian T.



H.4. *Khía cạnh không gian của sự trao đổi tương hỗ giữa các dạng động năng và thế năng của cơ năng.*

Giá trị trung bình của động năng cũng được tính theo cách tương tự:

$$<\mathscr{E}_K>=\frac{kx_m^2}{2}<sin^2(\omega_0 t+\varphi)> = \frac{kx_m^2}{2}<\frac{1-cos(2\omega_0 t+2\varphi)}{2}>=\frac{kx_m^2}{4}.$$

Kết quả là:

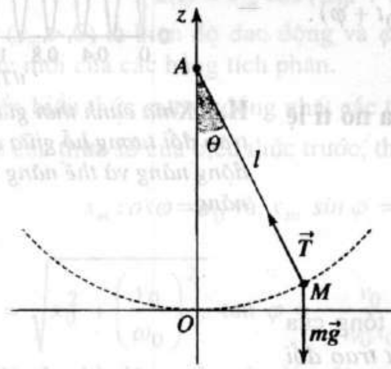
Trong chuyển động, tính trung bình, có sự phân bố đều giữa thế năng và động năng:

$$<\mathscr{E}_p>=<\mathscr{E}_K>=\frac{\mathscr{E}_M}{2}.$$

Áp dụng 2

Con lắc đơn

Tính chu kì của các dao động nhỏ của một con lắc có chiều dài l và khối lượng m (H.5) bằng cách sử dụng tính bất biến của năng lượng.



H.5. *Con lắc đơn.*

Hệ được bảo toàn, vì có thể bỏ qua các lực ma sát, công của lực căng thì bằng không và cuối cùng thì trọng lượng được sinh ra từ một thế năng; do vậy khi đặt $\mathscr{E}_P(0)=0$ theo quy ước, ta thu được:

$$\mathscr{E}_p = mgl(1-cos\,\theta).$$

Ở lân cận vị trí cân bằng, $\theta = 0$; một phép khai triển giới hạn đến bậc hai của cosθ cho phép viết:

$$\mathscr{E}_p = \frac{1}{2}mgl\theta^2,$$

Đó là phương trình của một giếng thế parabolic (*H.6*)

Do đó cơ năng $\mathscr{E}_M$ bằng:

$$\mathscr{E}_M = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2.$$

Đây chính là một bất biến của chuyển động mà giá trị được xác định bởi các điều kiện ban đầu.

Lấy đạo hàm của $\mathscr{E}_M$ đối với thời gian:

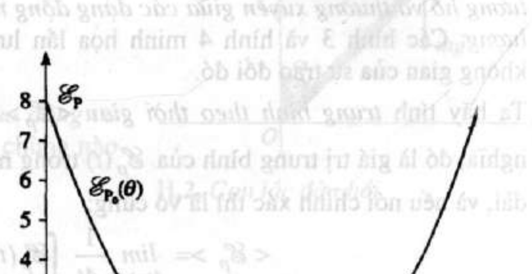
$$\frac{d\mathscr{E}_M}{dt} = ml\dot{\theta}(l\ddot{\theta}+g\theta)=0.$$

Khi khử đi nghiệm nhiễu $\dot{\theta}=0$, thì còn lại phương trình vi phân của chuyển động:

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x = 0, \text{ với } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Một con lắc đơn dao động *ở biên độ nhỏ* là một dao tử điều hòa có chu kì riêng:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$



H.6. *Thế năng $\mathscr{E}_P(\theta)$ của một con lắc đơn và phần parabolic $\mathscr{E}_{P0}(\theta)$ của nó ở lân cận vị trí cân bằng.*

3 Dao tử điều hòa không gian bất kì

3.I. Định nghĩa

Để khái quát hóa các kết quả nói trên, ta hãy xét một hạt *M* tự do trong một trường lực bảo toàn. Vị trí cân bằng *bền* của nó được chọn làm gốc *O* của hệ quy chiếu đang dùng; ta cùng thỏa thuận rằng $\mathscr{E}_p(0) = 0$. Nói chung thường tồn tại một hệ tọa độ trực giao chuẩn hóa $(0; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ trong đó, biểu thức của thế năng có thể được khai triển ở lân cận điểm gốc, dưới dạng:

$$\mathscr{E}_p(x,y,z) = \frac{k_x}{2}x^2 + \frac{k_y}{2}y^2 + \frac{k_z}{2}z^2,$$

trong đó k_x, k_y và k_z đều là các hằng số đặc trưng của trường lực. Ta biểu hiện rõ hơn lực $\vec{f}$ tác dụng lên chất điểm:

$$\vec{f} = -\overrightarrow{grad}\ \mathscr{E}_p = -(k_x x\vec{e}_x + k_y y\vec{e}_y + k_z z\vec{e}_z).$$

Trong trường hợp tổng quát, lực không cùng đường thẳng với vectơ li độ $\overrightarrow{OM}$, vì cả ba hằng số k_x, k_y và k_z đều không bằng nhau.

3.2. Phương trình chuyển động

Áp dụng nguyên lí cơ bản của động lực học vào chất điểm *M*, khối lượng *m*, ta có:

$$m\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \vec{f} = -(k_x x\vec{e}_x + k_y y\vec{e}_y + k_z z\vec{e}_z).$$

Để giải phương trình vi phân này, ta chiếu nó lên các trục, ta sẽ được:

$$m\ddot{x} + k_x x = 0,\ \ m\ddot{y} + k_y y = 0,\ \ m\ddot{z} + k_z z = 0.$$

Đó là các phương trình của ba dao tử điều hòa *độc lập nhau* mà các mạch số (tần số góc), trong trường hợp tổng quát đều khác nhau:

$$\omega_{0_x} = \sqrt{\frac{k_x}{m}},\ \ \omega_{0_y} = \sqrt{\frac{k_y}{m}},\ \ \omega_{0_z} = \sqrt{\frac{k_z}{m}}.$$

Các nghiệm tổng quát có dạng:

$$x = x_m.\cos(\omega_{0_x}t + \varphi_x),\ \ y = y_m.\cos(\omega_{0_y}t + \varphi_y),\ \ z = z_m.\cos(\omega_{0_z}t + \varphi_z).$$

Chuyển động của một dao tử điều hòa không gian là do sự hợp thành của các chuyển động của ba dao tử điều hòa độc lập nhau trên ba trục.

Chuyển động của hạt *M*, chung quanh vị trí cân bằng, là một chuyển động dao động mà quỹ đạo, nói chung, không phẳng, cũng không khép kín; nói cách khác, chuyển động của *M* không phải là tuần hoàn.

3.3. Nghiên cứu năng lượng

Ta đã biết biểu thức của thế năng, từ đó ta suy ra biểu thức của cơ năng $\mathscr{E}_M$:

$$\mathscr{E}_M = \frac{1}{2}mv^2 + \mathscr{E}_p(x,y,z) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(k_x x^2 + k_y y^2 + k_z z^2),$$

$$= \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k_x x^2\right] + \left[\frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}k_y y^2\right] + \left[\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}k_z z^2\right].$$

$$\mathscr{E}_M = \left[\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k_x x^2\right] + \left[\frac{1}{2}\dot{y}^2 + \frac{1}{2}k_y y^2\right] + \left[\frac{1}{2}\dot{z}^2 + \frac{1}{2}k_z z^2\right].$$

Cơ năng của một dao tử điều hòa không gian bằng tổng các cơ năng của ba dao tử điều hòa kết hợp với ba bậc tự do của nó.

Áp dụng 3

Điều kiện về tính tuần hoàn của một chuyển động dao động không gian

Hãy tìm điều kiện của $\omega_{0_x}, \omega_{0_y}$ và ω_{0_z} để chuyển động của một dao tử điều hòa không gian có tính tuần hoàn?

Để cho chuyển động của dao tử là tuần hoàn, thì phải tồn tại một thời gian hữu hạn T sao cho ta có đồng thời, ở mỗi thời điểm t:

$$x(t+T) = x(t),\ y(t+T) = y(t) \text{ và } z(t+T) = z(t).$$

Muốn vậy, cần phải tồn tại ba số nguyên sao cho :

$$\omega_{0_x}T = n_x 2\pi,\ \omega_{0_y}T = n_y 2\pi \text{ và } \omega_{0_z}T = n_z 2\pi\ ;$$

Do đó ta thấy các xung động phải thỏa mãn điều kiện :

$$\frac{\omega_{0_x}}{n_x} = \frac{\omega_{0_y}}{n_y} = \frac{\omega_{0_z}}{n_z}.$$

4 Dao tử điều hòa không gian đẳng hướng

4.1. Định nghĩa

Một dao tử điều hòa không gian được gọi là *đẳng hướng* khi thế năng của nó chỉ là hàm số của khoảng cách $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ từ nó đến *tâm O của các lực*. Ba hệ số k_x, k_y, k_z lúc đó sẽ bằng nhau và ta đặt $k_x = k_y = k_z = k$. Do đó :

$$\mathscr{E}_p = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2}k\overrightarrow{OM}^2,$$

$$\vec{f} = -\overrightarrow{grad}\,\mathscr{E}_p = -k(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) = -k\overrightarrow{OM}.$$

Lực kéo về là một lực xuyên tâm và chuyển động của chất điểm M được thực hiện theo định luật diện tích trong một mặt phẳng chứa tâm của lực.

4.2. Phương trình chuyển động

Nguyên lí cơ bản của động lực học áp dụng cho chất điểm M được viết theo :

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} + \omega_0^2\overrightarrow{OM} = 0, \text{ trong đó } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Tích phân phương trình vi phân vectơ trên với các điều kiện ban đầu :

$$\overrightarrow{OM}(0) = \overrightarrow{OM}_0 \text{ và } \vec{v}(0) = \frac{d\overrightarrow{OM}(0)}{dt} = v_0.$$

Muốn thế, ta chiếu phương trình đó lên ba trục. Ta thu được ba phương trình vi phân vô hướng, mà mỗi hàm số chỉ có một tọa độ duy nhất.
Ta dễ dàng tích phân các phương trình trên và có thể viết:

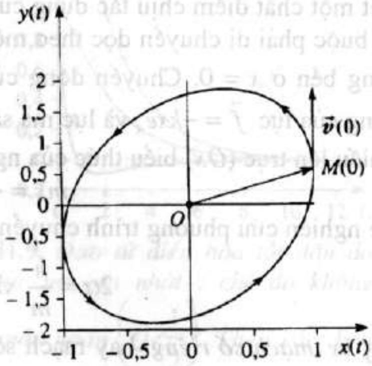
$$x(t) = x_0\,cos(\omega_0 t) + \frac{v_{0_x}}{\omega_0}\,sin(\omega_0 t)\ ;\ y(t) = y_0\,cos(\omega_0 t) + \frac{v_{0_y}}{\omega_0}\,sin(\omega_0 t);$$

$$z(t) = z_0\,cos(\omega_0 t) + \frac{v_{0_z}}{\omega_0}\,sin(\omega_0 t).$$

Theo kí hiệu vectơ, ta viết:

$$\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OM}_0\,cos(\omega_0 t) + \frac{\vec{v}_0}{\omega_0}\,sin(\omega_0 t).$$

Mặt phẳng quỹ đạo được xác định bởi hai vectơ $\overrightarrow{OM}_0$ và $\vec{v}_0$, và chứa, theo như dự kiến, tâm của các lực.



H.7. *Quỹ đạo của một dao tử điều hòa không gian đẳng hướng: đó là một elip.*

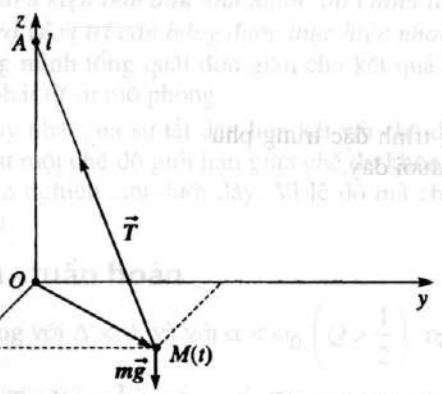
4.3. Bản chất của quỹ đạo

Biểu thức của $\overrightarrow{OM}(t)$ là phương trình thông số của một elip tâm O, do M vạch ra với chu kì $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ (H.7).

Áp dụng 4

Con lắc cầu

Một con lắc chiều dài l và khối lượng m được treo ở A (0, 0, l) (H.8). Con lắc được phóng đi từ M_0 (x_0, y_0, $z \approx 0$) với vận tốc $\vec{v}_0$ (v_0, 0, 0) khá nhỏ để cho điểm M vẫn luôn luôn ở lân cận của mặt phẳng nằm ngang.
Hãy nghiên cứu chuyển động của M và từ đó suy ra quỹ đạo của nó.



H.8 *Con lắc cầu.*

Nguyên lí cơ bản của động lực học áp dụng cho điểm M được viết như sau:

$$m\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = m\vec{g} + \vec{T}.$$

trong đó $\vec{T}$ là lực do sợi dây tác dụng. Phương trình trên, khi chiếu lên các trục (Ox) và (Oy), cho ta:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = T_x,\ m\frac{d^2y}{dt^2} = T_y,\ m\frac{d^2z}{dt^2} = T_z - mgcos\theta.$$

$$T_z \approx mgcos\theta \approx mg \text{ và } \frac{-T_x}{x} = \frac{-T_y}{y} = \frac{-T_z}{l-z} \approx \frac{mg}{l}$$

Quỹ đạo của M gần như phẳng, nên các phương trình chuyển động được suy ra từ đó:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x \text{ và } \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega_0^2 y,\text{ với } \omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

Bằng phép tích phân, có kể tới các điều kiện ban đầu, các phương trình chuyển động cho ta:

$$\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OM}_0\,cos(\omega_0 t) + \frac{\vec{v}_0}{\omega_0}\,sin(\omega_0 t).$$

Đó là phương trình thông số của một elip, khi $\overrightarrow{OM}_0$ không cùng đường thẳng với $\vec{v}_0$.

◂ **Để tập luyện : bài tập 7.**

5 Dao tử điều hòa tắt dần bởi lực ma sát nhớt

5.I. Phương trình chuyển động

Xét một chất điểm chịu tác dụng của một lực ma sát nhớt tỉ lệ với vận tốc và buộc phải di chuyển dọc theo một trục $(0;\vec{e}_x)$, chung quanh vị trí cân bằng bền ở $x = 0$. Chuyển động của chất điểm được thực hiện dưới tác dụng của lực $\vec{f} = -kx\vec{e}_x$ và lực ma sát $\vec{f}_r = -h\vec{v} = -h\dot{x}\vec{e}_x$.

Chiếu lên trục (Ox) biểu thức của nguyên lí cơ bản của động lực học:

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x}.$$

Để nghiên cứu phương trình chuyển động này, ta đặt:

$$2\alpha = \frac{h}{m} \text{ và } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}};$$

ω_0 là *mạch số riêng*, hay mạch số của dao tử không tắt, và 2α là *hệ số tắt dần* của dao tử tắt dần.

Nghịch đảo τ của hệ số tắt dần là thời gian. Đây chính là *thời gian hồi phục năng lượng* của dao tử (thông tin về sự mất mát năng lượng):

$$\frac{h}{m} = 2\alpha = \frac{1}{\tau}.$$

Từ τ và ω_0, ta tạo ra một hằng số khác là Q, không thứ nguyên, đặc trưng cho dao tử, gọi là *hệ số phẩm chất*: $Q = \omega_0\tau$. Một dao tử điều hòa tắt dần có thể được biểu thị tính chất bằng một trong ba cặp hằng số đặc trưng: $(\omega_0, 2\alpha)$, (ω_0, τ) hay (ω_0, Q). Ta ghi nhớ các hệ thức dưới đây vì chúng cho phép chuyển từ một cặp các đặc trưng này sang cặp đặc trưng khác:

$$\frac{h}{m} = 2\alpha = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{Q}.$$

Với cặp thứ nhất, phương trình chuyển động có dạng:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân trên là một tổ hợp tuyến tính của hai nghiệm độc lập tuyến tính. Các nghiệm riêng này có dạng e^{rt} dẫn đến phương trình đặc trưng:

$$r^2 + 2\alpha r + \omega_0^2 = 0,$$

mà biệt số rút gọn là :

$$\Delta' = \alpha^2 - \omega_0^2.$$

Tính chất thực hay phức của các nghiệm của phương trình đặc trưng phụ thuộc vào dấu của biệt số và buộc phải biện luận như dưới đây.

5.2. Chế độ không tuần hoàn

Nếu $\alpha > \omega_0$ $\left(Q < \frac{1}{2}\right)$, thì $\Delta' > 0$. Đặt $\omega^2 = \alpha^2 - \omega_0^2$.

Các nghiệm của phương trình đặc trưng là thực và âm:

$$r_1 = \alpha - \omega \text{ và } r_2 = \alpha + \omega.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình chuyển động là:

$$x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} = e^{-\alpha t}(A_1 e^{-\omega t} + A_2 e^{-\omega t}),$$

trong đó A_1 và A_2 là các hằng số tích phân phụ thuộc các điều kiện ban đầu.

Biểu thức trên có thể viết dưới dạng:

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left[Ach(\omega t) + Bsh(\omega t)\right];$$

trong đó vận tốc của dao tử là:

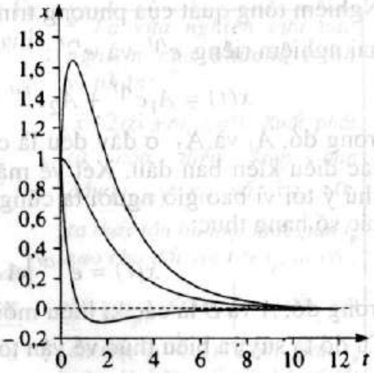
$$v(t) = \dot{x} = e^{-\alpha t}\left[-\alpha(Ach\omega t + Bsh\omega t) + \omega(Ash\omega t + Bch\omega t)\right].$$

Sự tính toán các hằng số A và B, bắt đầu từ các điều kiện ban đầu $x(0) = x_0$ và $v(0) = v_0$ được tiến hành trực tiếp và dẫn đến biểu thức tổng quát:

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left[x_0 ch\omega t + \frac{v_0 + \alpha x_0}{\omega} sh\omega t\right].$$

Theo các giá trị của x_0 và của v_0, hàm số $x(t)$ tiến đều về số không hay đi qua một cực trị, như *hình 9* minh họa.

Trong mọi trường hợp, $x(t)$ tiến về 0 khi t tiến tới ∞, mà không hề có dao động: *dao tử điều hòa ở trong chế độ không tuần hoàn.*



H.9. *Dao tử điều hòa tắt dần do lực ma sát nhớt : chế độ không tuần hoàn* $\left(Q < \frac{1}{2}\right)$. *Theo các điều kiện ban đầu, thì li độ đi qua một cực trị hay tiến đều về số không.*

5.3. Chế độ tới hạn

Nếu $\alpha = \omega_0 \left(Q = \frac{1}{2}\right)$, thì $\Delta' = 0$. Phương trình đặc trưng chấp nhận một nghiệm kép $r = -\alpha = -\omega_0$. Các nghiệm riêng độc lập tuyến tính sẽ là $e^{-\alpha t}$ và $te^{-\alpha t}$, dẫn đến một nghiệm tổng quát có dạng:

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\alpha t},$$

trong đó, A và B là các hằng số tích phân xác định bởi các điều kiện ban đầu. Từ đó, ta suy ra biểu thức về vận tốc:

$$v(t) = \dot{x} = \left[-\alpha(A + Bt) + B\right]e^{-\alpha t}.$$

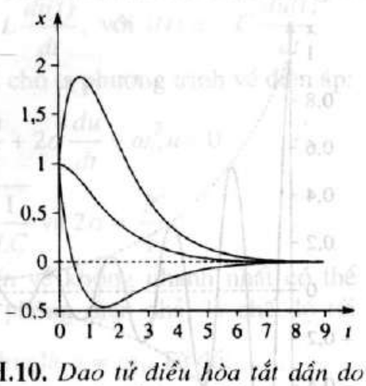
Với các điều kiện ban đầu $x(0) = x_0$ và $v(0) = v_0$, ta dễ dàng thiết lập biểu thức tổng quát:

$$x(t) = \left[x_0 + (v_0 + \alpha x_0)t\right]e^{-\alpha t}$$

Li độ $x(t)$ tiến về không, khi t tiến đến vô cùng. Chuyển động của dao tử là không tuần hoàn cũng giống như trong trường hợp trước, tuy nhiên có *sự trở về trạng thái nghỉ nhanh hơn nhiều (H.10).*

Trong cùng những điều kiện ban đầu như nhau, thì chính là đối với sự tắt dần tới hạn mà sự trở về vị trí cân bằng được thực hiện nhanh hơn. Không tồn tại một sự chứng minh tổng quát đơn giản cho kết quả trên mà chúng ta chỉ xác lập xuất phát từ sự mô phỏng.

Có kể đến giá trị duy nhất của sự tắt dần liên kết với chế độ tới hạn. Chế độ này xuất hiện như một chế độ giới hạn giữa chế độ không tuần hoàn và chế độ giả tuần hoàn nghiên cứu dưới đây. Vì lẽ đó mà chế độ này được gọi là chế độ *tới hạn.*



H.10. *Dao tử điều hòa tắt dần do lực ma sát nhớt : chế độ tới hạn* $\left(Q = \frac{1}{2}\right)$. *Các điều kiện ban đầu cũng giống hệt các điều kiện ban đầu của chuyển động không tuần hoàn (H.9.). Trong mọi trường hợp, sự trở về vị trí cân bằng được thực hiện nhanh hơn.*

5.4. Chế độ giả - tuần hoàn

Chế độ này tương ứng với $\Delta' < 0$, và với $\alpha < \omega_0 \left(Q > \frac{1}{2}\right)$, nghĩa là ứng với một sự tắt dần yếu. Ta đặt $\omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$. Các nghiệm của phương trình đặc trưng là liên hợp phức:

$$r_1 = -\alpha - j\omega \text{ và } r_2 = -\alpha + j\omega.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là một tổ hợp tuyến tính của hai nghiệm riêng $e^{r_1 t}$ và $e^{r_2 t}$:

$$x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} = e^{-\alpha t}(A_1 e^{-j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t}),$$

trong đó, A_1 và A_2 ở đây đều là các *hằng số liên hợp phức* tùy thuộc vào các điều kiện ban đầu. Xét về mặt vật lí, thì nghiệm này là dạng ít được chú ý tới vì bao giờ người ta cũng thích thể hiện rõ ràng nghiệm này theo các số hạng thực:

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right],$$

trong đó, A và B là các kí hiệu mới của các hằng số tích phân *thực*.

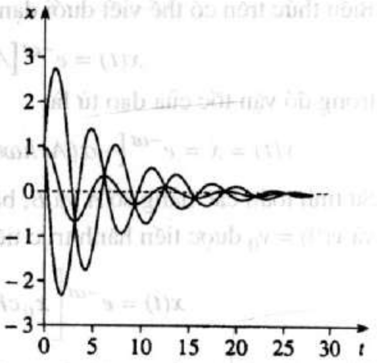
Từ đó ta suy ra biểu thức về vận tốc:

$$v(t) = e^{-\alpha t}\left[-\alpha(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)) + \omega\ \ (-A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t))\right].$$

Với các điều kiện ban đầu $x(0) = x_0$ và $v(0) = v_0$, ta dễ dàng thu được biểu thức tổng quát của li độ:

$$\boldsymbol{x(t) = e^{-\alpha t}\left[x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0 + \alpha x_0}{\omega}\sin(\omega t)\right]}$$

mà sự phụ thuộc thời gian được minh họa trên *hình 11*.



H.11. *Dao tử điều hòa tắt dần do lực ma sát nhớt : chế độ giả - tuần hoàn* $\left(Q > \frac{1}{2}\right)$. *Các điều kiện ban đầu cũng giống như các điều kiện ban đầu của chế độ không tuần hoàn (H.9) và chế độ tới hạn (H.10).*

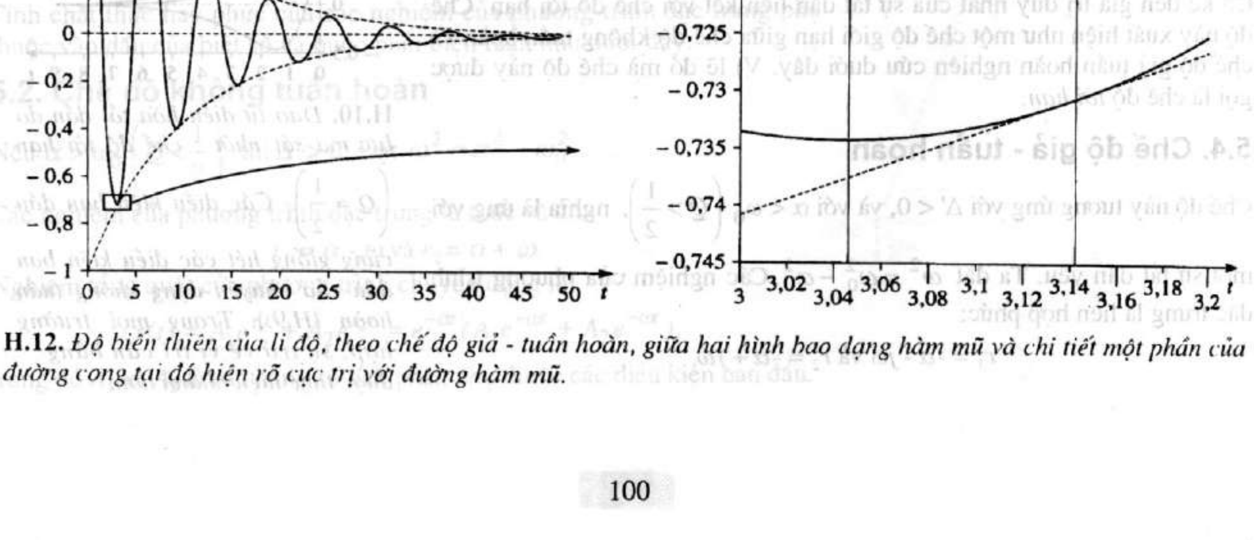
Đôi khi, nếu dùng biểu thức tương đương dưới đây thì thuận tiện hơn vì nó ngắn gọn hơn:

$$x(t) = Ce^{-\alpha t}\cos(\omega t + \varphi).$$

$$C = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \alpha x_0}{\omega}\right)^2} \quad \text{và } \tan\varphi = -\frac{v_0 + \alpha x_0}{\omega x_0} \ \ (\cos\varphi \text{ cùng dấu với } x_0\,),$$

thu được bằng cách đồng nhất các số hạng của hai cách viết nghiệm tổng quát $x(t)$.

Biểu thức tổng quát sau cùng của $x(t)$ làm nổi bật *hai hình bao dạng hàm mũ* $\pm C^{-\alpha t}$ cho đồ thị của $x(t)$. Ta nhận xét thấy rằng các thời điểm của các cực trị của $x(t)$ đều tách biệt với các thời điểm tương ứng với sự tiếp xúc giữa $x(t)$ và các hình bao $\pm C^{-\alpha t}$ của nó *(H.12)*.



H.12. *Độ biến thiên của li độ, theo chế độ giả - tuần hoàn, giữa hai hình bao dạng hàm mũ và chi tiết một phần của đường cong tại đó hiện rõ cực trị với đường hàm mũ.*

Khi thời gian trôi đi, thì $x(t)$ tiến tới không bằng dao động. Chế độ dao động là không tuần hoàn vì sự tắt dần sinh ra do các lực ma sát. Dao động được gọi là *giả - tuần hoàn* và *giả - chu kì* của chuyển động bằng:

$$T = \frac{2}{\omega} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}}.$$

Giả - chu kì là một hàm số tăng của α, nghĩa là của sự tắt dần. *Các lực ma sát làm tăng giả - chu kì T của các dao động* và làm cho nó lớn hơn chu kì riêng $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Tuy nhiên đó chỉ là hiệu ứng cấp hai.

Ta có thể kiểm tra giả - chu kì T là khoảng thời gian giữa hai lần liên tiếp đi qua giá trị $x = 0$ theo cùng một chiều như nhau, hoặc giữa hai điểm tiếp xúc liên tiếp với cùng một hình bao hay là khoảng thời gian giữa hai cực trị có cùng bản chất như nhau(*).

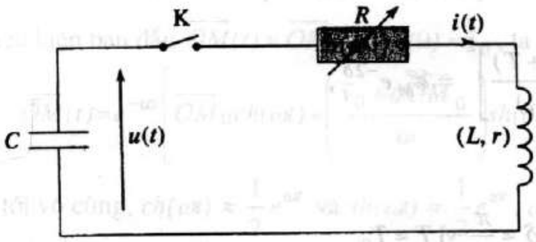
** Ta vừa nghiên cứu các nghiệm của phương trình vi phân: $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Xuất phát từ các điều kiện ban đầu $x_{(t=0)} = x_0$ và $\dot{x}_{t=0} = 0$, ta thấy tồn tại một thời gian t_p sao cho đối với $t > t_p$, ta có : $\left|x_{(t>t_p)}\right| < \left|px_0\right|$ (với p dương; $p < 1$). Thời gian t_p này, là hàm số của hệ số tắt dần 2α đối với một giá trị ω_0 cho trước, chấp nhận một cực tiểu đối với một giá trị riêng $2\alpha_p$ của hệ số đó. Bằng các phương pháp số hay thí nghiệm, ta có thể thu được giá trị α_p này theo hàm số của p. Thường chỉ cần một "độ chính xác" 5% là đủ; thành thử, nếu ta chỉ cần $t_{0,05}$ cực tiểu (p = 0,05), thì phải có $\alpha = 0,7\omega_0$ (chế độ giả-tuần hoàn). Nhưng nếu ta muốn một độ chính xác cao hơn ($p \approx 0$), thì phải tiến tới chế độ tới hạn ($\alpha = \omega_0$).*

Áp dụng 5

Sự tắt dần tới hạn của một mạch (R, L, C) nối tiếp

Người ta mắc nối tiếp một tụ có điện dung C = 100nF, một cuộn dây có độ tự cảm L = 1mH và điện trở r = 5Ω ; một điện trở điều chỉnh được R và một cái ngắt điện K (H.13). Tụ điện được nạp điện. Ở thời điểm t = 0, người ta đóng ngắt K.

Tìm giá trị của R để tụ điện phóng điện nhanh nhất có thể có.



H.13. *Mạch (R, L, C) mắc nối tiếp được R và một cái ngắt điện K. (H.13). Tụ điện được nạp điện.*

Ta kí hiệu $R' = R + r$ là điện trở tổng cộng của mạch điện. Định luật về mắt mạng cho ta:

$$u(t) = R'i(t) + L\frac{di(t)}{dt}, \text{ với } i(t) = -C\frac{du(t)}{dt}.$$

Việc khử $i(t)$ sẽ cho ta phương trình về điện áp:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\alpha\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0.$$

khi đặt $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ và $2\alpha = \frac{R'}{L}$.

Để cho $u(t)$ tiến về không nhanh nhất có thể có, thì chế độ phóng điện phải là chế độ tới hạn $Q = \frac{1}{2}$, nghĩa là $\alpha = \omega_0$. Từ đó:

$$\frac{R'}{2L} = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \text{ và } R' = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 200\Omega;$$

Giá trị phải tìm của điện trở có thể điều chỉnh được là:

$$R = R' - r = 195\Omega.$$

◀ **Để tập luyện: bài tập 6.**

6 Nghiên cứu năng lượng của dao tử điều hòa tắt dần

6.1. Công suất của các lực ma sát

Ta lại lấy phương trình vi phân của dao tử tắt dần $m\dot{v} + hv + kx = 0$ và nhân phương trình này với $v = \dot{x}$; ta được:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = -hv^2,$$

hay:

$$\frac{d\mathscr{E}_M}{dt} = -hv^2 = f_r v < 0.$$

Đạo hàm đối với thời gian của cơ năng của một dao tử tắt dần thì bằng công suất của các lực ma sát.

6.2. Trường hợp các chế độ giả - tuần hoàn

Khi sử dụng biểu thức $x(t) = Ce^{-\alpha t}\cos(\omega t + \varphi)$ của li độ, ta nhận thấy giữa hai li độ cách biệt nhau bởi một giả - chu kì $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, có một sự tắt dần:

$$\frac{x(t+T)}{x(t)} = e^{-\alpha T} = e^{-\delta},$$

trong đó, $\delta = \alpha T = \dfrac{\omega_0 T}{2Q}$ là một hằng số đặc trưng của dao tử gọi là **giảm lượng lôga.**

Biểu thức về giảm lượng lôga của một dao tử ở *chế độ giả - tuần hoàn* ($\alpha < \omega_0$ hay $Q > \dfrac{1}{2}$) đã được xác định theo như dưới đây, dù t thế nào:

$$\delta = \ln\left[\frac{x(t)}{x(t+T)}\right] = \alpha T = \frac{2\pi\alpha}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{Q^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2}}$$

Việc xác định thực nghiệm giảm lượng lôga δ cho phép ta thu được hệ số phẩm chất Q của dao tử tắt dần.

Bây giờ ta hãy quan tâm tới sự giảm dần năng lượng. Giữa hai li độ *cực trị* liên tiếp $x(t_0)$ và $x(t_0 + T)$, mà đối với chúng thì vận tốc bằng không, ta thấy cơ năng đi từ giá trị $\mathscr{E}_M$ đến giá trị $\mathscr{E}_M + \Delta\mathscr{E}_M$ với:

$$\mathscr{E}_M = \frac{1}{2}kx^2(t_0) \text{ và } \mathscr{E}_M + \Delta\mathscr{E}_M = \frac{1}{2}kx^2(t_0 + T)$$

$$= \frac{1}{2}kx^2(t_0)\left[\frac{x(t_0+T)}{x(t_0)}\right]^2 = \mathscr{E}_M e^{-2\delta},$$

hoặc:

$$\frac{\Delta\mathscr{E}_M}{\mathscr{E}_M} = (e^{-2\delta} - 1) < 0.$$

Đối với *những tắt dần yếu* ($\delta \ll 1$ hay $Q \gg 1$), thì $\delta \approx \dfrac{\pi}{Q}$ vì $T \approx T_0$.

Biểu thức trên rút gọn thành:

$$\frac{\Delta\mathscr{E}_M}{\mathscr{E}_M} = -2\delta = -\frac{2\pi}{Q} = -\frac{T_0}{\tau}.$$

Do đó, các định nghĩa về năng lượng của *hệ số phẩm chất Q* và của *thời gian phục hồi năng lượng τ* có thể được sử dụng ngay cả cho các hệ tuần hoàn phi tuyến :

$$Q = -2\pi \frac{\mathscr{E}_M}{\Delta \mathscr{E}_M} \text{ và } \tau = -T_0 \frac{\mathscr{E}_M}{\Delta \mathscr{E}_M}$$

Người ta cho biết các cấp độ lớn của hệ số phẩm chất của một số hệ :

- mạch điện (R, L, C) chọn lọc với các linh kiện rời rạc : $Q \approx 10^2$;
- Trái Đất, khi có động đất : $Q \approx 10^3$;
- thạch anh áp điện : $Q \approx 10^5$;
- nguyên tử bị kích thích : $Q \approx 10^7$.

7 Dao tử điều hòa đẳng hướng tắt dần

7.I. Phương trình chuyển động

Ta lại nghiên cứu dao tử điều hòa đẳng hướng với giả thiết có một lực ma sát nhớt $\vec{f}_r = -h\vec{v}$ tác dụng lên chất điểm M. Nguyên lí cơ bản của động lực học dẫn đến phương trình vi phân :

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} + 2\alpha\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} + \omega_0^2\overrightarrow{OM} = \vec{O},$$

trong đó : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ và $2\alpha = \dfrac{h}{m} = \dfrac{1}{\tau} = \dfrac{\omega_0}{Q}$ là *mạch số riêng* và *hệ số tắt dần* của dao tử.

Bản chất của nghiệm phụ thuộc tính chất thực hay phức và số nghiệm tách biệt của phương trình đặc trưng $r^2 + 2\alpha r + \omega_0^2 = 0$, mà biệt số rút gọn là $\Delta' = \alpha^2 - \omega_0^2$. Điều này dẫn đến sự bình luận cổ điển sau đây.

7.2. Chế độ không tuần hoàn

Theo giả thiết $\Delta' > 0$, nghĩa là $\alpha > \omega_0$ hay $Q < \dfrac{1}{2}$.

Khi đặt : $\omega^2 = \alpha^2 - \omega_0^2$, nghiệm của phương trình vi phân có dạng :

$$\overrightarrow{OM}(t) = e^{-\alpha t}\left[\vec{A}ch(\omega t) + \vec{B}sh(\omega t)\right].$$

Với các điều kiện ban đầu $\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OM}_0$ và $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$, ta được :

$$\overrightarrow{OM}(t) = e^{-\alpha t}\left[\overrightarrow{OM}_0 ch(\omega t) + \left(\frac{\vec{v}_0 + \alpha\overrightarrow{OM}_0}{\omega}\right)sh(\omega t)\right].$$

Khi t tiến tới vô cùng, $ch(\omega t) \approx \dfrac{1}{2}e^{\omega t}$ và $sh(\omega t) \approx \dfrac{1}{2}e^{\omega t}$, do đó ta có biểu thức *tiệm cận* của vectơ vị trí :

$$\overrightarrow{OM}(t) \approx \frac{e^{-(\alpha+\omega)t}}{2\omega}\left[\vec{v}_0 + (\alpha + \omega)\,\overrightarrow{OM}_0\right].$$

Chất điểm tiến về điểm tiệm cận O (*H.14*).

H.14. *Dao tử điều hòa đẳng hướng tắt dần : chế độ không tuần hoàn.*

7.3. Chế độ tới hạn

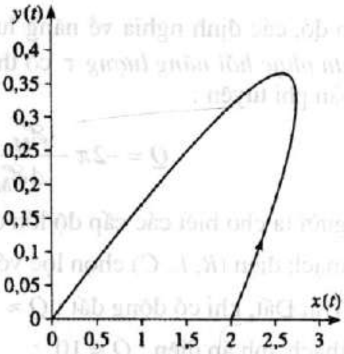
Chế độ này tương ứng với $\Delta' = 0$, nghĩa là với $\alpha = \omega_0$ hay $Q = \dfrac{1}{2}$. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là :

$$\overrightarrow{OM}(t) = e^{-\alpha t}(\vec{A} + \vec{B}t).$$

Các hằng số tích phân A và B đều được xác định bởi các điều kiện ban đầu $\overrightarrow{OM}(0) = O\vec{M}_0$ và $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$:

$$\overrightarrow{OM}(t) = e^{-\alpha t}\left[\overrightarrow{OM}_0 + (\vec{v}_0 + \alpha\overrightarrow{OM}_0)t\right]$$

Khi t tiến tới vô cùng, thì $\overrightarrow{OM}(t) \approx e^{-\alpha t}t(\vec{v}_0 + \alpha\overrightarrow{OM})$, chất điểm tiến về điểm tiệm cận O (*H.15*).



H.15. *Dao tử điều hòa đẳng hướng tắt dần : chế độ tới hạn.*

Các điều kiện ban đầu cũng là những điều kiện ban đầu của chế độ không tuần hoàn

7.4. Chế độ giả - tuần hoàn

Chế độ này tương ứng với $\Delta' < 0$, hoặc $\alpha < \omega_0$ hoặc $Q < \dfrac{1}{2}$.

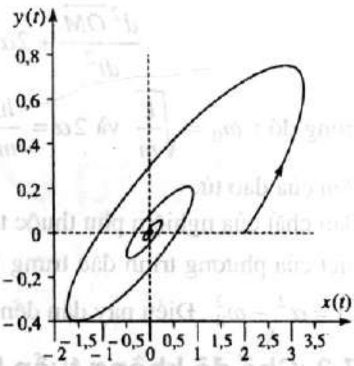
Đặt : $\omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$; nghiệm tổng quát có dạng :

$$\overrightarrow{OM}(t) = e^{-\alpha t}\left[\vec{A}\cos(\omega t) + \vec{B}\sin(\omega t)\right]$$

Với cũng các điều kiện ban đầu $\overrightarrow{OM}(0) = \overrightarrow{OM}_0$ và $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$, ta được :

$$\overrightarrow{OM}(t) = e^{-\alpha t}\left[\overrightarrow{OM}_0\cos(\omega t) + \left(\frac{\vec{v}_0 + \alpha\overrightarrow{OM}_0}{\omega}\right)\sin\omega t\right]$$

Quỹ đạo xoắn ốc chung quanh *điểm tiệm cận O* (*H*.16).



H.16. *Dao tử điều hòa đẳng hướng tắt dần : chế độ giả - tuần hoàn. Các điều kiện ban đầu cũng cùng là các điều kiện ban đầu như đối với hai chế độ khác (H.14 và 15).*

8 Bổ sung về các dao tử(*)

8.I. Dao tử điều hòa tắt dần do lực ma sát rắn

8.I.I. Định luật ma sát trượt

Lực ma sát $\vec{f}_r$ là thành phần tiếp tuyến của phản lực $\vec{R}$ của giá đỡ :

$$\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{f}_r.$$

Khi một chất điểm M trượt có ma sát với một giá đỡ *rắn*, thì theo thí nghiệm, ta nhận thấy rằng *lực ma sát trượt* $\vec{f}_r$ có tính chất :

- tỉ lệ với độ lớn của thành phần pháp tuyến của lực ép chất điểm vào giá đỡ nó, hoặc là (cũng như vậy) tỉ lệ với độ lớn của R_n của *phản lực pháp tuyến* của giá đỡ tác dụng lên chất điểm ;
- cùng trên một đường thẳng, nhưng ngược chiều với vận tốc $\vec{v}$ của chất điểm đối với giá đỡ ;
- độc lập với độ lớn của vận tốc đó.

Các kết quả trên, xuất phát từ thực nghiệm, được thể hiện bởi :

Định luật Coulomb (1781).

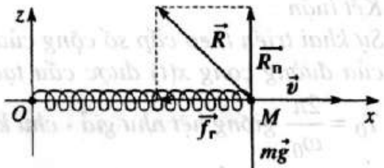
Khi một chất điểm trượt với vận tốc $\vec{v}$ trên một giá đỡ rắn, thì nó chịu tác dụng của một lực ma sát :

$$\vec{f}_r = -\mu R_n\frac{\vec{v}}{v}.$$

μ là *hệ số ma sát* ; nó phụ thuộc vào bản chất của các vật tiếp xúc.

(*) *Đoạn này không rõ trong chương trình, nhưng những kĩ thuật tính toán đều rất cổ điển và có thể rất cần thiết khi giải một số bài tập hay bài toán vật lí đại cương (cơ học, điện học..).*

Khi khởi động một chất điểm, thì phải thắng được các lực ma sát tĩnh $\vec{f}_{rs}$ mà độ lớn nghiệm đúng $\left\|\vec{f}_{rs}\right\| \le \mu \left\|\vec{R}_n\right\|$.



H.17. *Dao tử với lực ma sát rắn. Thành phần tiếp tuyến của phản lực $\vec{R}$ của giá đỡ là lực ma sát $\vec{f}_r$.*

8.I.2. Phương trình chuyển động

Ta hãy xét một vòng khuyên M khối lượng m buộc phải trượt có ma sát dọc theo một trục nằm ngang $(0; \vec{e}_x)$ dưới tác dụng của một lò xo có độ cứng k và chiều dài lúc nghỉ l_0 (*H.17*).

Hệ thức cơ bản của động lực học áp dụng vào vòng khuyên có dạng :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -k(l - l_0)\vec{e}_x + m\vec{g} + \vec{R} \text{ với } \vec{v} = v\vec{e}_x \text{ và } \vec{R} = \vec{R}_n + \vec{f}_r$$

Hình chiếu của phương trình lên trục $(0; \vec{e}_z)$ cho ta $R_n = mg$.

Ta ước tính lực ma sát $\vec{f}_r = f_r\vec{e}_x$:

- chừng nào còn chuyển động ($v \neq 0$) :

$$f_r = \varepsilon\mu mg, \text{ với } \begin{cases} \varepsilon = 1 & \text{nếu } v > 0 \\ \varepsilon = +1 & \text{nếu } v < 0 \end{cases}$$

- nếu $v = 0$, với $|f_r| = k|l - l_0| < \mu mg$, thì đạt được cân bằng.

Khi đặt $x = l - l_0$ và $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, thì ta được :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_r}{m}, \text{ với } \left(a = \frac{\mu g}{\omega_0^2} > 0\right)$$

- $\dot{x} \neq 0$: $\quad f_r = \varepsilon m\omega_0^2 a$, với $\begin{cases} \varepsilon = 1 & \text{nếu } \dot{x} > 0 \\ \varepsilon = +1 & \text{nếu } \dot{x} < 0 \end{cases}$

- $\dot{x} = 0$, với $|x| < a$, thì đạt được cân bằng ; vậy tồn tại một miền cân bằng $-a < x_{eq} < +a$.

Nếu chất điểm tới được miền cân bằng này với $\dot{x} = 0$ thì nó ở tại đó mãi mãi.

8.I.3. Nghiên cứu chuyển động

Nghiệm của phương trình vi phân này có dạng :

$$x(t) = x_m\cos(\omega t + \varphi) + \varepsilon a,$$

Từ đó, ta có biểu thức về vận tốc :

$$\dot{x}(t) = -x_m\omega\sin(\omega t + \varphi).$$

Giả sử ở thời điểm ban đầu $x(0) = x_0 > a$ và $\dot{x}(0) = 0$: vậy là có chuyển động.

Phép tính các hằng số tích phân được thực hiện theo phương pháp cổ điển và dẫn tới :

$$x(t) = (x_0 - a)\cos\omega t + a \quad \text{và} \quad \dot{x}(t) = -(x_0 - a)\sin(\omega_0 t).$$

Động tử dừng lại lần đầu ở thời điểm $t_1 = \dfrac{\pi}{\omega_0} = \dfrac{T_0}{2}$ *đường như đã không có ma sát*. Khi đó, động tử có li độ cực tiểu $x_1 = x(t_1) = -(x_0 - 2a)$.

Nếu $x_1 < a$, thì chuyển động tiếp tục. Các li độ *cực đại* có các giá trị liên tiếp :

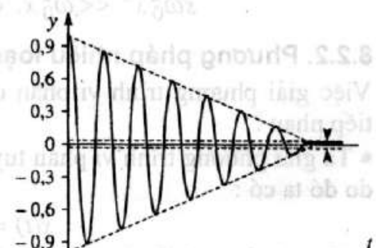
$$x_0, x_2 = x_0 - 4a, \quad x_4 = x_0 - 8a, \dots,$$

và các li độ *cực tiểu* có các giá trị liên tiếp :

$$x_1 = -(x_0 - 2a), \quad x_3 = -(x_0 - 6a), \quad x_5 = -(x_0 - 10a), \dots .$$

Chừng nào mà $|x_p| > a$.

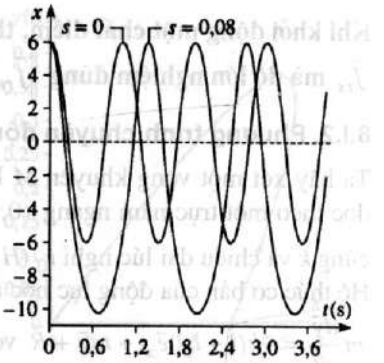
Nếu $|x_p| < a$, chất điểm dừng lại trong miền cân bằng.



H.18. *Độ biến thiên li độ của lò xo của một dao tử tắt dần do lực ma sát rắn. Hình bao của x(t) gồm hai đường thẳng.*

Kết luận :
Sự khai triển theo cấp số cộng của các vận động cực trị làm cho hình bao của đường cong x(t) được cấu tạo bởi hai đường thẳng, và giả - chu kì $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ giống hệt như giả - chu kì của chuyển động không tắt dần.

Thành thử, điểm dừng ở trên đoạn [$-a$, a], mà nói chung không trùng với vị trí cân bằng có lực ma sát bằng không ($x = 0$). Đặc điểm này là một nhược điểm khi hệ dao động là bộ phận linh động của một dụng cụ đo mà số đọc được phải cho ta hoành độ của điểm dừng có lực ma sát bằng không.



H.19. *Nghiệm đồ thị của phương trình* $\ddot{x} + \omega_0^2 x(1 + sx) = 0$ *với* $\omega_0^2 = 2\pi$ *(sx_0 không phải là vô cùng nhỏ so với 1).*

8.2. Dao tử không điều hòa

8.2.I. Phương trình chuyển động

Xét một chất điểm khối lượng m, buộc phải chuyển động dọc theo một trục (Ox) trong một giếng thế $\mathscr{E}_p(x)$ ở lân cận một vị trí cân bằng bền tại $x = 0$.

Ở thời điểm $t = 0$, hệ được đưa tới điểm $x(0) = x_0$, được buông ra không vận tốc ban đầu.

Nếu x_0 ở ngoài *phần parabolic* của giếng thế năng, thì các phép tính trước không còn có hiệu lực nữa. Lúc đó, cần phải tiếp tục khai triển $\mathscr{E}_p(x)$ ít nhất đến số hạng thứ hai có ý nghĩa mà lại khác không. Giả thiết rằng số hạng đó là một số hạng về x^3 :

$$\mathscr{E}_p(x) = \mathscr{E}_p(0) + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{6}k'x^3$$

với $k = \left(\dfrac{d^2\mathscr{E}_p}{dx^2}\right)_{x=0} > 0$ và $k' = \left(\dfrac{d^3\mathscr{E}_p}{dx^3}\right)_{x=0}$

Áp dụng nguyên lí cơ bản của động lực học cho chất điểm, ta có :

$$m\ddot{x} = f = -\frac{d\mathscr{E}_p}{dx} = -kx - \frac{1}{2}k'x^2,$$

nên : $\ddot{x} + \omega_0^2 + s\omega_0^2 x^2 = 0,$

với : $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ và $s\omega_0^2 = \dfrac{k'}{2m}$.

Phương trình chuyển động là *một phương trình vi phân phi tuyến*. Sự không tuyến tính là do số hạng $s\omega_0^2 x^2$, mà ta coi như *một nhiễu loạn* thêm vào số hạng chính $\omega_0^2 x$ và nó nghiệm đúng ở mỗi thời điểm t :

$$s\omega_0^2 x^2 << \omega_0^2 x, \text{ do đó } sx << 1 \text{ và } sx_0 << 1.$$

8.2.2. Phương pháp nhiễu loạn

Việc giải phương trình vi phân được tiến hành bằng các phép xấp xỉ kế tiếp nhau :

• Ta giải phương trình vi phân tuyến tính của hệ không nhiễu loạn ($s = 0$), do đó ta có :

$$x(t) = x_0\cos(\omega_0 t).$$

• Ta coi rằng nhiễu loạn vẫn bảo toàn tính chất tuần hoàn cho chuyển động, nhưng có thể hơi làm thay đổi mạch số của nó, bây giờ đã trở thành ω. Khi điều đó được thỏa mãn, thì số hạng nhiễu loạn, có x^2 trong phương trình vi phân, tạo ra một số hạng dạng :

$$\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}[1 + \cos(2\omega t)].$$

• Kết quả là ta phải tìm một nghiệm của phương trình có dạng :

$$x(t) = A[\cos(\omega t + \varphi) + \varepsilon\cos(2\omega t + 2\varphi) + \varepsilon'].$$

Các số hạng gắn với nhiễu loạn phải nhỏ, các thừa số ε và ε' là các đại lượng nhỏ cấp một như sx_0. Còn về các hằng số A và φ, thì chúng được xác định nhờ các điều kiện ban đầu. Ta hãy tính toán ở bậc một, ba số hạng của phương trình vi phân cần giải :

$$\omega_0^2 x = \omega_0^2 A[\cos(\omega t + \varphi) + \varepsilon\cos(2\omega t + 2\varphi) + \varepsilon'] \qquad (1)$$

$$s\omega_0^2 x^2 = \omega_0^2 AsA[\cos(\omega t + \varphi) + ...]^2 = \omega_0^2 AsA\frac{1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)}{2} \qquad (2)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 A[\cos(\omega t + \varphi) + 4\varepsilon\cos(2\omega t + 2\varphi)] \qquad (3)$$

Tổng của (1), (2) và (3) phải bằng không *dù t như thế nào*. Điều đó kéo theo số hạng không đổi, thừa số của $\cos(\omega t + \varphi)$ và thừa số của $\cos(2\omega t + 2\varphi)$ phải bằng không.

Từ đó, có ba hệ thức :

• $\omega_0^2 A\varepsilon' + \omega_0^2 A\dfrac{sA}{2} = 0$, do đó $\varepsilon' = -\dfrac{sA}{2}$;

• $\omega_0^2 A - \omega^2 A = 0$, do đó $\omega = \omega_0$;

• $\omega_0^2 A\varepsilon + \omega_0^2 A\dfrac{sA}{2} - \omega^2 A4\varepsilon = 0$, do đó $\varepsilon(4\omega^2 - \omega_0^2) = \omega_0^2\dfrac{sA}{2}$, nên $\varepsilon = \dfrac{sA}{6}$.

8.2.3. Chú ý :

• Trong ví dụ của ta, sự nhiễu loạn không làm thay đổi mạch số, tuy nhiên, không phải bao giờ cũng sẽ là như thế.

• Số hạng nhiễu loạn $-\dfrac{k'}{2}x^2$ trong biểu thức của lực, đưa vào một *tần số gấp đôi* tần số cơ bản $\omega = \omega_0$: li độ $x(t)$ chứa *họa âm bậc hai*.

Phương pháp đã dùng gợi ý rằng có vô số họa âm trong nghiệm chính xác, nhưng tầm quan trọng của các họa âm đó giảm theo thứ bậc của chúng. Điều đó chứng thực rằng ta có thể xử lí bài toán đến một cấp cho trước, mà không cần kể đến các họa âm bậc cao.

• Để giải thích số hạng không đổi $\varepsilon' = -\dfrac{sA}{2}$, ta hãy tính giá trị trung bình của li độ $x(t)$:

$$\langle x(t)\rangle = A[\langle\cos(\omega t)\rangle + \varepsilon'\langle\cos(2\omega t)\rangle + \varepsilon'] = \varepsilon' A = -\frac{sA^2}{2}.$$

Tính trung bình, dao tử không điều hòa không còn dao động chung quanh vị trí cân bằng bền x = 0 của nó nữa.

Tính kì dị bề ngoài đó sẽ được giải thích khi ta khảo sát biểu thức của lực kéo về :

$$f = -kx - \frac{1}{2}k'x^2 = -kx(1 + sx).$$

Đối với $|x|$ cho trước, thì cường độ của lực trên càng lớn khi li độ x có cùng dấu như của s.

Ví dụ, nếu $s > 0$, thì *lực kéo về* sẽ hơi quan trọng hơn khi $x > 0$, và phải trông chờ để quan sát được một sự lệch của vị trí trung bình về phía các $x < 0$. Và đây chính là kết quả thu được :

$$\langle x\rangle = -\frac{sA^2}{2} < 0.$$

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ DAO TỬ ĐIỀU HÒA

• Một dao tử điều hòa là một hệ có một bậc tự do, mà phương trình chuyển động có dạng :

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x = 0,$$

dù bản chất vật lí của biến số x như thế nào.

• Một dao tử điều hòa vận động trong một giếng thế năng parabolic $\mathscr{E}_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$ dưới tác dụng của một lực kéo về tỉ lệ với li độ là $f = -kx$, bằng cách thực hiện các dao động đẳng thời với chu kì riêng $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

• Cơ năng của một dao tử điều hòa là không đổi và giá trị của nó tỉ lệ với bình phương của biên độ x_m của các dao động :

$$\mathscr{E}_M = \mathscr{E}_K + \mathscr{E}_P = \frac{1}{2}kx_m^2.$$

■ DAO TỬ TẮT DẦN DO LỰC MA SÁT NHỚT

• Phương trình của một dao tử tắt dần do lực ma sát nhớt là :

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

với :

$$\frac{h}{m} = 2\alpha = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{Q}.$$

• $\alpha > \omega_0 \left(Q < \frac{1}{2}\right)$: chuyển động là không tuần hoàn ;

• $\alpha = \omega_0 \left(Q = \frac{1}{2}\right)$: chuyển động là tới hạn và thời gian trở về cân bằng là cực tiểu ;

• $\alpha > \omega_0 \left(Q > \frac{1}{2}\right)$: chuyển động là giả tuần hoàn với giả - chu kì $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}$.

• Đối với các sự tắt dần yếu, độ biến thiên tương đối của cơ năng của dao tử trong một chu kì là :

$$\frac{\Delta\mathscr{E}_M}{\mathscr{E}_M} = -2\delta = \frac{2\pi}{Q} = -\frac{T_0}{\tau}.$$

■ DAO TỬ TẮT DẦN DO LỰC MA SÁT RẮN

• Định luật Coulomb

Khi một chất điểm trượt trên một giá đỡ rắn với vận tốc $\vec{v}$, thì nó chịu tác dụng của một lực ma sát :

$$\vec{f}_r = -\mu R_n \frac{\vec{v}}{v}.$$

• Khi bắt đầu cho chất điểm chuyển động, thì phải thắng các lực ma sát tĩnh $\vec{f}_{rs}$ mà độ lớn nghiệm đúng

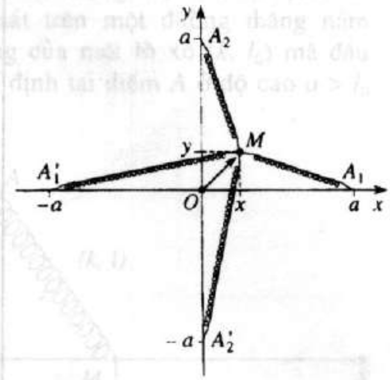
$$\left\|\vec{f}_{rs}\right\| \le \mu\left\|\vec{R}_n\right\|.$$

Bài tập có lời giải

Dao tử điều hòa phẳng

ĐỀ BÀI

Một chất điểm M, khối lượng m, được gắn với bốn điểm cố định A_1, A'_1, A_2, A'_2 của một mặt phẳng nằm ngang, bốn lò xo cùng chiều dài riêng a. Người ta kí hiệu k_1 là độ cứng của các lò xo MA_1, MA'_1 và k_2 là độ cứng của các lò xo MA_2, MA'_2.



1) Điểm $M(x, y)$ ở lân cận điểm gốc O, hãy tính thế năng $\mathscr{E}_p$ của nó.

2) Từ đó suy ra lực $\vec{f}$ áp dụng vào điểm M. Lực có phải là lực xuyên tâm không ?

3) Ta thừa nhận rằng điểm M trượt không ma sát trên mặt phẳng nằm ngang. Hãy nghiên cứu chuyển động của nó, biết rằng nó được lao đi từ $M_0(x_0, 0)$ với một vận tốc $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_y$.

4) Mô tả quỹ đạo của M trong các trường hợp sau đây :

a) $k_2 = 2k_1$; b) $k_2 = 9k_1$.

HƯỚNG DẪN

Thế năng của một điểm M thì bằng tổng các thế năng của các lực tác dụng lên M. Đó là những lực nào ? Thế năng của các lực đó được biểu diễn như thế nào ?

Nói chung, sự khai triển hạn chế của một hàm số f(u) ở lân cận điểm không, chỉ cung cấp một sự xấp xỉ thích hợp nếu u quá nhỏ so với 1.

Muốn kể tới điều kiện $x << a$, thì phải biểu thị hàm thế năng dưới dạng $\mathscr{E}_p(u)$ với $u = \dfrac{x}{a}$.

Nhớ rằng chỉ duy nhất có một đại lượng không thứ nguyên là có thể được so sánh với số 1.

LỜI GIẢI

1) Ta hãy tính thế năng của lò xo MA_1, bằng cách coi $\dfrac{x}{a}$ và $\dfrac{y}{a}$ như những đại lượng vô cùng nhỏ cấp 1 và giới hạn ở cấp 2 :

$$\mathscr{E}_{p_1} = \frac{1}{2}k_1\left(\sqrt{(x-a)^2 + y^2} - a\right)^2 = \frac{1}{2}k_1 a^2\left(\left[\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - 1\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}k_1 a^2\left[\left(1 - \frac{x}{a} + ...\right) - 1\right]^2 = \frac{1}{2}k_1 x^2.$$

Bằng một phép tính tương tự cho lò xo MA'_1, ta lập : $\mathscr{E}'_{p_1} = \dfrac{1}{2}k_1 x^2$

Khi thay k_2 vào k_1 và y vào x đối với các lò xo MA_2 và MA'_2, ta được :

$$\mathscr{E}_{p_2} = \mathscr{E}'_{p_2} = \frac{1}{2}k_2 y^2.$$

Do đó thế năng của hệ toàn bộ : $\mathscr{E}_p(x, y) = k_1 x^2 + k_2 y^2$.

2) Dao tử coi là phẳng, từ đó ta suy ra : $f_x = -2k_1 x$ và $f_y = -2k_2 y$. Vì $k_1 \neq k_2$, nên lực $\vec{f}$ không phải là lực xuyên tâm (giá đỡ nó không đi qua điểm O).

3) Khi chiếu lên các trục, thì hệ thức cơ bản của động lực học áp dụng vào chất điểm trong hệ quy chiếu đang xét, giả thiết hệ là Galilée cho ta :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -2k_1 x \quad \text{và} \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -2k_1 y;$$

$\sqrt{2}$ *có phải là số hữu tỉ không ? Nhớ rằng một số vô tỉ không thể được viết dưới dạng tỉ số của hai số nguyên.*

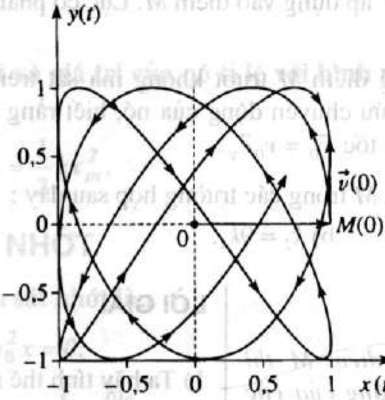
Do đó, bằng phương pháp tích phân, có kể đến các điều kiện ban đầu :

$x(t) = x_0\cos(\omega_1 t)$, với $\omega_1^2 = \dfrac{2k_1}{m}$;

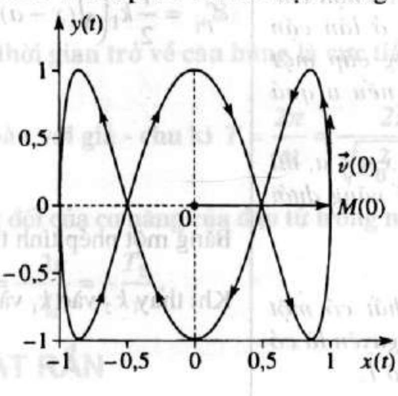
$y(t) = \dfrac{v_0}{\omega_2}\sin(\omega_2 t)$, với $\omega_2^2 = \dfrac{2k_2}{m}$.

4) Khi các mạch số ω_1 và ω_2 tách biệt nhau, thì, nói chung, quỹ đạo sẽ không tuần hoàn, cũng không khép kín. Ngược lại, nếu tỉ số các mạch số là hữu tỉ, thì quỹ đạo sẽ khép kín và đồ thị của quỹ đạo là một đường cong Lissajous.

a) Quỹ đạo của một dao tử điều hòa mà tỉ số các mạch số $\dfrac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{2}$ là vô tỉ, thì sẽ không tuần hoàn và cũng không khép kín.



b) Quỹ đạo của một dao tử điều hòa mà tỉ số các mạch số $\dfrac{\omega_2}{\omega_1} = 3$ là hữu tỉ, thì sẽ là tuần hoàn và khép kín : đó là một đường cong Lissajous.



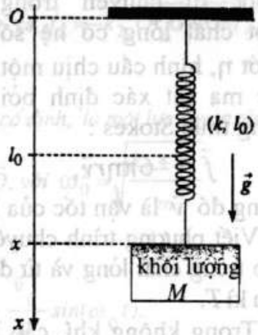
Bài tập

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

1 Một thí nghiệm đơn giản

Người ta treo một khối lượng m chưa biết vào một lò xo có các đặc trưng (k, l_0) chưa biết. Người ta nhận thấy lò xo dài thêm Δl = 10cm. Hãy tính chu kì T_0 của các dao động của khối lượng, biết rằng cường độ của trọng lực là :

$g = 10 m.s^{-2}$.



• *Lời giải*

$k\Delta l = mg$, nên $\Delta l = \frac{mg}{k}$. Gọi x là độ dãn dài tức thời, ta có :

$$m\ddot{x} = mg - kx,\ \text{hay}\ \ddot{x} = g - \frac{k}{m}x = g - \omega_0^2 x = -\omega_0^2(x - \Delta l).$$

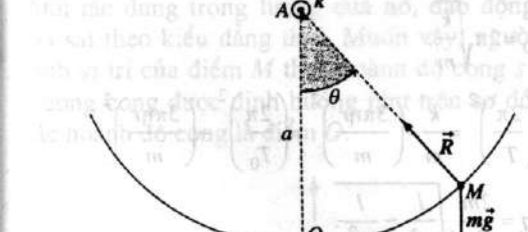
Chu kì các dao động sẽ bằng :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta l}{g}} = 0,63s.$$

Hệ này có tính đẳng thời với một con lắc đơn, chiều dài Δl.

2 Chất điểm trên một thanh dẫn tròn

Một chất điểm M, khối lượng m bị buộc phải trượt không ma sát dưới tác dụng của trọng lượng của nó, trên một thanh dẫn tròn bán kính a (xem sơ đồ). Hãy xác định chu kì T_0 của các dao động nhỏ chung quanh vị trí cân bằng của nó.



• *Lời giải*

Khối lượng m chịu tác dụng của trọng lượng $m\vec{g}$ của nó, và phản lực $\vec{R}$ của giá đỡ (mang bởi $\overrightarrow{AM}$, vì không có ma sát). Ta áp dụng định lí về mômen động ở O :

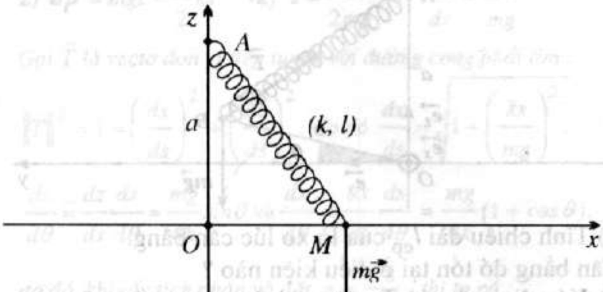
$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = ma^2\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{k} = -mgak\sin\theta,\ \text{do đó :}\ \ddot{\theta} = -\frac{g}{a}\theta.$$

Đối với các chuyển động nhỏ $\sin\theta \approx \theta$; ta lại tìm thấy phương trình vi phân mong đợi : $\ddot{\theta} = -\frac{g}{a}\theta$.

Đây là một cách khác để tạo ra một con lắc đơn có chu kì $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$.

3 Một con lắc đàn hồi khác

Hãy xác định chu kì T_0 của các dao động nhỏ của một chất điểm M, khối lượng m, bị buộc phải di chuyển không ma sát trên một đường thẳng nằm ngang, dưới tác dụng của một lò xo (k, l_0) mà đầu mút còn lại được cố định tại điểm A ở độ cao $a > l_0$ (xem sơ đồ).



• *Lời giải*

Ta có thể giải bài tập này theo hai cách khác nhau bằng cách sử dụng các định luật của động lực học hay định lí về động năng.

• Chiếu nguyên lí cơ bản của động lực học lên trục (Ox) ta có :

$$m\ddot{x} = -k(l - l_0)\sin\theta,\ \text{với}\ l = (a^2 + x^2)^{1/2}\ \text{và}\ \sin\theta = \frac{x}{l}.$$

Vậy nên : $$m\ddot{x} = -k.x\left(1 - \frac{l_0}{(a^2 + x^2)^{1/2}}\right)$$

Nếu chỉ giữ lại các số hạng cấp 1 về x, thì ta có :

$$m\ddot{x} = -kx\left(1 - \frac{l_0}{a}\right) = -\omega_0^2 x,\ \text{do đó chu kì}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{ma}{k(a - l_0)}};$$

• Phản lực $\vec{R}$ của giá đỡ và trọng lượng $m\vec{g}$ có một công suất bằng không. Ta thấy rằng cơ năng $\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p$ được bảo toàn khi chỉ xét tới thế năng của lò xo :

$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\ \text{và}\ \mathcal{E}_P(x) = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2,\ \text{với}\ l = (a^2 + x^2)^{1/2}.$$

Do đó : $$\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k\left[(a^2 + x^2)^{1/2} - l_0\right]^2;$$

Nếu giới hạn ở cấp 2 của $\frac{x}{a}$, thì ta có :

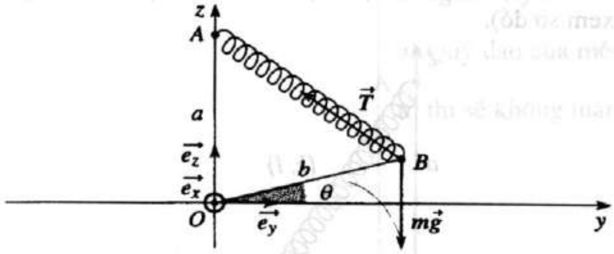
$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(a - l_0)^2 + \frac{1}{2}k\left(1 - \frac{l_0}{a}\right) = cte$$

Nếu lấy đạo hàm đối với thời gian ta sẽ thu được biểu thức trên nhân với $\dot{x}$; từ đó, chu kì có dạng

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{ma}{k(a - l_0)}}$$

4 Trọng lực kế lò xo

Một trọng lực kế lò xo gồm một thanh OB, khối lượng không đáng kể ; có thể quay quanh một trục nằm ngang $(0; \vec{e}_x)$ và nâng ở B một khối lượng điểm (chất điểm) m (xem sơ đồ). Dưới tác dụng của lò xo AB, có độ cứng k và chiều dài không tải l_0, thì thanh nằm ngang ở trạng thái cân bằng. Đặt $OA = a$, $OB = b$, $AB = l$ và $\theta = (\vec{e}_y, \overrightarrow{OB})$ là li độ góc của thanh OB.



1) Tính chiều dài l_{ep} của lò xo lúc cân bằng.
Cân bằng đó tồn tại ở điều kiện nào ?
2) Xác định chu kì T_0 của các dao động nhỏ của con lắc này. Điều gì sẽ xảy ra khi ka ở lân cận mg ?

• *Lời giải*

1) $l_{eq} = \sqrt{a^2 + b^2} = \dfrac{ka}{ka - mg} l_0$, *và nhất thiết là* $ka > mg$.

2) Áp dụng định lí mômen động ở O, và bỏ qua các vô cùng nhỏ cấp 2, ta có : $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$, *với* $\omega_0^2 = \dfrac{(ka - mg)^2}{km(al_0)^2}$.

Nếu ka ở lân cận mg, thì chu kì sẽ rất dài.

5 Phương trình không thứ nguyên của một dao tử điều hòa

Cho một dao tử điều hòa có phương trình :

$$\ddot{x}(t) + 2\alpha\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0.$$

Chứng minh rằng, khi đưa vào thời gian rút gọn (hay không thứ nguyên) $\tau = \omega_0 t = 2\pi\dfrac{t}{T_0}$, thì phương trình chuyển động của dao tử chỉ còn một thông số duy nhất không thứ nguyên nữa : hệ số phẩm chất Q.

• *Lời giải*

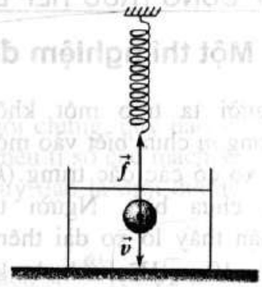
Phương trình chuyển động có dạng : $\dfrac{d^2x}{d\tau^2} + \dfrac{1}{Q}\dfrac{dx}{d\tau} + x = 0$.

Mạch số riêng của con lắc này bằng 1 (không phải là đơn vị, vì ta tính toán với các biến số rút gọn), từ đó một chu kì bằng 2π. *Khi mô phỏng bằng số thì tốt nhất là tính toán với các dao tử có chu kì riêng bằng đơn vị. Muốn thế, ta phải thay biến số* $\tau = \dfrac{t}{T_0}$, *phương trình vi phân sẽ trở thành*

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{2\pi}{Q}\frac{dx}{d\tau} + 4\pi^2 x = 0.$$

6 Xác định một hệ số nhớt

Một hình cầu bán kính r và khối lượng m được treo vào một lò xo độ cứng k và chiều dài không tải l_0. Được di chuyển trong một chất lỏng có hệ số nhớt η, hình cầu chịu một lực ma sát xác định bởi công thức Stokes :



$$\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v},$$

trong đó $\vec{v}$ là vận tốc của hình cầu.

1) Viết phương trình chuyển động của hình cầu nhúng vào trong chất lỏng và từ đó suy ra biểu thức của giả - chu kì T.

2) Trong không khí, các lực ma sát nhớt đều không đáng kể, chu kì của các dao động là T_0. Hãy xác định hệ số nhớt η của chất lỏng theo m, r, T và T_0.

• *Lời giải*

1) Gọi l_{eq} *là chiều dài của lò xo ở cân bằng và* l *là chiều dài tức thời của nó. Vậy* $z = (l - l_{eq})$ *là độ dãn của lò xo đối với vị trí cân bằng của nó. Phương trình vi phân của chuyển động có dạng :*

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2\alpha\frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = 0,$$

với $2\alpha = \dfrac{6\pi\eta r}{m}$ *và* $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$; *do đó :*

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{k}{m} - \left(\dfrac{3\pi\eta r}{m}\right)^2}}$$

2) Trong không khí ($\eta = 0$ *), hình cầu thực hiện các dao động có chu kì* $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{k}{m} - \left(\frac{3\pi\eta r}{m}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 - \left(\frac{3\pi\eta r}{m}\right)^2,$$

do đó : $\eta = \dfrac{2m}{3r}\sqrt{\dfrac{1}{T_0^2} - \dfrac{1}{T^2}}$.

VẬN DỤNG VỐN KIẾN THỨC

7 * Chuyển động dưới tác dụng của các lực tỉ lệ với khoảng cách

1) Cho hai điểm cố định A_1 và A_2, hãy nghiên cứu chuyển động của một chất điểm M, khối lượng m, chịu tác dụng của hai lực :

$$\vec{f}_1 = -k_1\overrightarrow{A_1M} \text{ và } \vec{f}_2 = -k_2\overrightarrow{A_2M},$$

với các giả thiết sau đây :

a) k_1 và k_2 là hai hằng số dương ;
b) $k_2 = -k_1 = k$ là hằng số dương.
2) Khái quát hóa các kết quả thu được trong trường hợp có N lực $\vec{f_i} = k_i \overrightarrow{A_i M}$.

• *Lời giải*

1) a) Gọi G là trọng tâm của A_1 và A_2 được gán các hệ số k_1 và k_2 ; do đó : $\vec{f_1} = -k_1(\overrightarrow{A_1G} + \overrightarrow{GM})$ và $\vec{f_2} = -k_2(\overrightarrow{A_2G} + \overrightarrow{GM})$.

do đó : $\vec{f} = -(k_1 + k_2)\overrightarrow{GM}$.

Lực $\vec{f}$, mà giá đỡ đi qua điểm G cố định, là một lực xuyên tâm.

$$\frac{d^2\overrightarrow{GM}}{dt^2} + \omega_0^2 \overrightarrow{GM} = \vec{O}, \text{ với } \omega_0^2 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

$\overrightarrow{GM}(0) = \overrightarrow{GM}_0$ và $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$.

Vậy $\overrightarrow{GM}(t) = \overrightarrow{GM}_0 \cos(\omega_0 t) + \dfrac{\vec{v}_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$.

b) $(k_1 + k_2) = 0$ và không thể xác định được một trọng tâm nữa.

$$\vec{f} = k(\overrightarrow{A_1M} - \overrightarrow{A_2M}) = k\overrightarrow{A_1A_2}.$$

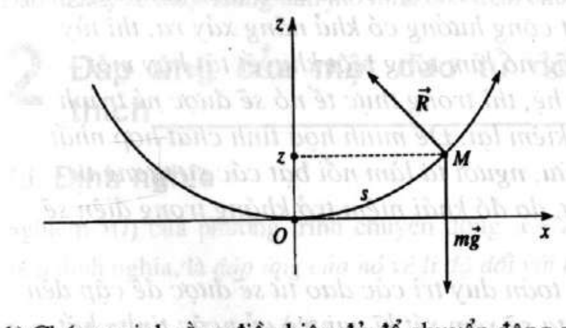
Điểm M ở trong một trường lực đều và quỹ đạo của nó là một parabôn nếu $\vec{v}_0$ và $\overrightarrow{A_1A_2}$ có hướng khác nhau.

Nếu $\vec{v}_0$ và $\overrightarrow{A_1A_2}$ đều cùng đường thẳng, thì điểm M có một chuyển động thẳng nhanh dần đều.

2) Nếu $\sum_i k_i \neq 0$, thì ta có thể xác định một trọng tâm G và chuyển động là một chuyển động có lực xuyên tâm với tâm G của các lực. Nếu $\sum_i k_i = 0$, thì điểm M ở trong một trường lực đều và quỹ đạo của nó hoặc là parabolic, hoặc là thẳng.

8 ** Con lắc xicloit

Người ta dự kiến xác định phương trình của đường cong mà dọc theo đó một chất điểm M khối lượng m, dưới tác dụng trọng lượng của nó, dao động không ma sát theo kiểu đẳng thời. Muốn vậy, người ta xác định vị trí của điểm M theo hoành độ cong s của nó. Đường cong được định hướng như trên sơ đồ và gốc các hoành độ cong là điểm O.



1) Chứng minh rằng điều kiện đủ để chuyển động của M phải đẳng thời là thế năng của nó phải có dạng $\mathscr{E}_P = \dfrac{1}{2}ks^2$.

2) Kết luận rằng đường cong phải tìm là một nhịp của đường xicloit mà người ta sẽ biểu diễn (đổi biến số $\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{ks}{mg}$).

3) Tìm chu kì T_0 của các dao động.

• *Lời giải*

1) Khi không có ma sát, thì cơ năng sẽ bất biến :

$$\mathscr{E}_M = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}ks^2 = cte. \text{ Do đó : } m\ddot{s} + k\dot{s} = 0.$$

2) $\mathscr{E}_P = mgz = \dfrac{1}{2}ks^2$, vậy $z = \dfrac{ks^2}{2mg}$ và $\dfrac{dz}{ds} = \dfrac{ks}{mg}$.

Gọi $\vec{T}$ là vectơ đơn vị tiếp tuyến với đường cong phải tìm :

$$\|\vec{T}\|^2 = 1 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2, \text{ do đó } \frac{dx}{ds} = \sqrt{1 - \left(\frac{ks}{mg}\right)^2}.$$

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{dz}{ds}\frac{ds}{d\theta} = \frac{mg}{4k}\sin\theta \text{ và } \frac{dx}{d\theta} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{d\theta} = \frac{mg}{4k}(1 + \cos\theta).$$

do đó, khi lấy tích phân và đặt $a = \dfrac{mg}{4k}$, thì ta có :

$$x = a(\theta + \sin\theta) \text{ và } z = a(1 + \cos\theta), \text{ với } -\pi \leq \theta \leq \pi.$$

3) $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{4a}{g}}$.

9 ** Con lắc đơn có biên độ lớn

Cho một con lắc đơn có biên độ góc $\theta_0 < 1$ rad. Hãy tính chu kì T của nó khi coi θ_0^2 là một vô cùng nhỏ bậc 1.

• *Lời giải*

Phương trình của con lắc là $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$, do đó :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right) = 0.$$

Nếu coi số hạng $\omega_0^2 \dfrac{\theta^3}{6}$ như một nhiễu loạn nhỏ, thì nghiệm không nhiễu loạn là $\theta = \theta_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$. Nhiễu loạn hơi làm biến đổi mạch số thành ω và đưa vào các số hạng về :

$$\cos^3(\omega t + \varphi) = \frac{1}{4}\left[3\cos(\omega t) + \cos(3\omega t + 3\varphi)\right]$$

Kết quả là ta phải tìm một nghiệm có dạng :

$$\theta(t) = \theta_0\left[\cos(\omega t) + \varepsilon\cos(3\omega t + 3\varphi)\right]$$

Ta tìm thấy :

$$\omega^2 = \omega_0^2\left(1 - \frac{\theta_0^2}{8}\right) \text{ và } \varepsilon = \frac{\theta_0^2}{192}.$$

Từ đó, ta có công thức Borda : $T = T_0\left(1 + \dfrac{\theta_0^2}{16}\right)$, trong đó, rõ ràng số hạng hiệu chính là cấp 2.

5 DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC

MỤC TIÊU

■ Nghiên cứu động thái của một hệ tuyến tính chịu một tác dụng kích thích.

■ Nghiên cứu các kiểu bộ lọc khác nhau.

■ Sử dụng các sự tương tự về điện - cơ để chứng minh tính chất chung của các kết quả thu được.

■ Suy rộng khái niệm về trở kháng.

■ Rút ra nguyên lí duy trì các dao động.

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

■ Vật lí

• Dao động tự do.

• Khái niệm về trở kháng (điện).

■ Toán học

• Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 có hệ số không đổi với vế phải.

Mở đầu

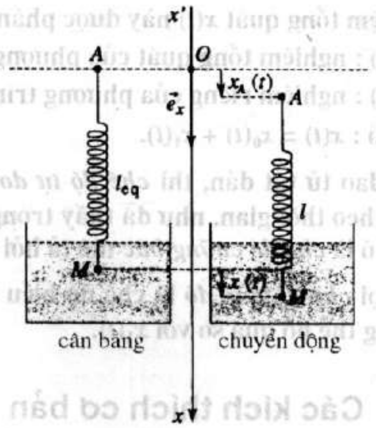
Muốn nghiên cứu chế độ cưỡng bức của một dao tử điều hòa thì ta phải coi nó như một hệ tuyến tính để khi có một kích thích ở lối vào, lại cho một đáp ứng ở lối ra. Tùy theo quan điểm được chấp nhận, mà dao tử chỉ được dùng làm mô hình để xử lí tính đa dạng của các hiện tượng cùng loại, nhưng bản chất vật lí rất khác nhau. Có thể là các mạng lưới điện chịu các kích thích, các hệ thống cơ học chịu các kích thích bên ngoài hoặc các nguyên tử, phân tử chịu các sóng sáng kích thích, v.v...

Hiện tượng lọc, nghĩa là sự phụ thuộc biên độ của đáp ứng vào tần số kích thích, sẽ được triển khai.

Về vấn đề này, ta mới thấy rõ ràng dao tử nghiên cứu là một bộ lọc tuyến tính cấp 2. Đối với một loại kích thích cho trước và tùy theo đại lượng được coi như đáp ứng, thì một bộ lọc có thể hay không có thể biểu hiện tính cộng hưởng. Khi một cộng hưởng có khả năng xảy ra, thì tùy thuộc tình huống nó làm tăng một khuyết tật hay một phẩm chất của hệ, thì trong thực tế nó sẽ được né tránh hoặc được tìm kiếm lại. Để minh họa tính chất hợp nhất trong nghiên cứu, người ta làm nổi bật các sự tương tự giữa điện và cơ, do đó khái niệm trở kháng trong điện sẽ được mở rộng.

Cuối cùng, bài toán duy trì các dao tử sẽ được đề cập đến. Nhân dịp này, ta sẽ xem xét kĩ vai trò của các tính chất phi tuyến để đưa ra kết luận về sự có mặt thực tế cần thiết của chúng.

1 Mô tả và phương trình của dao tử được nghiên cứu



H.1. *Mô hình của dao tử cơ học tuyến tính tắt dần dưới tác dụng của một kích thích $x_A(t)$*

Một hình cầu nhỏ khối lượng m được treo ở đầu dưới M của một lò xo độ cứng k và chiều dài không tải l_0. Người ta nhúng hình cầu này vào trong một chất lưu nhớt có hệ số nhớt η (*H.1*). Khi hình cầu dịch chuyển với vận tốc $\vec{v}$ đối với chất lưu, thì chất lưu tác dụng một lực ma sát nhớt $\vec{f}_r = -h\vec{v}$, đối với các vận tốc nhỏ.

Ở thời điểm $t = 0$, đầu mút phía trên của lò xo chịu một chuyển dời $x_A(t)$. Hãy xác định độ dãn $x(t)$ của điểm M đối với vị trí cân bằng của nó.

Hệ thức cơ bản của động lực học áp dụng vào M, khi chiếu trên trục thẳng đứng hướng xuống phía dưới $(0; \vec{e}_x)$, cho ta :

$$m\ddot{x} = mg - f_A - k(l - l_0) - h\dot{x},$$

trong đó, l là chiều dài tức thời của lò xo và f_A là lực đẩy Archimède. Ta thừa nhận rằng lực đẩy này vẫn bằng lực đẩy tác dụng lúc cân bằng :

$$O = mg - f_A - k(l_{eq} - l_0),$$

với l_{eq} là chiều dài của lò xo lúc cân bằng. Ta trừ vế đối vế hai biểu thức trên, thì được :

$$m\ddot{x} = -k(l - l_{eq}) - h\dot{x}.$$

Chú ý rằng $x_A + l = x + l_{eq}$, phương trình chuyển động có dạng :

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = kx_A(t).$$

Ta kí hiệu $\omega_0^2 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ và $2\alpha = \dfrac{h}{m}$ tương ứng với *mạch số riêng* của dao tử và *hệ số ma sát* của nó. Phương trình chuyển động của dao tử có dạng cuối cùng.

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_A(t)$$

Nhớ rằng *thời gian phục hồi τ của năng lượng và hệ số phẩm chất Q* liên kết với hệ số ma sát 2α nhờ các hệ thức :

$$\frac{h}{m} = 2\alpha = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{Q}$$

Dao tử này sẽ được dùng làm mô hình cho toàn chương.

2 Đáp ứng của một dao tử đối với một kích thích

2.1. Định nghĩa

Nghiệm $x(t)$ của phương trình chuyển động $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_A(t)$, theo định nghĩa, là *đáp ứng của nó về li độ đối với kích thích $x_A(t)$*.

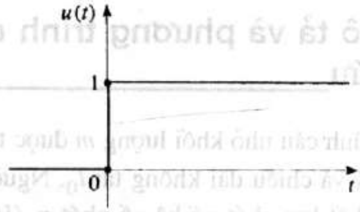
2.2. Chế độ và hoạt động

Về mặt toán học thì đó là bài toán xác định nghiệm tổng quát của một phương trình vi phân tuyến tính có hệ số không đổi với vế phải là hàm số của thời gian.

Nghiệm tổng quát $x(t)$ này được phân tích thành tổng của :

- $x_0(t)$: nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất ;
- $x_1(t)$: nghiệm riêng của phương trình có vế phải.

Do đó : $x(t) = x_0(t) + x_1(t)$.



H.2. *Hàm bậc thang*

Khi dao tử tắt dần, thì *chế độ tự do* của nó, mô tả bởi $x_0(t)$, sẽ biến mất theo thời gian, như đã thấy trong chương 4. Duy nhất còn tồn tại sau đó là *chế độ cưỡng bức* mô tả bởi $x_1(t)$.

Ta gọi *chế độ quá độ* là chế độ biểu diễn bởi $x(t)$ chừng nào mà $x_0(t)$ không thể bỏ qua so với $x_1(t)$.

3 Các kích thích cơ bản

Một hệ có thể chịu tác dụng của vô số loại kích thích (các tín hiệu). Để xác định các đặc trưng chung của các đáp ứng của một hệ như vậy, thì chỉ cần biết đáp ứng của nó đối với một số tín hiệu sơ cấp cơ bản nào đó là đủ.

Ta sẽ nêu ra dưới đây các tín hiệu đó.

3.1. Kích thích điều hòa

Tín hiệu hình sin (kích thích điều hòa) và đáp ứng của hệ được gọi là *đáp ứng điều hòa*.

Khi một hệ chịu tác dụng của một kích thích điều hòa, thì ta sẽ quan tâm chủ yếu tới chế độ cưỡng bức của nó (đã ổn định).

Ngược lại, trong hai trường hợp sau đây, ta lại quan tâm chủ yếu tới chế độ quá độ.

3.2. Bậc thang

Ta gọi hàm bậc thang hay hàm Heaviside, là hàm u(t) (H.2) được xác định theo :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \textbf{\textit{nếu}}\ t < 0 \\ 1 & \textbf{\textit{nếu}}\ t \geq 0. \end{cases}$$

Đáp ứng tương ứng, gọi là *đáp ứng chỉ báo*, là sự thử quá độ tiêu biểu nhất.

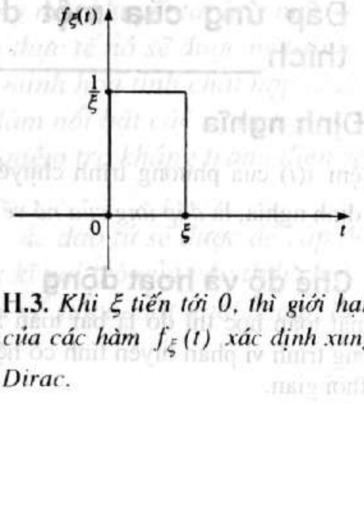
Ta hãy tỏ rõ là hàm bậc thang cho phép ta biểu diễn thuận tiện các hàm liên tục theo từng đoạn.

3.3. Xung Dirac

Cho một họ các hàm số xác định bởi *(H.3)*

$$f_\xi(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\xi} & \textit{nếu}\quad t \in [0, \xi] \\ 0 & \textit{nếu}\quad t \notin [0, \xi]. \end{cases}$$

Dù ξ thế nào, ta vẫn có $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(t)dt = 1$. Nếu ξ tiến tới 0, thì giới hạn của các hàm số f_ξ (không còn là một hàm số nữa) sẽ xác định *xung Dirac* $\delta(t)$.



H.3. *Khi ξ tiến tới 0, thì giới hạn của các hàm $f_\xi(t)$ xác định xung Dirac.*

Theo cách trực giác hơn, ta xét một xung chọn độ dài ξ và biên độ $\frac{1}{\xi}$:

xung Dirac $\delta(t)$ là tín hiệu thu được khi ta cho ξ tiến tới 0.

Xung Dirac dùng trong vật lí để biểu diễn một tác động thực hiện trong một thời gian cực kì ngắn.

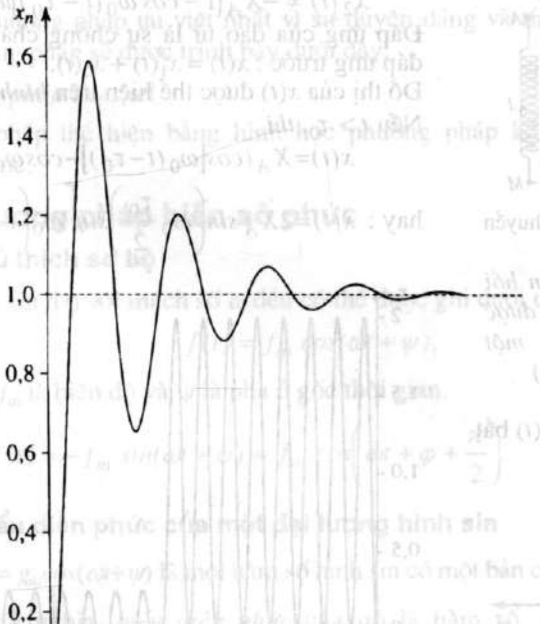
Đáp ứng tương ứng, gọi là *đáp ứng xung*, rất có lợi về mặt lí thuyết. *Theo định nghĩa, thì một xung Dirac là thuần nhất với một tần số.*

Áp dụng 1

Đáp ứng của một dao tử cho một nấc dịch chuyển

Ta xét dao tử cơ học của hình 1, thực hiện với một sự tắt dần yếu ($\alpha < \omega_0$ hay $Q > \frac{1}{2}$). Dao tử ở trạng thái nghỉ và ở cân bằng tại gốc của hệ quy chiếu ; ta áp dụng cho nó nấc dịch chuyển $x_A(t) = X_A u(t)$.

Hãy xác định đáp ứng chỉ báo của nó về li độ $x(t)$.



H.4. *Đáp ứng chỉ báo về li độ của dao tử với $Q = 3$, $t_n = \omega_0 t$ và $x_n = \frac{x}{X_A}$.*

Phương trình của dao tử đã được thiết lập ở §1 :

$$\ddot{x}(t) + 2\alpha\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 x_A(t).$$

Biệt số rút gọn $\Delta' = \alpha^2 - \omega_0^2 < 0$ của phương trình đặc trưng của nó $r^2 + 2\alpha r + \omega_0^2 = 0$, có giá trị âm. Ta đặt $\omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$.

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là :

$$x(t) = e^{-\alpha t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t),$$

trong đó A và B đều là các hằng số phải được xác định từ các điều kiện ban đầu

Muốn $t \geq 0$, số hạng thứ hai của phương trình vi phân là hằng số và bằng X_A :

$$\ddot{x}(t) + 2\alpha\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 X_A$$

Ta phải tìm một nghiệm riêng x_1 không đổi đối với phương trình đầy đủ. Ta suy ngay ra $x_1 = X_A$; do đó, đáp ứng của dao tử là :

$$x(t) = e^{-\alpha t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) + X_A$$

Vận tốc của nó có biểu thức :

$$v(t) = e^{-\alpha t}.[-\alpha(A\cos\omega t + B\sin\omega t) + \omega(-A\sin\omega t + B\cos\omega t)]$$

ở thời điểm ban đầu, chất điểm M ở gốc với vận tốc không, vì vậy ta có :

$$0 = A + X_A \text{ và } 0 = -\alpha A + \omega B.$$

Do đó : $A = -X_A$ và $B = -\frac{\alpha X_A}{\omega}$.

Cuối cùng :

$$x(t) = -X_A\left[1 - e^{-\alpha t}\left(\cos\omega t + \frac{\alpha}{\omega}\sin\omega t\right)\right]u(t)$$

Đồ thị trên *hình 4* là đồ thị của đáp ứng chỉ báo $x(t)$ của dao tử.

4 Tính cộng được của các đáp ứng

Tính tuyến tính của phương trình chuyển động của một dao tử điều hòa kéo theo tính cộng được của các đáp ứng của nó.

Tính chất này được biết dưới tên gọi là *nguyên lí chồng chất*.

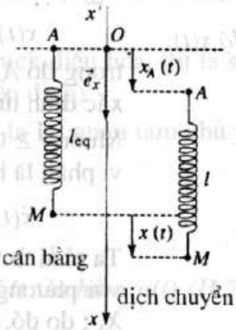
Nếu $x_i(t)$ là đáp ứng của dao tử đối với kích thích $x_{A_i}(t)$, thì lúc đó ta có $x(t)=\sum_i x_i(t)$ là đáp ứng của nó đối với kích thích $x_A(t)=\sum_i x_{A_i}(t)$.

Ví dụ, điều đó sẽ xảy ra khi dao tử chịu tác dụng của một kích thích tuần hoàn có thể phân tích được thành *chuỗi Fourier* : đáp ứng của nó là sự chồng chất của tập hợp các đáp ứng điều hòa.

Áp dụng 2

Đáp ứng của một dao tử đối với một xung chọn dịch chuyển.

Một khối lượng m được treo ở đầu mút dưới M của một lò xo độ cứng k và chiều dài không tải l_0 (H.5). Khối lượng ở cân bằng và ở trạng thái nghỉ. Ở thời điểm $t = 0$, người ta buộc đầu mút trên A của lò xo chịu một dịch chuyển không đổi : X_A trong thời gian τ_0 rồi đưa A về vị trí ban đầu của nó. Hãy xác định đáp ứng về li độ $x(t)$ của hệ.



H.5. *Dao tử đàn hồi thẳng đứng, được kích thích bởi một dịch chuyển $x_A(t)$*

Sự kích thích bằng xung chọn $x_A(t)$ là sự chồng chất của một nấc dịch chuyển thứ nhất $X_A u(t)$ bắt đầu ở thời điểm $t = 0$ và một nấc dịch chuyển thứ hai $-X_A u(t-\tau_0)$ bắt đầu ở thời điểm $t = \tau_0$ (*H.6*). Khi bỏ qua các lực ma sát, thì các đáp ứng với hai nấc là :

$$x_1(t)=X_A\left[1-\cos\omega_0 t\right]u(t),$$
$$x_2(t)=-X_A\left[1-\cos\omega_0(t-\tau_0)\right]u(t-\tau_0).$$

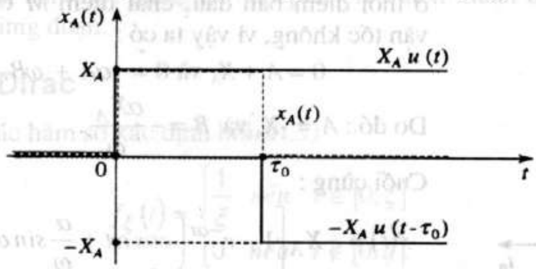
Đáp ứng của dao tử là sự chồng chất của hai đáp ứng trước : $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$.

Đồ thị của $x(t)$ được thể hiện trên *hình 7*.

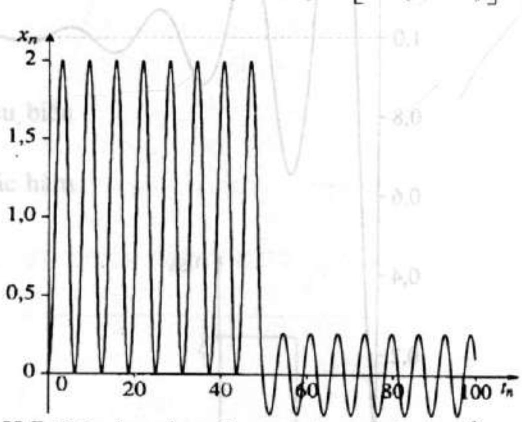
Nếu $t > \tau_0$, thì :

$$x(t)=X_A(\cos[\omega_0(t-\tau_0)]-\cos\omega_0 t),$$

hay : $x(t)=2X_A\sin\left(\omega_0\dfrac{\tau_0}{2}\right)\sin\left[\omega_0\left(t-\dfrac{\tau_0}{2}\right)\right].$



H.6. *Một xung chọn dịch chuyển có thể được phân tích như là sự chồng chất của hai nấc dịch chuyển.*



H.7. *Đáp ứng cho một xung chọn dịch chuyển :* $t_n=\omega_0 t$, $\tau_n=\omega_0\tau$ và $x_n=\dfrac{x}{X_A}$

Từ đây về sau, chúng ta giới hạn ở đáp ứng của hệ chịu một kích thích hình sin.

5 Đáp ứng cưỡng bức đối với một kích thích hình sin

Với giả thiết của một lực kích thích hình sin, thì phương trình chuyển động của dao tử có dạng :

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 X_A \cos(\omega t + \psi).$$

Đáp ứng tự do $x_0(t)$ của dao tử đã được nghiên cứu ở *chương 4*. **Ta hãy quan tâm tới chế độ cưỡng bức tương ứng với nghiệm riêng của phương trình vi phân có vế phải.**

Vế này có dạng hình sin, nên nghiệm riêng như ta sẽ thấy dưới đây, cũng là một hàm sin có cùng xung động ω như nhau :

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \Phi_x),$$

trừ trường hợp : $\alpha = 0$ và $\omega = \omega_0$.

Giả sử điều kiện sau được thực hiện, ta xác định biên độ x_m và **pha Φ_x ở** điểm gốc thời gian.

Ta thấy có nhiều phương pháp hay với mức độ **rất khác nhau.**

- *Phương pháp đại số.*

Ta nghiên cứu chi tiết vế thứ nhất của phương trình vi phân với biểu thức trên đây của $x(t)$, rồi ta đồng nhất các thừa số của $\cos(\omega t)$ và $\sin(\omega t)$ ở hai vế.

Phương pháp này dài, buồn tẻ, nên nhất thiết phải loại trừ.

- *Phương pháp biến số phức*

Đây là phương pháp ưu việt nhất vì sự duyên dáng và tính hiệu quả của nó. Phương pháp sẽ được trình bày dưới đây.

- *Phương pháp Fresnel*

Phương pháp thể hiện bằng hình học phương pháp kể trên trong mặt phẳng phức.

5.I. Phương pháp biến số phức

5.I.1. Chú thích sơ bộ

Mọi hàm sin $f(t)$ với mạch số ω đều có thể được ghi dưới dạng :

$$f(t) = f_m \cos(\omega t + \psi),$$

trong đó f_m là biên độ và ψ là pha ở gốc thời gian.

Ví dụ : $f(t) = -f_m \sin(\omega t + \varphi) = f_m \cos\left(\omega t + \varphi + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

5.I.2. Biểu diễn phức của một đại lượng hình sin

Cho $g(t) = g_m \cos(\omega t + \psi)$ là một hàm số hình sin có một bản chất vật lí nào đó.

Theo định nghĩa, *biểu diễn phức* của nó là hàm số $\underline{g}(t) = \underline{G}e^{j\omega t}$, với $\underline{G} = g_m e^{j\psi}$ ($\underline{G}$: biên độ phức và $j^2 = -1$).

Đối với $g(t) = g_m\cos(\omega t + \psi)$, ta có thể kết hợp được một biên độ phức $\underline{G} = g_m e^{j\psi}$, và ngược lại.

Nhớ rằng $g_m = |\underline{G}|$ và $\psi = \arg\underline{G}$, cũng như kí hiệu thường dùng :

$$\underline{g}(t) = \underline{G}e^{j\omega t}.$$

Sự trở về kí hiệu thực được thực hiện bằng cách lấy phần thực của đại lượng phức $g(t)$:

$$g(t) = \Re e\left[\underline{g}(t)\right] = \Re e\left[\underline{G}e^{j\omega t}\right]$$

Chú ý :

Mối quan hệ giữa một hàm số hình sin và biểu diễn phức của nó được bảo toàn trong tất cả mọi phép toán tuyến tính : phép cộng, phép nhân với một hằng, phép lấy đạo hàm. Ngược lại quan hệ đó không được bảo toàn trong một tích số.

5.I.3. Áp dụng cho các phương trình vi phân tuyến tính

Ta đi tìm một nghiệm riêng của phương trình vi phân của dao tử đang nghiên cứu :

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 X_A \cos(\omega t + \psi)$$

Viết theo kí hiệu phức, thì phương trình vi phân trên có dạng :

$$\ddot{\underline{x}} + 2\alpha\dot{\underline{x}} + \omega_0^2 \underline{x} = \omega_0^2 X_A e^{j(\omega t + \psi)}$$

Phần thực $x(t) = \Re e[\underline{x}(t)]$, của nghiệm $\underline{x}(t)$ của phương trình vi phân phức trên, là *nghiệm của phương trình vi phân thực của chuyển động.*

Hiệu quả của phương pháp biến số phức là do tính chất sau đây :

$$\underline{x}(t) = x_m e^{j(\omega t + \psi)}$$

từ đó : $\dot{\underline{x}}(t) = j\omega x_m e^{j(\omega t + \psi)} = j\omega \underline{x}(t)$ và $\ddot{\underline{x}}(t) = (j\omega)^2 \underline{x}(t) = -\omega^2 \underline{x}(t)$.

Có một sự tương đương giữa phép lấy đạo hàm theo thời gian của $\underline{x}(t)$ và phép nhân nó với $j\omega$.

Thành thử, phương trình vi phân phức cần giải, được quy về phương trình đại số bậc nhất về $\underline{x}(t)$:

$$-\omega^2 \underline{x}(t) + j2\alpha\omega \underline{x}(t) + \omega_0^2 \underline{x}(t) = \omega_0^2 x_{A_m} e^{j(\omega t + \psi)}.$$

Từ đó, ta suy ra : $\underline{x}(t) = \dfrac{\omega_0^2 x_{A_m} e^{j(\omega t + \psi)}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j2\alpha\omega} = \underline{X}^{j\omega t}$,

nếu ta loại trừ trường hợp $\omega = \omega_0$ và $\alpha = 0$ (xem *áp dụng 3*).

Nghiệm riêng phải tìm là phần thực của $\underline{x}(t)$, đó là :

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \Phi_x),$$

với : $$x_m = |\underline{X}| = \frac{\omega_0^2 x_{A_m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}$$

và $\Phi_x = \arg \underline{X} = \psi - \arg\left[(\omega_0^2 - \omega^2) + j2\alpha\omega\right]$

Ghi nhớ các kết quả hữu ích sau đây :

- Sự lệch pha của đáp ứng đối với sự kích thích là :

$$\varphi_x = \Phi_x - \psi = -\arg\left[(\omega_0^2 - \omega^2) + j2\alpha\omega\right]$$

nên $\tan\varphi_x = \dfrac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$, với $\cos\varphi_x$ có dấu như của $(\omega^2 - \omega_0^2)$;

- Biên độ phức $\underline{X}$ của đáp ứng có dạng :

$$\underline{X} = \frac{\omega_0^2 x_{A_m}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j2\alpha\omega} e^{j\psi}.$$

◂ **Để luyện tập : bài tập 1.**

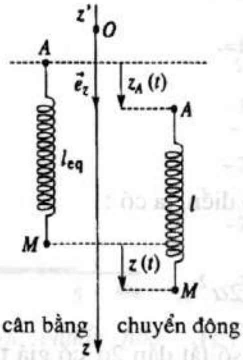
Áp dụng 3

Kích thích hình sin ở tần số cộng hưởng

Một khối lượng m được treo ở đầu một lò xo có độ cứng k và chiều dài không tải l_0. Đầu mút còn lại của lò xo ở tại điểm A (H.8). Hệ ở cân bằng và nằm yên. Người ta tác động lên điểm A lúc t = 0 một li độ thẳng đứng :

$$z_A(t) = z_{A_m} \sin \omega t,$$

$(\omega \neq \omega_0)$.



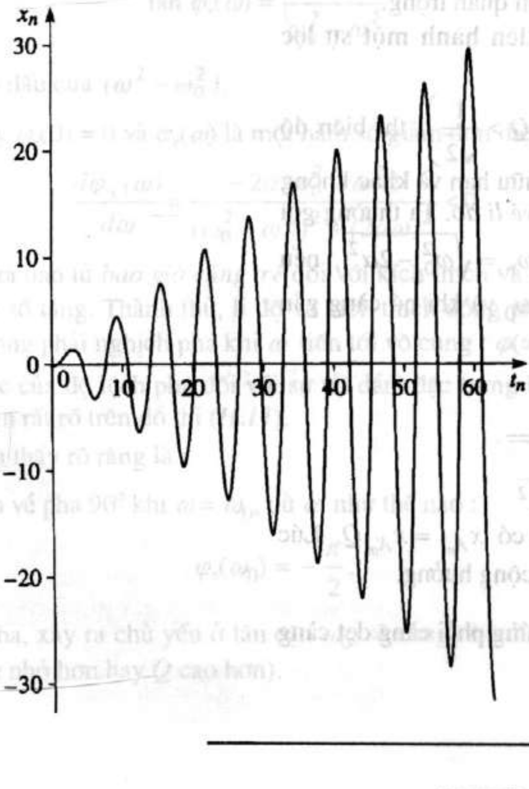
H.8. *Dao tử đàn hồi thẳng đứng.*

1) Thiết lập phương trình vi phân của chuyển động của khối lượng. Đặt $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

2) Từ đó rút ra phương trình chuyển động của khối lượng. Điều gì sẽ xảy ra khi ω tiến tới ω_0 ?

1) Theo hệ thức cơ bản của động lực học :

$$m\ddot{z} = -k(l - l_0) + mg.$$



Lúc cân bằng, ta có : $O = -k(l_{eq} - l_0) + mg$. Do đó :

$$m\ddot{z} = -k(l - l_{eq}).$$

Lưu ý rằng : $z + l_{eq} = l + z_A$, nên phương trình chuyển động có dạng :

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_{A_m} \sin \omega t.$$

2) Nếu dao tử không tắt dần, thì chế độ tự do không biến mất. Phương trình chuyển động sẽ là tổng của nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $z_0(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ và một nghiệm riêng của phương trình đầy đủ, mà ta có thể xác định bằng cách dùng phương pháp biến số phức :

$$z_1(t) = \frac{z_{A_m}\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t.$$

Các hằng số tích phân A và B được xác định bởi các điều kiện ban đầu $z(0) = 0$ và $\dot{z}(0) = 0$:

$$z(t) = \frac{z_{A_m}\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2}\left[\omega \sin(\omega_0 t) - \omega_0 \sin(\omega t)\right]$$

Nếu ω tiến về ω_0, thì vế phải sẽ có dạng bất định. Đặt $\omega = \omega_0 + \delta\omega$:

$$z(t) = \frac{z_{A_m}\omega_0}{(\omega_0 + \delta\omega)^2 - \omega_0^2}\left[(\omega_0 + \delta\omega)\sin(\omega_0 t) - \omega_0 \sin((\omega_0 + \delta\omega)t)\right],$$

$$z(t) = \frac{z_{A_m}\omega_0}{2\omega_0\delta\omega}\left[\omega_0 \sin(\omega_0 t) + \delta\omega \sin(\omega_0 t) - \omega_0 \sin(\omega_0 t) + \omega_0 \delta\omega t \cos(\omega_0 t)\right]$$

$$z(t) = \frac{z_{A_m}}{2}\left[\sin(\omega_0 t) - \omega_0 t \cos(\omega_0 t)\right].$$

<u>*Chú ý :*</u>

Cũng có khả năng lại tìm thấy kết quả này bằng phương pháp biến thiên hằng số, hay bằng cách tìm trực tiếp một nghiệm dưới dạng :

$\alpha t\cos(\omega_0 t + \varphi)$, hay quy tắc L'Hospital.

Biên độ các dao động tăng theo thời gian *(H.9)*. Ở ngoài một biên độ nào đó, chế độ của dao tử trở thành phi tuyến và sự tăng quan sát được về biên độ sẽ ngừng.

H.9. *Đáp ứng của một dao tử không tắt dần đối với một kích thích có tần số bằng tần số riêng của dao tử* ($t_n = \omega_0 t$, $z_n = \dfrac{z}{z_{A_m}}$).

5.2. Đáp ứng điều hòa về li độ

Ở chế độ điều hòa, nghĩa là ở chế độ cưỡng bức dưới tác dụng của một tín hiệu hình sin, thì đáp ứng của dao tử có một biên độ $x_m(\omega)$ và một sự lệch pha $\varphi_x(\omega)$ đối với kích thích, là các hàm số của mạch số của kích thích.
Ta sẽ nghiên cứu các hàm số $x_m(\omega)$ và $\varphi_x(\omega)$.

5.2.I. Biên độ $x_m(\omega)$ của đáp ứng về li độ

Ta nhớ lại biểu thức về biên độ $x_m(\omega)$ thu được ở § 5.1.3. :

$$x_m(\omega)=\frac{\omega_0^2 x_{A_m}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}}.$$

Đặt $D(\omega)=\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}$.

Do đó $x_m(\omega)=\dfrac{\omega_0^2 x_{A_m}}{D(\omega)}$ và, bằng một phép tính cổ điển, ta có :

$$\frac{dx_m(\omega)}{d\omega}=\frac{\omega_0^2 x_{A_m}}{D^3(\omega)}2\omega(\omega_0^2-\omega^2-2\alpha^2).$$

Biên độ $x_m(\omega)$ đi qua một cực trị khi $\omega = 0$, dù hệ số tắt dần 2α có giá trị như thế nào, và đi qua một cực trị khác khi :

$$\omega=\omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\alpha^2}\text{, nếu } \alpha<\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}=0{,}707\omega_0\ \left(Q>\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Các đồ thị của $x_m(\omega)$, là hàm số của tham số α, được vẽ trên *hình 10*. Nghiên cứu kĩ các đồ thị đó, ta suy ra được những nhận xét sau đây :

- Dù sự tắt dần mạnh yếu như thế nào, thì biên độ của đáp ứng của dao tử cũng tiến về cùng một *biên độ tĩnh* $x_m(0) = x_{Am}$ khi ω tiến về 0, và về cùng một biên độ không, khi ω tiến tới ∞.

Thành thử, đáp ứng về li độ của hệ bao giờ cũng suy giảm mạnh ở tần số cao, trong khi ở tần số thấp thì đáp ứng vẫn luôn luôn quan trọng.

Để có đáp ứng của mình về li độ, thì hệ phải tiến hành một sự lọc thông thấp hay thông dải :

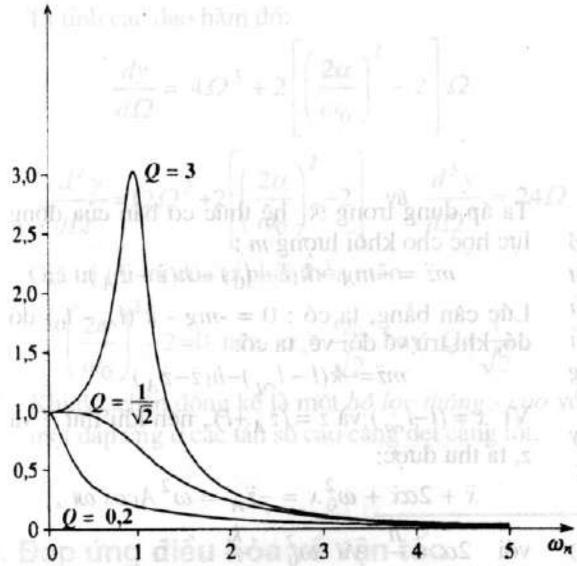
- Khi sự tắt dần đủ yếu $\left(\alpha<\dfrac{\omega_0}{\sqrt{2}}=0{,}707\omega_0\ \textit{hay}\ Q>\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, thì biên độ của đáp ứng đi qua một cực đại ứng với một giá trị hữu hạn và khác không của ω : khi đó ta nói rằng dao tử đang *cộng hưởng về li độ*. Ta thường gọi là *cái cộng hưởng*. Chú ý rằng *tần số cộng hưởng* $\omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\alpha^2}$, nếu như nó tồn tại, bao giờ cũng nhỏ hơn tần số riêng ω_0 và khi nó càng gần ω_0 thì sự tắt dần lại càng yếu.

Biên độ của li độ cộng hưởng có giá trị :

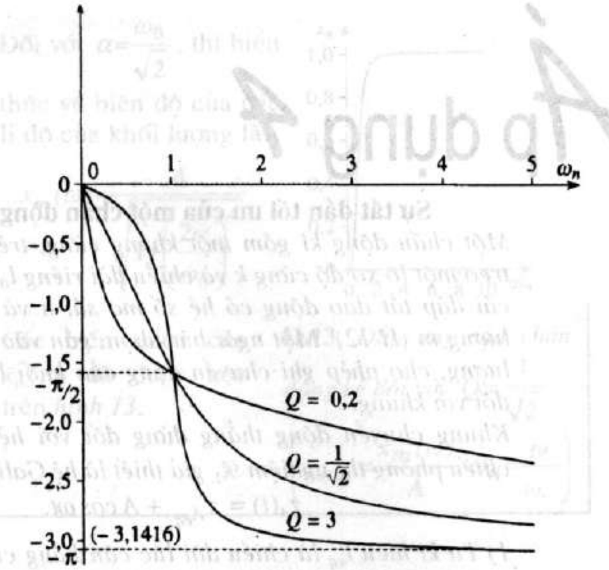
$$x_{m_r}=\frac{\omega_0^2 x_{A_m}}{2\alpha\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}}=\frac{Qx_{A_m}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}}.$$

Đối với các sự tắt dần yếu ($Q >> 1$), thì thực tế ta có $x_{A_m} = x_{A_m}Q$. Lúc đó, biên độ này có thể trở nên rất lớn và phá vỡ cái cộng hưởng.

- Chính vì $\alpha<\dfrac{\omega_0}{\sqrt{2}}\left(Q=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ mà biên độ của đáp ứng phải càng dẹt càng tốt ở tần số thấp.



H.10. *Sự biến thiên của biên độ được chuẩn hóa* $x_{n_m} = \frac{x_m}{x_{A_m}}$ *của đáp ứng về li độ theo hàm số của* $\omega_n = \frac{\omega}{\omega_0}$ *là mạch số được chuẩn hóa của kích thích đối với các sự tắt dần khác nhau.*



H.11. *Sự biến thiên của độ lệch pha* $\varphi_x(\omega_n)$ *của đáp ứng về li độ đối với sự kích thích* ($\omega_n = \frac{\omega}{\omega_0}$ *là mạch số được chuẩn hóa), đối với các sự tắt dần khác nhau.*

5.2.2. Sự lệch pha của đáp ứng về li độ

Ta lại xét biểu thức về sự lệch pha $\varphi_x(\omega)$ của li độ đối với kích thích, như đã được thiết lập ở §5.1.3. :

$$\tan \varphi_x(\omega) = \frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

với $\cos\varphi_x$ có dấu của $(\omega^2 - \omega_0^2)$.

Ta nhận thấy $\varphi_x(0) = 0$ và $\varphi_x(\omega)$ là một hàm số giảm đơn điệu của ω :

$$\frac{d\varphi_x(\omega)}{d\omega} = \frac{-2\alpha(\omega_0^2 + \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2} < 0.$$

Li độ $x(t)$ của dao tử *bao giờ cũng trễ* đối với kích thích và sự trễ đó càng tăng khi tần số tăng. Thành thử, li độ và kích thích đồng pha đối với $\omega = 0$, và cuối cùng phải nghịch pha khi ω tiến tới vô cùng : $\varphi(\infty) = -\pi$.

Sự phụ thuộc của độ lệch pha đối với sự tắt dần, đặc trưng bởi α (hay Q), được thể hiện rất rõ trên đồ thị (*H.11*).

Thành thử ta thấy rõ ràng là :

- li độ chậm về pha 90^0 khi $\omega = \omega_0$, dù α như thế nào :

$$\varphi_x(\omega_0) = -\frac{\pi}{2};$$

- sự quay pha, xảy ra chủ yếu ở lân cận ω_0, sẽ càng nhanh nếu sự tắt dần càng yếu (α nhỏ hơn hay Q cao hơn).

Áp dụng 4

Sự tắt dần tối ưu của một chấn động kí

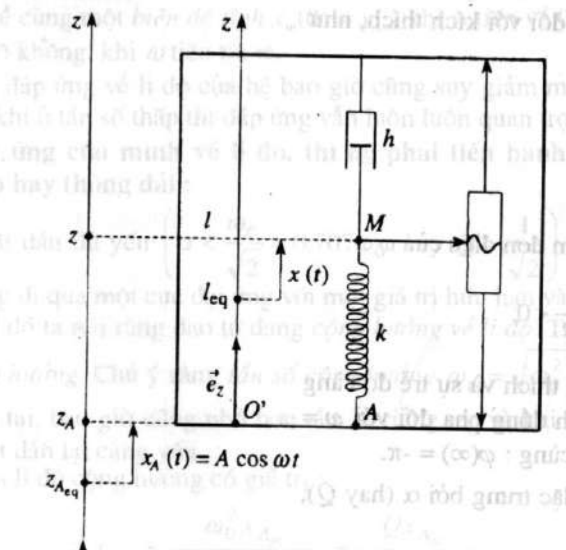
Một chấn động kí gồm một khung cứng, trên đó treo một lò xo độ cứng k và chiều dài riêng l_0, một cái dập tắt dao động có hệ số ma sát h và khối lượng m (H.12). Một ngòi bút nhọn, gắn vào khối lượng, cho phép ghi chuyển động của khối lượng đối với khung.

Khung chuyển động thẳng đứng đối với hệ quy chiếu phòng thí nghiệm $\mathcal{R}_L$ giả thiết là hệ Galilée :

$$z_A(t) = z_{A_{eq}} + A\cos\omega t.$$

1) Ta kí hiệu l_{eq} là chiều dài lúc cân bằng của lò xo và $x = l - l_{eq}$ là li độ của khối lượng. Xác định phương trình vi phân theo x của chuyển động của khối lượng đối với khung.

2) Các dao động của khung là các dao động ở tần số cao, vậy ta phải chọn sự làm tắt dao động của khối lượng như thế nào để biểu đồ ghi của x(t) mô phỏng đúng nhất ở chế độ ổn định, chuyển động $z_A(t)$ của khung đối với hệ quy chiếu phòng thí nghiệm ?



H.12. *Nguyên lí của một chấn động kí.*

1) Ta kí hiệu l là chiều dài tức thời của lò xo và z là độ cao của điểm M trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm.

Ta áp dụng trong $\mathcal{R}_L$ hệ thức cơ bản của động lực học cho khối lượng m :

$$m\ddot{z} = -mg - k(l - l_0) - h(\dot{z} - \dot{z}_A).$$

Lúc cân bằng, ta có : $0 = -mg - k(l_{eq} - l_0)$ do đó, khi trừ vế đối vế, ta có:

$$m\ddot{z} = -k(l - l_{eq}) - h(\dot{z} - \dot{z}_A)$$

Vì $x = (l - l_{eq})$ và $z = (z_A + l)$, nên khi thử ℓ và z, ta thu được:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = -\ddot{z}_A = \omega^2 A\cos\omega t,$$

với $2\alpha = \dfrac{h}{m}$ và $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$.

2) Muốn cho biểu đồ ghi thật chính xác, thì $x(t)$ và $z_A(t)$ phải có cùng các tần số và các biên độ như nhau, hay ít ra cũng phải có các biên độ tỉ lệ với nhau. Ở chế độ ổn định, tần số của $x(t)$ cũng là tần số của $z_A(t)$.

Ta hãy xét kĩ vấn đề biên độ. Cần phải tránh mọi hiệu ứng lọc trong vùng tần số được sử dụng, nghĩa là trong chừng mực có thể làm sao cho biên độ của đáp ứng $x(t)$ không phụ thuộc tần số của kích thích $z_A(t)$.

Ta hãy biểu thị rõ ràng biên độ của $x(t)$:

$$x_m = \frac{A\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2}}$$

và đặt : $\Omega = \left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)$

thì ta được:

$$x_m = \frac{A}{\sqrt{(\Omega^2 - 1)^2 + \left(\dfrac{2\alpha}{\omega_0}\right)^2 \Omega^2}}$$

Đặt $y(\Omega) = (\Omega^2 - 1)^2 + \left(\dfrac{2\alpha}{\omega_0}\right)^2 \Omega^2$

$$= \Omega^4 + \left[\left(\frac{2\alpha}{\omega_0}\right)^2 - 2\right]\Omega^2 + 1$$

Vấn đề là xác định giá trị của hệ số ma sát α mà nó vẫn giữ trong biểu thức đó một giá trị càng gần càng tốt với giá trị nó có ở tần số cao $y(0) = 1$.

Muốn vậy, tất cả các đạo hàm tới cấp ba phải triệt tiêu ở $\Omega = 0$.

Ta tính các đạo hàm đó:

$$\frac{dy}{d\Omega} = 4\Omega^3 + 2\left[\left(\frac{2\alpha}{\omega_0}\right)^2 - 2\right]\Omega.$$

$$\frac{d^2y}{d\Omega^2} = 12\Omega^2 + 2\left[\left(\frac{2\alpha}{\omega_0}\right)^2 - 2\right] \text{ và } \frac{d^3y}{d\Omega^3} = 24\Omega$$

Giá trị tối ưu của α phải thỏa mãn

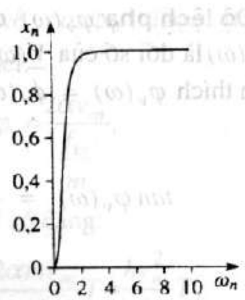
$$\left(\frac{2\alpha}{\omega_0}\right)^2 - 2 = 0. \text{ nên } \alpha = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \text{ hay } Q = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Khi đó, chấn động kế là một *bộ lọc thông - cao* với một đáp ứng ở các tần số cao càng dẹt càng tốt.

Đối với $\alpha = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$, thì biểu thức về biên độ của các li độ của khối lượng là:

$$x_m(\omega) = \frac{A}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\alpha}{\omega_0}\right)^4}}$$

Các biến thiên của $x_m(\omega)$ đã được nêu trên *hình 13*.



H.13. *Đáp ứng của chấn động kế đối với* $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\left(x_{n_m} = \frac{x_m(\omega)}{A}; \omega_n = \frac{\omega}{\omega_0}\right)$

5.3. Đáp ứng điều hòa về vận tốc

5.3.1. Biểu thức của biên độ phức của vận tốc

Ta hãy quan tâm tới biên độ phức của vận tốc của dao tử. Ta dễ dàng tính biên độ đó nhờ biểu thức của $\underline{X}(\omega)$ thiết lập được ở §5.1.3. ;

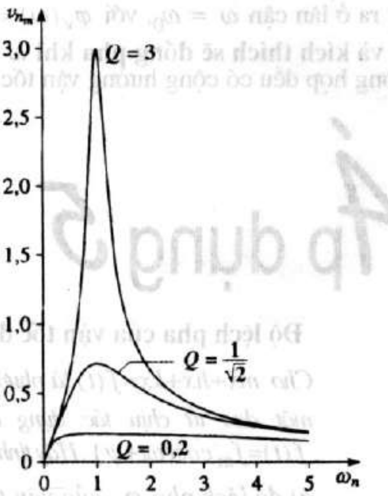
$$\underline{V}(\omega) = j\omega\underline{X}(\omega) = j\omega\frac{\omega_0^2 x_{A_m} e^{j\psi}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j2\alpha\omega} = \frac{\omega_0 x_{A_m} e^{j\psi}}{\frac{2\alpha}{\omega_0} + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

5.3.2. Biên độ $v_m(\omega)$ của đáp ứng về vận tốc

Ta biểu diễn rõ ràng biên độ $v_m(\omega)$ của vận tốc:

$$v_m(\omega) = \frac{\omega_0 x_{A_m}}{\sqrt{\left(\frac{2\alpha}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Các biến thiên của nó theo hàm số của ω, đối với những giá trị khác nhau của tham số α, được cho trước trên *hình 14*.



H.14. *Biến thiên của biên độ:* $v_{n_m} = \frac{v_m}{\omega_0 x_{A_m}}$ *của đáp ứng về vận tốc theo hàm số của mạch số được chuẩn hoá* $\omega_n = \frac{\omega}{\omega_0}$ *của kích thích đối với những sự tắt dần khác nhau.*

Ta nhận thấy, trên sơ đồ cũng như theo biểu thức đại số, rằng biên độ này tiến về không, khi xung động tiến về các giá trị cực trị của nó là zêro và vô cùng, dù giá trị của sự tắt dần như thế nào ?

Ngược lại, đối với các giá trị hữu hạn của xung động, thì biên độ này là đáng kể nếu không phải là rất quan trọng.

Hệ thực hiện một sự lọc thông - dải đối với đáp ứng của hệ về vận tốc.

Biên độ $v_m(\omega)$ là cực đại khi mẫu số cực tiểu, nghĩa là khi $\omega = \omega_0$, và điều đó xảy ra dù α thế nào. Ta có *cộng hưởng về vận tốc* dù giá trị tắt dần ra sao. Và cộng hưởng này bao giờ cũng xảy ra khi $\omega = \omega_0$. Lúc cộng hưởng, biên độ vận tốc có giá trị:

$$v_{m_r} = \frac{\omega_0^2 x_{A_m}}{2\alpha} = \omega_0 x_{A_m} Q, \quad 2\alpha = \frac{\omega_0}{Q}$$

Đối với các tắt dần yếu ($\alpha << \omega_0$ hay $Q >> 1$), thì giá trị v_{m_r} của v_m có thể sẽ rất cao.

Cộng hưởng vận tốc càng nhọn khi tắt dần càng yếu.

5.3.3. Độ lệch pha $\varphi_v(\omega)$ của đáp ứng về vận tốc

Gọi $\phi_v(\omega)$ là đối số của $\underline{V}(\omega)$. Biểu thức về độ lệch pha của vận tốc đối với kích thích $\varphi_v(\omega) = \phi_v(\omega) - \psi$, được xác định bởi:

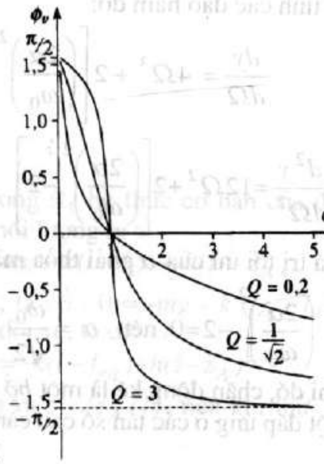
$$\tan\varphi_v(\omega) = -\left[\frac{\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}}{\dfrac{2\alpha}{\omega_0}}\right], \text{ với } \cos\varphi_v > 0.$$

Từ biểu thức $\underline{V}(\omega) = j\omega\underline{X}(\omega)$ ta chứng minh rằng $\varphi_v(\omega) = \varphi_x(\omega) + \dfrac{\pi}{2}$.

Kết quả là đồ thị $\varphi_v(\omega)$ được suy ra từ đồ thị $\varphi_x(\omega)$, độ lệch pha của $x(t)$ đối với kích thích được suy ra bằng một sự tịnh tiến $+\dfrac{\pi}{2}$ dọc theo trục các độ lệch pha (*H.15*).

Thành thử, ta nhận thấy *vận tốc sớm về pha* đối với kích thích khi $\omega < \omega_0$ và trễ pha khi $\omega > \omega_0$.

Cũng giống như trường hợp đối với $\varphi_x(\omega)$, thực chất của phép quay pha xảy ra ở lân cận $\omega = \omega_0$, với $\varphi_v(\omega) = 0$ dù sự tắt dần như thế nào : **Vận tốc và kích thích sẽ đồng pha khi $\omega = \omega_0$.** Điều này giải thích trong mọi trường hợp đều có cộng hưởng vận tốc ở mạch số này.



H.15. *Sự biến thiên của* $\varphi_0(\omega_1)$ *theo hàm số của mạch số chuẩn hóa* $\omega_n = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ *đối với các tắt dần khác nhau.*

Áp dụng 5

Độ lệch pha của vận tốc đối với lực kích thích

Cho $m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = f(t)$ *là phương trình chuyển động của một dao tử chịu tác dụng của một lực kích thích* $f(t) = f_m\cos(\omega t + \psi)$ *. Hãy tính trong chế độ cưỡng bức:*

a) độ lệch pha φ_v *của vận tốc* $v(t)$ *đối với lực;*

b) công W *do lực kích thích cung cấp cho dao tử trong mỗi chu kì* T.

a) Đặt $2\alpha = \dfrac{h}{m}$ và $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Theo kí hiệu phức, thì phương trình của dao tử có dạng:

$$\underline{X}\left[(\omega_0^2 - \omega^2) + j2\alpha\omega\right] = \frac{\underline{F}}{m},$$

trong đó $\underline{X}$ là biên độ phức của li độ $x(t)$.

Biên độ phức của vận tốc là $\underline{V} = j\omega\underline{X}$, từ đó rút ra biểu thức:

$$\underline{V} = \frac{\dfrac{j\omega\underline{F}}{m}}{(\omega_0^2 - \omega) + j2\alpha\omega} = \frac{\dfrac{\underline{F}}{m}}{2\alpha + j\left(\omega - \dfrac{\omega_0^2}{\omega}\right)}.$$

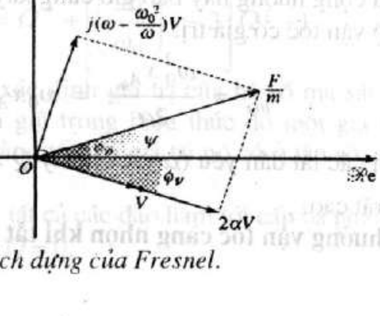
Trong mặt phẳng phức (*H.16*), xuất phát từ ảnh của $\underline{V}$, ta xây dựng ảnh của $2\alpha\underline{V}$, rồi ảnh của $j\left(\omega - \dfrac{\omega_0^2}{\omega}\right)\underline{V}$.

Ảnh của tổng thể trùng với ảnh của $\dfrac{\underline{F}}{m}$. Lúc đó, ta thấy rõ là độ lệch pha:

$$\varphi_v = (\phi_v - \psi)$$

của $v(t)$ đối với $f(t)$ có thể được xác định bởi:

$$\sin\varphi_v = \frac{\left(\dfrac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right)V_m}{\dfrac{f_m}{m}}$$



H.16. *Cách dựng của Fresnel.*

b) Ta hãy thể hiện rõ ràng biểu thức về công nguyên tố δW của lực kích thích:

$$\delta W = fvdt = f_m cos(\omega t+\psi) v_m cos(\omega t+\phi_v)dt.$$

$$= \frac{f_m v_m}{2}\left[cos(\psi - \phi_v) + cos(2\omega t+\psi+\phi_v)\right]dt.$$

Khi lấy tích phân trong một chu kì $T=\frac{2\pi}{\omega}$, ta được

$$W = \frac{f_m v_m}{2} T cos\varphi_v,$$

vì rằng tích phân thứ hai bằng không.

Khi dùng biểu thức về $cos\,\varphi_v$, được rút ra từ cách dựng của Fresnel:

$$cos\varphi_v = \frac{2\alpha v_m}{\frac{f_m}{m}},$$

biểu thức về công W có dạng:

$$W = \frac{f_m v_m}{2}\frac{2\alpha m v_m}{f_m}T = \frac{h v_m^2}{2}T,$$

Đó cũng là biểu thức về công của các lực ma sát W_r trong một chu kì.

▸ **Để tập luyện: bài tập 2.**

6 Các sự tương tự điện - cơ

6.I. Nêu bật vấn đề

Ta nói rằng hai hệ vật lí tương tự nhau khi chúng thực hiện hai biểu diễn vật lí của cùng một hệ các phương trình vi phân.

Theo bản chất của các hệ đã nghiên cứu, thì người ta thường nói về các sự tương tự điện-cơ, điện-âm thanh, điện-nhiệt, v.v... Trong phần tiếp sau, ta sẽ chỉ nghiên cứu các tính tương tự điện-cơ vì tầm quan trọng thực tế của chúng: các sự mô phỏng, các máy tương tự, v.v...

Bây giờ ta so sánh phương trình chuyển động của dao tử cơ học mô tả ở §1:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + kx = kx_A(t)$$

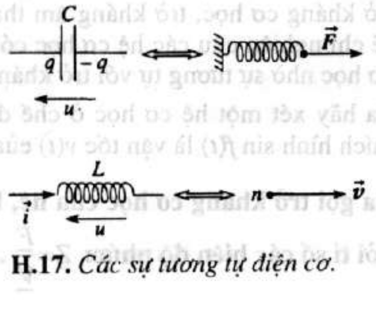
với phương trình vi phân của một mạch điện (R, L, C) mắc nối tiếp giống như nó đã được thiết lập trong bài tập 1:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = e(t).$$

Ta chú ý rằng li độ x giữ cùng một vai trò như điện tích q, và vận tốc $v = \frac{dx}{dt}$ cũng giữ một vai trò giống hệt như vai trò của cường độ dòng điện $i = \frac{dq}{dt}$, và lực $kx_A(t)$ thì tương đương với suất điện động $e(t)$.

Ngoài ra, khối lượng m tương tự như độ tự cảm L, hệ số tắt dần h tương tự điện trở R, và độ cứng k thì kết hợp với nghịch đảo của điện dung $\frac{1}{C}$.

Liên quan đến khối lượng m và độ tự cảm L, ta có thể nói thêm rằng hệ thức cơ bản của động lực học $f = m\frac{dv}{dt}$ kết hợp với hệ thức liên kết điện áp và dòng điện ở các đầu ra của cuộn cảm $u=L\frac{di}{dt}$ và động năng $\mathscr{E}_K = \frac{m}{2}v^2$ thì tương tự với năng lượng điện từ $\mathscr{E}_m = \frac{L}{2}i^2$.



H.17. *Các sự tương tự điện cơ.*

Bây giờ, để cập đến độ cứng k của lò xo và nghịch đảo của điện dung $\frac{1}{C}$, ta có thể so biểu thức của lực đàn hồi $f = kx$ với biểu thức của hiệu điện thế $u = \frac{1}{C}q$ ở các đầu ra của tụ điện.

Cũng như thế, các biểu thức về thế năng của lò xo $\mathscr{E}_p = \frac{k}{2}x^2$ và năng lượng tĩnh điện của tụ điện $\mathscr{E}_e = \frac{1}{2C}q^2$ đều tương tự nhau về hình thức.

Cuối cùng, cái giảm chấn và điện trở là hai phần tử tiêu tán năng lượng. Hệ thức cho lực thực hiện bởi cái giảm chấn $f = hv$ thì tương tự như định luật *Ohm* $u = Ri$ đối với điện trở. Vấn đề cũng như vậy đối với các biểu thức về công suất tiêu tán thành nhiệt bởi cái giảm chấn $\mathscr{P} = hv^2$ và bởi điện trở $\mathscr{P} = Ri^2$. Dù có rất nhiều tương tự, nhưng tất cả đều là hình thức và không hề tương ứng với bất kì sự đồng dạng vật lí xác thực nào.

Việc quan tâm đến các tính tương tự đó trở thành hiển nhiên ngay từ khi ta phải nghiên cứu hành vi của các hệ phức tạp gồm các bộ phận cơ, điện, âm, v.v... Khi sử dụng các tính tương tự đó, ta sẽ có thể biểu diễn toàn hệ bằng một mạng lưới điện có cách hoạt động tương đương, thuận tiện hơn để nghiên cứu và với các tham số dễ hiệu chỉnh hơn. Ta thấy dễ thay đổi giá trị của điện dung hơn là giá trị độ cứng của một lò xo và cũng dễ đo cường độ của một dòng điện hơn là đo vận tốc của một bộ phận cơ học, v.v...

6.2. Bảng tổng hợp

Cơ học		Điện học	
li độ	x	điện tích	q
vận tốc	v	cường độ dòng điện	i
lực	f	hiệu điện thế	u
khối lượng	m	độ tự cảm	L
hệ số ma sát	h	điện trở	R
độ cứng	k	nghịch đảo của điện dung	$\frac{1}{C}$

H.18. *Bảng các tương tự điện-cơ.*

6.3. Trở kháng cơ học

Để khai thác một cách thuận tiện các tương tự điện-cơ, người ta đã tổng quát hoá khái niệm trở kháng điện. Như vậy, người ta đã định nghĩa được trở kháng cơ học, trở kháng âm thanh, nhiệt, thuỷ lực, v.v... Dưới đây, ta sẽ chỉ nghiên cứu các hệ cơ học có một bậc tự do và định nghĩa trở kháng cơ học nhờ sự tương tự với trở kháng điện.

Ta hãy xét một hệ cơ học ở chế độ cưỡng bức mà đáp ứng với lực kích thích hình sin $f(t)$ là vận tốc $v(t)$ của một trong các phần tử của hệ.

Ta gọi trở kháng cơ học của hệ, là một đại lượng phức được xác định bởi tỉ số các biên độ phức: $\underline{Z} = \frac{\underline{F}}{\underline{V}}$. Z được biểu thị bằng N.m^{-1}.s.

Ta hãy tính trở kháng cơ học của dao tử nghiên cứu ở §1, khi coi rằng nó chịu tác dụng của một lực kích thích. $f(t) = kx_{A_m}\cos(\omega t+\psi)$. Muốn thế chỉ trở lại với phương trình viết dưới dạng phức.

Đặt $F=kx_{A_m}$, ta có:

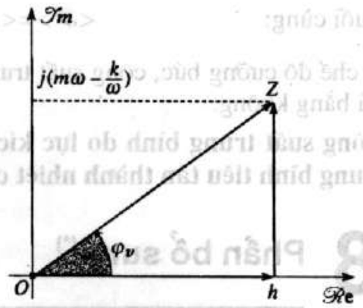
$$(-m\omega^2 + jh\omega + k)\underline{X} = \underline{F}, \text{ do đó: } j\omega\underline{X}\left(j\omega m + h + \frac{k}{j\omega}\right) = \underline{F}.$$

Vì $\underline{V}=j\omega\underline{X}$, nên ta được:

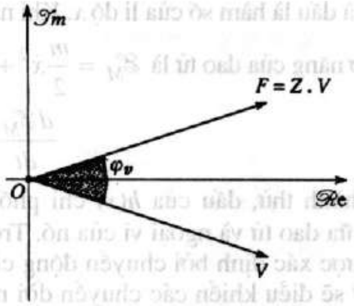
$$\underline{Z} = \frac{\underline{F}}{\underline{V}} = jm\omega + h + \frac{k}{j\omega}.$$

Hình 19 minh họa khái niệm về trở kháng cơ học.

Sẽ là hữu ích khi lưu ý rằng đối số của $\underline{Z}$ là độ lệch pha của kích thích $f(t)$ đối với $v(t)$, tức là $-\varphi_v$, và $\cos\varphi_v = \frac{h}{z}$, trong đó z là môđun của $\underline{Z}$.



H.19a. *Cách dựng trở kháng cơ học $\underline{Z}$ của Fresnel*



H.19b. *Biết Z, thì ảnh của $\underline{F}$ được suy ra từ ảnh của $\underline{V}$.*

7 Nghiên cứu năng lượng

Khi nhân phương trình chuyển động của dao tử thiết lập ở §1, $m\ddot{x}+h\dot{x}+kx=kx_A$, với v, thì ta được :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}v^2+\frac{k}{2}x^2\right)=-hv^2+kx_Av.$$

Vế thứ nhất là đạo hàm thời gian của cơ năng:

$$\mathscr{E}_M = \frac{m}{2}v^2 + \frac{k}{2}x^2.$$

Vế thứ hai là tổng của công suất $\mathscr{P}_d=-hv^2$ tiêu tán bởi các lực ma sát và công suất $\mathscr{P}_f = fv$ được cung cấp bởi lực kích thích $f=kx_{A_m}\cos(\omega t+\psi)$.

Ta kí hiệu $\mathscr{P}$ là *công suất tức thời* mà dao tử trao đổi với ngoại vi của nó:

$$\mathscr{P}=\mathscr{P}_d+\mathscr{P}_f=-hv^2+fv.$$

Công suất tức thời này khác không. Ta hãy xác định giá trị trung bình của nó:

$$<\mathscr{P}> = <\mathscr{P}_d> + <\mathscr{P}_f>.$$

Trước tiên, ta tính $<\mathscr{P}_d> = -\frac{1}{T}\int_0^T hv_m^2\cos^2(\omega t+\phi_v) = \frac{hv_m^2}{2}$, rồi đặt $f_m=kx_{A_m}$, ta tính:

$$<\mathscr{P}_f> = \frac{1}{T}\int_0^T fv\,dt = \frac{f_m v_m}{T}\int_0^T \cos(\omega t+\psi)\cos(\omega t+\phi_v)\,dt.$$

$$= \frac{f_m v_m}{2T}\left[\int_0^T \cos(2\omega t + \psi + \phi_v)\,dt + \int_0^T \cos(\phi_v - \psi)\,dt\right]$$

Tích phân đầu bằng không, nên ta có: $<\mathscr{P}_f> = -\frac{f_m v_m}{2}\cos\varphi_v$, trong đó $\varphi_v=(\phi_v-\psi)$ là độ lệch pha của vận tốc đối với kích thích.

Nhưng $f_m=Zv_m$ và $\cos\varphi_v=\frac{h}{Z}$, vậy: $<\mathscr{P}_f> = \frac{hv_m^2}{2}$.

Cuối cùng: $<\mathscr{P}>=<\mathscr{P}_d>+<\mathscr{P}_f>=0$.

Ở chế độ cưỡng bức, công suất trung bình mà dao tử trao đổi với ngoại vi thì bằng không.

Công suất trung bình do lực kích thích cung cấp thì bằng công suất trung bình tiêu tán thành nhiệt của dao tử.

8 Phần bổ sung(*)

(*) *Mặc dù việc nghiên cứu phần này không được rõ ràng trong chương trình, nhưng ta vẫn nghiên cứu các dao tử khác (tuyến tính hay không) mà chuyển động bị cưỡng bức hay được duy trì (một trong các dao tử đó đã được học ở các năm cuối cấp): các phương pháp nghiên cứu đều cổ điển vì các tình huống này đều là khởi thuỷ của nhiều bài tập hay bài toán trong các kì thi tuyển.*

8.I. Dao tử phi tuyến tự duy trì

8.I.I. Nguyên lí

Ta hãy xét một dao tử có phương trình $m\ddot{x}+h(x)\dot{x}+kx=0$, với hệ số $h(x)$ mà dấu là hàm số của li độ x. Khi nhân phương trình vi phân với $\dot{x}$ và kí hiệu cơ năng của dao tử là $\mathscr{E}_M=\frac{m}{2}\dot{x}^2+\frac{k}{2}x^2$, thì ta được cân bằng công suất :

$$\frac{d\mathscr{E}_M}{dt}=-h(x)\dot{x}^2$$

Thành thử, dấu của $h(x)$ chi phối chiều của các sự trao đổi năng lượng giữa dao tử và ngoại vi của nó. Trong trường hợp của chúng ta, thì dấu này được xác định bởi chuyển động của dao tử, đến nỗi rút cuộc là, chính dao tử sẽ điều khiển các chuyển dời năng lượng riêng của nó. Và ta có thể sử dụng tính chất này để thực hiện các dao tử tự duy trì.

Ví dụ, giả sử ta thực hiện được một hệ sao cho:

$$h(x)\le 0 \text{ nếu } |x|\le x_0 \text{ và } h(x)\ge 0 \text{ nếu } |x|\ge x_0\ (x_0>0).$$

Đối với các li độ yếu, thì $\frac{d\mathscr{E}_M}{dt}$ dương và ta quan sát thấy có sự khuếch đại các dao động, trong khi đối với các li độ lớn, thì $\frac{d\mathscr{E}_M}{dt}$ âm và ta nhận thấy có sự tắt dần của chuyển động. Do đó, dao tử tiến về một *chế độ giới hạn điều hoà và ổn định*. Ta nói là chế độ *tự duy trì*.

Sự có mặt của hệ số $h(x)$ trong phương trình vi phân làm cho nó trở thành phi tuyến. Và chính nhờ tính phi tuyến này, mà thực hiện được sự duy trì dao tử. Sự thiếu vế phải trong phương trình vi phân của chuyển động không cho ta được phép coi dao tử bị cô lập. Sự thực hiện của $h(x)$ đòi hỏi phải ghép nối dao tử với ngoại vi của nó và các sự truyền năng lượng cần thiết để duy trì nó.

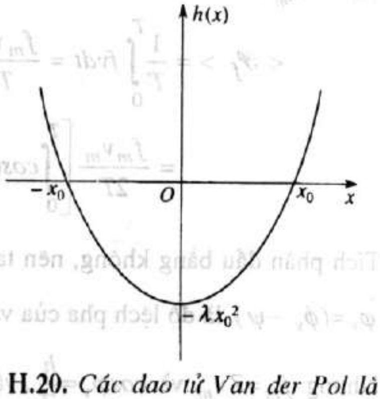
8.I.2. Dao tử VAN DER POL

Để nghiên cứu lí thuyết dao tử này, thì rất nhiều dao tử có thể được coi như các dao tử VAN DER POL, nghĩa là các dao tử có hệ số $h(x)$ parabolic ($H.20$).

Phương trình của một dao tử VAN DER POL có dạng:

$$m\ddot{x}+\lambda(x^2-x_0^2)\dot{x}+kx=0,$$

trong đó λ và x_0 là các hằng số dương.



H.20. *Các dao tử Van der Pol là các dao tử có hệ số h(x) parabolic.*

Khi $|x| < x_0$, thì dao tử ở trong một pha khuếch đại và khi $|x| > x_0$, thì dao tử ở trong pha tắt dần. Trong chế độ ổn định, thì có sự bù trừ giữa hai pha đó, nghĩa là cơ năng của dao tử là không đổi lấy trung bình trong mỗi chu kì. Nhân phương trình vi phân trước với $\dot{x}\,dt$ và lấy tích phân trong một chu kì, ta có:

$$\int_0^T d\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2\right) + \int_0^T d\left(\frac{k}{2}x^2\right) = -\lambda\int_0^T (x^2 - x_0^2)\,\dot{x}\,dt.$$

Ở chế độ ổn định, $x(T) = x(0)$ và $\dot{x}(T) = \dot{x}(0)$, nên vế thứ nhất bằng không. Vế thứ hai cũng như vậy.

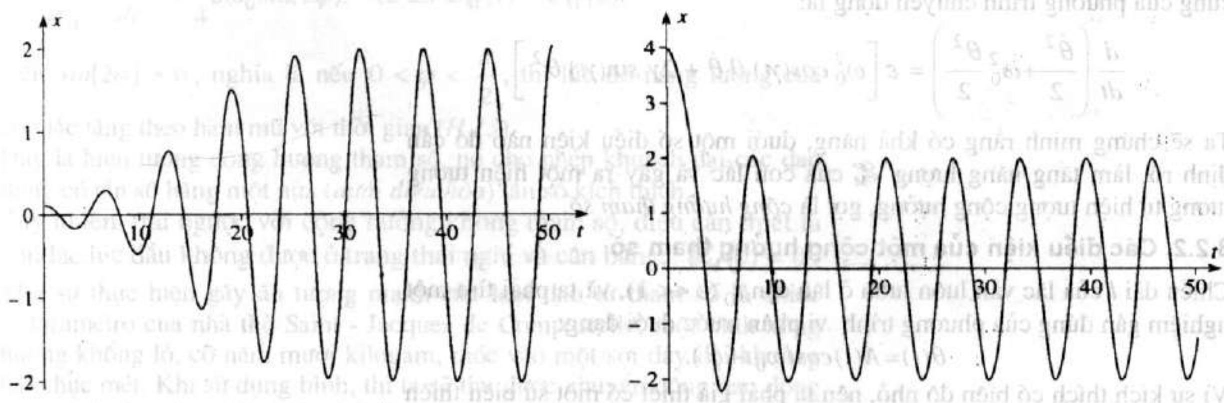
Ta hãy giả thiết có một chuyển động tựa hình sin $x(t) = x_m\cos(\omega t)$ và ta cần đánh giá biên độ x_m của các dao động. Biên độ này phải sao cho tích phân của vế thứ hai phải triệt tiêu:

$$\int_0^T (x^2 - x_0^2)\,\dot{x}^2 dt = x_m^2\omega^2\int_0^T\left[x_m^2\cos^2(\omega t) - x_0^2\right]\sin^2(\omega t)\,dt$$

$$= x_m^2\omega^2\left[\frac{x_m^2}{4}\int_0^T \sin^2(2\omega t)\,dt - x_0^2\int_0^T \sin^2(\omega t)\,dt\right]$$

$$= x_m^2\omega^2\left(\frac{x_m^2}{8}T - \frac{x_0^2}{2}T\right) = 0.$$

Do đó: $$x_m = 2x_0.$$



H.21. *Ảnh hưởng của các điều kiện ban đầu lên các độ biến thiên của $x(t)$ đối với một dao tử Van der Pol:*

a. $x(o) < x_0$ *và* $v(0) = 0.$ *b.* $x(0) > x_0$ *và* $v(0) = 0.$

Hình 21 (phép giải bằng số phương trình vi phân) cho ta các độ biến thiên của $x(t)$ đối với hai tập hợp các điều kiện ban đầu khác nhau. Ta thấy rõ biên độ x_m của các dao động tiến về $2x_0$.

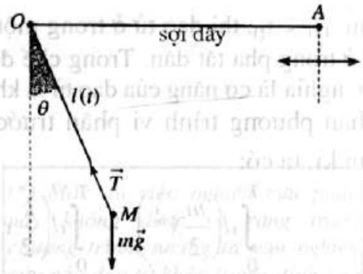
8.2. Cộng hưởng tham số

8.2.1. Mở đầu

Ta hãy xét một con lắc đơn (*H.22*) có chiều dài thay đổi $l(t)$, được thực hiện nhờ một sợi dây không dãn *MOA* trượt theo rãnh qua một vòng khuyên đặt tại *O* và đầu mút *A* của dây được kích động một chuyển động hình sin biên độ nhỏ:

$$l(t) = l_0\left[1 + \varepsilon\cos\gamma t\right]\ (\varepsilon << 1).$$

Như vậy ta tác động tuần hoàn lên một trong các đặc trưng của con lắc đã biết chiều dài của nó.



H.22. *Dao tử tham số. Chuyển động dao động của điểm A làm thay đổi tuần hoàn chiều dài l(t) của con lắc.*

Gọi $\vec{L}_0$ là mô men động của con lắc ở 0:

$$\vec{L}_0 = l\vec{e}_r \wedge m\left[\dot{l}\vec{e}_r + l\dot{\theta}\vec{e}_\theta\right] = ml^2\dot{\theta}\vec{e}_z\ ,$$

và $\mathcal{M}_0$ là mômen ở O của các lực tác dụng vào:

$$\vec{\mathcal{M}}_0 = l\vec{e}_r \wedge \left[m\vec{g} + \vec{T}\right] = -mgl\sin\theta\vec{e}_z\ .$$

Ta áp dụng vào O định lí mômen động:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_0\text{, do đó } m\left[2l\dot{l}\dot{\theta} + l^2\ddot{\theta}\right]\vec{e}_z = -mgl\sin\theta\vec{e}_z\ .$$

Nếu giới hạn trong các dao động biên độ nhỏ (lúc đó ta coi $\sin\theta$ như θ) và chiếu trên $\vec{e}_z$, ta có:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = -2\frac{\dot{l}}{l}\dot{\theta}\ .$$

Biểu thị rõ ràng l trong phương trình trên, ta có:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l_0\left[1+\varepsilon\cos\gamma t\right]}\theta = -2\frac{-l_0\varepsilon\gamma\sin\gamma t}{l_0\left[1+\varepsilon\cos\gamma t\right]}\dot{\theta}\ .$$

Đặt $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l_0}}$, và giới hạn ở các số hạng cấp hai, thì ta được :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = \varepsilon\left[\omega_0^2\cos(\gamma t)\,\theta + 2\gamma\sin(\gamma t)\,\dot{\theta}\right].$$

Từ đó, khi nhân với $\dot{\theta}$, là thừa số tích phân của vế thứ nhất, thì dạng cuối cùng của phương trình chuyển động là:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \omega_0^2\frac{\theta^2}{2}\right) = \varepsilon\left[\omega_0^2\cos(\gamma t)\,\theta\,\dot{\theta} + 2\gamma\sin(\gamma t)\,\dot{\theta}^2\right]$$

Ta sẽ chứng minh rằng có khả năng, dưới một số điều kiện nào đó cần định rõ, làm tăng năng lượng $\mathcal{E}_M$ của con lắc và gây ra một hiện tượng tương tự hiện tượng cộng hưởng, gọi là *cộng hưởng tham số*.

8.2.2. Các điều kiện của một cộng hưởng tham số

Chiều dài l của lắc vẫn luôn luôn ở lân cận l_0 ($\varepsilon << 1$), và ta phải tìm một nghiệm gần đúng của phương trình vi phân trước dưới dạng:

$$\theta(t) = A(t)\cos(\omega_0 t + \varphi)\ .$$

Vì sự kích thích có biên độ nhỏ, nên ta phải giả thiết có một sự biến thiên chậm của biên độ $A(t)$ của các dao động. Ta nêu rõ điểm này: Sự biến thiên của $A(t)$ trong một chu kì $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ là nhỏ so với giá trị của $A(t)$, và rõ ràng là $\left|\dot{A}\right|T << A$, từ đó $\left|\dot{A}\right| << \dfrac{\omega_0}{2\pi}A$.

Trong các điều kiện trên ta có:

$$\dot{\theta}(t) = \dot{A}(t)\cos(\omega_0 t+\varphi) - \omega_0 A(t)\sin(\omega_0 t+\varphi) \approx -\omega_0 A(t)\sin(\omega_0 t+\varphi)$$

và $\dot{\theta}^2 + \omega_0^2\theta \approx \omega_0^2 A^2$.

Lúc đó, phương trình chuyển động có dạng:

$$\frac{\omega_0^2}{2}\frac{d(A^2)}{dt} = \varepsilon\omega_0^2 A^2\left[-\omega_0\cos(\gamma t)\cos(\omega_0 t+\varphi)\sin(\omega_0 t+\varphi)\right.$$

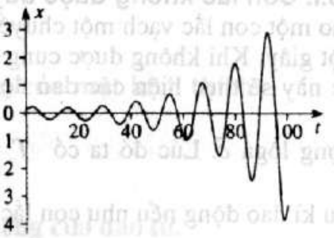
$$\left.+\,2\gamma\sin(\gamma t)\sin^2(\omega_0 t+\varphi)\right].$$

Chuyển động tựa hình sin, nên cơ năng $\mathscr{E}_M(t)$ của con lắc tỉ lệ với bình phương của biên độ các dao động A^2:

$$\frac{1}{\mathscr{E}_M}\frac{d\mathscr{E}_M}{dt} = \frac{1}{A^2}\frac{dA^2}{dt} = \varepsilon\Big[-\omega_0 \cos(\gamma t)\sin(2\omega_0 + 2\varphi)$$
$$+ 2\gamma \sin(\gamma t)\left[1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi)\right]\Big]$$

Ta biến đổi vế thứ hai:

$$f(t) = \frac{1}{\mathscr{E}_M}\frac{d\mathscr{E}_M}{dt} = \varepsilon\Bigg[2\gamma \sin(\gamma t) - \left(\frac{\omega_0}{2} + \gamma\right)\sin\left[(2\omega_0 + \gamma)t + 2\varphi\right].$$
$$- \left(\frac{\omega_0}{2} - \gamma\right)\sin\left[(2\omega_0 - \gamma)t + 2\varphi\right]\Bigg].$$



H.23. *Khi $\gamma = 2\omega_0$, thì dao tử bắt đầu cộng hưởng tham số. Đồ thị thu được với*

$$\varepsilon = 0{,}1 ; \omega_0 = 0{,}5 ; \gamma = 1$$

$$x(0) = 0{,}1 \text{ và } v(0) = 0{,}1 .$$

Muốn biết sự tiến triển *trung bình* của $\mathscr{E}_M(t)$, ta thay thế vế thứ hai bằng giá trị trung bình của nó.

■ **Trường hợp thứ nhất : $\gamma \neq 2\omega_0$.**

Giá trị trung bình của các số hạng hình sin của $f(t)$ bằng không:

$$\frac{d\mathscr{E}_M}{dt} = 0 \text{, do đó } \mathscr{E}_M(t) = \mathscr{E}_M(0).$$

Tính trung bình, thì cơ năng của con lắc là không đổi và không có một năng lượng nào được truyền cho con lắc bằng cách điều biến chiều dài của nó.

■ **Trường hợp thứ hai : $\gamma = 2\omega_0$.**

Bây giờ trong biểu thức của $f(t)$ có một số hạng không đổi và ta có:

$$\frac{1}{\mathscr{E}_M}\frac{d\mathscr{E}_M}{dt} = \frac{3}{4}\varepsilon\omega_0 \sin(2\varphi), \quad \text{từ đó } \mathscr{E}_M(t) = \mathscr{E}_M(0)e^{\frac{2}{3}\varepsilon\omega_0 \sin(2\varphi)\, t}$$

Nếu $\sin(2\varphi) > 0$, nghĩa là nếu $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$, thì lúc đó năng lượng của con lắc tăng theo hàm mũ với thời gian (*H.23*).

Đây là hiện tượng cộng hưởng tham số, nó cho phép khuếch đại các dao động có tần số bằng một nửa (*dưới điều hòa*) tần số kích thích.

Tuy nhiên, trái ngược với cộng hưởng không tham số, điều cần thiết là con lắc lúc đầu không được ở trạng thái nghỉ và cân bằng: $\mathscr{E}_M(0) \neq 0$.

Một sự thực hiện gây ấn tượng mạnh của loại dao tử tham số là chiếc Botafumeiro của nhà thờ Saint - Jacques de Compostelle; một bình xông hương khổng lồ, cỡ năm mươi kilogam, móc vào một sợi dây dài khoảng hai chục mét. Khi sử dụng bình, thì ta sẽ thu được chuyển động dao động bằng cách làm thay đổi chiều dài của nó nhờ một hệ thống các ròng rọc, ở tần số gấp đôi tần số của các dao động của bình.

Khi một em bé đánh đu, thì em bé đã khai thác loại cộng hưởng bằng trực giác. Bằng cách đứng dậy và ngồi xổm hai lần trong mỗi dao động của đu, thì em bé đã làm thay đổi, với một tần số gấp đôi tần số của đu, chiều dài $l(t)$ giữa trọng tâm của nó và trục quay.

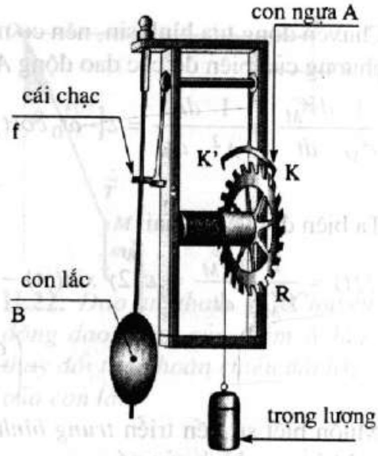
8.3. Hệ thống con thả (con ngựa đồng hồ) sự duy trì con lắc đồng hồ

Sự duy trì chuyển động của một con lắc đồng hồ (được coi như một con lắc đơn mà vị trí được xác định bởi góc θ) được đảm bảo bằng một "con thả", nó truyền cho con lắc trong mỗi chu kì (hay nửa chu kì) năng lượng cần thiết để bù trừ năng lượng tiêu tán do ma sát. Con "thả" này giải phóng lò xo (hay mọi bộ tích năng lượng khác) bao giờ cũng theo cùng một góc θ_0 như nhau trong một chu kì vận động.

8.3.1. Con lắc không được duy trì bằng con ngựa

Cho một con lắc vạch một chuyển động tuần hoàn với chu kì T, ví dụ bằng một giây. Khi không được cung cấp năng lượng bên ngoài, thì thực tế con lắc này sẽ thực hiện các dao động hình sin tắt dần với chu kì T và giảm lượng lôga δ. Lúc đó ta có $T = T_0 + \left(1 - \dfrac{\delta^2}{2\pi^2}\right)$, trong đó T_0 biểu diễn chu kì dao động nếu như con lắc không có ma sát.

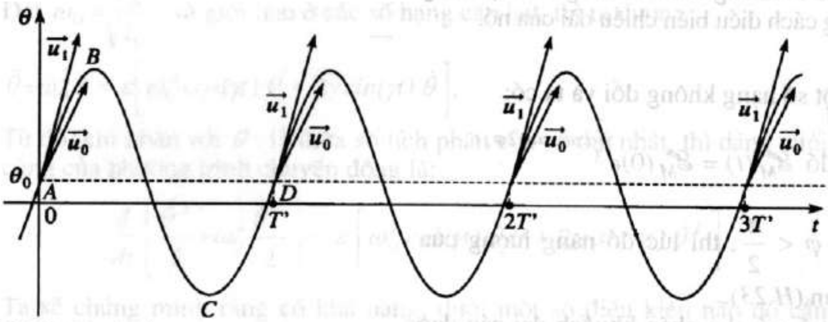
Thành thử, nếu $\delta = 0{,}05$; $T = T_0$ hơn kém $\dfrac{1}{31.600}$, nghĩa là sai nhau $\dfrac{86.400}{31.600} \approx 2{,}7s$ mỗi ngày đồng hồ vận hành so với con lắc lí tưởng không ma sát. Như vậy là rất nhỏ. Nhưng vì con lắc này không được duy trì nên cuối cùng nó dừng lại. Vậy cần phải duy trì con lắc !



H.24. *Nguyên lí của dao tử có con "thả". Trọng lượng có khuynh hướng làm quay bánh xe R và theo sau là các khớp răng điều khiển các kim chỉ. Con ngựa A của thiết bị thả chỉ cho phép quay bằng những "bước nhảy" liên tiếp bằng nhau, chặn từng răng của R lúc ở K, lúc ở K' bởi các dao động mà con lắc B của đồng hồ truyền cho nó nhờ cái chạc f. Cứ mỗi lần nhả, thì một răng được giải phóng sẽ truyền cho con ngựa một xung nhẹ mà chạc f truyền cho.*

8.3.2. Con lắc được duy trì bằng con ngựa *(H24)*

Ta hãy nghiên cứu ảnh hưởng của θ_0 lên sự vận hành của đồng hồ. Ta xét kỹ *hình 24*: con lắc vạch một dao động $ABCD$ tắt dần với chu kì T và giảm lượng lôga δ; một cách tuần hoàn (với chu kì T'), nó nhận được một xung truyền cho nó một bước nhảy vận tốc $u_1 - u_0$, mỗi khi nó đi qua $\theta = \theta_0$.



H.25. *Hệ thống có con ngựa.*

Chu kì vận động của con lắc như vậy sẽ bằng T' chứ không phải bằng T; nếu $T' > T$, đồng hồ chạy chậm, nếu không đồng hồ chạy nhanh.

Ta hãy nghiên cứu khoảng cách $T' - T$ theo hàm số của θ_0. Biết rằng $\theta = \theta_0$ lúc $t = 0$, và sau một giả - chu kì T, thì $\theta_1 = \theta_0 e^{\delta}$; từ đó:

$$\theta_0 - \theta_1 = \theta_0(1 - e^{\delta}) = \theta_0 \delta .$$

Góc này được chạy qua với vận tốc u_0 ở gần giá trị $\dfrac{2\pi a}{T}$, với a là biên độ của dao động $\theta = a\sin\left(1 - \dfrac{2\pi t}{T}\right)$.

Khoảng cách $\tau = T' - T$ lúc đó bằng: $\tau = T\dfrac{\theta_0}{a}\dfrac{\delta}{2\pi}$. Thành thử, với $\delta = 0{,}05$ và $\dfrac{\theta_0}{a} \approx \dfrac{1}{20}$, ta tìm thấy $\dfrac{\tau}{T} = \dfrac{1}{2500}$, tương ứng với một sự chậm 34s mỗi ngày (trường hợp của *hình 25*, trong đó $\theta_0 > 0$), và điều này là tương đối quan trọng.

Như vậy mục đích là càng gần điều kiện $\theta_0 = 0$ càng tốt. Hơn nữa, lợi ích của việc có một con thả lúc đi qua vị trí cân bằng ($\tau = 0$) là để tránh các biến đổi do sự thay đổi của biên độ a của các dao động.

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ **Phương trình vi phân của một dao tử điều hoà chịu tác dụng của một kích thích có dạng:**

$$\ddot{x}+2\alpha\dot{x}+\omega_0^2 x = \omega_0^2 x_A(t),$$

trong đó $2\alpha = \dfrac{h}{m}$ **và** $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ **lần lượt là hệ số ma sát và xung động riêng của dao tử.**

Đáp ứng của nó về li độ $x(t) = x_0(t) + x_1(t)$ **là tổng của:**

- $x_0(t)$ **là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất;**
- $x_1(t)$ **là nghiệm riêng của phương trình vi phân với vế phải.**

Khi dao tử tắt dần, thì chế độ tự do của dao tử, được mô tả bởi $x_0(t)$**, sẽ biến mất theo thời gian. Tiếp theo, chỉ còn tồn tại chế độ cưỡng bức, được mô tả bởi** $x_1(t)$**. Ta gọi chế độ quá độ là chế độ được biểu diễn bởi** $x(t)$**, chừng nào mà** $x_0(t)$ **không thể bỏ qua so với** $x_1(t)$**.**

■ **Khi có nhiều kích thích tác động đồng thời lên một dao tử *tuyến tính*, thì đáp ứng của dao tử sẽ là tổng của các đáp ứng đối với từng kích thích xét riêng rẽ nhau.**

■ **Có một dao tử chịu tác dụng của kích thích** $x_A(t)$**:**

Dao tử này thực hiện một sự lọc thông - thấp nếu ta quan tâm tới đáp ứng "li độ $x(t)$**" ; và sẽ có cộng hưởng li độ nếu** $\alpha<\dfrac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ **hay** $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$**.**

Dao tử này thực hiện một sự lọc thông - dải, nếu ta quan tâm tới đáp ứng "vận tốc $\dot{x}(t)$**"; ta sẽ quan sát thấy một cộng hưởng vận tốc, trong mọi trường hợp khi** $\omega = \omega_0$**.**

■ **Trong trường hợp có sự lọc thông - dải, thì dải đi qua** Δf ***(hay*** $\Delta\omega$***)*** **ở 3 dB của dao tử là dải tần số (hay dải xung động) mà trong đó, biên độ của vận tốc thoả mãn bất đẳng thức** $V(\omega) \geq \dfrac{V_r}{\sqrt{2}}$**. (**$V_r$ **kí hiệu biên độ của vận tốc lúc cộng hưởng). Dải đi qua** $\Delta\omega$ **và thời gian hồi phục** $\tau\left(\tau = \dfrac{Q}{\omega_0}\right)$ **của năng lượng được liên kết với nhau theo hệ thức:**

$\Delta\omega.\tau = l\left(\dfrac{\Delta\omega}{\omega_0} = \dfrac{1}{Q}\right)$**, cộng hưởng xảy ra ở giữa dải đi qua.**

■ **Hoạt động của các dao tử cơ và điện làm xuất hiện các tương tự như sau:**

lực f	$\rightarrow$ **điện áp** u	**ly độ** x	$\rightarrow$ **điện tích** q
vận tốc v	$\rightarrow$ **cường độ dòng điện** i	**khối lượng** m	$\rightarrow$ **độ tự cảm** L
hệ số ma sát h	$\rightarrow$ **điện trở** R	**độ cứng** k	$\rightarrow$ **nghịch đảo của điện dung** $1/C$**.**

Trở kháng cơ học $Z = \dfrac{F}{V}$ **tương tự với trở kháng điện** $Z = \dfrac{U}{I}$**.**

■ **Một dao tử tự duy trì bao giờ cũng là một dao tử phi tuyến. Dao tử thuộc loại VAN DER POL, thì phương trình chuyển động của nó có dạng:**

$$m\ddot{x} + \lambda(x^2 - x_0^2)\dot{x} + kx = 0\,,$$

trong đó λ và x_0 **là các hằng số dương. Ở chế độ ổn định, biên độ các dao động trong trường hợp này thì bằng** $X = 2x_0$**.**

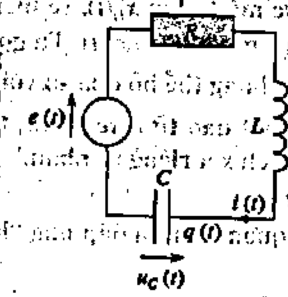
*B*ài tập

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

Ta nhắc lại hàm số bậc thang, là hàm $u(t)$ (*H.2*) được xác định bởi: $u(t) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } t < 0 \\ 1, & \text{nếu } t \geq 0 \end{cases}$

1 Đáp ứng cưỡng bức của một mạch (R,L,C) đối với một suất điện động hình sin

Xác định đáp ứng cưỡng bức $q(t)$ của một mạch (R,L,C) mắc nối tiếp chịu tác dụng của một suất điện động hình sin $e(t) = E\sin\omega t$.



• *Lời giải*

Phương trình của mạch điện là cổ điển và dễ dàng thiết lập xuất phát từ các hệ thức:

$$e(t) = L\frac{di}{dt} + Ri + u_C$$

với $i = \dfrac{dq}{dt}$ *và* $q = Cu_C$

từ đó:

$$\ddot{q} + 2\alpha\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{E}{L}\sin\omega t = \frac{E}{L}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

với $2\alpha = \dfrac{R}{L}$ *và* $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

Để xác định đáp ứng $q(t) = Q_0\cos(\omega t + \phi)$ *của mạch điện ở chế độ cưỡng bức, ta chuyển sang các biên độ phức:*

$$\underline{Q}_0\left[(\omega_0^2 - \omega^2) + j2\alpha\omega\right] = \frac{E}{L}e^{-j\frac{\pi}{2}} \text{ do đó } \underline{Q}_0 = \frac{\frac{E}{L}}{-2\alpha\omega + j(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Ta suy ra biên độ của đáp ứng:

$$\underline{Q}_0 = \frac{\frac{E}{L}}{\sqrt{4\alpha^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$$

và pha ϕ *ở gốc thời gian:* $\tan\phi = \left(\dfrac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\alpha\omega}\right)$; *với* $\cos\phi < 0$.

2 Dải truyền qua của đáp ứng về vận tốc

Hệ được nghiên cứu là dao tử cơ học trên hình 1 của bài giảng mà phương trình chuyển động có dạng:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_A(t).$$

Ta cho tác dụng lên hệ một kích thích hình sin $x_A(t) = x_{A_m}\cos(\omega t)$, và quan tâm đến đáp ứng về vận tốc của hệ. Ta gọi *dải truyền qua* (ở 3 dB) là dải tần $\Delta f = (f_2 - f_1)$ mà trong đó, biên độ vận tốc $V(\omega)$ thỏa mãn bất đẳng thức $V(\omega) \geq \dfrac{V_r}{\sqrt{2}}$ trong đó V_r là biên độ của vận tốc lúc cộng hưởng. Hãy tính Δf.

• *Lời giải*

Từ biểu thức của $\underline{V}(\omega)$ *thu được ở § 8.1 ta suy ra:*

$$v_m(\omega) = \frac{\omega\omega_0^2 x_{A_m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}$$

Mặt khác, biên độ của vận tốc lúc cộng hưởng đã được thiết lập ở § 8.2, là:

$$v_{m_r} = \frac{\omega_0^2 x_{A_m}}{2\alpha}.$$

Ở giới hạn của dải truyền qua, ta phải có:

$$\frac{v_m(\omega)}{v_{m_r}} = \frac{2\alpha\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

hoặc bình phương lên: $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = (2\alpha\omega)^2$

từ đó: $\omega_0^2 - \omega^2 = \pm 2\alpha\omega$ $\omega^2 \pm 2\alpha\omega - \omega_0^2 = 0$

Đó là một tập hợp của hai phương trình bậc hai về ω, *mà bốn nghiệm thực là:*

$$\omega = \pm\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}.$$

Nếu chỉ giữ lại các nghiệm dương:

$$\omega_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2} \quad \text{và} \quad \omega_2 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}.$$

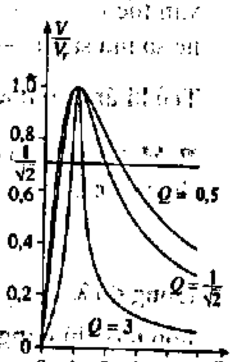
thì ta có: $\Delta\omega = (\omega_2 - \omega_1) = 2\alpha = \dfrac{1}{\tau} = \dfrac{\omega_0}{Q}$

Do đó $\Delta f = \dfrac{\Delta\omega}{2\pi}$

Ta ghi nhớ hệ thức rất tổng quát giữa dải truyền qua và thời gian phục hồi năng lượng:

$$\Delta\omega.\tau = 1.$$

Dải truyền qua của một dao tử càng hẹp nếu thời gian phục hồi năng lượng càng dài nghĩa là dao tử tắt dần càng kém.



3 Một định lí

Người ta cho trước một hệ được mô tả bởi một phương trình tuyến tính có hệ số không đổi.

Nếu $r(t)$ là đáp ứng của hệ đối với kích thích $e(t)$ thì lúc đó $\dot{r}(t)$ là đáp ứng của hệ đối với kích thích $\dot{e}(t)$. Chứng minh định lí này.

• *Lời giải*

Chỉ cần trở lại định nghĩa của đạo hàm là đủ.

Ta cũng có thể kiểm nghiệm rằng đạo hàm của đáp ứng cho một nấc vị trí là đáp ứng cho một nấc vận tốc.

4 Các đáp ứng của một dao tử điều hòa tắt dần

Ta hãy xét một dao tử điều hòa tắt dần yếu có phương trình $\ddot{x}+2\alpha\dot{x}+\omega_0^2 x=\dfrac{f(t)}{m}$ ở cân bằng và nằm yên ở gốc O của hệ quy chiếu. Lúc $t = 0$, ta áp dụng cho dao tử một cấp lực $f(t) = F.u(t)$. Hãy xác định đáp ứng của nó về li độ $x(t)$ và đáp ứng của nó về vận tốc $\dot{x}(t)$.

• *Lời giải*

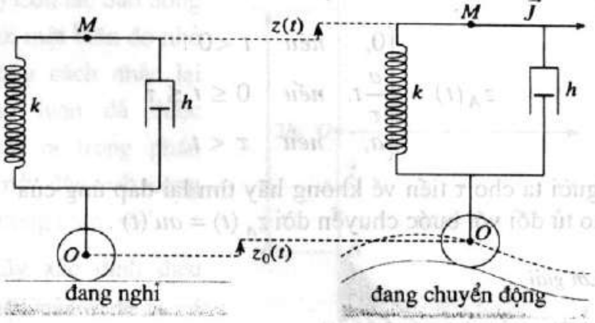
Ta đặt $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$ *đối với* $t \geq 0$ *thì ta có:*

$$x(t)=\frac{F}{m\omega_0^2}\left[1-e^{-\alpha t}\left(\cos\omega t+\frac{\alpha}{\omega}\sin\omega t\right)\right]$$

và $$\dot{x}(t)=\frac{Fe^{-\alpha t}}{m\omega}\sin\omega t.$$

5 Dao động cưỡng bức của một ô tô chạy trên một con đường nhấp nhô

Một xe ô tô được mô hình hóa rút gọn thành một khối lượng m đặt tại M và nằm yên trên một bánh xe có tâm O, qua trung gian của một lò xo độ cứng k, được ghép song song với một cái giảm chấn hệ số ma sát h. Trong mọi tình huống, trục OM vẫn thẳng đứng, hãy xem xét động thái của ô tô, khi xe chạy với vận tốc v trên con đường mà mặt cắt nghiêng cho thấy tâm O của bánh xe có một li độ $z_0(t) = a\cos\left(2\pi\dfrac{x}{\lambda}\right)$ đối với vị trí cân bằng của nó. Người ta xác định tọa độ của chuyển động của khối lượng bằng li độ $z(t)$ của nó đối với vị trí cân bằng của nó khi ô tô nằm yên. Ta nhớ lại rằng một cái giảm chấn đặt giữa O và M sẽ tác dụng lên M một lực ma sát nhớt tỉ lệ với vận tốc tương đối của M đối với A: $f_r = -h(\dot{z}_M-\dot{z}_0)$.



1. Thiết lập phương trình vi phân theo $z(t)$ của chuyển động của khối lượng, khi ô tô chạy với vận tốc không đổi v.

2. Xác định biên độ của chuyển động dao động thẳng đứng của ô tô trong chế độ ổn định.

Xe phải chạy với vận tốc thích hợp nào để biên độ này nhỏ nhất có thể được ?

• *Lời giải*

1. $m\ddot{z}+h\dot{z}+kz=ka\cos(\omega t)-ha\omega\sin(\omega t)$ *nếu đặt* $\omega=\dfrac{2\pi v}{\lambda}$

2. Ở chế độ cưỡng bức, chuyển động của xe có một biên độ:

$$z_m(\omega)=a\sqrt{\frac{k^2+(h\omega)^2}{(k-m\omega^2)^2+(h\omega)^2}}$$

Vẽ đồ thị $z_m(\omega)$ *và chú ý rằng* $z_m(0) = a$, $z_m(\infty) = 0$ *và tồn tại một mạch số cộng hưởng* ω_r. *Muốn cho* $\omega > \omega_r$ *là xung động cộng hưởng thì xe phải chạy nhanh.*

VẬN DỤNG VỐN KIẾN THỨC

6 *Các đáp ứng của một dao tử ở những kiểu dịch chuyển khác nhau

Một khối lượng m được treo ở đầu mút M của một lò xo thẳng đứng có độ cứng k và chiều dài không tải l_0. Đầu mút kia đặt tại A. Hệ thống ở cân bằng và nằm yên sau đó, người ta khiến đầu mút A phải có dịch chuyển thẳng đứng $z_A(t)$ xuất phát từ vị trí cân bằng của nó. Ta bỏ qua mọi lực ma sát.

1. Vị trí của M được xác định bởi li độ $z(t)$ của nó kể từ vị trí cân bằng. Thiết lập phương trình vi phân của chuyển động của nó bằng cách đặt $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

2. Nghiên cứu đáp ứng về li độ $z(t)$ của dao tử trong các trường hợp sau:

a) bước chuyển dời : $z_A(t) = au(t)$ với $a > 0$

b) đoạn đường dốc chuyển dời: $z_A(t)=\dfrac{a}{\tau}tu(t)$, với $t > 0$

c)
$$z_A(t)=\begin{cases}0, & \text{nếu} \quad t<0\\ \dfrac{a}{\tau}t. & \text{nếu} \quad 0\le t\le\tau\\ a, & \text{nếu} \quad \tau<t\end{cases}$$

Người ta cho τ tiến về không hãy tìm lại đáp ứng của dao tử đối với bước chuyển dời $z_A(t)=au(t)$.

• *Lời giải*

1) $\ddot{z}(t)+\omega_0^2 z(t)=\omega_0^2 zA(t)$

2) a) $z(t)=a\left[1-cos(\omega_0 t)\right]$

b) $z(t)=\dfrac{a}{\omega_0\tau}(\omega_0 t-sin\omega_0 t)$

c) Muốn $0\le t\le\tau$ *thì* $z(t)=\dfrac{a}{\omega_0\tau}\left[\omega_0 t-sin(\omega_0 t)\right]$

Muốn $t>\tau$, *thì ta áp dụng định lí chồng chất (xem §4).*

Biết rằng $au(t-\tau)=\dfrac{a}{\tau}tu(t)-\dfrac{a}{\tau}(t-\tau)u(t-\tau)$ *nên, muốn* $t>\tau$, *thì.*

$$z(t)=\frac{a}{\omega_0\tau}\left[\omega_0 t-sin(\omega_0 t)\right]-\frac{a}{\omega_0\tau}\left[\omega_0(t-\tau)-sin\,\omega_0(t-\tau)\right],$$

nghĩa là: $z(t)=a\left[1+\dfrac{sin(\omega_0(t-\tau))-sin(\omega_0 t)}{\omega_0\tau}\right]$

Khi τ tiến tới 0, thì biểu thức của z (t) đối với $0\le t\le\tau$ *được tăng lên* $\dfrac{a\omega_0\tau}{2}$ *và z (t) tiến tới 0. Ngược lại biểu thức của z (t) với* $\tau<t$ *được biểu diễn dưới dạng vô định* $a\left[1+\dfrac{0}{0}\right]$. *Người ta khử dạng vô định bằng cách tiến hành một sự khai triển hữu hạn ở lân cận* $\tau=0$:

$$sin(\omega_0(t-\tau))=sin(\omega_0 t)-\omega_0\tau\,cos(\omega_0 t).$$

nhờ đó ta được: $z(t)=a\left[1-cos(\omega_0 t)\right]$

7 *Các đáp ứng của một dao tử đối với các loại lực khác nhau

Một dao tử gồm một lò xo độ cứng k mà một đầu mút được cố định tại O, còn đầu mút kia được gắn với một khối lượng m trượt không ma sát trên một trục nằm ngang. Ở thời điểm ban đầu, khối lượng ở cân bằng và nằm yên, người ta tác dụng vào nó một lực $f(t)$.

1. Người ta xác định vị trí của khối lượng bằng li độ $x(t)$ của nó. Hãy thiết lập phương trình vi phân của chuyển động của nó bằng cách đặt.

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

2. Hãy biểu thị rõ ràng đáp ứng về li độ của dao tử trong các trường hợp sau:

a) $f(t)=Fu(t)$ (cấp lực)

b) $f(t)=F[u(t)-u(t-\tau)]$ (xung chọn của lực);

c) $f(t)=A\,tu(t)$ (độ dốc của lực). Tìm thứ nguyên của A?

d) $f(t)=I\,\delta(t)$ (xung). Tìm thứ nguyên của I?

• *Lời giải*

1) $\ddot{x}+\omega_0^2x=\dfrac{1}{m}f(t)$. *Dao tử không tắt dần, chế độ tự do không biến mất.*

2. a) $x(t)=\dfrac{F}{k}\left[1-cos\,\omega_0 t\right]$

b) $x(t)=\dfrac{2F}{k}sin\left(\omega_0\dfrac{\tau}{2}\right)sin\left[\omega_0\left(t-\dfrac{\tau}{2}\right)\right]$

c) A biểu thị bằng $N.s^{-1}$. $x(t)=\dfrac{A}{k\omega_0}\left[\omega_0 t-sin(\omega_0 t)\right]$

d) I biểu thị bằng N.s đây là một xung. Ta hãy xét một xung chọn độ rộng π và đặt $F=\dfrac{I}{\tau}$ *trong đáp ứng của dao tử đối với một xung chọn của lực. Cho τ tiến tới 0, ta được:*

$$x(t)=\frac{I}{m\omega_0}sin(\omega_0 t)$$

8 *Xác định năng lượng của dải truyền qua của một dao tử

Cho $m\ddot{x}(t)+h\dot{x}(t)+kx(t)=f_m\,cos(\omega t)$ là phương trình của một dao tử tắt dần chịu tác dụng của một lực hình sin.

1) Chứng minh rằng công suất trung bình do lực kích thích cung cấp là:

$$<\mathscr{P}_f>=\frac{f_m^2}{2h}cos^2\varphi_v$$

Trong đó φ_v là độ lệch pha của vận tốc đối với lực.

2) Ta gọi dải truyền qua Δf (hay $\Delta\omega$) của dao tử, là dải tần số (hay mạch số) mà ở trong dải đó $\dfrac{<\mathscr{P}_f>}{<\mathscr{P}_f>_{max}}\ge\dfrac{1}{2}$. Hãy tính Δf (hay $\Delta\omega$).

• *Lời giải*

1) Ở chế độ cưỡng bức hình sin giá trị cực đại của v có thể được biểu diễn theo hàm số của f_m *và* φ_v *qua* $v_m=\dfrac{f_m}{h}cos\varphi_v$

Công suất tức thời là:

$$\mathcal{P}_f = f_m v_m \cos\omega t . \cos(\omega t + \varphi_v) = \frac{1}{2} f_m v_m \left[\cos(2\omega t + \varphi_v) + \cos\varphi_v\right].$$

Giá trị trung bình của $\cos(2\omega t + \varphi_v)$ *bằng không, do đó:*

$$<\mathcal{P}_f> = \frac{1}{2} f_m v_m \cos\varphi_v = \frac{1}{2}\frac{f_m}{h}\cos^2\varphi_v$$

2) $\Delta\omega = \frac{h}{m} = 2\alpha = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{Q}$ *với* τ *và* Q *lần lượt là thời gian hồi phục năng lượng và hệ số phẩm chất của dao tử.*

9 **Kích thích hình sin trong thời gian có hạn

Một dao tử điều hòa không tắt dần chịu tác dụng của một kích thích $f(t)$ xác định bởi:

$$f(t) = \begin{cases} f_m \sin\omega_0 t, & \text{nếu } 0 \le t \le T = \frac{2\pi}{\omega_0} \\ 0, & \text{nếu } T < t \end{cases}$$

Phương trình của dao tử là : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} f(t)$, hãy xác định đáp ứng $x(t)$ của nó bằng cách sử dụng nguyên lí chồng chất.

• *Lời giải*

Kích thích f(t) được phân tích là sự chồng chất của:

$f_1(t) = f_m \sin(\omega_0 t).u(t)$ *và của* $f_2(t) = -f_m \sin\omega_0(t-T).\, u(t-T)$.

Áp dụng 3 cho ta thấy rằng đáp ứng đối với kích thích $f_1(t)$ *là:*

$$x_1(t) = \frac{f_m}{2m\omega_0^2}(\sin\omega_0 t - \omega_0 t.\cos\omega_0 t).u(t)$$

Từ đó ta suy ra đáp ứng đối với kích thích $f_2(t)$ *với chú ý* $\sin\omega_0(t-T) = \sin\omega_0 t$:

$$x_2(t) = -\frac{f_m}{2m\omega_0^2}\left[\sin\omega_0(t-T) - \omega_0(t-T).\cos\omega_0(t-T)\right]u(t-T).$$

Do đó: $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$.

Đặc biệt, sau khi kích thích mất đi ta có:

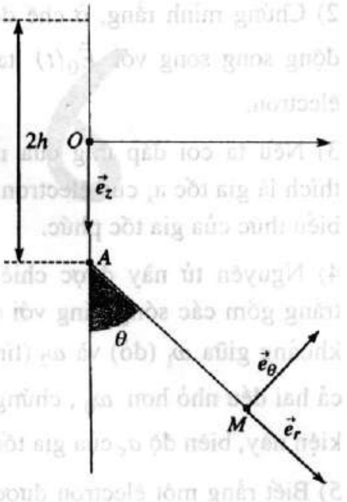
$$x(t) = -\frac{f_m\pi}{m\omega_0^2}\cos(\omega_0 t).$$

10 **Dao tử tham số cơ học

1) Thiết lập phương trình chuyển động của con lắc đơn gồm một khối lượng m đặt ở đầu mút một thanh có khối lượng không đáng kể và chiều dài l mà đầu mút còn lại A dao động thẳng đứng chung quanh gốc O :

$$\overrightarrow{OA} = h\cos\gamma t\ \vec{e}_z$$

2) Con lắc dao động với một biên độ nhỏ bằng cách nhắc lại lập luận đã được đưa ra trong phần "mở đầu về cộng hưởng tham số".



Hãy xác định điều kiện của γ để ta có thể quan sát được một cộng hưởng biên độ của con lắc (cộng hưởng tham số).

• *Lời giải*

1) Ta áp dụng nguyên lí cơ bản của động lực học vào M trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm, giả thiết là hệ Galilée;

Biết rằng $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = h\cos\gamma t\vec{e}_z + l\vec{e}_r$:

$$m(-h\gamma^2\cos\gamma t\vec{e}_x + l\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - l\dot{\theta}^2\vec{e}_r) = \vec{T} + m\vec{g}$$

sau đó, ta chiếu lên $\vec{e}_\theta$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\left(1 + \frac{h\gamma^2}{g}\cos\gamma t\right)\sin\theta = 0 \qquad \text{với } \omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

2) Ở biên độ nhỏ, ta có:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\left(1 + \frac{h\gamma^2}{g}\cos\gamma t\right)\theta = 0 .$$

Để có cộng hưởng tham số nhất thiết phải có $\gamma = 2\omega_0$.

11 **Màu sắc của bầu trời

Để mô tả các tương tác giữa một sóng sáng đặc trưng bởi vectơ điện trường $\vec{E}(t) = \vec{E}_0\cos\omega t$ và các êlectron ở lớp vỏ ngoài của một nguyên tử, ta sử dụng giả thuyết về êlectron liên kết đàn hồi của J.J THOMSON.

1) Thiết lập phương trình chuyển động của một êlectron như thế khi nó bị kích thích bởi $\vec{E}(t)$ và thừa nhận rằng nó bị kéo về tâm O của nguyên tử bởi lực $\vec{f} = -k\overrightarrow{OM}$ và bị hãm lại bởi một lực tỉ lệ với vận tốc $\vec{f}_r = -h\vec{v}$.

Ta kí hiệu q và m lần lượt là điện tích và khối lượng của êlectron và đặt:

$$2\alpha = \frac{h}{m} \qquad \text{và} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

2) Chứng minh rằng, ở chế độ ổn định, êlectron dao động song song với $\vec{E}_0(t)$ ta kí hiệu x là li độ của êlectron.

3) Nếu ta coi đáp ứng của nguyên tử đối với kích thích là gia tốc a_x của êlectron của nó, thì bạn hãy tìm biểu thức của gia tốc phức.

4) Nguyên tử này được chiếu sáng bằng ánh sáng trắng gồm các sóng sáng với các mạch số nằm trong khoảng giữa ω_1 (đỏ) và ω_2 (tím). Biết rằng ω_1 và ω_2, cả hai đều nhỏ hơn ω_0; chứng tỏ rằng trong các điều kiện này, biên độ a_x của gia tốc tỉ lệ với ω^2.

5) Biết rằng một êlectron được gia tốc sẽ bức xạ một công suất $\mathscr{P}$ tỉ lệ với bình phương gia tốc của nó, hãy giải thích tại sao màu sắc bầu trời lại xanh lam.

• *Lời giải*

1) $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} + 2\alpha\dfrac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2\vec{r} = \dfrac{q}{m}\vec{E}$

2) Cho $(0; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ là một hệ tọa độ mà vetơ đơn vị $\vec{e}_z$ là cùng đường thẳng và cùng chiều với $\vec{E}_0$

Phương trình trên chiếu xuống $\vec{e}_y$ và $\vec{e}_z$ dẫn tới hai phương trình của các dao tử tắt dần không duy trì, trái với khi chiếu lên $\vec{e}_x$ ta được một phương trình của dao tử duy trì.

3) Biên độ phức của li độ của êlectron là:

$$\underline{X}(\omega) = \frac{\frac{q}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\alpha\omega}\underline{E}_x$$

Với $\underline{E}_x$ là biên độ phức của thành phần $\underline{E}_x(t)$ của sóng sáng. Do đó ta có biểu thức của gia tốc phức của êlectron:

$$\underline{a}_{x_m}(\omega) = \omega^2\,\underline{X}(\omega)$$

Từ đó $a_{x_m}(\omega) = \dfrac{\frac{q}{m}\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\alpha\omega)^2}}E_0$,

$a_{x_m}(0) = 0$ *và* $\lim\limits_{\omega\to\infty} a_{x_m} = \dfrac{q}{m}E_0$

4) $a_{x_m}(\omega) = \dfrac{q}{m}\dfrac{E\omega^2}{\omega_0^2}$

5) $\mathscr{P} \approx a_{x_m}^2 = \left(\dfrac{q}{m}\right)^2\dfrac{E^2}{w_0^4}\omega^4$. *Tỉ số các bước sóng của ánh sáng xanh lam và đỏ là:* $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} = \dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{0{,}45}{0{,}7} \approx 0{,}64$. *Tỉ số các cường độ khuếch tán sẽ là:* $\dfrac{\mathscr{P}_2}{\mathscr{P}_1} = \left(\dfrac{1}{0{,}64}\right)^2 \approx 6$: *ánh sáng xanh lam khuếch tán khoảng sáu lần mạnh hơn ánh sáng đỏ. Chính vì lí do đó mà màu sắc bầu trời là màu xanh lam.*

MẶT PHẲNG PHA

6

Mở đầu

Muốn giải thích bằng hình học động thái của các hệ cơ học có n bậc tự do, người ta sử dụng, trong vật lí thống kê, một không gian 2n chiều, gọi là không gian pha. Trạng thái của hệ được biểu diễn bởi một điểm pha, mà n toạ độ đầu tiên là các toạ độ về vị trí và n toạ độ tiếp theo là các thành phần động lượng.

Khi thời gian trôi qua, thì mỗi điểm pha vạch trong không gian pha một quỹ đạo gọi là quỹ đạo pha. Bằng cách này, người ta có một phương pháp mô tả trạng thái của hệ ở một thời điểm cho trước và sự vận động của hệ theo thời gian.

Mặt phẳng pha là giới hạn của không gian pha cho một bậc tự do. H.POINCARÉ, (1854 - 1912) đã sử dụng nó như một công cụ thuận tiện để giải nhiều bài toán vật lí tuyến tính và nhất là phi tuyến.

Khi xem xét kĩ một số tính chất của các quỹ đạo pha, thì trong ta nảy ra khái niệm về thuyết quyết định cơ học. LAPLACE (1749 - 1827) đã rút ra từ thuyết đó vào năm 1814, một phát biểu nổi tiếng: "Một trí thông minh trong một lúc nào đó, có thể nhận biết được mọi sức mạnh đã làm cho tự nhiên phải hoạt động sôi nổi và sống động cũng như tình huống tương ứng của các sinh vật đã tạo nên tự nhiên đó. Nếu ngoài ra, bậc đại trí đó lại khá uyên bác để có thể phân tích được các dữ liệu đó và muốn bao quát trong cùng một công thức tất cả các chuyển động của các vật thể lớn nhất trong Vũ trụ cũng như của các vật thể nhỏ nhất trong nguyên tử. Chẳng có gì là không rõ đối với bậc đại trí đó vì tương lai cũng như quá khứ đều hiện ra trước mắt họ".

Như vậy, đối với một vài hệ cơ học đơn giản thì thí nghiệm dường như đã xác nhận sự phân tích của LAPLACC. Tuy nhiên vẫn còn tồn tại biết bao nhiêu lĩnh vực vật lí khác mà trong đó thời gian không biết làm gì hơn là trải ra một hiện thực đã được quyết định và chẳng thêm được gì vào.

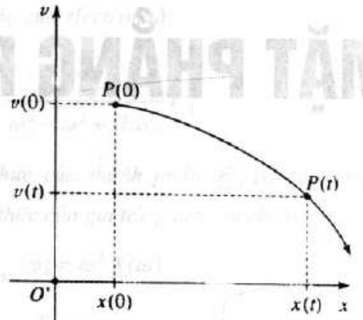
MỤC TIÊU

- Xác định trạng thái của một hệ vật lí có một bậc tự do.
- Đưa sự biểu diễn bằng hình học vào trong mặt phẳng pha.
- Phát biểu một số tính chất của các quỹ đạo pha.
- Quan sát hình ảnh pha của một số dao tử thông thường.

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

- Dao động tự do.
- Dao động cưỡng bức.
- Dao động tự duy trì.

Khái niệm về trạng thái của một hệ



H.1. *Mọi quỹ đạo pha đều khởi đầu ở P(0) mà các toạ độ là các điều kiện ban đầu.*

I.1. Thuyết quyết định cơ học

Ta hãy xét một hệ vật lí có *một bậc tự do* bị chi phối bởi một phương trình vi phân cấp hai dạng:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right).$$

Đặt $v = \frac{dx}{dt}$. Phương trình vi phân trên tương đương với hệ hai phương trình vi phân cấp một như sau:

$$\frac{dx}{dt} = v \quad và \quad \frac{dv}{dt} = F(x, v, t).$$

Hệ này chấp nhận một nghiệm *duy nhất*, nếu các giá trị ban đầu $x(0)$ và $v(0)$ được cho trước, với điều kiện là phải thẩm tra lại các điều kiện về tính liên tục và tính lấy đạo hàm được của các hàm số có mặt trong hệ phương trình. Các điều kiện toán học về mặt vật lí thì ít bị bó buộc hơn và thoả mãn các hệ cơ học chịu tác dụng của các trường lực thực.

Các hệ cơ học có một sự vận động duy nhất đối với các điều kiện ban đầu đã được xác định (nguyên lí quyết định luận cơ học).

I.2. Sự mô tả pha

Người ta nói rằng $x(t)$ và $v(t)$ hợp thành đối với một số hệ nào đó, một tập hợp đầy đủ các *biến số trạng thái*. Tập hợp này cho ta sự hiểu biết tối thiểu cần thiết để mô tả đầy đủ trạng thái thực tế của một hệ và cho phép tiên đoán được các trạng thái tương lai của hệ.

Các trạng thái về sau được xác định bằng việc giải *các phương trình vận động* được xác minh bởi x và v.

• **Trạng thái của một hệ có một bậc tự do được biểu diễn ở mọi thời điểm,bằng một điểm $P(t)$ có tọa độ (x, v) trong một mặt phẳng gọi là mặt phẳng pha.**

• **Điểm $P(t)$ là điểm tượng hình của trạng thái của hệ, hay là điểm pha của hệ ở thời điểm t. Khi thời gian trôi qua, thì điểm pha vạch một đường cong, chia độ theo t, gọi là quỹ đạo pha của hệ.**

Bất cứ quỹ đạo pha nào cũng bắt đầu ở $P(0)$, mà các toạ độ $(x(0), v(0))$ là các điều kiện ban đầu của hệ (*H.1*).

• **Sự mô tả pha của một hệ là tập hợp các quỹ đạo pha của hệ, thu được bằng cách coi tập hợp các điều kiện ban đầu là có thể thực hiện được.**

I.3. Các phương trình vận động của các hệ cơ học

Đối với các hệ tự do (hay tự chủ), hàm số F không chứa rõ ràng thời gian : $F(x, v)$. Ngược lại, đối với các hệ *được đặt trong các trường có nguồn gốc bên ngoài (các hệ cưỡng bức)*, sự phụ thuộc vào thời gian nói chung là rõ ràng.

Trong cơ học các phương trình vận động đều được suy ra từ nguyên lí cơ bản của động lực học ; và đối với các hệ có *một bậc tự do*, thì nguyên lí đó được viết dưới dạng:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, v, t),$$

trong đó m là khối lượng của hệ và $f(x, v, t)$ là tổng hợp lực của các lực tác dụng.

Các phương trình vận động của các hệ cơ học như vậy là:

$$\frac{dx}{dt} = v \quad \text{và} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m}f(x, v, t).$$

I.4. Ví dụ về các phương trình vận động

■ Hệ tuyến tính tự do

Phương trình của một dao tử điều hoà tắt dần là:

$$\frac{dx}{dt} = v \quad \text{và} \quad \frac{dv}{dt} = -\omega_0^2 x - 2\alpha v.$$

■ Hệ tuyến tính cưỡng bức

Phương trình của một dao tử điều hoà tắt dần chịu tác dụng của một kích thích là:

$$\frac{dx}{dt} = v \quad \text{và} \quad \frac{dv}{dt} = -\omega_0^2 x - 2\alpha v \; + \omega_0^2 A\cos(\omega t)$$

■ Hệ phi tuyến

Phương trình của một dao tử VAN DER POL là:

$$\frac{dx}{dt} = v \quad \text{và} \quad \frac{dv}{dt} = -\omega_0^2 x - \frac{\lambda}{m}(x^2 - x_0^2)v.$$

Số hạng có $(x^2 - x_0^2)$ có thể mô hình hóa một vài cơ chế duy trì các dao động.

2 Các tính chất của các quỹ đạo pha

2.I. Các hệ quả của thuyết quyết định cơ học

2.I.I. Hệ quả thứ nhất

Hệ quả này liên quan đến chuyển động của các hệ tự do : *hai quỹ đạo pha của một hệ tự do không thể cắt nhau.*

Trường hợp ngược lại có nghĩa là một hệ cơ học có thể có hai vận động khác nhau kể từ các điều kiện ban đầu xác định bởi các toạ độ của giao điểm của chúng.

Một tình huống như vậy sẽ làm sai lệch khái niệm về quyết định luận cơ học. Như chúng ta sẽ thấy điều đó ở §6, và tính chất không còn đúng nữa đối với các hệ *cưỡng bức*.

2.I.2. Hệ quả thứ hai

Hệ quả này liên quan đến các *chuyển động tuần hoàn, mà các quỹ đạo pha đều khép kín.*

Sự việc điểm pha của một hệ trở lại vị trí ban đầu $P(T) = P(0)$ sau một thời gian hữu hạn T, bao hàm ý nghĩa là hệ sẽ thực hiện một chu trình mới trong những điều kiện giống hệt chu trình trước như đã nói ở trên.

Tính chất này làm cơ sở cho việc sử dụng các hiện tượng tuần hoàn để đo thời gian.

2.2. Các điểm đặc biệt

Các điểm đặc biệt của hệ, theo định nghĩa, là các điểm pha mà tại đó, ta có đồng thời các hệ thức:

$$\frac{dx}{dt} = 0 \text{ và } \frac{dv}{dt} = 0.$$

Khi hệ được đặt ở một trong các điểm đặc biệt của nó, thì hệ ở tại đó. Các điểm đặc biệt của một hệ là các trạng thái cân bằng của nó.

Nếu hệ là *tuyến tính*, thì các phương trình vận động của hệ có dạng:

$$\frac{dx}{dt} = v \quad \text{và} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{f(x,v)}{m} = Ax + Bv\,,$$

trong đó A và B độc lập với x và v, nhưng có thể tuỳ tình hình, phụ thuộc vào t.

Ta thấy rằng một *hệ tuyến tính chỉ có một điểm đặc biệt duy nhất* ($x = 0$, $v = 0$), ở tại gốc của mặt phẳng pha, và do vậy hệ chỉ có *một vị trí cân bằng duy nhất*.

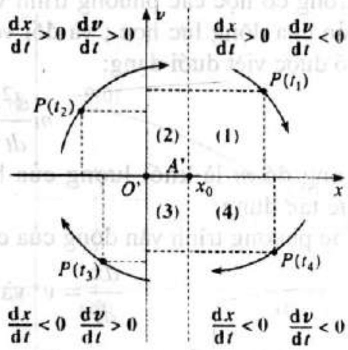
Khi hệ *cô lập và phi tuyến*, ta có các hệ thức:

$$\frac{dx}{dt} = v \quad \text{và} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{f(x,v)}{m}$$

Lúc đó, nhiều trường hợp có thể xảy ra:

- $f(x, 0)$ không triệt tiêu đối với bất kì giá trị nào của x : không có điểm đặc biệt;
- $f(x, 0)$ triệt tiêu đối với một hay nhiều giá trị của x : hệ có một hay nhiều điểm đặc biệt.

Các điểm đặc biệt của các hệ có một bậc tự do, nếu chúng tồn tại, đều ở trên trục không gian (O' x) của mặt phẳng pha



H.2. *Điểm pha P(t) của một chất điểm bị kéo về A(x_o) sẽ quay theo chiều kim đồng hồ chung quanh điểm pha A'(x_0, 0) trong mặt phẳng pha.*

2.3. Chiều đường đi

Giả sử chất điểm M ở trong một trường lực hút $f(x, v)$ hướng về điểm A hoành độ x_0, nên:

$$f(x, v) \,.\, (x - x_0) < 0\,.$$

Trong các điều kiện đó, khi điểm pha của *hệ ở trong góc phần tư (1) đối với điểm pha A' (x_0, 0) (H.2)*, thì ta có đồng thời $v > 0$ và $(x - x_0) > 0$, và như vậy $f(x,v) < 0$.

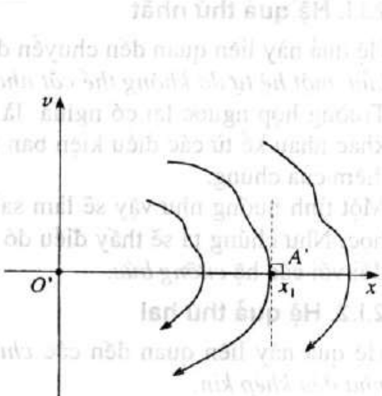
Kết quả là:

$$\frac{dx}{dt} = v > 0 \text{ và } \frac{dv}{dt} = \frac{f(x,v)}{m} < 0.$$

Điều đó có nghĩa là điểm pha $P(t)$ kết hợp với chất điểm sẽ quay theo *chiều kim đồng hồ* chung quanh điểm A' (x_0, 0).

Khi điểm pha $P(t)$ ở trong các góc phần tư khác, thì các dấu của các đạo hàm $\frac{dx}{dt}$ và $\frac{dv}{dt}$ cũng dẫn đến cùng một kết quả như nhau.

Điểm pha của một chất điểm chịu tác dụng của một trường lực hút về điểm $A(x_0)$ sẽ quay theo chiều kim đồng hồ chung quanh điểm $A'(x_0, 0)$ ở trong mặt phẳng pha.



H.3. *Các quỹ đạo pha cắt trực giao trục (0 x) của các khoảng tại các điểm không đặc biệt.*

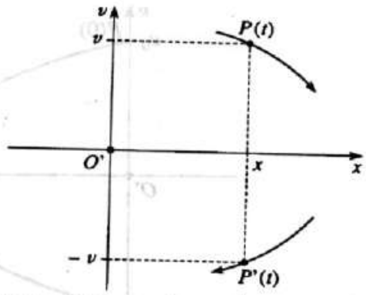
2.4. Các điểm đi ngược quỹ đạo

Ta hãy loại bỏ thời gian trong các phương trình vận động của hệ : $\frac{dv}{dx} = \frac{f(x,v)}{mv}$.

Giả sử một quỹ đạo pha của hệ, cắt trục $(O'x)$ của các khoảng ở $A'(x_1, O)$ sao cho x_1 không phải là hoành độ của một điểm đặc biệt, và như vậy là của một vị trí cân bằng $f(x_1, O) \neq 0$.

Trong các điều kiện trên, $\frac{dv}{dx}$ là vô hạn ở A' vì $v = 0$. Và quỹ đạo pha cắt trực giao trục $(O'x)$ (*H. 3*).

Mặt khác, ở $A'(x_1, O)$, vận tốc đổi dấu, có nghĩa là chất điểm đi ngược đường : x_1 là hoành độ của một *điểm đi ngược quỹ đạo* của chất điểm.



H.4. *Khi có một sự đảo ngược thời gian, thì điểm pha P(t) đổi thành P'(t).*

2.5. Sự đảo ngược thời gian

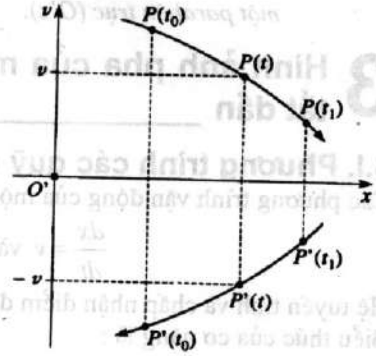
Ta hãy xét sự vận động của điểm pha $P(t)$ khi có sự đảo ngược thời gian, nghĩa là khi có sự trở về quá khứ.

Ta sẽ thu được một sự vận động như thế đối với mỗi vị trí x, bằng cách thay đổi vận tốc v thành vận tốc đối $-v$.

Trong mặt phẳng pha, thì điều đó tương ứng sự đối xứng đối với trục của các khoảng cách $(O'x)$, làm biến đổi $P(t)$ thành $P'(t)$ (*H.4*).

Điểm pha $P'(t)$ được kết hợp với cùng một hệ như điểm pha $P(t)$. Tuy nhiên, trạng thái động lực của hệ sẽ khác nhau tuỳ theo hệ đi xuôi thời gian (điểm $P(t)$) hoặc đi ngược thời gian (điểm $P'(t)$). Ta thấy trên *hình 5* là điểm $P'(t)$ quay theo cùng chiều như $P(t)$.

Một quá trình là thuận nghịch nếu theo sau một sự đảo ngược thời gian, thì hệ lại đi qua cùng những vị trí như nhau nhưng với các vận tốc đối lập. Thành thử sự mô tả pha của một hệ thuận nghịch là bất biến do tính đối xứng đối với trục của các khoảng cách ($O'x$).



H.5. *Điểm pha $P(t)$ là điểm pha của một hệ đi xuôi đối với $t_0 < t < t_1$. Điểm pha $P'(t)$ là điểm pha của cùng một hệ lúc đi ngược đối với $t_1 > t > 0$*

Áp dụng 1

Chất điểm rơi tự do

Hãy xác định quỹ đạo pha của một chất điểm khối lượng m, được ném thẳng đứng từ mặt đất lên với vận tốc $\vec{v}_0$ trong trường trọng lực $\vec{g}$ đồng đều. Hãy biện luận các tính chất của một quá trình như thế.

Các biến số pha là z và $v = \frac{dz}{dt}$.

Các phương trình vận động của hệ có dạng:

$$\frac{dz}{dt} = v \quad \text{và} \quad \frac{dv}{dt} = -g.$$

Hệ không phải là tuyến tính, vả lại nó không có điểm đặc biệt, do đó không có vị trí cân bằng.

Sự bảo toàn cơ năng:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = \frac{1}{2}mv_0^2,$$

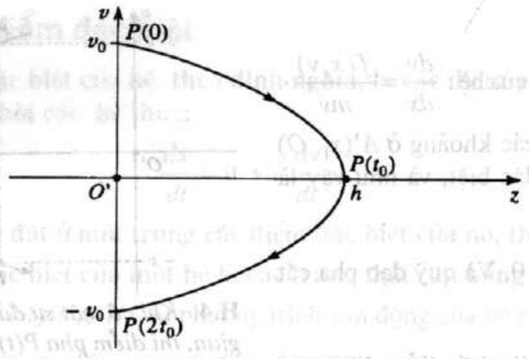
cho phương trình của quỹ đạo pha:

$$v^2 - v_0^2 = -2gz.$$

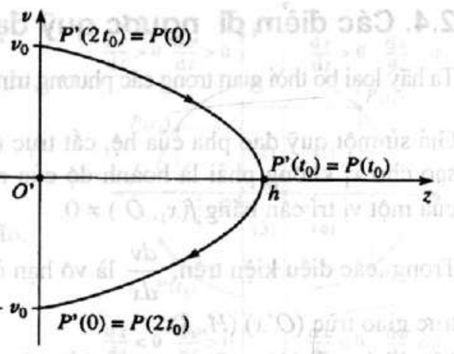
Đây là một parabôn có trục $(O'z)$ mà đỉnh, ở độ cao $h = \frac{v_0^2}{2g}$, sẽ được đạt tới ở thời điểm $t_0 = \frac{v_0}{g}$ (*H.6*).

Ta nhận thấy rằng $M(t_0)$ ở trên trục thẳng đứng (Oz), thực sự là một điểm đi ngược quỹ đạo của chất điểm. Ta cũng nghiệm thấy rằng quỹ đạo pha được đi qua theo chiều kim đồng hồ. Cuối cùng quá trình là thuận nghịch, vì quỹ đạo pha là bất biến qua đối xứng đối với trục các khoảng cách $(O'z)$.

Khi ta đảo ngược thời gian, thì điểm pha $P(2t_0)$ trở thành $P'(2t_0)$ trùng với $P(0)$ và hệ sẽ chạy qua cùng một quỹ đạo pha như nhau theo chiều kim đồng hồ (*H.7*).



H.6. *Quỹ đạo pha của một chất điểm rơi tự do là một parabôn trục (O'z).*



H.7. *Tác động của sự đảo ngược thời gian lên chuyển động rơi tự do của một chất điểm.*

3 Hình ảnh pha của một dao tử điều hòa không tắt dần

3.I. Phương trình các quỹ đạo pha

Các phương trình vận động của một dao tử điều hòa không tắt dần là :

$$\frac{dx}{dt} = v \text{ và } \frac{dv}{dt} = -\omega_0^2 x.$$

Hệ tuyến tính và chấp nhận điểm đặc biệt ($x = 0, v = 0$).

Biểu thức của cơ năng là :

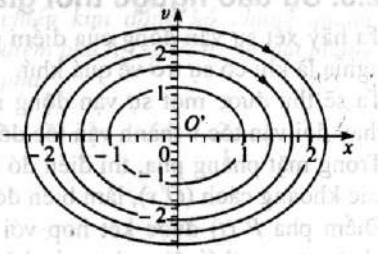
$$\mathscr{E}_M = \frac{k}{2}x^2 + \frac{m}{2}v^2 = \frac{k}{2}\left[x^2 + \left(\frac{v}{\omega_0}\right)^2\right].$$

Biểu thức này cho ta phương trình của quỹ đạo pha: $x^2 + \left(\frac{v}{\omega_0}\right)^2 = \frac{2\mathscr{E}_M}{k}$.

Ta kí hiệu x_m là biên độ của chuyển động hình sin : $\mathscr{E}_M = \frac{kx_m^2}{2}$; ta đi đến :

$$\frac{x^2}{x_m^2} + \frac{v^2}{x_m^2\omega_0^2} = 1.$$

các quỹ đạo pha của một dao tử điều hòa không tắt dần là *các elip (H8)*. Quỹ đạo pha là đối xứng đối với trục ($O'x$) của các khoảng cách, và chuyển động của một dao tử điều hoà là một quá trình thuận nghịch.

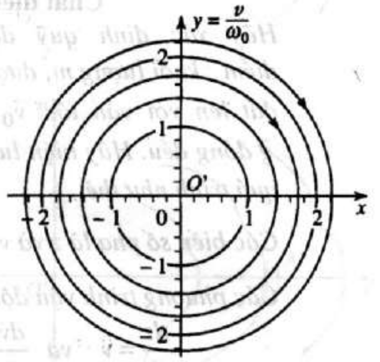


H.8. *Các quỹ đạo pha của một dao tử điều hoà không tắt dần là các elip.*

3.2. Hình ảnh pha trong mặt phẳng $\left(x, y = \frac{v}{\omega_0}\right)$

Thường có lợi khi làm việc với các trục $\left(x, y = \frac{v}{\omega_0}\right)$, bằng cách bố trí *các đại lượng có cùng các thứ nguyên như nhau trên hai trục.*

Trong các điều kiện đó, phương trình các quỹ đạo pha trở thành $x^2 + y^2 = X^2$; đó là phương trình của một họ vòng tròn đồng tâm gốc O', và bán kính x_m được xác định bởi các điều kiện ban đầu (*H.9*). Cần phải nhớ rằng một quỹ đạo pha đường tròn cho phép kiểm tra tính chất hình sin của một dao tử một cách chính xác hơn nhiều so với sự khảo sát trực tiếp đồ thị của phương trình thời gian của dao tử $x(t)$.



H.9. *Trong mặt phẳng pha* $\left(x, y = \frac{v}{\omega_0}\right)$, *các quỹ đạo pha của một dao tử điều hòa là những đường tròn.*

3.3. Dạng năng lượng

Ta lại xét biểu thức về cơ năng $\mathscr{E}_M$ của dao tử:

$$\mathscr{E}_M = \frac{k}{2}x^2 + \frac{m}{2}v^2 = \frac{k}{2}\left[x^2 + \left(\frac{v}{\omega_0}\right)^2\right] = \frac{k}{2}(x^2 + y^2) = \frac{k}{2}O'P^2(t).$$

Trong mặt phẳng pha $\left(x, y = \dfrac{v}{\omega_0}\right)$, cơ năng $\mathscr{E}_M$ của một dao tử tỉ lệ với bình phương khoảng cách từ điểm pha $P(t)$ của nó tới gốc O' của mặt phẳng pha.

Các quỹ đạo pha của một dao tử điều hòa không tắt dần là những vòng tròn đẳng năng.

Để tập luyện : bài tập 1.

4 Nghiên cứu các hệ bảo toàn

Để làm mô hình của hệ một chiều, ta hãy xét một chất điểm M, khối lượng m, bị buộc phải trượt không ma sát trên trục (Ox). Cho $f(x)$ là lực tác dụng vào M.

Nguyên lí cơ bản của động lực học có dạng:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(x)$$

Phương trình này tương đương với các phương trình vận động:

$$\frac{dx}{dt} = v \quad \text{và} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{f(x)}{m}$$

Theo giả thiết, hệ là *bảo toàn*, nên $f(x)$ dẫn xuất từ một thế năng $\mathscr{E}_p(x)$.

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng:

$$\frac{m}{2}v^2 + \mathscr{E}_p(x) = \mathscr{E}_M$$

ta sẽ thu được phương trình các quỹ đạo pha.

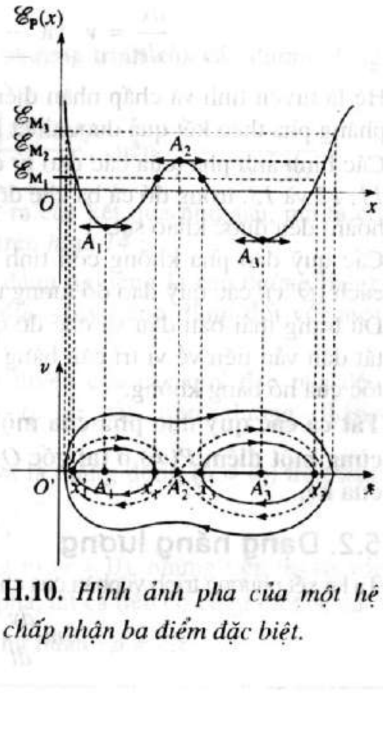
Khi hệ là bảo toàn, thì các quỹ đạo pha là các quỹ đạo đẳng năng lượng.

Giả sử là $\mathscr{E}_p(x)$ có dạng được biểu diễn như trên *hình 10. Các điểm đặc biệt của hệ đều nằm trên trục các khoảng cách (O'x) ($\frac{dx}{dt}=0$ nên $v = 0$) và tương ứng với các cực trị của thế năng ($\frac{dv}{dt}=0$ nên $f(x) = -\frac{d\mathscr{E}_p}{dx}=0$).*

Các cực trị nhất thiết phải nối tiếp nhau theo một sự luân phiên cực tiểu - cực đại - cực tiểu... *Các điểm đặc biệt là các vị trí kế tiếp nhau của cân bằng bền và không bền.*

Ta hãy nghiên cứu sự vận động của hệ đối với các điều kiện ban đầu sau đây : $x = x_1$ và $v = 0$. Chuyển động là dao động và thực hiện ở cơ năng không đổi $\mathscr{E}_M = \mathscr{E}_{M_1}$ giữa các điểm có hoành độ x_1 và x'_1.

Trong mặt phẳng pha, quỹ đạo pha là một đường cong kín đi theo chiều kim đồng hồ chung quanh điểm đặc biệt A'_1 kết hợp với cực tiểu địa phương A_1 của thế năng.



H.10. *Hình ảnh pha của một hệ chấp nhận ba điểm đặc biệt.*

Đối với điều kiện ban đầu $x = x_3$ và $v = 0$ cho cơ năng cùng một giá trị $\mathscr{E}_{M_1}$, ta tiến hành một sự phân tích giống hệt, liên quan đến chuyển động dao động (được thực hiện giữa x_3 và x'_3) và quỹ đạo pha (là một đường cong khép kín, đi theo chiều kim đồng hồ chung quanh điểm đặc biệt A'_3 kết hợp với cực tiểu địa phương A_3 của thế năng). Bây giờ ta hãy xem xét trường hợp các điều kiện ban đầu cho cơ năng giá trị $\mathscr{E}_{M_2}$.

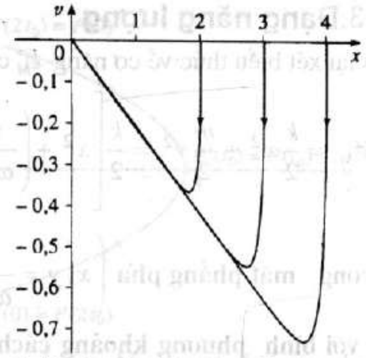
Bây giờ hai quỹ đạo pha có một điểm chung: điểm đặc biệt A'_2 kết hợp với vị trí cân bằng *không bền* A_2. Cần ghi nhớ rõ rằng điểm đặc biệt A'_2 không phải là một giao điểm của các quỹ đạo pha, mà kể từ đó, điểm pha $P(t)$ của hệ, sẽ có sự lựa chọn giữa các quỹ đạo khác nhau. Đây chính là *điểm dừng* đối với điểm pha đạt tới nó. Các quỹ đạo pha quá riêng biệt này được gọi là *phân lập*.

Cuối cùng, đối với các điều kiện ban đầu cho cơ năng một giá trị $\mathscr{E}_M = \mathscr{E}_{M_3}$ thì quỹ đạo pha sẽ bao quanh ba điểm đặc biệt trong trường hợp xét trên.

<u>*Chú ý :*</u>

Trong mọi trường hợp, các quỹ đạo pha đều chấp nhận trục $(O'x)$ như một trục đối xứng, vì các chuyển động nghiên cứu được thực hiện không có hiện tượng tiêu tán, đều là thuận nghịch.

▸ **Để tập luyện : Bài tập 3 và 5.**



H.11. *Hình ảnh pha của một dao tử điều hòa tắt dần ở chế độ không tuần hoàn ($Q = 0,2$).*

5 Hình ảnh pha của một dao tử điều hòa tắt dần

5.1 Sự tồn tại của một điểm hút

Các phương trình vận động của một dao tử điều hoà tắt dần do lực ma sát nhớt có dạng:

$$\frac{dx}{dt} = v \quad \text{và} \quad -\frac{dv}{dt} = -(2\alpha v + \omega_0^2 x).$$

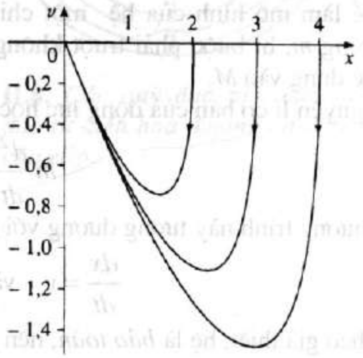
Hệ là tuyến tính và chấp nhận điểm đặc biệt ($x = 0$, $v = 0$) ở gốc của mặt phẳng pha theo kết quả được thiết lập ở **§2.2.**

Các hình ảnh pha của các dao tử điều hòa tắt dần được nêu trên các *hình 11, 12* và *13*, trong đó cả ba chế độ (không tuần hoàn, tới hạn và giả - tuần hoàn) đều được khảo sát.

Các quỹ đạo pha không còn tính đối xứng nữa đối với trục các khoảng cách $(O'x)$: các quỹ đạo đó tương ứng với các quá trình *bất thuận nghịch*.

Dù trạng thái ban đầu và chế độ của nó thế nào, thì một dao tử điều hoà tắt dần vẫn tiến về vị trí cân bằng $x = 0$ của nó, và khi đạt tới đó, thì vận tốc của nó bằng không.

Tất cả các quỹ đạo pha của một dao tử điều hòa tắt dần đều tiến về cùng một điểm $P(\infty)$ ở tại gốc O' của mặt phẳng pha, gọi là điểm hút của hệ.

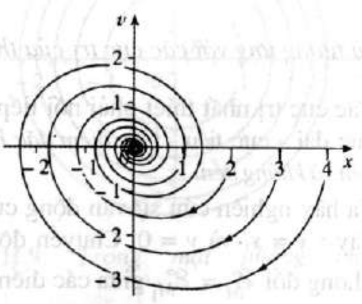


H.12. *Hình ảnh pha của một dao tử điều hòa tắt dần ở chế độ tới hạn $\left(Q = \frac{1}{2}\right)$.*

5.2. Dạng năng lượng

Ta lại xét phương trình vi phân của chuyển động của dao tử viết dưới dạng:

$$m\frac{dv}{dt} + kx = -hv$$



H.13. *Hình ảnh pha của một dao tử điều hòa tắt dần ở chế độ giả-tuần hoàn ($Q = 3$).*

Nhân phương trình đó với v là hệ số lấy tích phân của vế đầu:

$$mv\frac{dv}{dt} + kx\frac{dx}{dt} = -hv^2$$

Do đó, ta có sự cân bằng về công suất như sau:

$$\frac{d\mathscr{E}_M}{dt} = -hv^2 < 0$$

trong đó: $\mathscr{E}_M = \frac{m}{2}v^2 + \frac{k}{2}x^2$ là cơ năng của dao tử và $\mathscr{P}_d = -hv^2$ là công suất của các lực ma sát.

Ta đã thiết lập, ở §3.3., là cơ năng $\mathscr{E}_M$ của một dao tử trong mặt phẳng pha $\left(x, y = \frac{v}{\omega_0}\right)$, tỉ lệ với bình phương khoảng cách $O'P(t)$:

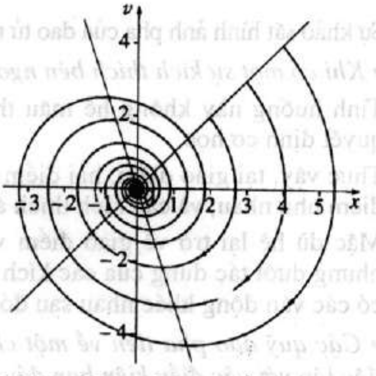
$$\mathscr{E}_M(t) = \frac{k}{2}\overrightarrow{O'P}^2;$$

kết quả là:

$$\frac{d\overrightarrow{O'P}^2}{dt} = -\frac{2h}{k}v^2 < 0.$$

Đây là sự mất mát cơ năng $\mathscr{E}_M$ của dao tử khi nó lại gần điểm pha $P(t)$ của tâm hút O' của nó.

Vả lại, đồ thị của thế năng $\mathscr{E}_p(x) = \frac{k}{2}x^2$ lại không có cực đại. Thành thử không tồn tại điểm đặc biệt kết hợp với một vị trí cân bằng không bền và, do đó không có đường cong tách biệt.



H.14. *Các đường đẳng nghiêng của một dao tử điều hòa tắt dần.*

Áp dụng 2

Đường đẳng nghiêng của một hệ tuyến tính tự do

Ta gọi đường đẳng nghiêng là tập hợp các điểm của các quỹ đạo pha mà tại những điểm đó, đường tiếp tuyến có một hệ số chỉ phương $p = \frac{dv}{dx}$ cho trước.

Hãy xác định các đường đẳng nghiêng của một dao tử điều hoà tắt dần có phương trình: $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ và biện luận kết quả thu được.

Các phương trình vận động của một dao tử như thế có dạng:

$$\frac{dx}{dt} = v \text{ và } \frac{dv}{dt} = -(\omega_0^2 x + 2\alpha v).$$

Tại một điểm (x, v) của một quỹ đạo pha, hệ số chỉ phương của tiếp tuyến của nó là:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{\omega_0^2 x + 2\alpha v}{v}$$

do đó, ta có phương trình của các đường đẳng nghiêng:

$$p = -\frac{\omega_0^2 x + 2\alpha v}{v}, \text{ nên } \frac{v}{x} = -\frac{\omega_0^2}{p + 2\alpha}.$$

Từ đó ta suy ra các kết quả như sau, mà ta có thể kiểm tra trên *hình 14* :

- các đường đẳng nghiêng là các đường thẳng đi qua gốc (điều này cũng đúng đối với mọi hệ tuyến tính) ;
- những tiếp tuyến của các quỹ đạo pha đều nằm ngang ($p = 0$) trên đường thẳng $v = -\frac{\omega_0^2}{2\alpha}x$, và là thẳng đứng ($p = \infty$) trên trục $(O'x)$ ($v = 0$) ;
- trên trục $(O'v)$ ($x = 0$), những tiếp tuyến với các quỹ đạo pha, tất cả đều có cùng một hệ số chỉ phương như nhau : $p = 2\alpha$.

6 Hình ảnh pha của một dao tử tuyến tính ở chế độ cưỡng bức tuần hoàn

Ta hãy xét một dao tử *tuyến tính* chịu tác dụng của một lực kích thích hình sin $f(t) = F\cos(\omega t)$. Phương trình của nó là:

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} + F\cos(\omega t).$$

Đặt: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ và $2\alpha = \frac{h}{m}$.

Với các kí hiệu này, các phương trình vận động của hệ có dạng :

$$\dot{x} = v \text{ và } \dot{v} = -\omega_0^2 x - 2\alpha v + \frac{F}{m}\cos(\omega t).$$

Sự khảo sát hình ảnh pha của dao tử này (*H.15*) dẫn đến các nhận xét sau đây.

• *Khi có một sự kích thích bên ngoài, thì các quỹ đạo pha có thể cắt nhau.*

Tình huống này không hề mâu thuẫn chút nào với nguyên lí của thuyết quyết định cơ học.

Thực vậy, tại giao điểm, hai điểm pha không tương ứng với cùng một thời điểm như nhau, và các kích thích áp dụng vào hệ không phải là như nhau. Mặc dù hệ lại trở về giao điểm với cùng trạng thái động lực như nhau, nhưng dưới tác dụng của các kích thích bên ngoài tách biệt, hệ vẫn có thể có các vận động khác nhau sau đó.

• *Các quỹ đạo pha tiến về một chu trình giới hạn mà các đặc trưng đều độc lập với các điều kiện ban đầu.*

Chu trình giới hạn này tương ứng với *chế độ cưỡng bức* của dao tử và dạng hình học của nó chỉ được xác định bởi các tính chất của hệ và các tính chất của kích thích. *Đây là một loại lực hút mới.* Hình 16 là hình ảnh pha của một pha dao tử *tuyến tính* có phương trình:

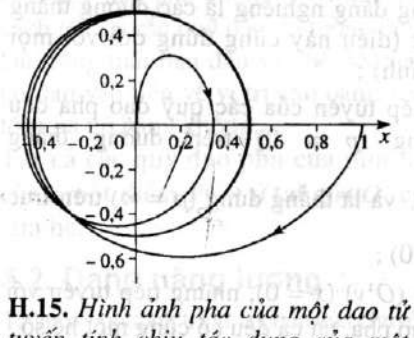
$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} + F\cos^2(\omega t).$$

Nếu chịu tác dụng của một lực kích thích khác, ta kiểm nghiệm thấy chu trình giới hạn không có cùng một dạng hình học như nhau.

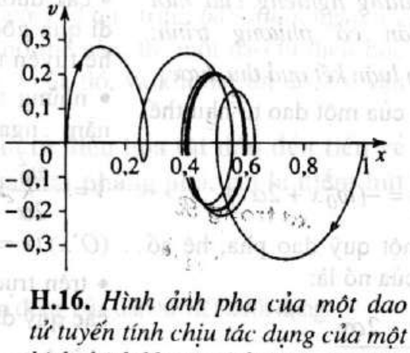
Hình ảnh pha trên hình 17 là hình ảnh pha của một dao tử *phi tuyến* bị kích thích hình sin:

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0)^3 - h\dot{x} + F\cos(\omega t).$$

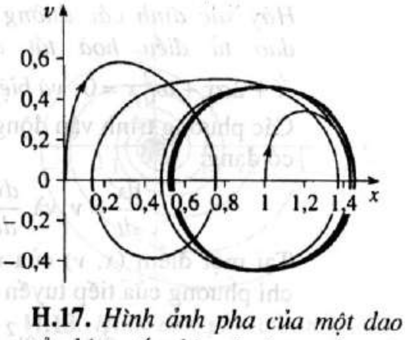
Chu trình giới hạn sẽ khác với chu trình của bộ kích thích tuyến tính dưới cùng một sự kích thích như nhau.



H.15. *Hình ảnh pha của một dao tử tuyến tính chịu tác dụng của một kích thích hình sin.*



H.16. *Hình ảnh pha của một dao tử tuyến tính chịu tác dụng của một kích thích không phải hình sin.*



H.17. *Hình ảnh pha của một dao tử phi tuyến chịu tác dụng của một kích thích hình sin.*

7 Hình ảnh pha của một dao tử tự - duy trì

Ta coi dao tử VAN DER POL như một mô hình của dao tử tự - duy trì. Ta ghi lại phương trình của nó:

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}(x^2 - x_0^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \text{ với } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ và } \lambda > 0$$

Ta làm việc trong mặt phẳng pha $\left(x, y = \frac{\dot{x}}{\omega_0}\right)$. Các phương trình vận động của dao tử VAN DER POL có dạng:

$$\frac{dx}{dt} = \omega_0 y \text{ và } \frac{dy}{dt} = -\frac{\lambda}{m}(x^2 - x_0^2)y - \omega_0 x.$$

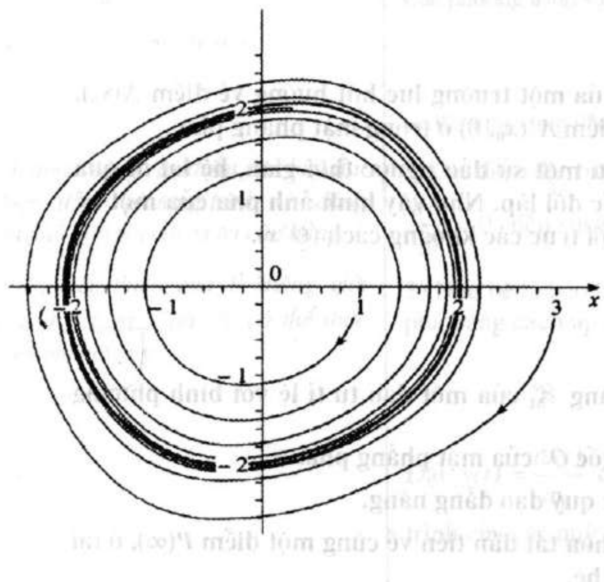
Do đó, khi kí hiệu r là khoảng cách giữa điểm pha (x, y) và điểm gốc, ta có:

$$\frac{1}{2}\frac{dr^2}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = -\frac{\lambda}{m}(x_0^2 - x^2)y^2.$$

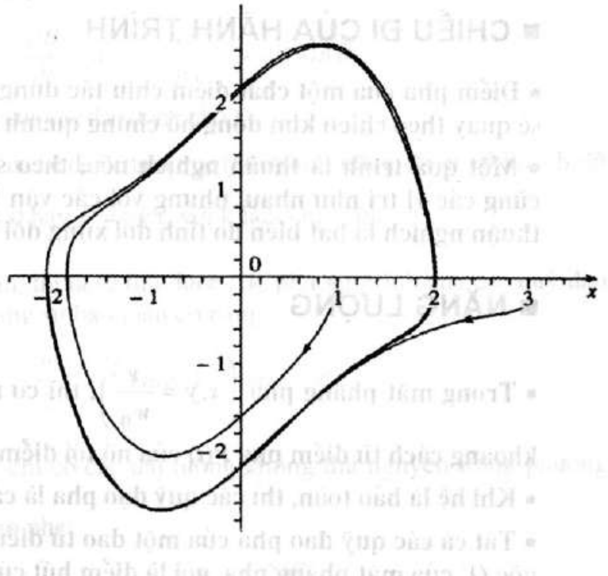
Các quỹ đạo pha hội tụ vào điểm gốc $\left(\frac{dr^2}{dt} < 0\right)$ khi $x > x_0$, nhưng sẽ phân kì $\left(\frac{dr^2}{dt} > 0\right)$ khi $x < x_0$.

Kết quả là sự tồn tại của một *chu trình giới hạn* giống như một vòng tròn khi λ nhỏ (*H.18*) và giống như một hình thoi biến dạng khi λ lớn (*H.19*). Dù các điều kiện ban đầu như thế nào, thì các quỹ đạo pha, tất cả đều tiến về cùng một chu trình giới hạn như nhau, và chỉ là hàm số của các đặc trưng của dao tử. Đối với các quỹ đạo pha, thì chu trình giới hạn này có tính *hấp dẫn* và một khi đạt tới chu trình hấp dẫn, thì điểm pha sẽ chạy trên đó mãi mãi.

Chế độ vĩnh cửu của một dao tử được duy trì thì độc lập với các điều kiện ban đầu.



H.18. *Hình ảnh pha của một dao tử* VAN DER POL *(λ nhỏ).*



H.19. *Hình ảnh pha của một dao tử* VAN DER POL *(λ lớn).*

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ **Các hệ cơ học có một vận động duy nhất đối với các điều kiện ban đầu xác định (nguyên lí của thuyết quyết định cơ học).**

■ HÌNH ẢNH PHA

• **Trạng thái của một hệ có một bậc tự do được biểu diễn, ở mọi thời điểm, bởi một điểm P(t) có toạ độ (x, v) trong một mặt phẳng gọi là mặt phẳng pha.**

• **Điểm *P*(*t*) là điểm tượng hình cho trạng thái của hệ, nghĩa là điểm pha của hệ ở thời điểm t. Khi thời gian trôi, điểm pha vạch một đường cong được chia độ theo *t*, gọi là quỹ đạo pha của hệ.**

Mọi quỹ đạo pha đều bắt đầu ở *P*(0), mà các toạ độ (*x*(0), *v*(0) là các điều kiện ban đầu của hệ.

• **Hình ảnh pha của một hệ là tập hợp các quỹ đạo pha của hệ thu được bằng cách coi tập hợp các điều kiện ban đầu là có thể thực hiện được.**

■ CÁC ĐIỂM ĐẶC BIỆT

• **Các điểm đặc biệt của hệ là các điểm pha, trong đó ta đồng thời có các hệ thức:**

$$\frac{dx}{dt} = 0 \text{ và } \frac{dv}{dt} = 0 .$$

Khi hệ được đặt vào một trong các điểm đặc biệt, thì hệ sẽ trú ngụ tại đó. Các điểm đặc biệt là các trạng thái cân bằng của hệ.

• **Các điểm đặc biệt của các hệ có một bậc tự do, khi chúng tồn tại, đều ở trên trục không gian (O'x) của mặt phẳng pha.**

■ CHIỀU ĐI CỦA HÀNH TRÌNH

• **Điểm pha của một chất điểm chịu tác dụng của một trường lực hút hướng về điểm $A(x_0)$, sẽ quay theo chiều kim đồng hồ chung quanh điểm $A'(x_0, 0)$ ở trong mặt phẳng pha.**

• **Một quá trình là thuận nghịch nếu, theo sau một sự đảo ngược thời gian, hệ lại đi qua cùng các vị trí như nhau, nhưng với các vận tốc đối lập. Như vậy hình ảnh pha của một hệ thuận nghịch là bất biến do tính đối xứng đối với trục các khoảng cách (*O'x*).**

■ NĂNG LƯỢNG

• **Trong mặt phẳng pha $\left(x, y = \frac{v}{w_0}\right)$, thì cơ năng $\mathscr{E}_M$ của một dao tử tỉ lệ với bình phương khoảng cách từ điểm pha *P*(*t*) của nó tới điểm gốc *O'* của mặt phẳng pha.**

• **Khi hệ là bảo toàn, thì các quỹ đạo pha là các quỹ đạo đẳng năng.**

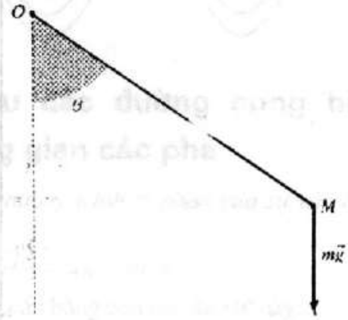
• **Tất cả các quỹ đạo pha của một dao tử điều hòa tắt dần tiến về cùng một điểm *P*(∞), ở tại gốc *O'* của mặt phẳng pha, gọi là điểm hút của hệ.**

Bài tập có lời giải

Hình ảnh pha của một con lắc đơn có biên độ lớn

ĐỀ BÀI

Một con lắc đơn được thực hiện với một thanh OM cứng, khối lượng không đáng kể và chiều dài l. Đầu mút O ở trên trục quay nằm ngang (Oz), ở đầu mút còn lại M thì được gắn cố định một khối lượng điểm m. Bỏ qua các lực ma sát.



1) Viết các phương trình vận động đối với cặp biến số trạng thái θ và $\omega = \dot{\theta}$.

Đặt $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$. Vậy ω_0 biểu diễn cái gì ?

2) Những điểm nào là những điểm đặc biệt của mặt phẳng pha.

3) Đặt $y = \dfrac{\omega}{\omega_0}$. Lợi ích của sự thay đổi biến số này là gì ? Cho thế năng bằng không khi $\theta = 0$, hãy viết phương trình của một quỹ đạo có cơ năng $\mathscr{E}_M$ trong mặt phẳng (θ, y).

4) Viết phương trình các đường phân cách là các quỹ đạo pha đi qua các điểm cân bằng không bền.

5) Hãy nêu đặc tính các quỹ đạo pha ở ngoài và ở trong các miền giới hạn bởi các đường phân cách. Biểu diễn hình ảnh pha.

HƯỚNG DẪN

Muốn viết phương trình vận động, cần phải tìm phương trình vi phân liên kết $\dfrac{d\omega}{dt}$, ω và θ hoặc các đại lượng tương đương $\ddot{\theta}, \dot{\theta}$ và θ.

Chứng tỏ rằng các điểm đặc biệt thu được từ các phương trình vận động rất phù hợp với các vị trí cân bằng.

Miền biến thiên của θ không giới hạn ở $[-\pi, \pi]$. Con lắc có thể thực hiện nhiều vòng.

LỜI GIẢI

1) Định lí mômen động, áp dụng ở O, sẽ cho phương trình chuyển động:

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta \text{, từ đó: } \ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin\theta$$

Các phương trình vận động là:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \text{ và } \frac{d\omega}{dt} = -\omega_0^2 \sin\theta .$$

ω_0 biểu thị xung động của các dao động nhỏ.

2) Các điểm đặc biệt của hệ đều ở trên trục $(O'\theta)$ tại những điểm có hoành độ $\dfrac{d\omega}{dt} = 0$, nên $\sin\theta = 0$ hay $\theta = \pm k\pi$, với k là số nguyên.

3) Nếu hệ là bảo toàn, thì ta sẽ thu được các phương trình của các quỹ đạo pha bằng cách áp dụng sự bảo toàn cơ năng:

$$\frac{m}{2}l^2\omega^2 + mgl(1-\cos\theta) = \mathscr{E}_M$$

Đặt $y(t) = \dfrac{\omega(t)}{\omega_0}$ để chỉ có các đại lượng không thứ nguyên trong phương trình của các quỹ đạo pha:

$$y^2 + 2(1-\cos\theta) = \frac{2\mathscr{E}_M}{mlg}$$

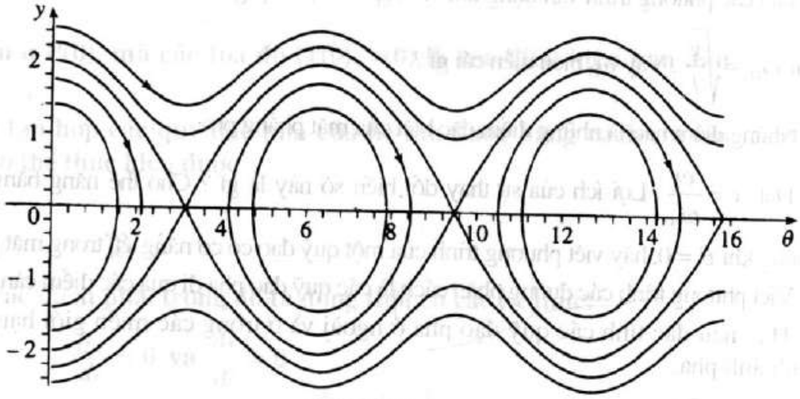
So sánh cơ năng kết hợp với một điểm của mặt phẳng pha với cơ năng của các điểm đặc biệt. Trong trường hợp nào thì chuyển động là chuyển động dao động.

4) Phương trình của các đường phân cách tương ứng với các giá trị của $\mathcal{E}_t$ đưa dẫn điểm pha đến các điểm đặc biệt kết hợp với các vị trí cân bằng không bền $y = 0$ và $\theta = (2k+1)\pi$.

Do đó, phương trình của các đường phân cách là:

$$y^2 + 2\,(1 - \cos\theta) = 4$$

5) Ở bên trong các miền được định ranh giới bởi các đường phân cách (xem sơ đồ dưới đây), thì hệ ở trong một giếng thế năng. Con lắc dao động qua lại một vị trí cân bằng bền. Chuyển động của nó là tuần hoàn với các quỹ đạo pha khép kín. Trái lại, khi điểm pha ở ngoài một trong các miền này, thì các quỹ đạo pha đều mở và *chuyển động của con lắc là một chuyển động quay vòng.*



Bài tập

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

1 Sự lượng tử hóa năng lượng của một dao tử điều hòa

Gọi $x(t)$ và $p(t)$ lần lượt là li độ và động lượng của một dao tử điều hòa tần số υ. Người ta áp đặt điều kiện lượng tử hóa :

$$\int p dx = nh \text{ (} n \text{ là số nguyên)}$$

trong đó h là hằng số Planck và tích phân được lấy trong một chu kì.

1) Chứng minh rằng cơ năng $\mathscr{E}_M$ chỉ có thể lấy các giá trị gián đoạn mà ta biểu thị theo hàm số của n, h và υ.

2) Tìm hình ảnh pha $(x, y = p)$ của loại dao tử này ?

• *Lời giải*

1) Quỹ đạo pha của dao tử trong mặt phẳng pha (x, p) có phương trình:

$$\frac{x^2}{\dfrac{2\mathscr{E}_M}{k}} + \frac{p^2}{2m\mathscr{E}_M} = 1 .$$

Đây là một elip có các bán trục: $a = \sqrt{\dfrac{2\mathscr{E}_M}{k}}$ và $b = \sqrt{2m\mathscr{E}_M}$

Diện tích của elip này là:

$$\oint p dx = \pi ab = 2\pi\mathscr{E}_M\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi\mathscr{E}_M}{\omega_0} = \frac{\mathscr{E}_M}{\nu}$$

Do đó: $\mathscr{E}_M = nh\nu$.

2) Với mỗi giá trị cho phép của năng lượng, lại tương ứng một quỹ đạo pha elip với các bán trục:

$$a = \sqrt{\frac{2nh\nu}{k}} \text{ và } b = \sqrt{2mnh\nu} .$$

Hình ảnh pha của một dao tử như thế được hợp thành bởi một họ đường elip. Giữa hai elip kế tiếp nhau thì có một diện tích bằng $h\upsilon$.

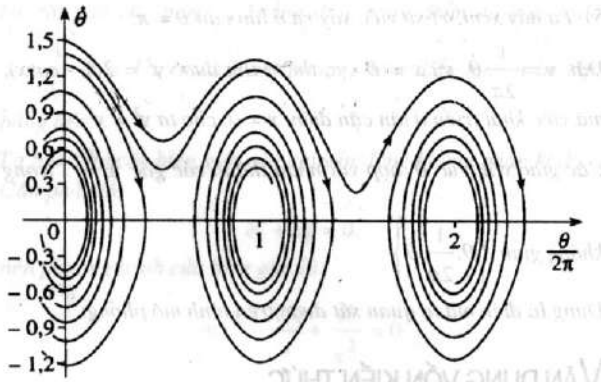
2 Quỹ đạo pha của một con lắc tắt dần có biên độ lớn

Hãy bình luận hình ảnh pha của một con lắc đơn tắt dần biên độ lớn có phương trình $\ddot{\theta} + 2\alpha\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$

• *Lời giải*

Hệ nghiên cứu là một hệ phi tuyến. Các điểm đặc biệt ở trên trục các khoảng cách (O'x), sẽ kết hợp luân phiên với các vị trí cân bằng bền và không bền.

Khi hệ tắt dần, thì các quỹ đạo pha sẽ toàn bộ sít lại gần trục các khoảng cách (O'x). Nếu năng lượng ban đầu là đủ, thì con lắc sẽ thực hiện một hay nhiều vòng quay rồi sau, chuyển động của nó trở thành dao động tắt dần. Lúc đó các quỹ đạo pha vận động về phía tâm hút, được cấu thành bởi điểm đặc biệt kết hợp với vị trí cân bằng bền tương ứng.



3 Nghiên cứu các đường cong biên giới của không gian các pha

Có một dao tử mà phương trình vi phân của sự vận động có dạng :

$$\ddot{\theta} = -4\pi^2 \sin\theta .$$

1) Xác định các vị trí cân bằng bền của dao tử này.

2) Xác định các vị trí cân bằng không bền của dao tử này.

3) Tìm chu kì của các dao động nhỏ chung quanh các vị trí cân bằng bền.

4) Xác định các đường cong biên giới trong không gian pha.

5) Các đường cong đó cắt trục θ trong không gian $\left\{\theta, \dfrac{1}{2\pi}\dot{\theta}\right\}$ như thế nào ?

• *Lời giải*

1) $\theta = 0, 2\pi, 4\pi, ...$ *2)* $\theta = \pi, 3\pi, 5\pi, ...$ *3)* $T_0 = 1s$.

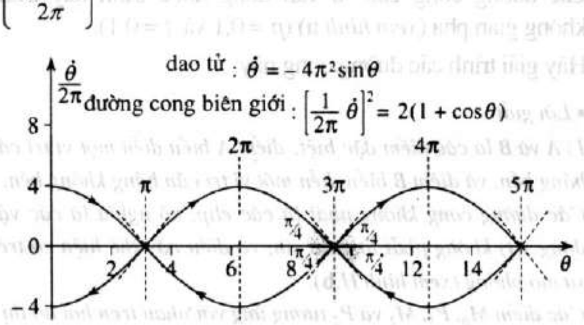
4) Khi nhân với $\dot{\theta}$ *, và khi tích phân đối với thời gian, thì ta được:*

$$\dot{\theta}^2 - 8\pi^2 .\cos\theta = cte .$$

Các đường cong biên giới phải đi qua các điểm cân bằng không bền, như :

$$(\theta = \pi ; \dot{\theta} = 0), (\theta = 3\pi ; \dot{\theta} = 0), (\theta = 5\pi ; \dot{\theta} = 0), ...$$

Phương trình các biên giới: $\theta^2 - 8\pi^2 \cos\theta = 8\pi^2$ *. Các đường cong này được vạch ra bằng sự mô phỏng số học trên sơ đồ dưới đây:* $\left\{\theta, \dfrac{1}{2\pi}\dot{\theta}\right\}$



5) Ta hãy xem xét sự việc xảy ra ở lân cận $\theta = \pi$.

Đặt $y = \frac{1}{2\pi}\dot{\theta}$ và $x = \theta - \pi$, thì ta thu được $y^2 = 2(1 - \cos x)$, mà việc khai triển ở lân cận điểm $x = 0$, cho ta $y^2 = x^2$.

Các giao với trục θ hợp với nhau thành các góc $\pm\frac{\pi}{4}$, trong không gian $\left\{\theta, \frac{1}{2\pi}\dot{\theta}\right\}$.

Đúng là điều mà ta quan sát được trên hình mô phỏng.

VẬN DỤNG VỐN KIẾN THỨC

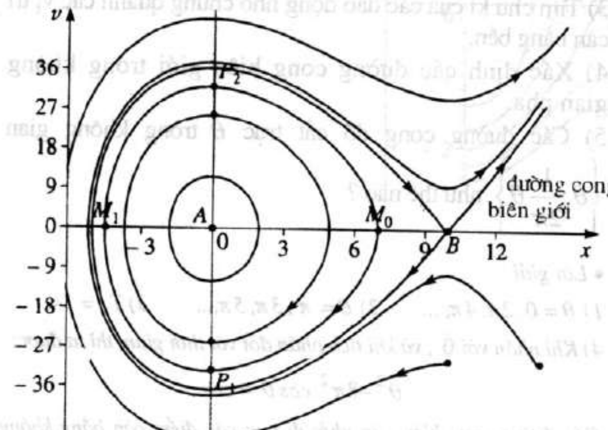
HÌNH ẢNH PHA

4* Dao tử phi tuyến

Cho một dao tử bị chi phối bởi phương trình vi phân sau đây:

$$\ddot{x} = -4\pi^2 x(1 - px)\,.$$

Hình ảnh pha được trình bày dưới đây ($p = 0,1$)



1) Các điểm A và B biểu diễn điều gì ?

2) Dao tử này vận động trong một hàm như thế nào ?

3) Bây giờ dao tử bị chi phối bởi phương trình vi phân sau:

$$\ddot{x} = -4\pi^2 x(1 - px) - 2\pi f\dot{x}\,.$$

Các đường cong của sự vận động được trình bày trong không gian pha (*xem hình* a) ($p = 0,1$ và $f = 0,1$).

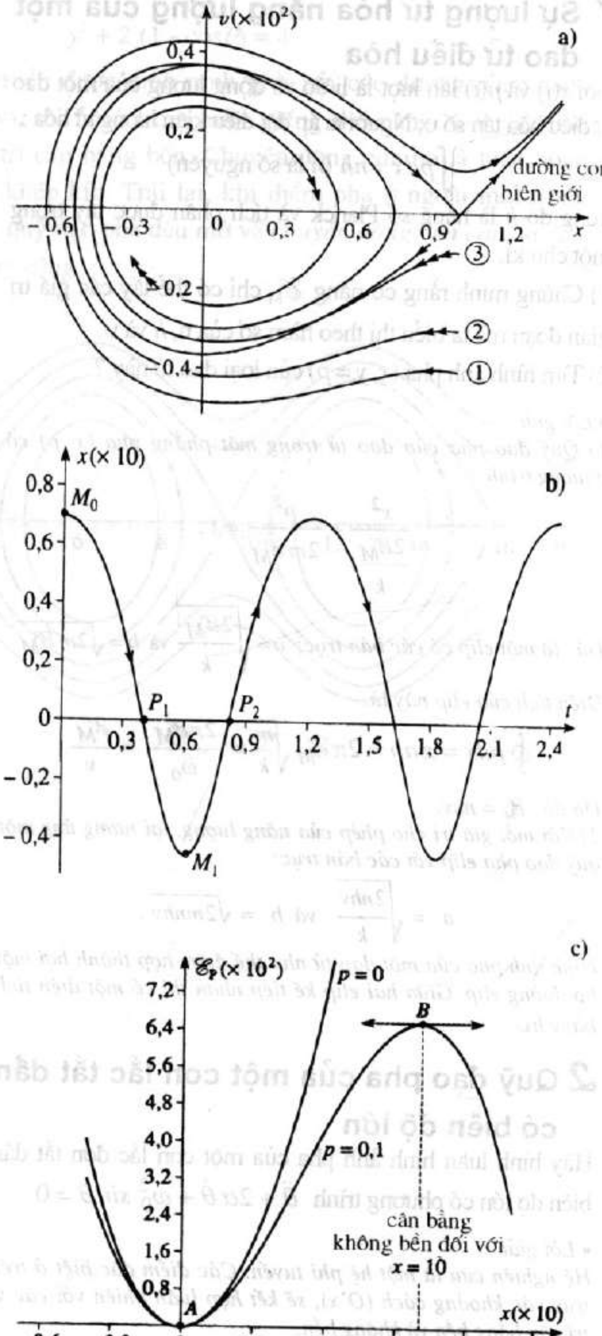
Hãy giải trình các đường cong này.

• *Lời giải*

1) A và B là các điểm đặc biệt: điểm A biểu diễn một vị trí cân bằng bền, và điểm B biểu diễn một vị trí cân bằng không bền. Các đường cong không phải là các elip, có nghĩa là các vận động x(t) không phải là hình sin, và điều này thể hiện rõ trên sự mô phỏng (xem hình H.b).

Các điểm M_0, P_1, M_1 và P_2 tương ứng với nhau trên hai đồ thị.

2) Hàm thế có dạng $4\pi^2\left(\frac{x^2}{2} - p\frac{x^3}{3}\right)$ được vẽ trên hình, mà trên đó ta nêu bật sự bền vững của điểm cân bằng A, và sự không bền vững của điểm cân bằng B (xem hình H.c).



3) Đi từ 1, đường cong trong không gian pha không vượt qua đường cong biên giới, như vậy nghiệm phân kì. Ngược lại, đi từ 2 và 3, các đường cong trong không gian pha vượt qua đường biên giới, như vậy nghiệm hội tụ về điểm A.

5* *Chuyển động của một chất điểm trong một thế có dạng*

$$\mathscr{E}_p(x) = -\frac{k}{x} + \frac{A}{2x^2}, \text{ với } k \text{ và } \underline{A} \text{ dương.}$$

Hãy đoán trước các đặc trưng của hình ảnh pha của chất điểm đó.

• *Lời giải*

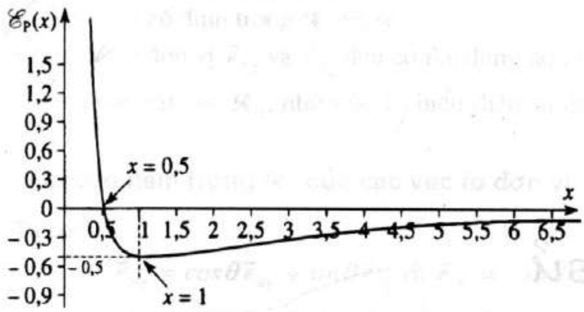
Phương trình vi phân của sự vận động của chất điểm là:

$$m\ddot{x} = -\frac{k}{x^2} + \frac{A}{x^3}.$$

Thế năng của chất điểm này đi qua một cực tiểu âm đối với $x = \frac{A}{k}$ *:*

$$\mathscr{E}_{p\,min} = -\frac{k^2}{2A}$$

Trên hình mô phỏng dưới đây, ta nhìn thấy đồ thị của $\mathscr{E}_p$ *(A = 1 và k = 1)*



Đồ thị này cho phép ta khẳng định rằng điểm có hoành độ $x = \frac{A}{k}$ *(x = 1 trên hình mô phỏng) biểu diễn một vị trí cân bằng bền.*

Ta phải tìm các biên giới của chuyển động không phân kì ở x ; Cần phải có:

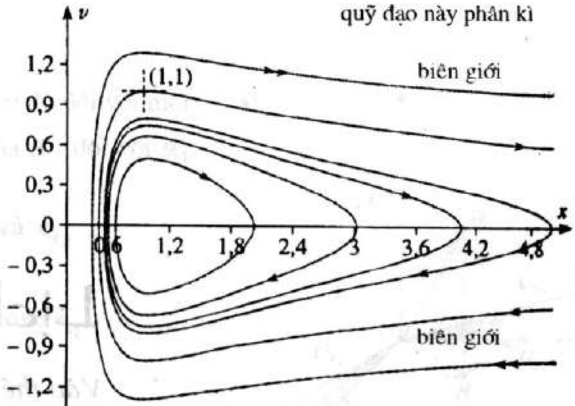
$$\mathscr{E}_k + \mathscr{E}_p = 0,$$

nên phương trình của biên giới là:

$$m\dot{x}^2 - \frac{2k}{x} + \frac{A}{x^2} = 0$$

Đây là đường cong thu được nhờ sự mô phỏng bằng số trên sơ đồ dưới đây (m = 1, A = 1 và k = 1). Ta kiểm tra thấy rằng điểm (x = 1, v(x) = $\dot{x}$ *= 1) thuộc hẳn vào đường cong đó. Chú ý rằng biên giới này không có giới hạn hữu hạn.*

__Chú ý__: Thế năng này biểu diễn dạng thế hiệu dụng mà ta sẽ nghiên cứu trong các chuyển động có lực xuyên tâm.



7 THAY ĐỔI CÁC HỆ QUY CHIẾU

Lịch sử

Vào thế kỉ thứ XVI, COPERNIC, nhà thiên văn Ba Lan (1473 -1543) đã đưa ra một mô hình Vũ Trụ mà trong đó các hành tinh bao gồm Trái Đất đều xoay quanh Mặt Trời. Trái với điều "hiển nhiên", Trái Đất không phải là hệ quy chiếu duy nhất, mà đối với nó, ta có thể nhận thức được một chuyển động.

Ít lâu sau, trong tác phẩm "Đối thoại" về hai hệ to lớn trên thế giới (1632) của mình GALILÉE đã khẳng định là một hòn đá được thả từ đỉnh cột buồm của một con tàu và được kích động một chuyển động đều, phải rơi chính xác xuống chân cột buồm. Theo ngôn ngữ hiện đại thì là ông nêu lên tính tương đương của các hệ quy chiếu gắn với Trái Đất và với con tàu.

Sự khai thác và sự hình thức hóa các ý tưởng trên tiếp tục cho đến thế kỉ XIX. Ta có thể dẫn ra CORIOLIS, kĩ sư Pháp, người đã giải quyết vào năm 1832 bài toán hợp thành các gia tốc.

MỤC TIÊU

- Biết khái niệm vectơ quay.
- Phân biệt hệ quy chiếu gốc và cơ sở của phép chiếu.
- Biết các hệ thức làm thay đổi hệ quy chiếu đối với vận tốc và gia tốc.

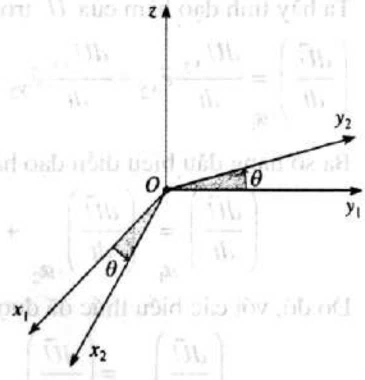
ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

- Khái niệm về hệ quy chiếu
- Phép lấy đạo hàm của một hàm vectơ.
- Vận tốc và gia tốc.

Chú ý :

Trong toàn chương này:

- *$\mathcal{R}_1$ và $\mathcal{R}_2$ chỉ hai hệ quy chiếu.*
- *$(0_1;\ \vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{y_1}, \vec{e}_{z_1})$ và $(0_2;\ \vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2}, \vec{e}_{z_2})$ là hai mốc tọa độ Descartes gắn lần lượt với $\mathcal{R}_1$ và $\mathcal{R}_2$.*



H.1. *Hệ quy chiếu R_2 quay chung quanh trục (Oz), cố định trong R_1.*

Phép lấy đạo hàm của một véctơ đối với thời gian

Đạo hàm đối với thời gian của một hàm số vectơ $\vec{U}$ (t) phụ thuộc vào hệ quy chiếu của người quan sát thực hiện phép lấy đạo hàm đó.

Ta phải tìm cách biểu diễn hệ thức liên kết $\left(\dfrac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1}$ và $\left(\dfrac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2}$ bằng cách bắt đầu với hai trường hợp đặc biệt quan trọng.

I.1. $\mathcal{R}_2$ quay xung quanh một trục cố định của $\mathcal{R}_1$

I.1.1. Mô tả các hệ quy chiếu

- Trục (0z) cố định trong $\mathcal{R}_1$ và $\mathcal{R}_2$.
- Các vectơ đơn vị $\vec{e}_{x_2}$ và $\vec{e}_{y_2}$ đều có thể dùng làm mốc tọa độ đối với một người quan sát của $\mathcal{R}_1$, nhờ góc θ biểu diễn sự quay của $\mathcal{R}_2$ đối với $\mathcal{R}_1$ (*H.1*).

I.1.2. Đạo hàm trong $\mathcal{R}_1$ của các véc tơ đơn vị $\vec{e}_{x_2}$ và $\vec{e}_{y_2}$

Ta có:

$$\vec{e}_{x_2} = \cos\theta\,\vec{e}_{x_1} + \sin\theta\,\vec{e}_{y_1} \text{ và } \vec{e}_{y_2} = -\sin\theta\,\vec{e}_{x_1} + \cos\theta\,\vec{e}_{y_1}$$

trong đó góc θ là hàm số của thời gian *t*. Từ đó:

$$\left(\frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = (-\sin\theta\,\vec{e}_{x_1} + \cos\theta\,\vec{e}_{y_1})\dot{\theta} \text{ và } \left(\frac{d\vec{e}_{y_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = (-\cos\theta\,\vec{e}_{x_1} - \sin\theta\,\vec{e}_{y_1})\dot{\theta},$$

nên : $\left(\dfrac{d\vec{e}_{x_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \dot{\theta}\vec{e}_{y_2}$ và $\left(\dfrac{d\vec{e}_{y_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = -\dot{\theta}\vec{e}_{x_2}$.

Thành thử, hai vectơ này, được xác định trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}_1$, có thể được biểu thị, nhờ một cơ sở gắn liền với $\mathcal{R}_2$, linh động trong $\mathcal{R}_1$.

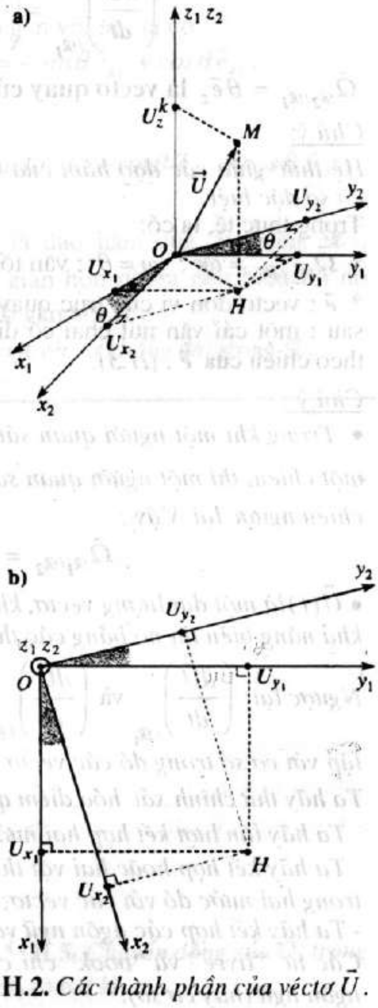
Cũng có khả năng biểu thị các vectơ đó độc lập với mọi cơ sở. Thật vậy, nếu ta đặt $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{e}_z$, thì lúc đó:

$$\left(\frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_{x_2} \text{ và } \left(\frac{d\vec{e}_{y_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_{y_2}.$$

I.1.3. Các đạo hàm của một vectơ trong $\mathcal{R}_1$ và trong $\mathcal{R}_2$.

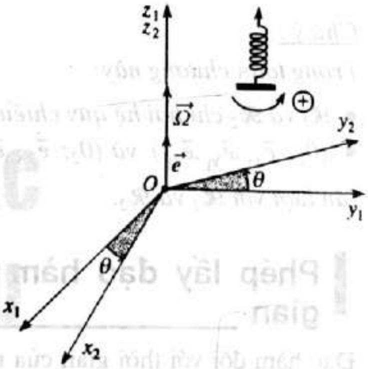
Ta biểu thị hàm vectơ $\vec{U}$ trong cơ sở $(\vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2}, \vec{e}_z)$:

$\vec{U} = U_{x_2}\vec{e}_{x_2} + U_{y_2}\vec{e}_{y_2} + U_z\vec{e}_z$, trong đó U_{x_2}, U_{y_2} và U_z đều là hàm số của thời gian, cũng như các véctơ đơn vị $\vec{e}_{x_2}$ và $\vec{e}_{y_2}$ (*H.2*) đối với người quan sát của $\mathcal{R}_1$



H.2. *Các thành phần của véctơ $\vec{U}$.*

Ta hãy tính đạo hàm của $\vec{U}$ trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}_1$:



H.3. Vectơ quay.

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \frac{dU_{x_2}}{dt}\vec{e}_{x_2} + \frac{dU_{y_2}}{dt}\vec{e}_{y_2} + \frac{dU_z}{dt}\vec{e}_z + U_{x_2}\left(\frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} + U_{y_2}\left(\frac{d\vec{e}_{y_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1}.$$

Ba số hạng đầu biểu diễn đạo hàm của $\vec{U}$ trong $\mathcal{R}_2$ nên:

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2} + U_{x_2}\left(\frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} + U_{y_2}\left(\frac{d\vec{e}_{y_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1}.$$

Do đó, với các biểu thức đã được chứng minh trước đây:

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2} + \dot{\theta}\vec{e}_z \wedge (U_{x_2}\vec{e}_{x_2} + U_{y_2}\vec{e}_{y_2})$$

hay $$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2} + \dot{\theta}\vec{e}_z \wedge \vec{U}.$$

I.1.4. Vectơ quay

Vectơ $\dot{\theta}\vec{e}_z$ đặc trưng cho sự quay của $\mathcal{R}_2$ đối với $\mathcal{R}_1$.

Nếu hệ quy chiếu $\mathcal{R}_2$ quay xung quanh một trục cố định của $\mathcal{R}_1$, thì:

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{U}.$$

$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} = \dot{\theta}\vec{e}_z$ là vectơ quay của $\mathcal{R}_2$ đối với $\mathcal{R}_1$.

Chú ý:

Hệ thức giữa các đạo hàm của $\vec{U}$ không tạo thành hệ quy chiếu của một cơ sở đặc biệt.

Trong thực tế, ta có:

* $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} = \omega\vec{e}$; $\omega = \dot{\theta}$: vận tốc góc của chuyển động quay;

* $\vec{e}$: vectơ đơn vị của trục quay theo "chiều dương", được xác định như sau : một cái vặn nút chai cổ điển nếu quay theo chiều đó sẽ di chuyển theo chiều của $\vec{e}$. (*H.3*).

Chú ý :

- *Trong khi một người quan sát của $\mathcal{R}_1$ nhìn thấy $\vec{e}_{x_2}$ và $\vec{e}_{y_2}$ quay theo một chiều, thì một người quan sát của $\mathcal{R}_2$ nhìn thấy $\vec{e}_{x_1}$ và $\vec{e}_{y_1}$ quay theo chiều ngược lại. Vậy :*

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2} = -\dot{\theta}\vec{e}_z = -\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}.$$

- *$\vec{U}(t)$ là một đại lượng vectơ, không phụ thuộc vào hệ quy chiếu, dù ta có khả năng biểu thị nó bằng các thành phần trong các cơ sở khác nhau.*

Ngược lại: $\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1}$ *và* $\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2}$ *là hai vectơ khác nhau, và điều này độc lập với cơ sở trong đó các vectơ này được biểu thị.*

Ta hãy thử chính xác hóa điểm quan trọng này nhờ nêu một sự tương tự:

- Ta hãy lần lượt kết hợp hai nước, ví dụ: Pháp và Anh, với $\mathcal{R}_1$ và $\mathcal{R}_2$;

- Ta hãy kết hợp hoặc hai vật thể, hoặc hai khái niệm riêng cho mỗi nước trong hai nước đó với các vectơ;

- Ta hãy kết hợp các ngôn ngữ với các cơ sở của phép chiếu.

Các từ "livre" và "book" chỉ cùng một vật thể, được biểu thị trong hai ngôn ngữ (hay cơ sở).

Ngược lại, một vài khái niệm được định nghĩa đối với một xứ sở (hay hệ quy chiếu): "Đồng bào của tôi" chỉ các tập hợp những con người khác nhau đối với một cư dân của $\mathcal{R}_1$ và một cư dân của $\mathcal{R}_2$, và điều này không phụ thuộc vào tiếng nói mà khái niệm "Đồng bào của tôi" được biểu thị.
Sự khác nhau cơ bản này giữa hệ quy chiếu định nghĩa hay hệ quy chiếu gốc và cơ sở của phép chiếu sẽ được chính xác hóa trong các áp dụng của chương này.

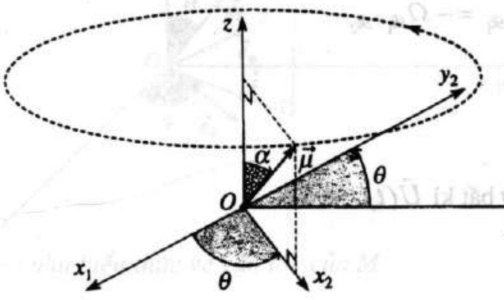
Áp dụng 1

Cho vectơ $\vec{\mu}$, không đổi trong $\mathcal{R}_2$ (H.4)

$$\vec{\mu} = \mu\cos\alpha\vec{e}_z + \mu\sin\alpha\vec{e}_{x_2}$$

$\mathcal{R}_2$ đang quay chung quanh trục cố định (Oz) đối với $\mathcal{R}_1$, với $\theta = \omega t$ (H.4). Hãy biểu thị $\left(\frac{d\vec{\mu}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1}$ trong các cơ sở:

a) $(\vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{y_1}, \vec{e}_z)$; b) $(\vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2}, \vec{e}_z)$.



a) Vectơ quay của $\mathcal{R}_2$ đối với $\mathcal{R}_1$ là:

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} = \omega\vec{e}_z.$$

nên:

$$\left(\frac{d\vec{\mu}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \omega\vec{e}_z \wedge (\mu\cos\alpha\vec{e}_z + \mu\sin\alpha\vec{e}_{x_2}) = \omega\mu\sin\alpha\,\vec{e}_{y_2}$$

b) Trong cơ sở gắn với $\mathcal{R}_1$, ta có:

$$\vec{e}_{y_2} = -\sin\theta\vec{e}_{x_1} + \cos\theta\vec{e}_{y_1},$$

Do đó:

$$\left(\frac{d\vec{\mu}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \omega\mu\sin\alpha\ (-\sin\theta\,\vec{e}_{x_1} + \cos\theta\,\vec{e}_{y_1})$$

Dù vectơ này là đạo hàm của $\vec{\mu}$ trong $\mathcal{R}_1$, nhưng sẽ đơn giản hơn nhiều nếu biểu thị nó trong một cơ sở gắn với $\mathcal{R}_2$.

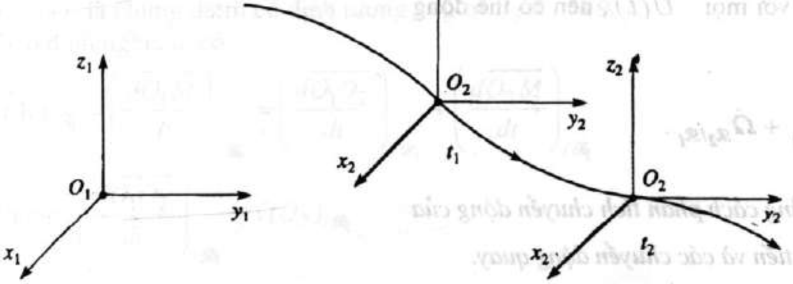
H.4. *μ là một véc tơ không đổi trong $\mathcal{R}_2$.*

I.2. $\mathcal{R}_2$ chuyển động tịnh tiến đối với $\mathcal{R}_1$

I.2.I. Định nghĩa

$\mathcal{R}_2$ tịnh tiến đối với $\mathcal{R}_1$ nếu các vectơ gắn với $\mathcal{R}_2$ là "*không đổi*" trong $\mathcal{R}_1$, nghĩa là phương, chiều và độ dài của chúng là bất biến đối với một người quan sát của $\mathcal{R}_1$.

Nói cách khác, $\vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2}$ và $\vec{e}_{z_2}$ "*không quay*" và giữ một sự định hướng không đổi đối với một người quan sát của $\mathcal{R}_1$ *(H.5)*



H.5. *Chuyển động của O_2 trong $\mathcal{R}_1$ là bất kì.*

I.2.2. Các đạo hàm của $\vec{u}$ trong $\mathcal{R}_1$ và trong $\mathcal{R}_2$

$\vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2}, \vec{e}_{z_2}$ đều độc lập với thời gian trong $\mathcal{R}_1$. Vậy:

Nếu $\mathcal{R}_2$ tịnh tiến đối với $\mathcal{R}_1$ thì:

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2}$$

Nhớ rằng ta còn có thể đặt:

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{U},$$

bằng cách cho $\vec{\Omega}$ giá trị không.

I.3. $\mathcal{R}_2$ có chuyển động bất kì đối với $\mathcal{R}_1$

Có thể chỉ ra rằng (và ta sẽ chấp nhận điều này) ở mỗi thời điểm, tồn tại một **vectơ quay tức thời duy nhất** $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}$ (có độ dài và phương *thoạt nhìn* là thay đổi được) sao cho:

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{U},$$

Chú ý quan trọng:

- $\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} - \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{U}$, *do đó :* $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} = -\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2}$
- *Nếu $\mathcal{R}_1$ và $\mathcal{R}_2$ đều tịnh tiến, thì* $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} = \vec{0}$.

I.4. Sự tổng hợp của các vectơ quay

Cho ba hệ quy chiếu, $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, và $\mathcal{R}_3$, và một hàm vectơ bất kì $\vec{U}(t)$.

Ta có:

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{U},$$

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_3} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_2} \wedge \vec{U};$$

do đó: $$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_3} + (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}) \wedge \vec{U}.$$

Hơn nữa : $$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_3} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{U}.$$

Vì hai hệ thức cuối đều có hiệu lực đối với mọi $\vec{U}(t)$, nên có thể đồng nhất các số hạng trong đó, và ta có:

Sự tổng hợp của các vectơ quay:

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_1} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}.$$

<u>*Chú ý :*</u>

Ta có thể xác định vectơ quay $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}$ bằng cách phân tích chuyển động của $\mathcal{R}_2$ đối với $\mathcal{R}_1$ thành các chuyển động tịnh tiến và các chuyển động quay.

Áp dụng 2

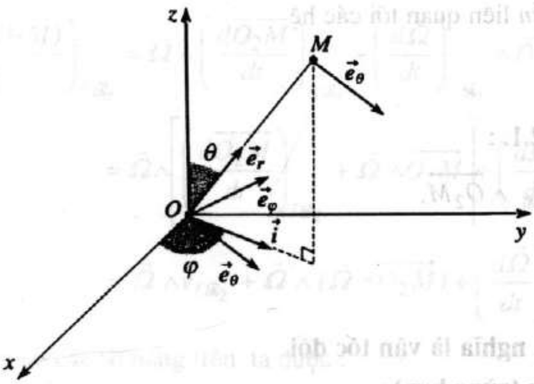
Đạo hàm của các vectơ cơ sở địa phương của các tọa độ cầu

Cho một hệ tọa độ Descartes $(O;\ \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ gắn vào một hệ quy chiếu $\mathcal{R}$. Một điểm M được xác định vị trí nhờ các tọa độ cầu của nó (r, θ, φ).

Cho hệ quy chiếu $\mathcal{R}'$, trong đó O là cố định, cũng như các vectơ cơ sở địa phương $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ (H.6).

Hãy xác định $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$, rồi sau đó các biểu thức:

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}},\ \left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} \text{ và } \left(\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}$$



cũng như biểu thức về vận tốc của M.

H.6.

Ta hãy chứng minh rằng chuyển động của $\mathcal{R}'$ đối với $\mathcal{R}$ được phân tích thành hai chuyển động quay giả sử ta có hệ quy chiếu $\mathcal{R}_1$ gắn vào hệ tọa độ $(0; \vec{i}, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ và quay quanh trục cố định (Oz) đối với $\mathcal{R}$:

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}} = \dot{\varphi}\vec{e}_z.$$

$\vec{e}_\varphi$ là một vectơ không đổi của $\mathcal{R}_1$ và $\mathcal{R}'_2$. Như vậy: $\mathcal{R}'$ quay quanh trục cố định $(O;\ \vec{e}_\varphi)$ đối với $\mathcal{R}_1$ và:

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}_1} = \dot{\theta}\vec{e}_\varphi.$$

Vậy: $$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \dot{\varphi}\vec{e}_z + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi.$$

Chú ý rằng biểu thức đơn giản của $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ đã sử dụng một cơ sở không gắn với $\mathcal{R}'$ và cũng không gắn với $\mathcal{R}$.

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} + (\dot{\varphi}\vec{e}_z + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi) \wedge \vec{e}_r$$

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} = \vec{0}, \text{ và } \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + \dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

và cũng như vậy:

$$\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\varphi - \dot{\theta}\vec{e}_r$$

$$\left(\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = -\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_r - \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\theta.$$

Cuối cùng $\overline{OM} = r\vec{e}_r$, do đó:

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}.$$

Vậy: $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi.$

▸ **Để tập luyện : bài tập 4.**

2 Áp dụng cho các vận tốc

2.1. Vận tốc của một điểm trong hai hệ quy chiếu

O_1 và O_2 là những điểm cố định tương ứng trong $\mathcal{R}_1$ và $\mathcal{R}_2$.

Theo định nghĩa ta có:

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\overline{O_1M}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\overline{O_1O_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} + \left(\frac{d\overline{O_2M}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1}$$

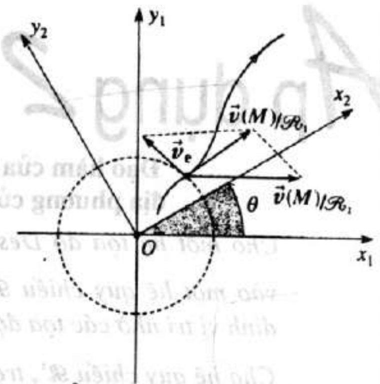
Nhưng: $$\left(\frac{d\overline{O_1O_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \vec{v}(O_2)_{/\mathcal{R}_1}$$

Và $\left(\dfrac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\dfrac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}.$

Do đó: $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_2} + \vec{v}(O_2)_{/\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}$

Hệ thức này dẫn về gốc O_2.

Ta đi tìm lại một cách ghi theo công thức chỉ dẫn ra $\mathcal{R}_1$ và $\mathcal{R}_2$.



▸ **Để tập luyện : bài tập 1, 2, và 5.**

H.7. *Sự tổng hợp của các vận tốc.*

2.2. Điểm trùng hợp

Theo định nghĩa, điểm trùng hợp của M ở thời điểm t trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ là điểm $M_{\mathcal{R}}$, gắn vào $\mathcal{R}_1$ và chiếm cùng một vị trí như M ở thời điểm t.

Nhớ rằng một dãy các điểm trùng hợp sẽ xác định quỹ đạo của M trong $\mathcal{R}$.

2.3. Vận tốc kéo theo

Vận tốc kéo theo, ở M, của $\mathcal{R}_2$ đối với $\mathcal{R}_1$ là vận tốc trong $\mathcal{R}_1$ của điểm trùng hợp $M_{\mathcal{R}_2}$. Nhớ rằng điểm này là cố định trong $\mathcal{R}_2$:

$$\vec{v}_e(M) = \vec{v}(M_{\mathcal{R}_2})_{/\mathcal{R}_1}$$

Ký hiệu $\vec{v}_e$ chỉ được sử dụng *nếu không bị nhầm lẫn* liên quan tới các hệ quy chiếu.

2.4. Sự tổng hợp của các vận tốc

$M_{\mathcal{R}_2}$ là một điểm cố định của $\mathcal{R}_2$. Theo hệ thức ở **§2.1.** :

$$\vec{v}_e(M) = \vec{v}(M_{\mathcal{R}_2})_{/\mathcal{R}_1} = \vec{v}(O_2)_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}.$$

Vậy nên:

Sự tổng hợp của các vận tốc được biểu thị bằng:

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_2} + \vec{v}_e(M)$$

trong đó $\vec{v}_e(M)$ là vận tốc kéo theo của điểm M, nghĩa là vận tốc đối với $\mathcal{R}_1$ của điểm M, nếu nó cố định trong $\mathcal{R}_2$ (điểm trùng hợp).

Đây chính là hệ thức mà ta cần phải ghi nhớ, chứ không phải là hệ thức thu được ở §2.1.

Các áp dụng sau đây chứng tỏ rằng sự tính toán trực tiếp vận tốc kéo theo xuất phát từ định nghĩa, thì thường là đơn giản.

2.5. Các trường hợp đặc biệt

2.5.1. Trường hợp $\mathcal{R}_2$ tịnh tiến đối với $\mathcal{R}_1$

$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} = \vec{0}$ và $\vec{v}_e$ độc lập với điểm M. Vậy **tất cả các điểm gắn vào $\mathcal{R}_2$ đều có cùng vận tốc như nhau đối với $\mathcal{R}_1$**

2.5.2. Trường hợp $\mathcal{R}_2$ quay đối với $\mathcal{R}_1$ chung quanh một trục cố định

Cho một chuyển động quay quanh trục (Oz) với vận tốc góc ω:

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} = \omega\vec{e}_z$$

Điểm trùng hợp $M_{\mathcal{R}_2}$ đi theo một quỹ đạo tròn trong $\mathcal{R}_1$; do đó

$$\vec{v}_e(M) = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{OM} = \omega\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{OM}.$$

Vận tốc kéo theo này được biểu diễn khá đơn giản trong cơ sở địa phương của các tọa độ trục:

$$\vec{v}_e(M) = \omega r\vec{e}_\theta$$

3 Áp dụng cho các gia tốc

3.I. Các gia tốc của một điểm trong hai hệ quy chiếu

Ta trở lại biểu thức đã được chứng minh ở §2.1.

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_2} + \vec{v}(O_2)_{/\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}.$$

Ta hãy tính đạo hàm trong $\mathcal{R}_1$ của mỗi số hạng. Để đơn giản hóa các kí hiệu, ta thỏa thuận với nhau rằng $\vec{\Omega}$ có nghĩa là $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}$, $\vec{v}$ có nghĩa là $\vec{v}(M)$, và động tử là M. Như vậy, ta có:

$$\left(\frac{d\vec{v}_{/\mathcal{R}_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{v}_{/\mathcal{R}_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{/\mathcal{R}_2} = \vec{a}_{/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{/\mathcal{R}_2};$$

$$\left(\frac{d\vec{v}(O_2)_{/\mathcal{R}_1}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \vec{a}(O_2)_{/\mathcal{R}_1};$$

$$\left(\frac{d(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_2M})}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \vec{\Omega} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} + \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}$$

$$= \vec{\Omega} \wedge \left[\left(\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_2M}\right] + \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}$$

$$= \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_2M}) + \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}.$$

Khi tập hợp lại các số hạng trên, ta được :

$$\vec{a}_{/\mathcal{R}_1} = \vec{a}_{/\mathcal{R}_2} + \vec{a}(O_2)_{/\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_2M}) + \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{/\mathcal{R}_2}$$

Ta chỉ còn phải tìm được một cách trình bày hệ thức này mà không làm xuất hiện gốc O_2.

3.2. Gia tốc kéo theo

Gia tốc trong $\mathcal{R}_1$ của điểm trùng hợp ở M trong $\mathcal{R}_2$, và bất động trong $\mathcal{R}_2$, được gọi là **gia tốc kéo theo ở M của $\mathcal{R}_2$ đối với $\mathcal{R}_1$.**

$$\vec{a}_e(M) = \vec{a}(M_{\mathcal{R}_2})_{/\mathcal{R}_1}$$

Gia tốc kéo theo, thường được tính toán đơn giản xuất phát từ định nghĩa của nó.

<u>Chú ý :</u> Gia tốc theo không bằng đạo hàm trong $\mathcal{R}_1$ của vận tốc theo.

3.3. Gia tốc Coriolis

Lấy một điểm M cố định trong $\mathcal{R}_2$ (hoặc gắn với $\mathcal{R}_2$), thì biểu thức của $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}_1}$ sẽ đồng nhất hóa với gia tốc theo của M ; khi sử dụng biểu thức trên đây (xem §3.1.) thì ta được :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_2} = 0 \text{ và } \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_2} = 0$$

$$\vec{a}(M_{\mathcal{R}_2})_{/\mathcal{R}_1} = \vec{a}_e(M) = \vec{O} + \vec{a}(O_2)_{/\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}\right) + \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1}\wedge\overrightarrow{O_2M}.$$

Vậy : $\vec{a}_{/\mathcal{R}_1} = \vec{a}_{/\mathcal{R}_2} + \vec{a}_e + 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_{/\mathcal{R}_2}$.

So sánh với hệ thức hợp thành các vận tốc, ta thấy **xuất** hiện một số hạng bổ sung gọi là **gia tốc Coriolis**

$$\vec{a}_C(M) = 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}\wedge\vec{v}(M)_{\mathcal{R}_2}.$$

3.4. Sự tổng hợp của các gia tốc

Theo kết quả được thiết lập ở §3.1 :

Sự tổng hợp của các gia tốc được biểu thị bởi hệ thức:

$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_1} = \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_2} + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_C(M)$,

Trong đó $\vec{a}_e(M)$ là gia tốc kéo theo của điểm M, nghĩa là gia tốc đối với $\mathcal{R}_1$ của điểm M nếu nó cố định trong $\mathcal{R}_2$ (điểm trùng hợp) và $\vec{a}_C = 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}\wedge\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_2}$ là gia tốc Coriolis.

Chính hệ thức cuối cùng này là hệ thức mà ta phải ghi nhớ.

3.5. Trường hợp trong đó $\mathcal{R}_2$ tịnh tiến đối với $\mathcal{R}_1$

$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} = \vec{O}$, thì $\vec{a}_e(M)$ độc lập với điểm M và gia tốc Coriolis bằng không. **Vậy tất cả các điểm gắn vào $\mathcal{R}_2$ có cùng gia tốc như nhau đối với $\mathcal{R}_1$**

Áp dụng 3

Tịnh tiến vòng tròn

Một bánh xe lớn trong hội chợ phiên, bán kính $\mathcal{R}$, quay với vận tốc góc không đổi ω chung quanh một trục nằm ngang $(0x)$.

$\mathcal{R}_1$ là hệ quy chiếu Trái Đất và $\mathcal{R}_2$ là hệ quy chiếu gắn vào một chiếc nôi (H.8).

Hãy biểu thị trong một cơ sở thích hợp, vận tốc kéo theo và gia tốc kéo theo của $\mathcal{R}_2$ đối với $\mathcal{R}_1$.

$\mathcal{R}_2$ chuyển động tịnh tiến đối với $\mathcal{R}_1$. Như vậy, vận tốc và gia tốc kéo theo có cùng giá trị như nhau ở mọi điểm.

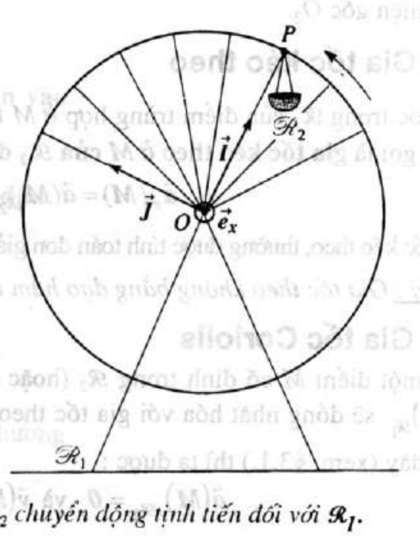
Gọi P là điểm buộc nôi, ở trong cùng một mặt phẳng thẳng đứng như 0, điểm gốc của $\mathcal{R}_1$. Điểm P cố định trong $\mathcal{R}_2$; vậy :

$\vec{v}_e = \vec{v}(P)_{\mathcal{R}_1}$ và $\vec{a}_e = \vec{a}(P)_{/\mathcal{R}_1}$

Ta hãy sử dụng cơ sở trực chuẩn $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{e}_x)$ xác định bởi $\overrightarrow{OP} = R\vec{I}$.

P chuyển động tròn đều đối với $\mathcal{R}_1$. Do đó :

$\vec{v}_{e_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}} = \omega R\vec{J}$ và $\vec{a}_{e_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}} = -\omega^2 R\vec{I}$.



H.8. *$\mathcal{R}_2$ chuyển động tịnh tiến đối với $\mathcal{R}_1$.*

3.6. Trường hợp $\mathcal{R}_2$ quay đối với $\mathcal{R}_1$

Có một chuyển động quay với vận tốc góc ω và trục quay (Oz): $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} = \omega\vec{e}_z$.

Điểm trùng hợp $M_{\mathcal{R}_2}$ có chuyển động vòng tròn, và gia tốc kéo theo được biểu thị đơn giản trong cơ sở địa phương của các toạ độ trụ:

$$\vec{a}_e(M) = \dot{\omega}r\vec{e}_\theta - \omega^2 r\vec{e}_r.$$

Nếu chuyển động quay nhanh dần đều, thì gia tốc kéo theo hướng về trục.

Khi có một chuyển động quay đều chung quanh một trục cố định thì:

$$\vec{a}_e(M) = -\omega^2\overrightarrow{HM}$$

trong đó H là hình chiếu của M trên trục quay.

▸ **Để tập luyện : bài tập 3**

Áp dụng 4

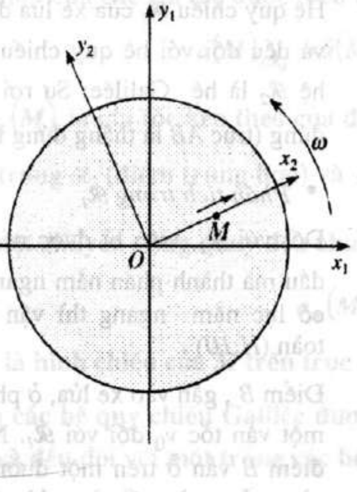
Chuyển động xuyên tâm trên một mâm quay

Cho một mâm nằm ngang quay với vận tốc góc ω chung quanh một trục thẳng đứng cố định (ví dụ vòng đu quay).

$\mathcal{R}_1$ là hệ quy chiếu Trái Đất và $\mathcal{R}_2$ là hệ quy chiếu gắn với mâm (H.9).

Một động tử từ vị trí M, vạch ra trục (Ox_2) gắn với $\mathcal{R}_2$ với vận tốc không đổi $\vec{v}$. Hãy biểu thị $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1}$ và $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_1}$ trong cơ sở $(\vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2})$.

Điểm trùng hợp của M vẽ một vòng tròn bán kính x_2 với vận tốc góc ω.



H.9.

Vậy thì : $\vec{v}_e(M) = \omega x_2\vec{e}_{y_2}$,

và : $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1} = v\vec{e}_{x_2} + \omega x_2\vec{e}_{y_2}$

• *Phương pháp thứ nhất: Tính trực tiếp $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_1}$*

$$\left(\frac{d\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = v\left(\frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} + \dot{\omega}x_2\vec{e}_{y_2} + \omega v\vec{e}_{y_2} + \omega x_2\left(\frac{d\vec{e}_{y_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1}$$

Các đạo hàm của các vectơ đơn vị đều đã biết, do đó

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_1} = (\dot{\omega}x_2 + 2\omega v)\vec{e}_{y_2} - \omega^2 x_2\vec{e}_{x_2}$$

• *Phương pháp thứ hai: Tính $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_1}$ bằng sự hợp thành các gia tốc.*

Chuyển động của điểm thuộc $\mathcal{R}_2$ trùng với M là chuyển động tròn, do đó

$$\vec{a}_e(M) = \dot{\omega}x_2\vec{e}_{y_2} - \omega^2 x_2\vec{e}_{x_2}$$

Vận tốc của M trong $\mathcal{R}_2$ là đều nên

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_2} = \vec{0}.$$

Hơn nữa:

$$\vec{a}_c = 2\omega\vec{e}_z \wedge v\vec{e}_{x_2} = 2\omega v\vec{e}_{y_2}.$$

Cuối cùng:

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_1} = \left[\dot{\omega}x_2 + 2\omega v\right]\vec{e}_{y_2} - \omega^2 x_2\vec{e}_{x_2}$$

4 Các hệ quy chiếu Galilée

Nguyên lí quán tính đã tiên đề hoá sự tồn tại của các hệ quy chiếu Galilée mà trong đó một chất điểm cô lập sẽ có gia tốc bằng không. Ta hãy tìm cách thiết lập mối quan hệ tồn tại giữa tất cả các hệ quy chiếu Galilée.

Ta tưởng tượng có một chất điểm ở vị trí M, cô lập, và giả thiết rằng tồn tại hai hệ quy chiếu Galilée $\mathcal{R}_{g_1}$ và $\mathcal{R}_{g_2}$. Theo giả thiết.

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_{g1}} = \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_{g2}} = \vec{0}$$

Do đó:

$$\vec{a}_e(M) + 2\,\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_{g2}/\mathcal{R}_{g1}} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_{g2}} = \vec{0}$$

Hệ thức này phải được kiểm nghiệm ở mọi vị trí và với mọi vận tốc. Điều này được thể hiện bởi $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_{g2}/\mathcal{R}_{g1}} = \vec{0}$

Như vậy $\mathcal{R}_{g_2}$ phải tịnh tiến đối với $\mathcal{R}_{g_1}$, nên $\vec{a}_e(M) = \vec{0}$: Vận tốc của các điểm của $\mathcal{R}_{g_2}$ là không đổi trong $\mathcal{R}_{g_1}$.

Từ đó ta có thể rút ra kết luận rằng hai hệ quy chiếu Galilée đối với nhau đều chuyển động tịnh tiến thẳng và đều.

Ta suy ngay ra đảo đề : Nếu $\mathcal{R}_2$ tịnh tiến thẳng và đều đối với hệ Galilée $\mathcal{R}_{g_1}$, thì các gia tốc kéo theo và gia tốc Coriolis sẽ bằng không trong $\mathcal{R}_2$.

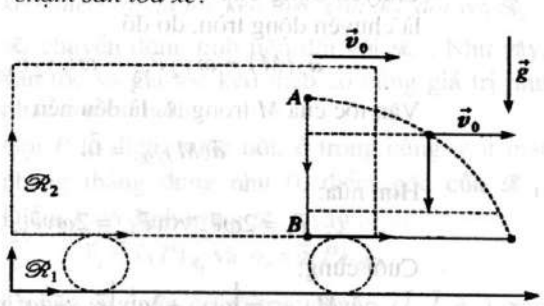
Vậy $\mathcal{R}_2$ cũng là hệ quy chiếu Galilée.

Tập hợp các hệ quy chiếu Galilée được cấu thành bởi tất cả các hệ quy chiếu đang chuyển động tịnh tiến thẳng và đều đối với một trong các hệ đó.

Áp dụng 5

Rơi tự do trên xe lửa

Hệ quy chiếu Trái Đất là hệ Galilée. Một xe lửa chạy trên con đường thẳng với vận tốc không đổi v_0. Một hành khách thả một viên bi từ A với vận tốc ban đầu bằng không. Tìm điểm B mà viên bi chạm sàn toa xe?



H.10. *Các quỹ đạo của viên bi trong hai hệ quy chiếu.*

• *Phân tích trong $\mathcal{R}_2$*

Hệ quy chiếu $\mathcal{R}_2$ của xe lửa đang tịnh tiến thẳng và đều đối với hệ quy chiếu Trái Đất. Như vậy hệ $\mathcal{R}_2$ là hệ Galilée: Sự rơi trong $\mathcal{R}_2$ là thẳng đứng (trục AB là thẳng đứng trong $\mathcal{R}_2$).

• *Phân tích trong $\mathcal{R}_1$*

Đối với $\mathcal{R}_1$, viên bi được ném với vận tốc ban đầu mà thành phần nằm ngang là v_0; khi không có lực nằm ngang thì vận tốc này được bảo toàn (*H.10*)

Điểm B, gắn vào xe lửa, ở phía dưới điểm A, có một vận tốc v_0 đối với $\mathcal{R}_1$. Như vậy viên bi và điểm B vẫn ở trên một đường thẳng đứng như cùng nhau và cuối cùng thì gặp nhau.

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ CHUYỂN ĐỘNG QUAY

- **Nếu hệ quy chiếu $\mathcal{R}_2$ quay chung quanh một trục cố định của $\mathcal{R}_1$, thì:**

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{U}$$

$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} = \dot{\theta}\,\vec{e}_z$ là vectơ quay của $\mathcal{R}_2$ đối với $\mathcal{R}_1$.

- **Sự tổng hợp của các vectơ quay:**

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_1} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}$$

■ CHUYỂN ĐỘNG TỊNH TIẾN

- **Nếu $\mathcal{R}_2$ tịnh tiến đối với $\mathcal{R}_1$ thì:**

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2}$$

■ VẬN TỐC

- **Sự tổng hợp của các vận tốc được biểu thị bởi:**

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_2} + \vec{v}_e(M)$$

trong đó $\vec{v}_e(M)$ là vận tốc kéo theo của điểm M, nghĩa là vận tốc đối với $\mathcal{R}_1$ của điểm M nếu nó được cố định trong $\mathcal{R}_2$ (điểm trùng hợp).

■ GIA TỐC

- **Sự tổng hợp của các gia tốc được biểu thị bởi**

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_1} = \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_2} + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_C(M),$$

trong đó $\vec{a}_e(M)$ là gia tốc kéo theo của điểm M, nghĩa là gia tốc đối với $\mathcal{R}_1$ của điểm M nếu nó cố định trong $\mathcal{R}_2$ (điểm trùng hợp) và $\vec{a}_C = 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_2}$ là gia tốc Coriolis.

- **Khi có một chuyển động quay đều chung quanh một trục cố định, thì:**

$$\vec{a}_e(M) = -\omega^2\,\overrightarrow{HM},$$

trong đó H là hình chiếu của M trên trục quay.

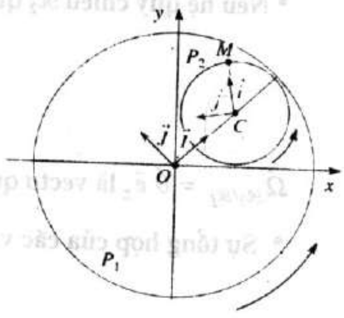
- **Tập hợp các hệ quy chiếu Galilée được cấu thành bởi tất cả các hệ quy chiếu đang tịnh tiến thẳng và đều đối với một trong các hệ đó.**

Bài tập có lời giải

Sự quay trên mâm quay

ĐỀ BÀI

Đối với hệ quy chiếu Trái Đất $\mathcal{R}$, thì một mâm nằm ngang P_1 quay với một vận tốc góc không đổi ω_1 chung quanh trục thẳng đứng (O_z). C là một điểm cố định đối với mâm và ở cách điểm O một khoảng cách d. Một mâm thứ hai hình tròn P_2, bán kính R, quay chung quanh trục (C_z) với vận tốc góc không đổi ω_2 đối với P_1 (xem sơ đồ).



Hãy xác định, bằng hai phương pháp, vec tơ vận tốc và vectơ gia tốc đối với $\mathcal{R}$ của một điểm M trên chu vi của P_2.

Người ta sẽ sử dụng các cơ sở trực chuẩn $(\vec{I},\vec{J},\vec{e}_z)$ và $(\vec{i},\vec{j},\vec{e}_z)$, $\vec{I}$ được xác định bởi $\overrightarrow{OC}=d\vec{I}$ và $\vec{i}$ bởi $\overrightarrow{CM}=R\vec{i}$.

HƯỚNG DẪN

Để xác định vận tốc và gia tốc kéo theo, cần phải xác định xem một điểm cố định trên mâm có chuyển động nào? Trong trường hợp của bài toán nêu trên, ta có một chuyển động quay đều, mà đối với nó thì vận tốc và gia tốc được biểu thị rất đơn giản.

Ta sử dụng bốn vectơ đơn vị $\vec{I},\vec{J},\vec{i},\vec{j}$.

Không nhất thiết phải biểu thị $\vec{v}$ và $\vec{a}$ bằng cách chỉ sử dụng cặp $(\vec{I},\vec{J})$ hay cặp $(\vec{i},\vec{j})$.

Để tính vận tốc và gia tốc mà không phải qua các hệ thức thay đổi hệ quy chiếu, thì ta cần phải tiến hành theo cách sau đây:

- *Biểu thị vectơ $\overrightarrow{OM}$;*
- *Xác định $\vec{v}=\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$;*
- *Xác định $\vec{a}=\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$;*

Các vectơ đơn vị được sử dụng để biểu thị $\overrightarrow{OM}$ có thể không phải là các vectơ không đổi. Trong trường hợp này, cần phải nghĩ đến việc tính các đạo hàm của chúng.

LỜI GIẢI

Gọi $\mathcal{R}'$ là hệ quy chiếu gắn với mâm P_1.

■ Phương pháp thứ nhất: Sự hợp thành của các vận tốc và gia tốc

Điểm trùng hợp của M được gắn với mâm P_1 sẽ vẽ trong $\mathcal{R}$ một quỹ đạo tròn tâm O với một vận tốc quay đều.

Do đó, với $\overrightarrow{OM}=d\vec{I}+R\vec{i}$ thì ta có:

$$\vec{v}_e(M)=\omega_1\vec{e}_z\wedge\overrightarrow{OM}=\omega_1(d\vec{J}+R\vec{j});$$
$$\vec{a}_e(M)=-\omega_1^2\overrightarrow{OM}=-\omega_1^2(d\vec{I}+R\vec{i}).$$

Điểm M vạch trong $\mathcal{R}'$ một quỹ đạo tròn tâm C với vận tốc góc không đổi ω_2. Do đó: $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}=\omega_2R\vec{j}$ và $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'}=-\omega_2^2R\vec{i}$.

Gia tốc Coriolis: $\vec{a}_c=2\omega_1\vec{e}_z\wedge\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}=-2\omega_1\omega_2R\vec{i}$.

Áp dụng các hệ thức thay đổi hệ quy chiếu ta được:

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}=(\omega_1+\omega_2)R\vec{j}+\omega_1d\vec{J}$$
$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}=-(\omega_1+\omega_2)^2R\vec{i}-\omega_1^2d\vec{I}.$$

■ Phương pháp thứ hai : Tính toán trực tiếp

$\vec{I}$ và $\vec{J}$ đều gắn vào $\mathcal{R}'$, do đó:

$$\left(\frac{d\vec{I}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}=\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\wedge\vec{I}=\omega_1\vec{J}\quad\text{và}\quad\left(\frac{d\vec{J}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}=-\omega_1\vec{I}.$$

Gọi $\mathcal{R}''$ là hệ quy chiếu gắn với P_2, ta có : $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}}=(\omega_1+\omega_2)\vec{e}_z$.

$\vec{i}$ và $\vec{j}$ đều gắn với $\mathcal{R}''$, do đó:

$$\left(\frac{d\vec{i}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}=(\omega_1+\omega_2)\vec{j}\quad\text{và}\quad\left(\frac{d\vec{j}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}=-(\omega_1+\omega_2)\vec{i}$$

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}=\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}=d\left(\frac{d\vec{I}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}+R\left(\frac{d\vec{i}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}=\omega_1d\vec{J}+(\omega_1+\omega_2)R\vec{j}.$$

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}=\left(\frac{d\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}=\omega_1d\left(\frac{d\vec{J}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}+(\omega_1+\omega_2)R\left(\frac{d\vec{j}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}$$
$$=-\omega_1^2d\vec{I}-(\omega_1+\omega_2)^2R\vec{i}$$

Bài tập

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

1 Đạn bắn trên một bia di động

Người ta bắn các viên đạn với vận tốc không đổi $\vec{v} = v\vec{e}_x$, lên một bia di động có chuyển động tịnh tiến đều với vận tốc: $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$.

Nếu T là thời gian giữa hai lần bắn đạn, thì bạn hãy xác định thời gian T' giữa hai lần trúng bia.

• *Lời giải:*

Trong hệ quy chiếu của bia, thì vận tốc đạn là: $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0$.

Khoảng cách, không phụ thuộc hệ quy chiếu, giữa hai viên đạn là:

$$d = vT = v'T'.$$

Vậy: $T' = T\dfrac{v}{v - v_0}$.

2 Sự vượt sông

Một vận động viên bơi lội, mà vận tốc đối với nước là v_1, muốn vượt ngang một con sông có chiều rộng l. Ta giả thiết là dòng nước có vận tốc đều v_0. Hãy xác định thời gian vượt sông τ nếu :

a) người đó bơi vuông góc với hai bờ nhưng để dòng nước cuốn đi ;

b) người ấy bơi theo một quỹ đạo vuông góc với hai bờ.

• *Lời giải:*

a) v_1 là thành phần của $\vec{v}$ vuông góc với hai bờ:

Vậy: $\tau_1 = \dfrac{l}{v_1}$.

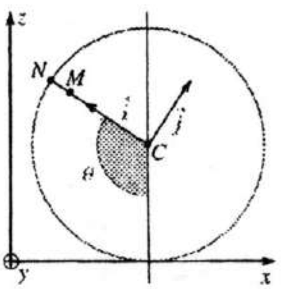
b) $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_0$, *vậy* $v^2 = v_1^2 - v_0^2$;

$$\tau_2 = \frac{l}{\sqrt{v_1^2 - v_0^2}}.$$

3 Chuyển động của van bánh xe

Một bánh xe bán kính a, tâm C, lăn không trượt trên trục (Ox), mà vẫn ở trong mặt phẳng (xOz).

Van bánh xe ở tại điểm M (xem sơ đồ), cách trục bánh xe một khoảng cách b. Cho v là vận tốc của C.



1) Hãy biểu thị vectơ vận tốc và vectơ gia tốc của M đối với $\mathcal{R}$, mà hệ tọa độ $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ được gắn vào, bằng cách sử dụng cơ sở trực chuẩn $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{e}_y)$ được xác định bởi:

$$\overrightarrow{CM} = b\vec{i}.$$

Dữ liệu :

$a = 30$ cm; $b = 20$ cm ; $v = 100$ km/h (không đổi).

2) Xác định độ dài của vectơ gia tốc.

• *Lời giải:*

Gọi N là điểm của đường tròn ở trên cùng một bán kính như M và ta xác định $\theta = 0$ khi N trùng với 0.

Sự không - trượt được thể hiện bằng: $a\theta = x_C$ *và* $v = a\dfrac{d\theta}{dt}$.

• *Phương pháp thứ nhất: tính trực tiếp.*

Các tọa độ của M là:

$$x(t) = x_C - b\sin\theta \quad \text{và} \quad z(t) = a - b\cos\theta.$$

Khi lấy đạo hàm và thay $\dot{\theta}$ bằng $\dfrac{v}{a}$, ta có:

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = v\left[\left(1 - \frac{b}{a}\cos\theta\right)\vec{e}_x + \frac{b}{a}\sin\theta\,\vec{e}_z\right];$$

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = v^2\frac{b}{a^2}(\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_z)$$

$$+\frac{dv}{dt}\left[\left(1 - \frac{b}{a}\cos\theta\right)\vec{e}_x + \frac{b}{a}\sin\theta\vec{e}_z\right].$$

Các kết quả trên sẽ được biểu thị đơn giản hơn với các vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$.

Thực vậy:

$$\vec{i} = -\sin\theta\vec{e}_x - \cos\theta\vec{e}_z;\ \vec{j} = -\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_z.$$

Do đó : $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = v\left(\vec{e}_x + \dfrac{b}{a}\vec{j}\right)$

và $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = -v^2\dfrac{b}{a^2}\vec{i} + \dfrac{dv}{dt}\left(\vec{e}_x + \dfrac{b}{a}\vec{j}\right)$.

• *Phương pháp thứ hai: thay đổi hệ quy chiếu.*

Cho hệ quy chiếu $\mathcal{R}'$, tịnh tiến đối với $\mathcal{R}$ gắn vào điểm C. Vận tốc kéo theo và gia tốc kéo theo đều độc lập với điểm xét trên và gia tốc Coriolis bằng không:

- vận tốc kéo theo: $\vec{v}_e = v\vec{e}_x$;

- gia tốc kéo theo: $\vec{a}_e = \dfrac{dv}{dt}\vec{e}_x$.

Chuyển động của M trong $\mathcal{R}'$ là vòng tròn, bán kính b và vận tốc góc $\dot{\theta} = \dfrac{v}{a}$. Do đó:

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} = b\frac{v}{a}\vec{j}; \qquad \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} = -b\left(\frac{v}{a}\right)^2\vec{i} + \frac{b}{a}\frac{dv}{dt}\vec{j}.$$

Áp dụng các hệ thức thay đổi hệ quy chiếu, ta có:

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = b\frac{v}{a}\vec{j} + v\vec{e}_x\,;\ \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = -b\left(\frac{v}{a}\right)^2\vec{i} + \frac{b}{a}\frac{dv}{dt}\vec{j} + \frac{dv}{dt}\vec{e}_x.$$

Áp dụng số : $a = 1{,}7.10^3\ m.s^{-2}$.

Khi đường sắt phát triển, thì trong nửa sau của thế kỷ XIX, một số người chống đối đã thông báo rằng những gia tốc như vậy có thể sẽ gây ra những cưỡng bức cơ học có khả năng làm trật bánh xe lửa ...

VẬN DỤNG VỐN KIẾN THỨC

4 * Gia tốc trong tọa độ cầu

Hãy biểu thị gia tốc của một điểm M theo các toạ độ cầu của nó, bằng cách sử dụng phương pháp của áp dụng 2 :

• *Lời giải*

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\,\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta)\vec{e}_\theta$$
$$+ (2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\cos\dot{\varphi}\dot{\theta})\,\vec{e}_\varphi.$$

5 ** Chuyển động biểu kiến của Mặt Trời

Trong hệ quy chiếu Copernic $\mathcal{R}_C$ gắn với tâm S của Mặt Trời, thì tâm T của Trái Đất vạch một quỹ đạo gần như tròn với vận tốc $\vec{v}(T)_{/\mathcal{R}_C} = \vec{\Omega}_1 \wedge \overrightarrow{ST}$.

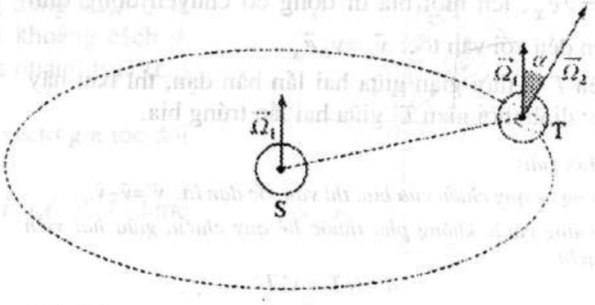
Hệ quy chiếu địa tâm $\mathcal{R}_g$, gắn với chuyển động *tịnh tiến* đối với $\mathcal{R}_C$, và hệ quy chiếu $\mathcal{R}_T$ gắn với mặt đất cho ta:

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_g} = \vec{\Omega}_2.$$

Các vectơ $\vec{\Omega}_1$ và $\vec{\Omega}_2$ đều không đổi và hợp thành một góc α giữa chúng với nhau.

1) Hãy biểu thị vận tốc của S trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}_T$.

2) Hãy xác định các giá trị của Ω_2 và của $T_2 = \frac{2\pi}{\Omega_2}$.



• *Lời giải*

1) $\vec{v}(S)_{/\mathcal{R}_T} = \vec{v}(S)_{/\mathcal{R}_g} + \vec{v}_e(S)$.

Nhưng $\vec{v}(S)_{/\mathcal{R}_g} = -\vec{\Omega}_1 \wedge \overrightarrow{TS}$ *và vận tốc kéo theo*

$$\vec{v}_e(S) = \vec{v}(S_{\mathcal{R}_C})_{/\mathcal{R}_T} = -\vec{\Omega}_2 \wedge \overrightarrow{TS}.$$

vậy: $\vec{v}(S)_{/\mathcal{R}_T} = (\vec{\Omega}_1 + \vec{\Omega}_2) \wedge \overrightarrow{ST}$.

2) Hoặc $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_1 + \vec{\Omega}_2\,;\ \vec{v}(S)_{/\mathcal{R}_T} = -\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{TS}$,

$$\Omega = \frac{2\pi}{1ngày},\ \Omega_1 = \frac{2\pi}{1năm},\ \Omega^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2 + 2\Omega_1\Omega_2\cos\alpha,$$

hoặc $\Omega \approx \Omega_2 + 2\Omega_1\cos\alpha$, *do đó:* $\frac{1}{T_2} \approx \frac{1}{1\ ngày} + \frac{\cos\alpha}{1\ năm}$,

hoặc $T_2 = 23\ h\ 56ph$.

Bảng tra

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Biên tập lần đầu :
VŨ THANH MAI

Biên tập tái bản :
PHẠM THỊ NGỌC THẮNG

Sửa bản in :
VŨ THANH MAI

Trình bày bìa :
PHẠM NGỌC TỚI

Chế bản :
PHÒNG CHẾ BẢN (NXB GIÁO DỤC)

CƠ HỌC 1

Mã số : 7K441T7 – DAI

In 1.000 bản, khổ 19 x 27 cm, tại Công ty cổ phần in Anh Việt.
Giấy phép xuất bản số : 11 – 2007/CXB/239 – 2119/GD.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 3 năm 2007.