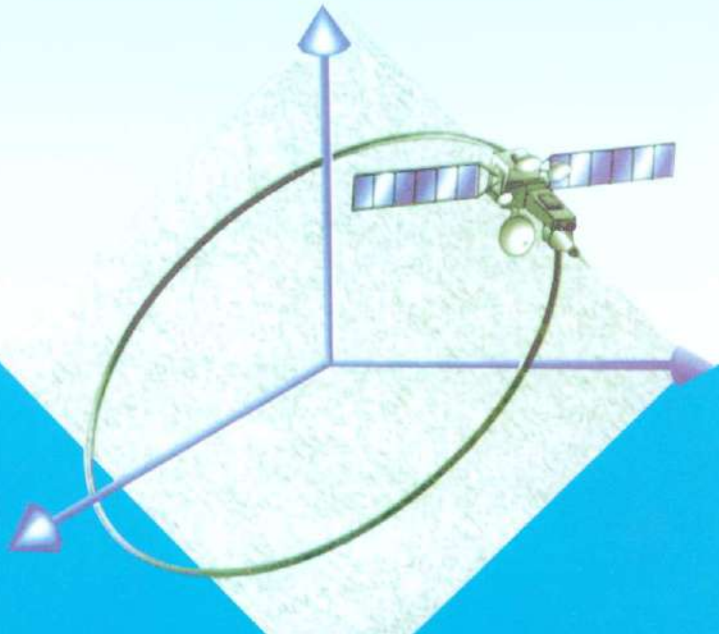
P.F.I.E.V

CƠ HỌC

2



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HACHETTE
Supérieur

"Cuốn sách này được xuất bản trong khuôn khổ Chương trình Đào tạo Kĩ sư Chất lượng cao tại Việt Nam, với sự trợ giúp của Bộ phận Văn hóa và Hợp tác của Đại Sứ quán Pháp tại nước Cộng hòa Xã hội Chủ nghĩa Việt Nam".

"Cet ouvrage, publié dans le cadre du Programme de Formation d'Ingénieurs d'Excellence au Vietnam bénéficie du soutien du Service Culturel et de Coopération de l'Ambassade de France en République socialiste du Vietnam".

Công ty Cổ phần sách Đại học - Dạy nghề – Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam giữ quyền công bố tác phẩm.

04 – 2009/CXB/333 – 2117/GD Mã số : 7K442y9 – DAI

Cơ học II

(Tái bản lần thứ sáu)

Dưới sự hướng dẫn của
JEAN - MARIE BRÉBEC
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Saint - Louis ở Paris

PHILIPPE DENÉVE
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Henri - Wallon ở Valenciennes

THIERRY DESMARAIS
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Sainte - Marie - Fénelon ở Paris

MARC MÉNÉTRIER
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Thiers ở Marseilles

BRUNO NOËL
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Champollion ở Grenoble

CLAUDE ORSINI
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Dumont - d'Urville ở Toulon

Người dịch : NGUYỄN HỮU HỒ

Năm thứ nhất

MPSI - PCSI
PTSI

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Mécanique II

sous la direction de
JEAN - MARIE BRÉBEC
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Saint - Louis à Paris

PHILIPPE DENÈVE
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Henri - Wallon à Valenciennes

THIERRY DESMARAIS
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Sainte - Marie - Fénelon à Paris

MARC MÉNÉTRIER
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Thiers à Marseilles

BRUNO NOËL
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Champollion à Grenoble

CLAUDE ORSINI
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Dumont - d'Urville à Toulon

1re année

MPSI - PCSI
PTSI

HACHETTE
Supérieur

Lời nói đầu

Bộ giáo trình này có liên quan đến các chương trình mới của các lớp dự bị vào các trường Đại học (Grandes écoles), được áp dụng cho kì tựu trường tháng 9/1995 đối với các lớp năm thứ nhất MPSI, PCSI và PTSI, và cho kì tựu trường tháng 9/1996 đối với các lớp năm thứ hai MP, PC, PSI.

Theo tinh thần của các chương trình mới, thì bộ giáo trình này đưa ra một sự đổi mới trong việc giảng dạy các môn vật lí ở các lớp dự bị đại học.

- Trái với truyền thống đã in sâu đậm nét, theo đó vật lí bị xếp vào hàng môn học thứ yếu sau toán học, các hiện tượng đã bị che lấp bởi khía cạnh tính toán, các tác giả đã cố gắng thu xếp để đặt toán học vào đúng chỗ của nó bằng cách ưu tiên cho sự tư duy và lập luận vật lí, đồng thời nhấn mạnh vào các thông số có ý nghĩa và các hệ thức kết hợp chúng với nhau.

- Vật lí là một môn khoa học thực nghiệm nên phải được giảng dạy theo tinh thần đó. Các tác giả đã quan tâm đặc biệt đến việc mô tả các thiết bị thí nghiệm nhưng vẫn không bỏ qua khía cạnh thực hành. Mong sao những cố gắng của các tác giả sẽ thúc đẩy thày và trò cải tiến hoặc tạo ra các hoạt động thí nghiệm luôn luôn đầy chất sáng tạo.

- Vật lí không phải là một khoa học coi thường vật chất, chỉ chú trọng đến lập luận trừu tượng mà dửng dưng với thực tiễn công nghệ. Mỗi khi thấy một vấn đề thích hợp, thì các tác giả đã dành một chỗ xứng đáng cho các áp dụng khoa học hay công nghiệp, đặc biệt để kích thích các nhà nghiên cứu và các kĩ sư tương lai.

- Vật lí không phải là một khoa học thuần khiết và vĩnh hằng, mà vật lí là sản phẩm của một thời đại và không tự tách ra khỏi phạm vi hoạt động của con người.

Các tác giả đã không coi thường các cứ liệu lịch sử các khoa học trong việc mô tả sự biến đổi của các mô hình lí thuyết cũng như thay thế các thí nghiệm trong bối cảnh của họ.

Nhóm tác giả mà Jean-Marie Brébec đã phối hợp, gồm các giáo sư các lớp dự bị rất từng trải, đã có một bề dày kinh nghiệm trong các kì thi tuyển vào các trường Đại học và có năng lực khoa học cao được mọi người nhất trí công nhận. Nhóm này đã cộng tác chặt chẽ với các tác giả của bộ giáo trình của Durandeau và Durupthy cho cấp hai các trường trung học (tương đương với trung học phổ thông của Việt Nam).

Sách cho các lớp dự bị đã kế tiếp hoàn hảo sách ở cấp trung học cả về hình thức, nội dung lẫn ý tưởng.

Chúng tôi bảo đảm rằng các cuốn sách này là những công cụ quý báu cho sinh viên để chuẩn bị có hiệu quả cho các kì thi tuyển, cũng như để có được một sự trau dồi khoa học vững chắc.

J.P.DURANDEAU

Các công cụ nêu trong tập Cơ học I (các định lí tổng quát của động lực học của chất điểm và các phép biến đổi hệ quy chiếu) đều cần thiết cho cuốn sách này để nghiên cứu về chất điểm và hệ chất điểm.

Sau khi nghiên cứu cơ học của chất điểm trong hệ quy chiếu phi Galilée (với trường hợp đặc biệt quan trọng của cơ học Trái đất) và chuyển động của các hạt chịu tác dụng của một trường điện từ không phụ thuộc thời gian (lực Lorentz), thì cuốn sách đề cập đến các hệ chất điểm (các yếu tố động học,các định lí tổng quát...), với hệ hai vật và các chuyển động của các hạt điểm có tương tác Newton (thế $\frac{1}{r}$) được xem là các áp dụng.

Mục lục

CƠ HỌC TRONG HỆ QUY CHIẾU PHI GALILÉE

1

Mở đầu

Những hệ quy chiếu gắn vào một chiếc xe có gia tốc, vào một con tàu vũ trụ hay vào một máy vắt đều là các hệ quy chiếu phi Galilée

Thực nghiệm chứng tỏ, trong các hệ quy chiếu đó, các định luật cơ học (như nguyên lí quán tính) không còn được áp dụng một cách đơn giản nữa.

Hành khách trên xe buýt bị lao ra phía trước khi xe hãm phanh, mà ngay gần đây, phi công vũ trụ hình như thoát khỏi sức hút của Trái Đất, và các hạt nước bị hắt ra khỏi máy vắt.

Ta có thể giải thích tất cả các hiệu ứng trên nếu đặt lại chúng vào một hệ quy chiếu nghiên cứu Galilée.

Ta cũng có thể đặt bài toán vào hệ quy chiếu trong đó chuyển động được xác định một cách tự nhiên: đối với hành khách trên xe, hệ quy chiếu là chiếc xe đang chuyển động, đối với phi công vũ trụ là con tàu vũ trụ, hay đối với giọt nước là chiếc máy vắt.

MỤC TIÊU

■ Tiếp cận cụ thể các khái niệm về hệ quy chiếu Galilée và hệ quy chiếu có gia tốc (phi Galilée).

■ Khái niệm về lực quán tính.

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

■ Động lực học chất điểm trong hệ quy chiếu Galilée.

■ Phép biến đổi hệ quy chiếu.

I Đặc tính Galilée của một hệ quy chiếu

1.1. Tính chất của các hệ quy chiếu Galilée

1.1.1. Định nghĩa có tính chất nguyên lí : định luật quán tính

Định luật thứ nhất của Newton khẳng định, trong hệ quy chiếu Galilée, một chất điểm cô lập sẽ chuyển động thẳng đều.

Điều này tạo thành định nghĩa có tính chất nguyên lí của một hệ quy chiếu Galilée :

Ta "chỉ cần" nghiên cứu chuyển động của một chất điểm tự do và cô lập trong một hệ quy chiếu đã cho : nếu ở bất kì thời điểm ban đầu, vị trí ban đầu và vận tốc ban đầu nào mà sau đó chuyển động là thẳng đều thì hệ quy chiếu đó là hệ quy chiếu Galilée.

1.1.2. Lớp các hệ quy chiếu Galilée.

Nguyên lí quán tính coi sự tồn tại của một hệ quy chiếu Galilée như một tiên đề, kí hiệu là $\mathcal{R}_{g_0}$. Ở chương 7, cơ học I, ta đã chứng tỏ rằng :

- Mọi hệ quy chiếu chuyển động tịnh tiến thẳng đều so với $\mathcal{R}_{g_0}$ đều là hệ quy chiếu Galilée;
- Mọi hệ quy chiếu Galilée đều chuyển động tịnh tiến thẳng đều so với $\mathcal{R}_{g_0}$.

1.1.3. Hệ quy chiếu trái đất $\mathcal{R}_T$ có phải là hệ quy chiếu Galilée không ?

Một động tử trên đệm không khí, được lăn trên một mặt bàn nằm ngang sẽ giữ một vận tốc hầu như không đổi. Các thí nghiệm thông thường chứng tỏ rằng với một độ chính xác nào đó và trong một khoảng thời gian có giới hạn, có thể coi $\mathcal{R}_T$ là một hệ quy chiếu Galilée. Đó chính là điều mà ta sẽ áp dụng ở phần sau của chương này (kể cả bài tập) mà không cần nhắc lại. Ta sẽ nghiên cứu tỉ mỉ hơn hệ quy chiếu trái đất $\mathcal{R}_T$ ở chương 2.

1.2. Thí dụ về các hệ quy chiếu phi Galilée

Giả thiết hệ quy chiếu $\mathcal{R}_T$ gắn với Trái đất là một hệ quy chiếu Galilée.

1.2.1. Gia tốc kế

Cho một thang máy có gia tốc $\vec{G} = G\vec{e}_z$ thẳng đứng. Trọng trường $\vec{g}$ là đều. Lò xo móc trên trần của thang máy, có khối lượng không đáng kể, có độ cứng k và có chiều dài tự nhiên (chiều dài tĩnh) l_0. Đầu dưới của lò xo có treo một chất điểm khối lượng m. Ta nói chất điểm nằm cân bằng tương đối nếu nó đứng yên so với thang máy. Khi gia tốc $\vec{G}$ của thang máy bằng không, chiều dài của lò xo khi cân bằng là l_{eq} sao cho : $l_{eq} - l_o = \dfrac{mg}{k}$.

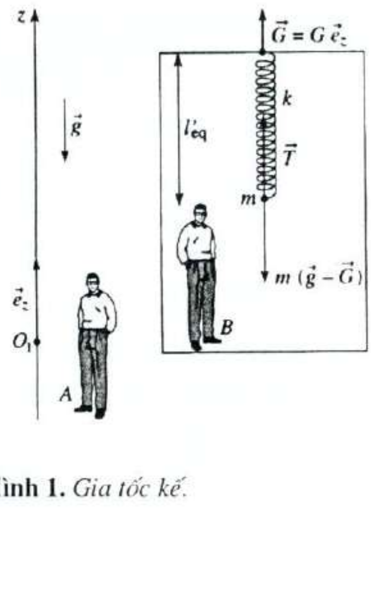
Độ giãn của lò xo ở trạng thái cân bằng tương đối bằng bao nhiêu? Một người quan sát A trên mặt đất và một người khác B đứng trên thang máy sẽ giải thích điều đó như thế nào?

Ta giả thiết $G > 0$ khi gia tốc hướng thẳng đứng lên phía trên (hình 1).

Quan điểm của A

Chuyển động của chất điểm m trong $\mathcal{R}_T$, khi chiều dài lò xo bằng l'_{eq}, tuân theo định luật :

$$m\vec{a}/_{\mathcal{R}_T} = m\vec{G} = k(l'_{eq} - l_o)\vec{e}_z + m\vec{g}\text{, vậy } l'_{eq} = l_o + \frac{mg}{k} + \frac{mG}{k}.$$



Hình 1. *Gia tốc kế.*

Quan điểm của B

Bằng cách đưa thêm vào một lực phụ, gọi là lực quán tính theo $\vec{F}_{ie}$, phương trình cân bằng là :

$$\vec{O} = m\vec{g} + k(l'_{eq} - l_0).\vec{e}_z + \vec{F}_{ie}$$

Vì độ giãn của lò xo không phụ thuộc người quan sát nên lực quán tính có biểu thức : $\vec{F}_{ie} = -m.\vec{G}$.

Chú ý

- *$\vec{G}$ là gia tốc kéo theo của khối lượng m.*
- *Phép đo $l'_{eq} - l_0 = \dfrac{mG}{k}$ cho phép tính được G : đó là nguyên tắc của gia tốc kế.*
- *Các định luật cơ học trong thang máy sẽ giống như trong $\mathcal{R}_T$ nếu thay $\vec{g}$ bằng $(\vec{g} - \vec{G})$; có thể gọi $(\vec{g} - \vec{G})$ là trọng trường biểu kiến.*
- *Khi $\vec{G} = \vec{g}$, tức $G = -g$, trọng trường biểu kiến bằng không : đó là trường hợp của một trạng thái không trọng lượng. Trong phép gần đúng của một trường $\vec{g}$ đều, một hòn bi do B ném ra, nếu bỏ qua ma sát, sẽ chuyển động thẳng đều.*

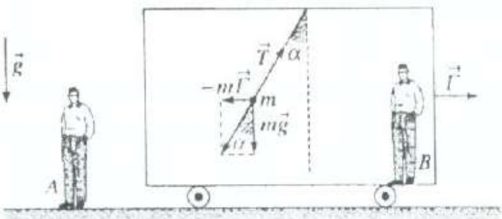
Áp dụng 1

Dây dọi trên một xe chuyển động tịnh tiến thẳng, nằm ngang có gia tốc

Một con lắc (dây treo mềm mại và chất điểm có khối lượng m) được treo trên trần của một chiếc xe.

Khi xe đứng yên trong R_T, vị trí cân bằng của con lắc là thẳng đứng (theo định nghĩa của đường thẳng đứng).

Khi xe chuyển động thẳng, ngang với gia tốc không đổi $\vec{\Gamma}$ so với mặt đất, thì vị trí cân bằng mới hợp với đường thẳng đứng một góc α .



Hình 2. *Dây dọi trên xe tịnh tiến thẳng, ngang có gia tốc.*

Hỏi người quan sát A trên mặt đất và người quan sát B là hành khách trên xe, sẽ giải thích như thế nào về sự lệch góc trên ?

- Đối với A, chất điểm vạch ra một chuyển động nhanh dần đều trong $\mathcal{R}_T$ và hệ thức cơ bản của động lực học có biểu thức :

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_T} = m\vec{\Gamma} = m\vec{g} + \vec{T} .$$

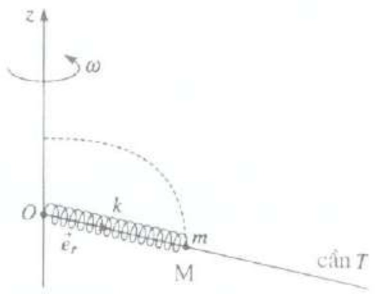
trong đó $m\vec{g}$ là trọng lượng của chất điểm và $\vec{T}$ là lực căng của dây treo tác dụng lên chất điểm. Vì khi đó $\vec{T}$ giữ một hướng cố định, hợp với đường thẳng đứng một góc α, nên sự tổng hợp vectơ của các lực cho : $\tan\alpha = \dfrac{\Gamma}{g}$.

- Đối với B, chất điểm nằm cân bằng trong hệ tọa độ $\mathcal{R}$ gắn với xe, hợp với đường thẳng đứng một góc α khác không (đã được cụ thể hóa từ trước...). Từ đó, có thể kết luận hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ không phải là hệ quy chiếu Galilée và phải đưa thêm vào một lực quán tính kéo theo để giải thích sự cân bằng. Phép đo góc α sẽ cho người quan sát giá trị của lực đó : $\vec{F}_{ie} = -m\vec{\Gamma}$.

Chú ý rằng $\vec{\Gamma}$ là gia tốc kéo theo của khối lượng m.

▸ **Để luyện tập : BT 1.**

1.2.2. Chuyển động tròn



Hình 3. *Cần nằm ngang T, quay xung quanh trục thẳng đứng (Oz).*

Một chiếc cần T thẳng và nằm ngang quay với vận tốc góc không đổi ω xung quanh một trục thẳng đứng (Oz). Một trong các đầu của lò xo, có độ cứng k và chiều dài tĩnh l_0, được cố định tại O. Đầu kia của lò xo có hàn một chiếc khuyên khối lượng m, coi như một chất điểm, có thể trượt không ma sát trên cần T (*hình* 3). Hãy mô tả tình huống trong hệ quy chiếu trái đất $\mathfrak{R}_T$, sau đó trong một hệ quy chiếu quay $\mathfrak{R}$ gắn với cần T khi chiều dài l của lò xo không đổi.

• Trong $\mathfrak{R}_T$, chất điểm chuyển động tròn, tâm O, bán kính l với vận tốc góc không đổi ω. Vậy gia tốc của chất điểm là gia tốc hướng tâm :

$$\vec{a}(M)_{/\mathfrak{R}_T} = -m\omega^2 l\vec{e}_r \text{ với } \overrightarrow{OM} = l\vec{e}_r .$$

Hệ thức cơ bản của động lực học dẫn tới phương trình :

$$-m\omega^2 l\vec{e}_r = -k(l - l_0)\vec{e}_r ,$$

trọng lượng đã bị phản lực của cần T triệt tiêu.

Do đó : $$l_0 = l\left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right).$$

• Trong $\mathfrak{R}$, chất điểm nằm cân bằng tương đối. Để diễn tả điều kiện cân bằng này, phải đưa thêm vào một lực trực đối với lực căng của lò xo. Vậy, lực quán tính kéo theo $\vec{F}_{ie}$ này phải thỏa mãn :

$$\vec{0} = \vec{F}_{ie} + [-k(l - l_0)\vec{e}_r].$$

Hợp nhất hai quan điểm trên, ta thu được :

$$\vec{F}_{ie} = m\omega^2 l\vec{e}_r = m\omega^2 \overrightarrow{OM} .$$

Chú ý rằng $-\omega^2\overrightarrow{OM}$ là gia tốc kéo theo của khối lượng m, với ω không đổi.

<u>*Chú ý :*</u>

Nếu ω lớn hơn $\sqrt{\frac{k}{m}}$, lò xo bị phá hủy hay lực kéo về không còn tỉ lệ với độ dãn nữa.

1.3. Kết luận

Các thí nghiệm trên đây cho phép ta nghiệm lại rằng một hệ quy chiếu *có gia tốc* đối với một hệ quy chiếu Galilée không phải là hệ quy chiếu Galilée (hay còn gọi là hệ quy chiếu không quán tính). Cân bằng của một chất điểm trong một hệ quy chiếu như thế chỉ có thể giải thích được bằng cách đưa thêm vào một lực quán tính kéo theo. Đối với một hạt chuyển động, ta còn phải đưa thêm vào một lực quán tính khác : lực quán tính phụ gọi là *lực quán tính Coriolis*. Tóm lại, khía cạnh phi Galilée của một hệ quy chiếu được thể hiện ở sự tồn tại của các lực quán tính trên. Sự phát hiện ra chúng chỉ rõ đặc tính phi Galilée của hệ quy chiếu.

2 Định luật động lực học trong hệ quy chiếu phi Galilée

Trong các phần tiếp theo $\mathfrak{R}_g$ hay $\mathfrak{R}_T$ (trái đất) dùng để chỉ các hệ quy chiếu quán tính (hay Galilée). $\mathfrak{R}$ là một hệ quy chiếu bất kì

2.1. Hệ thức cơ bản của động lực học trong $\mathcal{R}$

2.1.1. Tổng hợp các gia tốc (*xem chương 7, tập Cơ học I*)

Xét một chất điểm M khối lượng m, đang chuyển động trong $\mathcal{R}_g$ và trong $\mathcal{R}$, ta hãy nhắc lại các định luật về tổng hợp các vận tốc và các gia tốc :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} + \vec{v}_e(M).$$

$\vec{v}_e(M)$, sau đây được kí hiệu một cách đơn giản hơn bằng $\vec{v}_e$ để chỉ vận tốc kéo theo, nghĩa là vận tốc của điểm trùng hợp :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M),$$

trong đó $\vec{a}_e$ là gia tốc kéo theo, nghĩa là gia tốc của điểm trùng hợp và $\vec{a}_c$ là gia tốc Coriolis (còn gọi là gia tốc phụ), sao cho :

$$\vec{a}_c = 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_g} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}.$$

Vận tốc $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$ là vận tốc tương đối, có thể kí hiệu bằng $\vec{v}_r$.

Tương tự, gia tốc $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}$, kí hiệu bằng $\vec{a}_r$, là gia tốc tương đối.

2.1.2. Hệ thức cơ bản của động lực học

Gọi $\vec{F}$ là hợp lực Galilée (có nguồn gốc vật chất) đặt lên chất điểm M, khối lượng m.

Theo hệ thức cơ bản của động lực học trong $\mathcal{R}_g$:

$$\vec{F} = m.\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g}.$$

Dùng định luật tổng hợp các gia tốc, ta thu được :

$$\vec{F} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c = m\vec{a}_r.$$

Khi đó, ta có thể đặt :

$$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e \text{ và } \vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c.$$

Trong một hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ chuyển động có gia tốc đối với một hệ quy chiếu Galilée, để thể hiện một cách đúng đắn hệ thức cơ bản của động lực học, ta phải đưa thêm vào các lực quán tính :

$$\vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} = m.\vec{a}_r = m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}.$$

- $\vec{F}_{ie} = -m(\overline{\text{gia tốc của điểm trùng hợp}})$ **là lực quán tính kéo theo**
- $\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$ **là lực quán tính Coriolis. Lực này chỉ tồn tại nếu chất điểm chuyển động so với $\mathcal{R}$ và nếu $\mathcal{R}$ chuyển động quay so với $\mathcal{R}_g$.**

2.1.3. Thí dụ về một chuyển động tịnh tiến có gia tốc của $\mathcal{R}$ trong $\mathcal{R}_g$

Véctơ quay của $\mathcal{R}$ đối với $\mathcal{R}_g$ bằng không. Lực quán tính Coriolis do vậy cũng bằng không : $\vec{F}_{ic} = \vec{0}$.

Mọi điểm gắn với $\mathcal{R}$ có cùng vận tốc và gia tốc trong $\mathcal{R}_g$ với gốc O của hệ tọa độ gắn vào $\mathcal{R}$.

Vậy gia tốc kéo theo không phụ thuộc vào điểm M :

$$\vec{a}_e(M) = \vec{a}_e(0) = \vec{a}_e.$$

Do đó $$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e.$$

Áp dụng 2

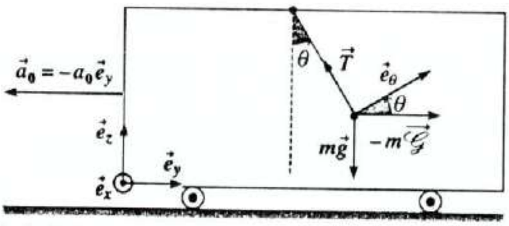
Dao động của một con lắc

Hành khách trên một xe, chuyển động tịnh tiến ngang với gia tốc không đổi $\vec{G} = -G\vec{e}_y$, tham gia nghiên cứu các dao động nhỏ, phẳng của con lắc đơn cấu tạo bởi một khối lượng m và một dây dài l, móc vào trần xe. Hỏi hành khách đo được chu kì bằng bao nhiêu biết rằng

$a_0 = g = 9{,}8\text{m/s}^2$ và $l = 1\text{m}$?

Bằng cách chiếu hệ thức cơ bản áp dụng cho chất điểm trong $\mathcal{R}$ gắn với xe xuống trục xuyên tâm trực giao của các tọa độ cực của M, ta thu được :

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + ma_0\cos\theta .$$



Hình 4. *Dao động của một con lắc*

Vị trí cân bằng tương ứng với : $\tan\theta_e = \frac{a_0}{g}$.

Đối với các chuyển động nhỏ lân cận vị trí cân bằng này, bằng cách đặt $\xi = \theta - \theta_e$, phương trình biến đổi thành :

$$l\frac{d^2\xi}{dt^2} = f(\xi) = f(0) + \xi\left(\frac{df}{d\xi}\right)_{\xi=0} + \dots ,$$

với $f(\xi) = -g\sin(\theta_e + \xi) + G\cos(\theta_e + \xi)$, $f(0) = 0$

và $\left(\frac{df}{d\xi}\right)_{\xi=0} = -g\cos\theta_e - a_0\sin\theta_e = -\sqrt{g^2 + a_0^2}$.

Phương trình được tuyến tính hóa (ta bỏ qua các số hạng ξ có bậc cao hơn 1) trở thành :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{\sqrt{g^2 + a_0^2}}{l}.\xi .$$

Vậy chu kì của các dao động nhỏ bằng :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l^2}{\sqrt{g^2 + a_0^2}}} .$$

Áp dụng bằng số: $\theta_e = 45^0$ và $T = 1{,}7$s.

2.1.4. Thí dụ về một sự quay của $\mathcal{R}$ xung quanh một trục cố định của $\mathcal{R}_g$

Theo giả thiết, $\mathcal{R}$ thực hiện trong $\mathcal{R}_g$ một sự quay xung quanh một trục (Oz), mà trục này lại đồng thời cố định trong $\mathcal{R}$ và trong $\mathcal{R}_g$, với vận tốc góc $\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt}$ (*hình* 5). Hệ tọa độ $(O;\vec{e}_{X_g},\vec{e}_{Y_g},\vec{e}_{Z_g})$ được gắn với $\mathcal{R}_g$ và hệ tọa độ $(O;\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ được gắn với $\mathcal{R}$.

Gọi r, θ và z là các tọa độ trụ của chất điểm M, có khối lượng m, trong $\mathcal{R}$, có $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)$ là cơ sở địa phương kết hợp.

Ta hãy nêu rõ các lực quán tính tương ứng với chuyển động của M trong $\mathcal{R}$.

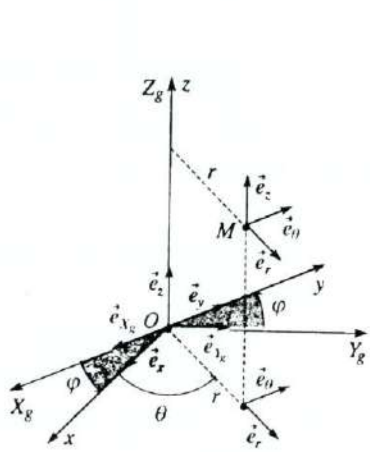
- Điểm trùng hợp với M lúc t vẽ trong $\mathcal{R}_g$ một vòng tròn có tâm trên (Oz) với vận tốc góc $\omega(t)$.

Do đó, gia tốc của nó trong $\mathcal{R}_g$ bằng : $\vec{a}_e = r\frac{d\omega}{dt}\vec{e}_\theta - r\omega^2\vec{e}_r$.

Lực quán tính tương ứng bằng : $\vec{F}_{ie} = -mr\frac{d\omega}{dt}\vec{e}_\theta + mr\omega^2\vec{e}_r$.

- Lực quán tính Coriolis bằng : $\vec{F}_{ic} = 2m\omega r\dot{\theta}\vec{e}_r - 2m\omega\dot{r}\vec{e}_\theta$ vì vận tốc tương đối của điểm M trong $\mathcal{R}$ bằng :

$$\vec{v}_r = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta .$$

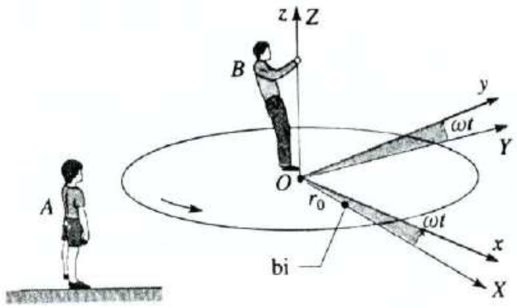


Hình 5. *Sự quay của $\mathcal{R}$ xung quanh trục (Oz) của $\mathcal{R}_g$.(OX_g), (Ox), (OY_g), (Oy) nằm trong cùng một mặt phẳng trực giao với (Oz).*

Áp dụng 3

Hòn bi trên mâm quay

Một nhà thực nghiệm A đặt nhẹ nhàng một hòn bi có khối lượng m trên một mâm phẳng nằm ngang, hoàn toàn nhẵn. Mâm quay với vận tốc góc không đổi xung quanh trục thẳng đứng của nó. Gọi r_0 là khoảng cách ban đầu của hòn bi tới trục. Hỏi hòn bi vạch ra những quỹ đạo nào đối với người quan sát A (nhìn vào mâm quay) và đối với người quan sát B đứng trên mâm quay và bám vào trục để không bị trượt?



Hình 6. *Hòn bi trên mâm quay.*

Gọi (O ; X, Y, Z) là một hệ trục tọa độ gắn vào $\mathcal{R}_T$ và $(O; x, y, z)$ là một hệ trục tọa độ gắn vào mâm với $OZ = Oz$ hướng lên phía trên và trùng với trục quay.

Lúc đầu, các trục (OX) và (Ox) trùng nhau và lúc $t = 0$, hòn bi nằm tại :

$$M_0(X = r_0\, ,\ Y = 0\ ,\ Z = 0).$$

Giả thiết vận tốc ban đầu trong $\mathcal{R}_T$ bằng không. Đối với *A*, hòn bi vẫn đứng yên tại M_0. Thực vậy, do không có ma sát, nên phản lực của mâm có phương thẳng đứng và cân bằng với trọng lượng. Hợp lực bằng không, do vậy hòn bi vẫn nằm cân bằng tại M_0.

B phải nhìn thấy hòn bi vạch ra một chuyển động tròn bán kính r_0, với vận tốc góc $-\omega$, trong $\mathcal{R}$.

Ta hãy nghiệm lại điều này bằng cách thể hiện hệ thức cơ bản trong $\mathcal{R}$:

$$m\vec{a}_r = (m\vec{g} + \vec{R}) + m\omega^2\overrightarrow{OM} + (-2m\omega\vec{e}_z \wedge \vec{v}_r)\,,$$

với : $m\vec{g} + \vec{R} = 0$.

Dùng các tọa độ cực trong mặt phẳng $(O; x, y)$, ta có :

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \omega^2 r + 2\omega r\dot{\theta} \quad \text{và} \quad r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = -2\omega\dot{r}\,.$$

Nghiệm $r = r_0$, $\dot{\theta} = -\omega$ là phù hợp.

Ta thu được quỹ đạo tròn đã dự đoán.

<u>*Chú ý*</u>

Thí dụ này cho thấy một vài lời giải trong một hệ quy chiếu này sẽ dễ dàng hơn rất nhiều trong một hệ quy chiếu khác.

‣ **Để luyện tập : BT 2, 3, 4 và 5.**

2.2. Định lí về mômen động lượng trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ phi Galiée

O là một điểm cố định trong $\mathcal{R}$ và mômen động lượng tại *O* được xác định bởi :

$$\vec{L}_{O/\mathcal{R}} = m.\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}_r\,.$$

Đạo hàm của nó theo thời gian trong $\mathcal{R}$ bằng :

$$\left(\frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = m.\overrightarrow{OM} \wedge \vec{a}_r = \overrightarrow{OM} \wedge \left(\vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}\right).$$

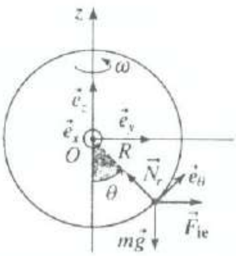
Định lí về mômen động lượng vẫn còn giá trị trong hệ quy chiếu phi Galilée nếu thay lực Galilée $\vec{F}$ bằng tổng :

$$\vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}\,.$$

Áp dụng 4

Hạt cườm trên vòng quay

Một hạt cườm được xâu vào một vòng kim loại bán kính R, vòng này quay xung quanh một đường kính thẳng đứng với vận tốc góc không đổi ω. Chứng tỏ rằng nếu vận tốc góc đủ lớn, ta có thể quan sát thấy sự tồn tại một vị trí cân bằng tương đối của hạt cườm, ứng với một góc θ_e khác không với đường thẳng đứng. Ở đây, ta bỏ qua vai trò của ma sát.



Hình 7. *Hạt cườm trên vòng quay. Lực quán tính Coriolis cộng tuyến với $\vec{e}_x$*

Ta hãy áp dụng định lí về mômen động lượng đối với trục (Ox) cố định trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ phi Galilée. Các mômen đối với trục này của phản lực $\vec{N}$ của vòng và của lực quán tính Coriolis đều bằng không (ngoài ra $\vec{N}$ còn một thành phần N_x làm triệt tiêu $\vec{F}_{ic}$).

Vì vậy, ta thu được : $L_{Ox} = mR^2\dfrac{d\theta}{dt}$,

và $\dfrac{dL_{Ox}}{dt} = -mgR\sin\theta + m\omega^2R^2\sin\theta\cos\theta$,

(mômen của các lực đối với trục (Ox)).

Nếu đặt $\omega^2 = \dfrac{g}{R}$, phương trình trở thành :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R}\left[\sin\theta - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \sin\theta\cos\theta\right].$$

Các vị trí cân bằng tương đối phải thỏa mãn $\theta = \text{cte}$ với mọi t và do vậy với $\ddot{\theta} = 0$:

$$\begin{cases} \sin\theta = 0, \text{ nghĩa là } \theta_1 = 0 \text{ và } \theta_2 = \pi, \\ \cos\theta = \left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2, \text{nghĩa là } \theta = \arccos\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2, \ \omega > \omega_0. \end{cases}$$

Để biện luận tính bền vững của các vị trí cân bằng này, ta hãy đặt : $\xi = \theta - \theta_e$ và

$$f(\xi) = -\frac{g}{R}\left[\sin(\theta_e + \xi) - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \sin(\theta_e + \xi)\cos(\theta_e + \xi)\right]$$

ta thu được phương trình gần đúng :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \xi\left(\frac{df}{d\xi}\right)_{\xi=0}.$$

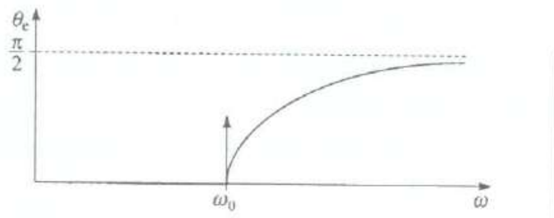
Trong trường hợp $\left(\dfrac{df}{d\xi}\right)_{\xi=0} < 0$, lực tiếp tuyến tác dụng lên hạt là một lực kéo về và khi đó cân bằng là bền.

Ở đây $\left(\dfrac{df}{d\xi}\right)_{\xi=0} = -\left(\dfrac{g}{R}\right)\left[\cos\theta_e - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \cos 2\theta_e\right].$

Do vậy các vị trí cân bằng bền là :

- với $\omega < \omega_0 : \theta_1 = 0$ (vị trí $\theta_2 = \pi$ là không bền),
- với $\omega > \omega_0 : \theta_3 = \arccos\left[\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]$, các vị trí khác là không bền.

Đường cong cho biết sự phụ thuộc của θ_e vào ω được biểu diễn trên hình vẽ dưới đây (*hình* 8) : có sự thay đổi tính chất của hệ khi $\omega = \omega_0$. Hiện tượng lí thú này xảy ra trong nhiều lĩnh vực khác nhau của vật lí ; đôi khi người ta nói có *sự phá vỡ tính đối xứng*.



Hình 8.

▸ **Để luyện tập : BT 6**

2.3. Công suất và động năng trong hệ quy chiếu phi Galilée

2.3.1. Định lí về động năng

Trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}$, công suất của lực quán tính Coriolis bằng :

$$\mathcal{P}(\vec{F}_{ic})_{/\mathcal{R}} = \left[-2m\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_g} \wedge \vec{v}_r(M)\right].\vec{v}_r(M).$$

Do vậy, công suất này bằng không. Còn đối với công suất của lực quán tính kéo theo thì không như vậy và do đó các định lí về động năng trong $\mathcal{R}$ được diễn tả bởi :

$$\left(\frac{d\mathscr{E}_K}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \mathscr{P}(\vec{F})_{/\mathcal{R}} + \mathscr{P}(\vec{F}_{ie})_{/\mathcal{R}}$$

và $$\mathscr{E}_K(2)_{/\mathcal{R}} - \mathscr{E}_K(1)_{/\mathcal{R}} = W(\vec{F})_{/\mathcal{R}} + W(\vec{F}_{ie})_{/\mathcal{R}}$$

giữa hai vị trí (1) và (2).

Định lí về động năng cũng được áp dụng trong $\mathcal{R}$ nếu đưa thêm vào công của lực quán tính kéo theo :

$$\Delta\mathscr{E}_{\mathbf{K}} = \mathbf{W}(\vec{\mathbf{F}}) + \mathbf{W}(\mathbf{F}_{\mathbf{ie}})$$

Trong $\mathcal{R}$, công của lực quán tính Coriolis $\vec{F}_{ic}$ bằng không :

$$\mathbf{W}(\mathbf{F}_{\mathbf{ic}}) = 0.$$

2.3.2. Trường hợp đặc biệt của hệ quy chiếu tương đối $\mathcal{R}$ quay với vận tốc góc không đổi xung quanh một trục cố định của $\mathcal{R}_g$

■ Sự tồn tại một thế năng của các lực quán tính kéo theo.

Gọi *(Oz)* là trục quay của $\mathcal{R}$ đối với $\mathcal{R}_g$ và ω là vận tốc góc quay không đổi của trục quay đó :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_g} = \omega.\vec{e}_z .$$

Dùng các tọa độ trụ của chất điểm M khối lượng m, ta tính công nguyên tố của lực quán tính kéo theo tác dụng lên điểm M trong $\mathcal{R}$:

$$\delta W(\vec{F}_{ie})_{/\mathcal{R}} = +m\omega^2 r\vec{e}_r.d(r\vec{e}_r + z\vec{e}_z) = +m\omega^2 r dr .$$

Do vậy, ta được phép đặt $\delta W(\vec{F}_{ie})_{/\mathcal{R}} = -d\mathscr{E}_{P_{ie}}$ với phép đồng nhất hóa :

$$\mathscr{E}_{P_{ie}} = -\frac{m.\omega^2 r^2}{2} + cte .$$

Khi giải các thí dụ, ta nên chọn cho hằng số này giá trị không.

Vì lực quán tính Coriolis không thực hiện công trong $\mathcal{R}$ nên thường phải đối đầu với một tình huống trong đó các lực Galilée có công suất khác không trong $\mathcal{R}$, nhận từ đó một thế năng không phụ thuộc thời gian. Bằng cách khái quát hoá các trường hợp đã gặp trong các hệ quy chiếu Galilée, ta phải công nhận chất điểm đang *ở trong trạng thái vận động bảo toàn* trong $\mathcal{R}$.

Khi đó, trong các thí dụ có một bậc tự do, ta có thể thể hiện một cách hiệu quả sự bảo toàn cơ năng trong $\mathcal{R}$, cho chất điểm (M,m) mà không quên đưa $\mathscr{E}_{P_{ie}}$ vào trong thế năng toàn phần :

$$\mathscr{E}_{M/\mathcal{R}} = \mathscr{E}_{K/\mathcal{R}} + \mathscr{E}_{P_{tot}/\mathcal{R}} .$$

■ Thí dụ về chuyển động có một bậc tự do

Ta hãy lấy lại thí dụ trong *áp dụng* 4. Các kí hiệu vẫn giữ như cũ, ta hãy tìm lại các vị trí cân bằng tương đối của hạt cườm trên chiếc vòng và biện luận về tính bền vững của chúng. Trong $\mathcal{R}$, lực tiếp xúc $\vec{R}$ và lực quán tính Coriolis không thực hiện công. Các lực khác như trọng lượng và lực quán tính kéo theo, nhận các thế năng lần lượt bằng :

$$\mathscr{E}_{P_P} = -mgR\cos\theta \text{ và } \mathscr{E}_{P_{ie}} = -\frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \sin^2\theta ,$$

với các hằng số được chọn bằng không.

Thế năng tổng hợp bằng :

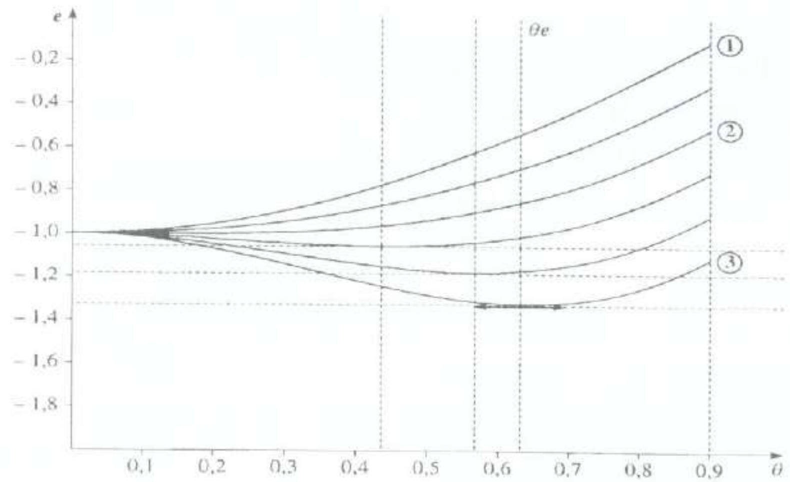
$$\mathscr{E}_P = -mgR\cos\theta - \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \sin^2\theta .$$

Đối với hệ ở trong trạng thái vận động bảo toàn này, cơ năng được bảo toàn và bằng cách đạo hàm theo thời gian, ta dễ dàng tìm lại được phương trình chuyển động theo θ : $\mathscr{E}_M = \mathscr{E}_K + \mathscr{E}_P$, với $\mathscr{E}_{K/\mathcal{R}} = \mathscr{E}_K = \frac{1}{2}mR^2.\theta^2$.

Để tìm lại các vị trí cân bằng và biện luận về tính bền vững của chúng, ta chỉ cần nghiên cứu các cực trị của thế năng. Bằng cách đặt $\omega_0^2 = \frac{g}{R}$, ta thu được :

$$\mathscr{E}_P = U(\theta) = -mgR\left[\cos\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2.\sin^2\theta\right].$$

Bài toán cần tìm đã được giải quyết trước đây, ngoài ra ta thử nghiệm lại bài toán bằng đồ thị : rất dễ dàng biểu diễn giá trị rút gọn $e(\theta) = -(\cos(\theta) + \alpha\sin^2(\theta))$ bằng chiếc máy tính của mình (thao tác rất nên làm !). Ta sẽ thu được các đường cong có dạng sau đây (*hình* 9).



Hình 9. *Nghiên cứu thế năng rút gọn bằng đồ thị.*

$$e(\theta) = -(\cos\theta + \alpha\sin^2\theta),\ \text{với}\ \alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\ \text{và}\ \omega_0^2 = \frac{g}{R}.$$

① $\omega < \omega_0$ và $\alpha < \frac{1}{2}$ ② $\omega = \omega_0$ và $\alpha = \frac{1}{2}$.

③ $\omega > \omega_0$ và $\alpha > \frac{1}{2}$, *cực tiểu ở* $\theta_e = arccos\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$.

Các kết quả này phù hợp với điều ta chờ đợi (ở đây, ta dùng các kí hiệu của § 2.2).

Với $\omega < \omega_0$ (lấy $\alpha < \frac{1}{2}$), đó là vị trí cân bằng bền $\theta_1 = \theta$, trong khi đó với $\omega > \omega_0$, ta sẽ nghiệm thấy $\mathscr{E}_P$ đạt cực tiểu khi :

$$\theta = \theta_3 = \arccos\left[\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]\ (\text{lấy}\ \alpha > \frac{1}{2}).$$

Nếu chọn α "rất lớn", ta sẽ nghiệm thấy θ_3 tiến tới $\frac{\pi}{2}$, và trong trường hợp tới hạn $\omega = \omega_0$ (vậy $\alpha = \frac{1}{2}$), ta sẽ nhận thấy sự tồn tại của một cực tiểu (rất dẹt) của $\mathscr{E}_P$ ở $\theta = 0$
Ta hãy kết thúc nghiên cứu này bằng một câu hỏi :
Ta có thể chỉ áp dụng định lí động năng cho chất điểm trong $\mathscr{R}_T$ không ?
Chẳng hạn, nếu thể hiện định luật bảo toàn cơ năng trong $\mathscr{R}_T$, bạn thu được :

$$\frac{1}{2}mR^2\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \omega^2\right] - mgR\cos(\theta) = cte,$$

thì bạn đã nhầm ! Ta hãy tìm ra cái sai...
Bạn đã coi một cách quá đơn giản là lực tiếp xúc tác dụng lên chất điểm không thực hiện công trong $\mathscr{R}_T$ và đó chính là cái sai, vì $\vec{N}$ có một thành phần N_x trực đối với $\vec{F}_{ie}$ và do vậy $\vec{N}.\vec{v}(M)_{/\mathscr{R}_T}$ là khác không. Theo cách đó, bạn có thể tìm lại được phương trình đúng.
Ở đây, không có gì mâu thuẫn với trường hợp không có ma sát : đó là công suất toàn phần của các lực tiếp xúc (kể cả lực mà chất điểm tác dụng lên vòng) phải bằng không.

▸ **Để luyện tập : BT 7 và 8.**

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

- **Trong một hệ quy chiếu $\mathscr{R}$ chuyển động có gia tốc đối với một hệ quy chiếu Galilée, để thể hiện hệ thức cơ bản của động lực học, cần phải đưa thêm vào các lực quán tính :**

$$\vec{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{F}}_{ie} + \vec{\mathbf{F}}_{iC} = m\vec{\mathbf{a}}_r$$

- $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e$ (*với* $\vec{a}_e$: **$\overrightarrow{\text{gia tốc của điểm trùng hợp}}$**).

- $\vec{F}_{iC} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$ **($\vec{\Omega}$ là vectơ quay của hệ quy chiếu $\mathscr{R}$ phi Galilée đối với một hệ quy chiếu Galilée).**

- **Định lí về mômen động lượng vẫn có giá trị trong hệ quy chiếu phi Galilée nếu thay lực Galilée $\vec{F}$ bằng tổng :**

$$\vec{\mathrm{F}} + \vec{\mathrm{F}}_{ie} + \vec{\mathrm{F}}_{iC}$$

- **Định lí về động năng được áp dụng trong $\mathscr{R}$ nếu đưa thêm vào công của lực quán tính kéo theo :**

$$\Delta\mathscr{E}_{\mathbf{K}} = \mathbf{W}(\vec{\mathbf{F}}) + \mathbf{W}(\vec{\mathbf{F}}_{ie}).$$

- **Trong $\mathscr{R}$, công của lực quán tính Coriolis bằng không :**

$$W(F_{iC}) = 0.$$

- **Lực quán tính kéo theo cũng có thể xuất xứ từ một thế năng ; đó là trường hợp đối với sự quay đều của $\mathscr{R}$ xung quanh một trục cố định của một hệ quy chiếu Galilée.**

Bài tập có lời giải

Nhà vô địch bắn súng

ĐỀ BÀI

Để tăng độ khó của thao tác, một nhà vô địch bắn súng nổi tiếng đã đặt chiếc bia của mình trên mép một mâm quay bán kính R. Nhà vô địch đứng ở điểm xuyên tâm đối với bia và mâm quay quay với vận tốc góc không đổi ω xung quanh trục thẳng đứng của mâm.

Biết rằng viên đạn bay ra khỏi súng với vận tốc tương đối v_0 đã biết, hỏi dưới góc ngắm α nào so với đường kính nối xạ thủ với bia thì xạ thủ mới bắn trúng đích ?

Bỏ qua ma sát của không khí và giả thiết v_0 rất lớn so với $R\omega$. Bỏ qua tác dụng của trọng lực nếu xác định rõ được sự hiệu lực của phép gần đúng này.

Hãy xem xét hai phương pháp giải, hoặc dùng hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ của mâm quay hoặc dùng hệ quy chiếu Trái đất $\mathcal{R}_T$.

Hãy cho một áp dụng bằng số hợp lí : v_0 thường có giá trị vào cỡ $500 ms^{-1}$.

HƯỚNG DẪN

Đề bài không xác định rõ hệ tọa độ và không cung cấp hình vẽ.

Đối với mỗi hệ quy chiếu nghiên cứu cần phải bắt đầu bằng việc kẻ một sơ đồ trên đó có định rõ một hệ trục tọa độ gồm các trục cố định, điểm xuất phát, điểm đi tới và hình dạng (định tính) của quỹ đạo.

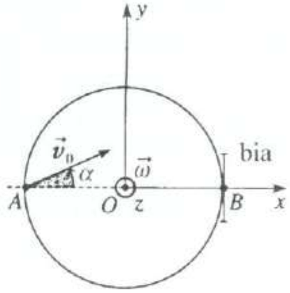
Có thể bỏ qua trọng lực nếu, trong phương trình thu được, số hạng liên kết với nó nhỏ không đáng kể trước những số hạng khác.

Phương trình chuyển động đã được đơn giản hóa có thể giải theo hai cách.

- *Ta có thể giải hệ hai phương trình vi phân của $x(t)$ và $y(t)$.*

BÀI GIẢI

■ Lời giải trong $\mathcal{R}$



Cho $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ là một hệ tọa độ gắn với mâm quay. Điểm O được chọn trên trục quay, ở cùng độ cao với súng.

Trong $\mathcal{R}$, phương trình chuyển động được suy ra từ :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + m\omega^2\overrightarrow{OM} - 2m\omega\vec{e}_z \wedge \vec{v},$$

vì $v >> R\omega$, $2m\omega v >> m\omega^2 .OM$.

Lực kéo theo nhỏ không đáng kể so với lực Coriolis.

Trọng lực cũng có thể bỏ qua nếu $g << \omega . v$.

Phương trình vi phân được đơn giản thành : $\frac{d\vec{v}}{dt} = -2\omega\vec{e}_z \wedge \vec{v}$

- *Phương pháp thứ nhất*

Ta bắt đầu từ hệ phương trình vi phân :

$$\frac{dv_x}{dt} = 2\omega v_y \text{ và } \frac{dv_y}{dt} = -2\omega v_x,$$

từ đó, lấy đạo hàm theo thời gian của mỗi phương trình :

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = -4\omega^2 v_x \text{ và } \frac{d^2v_y}{dt^2} = -4\omega^2 v_y,$$

Các điều kiện ban đầu là $v_x(0) = v_0.\cos\alpha$ và $v_y(0) = v_0.\sin\alpha$.

Các nghiệm tương thích giữa chúng và với các điều kiện ban đầu là :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0\cos(2\omega t - \alpha) \text{ và } v_y = \frac{dy}{dt} = v_0\sin(2\omega t - \alpha)$$

Các giá trị ban đầu của x và y là : $x(0) = -R$ và $y(0) = 0$.

Từ đó ta có thể suy ra $x(t)$ và $y(t)$:

$$x(t) = \frac{v_0.\sin\alpha}{2\omega} - R + \frac{v_0}{2\omega}\sin(2\omega t - \alpha),$$

$$y(t) = \frac{v_0}{2\omega}\cos\alpha - \frac{v_0}{2\omega}\cos(2\omega t - \alpha).$$

Động tử đi qua $B(+R,0)$ lúc τ, cho :

$$2R = \frac{v_0}{2\omega}\left[\sin\alpha + \sin(2\omega\tau - \alpha)\right],$$

$$0 = \frac{v_0}{2\omega}\left[\cos\alpha - \cos(2\omega\tau - \alpha)\right].$$

Từ đó, ta suy ra :

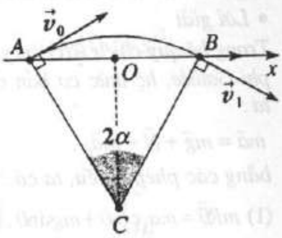
$\sin\alpha = \frac{2\omega R}{v_0}$, nếu $\omega R \ll v_0$ ta có : $\alpha = \frac{2\omega R}{v_0}$.

• Ta cũng có thể giữ nguyên phương trình dưới dạng vectơ và trực tiếp suy ra rằng quỹ đạo là một vòng tròn mà ta có thể xác định được bán kính. Phương pháp thứ hai này, cô đọng hơn, là phương pháp đơn giản hơn về mức độ tính toán.

• *Phương pháp thứ hai*

Nếu bỏ qua trọng lực thì quỹ đạo nằm trong mặt phẳng $z = 0$.

$\vec{v}.\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$. Gia tốc vuông góc với quỹ đạo và vận tốc (vô hướng) giữ không đổi.



• Bán kính cong R_C cho bởi :

$$\frac{v^2}{R_C} = a_N = 2\omega v.$$

Do đó, quỹ đạo là một vòng tròn bán kính :

$$R_C = \frac{v}{2\omega}.$$

• Phân tích hình vẽ về mặt hình học, chứng tỏ :

$2R = AB = 2R_C\sin\alpha$, hay $\sin\alpha \approx \alpha \approx \frac{2\omega R}{v}$.

Để phân tích trong $\mathcal{R}_T$, ta cần thấy rằng giả thiết $v \gg \omega R$ kéo theo các góc quay rất nhỏ trên quỹ đạo.

■ Lời giải trong $\mathcal{R}_T$

Cho $(O;\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ một hệ tọa độ gắn với $\mathcal{R}_T$.

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_T} = 0.$$

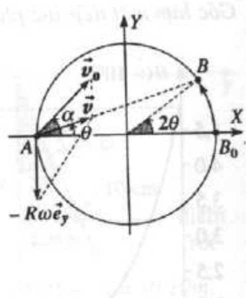
Hướng của quỹ đạo trong $\mathcal{R}_T$ là gì?

Phải dựa vào vận tốc kéo theo tại điểm bắn viên đạn.

Chuyển động trong $\mathcal{R}_T$ là thẳng đều.

Vận tốc trong $\mathcal{R}_T$ là :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_T} = \vec{v}_{0/\mathcal{R}} - R\omega\vec{e}_y.$$



Vậy vận tốc hợp với trục (OX) một góc θ sao cho :

$$\tan\theta = \frac{v_0\sin\alpha - R\omega}{v_0\cos\alpha},$$

hoặc với gần đúng bậc 1 : $\theta = \alpha - \frac{R\omega}{v_0}$.

Thời gian để viên đạn, lúc đầu ở B_0, bay tới B là :

$$\tau = \frac{AB}{v_0} = \frac{2R\cos\theta}{v_0} \approx \frac{2R}{v_0}.$$

Trong thời gian đó, bia đã quay một góc 2θ (x. hình vẽ), tức là $2\theta = \omega\tau$.

Từ đó, ta suy ra :

$$\frac{2R}{v_0} = \frac{2\theta}{\omega} = \frac{2\alpha}{\omega} - \frac{2R}{v_0}, \text{ hay } \alpha = \frac{2R\omega}{v_0}.$$

BÀI TẬP

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

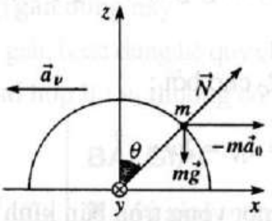
1 Hòn đáo trên bán cầu có gia tốc

Một vận động viên chơi húc côn cầu trên băng đặt hòn đáo của mình lên đỉnh của một bán cầu bằng kim loại bán kính R, bán cầu này được đặt cố định trên một mâm phẳng chuyển động.

Mâm được kéo chuyển động với gia tốc nằm ngang không đổi a_0, hỏi điều gì sẽ xảy ra với hòn đáo ? Bỏ qua các ma sát, và hãy vẽ đường cong cho biết sự phụ thuộc của góc làm mất sự tiếp xúc của hòn đáo với bán cầu theo tỉ số $\frac{a_0}{g}$.

• *Lời giải*

Trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}(O; x, y, z)$ phi Galilée, hệ thức cơ bản cho ta :



$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} - m\vec{a}_0$,

bằng các phép chiếu, ta có :

(1) $mR\ddot{\theta} = ma_0\cos\theta + mg\sin\theta$, (2) $-mR\dot{\theta}^2 = ma_0\sin\theta - mg\cos\theta + N$.

Áp dụng định lí về động năng cũng trong hệ quy chiếu trên cho:

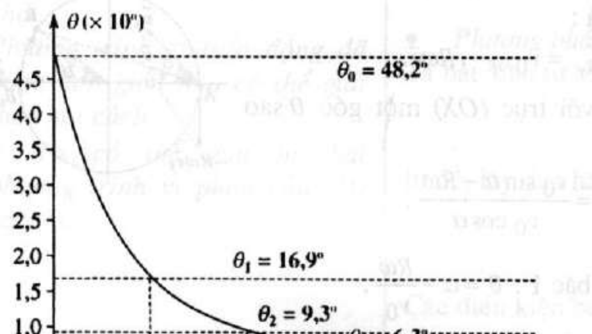
(3) $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mR\dot{\theta}^2 + mgR\cos\theta\right) = -m\vec{a}_0\vec{v} = ma_0R\cos\theta.\frac{d\theta}{dt}$.

Ta tìm lại được phương trình (1).

Tích phân của (3) *cho :* $R\frac{\dot{\theta}^2}{2} = a_0\sin\theta + g(1-\cos\theta)$, *nghĩa là :*

$$N = mg\left[(3\cos\theta - 2) - 3\frac{a_0}{g}\sin\theta\right].$$

Góc làm mất tiếp xúc phải sao cho : $\cos\theta - \frac{2}{3} = \frac{a_0}{g}.\sin\theta$.



2 Hòn đáo trên bán cầu quay

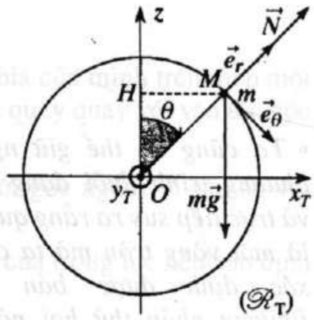
Một vận động viên chơi húc côn cầu trên băng đặt hòn đáo của mình lên đỉnh của một bán cầu bằng kim loại nhẵn bóng, bán kính R, bán cầu này quay với vận tốc góc ω không đổi xung quanh trục thẳng đứng *(Oz)* của nó. Khi đó hòn đáo bắt đầu trượt trên bán cầu.

Chứng tỏ rằng với một góc θ cần xác định, chất điểm này sẽ dời khỏi bán cầu.

Hỏi khi đó lực quán tính kéo theo và lực quán tính Coriolis trong hệ quy chiếu gắn với bán cầu có biểu thức thế nào ?

• *Lời giải*

Việc chọn $\mathcal{R}_T$ làm hệ quy chiếu nghiên cứu cho phép đưa ra một lời giải đơn giản. Điều đó hoàn toàn khác với $\mathcal{R}$. Áp dụng nguyên lí cơ bản của động lực học và định lí động năng cho khối lượng m trong hệ quy chiếu Trái đất $\mathcal{R}_T(O; x_T, y_T, z)$ Galilée cho :



(1) $mR\frac{d^2\theta}{dt^2} = mg\sin\theta$,

(2) $-mR\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -mg\cos\theta + N$,

(3) $\frac{1}{2}mR^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = mgR(1-\cos\theta)$.

Từ đó : $N = mg(3\cos\theta - 2)$, *tức* $\cos\theta_{\lim} = \frac{2}{3}$ *và*

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}_T} = \sqrt{\frac{2}{3}gR}\,\vec{e}_\theta .$$

Ta hãy tính $\vec{F}_{ie}$ và $\vec{F}_{ic}$ trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ gắn với bán cầu :

$$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e(M) = +mR\omega^2\sin\theta.\vec{e}_{HM} = \frac{\sqrt{5}}{3}m\omega^2 R\vec{e}_{HM} ,$$

$$\vec{F}_{iC} = -m2\vec{\omega}\wedge\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = -m2\vec{\omega}\wedge(\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_T} - \vec{v}_e(M))$$

$$= -2m\vec{\omega}\wedge\left(\sqrt{\frac{2}{3}gR}\,\vec{e}_\theta - \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{HM}\right)$$

$$= -2m\sqrt{\frac{2}{3}gR}.\omega\,\vec{e}_z\wedge\vec{e}_\theta \quad + -2m\omega^2.\overrightarrow{HM}$$

3 Hòn bi trên mâm quay

Ta lấy lại thí dụ về hòn bi chuyển động không ma sát trên một mâm nằm ngang quay với vận tốc góc không đổi ω, xung quanh một trục thẳng đứng *(Oz)*, nhưng lần này, nhà thực nghiệm bám vào trục quay và được kéo đi bởi mâm; đặt nhẹ nhàng không vận tốc ban đầu tương đối hòn bi xuống một điểm cách trục quay r_0 *(xem áp dụng 3)*.

Hãy vẽ các quỹ đạo của hòn bi khi đó, theo quan điểm của nhà thực nghiệm gắn với mâm và của bạn anh ta đang nhìn vào mâm quay.

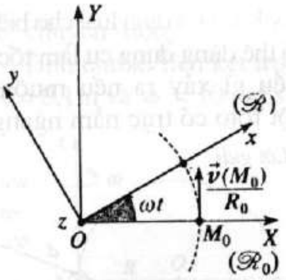
Để giải hệ phương trình vi phân trong hệ quy chiếu của mâm, ta nên đặt :

$$u = x + iy$$

trong đó u là tọa độ của điểm M trong mặt phẳng ảo.

• *Lời giải*

Hệ quy chiếu cố định $\mathcal{R}_0 (O; X, Y, z)$ và hệ quy chiếu gắn với mâm $\mathcal{R}(O; x, y, z)$.



• *Lập luận trong $\mathcal{R}_0$*

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_0} = \vec{0}$$

nghĩa là

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_0} = \vec{v}(M_0)_{/\mathcal{R}_0} = r_0\omega\vec{e}_y$$

Từ đó : $X = r_0$; $Y = r_0\omega t$.

• *Lập luận trong $\mathcal{R}$* :

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{0} - m\vec{a}_e(M) - m\vec{a}_c(M) = +m\omega^2\overrightarrow{OM} - 2m\vec{\omega}\wedge\vec{v}(M)_{\mathcal{R}}$$

nghĩa là : $\ddot{x} = +\omega^2 x + 2\omega\dot{y}$ *và* $\ddot{y} = +\omega^2 y - 2\omega\dot{x}$, *còn có thể viết là* :

$$\ddot{u} + 2i\omega\dot{u} - \omega^2 u = 0 \text{ với } u = x + iy$$

Nghiệm sẽ là : $u = (\alpha + \beta t)e^{-i\omega t}$, *vì* $\Delta = 0$.

Đưa các điều kiện ban đầu vào, ta có :

$u(t=0) = r_0$ *và* $\dot{u}(t=0) = 0$

$u = r_0(1 + i\omega t).e^{-i\omega t}$ *nghĩa là*:

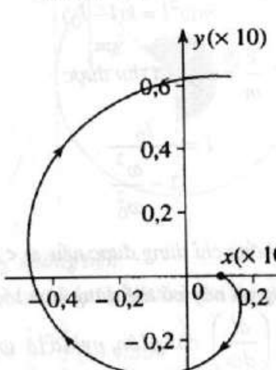
$x(t) = r_0(\cos\omega t + \omega t\sin\omega t)$,

$y(t) = r_0(-\sin\omega t + \omega t\cos\omega t)$,

hay còn là : $r = r_0\sqrt{1 + \omega^2 t^2}$

và $\theta = -\omega t + \arctan(\omega t)$

Các phương trình chuyển động trong $\mathcal{R}$ và $\mathcal{R}_0$ là kết hợp với nhau.



4 Chạy trên mâm quay

Một bé trai *A* và chị của nó *B* đang ở trong một mâm quay đều xung quanh trục thẳng đứng của mâm. Bé trai đứng rất gần trục, người chị đứng ở gần mép mâm, và muốn chạy lại với em theo hướng xuyên tâm.

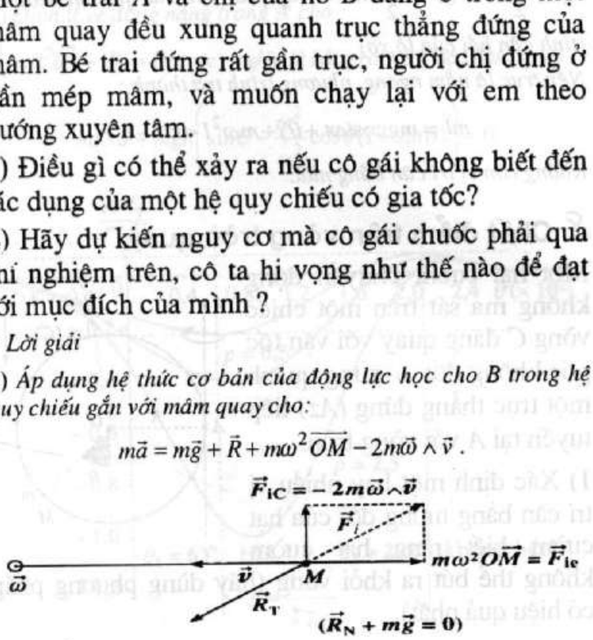
1) Điều gì có thể xảy ra nếu cô gái không biết đến tác dụng của một hệ quy chiếu có gia tốc?

2) Hãy dự kiến nguy cơ mà cô gái chuốc phải qua thí nghiệm trên, cô ta hi vọng như thế nào để đạt tới mục đích của mình ?

• *Lời giải*

1) *Áp dụng hệ thức cơ bản của động lực học cho B trong hệ quy chiếu gắn với mâm quay cho:*

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} + m\omega^2\overrightarrow{OM} - 2m\vec{\omega}\wedge\vec{v} .$$



$\vec{R}$ cần phải có một thành phần trực đối với $\vec{F}_i$; nếu không có phản lực này (hệ số ma sát không đủ), sẽ không thể có chuyển động

2) • *Tăng hệ số ma sát bằng cách đổi giầy.*

• *Dùng một chiếc gậy chống về phía sau theo chiều $\vec{F}_i$.*

5 Rơi tự do trên một mâm quay

Một đứa trẻ đang ở trong một mâm quay với vận tốc góc ω không đổi xung quanh trục thẳng đứng (Oz). Cậu ta ngồi trên một chiếc ghế đã được nâng cao, cách trục quay r_0, ở một độ cao h so với mặt sàn và để rơi một hòn bi ra khỏi túi của nó.

Hỏi khi đó hòn bi của nó sẽ vạch ra một quỹ đạo như thế nào ?

Hòn bi sẽ chạm vào sàn ở điểm nào ?

Mẹ của cậu đứng yên ở ngoài mâm quay đã trông thấy sự rơi của hòn bi. Hỏi bà có đồng ý với con trai mình không ?

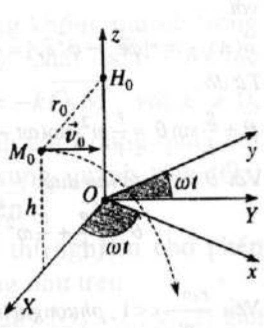
Cho : $\omega = 2\pi N$, với $N = \dfrac{1}{8}Hz$; $g = 10\ \text{m.s}^{-2}$;

$h = 1{,}50\text{m}$; $r_0 = 5\text{m}$.

• *Lời giải*

$\mathcal{R}(O; x, y, z)$ biểu diễn hệ quy chiếu gắn với mâm quay. Áp dụng nguyên lí cơ bản của động lực học cho hòn bi trong $\mathcal{R}$ cho :

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = m\vec{g} + m\omega^2\overrightarrow{HM} - 2m\vec{\omega}\wedge\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$$



Từ đó :

$\ddot{x} = \omega^2 x + 2\omega\dot{y}$, $\ddot{y} = \omega^2 y - 2\omega\dot{x}$,

$\ddot{z} = -g$ *(do đó* $z = h - \dfrac{1}{2}gt^2$ *).*

Bằng cách đặt $u = x + iy$, nghiệm của phương trình

$\ddot{u} + 2i\omega\dot{u} - \omega^2 u = 0$ *là*

$u = r_0(1 + i\omega t).e^{-i\omega t}$,

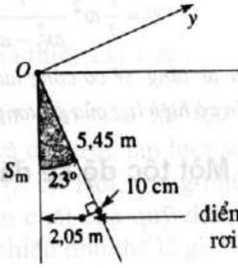
nghĩa là :

$x = r_0[\cos\omega t + \omega t\sin\omega t]$ *và*

$y = r_0[\omega t\cos\omega t - \sin\omega t]$

Hòn bi chạm vào sàn lúc :

$t_1 = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} = 0{,}55s$



nghĩa là với $\omega t_1 = 0{,}43$ *(tức 23^0)* : $x = 5{,}45m$; $y = -0{,}10m$.

Một lập luận trong hệ quy chiếu cố định cho : $\ddot{X} = 0, \ddot{Y} = 0, \ddot{z} = -g$,

nghĩa là : $X = r_0$; $Y = r_0\omega t$; $z = h - \dfrac{1}{2}gt^2$.

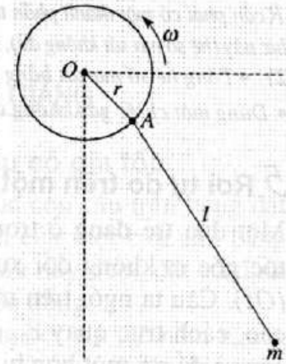
Áp dụng số : $X = 5m$; $Y = 2{,}05m$.

6 Dao động cưỡng bức của một con lắc đơn

Người ta buộc đầu của một sợi dây, đã được gắn một chiếc vòng nhỏ khối lượng *m*, vào một cái móc quay xung quanh một trục nằm ngang với vận tốc góc không đổi ω, khoảng cách từ móc tới trục quay bằng *r*, chiều dài của dây bằng *l*.

Coi $\frac{r\omega^2}{g}$ rất nhỏ hơn đơn vị.

Chứng tỏ rằng thiết bị này tạo thành một con lắc duy trì mà ta sẽ thiết lập được phương trình chuyển động. Điều gì sẽ xảy ra nếu tăng vận tốc góc của động cơ kéo cái móc ? Ta chỉ giới hạn xét các chuyển động có biên độ nhỏ.



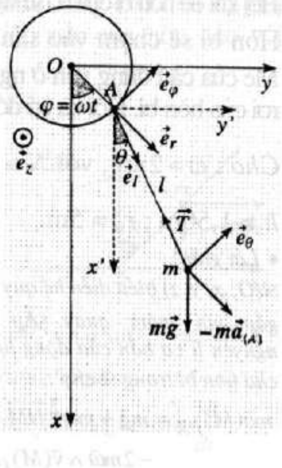
• *Lời giải*

Hệ quy chiếu ℛ'(A; x', y', z) chuyển động tịnh tiến với vận tốc không đều đối với hệ quy chiếu ℛ(O; x, y, z) cố định : nó không phải là hệ quy chiếu Galilée. Chuyển động của khối lượng m trong ℛ' là nghiệm của phương trình :

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} = m\vec{g} + \vec{T} - m\vec{a}(A)_{/\mathcal{R}'}$$

với

$$\vec{a}(A)_{/\mathcal{R}} = r[\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - \dot{\varphi}^2\vec{e}_r] = -\omega^2\vec{e}_r$$



Từ đó :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = \frac{r}{l}\omega^2\sin(\omega t - \theta).$$

Với $\theta << 1$, ta thu được :

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l} + \frac{r}{l}\omega^2\cos\omega t\right)\theta = \frac{r}{l}\omega^2\sin\omega t.$$

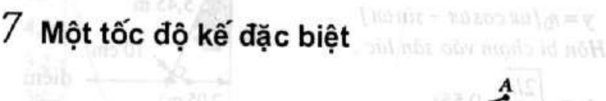
Nếu $\frac{r\omega^2}{g} << 1$*, phương trình trở thành* $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \frac{r}{l}\omega^2\sin\omega t$

mà nghiệm ổn định là :

$$\theta = \frac{r}{l}\omega^2\frac{l}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin\omega t \text{ , với } \omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

Nếu ω tăng, sẽ có cộng hưởng khi $\omega = \omega_0$, nhưng ta ra khỏi miền có hiệu lực của phương trình vi phân trên.

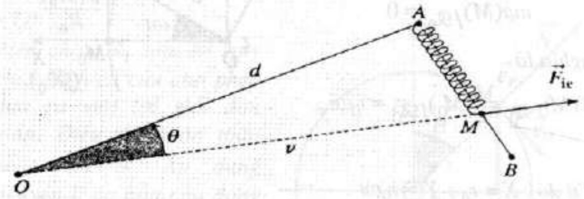
7 Một tốc độ kế đặc biệt



Thanh kim loại hình chữ L quay với vận tốc góc không đổi ω trong mặt phẳng nằm ngang, xung quanh trục thẳng đứng *(Oz)*. Một lò xo có độ cứng k, chiều dài tự nhiên l_0 được cố định tại A của thanh L và ở đầu của lò xo có gắn một vòng nhỏ khối lượng m, vòng này trượt không ma sát trên phần thẳng AB. Gọi l là chiều dài của lò xo.

Hãy khảo sát định luật cho biết sự phụ thuộc của l vào ω. Có thể dùng dụng cụ làm tốc độ kế được không ? Điều gì xảy ra nếu muốn dùng dụng cụ trên với một rôto có trục nằm ngang ?

• *Lời giải*



Nếu chiếc vòng khối lượng m nằm cân bằng trong hệ quy chiếu chuyển động gắn vào "L", ta có :

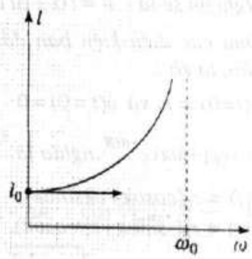
$$\vec{0} = \underbrace{M\vec{g} + \vec{R}}_{\vec{0}} + m\omega^2\overrightarrow{OM} - k(l - l_0)\vec{e}_{AB},$$

hay còn là (bằng phép chiếu trên $\vec{e}_{AB}$, với chú ý $\overrightarrow{OM}.\vec{e}_{AB} = l$) :

$$m\omega^2 l = k(l - l_0).$$

Đặt $\frac{k}{m} = \omega_0^2$*, ta thu được :*

$$l = \frac{l_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}.$$



Hệ thống chỉ dùng được nếu $\omega < \omega_0$

Dụng cụ này có thể dùng làm tốc độ kế và càng chính xác hơn nếu $\left(\frac{dl}{d\omega}\right)$ càng lớn, nghĩa là ω càng gần ω_0.

Giá trị của l tìm được ở trên cũng có thể tìm được bằng cách tìm cực tiểu của thế năng phát sinh ra các lực khác nhau :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$ *($\mathcal{E}_p$ phát sinh ra lực quán tính kéo theo) (tính đàn hồi của lò xo)*

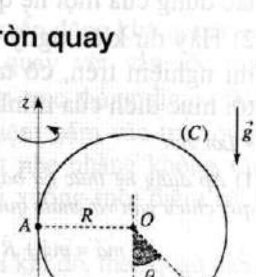
Nếu trục là nằm ngang, phương trình trở thành :

$$m\ddot{l} = mg\cos(\omega t + \theta) + m\omega^2 l - k(l - l_o).$$

Không còn vị trí cân bằng nữa.

8 Chất điểm trên vòng tròn quay

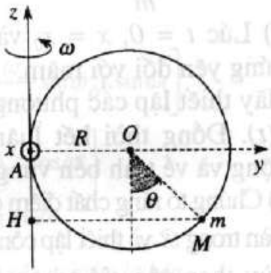
Một hạt cườm chuyển động không ma sát trên một chiếc vòng C đang quay với vận tốc góc không đổi ω xung quanh một trục thẳng đứng *(Az)* tiếp tuyến tại A với vòng tròn.



1) Xác định một hay nhiều vị trí cân bằng tương đối của hạt cườm biết rằng hạt cườm không thể bứt ra khỏi vòng (hãy dùng phương pháp có hiệu quả nhất).

2) Hãy nghiên cứu các chuyển động nhỏ xung quanh vị trí cân bằng bền. Tính chu kì liên kết trong trường hợp $g = 10m.s^{-2}$, $R = 0,1m$ và $\omega = 10\ rad.s^{-1}$.

- *Lời giải :*



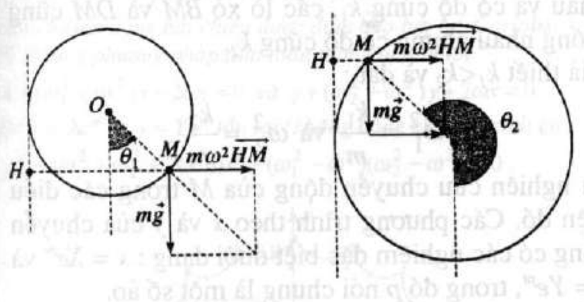
1) *Lập luận trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}(A\ ;\ x,\ y,\ z)$ quay với vận tốc ω đối với một hệ quy chiếu cố định.*

Vị trí cân bằng thu được khi $m\vec{g} + m\omega^2\overrightarrow{HM}$ là pháp tuyến của vòng tròn, nghĩa là :

$$\frac{\omega^2(1+\sin\theta)}{\omega_0^2} = \tan\theta \ (\text{với } \omega_0^2 = \frac{g}{R})$$

Do vậy có hai vị trí cân bằng :

$\theta_1(\sin\theta_1 > 0 ; \tan\theta_1 > 0)$ *và* $\theta_2(\sin\theta_2 < 0 ; \tan\theta_2 > 0)$



θ_1 là vị trí cân bằng bền và θ_2 không bền.

Thực vậy, thế năng (ứng với trọng lực và lực quán tính kéo theo) là :

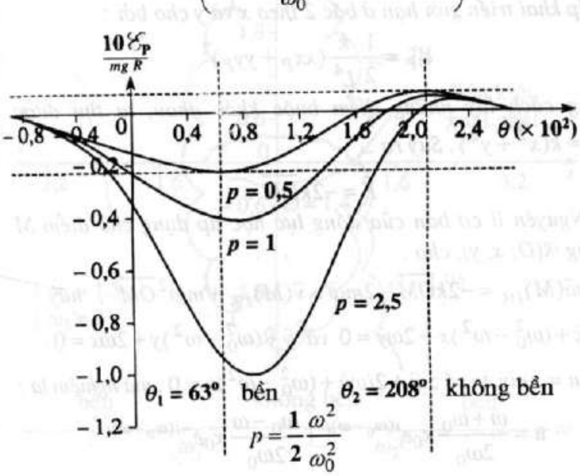
$$\mathscr{E}_P = -mgR\left(\cos\theta + \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}(1+\sin\theta)^2\right)$$

Ta quan sát thấy có một cực tiểu ứng với $\theta_1 \approx 63^0$ (bền) và một cực đại ứng với $\theta_2 \approx 208^0$ (không bền).

2) Định lí về động năng trong $\mathcal{R}$ cho :

$\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \mathscr{E}_P = \mathscr{E}_m(cte)$ *,nghĩa là bằng cách lấy đạo hàm, ta có :*

$$mR^2\ddot{\theta} + mgR\left(\sin\theta - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\cos\theta(1+\sin\theta)\right) = 0 .$$



Đặt : $\theta = \theta_1 + \alpha\ (\alpha << 1)$ và dùng $f(\theta) = f(\theta_1) + \alpha\left(\frac{df}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_1}$

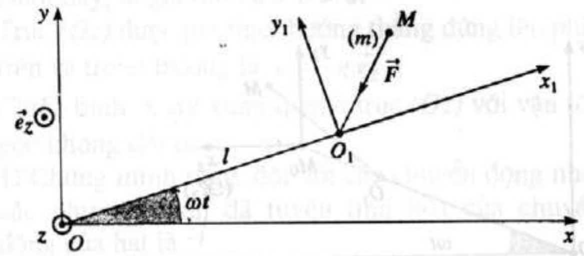
ta thu được :

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2\left[\frac{1+\sin^3\theta_1}{\cos\theta_1(1+\sin\theta_1)}\right].\alpha = 0 .$$

áp dụng số : T = 0,45s.

VẬN DỤNG VỐN KIẾN THỨC

9 Chuyển động của một chất điểm trong các hệ quy chiếu phi Galilée



Một chất điểm *M* chuyển động không ma sát trong mặt phẳng nằm ngang *(xOy)*. Chất điểm chịu tác dụng của lực toàn phần $\vec{F} = -k\overrightarrow{O_1M}$, với $k > 0$, điểm O_1 là đầu của một thanh dài *l* đang quay với vận tốc góc không đổi ω xung quanh trục *(Oz)* thẳng đứng hướng lên phía trên .

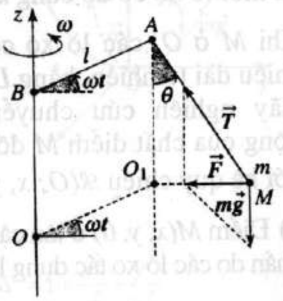
1) Hãy nghĩ ra một thiết bị thí nghiệm cho phép thực hiện được một tình huống như trên.

2) Gọi $\mathcal{R}_1$ là hệ quy chiếu quay $(O_1\ ;\ x_1,\ y_1,\ z)$ gắn với thanh. Xác định vị trí cân bằng tương đối M_0 của điểm *M* trong $\mathcal{R}_1$.

Ta có thể đặt : $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ và giả thiết $\omega_0 > \omega$.

3) Gọi $\mathcal{R}_2$ là hệ quy chiếu gắn vào hệ tọa độ $(M_0\ ;\ x,\ y,\ z)$, mà M_0 là gốc và các trục lần lượt song song với các trục của *(O; x, y, z)*. Hỏi, trong những điều kiện ban đầu bất kì, bản chất của quỹ đạo của chất điểm trong một hệ quy chiếu như thế là gì ?

- *Lời giải*



1) Sự mô hình hóa đó tương ứng với một con lắc đơn treo tại điểm A, mà A lại đang chuyển động trên một quỹ đạo tròn với ω không đổi và θ nhỏ.

2) Áp dụng nguyên lí cơ bản của động lực học cho điểm M trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}_1$ phi Galilée cho :

$$m\vec{a}_{/\mathcal{R}_1} = \vec{0} = -k\overrightarrow{O_1M} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{iC} ,$$

với : $\vec{F}_{ie} = m\omega^2\overrightarrow{OM}$ *và* $\vec{F}_{iC} = 2m\omega\vec{e}_z \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1} = 0$.

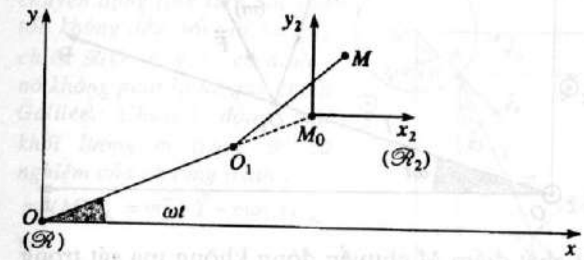
Từ đó : $\overrightarrow{O_1M_0} = \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot l\vec{e}_{x_1}$.

3) Hệ quy chiếu phi Galilée $\mathcal{R}_2$ chuyển động tịnh tiến. Nguyên lí cơ bản của động lực học áp dụng cho M trong $\mathcal{R}_2$ cho :

$$m\vec{a}_{/\mathcal{R}_2} = -k\overrightarrow{O_1M} + m\omega^2\overrightarrow{OM_0} = -k\overrightarrow{M_0M},$$

hay : $\vec{a}_{/\mathcal{R}_2} = \dfrac{d^2}{dt^2}(\overrightarrow{M_0M})_{/\mathcal{R}_2} = -\omega_0^2\overrightarrow{M_0M}$.

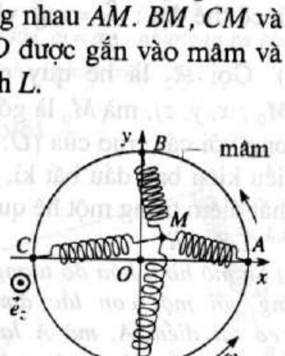
Đó là một dao động tử không gian đẳng hướng trong $\mathcal{R}_2$.



10 ** Chất điểm trên mâm quay

Một mâm tròn, tâm O, bán kính L, quay đều với vận tốc góc ω xung quanh một trục (Oz) vuông góc với mặt phẳng của mâm, đối với một hệ quy chiếu Trái đất Galilée. Các trục (Ox) và (Oy) nằm ngang và gắn vào mâm. Một chất điểm M, khối lượng m, chuyển động không ma sát trên mâm, được gắn vào các đầu của bốn lò xo giống nhau AM. BM, CM và DM, các điểm A, B, C và D được gắn vào mâm và nằm trên vòng tròn bán kính L.

Các lò xo giả thiết có khối lượng không đáng kể, các vòng xoắn cách đều nhau và mỗi lò xo có độ cứng k.



Khi M ở O, các lò xo có chiều dài tự nhiên, bằng L. Hãy nghiên cứu chuyển động của chất điểm M đối với hệ quy chiếu $\mathcal{R}(O; x, y, z)$ gắn với mâm.

1) Điểm $M(x, y, 0)$ ở lân cận O, chứng tỏ rằng lực toàn phần do các lò xo tác dụng lên điểm đó xấp xỉ bằng :

$$\vec{F}_{\text{lò xo}} = -2kx\vec{e}_x - 2ky\vec{e}_y .$$

2) Trong khuôn khổ của phép gần đúng này, viết phương trình chuyển động của M trong hệ tọa độ $\mathcal{R}$.

Đặt $\omega_0^2 = \dfrac{2k}{m}$.

3) Lúc $t = 0$, $x = x_0$ và $y = 0$; ngoài ra M đang đứng yên đối với mâm.

Hãy thiết lập các phương trình chuyển động $x(t)$ và $y(t)$. Đồng thời kết luận về bản chất của chuyển động và về tính bền vững.

4) Chứng tỏ rằng chất điểm ở trong trạng thái vận động bảo toàn trong $\mathcal{R}$ và thiết lập công thức của thế năng liên kết.

Tùy theo các giá trị so sánh giữa ω và ω_0, ta có thể nói gì về vị trí 0 $(r = OM = 0)$ liên quan đến thế năng đó ? Có kết luận gì từ kết quả này ?

5) Bây giờ, ta giả thiết các lò xo AM và CM giống nhau và có độ cứng k_1, các lò xo BM và DM cũng giống nhau nhưng có độ cứng k_2.

Giả thiết $k_1 < k_2$ và đặt :

$$\omega_1^2 = \frac{k_1}{m} \text{ và } \omega_2^2 = \frac{k_2}{m}.$$

Ta nghiên cứu chuyển động của M trong các điều kiện đó. Các phương trình theo x và y của chuyển động có các nghiệm đặc biệt dưới dạng : $x = Xe^{pt}$ và $y = Ye^{pt}$, trong đó p nói chung là một số ảo.

Hỏi p thỏa mãn phương trình nào ? Biết rằng nghiệm tổng quát thu được bằng cách tổ hợp tuyến tính của hai nghiệm ở dạng trên (trong trường hợp tồn tại hai giá trị p_1 và p_2 khác nhau), chứng tỏ rằng điểm O là vị trí cân bằng tương đối bền nếu $\omega < \omega_1$ hoặc $\omega > \omega_2$.

Sẽ xảy ra điều gì trong trường hợp ngược lại ?

- *Lời giải*

1) Dùng thế năng của các lò xo cho một lò xo móc vào $P(x_P, y_P)$:

$$\mathcal{E}_P = \frac{1}{2}k\left([(x_P - x)^2 + (y_P - y)^2]^{\frac{1}{2}} - L\right)^2 .$$

Phép khai triển giới hạn ở bậc 2 theo x và y cho bởi :

$$\mathcal{E}_P = \frac{1}{2}\frac{k}{L^4}(xx_P + yy_P)^2 .$$

Bằng cách lấy những điểm buộc khác nhau, ta thu được $\mathcal{E}_P = k(x^2 + y^2)$ *. Suy ra :*

$$\vec{F} = -2k\overrightarrow{OM} .$$

2) Nguyên lí cơ bản của động lực học áp dụng cho điểm M trong $\mathcal{R}(O; x, y)$, cho :

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = -2k\overrightarrow{OM} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} + m\omega^2\overrightarrow{OM} \ ; \ hay :$$

$$\ddot{x} + (\omega_0^2 - \omega^2)x - 2\omega\dot{y} = 0 \ \text{ và } \ \ddot{y} + (\omega_0^2 - \omega^2)y + 2\omega\dot{x} = 0 .$$

Đặt $u = x + iy$, ta có : $\ddot{u} + 2i\omega\dot{u} + (\omega_0^2 - \omega^2)u = 0$ *, mà nghiệm là :*

$$u = \frac{\omega + \omega_0}{2\omega_0}x_0 e^{i(\omega_0 - \omega)t} + \frac{\omega_0 - \omega}{2\omega_0}x_0 e^{-i(\omega_0 + \omega)t} .$$

$$x = \frac{x_o}{2\omega_o}\left[(\omega_o + \omega)\cos(\omega_0 - \omega)t + (\omega_o - \omega)\cos(\omega + \omega_0)t\right],$$

và $$y = \frac{x_o}{2\omega_o}\left[(\omega + \omega_o)\sin(\omega - \omega_o)t - (\omega - \omega_o)\sin(\omega + \omega_0)t\right],$$

hay còn là :

$$x = x_o\left[\cos\omega_o t.\cos\omega t + \frac{\omega}{\omega_o}\cdot\sin\omega_o t.\sin\omega t\right].$$

$$y = x_o\left[-\cos\omega_o t.\sin\omega t + \frac{\omega}{\omega_o}\sin\omega_o t.\cos\omega t\right]$$

Ta thấy rằng x và y biến đổi trong miền

$\left[-x_o\left(1+\dfrac{\omega}{\omega_o}\right), x_0\left(1+\dfrac{\omega}{\omega_o}\right)\right]$, *do vậy nghiệm là bền.*

4) $\mathscr{E}_P = k(x^2+y^2) - \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2) = \frac{1}{2}m(\omega_o^2 - \omega^2)(x^2+y^2)$

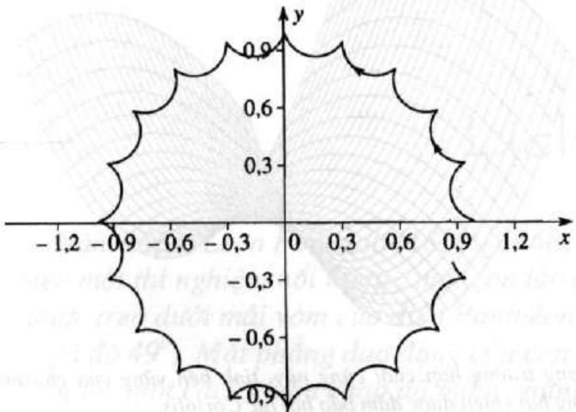
Khi $\omega_o > \omega$, $\mathscr{E}_P$ có một cực đại tại x= y = 0. Tính bền vững của chuyển động hai chiều được đảm bảo bởi lực Coriolis.

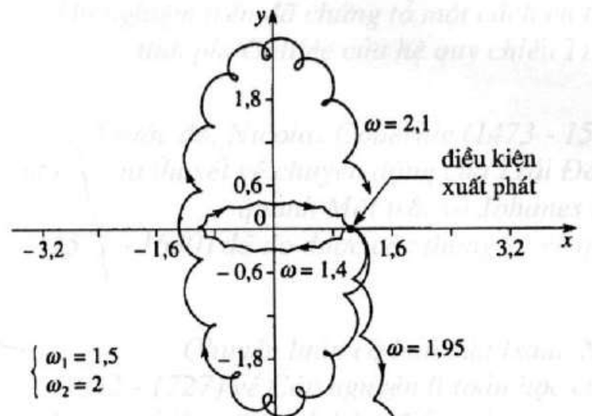
5) *Những phương pháp tính toán tương tự dẫn tới :*

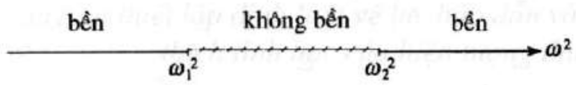
$\ddot{x} + (\omega_1^2 - \omega^2)x - 2\omega\dot{y} = 0$ *và* $\ddot{y} + (\omega_2^2 - \omega^2)y + 2\omega\dot{x} = 0$.

Để $x = Xe^{pt}$ và $y = Ye^{pt}$ tồn tại (không bằng không), phải có :

$$p^4 + (\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega^2)p^2 + (\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) = 0,$$







và các nghiệm phải có phần thực âm hoặc bằng không. Thế mà biệt số của phương trình theo p^2 lại dương.

Vì vậy các nghiệm theo p^2 phải âm, điều này dẫn tới :

$$(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2) > 0.$$

11 ** Hạt trong một parabôlôit

Một hạt khối lượng *m* có thể trượt không ma sát ở mặt trong của một cái bình có dạng là một parabôlôit, có phương trình trong tọa độ Descartes là :

$$2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}.$$

Dưới đây, ta giả thiết $a > b > 0$.

Trục *(Oz)* được giả thiết hướng thẳng đứng lên phía trên và trọng trường là $\vec{g} = -g.\vec{e}_z$.

Chiếc bình xoay xung quanh trục *(Oz)* với vận tốc góc không đổi ω.

1) Chứng minh rằng, đối với các chuyển động nhỏ, các phương trình đã tuyến tính hóa của chuyển động của hạt là :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\omega\frac{dy}{dt} + \left(\frac{g}{a} - \omega^2\right)x = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\omega\frac{dx}{dt} + \left(\frac{g}{b} - \omega^2\right)y = 0.$$

Từ đó suy ra rằng vị trí thấp của parabôlôit là một vị trí cân bằng tương đối bền nếu $\omega^2 < \dfrac{g}{a}$ hoặc nếu $\omega^2 > \dfrac{g}{b}$. Để trả lời câu hỏi này, ta có thể thỏa mãn với một nghiên cứu bằng số hoặc tham khảo lại bài tập trước.

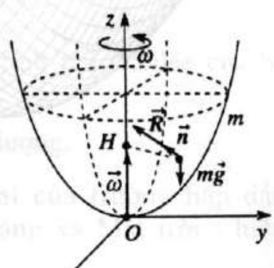
2) Có thể nói gì về thế năng trong hệ quy chiếu gắn với bình ? Hãy giải thích kết quả.

• *Lời giải*

Áp dụng nguyên lí cơ bản của động lực học cho khối lượng m trong hệ quy chiếu này, ta có :

$$m\vec{a}_{/\mathfrak{R}} = m\vec{g} + \vec{R} + m\omega^2\overrightarrow{HM} - 2m\omega\vec{e}_z \wedge \vec{v}_{/\mathfrak{R}},$$

với $\vec{R}$ vuông góc với mặt của parabôlôit.



$$f = z - \frac{x^2}{2a} - \frac{y^2}{2b} \text{ khi } f = 0.$$

$$\vec{n} = \left(\frac{\overrightarrow{gradf}}{\left|\overrightarrow{gradf}\right|}\right)_{f=0} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} -\dfrac{x}{a} \\ -\dfrac{y}{a} \\ 1 \end{vmatrix}, \text{ với } \Delta^2 = 1 + \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{xR}{ma\Delta} + \omega^2 x + 2\omega\frac{dy}{dt},$$

suy ra:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{yR}{ma\Delta} + \omega^2 y - 2\omega\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{R}{m\Delta} - g.$$

Biết rằng: $\frac{R}{m\Delta} = g + \frac{d^2z}{dt^2}$

với $\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{1}{a}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{b}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{x}{a}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{y}{b}\frac{d^2y}{dt^2}$

ta thu được (bằng cách đem $\frac{R}{m\Delta}$ *sang các phương trình trên và giới hạn ở gần đúng bậc 1 theo x, y):*

$$\frac{d^2x}{dt^2} = +\left(\omega^2 - \frac{g}{a}\right)x + 2\omega\frac{dy}{dt} \text{ và}$$

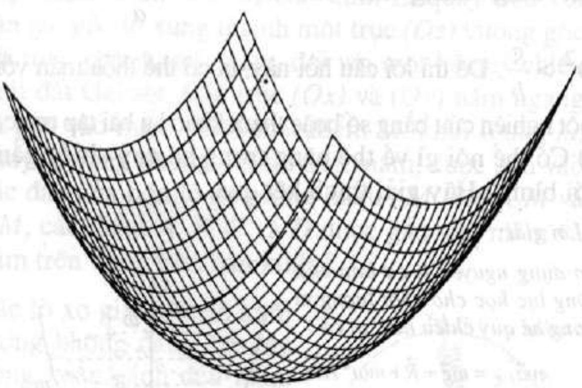
$$\frac{d^2y}{dt^2} = +\left(\omega^2 - \frac{g}{b}\right)y - 2\omega\frac{dx}{dt}.$$

Các nghiệm đã được nghiên cứu trong bài tập trước.

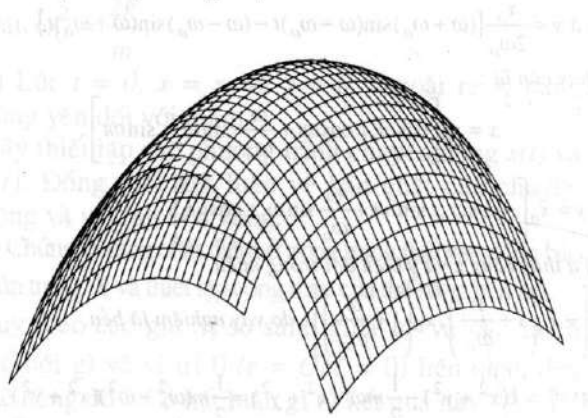
2) $\mathscr{E}_P = \frac{m}{2}(\omega_1^2 - \omega^2)x^2 + \frac{m}{2}(\omega_2^2 - \omega^2)y^2$.

Trong trường hợp mà $\omega_1 < \omega_2$:

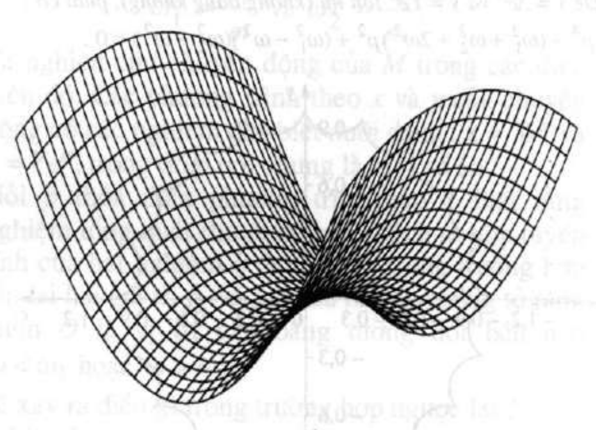
- *Nếu* $\omega < \omega_1$ *: bền;*



- *Nếu* $\omega_1 < \omega < \omega_2$ *: không bền;*



- Nếu $\omega > \omega_2$: bền



Trong trường hợp cuối cùng này, tính bền vững của chuyển động hai chiều được đảm bảo bởi lực Coriolis.

CƠ HỌC TRÁI ĐẤT

2

Lịch sử

Năm 1851, Léon Foucault (1819 - 1868) đã thực hiện một thí nghiệm nổi tiếng : một con lắc dài 67m được treo dưới mái vòm của điện Panthéon ở Paris (vĩ độ 49^0). Mặt phẳng dao động của con lắc trên quay một cách chậm chạp đã minh chứng cho sự quay của Trái đất và cho vai trò của lực Coriolis. Thí nghiệm trên đã chứng tỏ một cách cụ thể đặc tính phi Galilée của hệ quy chiếu Trái đất.

Trước đó, Nicolas Copernic (1473 - 1543) đã đưa ra giả thuyết về chuyển động của Trái Đất xung quanh Mặt trời và Johanes Kepler (1571 - 1630) đã đo được các thông số về quỹ đạo của nó.

Chuyên luận cơ bản của Isaac Newton (1642 - 1727) về Các nguyên lí toán học của triết học tự nhiên, có trình bày, điều mà ta quan tâm ở đây, sự thiết lập định luật về lực hấp dẫn và sự giải thích tĩnh học của hiện tượng thủy triều.

MỤC TIÊU

■ Minh chứng đặc tính phi Galilée của hệ quy chiếu Trái đất.

■ Định nghĩa trọng lượng.

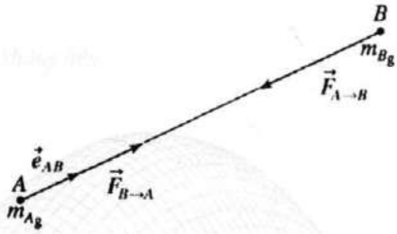
■ Ảnh hưởng vi sai của trường hấp dẫn (chủ yếu là Mặt trăng và Mặt trời : hiệu ứng thủy triều).

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

■ Cơ học trong hệ quy chiếu phi Galilée.

■ Định lí Gauss.

Trường hấp dẫn



Hình 1. *Tương tác hấp dẫn*

$$\vec{F}_{A\to B} = -Gm_{Ag}m_{Bg}\frac{\vec{e}_{AB}}{AB^2}.$$

1.1. Tương tác hấp dẫn

1.1.1. Định luật Newton

1.1.1.1. Khối lượng hấp dẫn

Định luật tương tác hấp dẫn giữa hai hạt có khối lượng lần lượt bằng m_{Ag} và m_{Bg}, có biểu thức :

$$\vec{F}_{A\to B} = -Gm_{Ag}m_{Bg}\frac{\vec{e}_{AB}}{AB^2}.$$

Lực hút này tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách *AB* giữa hai hạt.

Theo định nghĩa, các khối lượng m_{Ag} và m_{Bg} gọi là khối lượng hấp dẫn của các hạt A và B.

Các khối lượng hấp dẫn này tỉ lệ thuận với các khối lượng quán tính m_i của các hạt tham gia vào hệ thức cơ bản của động lực học :

$$\vec{F} = m_i\vec{a}_{/\mathcal{R}_g} \text{ } (\mathcal{R}_g : \text{hệ quy chiếu Galilée})$$

Do đó :

$$\frac{m_{A_g}}{m_{A_i}} = \frac{m_{B_g}}{m_{B_i}} = \text{hằng số không phụ thuộc vào vật đang xét.}$$

Những phương pháp hiện đại (quan sát chuyển động biểu kiến của Mặt trăng) đã cho phép kiểm chứng tính chất này ở mức sai kém 10^{-13}.

Trong Hệ đơn vị quốc tế, hai khối lượng này được diễn tả bởi cùng một con số : chúng đồng nhất với nhau. Điều này quyết định giá trị bằng số của hằng số hấp dẫn G (*xem* **§ 1.1.1.2**).

Ta cần nhớ rằng tương tác hấp dẫn là một tương tác cơ bản của tự nhiên mà miền hiệu lực của nó đi từ quy mô vi mô đến quy mô giữa các thiên hà.

1.1.1.2. Giá trị bằng số của G

Trong số những xác định thực nghiệm đầu tiên giá trị của G, có cách xác định của nhà Vật lí người Anh Cavendish (1731 - 1810) là dùng lực hút hấp dẫn giữa hai viên bi gắn ở hai đầu của một con lắc xoắn và hai quả nặng to bằng chì.

Bằng cách thay đổi vị trí của các quả nặng, Cavendish đã đi tới kết quả là làm cho con lắc quay và từ đó đã suy ra giá trị của G.

Nhờ vậy, ông ta đã thu được giá trị phù hợp :

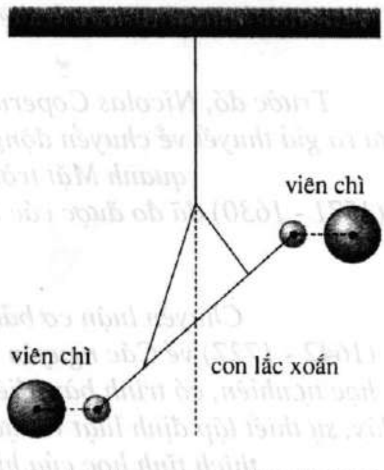
$$G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}.$$

Hiện nay, giá trị được công nhận cho hằng số hấp dẫn là :

$$G = (6{,}67259 \pm 0{,}00085) \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}.$$

Ta cần nhớ cỡ lớn của G :

$$\mathbf{G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}\ \ (hay\ m^3\,kg^{-1}\,s^{-2})}$$



Hình 2. *Thí nghiệm CAVENDISH.*

Áp dụng 1

Sự rơi của Mặt trăng và định luật hấp dẫn

Trong hệ quy chiếu địa tâm $\mathcal{R}_0$ được định nghĩa ở phía sau và ở đây giả thiết là hệ quy chiếu Galilée, trong phép gần đúng bậc nhất, có thể coi Mặt trăng vạch ra một quỹ đạo tròn bán kính $R_{orb} = 3{,}84.10^8$m, với chu kì quay T_{orb} = 27,3 ngày. Trái đất giả thiết là hình cầu có bán kính R_T = 6370 km.

Trường hấp dẫn ở trên bề mặt Trái đất bằng $g_0 = 9{,}8 m.s^{-2}$, chứng tỏ rằng các số liệu trên đã cho phép Newton nghiệm lại là tương tác hấp dẫn biến thiên theo $\frac{1}{r^2}$.

Giả thiết, như Newton đã làm, trong một khoảng thời gian nhỏ so với chu kì quay trên quỹ đạo, ta coi chuyển động của Mặt trăng giống như một sự rơi tự do với một vận tốc ban đầu nằm ngang.

Ngoài ra, giả thiết lực hấp dẫn do Trái đất tác dụng lên Mặt trăng có dạng :

$$F = M_L \cdot g_0 \left(\frac{R_{orb}}{R_T}\right)^n$$, *n là số mũ phải tìm.*

Đặt $F = M_L G$, với $G = g_0 \left(\frac{R_{orb}}{R_T}\right)^n$.

Trong khoảng thời gian nhỏ Δt, Mặt trăng đi được một quãng đường nằm ngang $\Delta x = v_{orb} \Delta t$ và rơi một đoạn $\Delta h = \frac{1}{2} G \Delta t^2$.

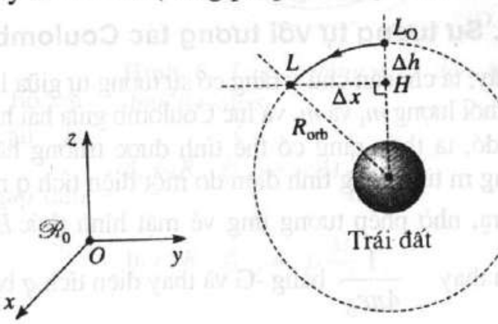
Mà $v_{orb} = 2\pi \frac{R_{orb}}{T_{orb}}$ và $\Delta h = \frac{(\Delta x)^2}{2R_{orb}}$

(Coi OLH là tam giác vuông với $\Delta h << R_{orb}$).

Sau đó, $G = 2\frac{\Delta h}{\Delta t^2} = \frac{\frac{(\Delta x)^2}{R_{orb}}}{\left(\frac{\Delta x}{v_{orb}}\right)^2} = \frac{v_{orb}^2}{R_{orb}} = \frac{4\pi^2 R_{orb}}{T_{orb}^2}$

nghĩa là : $\left(\frac{R_{orb}}{R_T}\right)^n = \frac{4\pi^2 R_{orb}}{g_0 T_{orb}^2}$

Suy ra : n = -2 (dùng phép tính lôgarit).



Hình 3. *Sự rơi của Mặt trăng* $\Delta h = L_0 H$.
$\Delta x^2 = R^2_{orb} - (R_{orb} - \Delta h)^2$, hay $\Delta x^2 \approx 2R_{orb} \Delta h$.

1.1.2. Tính đồng nhất của khối lượng hấp dẫn và khối lượng quán tính

Sự đồng nhất giữa hai khối lượng (hấp dẫn và quán tính) có thể được coi như một sự trùng hợp ngẫu nhiên trong cơ học Newton ; tuy nhiên, nó lại rất đáng chú ý, vì trong trường hợp một chất điểm chỉ chịu tác dụng của các lực hấp dẫn, thì trường hấp dẫn $\mathcal{G}(M)$ xác định bởi $\vec{F}_{grav} = m\vec{\mathcal{G}}(M)$, và gia tốc Galilée của hạt $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g}$ là trùng nhau :

$\vec{F}_{grav} = m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g}$, với $\vec{F}_{grav} = m\vec{\mathcal{G}}(M)$, cho $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{\mathcal{G}}(M)$.

Điều đó được nghiệm đúng cho bất kì hạt nghiên cứu nào. Không một lực nào khác trong tự nhiên có tính chất trên, mà các hệ quả của nó được nghiên cứu trong phần tiếp theo của chương này.

Cuối cùng, cũng cần biết rằng (đơn thuần về mặt văn hóa) trên cơ sở của tính đồng nhất này, Einstein đã phát biểu một nguyên lí gọi là nguyên lí tương đương, là một trong các cơ sở của lí thuyết tương đối rộng.

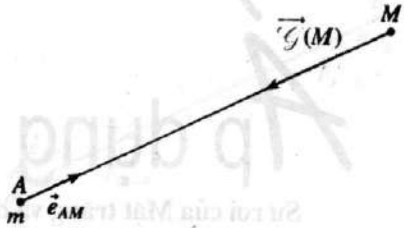
Từ nay về sau, ta sẽ không phân biệt các khối lượng quán tính và hấp dẫn nữa : $m_g = m_i = m$.

1.2. Trường và thế hấp dẫn của một chất điểm

Cho một hạt khối lượng m đặt tại một điểm A. Lực hấp dẫn tác dụng lên một hạt khối lượng m' nằm tại M có biểu thức :

$$\vec{F}_{A\to M} = m'\vec{\mathcal{G}}(M)$$

với : $$\vec{\mathcal{G}}(M) = -Gm\frac{\vec{e}_{AM}}{AM^2} = -Gm\frac{\overrightarrow{AM}}{AM^3}.$$



Hình 4. *Trường hấp dẫn*

$$\vec{\mathcal{G}}(M) = -Gm\frac{\overrightarrow{AM}}{AM^3} = -Gm\frac{\vec{e}_{AM}}{AM^2}.$$

$\vec{\mathcal{G}}(M)$ là trường hấp dẫn tạo ra tại M bởi chất điểm đặt ở A. Nó không phụ thuộc vào sự có mặt (hay không) của khối lượng m' đặt tại M.

Trường $\vec{\mathcal{G}}(M)$ này sinh ra từ một thế hấp dẫn :

$$V_{\mathcal{g}}(M) = -G\frac{m}{AM}.$$

Năng lượng hấp dẫn của khối lượng m' trong trường $\vec{\mathcal{G}}(M)$ này khi đó, cho bởi :

$$\mathcal{E}_P = m'V_{\mathcal{g}}(M) = -G\frac{mm'}{AM}.$$

Đó cũng là (*x. chương 4*) công dịch chuyển một trong các chất điểm có khối lượng trong trường tạo ra bởi một chất điểm khác, từ một điểm xa vô cùng.

1.3. Sự tương tự với tương tác Coulomb

Ở đây, ta chỉ cần chú ý rằng có sự tương tự giữa lực hấp dẫn giữa hai hạt có khối lượng m_1 và m_2 và lực Coulomb giữa hai hạt có điện tích q_1 và q_2. Do đó, ta thấy rằng có thể tính được trường hấp dẫn tạo ra bởi khối lượng m từ trường tĩnh điện do một điện tích q nằm tại cùng một vị trí tạo ra, nhờ phép tương ứng về mặt hình thức $\vec{E}(M) \leftrightarrow \vec{\mathcal{G}}(M)$, bằng cách thay $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}$ bằng -G và thay điện tích q bằng khối lượng m.

Tổng quát hơn, trường hấp dẫn tạo ra bởi *một phân bố* bất kì của các khối lượng có thể tính được từ trường tĩnh điện tạo ra bởi một *phân bố như thế* của các điện tích bằng cùng một phép tương ứng như trên.

Ví dụ, tương ứng với một sự phân bố điện tích có mật độ điện khối $\rho(M)$ có thể được liên kết với một sự phân bố khối lượng có mật độ khối tương đương $\mu(M)$.

Cũng vậy, *định lí Gauss* thiết lập trong phần tĩnh điện có thể dùng cho phần hấp dẫn.

Trong tĩnh điện, định lí Gauss phát biểu :

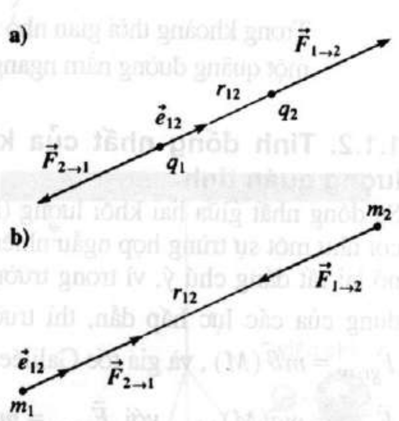
Thông lượng của $\vec{E}$ (tạo bởi một sự phân bố điện tích nào đó) gửi qua một mặt kín S bằng tổng các điện tích có trong mặt S chia cho ε_0.

Vậy định lí Gauss đối với trường hấp dẫn phát biểu :

Thông lượng của $\vec{\mathcal{G}}$ (tạo bởi một phân bố khối lượng nào đó) gửi qua một mặt kín S bằng tổng các khối lượng có trong mặt S nhân với $-4\pi G$.

Ở đây có một sự tương ứng về mặt hình thức. Có những điểm khác nhau cơ bản giữa tương tác hấp dẫn và tương tác Coulomb. Một điểm khác nhau liên quan đến các cỡ lớn, một điểm khác nữa liên quan đến sự tồn tại các điện tích trái dấu, trong khi đó các khối lượng thì lại luôn luôn dương.

▸ **Để luyện tập : BT 9**



Hình 5. *Tương tự về mặt hình thức giữa lực hấp dẫn và lực Coulomb*

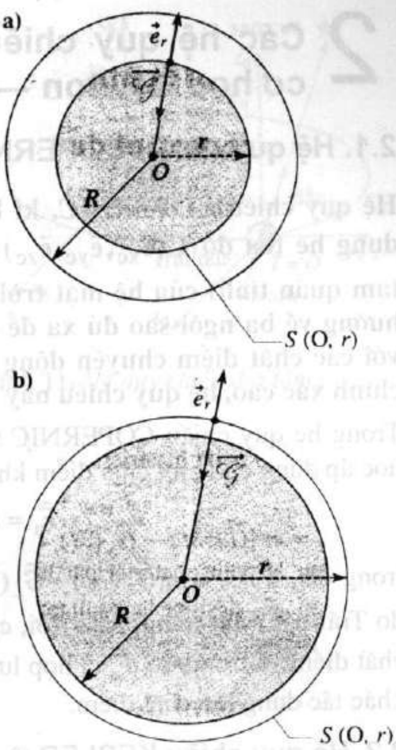
a) $\vec{F}_{1\to2} = \dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{\vec{e}_{12}}{r_{12}^2}$.

b) $\vec{F}_{1\to2} = -Gm_1m_2\dfrac{\vec{e}_{12}}{r_{12}^2}$.

1.4. Vật có phân bố vật chất đối xứng cầu

Ở đây, ta chỉ quan tâm đến trường hấp dẫn tạo ra bởi một vài thiên thể (các ngôi sao) như Trái đất, Mặt trăng, Mặt trời. Đối với các vật này, trong phép gần đúng bậc nhất, ta giả thiết có một **sự phân bố vật chất đối xứng cầu**.

Xét một thiên thể hình cầu, tâm O, bán kính R, có phân bố khối lượng chỉ phụ thuộc vào khoảng cách tới tâm O (*hình 6*).



Hình 6. *Tính trường hấp dẫn bằng định lí Gauss*

a. $r<R$: $\vec{G}_{int} = -GM\frac{r}{R^3}\vec{e}_r$

b. $r>R$: $\vec{G}_{ext} = -G\frac{M}{r^2}\vec{e}_r$

Ở mức gần đúng bậc nhất, ta chỉ cần nhớ kết quả sẽ chứng minh dưới đây. Sự chứng minh là dễ dàng đối với độc giả đã nghiên cứu các tính chất của trường tĩnh điện.

Định lí Gauss khẳng định rằng, để có được trường xuyên tâm $\vec{\mathscr{G}}(M) = \mathscr{G}(M)\vec{e}_r$, ta chỉ cần xét mặt cầu $S(O,r)$ có tâm O và bán kính $r = OM$. Tích của $\mathscr{G}(M)$ với diện tích của mặt cầu $4\pi r^2$ (tức thông lượng của vectơ $\vec{\mathscr{G}}$ gửi qua diện tích đó) bằng khối lượng chứa trong mặt cầu đó nhân với một hệ số phổ biến $-4\pi G$. Ta có :

$$4\pi r^2\,\mathscr{G}(r) = -4\pi G.mS(O,r)$$

Ở bên ngoài thiên thể ($r>R$), do vậy với mọi giá trị của r, ta thu được :

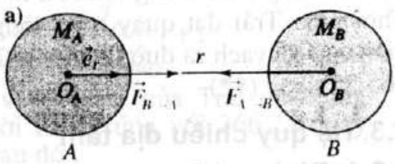
$$\vec{\mathscr{G}}_{ext}(M) = -G\frac{M}{r^2}\vec{e}_r$$

Ở bên trong thiên thể, kết quả phụ thuộc vào quy luật phân bố vật chất. Nếu mật độ khối μ của vật thể hình cầu là đều $\left(\mu = cte = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right)$, độc giả có thể thấy rằng trường hấp dẫn bằng :

$$\vec{\mathscr{G}}_{int}(M) = -GM\frac{r}{R^3}\vec{e}_r$$

Điều chủ yếu cần nhớ là, ở bên ngoài, một vật thể có phân bố vật chất hình cầu tạo ra cùng một trường hấp dẫn với một chất điểm có cùng khối lượng toàn phần M và đặt tại tâm O của nó.

Cho hai thiên thể A, khối lượng M_A, tâm O_A và B, khối lượng M_B, tâm O_B, cách nhau $r = O_AO_B$ (*hình 7*). Lực hấp dẫn toàn phần do B tác dụng lên A trong hai trường hợp đều bằng nhau.



Hình 7. *Tương tác giữa hai vật có tính đối xứng cầu. Trong hai trường hợp :*

$$\vec{F}_{A\to B} = G\frac{M_A.M_B}{r^2}.\vec{e}_r$$

Ngược lại, ta có thể chứng minh được rằng chuyển động của tâm quán tính O của một thiên thể có tính đối xứng cầu sẽ giống như chuyển động của một chất điểm có cùng khối lượng nằm tại O.

Kết luận

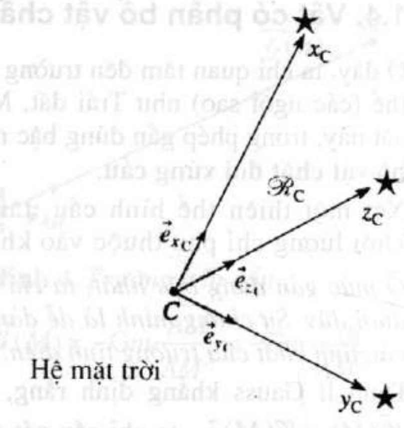
Đối với phép tính trường hấp dẫn tạo ra ở bên ngoài như thế nào thì đối với lực hấp dẫn tổng hợp phải chịu cũng thế, ta có thể thay một vật thể có phân bố khối lượng đối xứng cầu bằng một chất điểm có cùng khối lượng toàn phần và đặt tại tâm của nó.

Những thiên thể, có phân bố khối lượng giả thiết mang tính đối xứng cầu, có tính chất như một hệ chất điểm trùng với các tâm của chúng.

2 Các hệ quy chiếu thường dùng trong cơ học Newton

2.1. Hệ quy chiếu COPERNIC $\mathcal{R}_C$

Hệ quy chiếu COPERNIC, kí hiệu $\mathcal{R}_C$, được xác định nhờ sử dụng hệ toạ độ $(C;\vec{e}_{xc},\vec{e}_{yc},\vec{e}_{zc})$, trong đó C là khối tâm (hay tâm quán tính) của hệ mặt trời, và các trục (Cx_c), (Cy_c), (Cz_c) hướng về ba ngôi sao đủ xa để có thể được coi là cố định. Đối với các chất điểm chuyển động trong Hệ mặt trời, với một độ chính xác cao, hệ quy chiếu này là hệ quy chiếu Galilée.



Hình 8. *Hệ quy chiếu COPERNIC C là khối tâm của hệ mặt trời.*

Trong hệ quy chiếu COPERNIC $\mathcal{R}_C$, hệ thức cơ bản của động lực học áp dụng cho một chất điểm khối lượng m :

$$\vec{F}_{\text{grav}} + \vec{F}_a = m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_C},$$

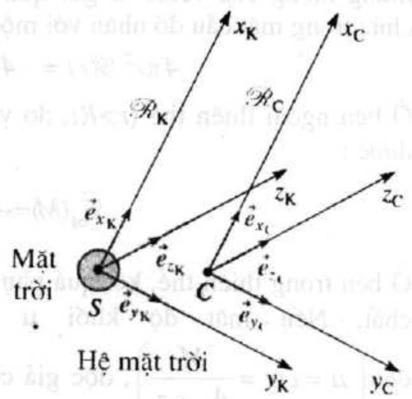
trong đó $\vec{F}_{\text{grav}} = m[\vec{G}_T(M) + \vec{G}_L(M) + \vec{G}_S(M) + ...]$ là lực hấp dẫn do Trái đất, Mặt trăng, Mặt trời, các hành tinh khác... tác dụng lên chất điểm và trong đó $\vec{F}_a$ là hợp lực có thể xảy ra của các tương tác khác tác dụng lên chất điểm.

2.2. Hệ quy chiếu KEPLER $\mathcal{R}_K$

2.2.1. Định nghĩa

Hệ quy chiếu KEPLER $\mathcal{R}_K$ được suy ra từ hệ quy chiếu COPERNIC nhờ phép tịnh tiến : gốc của một hệ toạ độ Kepler, còn gọi là hệ tọa độ nhật tâm, là tâm quán tính *S* của Mặt trời và các trục (Sx_K), (Sy_K) và (Sz_K) có thể được chọn song song với các trục của một hệ tọa độ không gian của $\mathcal{R}_C$.

Phép gần đúng coi $\mathcal{R}_K$ là hệ quy chiếu Galilée nói chung là rất tốt.

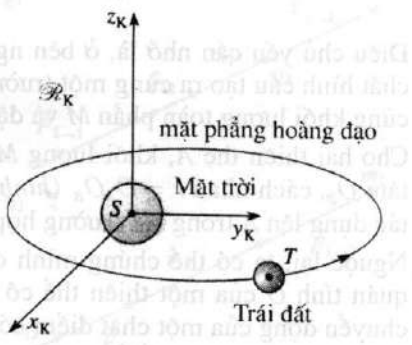


Hình 9. *Hệ quy chiếu KEPLER (hay nhật tâm).*
S : tâm của Mặt trời (thực tế C và S rất gần nhau).

2.2.2. Chuyển động của Trái đất trong $\mathcal{R}_K$

Trong $\mathcal{R}_K$, Trái đất có quỹ đạo elip, thực tế coi là tròn, có độ lệch tâm $e = 0{,}01673...$, trong một mặt phẳng gọi là mặt phẳng hoàng đạo, khoảng cách trung bình TS là vào cỡ $1{,}5.10^{11}$m(*)

Thời gian Trái đất quay một vòng xung quanh Mặt trời, tức thời gian cần để vạch ra đường elip, gọi là năm thiên văn và bằng xấp xỉ 365,25 ngày (**).



Hình 10. *Chuyển động của Trái đất.*

2.3. Hệ quy chiếu địa tâm

2.3.1. Định nghĩa

Một hệ tọa độ không gian gắn vào hệ quy chiếu địa tâm $\mathcal{R}_0$ có gốc của nó ở tâm quán tính $O = T$ của Trái đất, và các trục của nó (Ox_0), (Oy_0), (Oz_0) lần lượt song song với các trục của hệ quy chiếu COPERNIC

Do vậy trong $\mathcal{R}_C$, $\mathcal{R}_0$ thực hiện một chuyển động tịnh tiến với một gia tốc $\vec{a}(0)_{/\mathcal{R}_C}$. Vì vậy, hệ quy chiếu địa tâm này không phải là hệ quy chiếu Galilée, vì ta phải đưa lực quán tính kéo theo $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}(0)_{/\mathcal{R}_C}$ vào hệ thức cơ bản của động lực học diễn tả trong $\mathcal{R}_0$.

(*) *Một cách chính xác hơn, bán trục lớn của elip được gọi là đơn vị thiên văn của khoảng cách và bằng :*
1U.A. = 149.598.600 km
(**) *Ngày có kí hiệu d :*
1*d* = 86 400s.

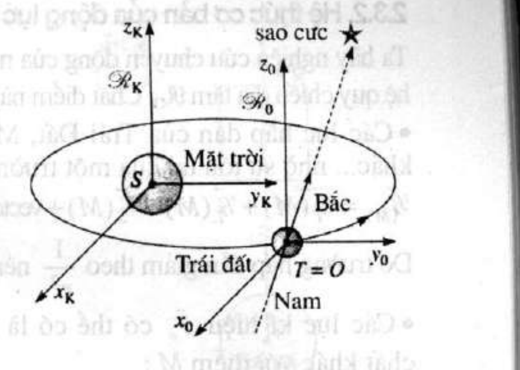
Trong $\mathcal{R}_0$, Trái đất thực hiện một chuyển động mà chủ yếu là một chuyển động quay xung quanh một trục nam bắc, về đại thể nhằm vào ngôi sao cực, và nghiêng một góc khoảng 23^0 so với pháp tuyến của mặt phẳng hoàng đạo.

Chu kì quay của Trái đất xung quanh trục này trong $\mathcal{R}_O$ gọi là *ngày thiên văn* và bằng vào khoảng T_{sid} = 86164s (vậy ngày này khác ngày d bằng 86400s).

Hệ quy chiếu địa tâm $\mathcal{R}_O$, chuyển động tịnh tiến chuẩn tròn so với hệ quy chiếu COPERNIC $\mathcal{R}_C$, không phải là hệ quy chiếu Galilée.

Một hệ tọa độ Trái đất có gốc *A* và ba trục của nó *(Ax), (Ay), (Az)* gắn vào Trái đất, trong phép gần đúng trong đó Trái đất được coi như một vật rắn.

Hệ quy chiếu Trái đất liên kết như vậy không phải là hệ quy chiếu Galilée là do có tính đến các chuyển động quay hàng ngày và chuyển động tịnh tiến trên quỹ đạo của Trái đất. Khía cạnh này sẽ được phát triển ở phần sau.



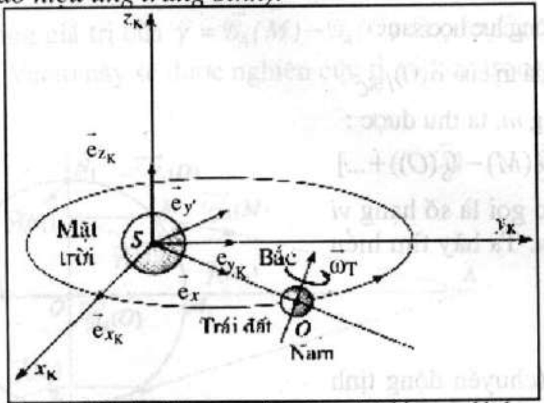
Hình 11. *Hệ quy chiếu địa tâm $\mathcal{R}_0$.*

Áp dụng 2

Ngày thiên văn và ngày mặt trời trung bình

Biết rằng một ngày mặt trời tương ứng với khoảng thời gian giữa các lần liên tiếp Mặt trời đi qua thiên đỉnh của cùng một điểm thuộc Trái đất và tính trung bình một năm thiên văn bằng 366,25 ngày mặt trời, bằng cách tổng hợp chuyển động, hãy tìm lại giá trị của ngày thiên vănTrái đất.

Ta sẽ đơn giản hoá vấn đề bằng cách giả thiết trục quay (bắc - nam) của Trái đất vuông góc với mặt phẳng hoàng đạo và quỹ đạo của Trái đất xung quanh Mặt trời là một đường tròn (các phép gần đúng có hiệu lực do hiệu ứng trung bình).



Hình 12. Ngày thiên văn và ngày mặt trời trung bình.

▸ **Để luyện tập : BT 1.**

Cho $\mathcal{R}$' là hệ quy chiếu và $(S;\vec{e}_{x'},\vec{e}_{y'},\vec{e}_{zK})$ là một hệ trục tọa độ mà trục $(S,\vec{e}_{x'})$ hướng thẳng từ *S* về Trái đất.

Cần chú ý rằng ngày mặt trời là khoảng thời gian Trái đất quay một vòng xung quanh nó trong $\mathcal{R}$'. Vậy ta chỉ cần thể hiện phép tổng hợp các chuyển động quay :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_c} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}_c}.$$

Các vectơ quay đã được giả thiết là cộng tuyến, nên :

$$\frac{2\pi}{T_{sid}} = \frac{2\pi}{T_{solmoy}} + \frac{2\pi}{T_{orb}}, \text{ với } T_{orb} = 1 \text{ năm.}$$

Ta thu được :

$$\frac{T_{orb}}{T_{sid}} = \frac{T_{orb}}{T_{solmoy}} + 1$$

Do vậy một vòng quay của Trái đất xung quanh Mặt trời tương ứng với 366,25 ngày thiên văn và sau đó :

$$T_{sid} \approx 86164\text{s} = 23\text{h } 56\text{ph } 4\text{s}.$$

Vectơ quay $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_c} = \omega_T\vec{e}_z$ có chuẩn là vận tốc góc ω_T :

$$\omega_T = \frac{2\pi}{T_{sid}} = \frac{2\pi}{86164} \approx 7{,}3.10^{-5}$$

(đó là cỡ lớn mà ta cần tìm lại)

2.3.2. Hệ thức cơ bản của động lực học trong hệ quy chiếu địa tâm

Ta hãy nghiên cứu chuyển động của một chất điểm M khối lượng m trong hệ quy chiếu địa tâm $\mathcal{R}_O$. Chất điểm này chịu tác dụng của các lực sau :

• Các lực hấp dẫn của Trái Đất, Mặt trăng, Mặt trời, các thiên thể khác... nhờ sự tồn tại của một trường hấp dẫn :

$\vec{\mathcal{G}}_{(M)} = \vec{\mathcal{G}}_T(M) + \vec{\mathcal{G}}_L(M) + \vec{\mathcal{G}}_S(M)$ + vectơ trường hấp dẫn của các thiên thể khác.

Do trường hấp dẫn giảm theo $\dfrac{1}{r^2}$ nên số hạng $\vec{\mathcal{G}}_T(M)$ có ưu thế hơn ;

• Các lực kí hiệu $\vec{F}_a$ có thể có là tổng hợp của các tương tác vật chất khác với điểm M ;

• Lực quán tính kéo theo $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}(0)_{/\mathcal{R}_C}$. Hệ quy chiếu địa tâm chuyển động tịnh tiến trong $\mathcal{R}_C$ nên có gia tốc kéo theo không đổi và bằng $\vec{a}(0)_{/\mathcal{R}_C}$.

Hệ thức cơ bản của động lực học trong $\mathcal{R}_O$ có biểu thức :

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_0} = \vec{F}_a + m[\vec{\mathcal{G}}_T(M) + \vec{\mathcal{G}}_L(M) + \vec{\mathcal{G}}_S(M) + ...] - m\vec{a}(0)_{/\mathcal{R}_C}$$

Áp dụng 3

Hãy đánh giá cỡ lớn của chuẩn của gia tốc $\vec{a}(0)_{/\mathcal{R}_C}$.

Trong phép gần đúng bậc nhất, tâm quán tính O của Trái Đất, trong $\mathcal{R}_C$, vẽ một quỹ đạo tròn, bán kính ST = 1,5.10^{11}m, với vận tốc góc $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, trong đó T = 1 năm $\approx \pi.10^7$s.

Do đó, giá trị của $\vec{a}(0)_{/\mathcal{R}_C}$ vào khoảng :

$$a(0)_{/\mathcal{R}_C} = \omega^2 ST \approx 6.10^{-3} ms^{-2}.$$

Lực quán tính tương ứng, dù nhỏ, cũng không bỏ qua được.

Thực vậy, trong miền không gian gần quả đất (coi gần đúng là một quả cầu tâm O, bán kính 10 $\mathcal{R}_T$), ta có thể thiết lập hệ thức cơ bản của động lực học một cách có lợi hơn. Muốn thế, dựa vào giả thiết đã nêu về vật thể có phân bố vật chất đối xứng cầu, ta hãy tính $\vec{a}(0)_{/\mathcal{R}_C}$. Tâm quán tính của Trái Đất trong $\mathcal{R}_C$ được coi như một chất điểm, có hệ thức cơ bản của động lực học sau :

$M_T\vec{a}(0)_{/\mathcal{R}_C} = M_T(\vec{\mathcal{G}}_L(0) + \vec{\mathcal{G}}_S(0) + ...)$, từ đó, suy ra giá trị của $\vec{a}(0)_{/\mathcal{R}_C}$.

Thay vào phương trình chuyển động của khối lượng m, ta thu được :

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_0} = \vec{F}_a + m\vec{\mathcal{G}}_T(M) + m[(\vec{\mathcal{G}}_L(M) - \vec{\mathcal{G}}_L(O)) + (\vec{\mathcal{G}}_S(M) - \vec{\mathcal{G}}_S(O)) + ...]$$

Trong phương trình này, số hạng trong dấu ngoặc gọi là số hạng *vi sai*, *số hạng dư* hay còn gọi là *số hạng thủy triều*. Ta hãy tìm hiểu ý nghĩa vật lí của số hạng vi sai trên.

2.3.3. Phân tích số hạng vi sai

2.3.3.1. Thí dụ mở đầu

Ta hình dung có một con tàu vũ trụ "rơi tự do" (chuyển động tịnh tiến) trong trường hấp dẫn của Trái Đất và bỏ qua mọi lực hút khác. Gọi C là tâm quán tính của con tàu, trong hệ tọa độ địa tâm của thiên thể này giả thiết là hệ tọa độ Galilée, áp dụng hệ thức cơ bản của động lực học cho chất điểm đặc biệt trên, ta có :

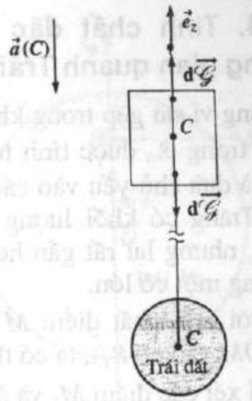
$$\vec{a}(C) = \vec{\mathcal{G}}_T(C).$$

Trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}_V$ gắn với con tàu, có gia tốc kéo theo $\vec{a}(C)$, hệ thức cơ bản của động lực học áp dụng cho một chất điểm, có biểu thức :

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_V} = \vec{F}_a + m\vec{\mathcal{G}}_T(M) - m\vec{\mathcal{G}}_T(C).$$

Số hạng $[\vec{\mathcal{G}}_T(M) - \vec{\mathcal{G}}_T(C)]$ là *số hạng vi sai* đối với bài toán của chúng ta. Trong phép gần đúng bậc nhất, có thể coi trường $\vec{\mathcal{G}}_T$ là đều trong khoang tàu. Khi đó, số hạng vi sai ở đây bằng không.

Nếu $\vec{F}_a = \vec{0}$ chẳng hạn, chất điểm không chịu một lực tác dụng nào trong $\mathcal{R}_V$: trong khoang tàu, chất điểm vạch ra một chuyển động tương đối, thẳng đều (trạng thái không trọng lượng).



Hình 13. *Con tàu vũ trụ rơi tự do :*

$$d\mathcal{G} = d\left(-G\frac{M_T}{r^2}\right) = 2G\frac{M_T}{r^2}.\frac{dr}{r}.$$

Thực tế $\vec{\mathcal{G}}_T(M)$ là không đều : chuẩn của nó giảm theo khoảng cách tới tâm của Trái Đất (theo quy luật $G\dfrac{M_T}{r^2}$).

Ở đây, nếu bỏ qua tác dụng của hướng và đặt $\vec{\mathcal{G}}_T(C) = -\mathcal{G}_0\vec{e}_z$, ta dễ dàng thiết lập được :

$$\vec{e}_z[\vec{\mathcal{G}}_T(M) - \vec{\mathcal{G}}_T(C)] \approx 2\mathcal{G}_0\frac{z}{r}, \text{ trong đó } r = OC.$$

Như vậy, số hạng vi sai có tác dụng như trên *hình 13* đã chỉ rõ : một chất điểm ở xa O hơn C sẽ bị đẩy lên "phía trên", còn một vật ở gần O hơn C bị hút về phía "dưới" của khoang tàu.

2.3.3.2. Trường hợp một vật thể có tính đối xứng cầu

Số hạng vi sai do một thiên thể A tạo ra được xác định bởi :

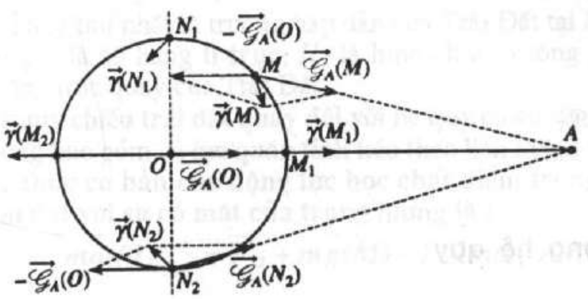
$$\vec{\gamma} = \vec{\mathcal{G}}_A(M) - \vec{\mathcal{G}}_A(O)$$

$\vec{\mathcal{G}}_A(0)$ và $\vec{\mathcal{G}}_A(M)$ là các trường hấp dẫn của điểm A tại O và M.

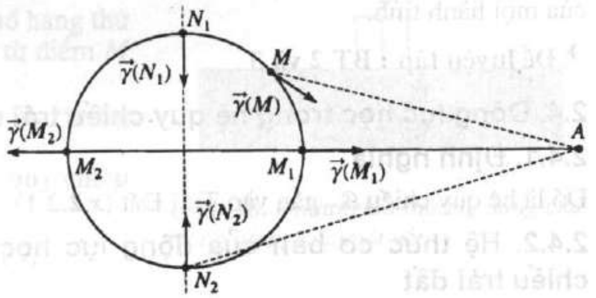
Ta hãy chọn phép phân tích bằng đồ thị số hạng vi sai (*hình 15*).

Bằng giản đồ vectơ, ta thu được số hạng vi sai $\vec{\gamma} = \vec{\mathcal{G}}_A(M) - \vec{\mathcal{G}}_A(0)$.

Dễ thấy rằng giá trị của $\vec{\gamma} = \vec{\mathcal{G}}_A(M) - \vec{\mathcal{G}}_A(O)$ là cực đại tại các điểm M_1 và M_2. Vectơ này sẽ được nghiên cứu tỉ mỉ hơn trong *bài tập 5*.



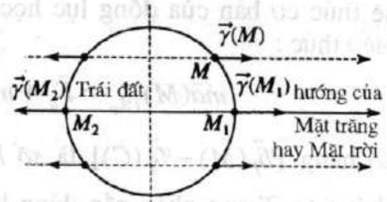
Hình 14. *Các vectơ tham gia vào việc dựng các $\vec{\gamma}(M_i)$ bằng đồ thị.*



Hình 15. *Phân tích bằng đồ thị số hạng vi sai. Cách sắp xếp hiện thực hơn của các số hạng vi sai.*

2.3.4. Tính chất đặc biệt Galilée của $\mathcal{R}_0$ trong miền không gian quanh Trái Đất.

Số hạng vi sai gặp trong khi nghiên cứu chuyển động của một chất điểm trong $\mathcal{R}_0$ được tính toán trong hệ tọa độ tại tâm O của Trái Đất và dựa chủ yếu vào các tác dụng của Mặt Trăng và Mặt Trời : Mặt Trăng có khối lượng nhỏ hơn khối lượng của Mặt Trời rất nhiều, nhưng lại rất gần hơn và các số hạng mặt trăng và mặt trời có cùng một cỡ lớn.



Hình 16. *Các số hạng vi sai tạo ra bởi Mặt trời hay Mặt trăng trên bề mặt của Trái Đất*

Đối với một chất điểm M khối lượng m nằm ở gần kề Trái Đất ($r = OM$ vào cỡ R_T), ta có thể đánh giá được các số hạng vi sai

Ta chỉ xét các điểm M_1 và M_2 tại đó có chuẩn cực đại

Các số liệu cần dùng đều có trong phụ lục 1

Đối với Mặt Trăng :

$$\vec{\mathcal{G}}_L(M_1) - \vec{\mathcal{G}}_L(0) = 2GM_L \frac{R_T}{TL^3} = 2g_0 \frac{M_L}{M_T}\left(\frac{R_T}{TL}\right)^3 = 1{,}1.10^{-7} g_0.$$

với : $g_0 = G\dfrac{M_T}{R_T^2}$

Đối với Mặt trời :

$$\vec{\mathcal{G}}_S(M_1) - \vec{\mathcal{G}}_S(0) = 2GM_S \frac{R_T}{TS^3} = 2g_0 \frac{M_S}{M_T}\left(\frac{R_T}{TS}\right)^3 = 5{,}1.10^{-8} g_o$$

Các số hạng này là nhỏ và chỉ tác động vào các tình huống đặc biệt (thủy triều). Cần ghi nhớ thêm là tỉ số của chúng bằng 0,45 ; như vậy ảnh hưởng của Mặt trăng có nhỉnh hơn.

Các kết quả trên chứng tỏ, trong miền không gian bao quanh Trái Đất, ta thường bỏ qua số hạng vi sai và coi *$\mathcal{R}_0$ có đặc tính như một hệ quy chiếu đặc biệt Galilée*, với điều kiện dứt khoát là chỉ kể tới trường hấp dẫn của Trái Đất trong hệ thức cơ bản của động lực học :

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_0} \approx \vec{F}_a + m\vec{\mathcal{G}}_T(M).$$

Trong miền không gian bao quanh Trái Đất, hệ quy chiếu địa tâm $\mathcal{R}_0$ là hệ quy chiếu đặc biệt Galilée, nếu bỏ qua số hạng thủy triều thì trường hấp dẫn khi đó là trường hấp dẫn chỉ do Trái Đất tạo ra.

Một lí luận tương tự cũng được áp dụng cho hệ quy chiếu P - tâm của mọi hành tinh.

▸ **Để luyện tập : BT 2 và 3**

2.4. Động lực học trong hệ quy chiếu trái đất $\mathcal{R}_T$

2.4.1. Định nghĩa

Đó là hệ quy chiếu $\mathcal{R}_T$ gắn vào Trái Đất (*x.2.2.1*)

2.4.2. Hệ thức cơ bản của động lực học trong hệ quy chiếu trái đất

Việc áp dụng hệ thức cơ bản của động lực học cho chuyển động của một chất điểm (M, m) trong $\mathcal{R}_T$ được tiến hành như đối với chuyển động trong $\mathcal{R}_0$ với các kí hiệu đã dùng.

Kết quả là :

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_T} = \vec{F}_a + m[\vec{\mathcal{G}}_T(M) + \vec{\mathcal{G}}_L(M) + ...] - m\vec{a}_e(M)_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_C} - m\vec{a}_e(M)_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_C}.$$

với $\vec{a}_e(M)_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_C} = \vec{a}(0)_{/\mathcal{R}_C} - \omega_T^2\overrightarrow{HM}$, vì gia tốc này là gia tốc của điểm trùng hợp với M, cố định trong $\mathcal{R}_T$, và điểm này vẽ trong $\mathcal{R}_0$ một vòng tròn tâm H trên (Oz) với vận tốc góc $\vec{\omega}_T$.

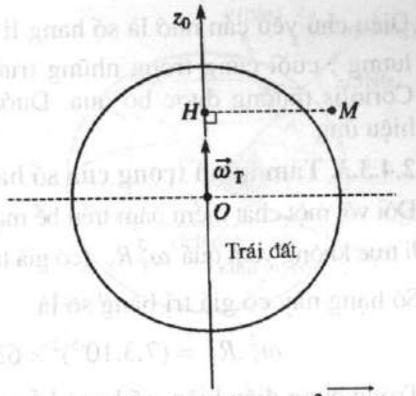
Vì gia tốc Coriolis bằng :

$$\vec{a}_e(M)_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_C} = 2\vec{\omega}_T \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_T}, \text{ nên :}$$

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_T} = \vec{F}_a + m\vec{\mathcal{G}}_T(M) + m\omega_T^2\overrightarrow{HM} + m(-2\vec{\omega}_T \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_T}) +$$

$$m[(\vec{\mathcal{G}}_L(M) - \vec{\mathcal{G}}_L(0) + (\vec{\mathcal{G}}_S(M) - \vec{\mathcal{G}}_S(0)) + ...]$$

Biểu thức này khá phức tạp. Bằng cách đưa vào *trọng lượng* của vật ta sẽ đơn giản hóa được biểu thức.



Hình 17. $\vec{a}_e(\mu) = \vec{a}(0) - \omega^2\overrightarrow{HM}$

2.4.3. Trọng lượng của một vật nặng

2.4.3.1. Định nghĩa thực tế

Ta hình dung có một chất điểm cố định ở đầu một sợi dây (cũng có thể tốt hơn nếu dùng một lò xo hoặc cho nằm cân bằng trên một cái bàn) nằm cân bằng trong $\mathcal{R}_T$.

Điểm *(M, m)* nằm cân bằng nếu tổng các lực tác dụng lên nó bằng không :

$$\overrightarrow{\textit{lực căng của dây}} + \overrightarrow{\textit{trọng lượng}} = \vec{0}$$

Khi đó phương của dây treo cho ta đường thẳng đứng địa phương - giá của trọng lượng.

2.4.3.2. Trọng trường

Ta hãy thay điều kiện cân bằng trên ($\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_T} = 0$ và $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_T} = 0$) vào phương trình chuyển động, $\vec{F}_a$ khi đó là lực căng của dây.

Ta có :

$$\vec{0} = \vec{F}_a + m\vec{\mathcal{G}}_T(M) + m\omega_T^2\overrightarrow{HM} + m[(\vec{\mathcal{G}}_L(M) - \vec{\mathcal{G}}_L(0)) + (\vec{\mathcal{G}}_S(M) - \vec{\mathcal{G}}_S(0)) + ...]$$

Để suy ra trọng lượng, ta chỉ cần đồng nhất với phương trình cân bằng ở trên ; trọng lượng là lực tỉ lệ với khối lượng :

$$\overrightarrow{\textit{trọng lượng}} = m\vec{g}(M) = m\vec{\mathcal{G}}_T(M) + m\omega_T^2\overrightarrow{HM} + m\,[\,\overrightarrow{\textit{số hạng vi sai}}\,]$$

Số hạng vi sai có giá trị vào cỡ $10^{-7}g_0$ nên nói chung bỏ qua được,

$$\vec{g}(M) \approx \vec{\mathcal{G}}_T(M) + \omega_T^2\overrightarrow{HM}$$

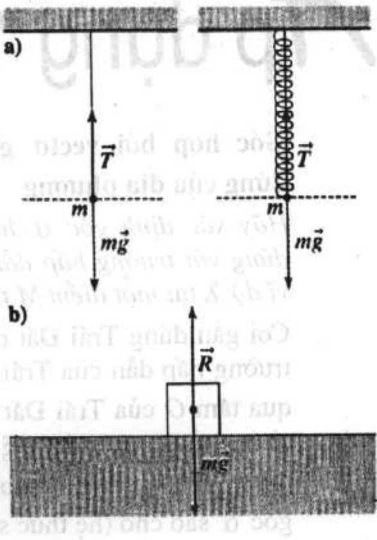
$\vec{g}(M)$ là trọng trường của Trái Đất tại điểm M.

Số hạng thứ nhất là trường hấp dẫn của Trái Đất tại M ; số hạng thứ hai gọi là số hạng **li trục,** H là hình chiếu vuông góc từ điểm M xuống trục quay của Trái Đất.

Hệ quy chiếu trái đất quay đối với hệ quy chiếu địa tâm $\mathcal{R}_0$: trọng lượng bao gồm cả lực quán tính kéo theo liên kết, li trục.

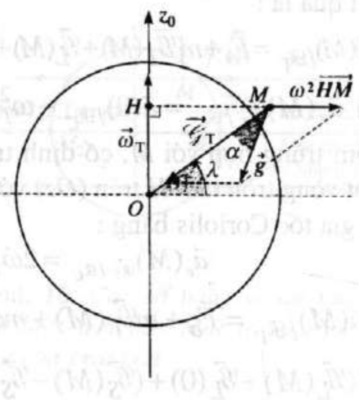
Hệ thức cơ bản của động lực học chất điểm trong hệ quy chiếu trái đất với sự có mặt của trọng lượng là :

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_T} = \vec{F}_a + m\vec{g}(M) + [-2m\vec{\omega}_T \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_T}]$$



Hình 18. *Định nghĩa thường dùng của trọng lượng của một vật.*

Điều chủ yếu cần nhớ là số hạng li trục $m\omega_T^2\overrightarrow{HM}$ nằm trong trọng lượng ; cuối cùng trong những trường hợp thông thường, số hạng Coriolis thường được bỏ qua. Dưới đây ta sẽ nghiên cứu một vài hiệu ứng



Hình 19. *Các thành phần của trọng lượng.*

2.4.3.3. Tầm quan trọng của số hạng li trục

Đối với một chất điểm nằm trên bề mặt của Trái Đất, chuẩn của số hạng li trục không vượt quá $\omega_T^2 R_T$ (có giá trị cực đại ở đường xích đạo).

Số hạng này có giá trị bằng số là :

$$\omega_T^2 . R_T = (7{,}3.10^{-5})^2 \times 6370.10^3 = 0{,}034 \text{m.s}^{-2}$$

Trong cùng điều kiện, số hạng hấp dẫn bằng vào khoảng :

$$g_0 = G.\frac{M_T}{R_T^2} = 9{,}8 \text{m.s}^{-2}.$$

Như vậy số hạng li trục là một số hạng hiệu chỉnh, nhưng phải kể tới nó khi cần đánh giá chính xác trọng trường.

Thực ra, các phép đo trọng trường có thể cung cấp các kết quả rất chính xác, và việc nghiên cứu sự biến thiên của trường này còn phức tạp hơn nhiều so với điều ta vừa tiếp cận.

Phải dựa vào hình dạng của Trái Đất (địa diện, phình ra ở quỹ đạo, ở đó g nhỏ hơn ở cực) ; còn phải đưa vào các thay đổi do địa hình, do tầng đất... ở từng địa phương.

Áp dụng 4

Góc hợp bởi vectơ $\vec{g}$ với đường thẳng đứng của địa phương

Hãy xác định góc α hợp bởi đường thẳng đứng với trường hấp dẫn của Trái Đất theo vĩ độ λ tại một điểm M trên bề mặt Trái Đất

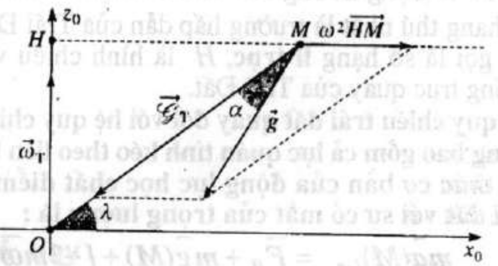
Coi gần đúng Trái Đất có dạng hình cầu thì trường hấp dẫn của Trái Đất $\mathcal{G}_T(M)$ có giá đi qua tâm O của Trái Đất và phép dựng vectơ chứng tỏ trọng trường $\vec{g}$ là đường chuẩn của đường thẳng đứng tại nơi đó, hợp với $\mathcal{G}_T$ một góc α sao cho (hệ thức sin trong tam giác) :

$$\frac{\omega_T^2 HM}{\sin\alpha} = \frac{g}{\sin\lambda}.$$

Vì $HM = R_T\cos\lambda$ nên :

$$\sin\alpha = \frac{\omega_T^2 R_T \sin 2\lambda}{2g}$$

Giá trị cực đại của góc α ứng với $\lambda = 45^0$, tức $\alpha = 1{,}73.10^{-3} rad \approx 6'$.



Hình 20. Góc của $\vec{g}$ với đường thẳng đứng địa phương

▸ **Để luyện tập : BT 4 và 5 .**

3 Ảnh hưởng của lực quán tính Coriolis trong hệ quy chiếu trái đất

3.1. Về cỡ lớn

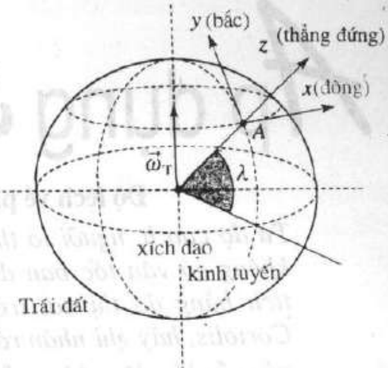
Lực quán tính Coriolis $\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega}_T \wedge \vec{v}_r$ có chuẩn nhỏ hơn hoặc bằng $2m\omega_T v_r$ mà ta có thể so sánh với cỡ lớn của trọng lượng mg_o :

$$\frac{F_{ic}}{mg_0} < 2\omega_T \frac{v_r}{g_0} = \frac{v_r}{6{,}7.10^4} \text{ (v_r tính bằng m.s}^{-1}\text{)}$$

Như vậy, các vận tốc phải đạt tới giá trị lớn thì hai số hạng mới có cùng cỡ lớn.

Chú ý rằng với v_r = 700m.s^{-1} ≈ 2500 km.h^{-1}, lực Coriolis không vượt quá 1% của trọng lượng

Các tác dụng của lực này sẽ đáng kể trong một số trường hợp đặc biệt : khối lượng lớn, khoảng thời gian dài hay độ chính xác cao.



Hình 21. *Hệ tọa độ trái đất địa phương* λ > 0 *trong bán cầu bắc.*

3.2. Làm rõ sự lệch về phía đông trong $\mathcal{R}_T$

Ta dùng cách xác định vị trí sau :

Chọn một hệ tọa độ địa phương *(A ; x, y, z)* với *(Ax)* hướng về phía đông, *(Ay)* hướng về phía bắc (tiếp tuyến với kinh tuyến của nơi đó) và do vậy *(Az)* hướng về thiên đỉnh, trùng với đường thẳng đứng của nơi đó.

Ta hãy nghiên cứu sự rơi tự do trong hệ tọa độ đã chọn và bỏ qua các lực cản của không khí.

Khi đó, phương trình vectơ của chuyển động (hệ thức cơ bản của động lực học trong $\mathcal{R}_T$) là :

$$\vec{a}_r = \vec{g} - 2\vec{\omega}_T \wedge \vec{v}_r ,$$

với $\vec{g} = -g\vec{e}_z (g = cte \approx g_0$ nếu bỏ qua sự biến thiên của g theo độ cao). Cần nhận rõ rằng mục đích phải tìm ở đây là làm rõ ảnh hưởng của lực Coriolis và không có ý định nghiên cứu mọi mặt của vấn đề mà lợi ích rất hạn chế.

Vì $\vec{\omega}_T = \omega_T(\cos\lambda\vec{e}_y + \sin\lambda\vec{e}_z)$, nên hình chiếu của phương trình vectơ cho ra ba phương trình vô hướng :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega_T\left(\frac{dz}{dt}\cos\lambda - \frac{dy}{dt}\sin\lambda\right);$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2\omega_T\frac{dx}{dt}\sin\lambda;$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g + 2\omega_T\frac{dx}{dt}\cos\lambda$$

Từ đó, ta có thể suy ra rằng một vật rơi tự do, nếu không có nhiễu loạn (gió...), sẽ bị lệch rất ít về phía đông.

Lực Coriolis $\vec{F}_{IC} = -2m\omega_T \wedge \vec{v}_r$ là nguyên nhân gây ra sự lệch về phía đông của các vật rơi tự do. Tuy nhiên, sự lệch đó nói chung là rất nhỏ.

Áp dụng 5

Độ lệch về phía đông

Từ độ cao h, người ta thả rơi một chất điểm không có vận tốc ban đầu. Bằng cách phân tích bằng đồ thị vai trò của lực quán tính Coriolis, hãy ghi nhận rằng nó sẽ bị lệch chủ yếu về phía đông ($\Delta x > 0$) khi rơi tới đất.

Bằng các phép gần đúng liên tiếp, hãy đánh giá cỡ lớn của độ lệch trên. Dựa vào kết quả, bạn hãy gợi ý cách làm thế nào để thực hiện thí nghiệm ?

cho : $h = 150$m *và vĩ độ* $\lambda = 50^0$.

Vận tốc có thành phần chủ yếu hướng thẳng đứng xuống phía dưới (ở đây ta bỏ qua các thành phần khác), lực Coriolis hướng thực tế về phía đông (*hình 22*) ngoài ra không phụ thuộc vào bán cầu trong đó diễn biến thí nghiệm. Ta hãy sử dụng các phương trình chuyển động đã thiết lập ở trên.

• *Với gần đúng bậc không,* nghĩa là trong các phương trình trên, bằng cách cho triệt tiêu các số hạng có ω_T (coi như một vô cùng nhỏ), ta thu được sự rơi tự do cổ điển mà nghiệm là :

$$x = 0,\ y = 0,\ \frac{dz}{dt} = -gt \text{ và } z = h - \frac{1}{2}gt^2.$$

Đặc biệt, thời gian rơi bằng

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Đem các giá trị trên vào vế hai của các phương trình vô hướng ta thu được các định luật theo x, y và z ở bậc 1

• *Ở bậc 1*

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega_T gt\cos\lambda\ ;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0\ ;$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g\ ;$$

có nghiệm là :

$$x = \omega_T g\cos\lambda\frac{t^3}{3},\ y = 0 \text{ và } z = h - \frac{1}{2}gt^2.$$

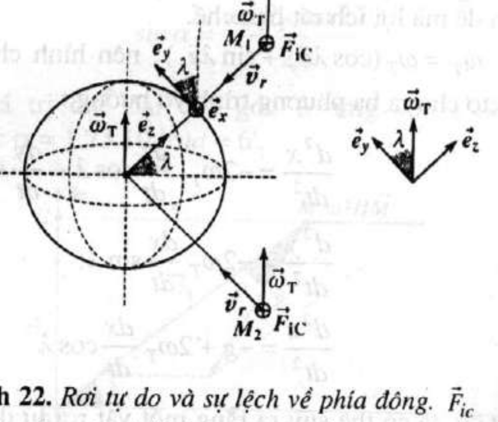
Không cần tiếp tục để đi tới kết luận rằng tác dụng chủ yếu của lực Coriolis là một sự lệch về phía đông.

Ở mặt đất ($z = 0$), với giá trị của Δt ở trên, ta có :

$$\Delta x = \frac{1}{3}g\omega_T\cos\lambda\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Muốn hi vọng kiểm nghiệm lại một kết quả như trên, ta cần tiến hành thí nghiệm ở nơi khuất mọi nhiễu loạn (không khí yên lặng). Thí nghiệm có tính chất lịch sử đã được thực hiện trong một giếng mỏ, có độ sâu khoảng 150m, cho kết quả $\Delta x \approx 2{,}5$ cm với $\lambda = 50^0$. Ta cần đánh dấu một cách chính xác chân của đường thẳng đứng của điểm thả vật bằng một sợi dây chì dài, mặc dầu hiện nay điều đó sẽ chắc chắn và dễ dàng hơn nếu dùng một chùm tia lade. Thực ra giá trị đo bằng thực nghiệm có hơi nhỏ hơn giá trị dự kiến, do có ma sát của không khí.

Ở bậc 2, tiếp tục phương pháp như trên, ta nhận thấy có một sự lệch rất yếu về phía nam (số hạng có ω_T^2 ...)



Hình 22. *Rơi tự do và sự lệch về phía đông. $\vec{F}_{ic}$ hướng theo $\vec{e}_x$ (về phía đông) đối với hai điểm M_1 và M_2 nằm trong mặt phẳng hình vẽ*

$\vec{\omega}_T = \omega_T(\vec{e}_y\cos\lambda + \vec{e}_z\sin\lambda)$.

▸ **Để luyện tập : BT 6 và 7.**

3.3. Các biểu hiện khác của lực quán tính Coriolis

Dĩ nhiên, ta có thể ném các vật trong những điều kiện khác nhau và thay đổi cách giải các phương trình trên.
Có thể kể ra các biểu hiện quan sát được như chuyển động của gió : chiều quay xung quanh một tâm áp thấp hay một xoáy nghịch phụ thuộc vào bán cầu, điều này được giải thích một cách hoàn hảo nhờ lực Coriolis, hay chuyển động của các dòng đại dương.
Cũng như sự mòn không đều các đường ray của đường sắt là do sự khác nhau về áp lực của các bánh xe (một chiếc xe lửa lúc khứ hồi không đi theo cùng con đường...) và tương tự, sự chênh lệch mức nước rất nhỏ của một con sông gây ra sự xói mòn khác nhau của các bờ sông. Cuối cùng, là thí nghiệm nổi tiếng của FOUCAULT (*x. phần lịch sử, tr 27*) đã mô tả trong *bài tập* **12**.

▸ **Để luyện tập : BT 8.**

4 Khái luận về lí thuyết tĩnh của các thủy triều

4.1. Giả thiết cho vấn đề nghiên cứu

Trước hết, ta nên xem xét lại tiết § **2.2.3**, bằng cách phân tích số hạng vi sai
Ta sẽ đơn giản hóa vấn đề bằng cách bỏ qua sự quay của Trái Đất và giả thiết, khi chưa có số hạng thủy triều do sự có mặt của Mặt Trăng và Mặt trời thì Trái Đất sẽ bị bao phủ đều đặn bởi một lớp nước đứng yên trong $\mathscr{R}_O$.
Sự giải thích hiện tượng thủy triều trên cơ sở các giả thiết đơn giản hóa ở trên gọi là lí thuyết tĩnh về thủy triều. Ta hãy bắt đầu bằng sự nghiên cứu ảnh hưởng của sự có mặt của Mặt Trăng.
Nhắc lại các hệ thức liên quan đến các số hạng vi sai, ta đã nhận được :

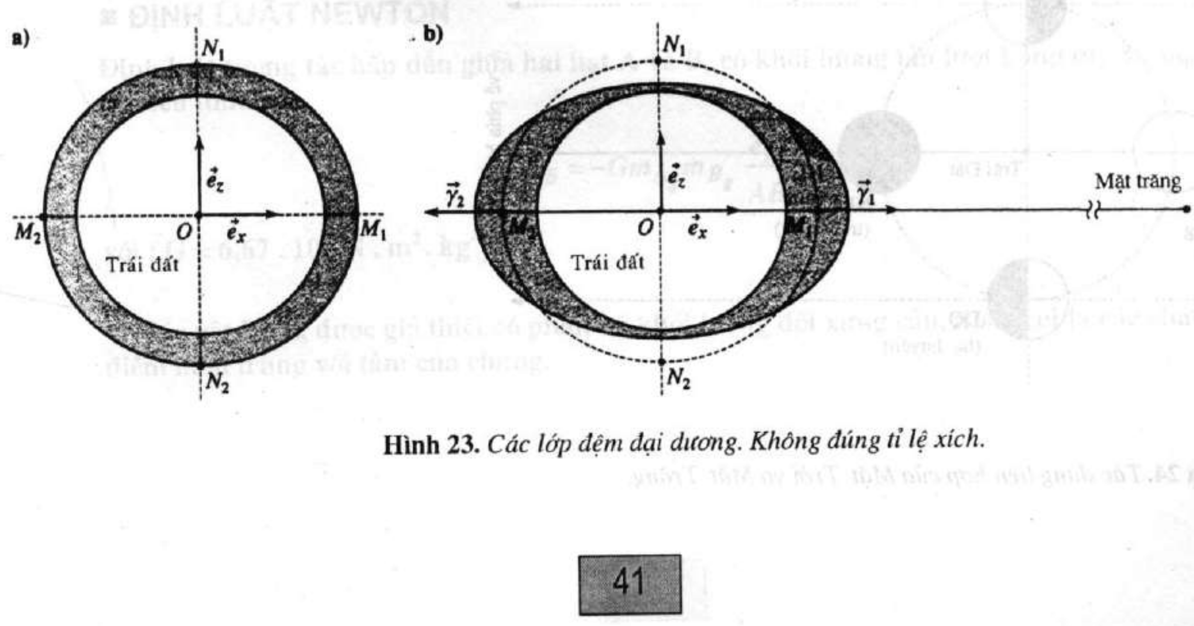
- Đối với Mặt Trăng :

$$\vec{\mathscr{G}}_L(M_1)-\vec{\mathscr{G}}_L(0)=2GM\frac{M_L}{TL^3}R_T=2g_o\frac{M_L}{M_T}\left(\frac{R_T}{TL}\right)^3\approx 1{,}1.10^{-7}\,g_o;$$

- Đối với Mặt trời :

$$\vec{\mathscr{G}}_S(M_1)-\vec{\mathscr{G}}_S(0)=2GM\frac{M_S}{TS^3}R_T=2g_o\frac{M_S}{M_T}\left(\frac{R_T}{TS}\right)^3\approx 5{,}1.10^{-8}\,g_o.$$

4.2. Vai trò của số hạng vi sai do Mặt Trăng



Hình 23. *Các lớp đệm đại dương. Không đúng tỉ lệ xích.*

Số hạng vi sai liên quan với ảnh hưởng của trường hấp dẫn của Mặt Trăng $\vec{\mathscr{G}}_L(M) - \vec{\mathscr{G}}_L(0)$ được biểu diễn trên *hình 23*. Như ta đã biết, số hạng này có cực đại ở M_1 và M_2 (tác dụng đẩy), còn ở N_1 và N_2 có tác dụng hút.

Từ đó ta suy ra hình dạng của các lớp đệm đại dương. Cho thỏa mãn điều kiện cân bằng của nước, ta có thể đánh giá độ chênh lệch mực nước so với khi không có số hạng vi sai. Theo các tính toán, ta thấy biên độ ở M_1 và M_2 có giá trị vào cỡ 0,6m.

Để đơn giản hoá, giả thiết Mặt Trăng nằm trong mặt phẳng hoàng đạo, theo một trục (Ox), và Trái Đất quay xung quanh trục (Oz).

Lớp đệm đại dương luôn luôn nhận trục (Ox) làm trục đối xứng tròn xoay, ta thấy với một điểm gắn vào Trái Đất, trong mỗi ngày có hai lần nước triều dâng (cách nhau 12 giờ, độ cao của nước triều lớn nhất ở xích đạo).

Thực tế, vì Mặt Trăng thực hiện một chuyển động tròn biểu kiến xung quanh Trái Đất (tháng âm lịch) trong khoảng thời gian cỡ 29 ngày, các triều dâng tại một nơi sẽ chậm đi khoảng 50 phút mỗi ngày.

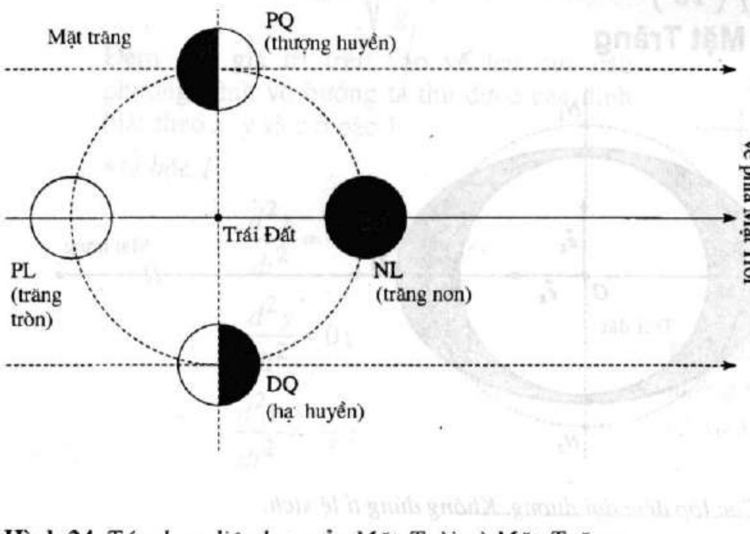
Lí thuyết tĩnh về thủy triều, bao hàm sự tồn tại của các lớp đệm đại dương là một minh họa tốt cho tính thực tế của số hạng vi sai trong hệ thức cơ bản của động lực học áp dụng trong các hệ quy chiếu địa tâm hay Trái Đất.

4.3. Tác dụng liên hợp của Mặt Trời và Mặt Trăng

Mặt Trời góp một phần không thể bỏ qua trong hiện tượng thủy triều như đã biết tỉ số giữa các số hạng vi sai cực đại bằng :

$$\frac{\text{số hạng mặt trời cực đại}}{\text{số hạng mặt trăng cực đại}} \approx 0{,}45\,.$$

Như vậy, cần phải tính đến vị trí của Mặt Trời. Bằng cách luôn luôn giả thiết Mặt Trăng quay xung quanh Trái Đất trong mặt phẳng hoàng đạo, ta đã biểu diễn (*hình 24*) bốn vị trí biết khá rõ của chu kì Mặt Trăng, đối với trục Trái Đất- Mặt Trời.



Hình 24. *Tác dụng liên hợp của Mặt Trời và Mặt Trăng.*

Tại các điểm PL (Trăng tròn) và NL (Trăng non), các số hạng vi sai được tăng cường ; các thủy triều là lớn nhất có thể có; ta nói có triều cường.

Tại các điểm PQ (tuần trăng thượng huyền) và DQ (tuần trăng hạ huyền), các số hạng vi sai bị trừ bớt : các thủy triều có biên độ nhỏ nhất có thể có, khi đó ta nói có triều thấp (nước triều dòng)

4.4. Phức tạp hơn (một chút)

Ngoài các phép gần đúng liên quan đến chuyển động của Mặt trăng, trong lí thuyết tĩnh, ta còn chưa tính đến chuyển động của các khối đại dương; chính đó là một phép gần đúng rất đáng cân nhắc vì các chuyển động đó làm sai lệch rõ ràng các kết luận của lí thuyết tĩnh : ví dụ các lớp đệm đại dương không còn thẳng hàng với *O* và Mặt trăng nữa.

Ngoài ra, sự khảo sát các hiện tượng lan truyền gắn với các điều kiện thuộc giới hạn của địa phương (địa hình các bờ biển) giải thích tại sao một vài thủy triều lại có các biên độ rất lớn (15m trong vịnh Fundy của Canada, 10m trong vịnh Mont Saint - Michel) trong khi đó chỉ vào cỡ 1m trên một số hòn đảo của Thái Bình Dương.

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ ĐỊNH LUẬT NEWTON

Định luật tương tác hấp dẫn giữa hai hạt A và B, có khối lượng lần lượt bằng m_A và m_B có biểu thức :

$$\vec{F}_{A\to B} = -Gm_{A_g}m_{B_g}\frac{\vec{e}_{AB}}{AB^2},$$

với : $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$

■ Các vật khác, được giả thiết có phân bố khối lượng đối xứng cầu, được coi là các chất điểm nằm trùng với tâm của chúng.

■ HỆ QUY CHIẾU COPERNIC

Hệ quy chiếu COPERNIC, kí hiệu $\mathcal{R}_C$, được định nghĩa bằng sự chấp nhận hệ tọa độ $(C;\ \vec{e}_{x_c}, \vec{e}_{y_c}, \vec{e}_{z_c})$ trong đó C là khối tâm của hệ mặt trời và các trục (Cx_C), (Cy_C), và (Cz_C) hướng về ba ngôi sao được coi là cố định.

Đối với các chất điểm chuyển động trong hệ mặt trời, đó là hệ quy chiếu Galilée, với một độ chính xác tuyệt vời.

■ HỆ QUY CHIẾU KEPLER

Hệ quy chiếu Kepler $\mathcal{R}_K$ được suy ra từ hệ quy chiếu COPERNIC bằng phép tịnh tiến : gốc của hệ tọa độ Kepler, còn gọi là hệ tọa độ nhật tâm, là tâm quán tính S của Mặt trời, và các trục của nó (Sx_K), (Sy_K) và (Sz_K) có thể được chọn song song với các trục của một hệ tọa độ không gian của $\mathcal{R}_C$. Nói chung, $\mathcal{R}_K$ được giả thiết là hệ quy chiếu Galilée với một phép gần đúng tuyệt vời.

■ HỆ QUY CHIẾU ĐỊA TÂM

• Một hệ tọa độ gắn vào hệ quy chiếu địa tâm $\mathcal{R}_0$ có gốc là tâm quán tính $O=T$ của Trái Đất, và các trục của nó (Ox_0), (Oy_0), và (Oz_0) song song với các trục của hệ quy chiếu Copernic.

• Hệ quy chiếu địa tâm $\mathcal{R}_0$, chuyển động tịnh tiến chuẩn tròn so với hệ quy chiếu Copernic $\mathcal{R}_C$, không phải là hệ quy chiếu Galilée.

• Tuy nhiên, ta có thể coi nó là hệ quy chiếu Galilée nếu chỉ kể đến trường hấp dẫn của Trái Đất. Thực vậy, số hạng vi sai của thủy triều nói chung là không đáng kể.

■ SỐ HẠNG VI SAI

Số hạng vi sai do một thiên thể tạo ra được xác định bởi :

$$\vec{\gamma} = \vec{\mathcal{G}}_A(M) - \vec{\mathcal{G}}_A(O),$$

$\vec{\mathcal{G}}_A(M)$ và $\vec{\mathcal{G}}_A(O)$ biểu thị các trường hấp dẫn của A tại các điểm M và O.

■ HỆ QUY CHIẾU TRÁI ĐẤT

• Hệ quy chiếu trái đất $\mathcal{R}_T$ chuyển động quay đối với hệ quy chiếu địa tâm $\mathcal{R}_O$: lực quán tính kéo theo liên kết, li trục, được bao gồm trong trọng lượng.

• Hệ thức cơ bản của động lực học áp dụng cho chất điểm M khối lượng m trong hệ quy chiếu trái đất được viết với sự có mặt của trọng lượng :

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_T} = \vec{F}_a + m\vec{g}(M) + \left[-2m\vec{\omega}_T \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_T}\right].$$

• Lực quán tính Coriolis :

$$\vec{F}_{iC} = -2m\vec{\omega}_T \wedge \vec{v}_r$$

là nguyên nhân gây ra sự lệch về phía đông của vật rơi tự do, không có vận tốc ban đầu. Tuy vậy, độ lớn của nó nói chung là nhỏ.

• Lí thuyết tĩnh của thủy triều, bao gồm sự tồn tại của các lớp đệm đại dương, là một minh họa tốt cho tính thực tế của số hạng vi sai trong hệ thức cơ bản của động lực học áp dụng trong các hệ quy chiếu địa tâm $\mathcal{R}_O$ hay trái đất $\mathcal{R}_T$.

BÀI TẬP

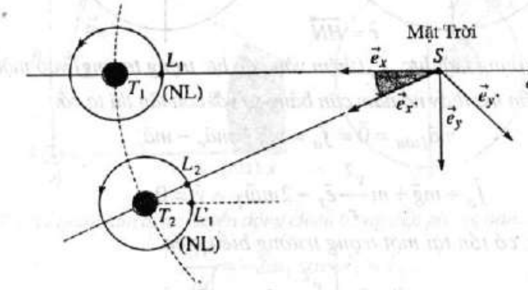
ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

1 Tuần trăng

Người ta gọi tuần trăng (hay chu kì xoay vòng giao hội của Mặt Trăng) là khoảng thời gian phân cách hai pha giống hệt nhau của Mặt Trăng đối với một người quan sát trên mặt đất.

Biết rằng trong hệ quy chiếu Copernic $\mathcal{R}_C$, Mặt Trăng quay xung quanh chính nó trong 27,32 ngày và quay một vòng xung quanh Trái Đất trong cùng thời gian, hãy xác định tuần trăng (ta có thể giả thiết Mặt Trăng di chuyển trong mặt phẳng hoàng đạo).

• *Lời giải*



Các vận tốc góc của chuyển động quay của Mặt Trăng trên chính nó và xung quanh Mặt Trời là giống nhau trong hệ quy chiếu COPERNIC : ta luôn luôn trông thấy cùng một mặt của Mặt Trăng. Phép tổng hợp các vận tốc góc quay cho :

$$\vec{\omega}_{mặt\ \ trăng/\mathcal{R}_C} = \vec{\omega}_{mặt\ \ trăng/\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}_C}$$

Tuần trăng biểu diễn "quá trình đi từ L_1 qua L_2", do đó

$$T_{tuần\ trăng} = \frac{2\pi}{\omega_{Mặt\ \ trăng/\mathcal{R}'}}$$

"Quá trình đi từ L_1 qua L'_1 tương ứng với chu kì quay của Mặt trăng trong $\mathcal{R}_C$, do đó : $T_{quay} = \dfrac{2\pi}{\omega_{Mặt\ \ trăng/R_c}} = 27{,}32$ ngày,

từ đó : $T_{tuần\ trăng} = 29$ ngày 12 giờ 44 ph.

2 Định luật hấp dẫn

Người ta giải thích cho một học sinh rằng chuyển động của các hành tinh bị chi phối bởi định luật tương tác hấp dẫn, lực này kéo Trái Đất về phía Mặt Trời, tương tự Mặt Trăng bị kéo về phía Trái Đất

Vì tò mò, học sinh này lấy chiếc máy tính của mình và viết : "Tôi không hiểu ! Khối lượng của Trái Đất $M_T = 6.10^{24}$kg, của Mặt Trời $M_S = 2.10^{30}$kg, khoảng cách từ Trái Đất tới Mặt Trời TS bằng khoảng $1{,}5.10^{11}$m và từ Mặt Trăng tới Trái Đất TL vào cỡ $3{,}8.10^{8}$m, vậy lực hấp dẫn do Mặt Trời tác dụng lên Mặt Trăng lớn hơn là lực tác dụng của Trái Đất lên Mặt Trăng.

Vô lí, tại sao Mặt Trăng vẫn nằm gần Trái Đất ?"

Sau khi đã kiểm tra thấy kết quả tính toán trên là đúng, bạn hãy giải thích cho cậu học sinh đặc tính đó của Mặt Trăng.

Cho biết : $M_L = \dfrac{M_T}{81{,}3}$.

• *Lời giải*

Thực vậy, ta có : $\dfrac{\vec{F}_{S\to L}}{\vec{F}_{T\to L}} = \dfrac{M_S}{M_L}\left(\dfrac{TL}{SL}\right)^2 \approx 2{,}1$.

Nhưng toàn bộ không đứng yên trong hệ quy chiếu COPERNIC $\mathcal{R}_c$ và gia tốc của Mặt Trăng trong hệ quy chiếu địa tâm $\mathcal{R}_0$ là :

$\vec{a}_{L/\mathcal{R}_0} = \vec{\mathcal{G}}_T(L) + \vec{\mathcal{G}}_S(L) - \vec{a}_e$ *với* $\vec{a}_e = \vec{a}(T)_{/\mathcal{R}_C} = \vec{\mathcal{G}}_S(T) - \vec{\mathcal{G}}_L(T)$.

Từ đó :

$$\vec{a}_{L/\mathcal{R}_0} = \left(\vec{\mathcal{G}}_T(L) - \vec{\mathcal{G}}_L(T)\right) + \left(\vec{\mathcal{G}}_S(L) - \vec{\mathcal{G}}_S(T)\right)$$
$$= -G(M_T + M_L)\frac{\overrightarrow{TL}}{TL^3} - gM_S\frac{\overrightarrow{TL}}{ST^3}$$

Bởi vậy trong hệ quy chiếu địa tâm $\mathcal{R}_O$, mọi việc xảy ra như là Mặt Trăng chỉ chịu một lực tác dụng hướng về Trái Đất.

3 Chất điểm và vệ tinh

Một nhà hàng không vũ trụ là hành khách của một con tàu vũ trụ đang chuyển động tròn trên quỹ đạo bán kính r, xung quanh một thiên thể A có bán kính $R<r$.

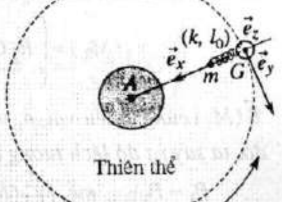
Để đo được vận tốc góc ω của con tàu xung quanh A, ông ta nghiên cứu dao động của một hệ {khối lượng - lò xo} (khối lượng m, lò xo có độ cứng k), dọc theo một trục (Gx) hướng về phía thiên thể, điểm treo G của lò xo trùng với tâm quán tính của con tàu vũ trụ, và một bộ dẫn hướng không ma sát đảm bảo cho khối lượng m chuyển động thẳng đều dọc theo trục (Gx).

Đặt $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ và $\mathcal{G}_0 = G\dfrac{M_A}{r^2}$, M_A là khối lượng của thiên thể, có tính đối xứng cầu.

Chứng tỏ rằng đo được chu kì dao động của khối lượng m cho phép về nguyên tắc tính được vận tốc góc của vệ tinh xung quanh A.

Phương pháp liệu có thực hiện được không ?

• *Lời giải*



Vận tốc góc quay ω của vệ tinh cho bởi :

$\omega^2 = \dfrac{\mathcal{G}_0}{r}$; $\vec{a}_G = -\omega^2\overrightarrow{AG} = -\mathcal{G}_0\vec{e}_x$.

Trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}'(G;\ x,y,z)$, hệ thức cơ bản của động lực học cho (với $\vec{R}$ là phản lực của trục (Gx) lên khối lượng) :

$$m\vec{a}_{/\mathcal{R}'} = m\ddot{x}\vec{e}_x = -k(x-l_0)\vec{e}_x - GM_A\frac{m}{(r-x)^2}\vec{e}_x - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c + \vec{R},$$

với $\vec{a}_e = -\omega^2\overrightarrow{AM} = -\omega^2\overrightarrow{AG} - \omega^2\overrightarrow{GM} = \vec{a}_G - \omega^2 x\vec{e}_x$

và $\vec{a}_C = -2\omega\vec{e}_z \wedge \dot{x}\vec{e}_x (\vec{a}_C \perp (Gx))$.

Sau khi đơn giản hóa, ta có : $\ddot{x}+(\omega_o^2-3\omega^2)x=\omega_o^2 l_o$

Nếu $\omega<\dfrac{\omega_o}{\sqrt{3}}$*, thì* $T=\dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_o^2-3\omega^2}}=T_o\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{3\omega^2}{\omega_o^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$

Xét trường hợp của một vệ tinh của Trái Đất :

$$\omega^2=\frac{\mathcal{G}_o}{r}=\frac{10}{6370.10^3}<<\omega_o^2 \text{, tức } T=T_o\left(1+\frac{3\omega^2}{2\omega_o^2}\right).$$

Phương pháp tỏ ra kém nhạy.

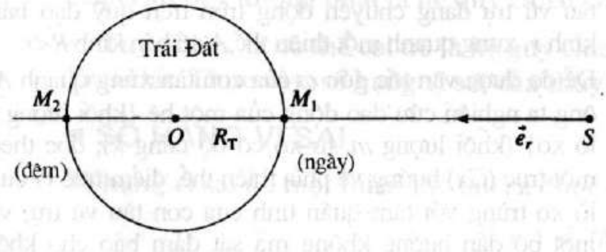
4 Biến thiên trọng lượng của một vật

Hãy ước lượng sự biến thiên tương đối của trọng lượng của một vật nằm trên đường xích đạo Trái đất, do số hạng vi sai của Mặt Trời tạo ra, các phép cân (với cân lò xo) được tiến hành ở hai điểm xuyên tâm đối, thẳng hàng với tâm Trái Đất và Mặt Trời. Hãy đưa ra kết luận liên quan đến ảnh hưởng của số hạng vi sai lên trọng lượng của một vật.

Cho :

d(Trái Đất - Mặt Trời) = TS = $1{,}5.10^{11}$m , R_T = 6370km.

- *Lời giải* :



Xét số hạng vi sai tại M_1 :

$$\vec{\gamma}_S(M_1)=\vec{\mathcal{G}}_S(M_1)-\vec{\mathcal{G}}_S(O)=(f(r)-f(d))\vec{e}_r$$

với :

$$f(r)=-G\frac{1}{r^2} \text{ và } r-d=-R_T.$$

Suy ra :

$$\vec{\gamma}_S(M_1)=\left(-R_T 2G\frac{M_S}{d^3}-\frac{R_T^2}{2}6G\frac{M_S}{d^4}\right)\vec{e}_r,$$

khi khai triển đến bậc 2, và

$$\vec{\gamma}_S(M_2)=\left(R_T G\frac{M_S}{d^3}-\frac{R_T^2}{2}6G\frac{M_S}{d^4}\right)\vec{e}_r.$$

$\vec{\mathcal{G}}(M_1)$ *cùng chiều với* $\vec{e}_r$ *và* $\vec{\mathcal{G}}(M_2)$ *theo chiều ngược lại. Từ đó, ta suy ra độ lệch tương đối về trọng lượng là :*

$$\frac{P_2-P_1}{P}=-\frac{m\vec{e}_r[\vec{\gamma}_S(M_2)+\vec{\gamma}_S(M_1)]}{mg}=6\frac{R_T^2}{d^4}G\frac{M_S}{g}.$$

Biết $G\dfrac{M_S}{d^3}=\dfrac{4\pi^2}{T_{orb}^2}$*, ta có :* $\dfrac{P_2-P_1}{P}=6.6.10^{-12}$.

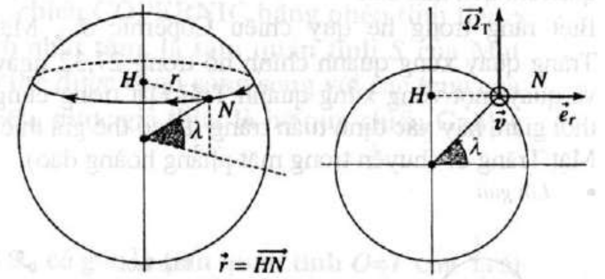
(với Mặt Trăng, ta sẽ tìm thấy $5{,}7.10^{-9}$*).*

Các số hạng này quá nhỏ nên không dễ phát hiện.

5 Trọng trường biểu kiến trong tàu biển

Một tàu biển di chuyển về phía tây, dọc theo một vĩ tuyến, có vĩ độ $\lambda=40^0$ với vận tốc $v=15\text{ms}^{-1}$. Tìm độ biến thiên tương đối của trọng lượng của một vật liên kết với chuyển động trên, đối với một hành khách trên tàu khi người này sử dụng sự cân bằng địa phương của một chất điểm để xác định trọng lượng của một vật.

- *Lời giải*



Khi tác dụng một lực $\vec{f}_a$ *(thêm vào các lực trọng trường) vào một chất điểm mà thấy nó nằm cân bằng so với con tàu thì ta có :*

$$m\vec{a}_{/tàu}=\vec{0}=\vec{f}_a=m\vec{g}-m\vec{a}_e-m\vec{a}_c$$

hay : $$\vec{f}_a+m\vec{g}+m\frac{v^2}{r}\vec{e}_r-2m\vec{\omega}_T\wedge\vec{v}=0$$

Do vậy, có tồn tại một trọng trường biểu kiến

$$\vec{g}'=\vec{g}+\left(\frac{v^2}{r}-2\omega_T v\right)\vec{e}_r.$$

Áp dụng số : $\dfrac{g'-g}{g}\approx 1{,}7.10^{-4}$.

6 Một trường hợp về chuyển động trên Trái Đất có các lực quán tính bằng không

Một người lái xe mô tô đèo một bạn gái đi dạo chơi trên chiếc xe của mình, một nguyên mẫu được lắp ráp để bán hạ giá. Khi đạt tới một vận tốc đỉnh cao 296 km . h $^{-1}$, anh ta kêu lên : "Đã tới mức tôi khử được các lực quán tính rồi ! ".

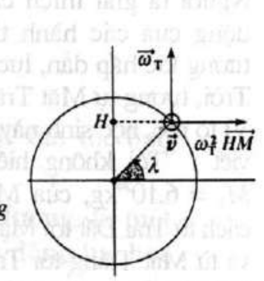
Cuộc phiêu lưu được diễn ra trong bán cầu bắc, hãy xác định vĩ độ của nơi đó, hướng đi của chiếc xe. Làm thế nào tìm lại được kết quả trên nhờ vào hệ quy chiếu địa tâm ?

- *Lời giải*

Ta tìm cách triệt tiêu $\vec{F}_{ie}+\vec{F}_{ic}$

với : $\vec{F}_{ie}=m\omega_T^2\overrightarrow{HM}$

và $\vec{F}_{ic}=-2m\vec{\omega}_T\wedge\vec{v}$.



Chiếc xe phải di chuyển về phía đông tại một điểm có vĩ độ λ sao cho :

$$\cos\lambda=\frac{2v}{\omega_T R_T} \text{ hay } \lambda=69{,}3^0.$$

Có thể kiểm tra thấy rằng các gia tốc của xe trong $\mathcal{R}_T$ *và* $\mathcal{R}_0$ *là giống nhau.*

7 Lại thất bại !

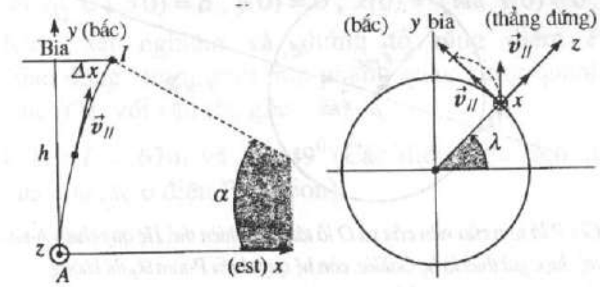
Sẵn có một kính ngắm, một xạ thủ nhắm vào một cái bia (mốc ngắm với dây chữ thập ngang dọc) đặt đúng ở hướng bắc và cách mình một kilômét. Biết vận tốc của viên đạn ($v_0 = 800$ m . s^{-1}), xạ thủ chỉnh lại máy ngắm để tính đến ảnh hưởng của trọng lực. Giả thiết các điều chỉnh đều hoàn hảo và sức cản của không khí không đáng kể, hỏi viên đạn tới đích cách tâm bia bao nhiêu ?

Cho : Vĩ độ của nơi đó bằng $\lambda = 45^0$

• *Lời giải*

Áp dụng hệ thức cơ bản của động lực học cho viên đạn trong $\mathcal{R}_T$, ta có :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - 2m\vec{\omega}_T \wedge \vec{v}\,.$$



Ta chỉ quan tâm đến chuyển động chiếu trong mặt phẳng nằm ngang :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -2\omega_T \sin\lambda\, \vec{e}_z \wedge \vec{v}_{//}\,.$$

Gia tốc vuông góc với quỹ đạo. Quỹ đạo này là một đoạn của vòng tròn (trong mặt phẳng nằm ngang) bán kính

$$\rho = \frac{v_{//}}{2\omega_T \sin\lambda}\,.$$

$v_{//} \approx v_o$ *và* $\Delta x = \rho(1 - \cos\alpha)$ *, với* $\sin\alpha = \dfrac{h}{\rho}$ *do đó:*

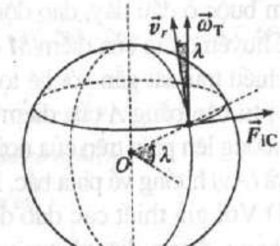
$$\Delta x \approx \frac{h^2}{2\rho} = \frac{h^2\omega_T \sin\lambda}{v_o}\,.$$

Áp dụng số : $\Delta x = 6{,}5$ cm về phía đông.

8 Sự bào mòn các đường ray

Một xe lửa khối lượng $m = 2.10^6$ kg tiến về phía bắc dọc theo một kinh tuyến, với vận tốc 100 km.h^{-1}, trong một vùng có vĩ độ $\lambda = 45^0$ thuộc bán cầu bắc.

Hãy xác định giá trị và phương của lực bên do xe lửa tác dụng lên các đường ray.



• *Lời giải*

$\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega}_T \wedge \vec{v}_r$

Lực này phải bị khử bởi các đường ray : ray bên phải (chếch về phía đông) sẽ bị bào mòn hơn.

$F_{IC} = 2m\omega_T v_r \sin\lambda = 5{,}7$*kN.*

VẬN DỤNG VỐN KIẾN THỨC

9 Sự xẹp hấp dẫn

Một đám mây khí có dạng hình cầu, giả thiết có mật độ khối đều μ, được hình thành bởi các hạt (các chất điểm) lúc đầu đứng im.

Dưới tác dụng của lực hút hấp dẫn giữa các hạt, đám mây này bắt đầu co lại (hiện tượng này gọi là sự xẹp) và kể từ đó, mỗi hạt thu được một vận tốc xuyên tâm. Một nhà vật lí khẳng định rằng, nếu bỏ qua các lực khác thì mỗi hạt sẽ tới tâm O ở cùng một thời điểm và rằng thời gian cần để đi tới đó bằng :

$$t = \left(\frac{3\pi}{32}\mu G\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Bạn nghĩ gì về điều đó ?

Tính t ra năm nếu $\mu = 10^{-19}$kg.m^{-3}

Hướng dẫn : Bằng cách thừa nhận rằng đám mây co lại sao cho một hạt ở bên ngoài không bắt kịp một hạt ở bên trong, ta sẽ tính được trường hấp dẫn tác dụng lên một hạt nhờ định lí GAUSS. Sau đó dùng sự bảo toàn cơ năng của một hạt để thu được phương trình chuyển động xuyên tâm, khi đó thời gian cần tìm được tính toán dưới dạng tích phân.

• *Lời giải*

Giả thiết quỹ đạo $r(t)$ của một hạt (khối lượng m) đã biết và đặt $r_0 = r\,(t = 0)$

Khối lượng nằm ở bên trong quả cầu bán kính $r(t)$ là không đổi và bằng :

$$M_0 = \frac{4}{3}\pi r_o^3 \mu\,.$$

Vậy trường hấp dẫn tại r bằng :

$$\vec{\mathcal{G}}(r) = -G\frac{m_o}{r^2}\vec{e}_r \text{ (định lí Gauss).}$$

Áp dụng sự bảo toàn cơ năng cho hạt này, ta có :

$$\frac{1}{2}mv^2 - Gm\frac{m_o}{r} = -Gm\frac{m_o}{r_o} \text{ với } v = \frac{dr}{dt}$$

$$\text{hay : } \frac{dr}{dt} = -A\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_o}\right] \text{, với } A = \left(\frac{8}{3}\pi r_o^3 \mu G\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Thời gian xẹp t cho bởi (đặt $r = r_0 \sin^2\varphi$) :

$$t = \int_0^{r_o}\left(\frac{rr_0}{r_o - r}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{dr}{A} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2r_o}{A}\sin^2\varphi\, d\varphi$$

$$\text{Suy ra : } t = \left(\frac{3r}{32G\mu}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Áp dụng số : $t = 2{,}1.10^{14}$s $= 6{,}7.10^6$ năm (chấp nhận được đối với thang đo của một ngôi sao).

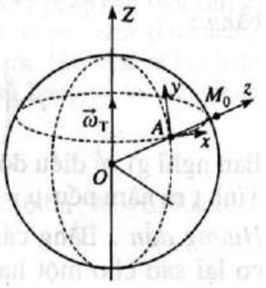
10 * Sự lệch về phía đông nếu dùng hệ quy chiếu địa tâm

Ta đã chứng tỏ rằng khi thả rơi không vận tốc ban đầu một chất điểm từ độ cao h so với mặt đất thì chất điểm này sẽ chạm đất tại một điểm cách đường thẳng đứng của điểm thả rơi một đoạn bằng :

$$\Delta x = \omega_T \cos(\lambda)\left(\frac{g_o}{3}\right)\left(\frac{2h}{g_o}\right)^{\frac{3}{2}}$$

và bị lệch về phía đông (nếu không có nhiễu loạn và bỏ qua sức cản của không khí)

Chứng tỏ rằng, bằng cách dùng hệ quy chiếu địa tâm, ta có thể tìm lại được kết quả trên



• *Lời giải*

Hệ quy chiếu địa tâm $\mathcal{R}_O$ là hệ quy chiếu Galilée. Gọi (A; x,y,z) là hệ tọa độ gắn với $\mathcal{R}_O$.

Trong hệ toạ độ này, một chất điểm được thả rơi không vận tốc ban đầu từ một độ cao h so với mặt đất, lúc t = 0, thỏa mãn :

$$x = 0,\ y = 0,\ z = h,$$
$$v_x = (h+R_T)\,\omega_T \cos\lambda,\ v_y = 0 \text{ và } v_z = 0$$

Áp dụng hệ thức cơ bản của động lực học cho chất điểm trong $\mathcal{R}_O$, cho : $\vec{a}(M) = \vec{\mathcal{G}}_T(M) = -GM_T\dfrac{\vec{OM}}{OM^3}$.

Biết rằng R_T rất lớn hơn x, y hay z, ta thu được :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g_0\cdot\frac{x}{R_T};\ \frac{d^2y}{dt^2} = -g_0\frac{y}{R_T};\ \frac{d^2z}{dt^2} = -g_0\left(1+\frac{z}{R_T}\right),\ \text{với}\ g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

Đặt $\Omega^2 = \dfrac{g_0}{R_T}$. *Ta có các nghiệm sau :*

$$x = (h+R_T)\frac{\omega_T}{\Omega}\cos\lambda\sin\Omega t,\ y = 0 \text{ và } z = -R_T + (h+R_T)\cos\Omega\, t.$$

Nếu chất điểm rơi theo đường thẳng đứng địa phương, nó sẽ đi tới điểm B gắn với R_T, trùng hợp với A lúc t = 0 : $x_B = R_T\omega_T\cos\lambda t$, *t là thời gian rơi xấp xỉ bằng* $\sqrt{\dfrac{2h}{g_0}}$ *(và sao cho* $\Omega t \approx \sqrt{\dfrac{2h}{R_T}} << 1$*).*

Sự lệch về phía đông được biểu diễn bởi :

$$\Delta x = (h+R_T)\frac{\omega_T}{\Omega}\cos\lambda\sin\Omega t - R_T\omega_T\cos\lambda t,\ \text{với}\ t = \sqrt{\frac{2h}{g_0}}.$$

Khi đó, phép khai triển có giới hạn cho :

$$\Delta x = h\omega_T\cos\lambda t - \frac{R_T}{6}\cos\lambda\,\omega_T\Omega^2 t^3 = \omega_T\cos\lambda\left[\sqrt{\frac{2h}{g_0}} - \frac{R_T\Omega^2}{6}\left(\sqrt{\frac{2h}{g_0}}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

hay : $\Delta x = \left(\dfrac{2h}{g_0}\right)^{\frac{3}{2}}\dfrac{\omega_T\cos\lambda}{3}g_0$.

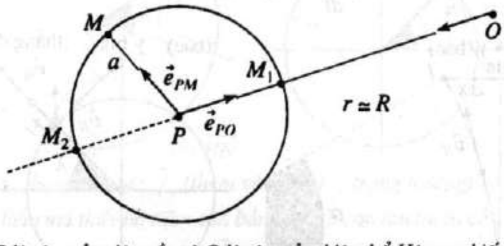
11 ** Tính ổn định nội tại của một viên cầu

Ở đây ta gọi viên cầu là một vật nhỏ hình cầu đồng chất có khối lượng riêng μ .

Một viên cầu như thế đã được bắn ra do phun trào núi lửa bởi một thiên thể A và giả thiết nó chuyển động trong hệ quy chiếu A-tâm của thiên thể, gần bề mặt của thiên thể này. Bằng cách so sánh trường hấp dẫn riêng và số hạng vi sai tạo ra bởi thiên thể ở ngoại vi của viên cầu, hãy thiết lập một điều kiện liên kết các hạt của viên cầu.

Gọi ρ là khối lượng riêng trung bình của thiên thể. Chứng tỏ rằng nếu bất đẳng thức $\mu > 2\rho$ không được nghiệm đúng thì vật có nguy cơ tan rã.

• *Lời giải*



Gọi P là tâm của viên cầu và O là tâm của thiên thể. Hệ quy chiếu A-tâm $\mathcal{R}_0$ được giả thiết là hệ Galilée, còn hệ quy chiếu P-tâm $\mathcal{R}_P$ thì không.

Áp dụng hệ thức cơ bản của động lực học cho một khối lượng δm nằm tại M, cho :

$$\delta m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_P} = \delta m\left(\vec{\mathcal{G}}_P(M) + \vec{\mathcal{G}}_A(M) - \delta m\vec{a}_e(M)\right),\ \text{với :}$$

$$\vec{a}_e(M) = \vec{a}(P)_{/\mathcal{R}_0} = \vec{\mathcal{G}}_A(P),\ \text{suy ra}\ \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_P} = \vec{\mathcal{G}}_P(M) + \left[\vec{\mathcal{G}}_A(M) - \vec{\mathcal{G}}_A(P)\right].$$

Số hạng thứ hai là số hạng vi sai do ảnh hưởng của thiên thể A tạo ra trong $\mathcal{R}_P$.

Nếu số hạng vi sai (xấp xỉ bằng $2G\dfrac{M_A}{r^3}a$ *) nhỏ hơn* $\mathcal{G}_P(M)$.

$\left(\mathcal{G}_P(M) = G\cdot\dfrac{M_P}{a^2}\right)$, *sự liên kết của viên cầu là có thể được ; nghĩa là nếu* $\dfrac{M_P}{a^3} > 2\dfrac{M_A}{R^3}$ *; vì* $M_P = \dfrac{4}{3}\pi a^3\mu$ *và* $M_A = \dfrac{4}{3}\pi R^3\rho$, *nên* $\mu > 2\rho$.

Nếu $\mu < 2\rho$ *viên cầu có thể bị tan rã.*

12 ** Con lắc Foucault

• Cho một con lắc đơn, cấu tạo bởi một sợi dây rất dài *L* có khối lượng không đáng kể, treo vào một điểm cố định *B* của hệ tọa độ trái đất, và một chất điểm *M* khối lượng m buộc ở đầu dây, dao động. Gọi λ là vĩ độ của nơi đó. Chuyển động của điểm *M* được nghiên cứu trong hệ quy chiếu trái đất gắn với hệ tọa độ *(A; x,y,z)* có gốc nằm tại vị trí cân bằng *A* của điểm *M, (Az)* là đường thẳng đứng hướng lên phía trên của nơi đó, *(Ax)* hướng về phía đông, và *(Ay)* hướng về phía bắc. Bỏ qua mọi ma sát.

1) Với giả thiết các dao động nhỏ xung quanh đường thẳng đứng địa phương *(Az)*, chứng tỏ rằng trong phép gần đúng bậc nhất, chuyển động được thực

hiện trong mặt phẳng *(A; x,y)* và tổng hợp lực tác dụng lên chất điểm bằng :

$$\vec{T} + m\vec{g} = -m\omega_0^2\,\overrightarrow{AM} \text{ với } \omega_0^2 = \frac{g}{L}.$$

2) Từ đó suy ra phương trình vectơ của chuyển động chiếu trên mặt phẳng nằm ngang *(A; x, y)* có dạng :

$$\vec{a}(M) = -\omega_0^2\,\overrightarrow{AM} - 2\omega_T \sin\lambda\,\vec{e}_z \wedge \vec{v}(M)$$

(phương trình gần đúng thường dùng của con lắc Foucault)

3) Đặt : $\overrightarrow{AM} = \vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$,

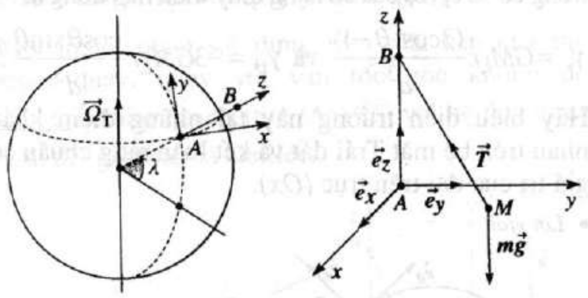
$\Omega_F = \omega_T.\sin\lambda$ và $u = x + iy$ (tọa vi của điểm *M*).

Hãy xác định phương trình mà *u* là nghiệm. Giải phương trình đó với các điều kiện ban đầu sau : lúc $t = 0 : x(0) = a$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ và $\dot{y}(0) = 0$.

Khảo sát nghiệm và chứng tỏ rằng điểm *P* "dao động" trong một mặt phẳng quay xung quanh trục *(Oz)* với vận tốc góc $-\Omega_F$.

Cho : $L = 67$m và $\lambda = 49^0$ (Các điều kiện lịch sử của con lắc ở điện Panthéon).

- *Lời giải*



1) *Áp dụng hệ thức cơ bản của động lực học cho khối lượng m trong hệ quy chiếu trái đất cho ta :*

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_T} = m\vec{g} + \vec{T} - 2m\vec{\omega}_T \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_T}.$$

Dùng các kí hiệu "//" cho các vectơ nằm trong mặt phẳng(A; x, y) và "⊥" cho các vectơ hướng theo (Oz).

$$m\vec{a}_{//} = \vec{T}_{//} - 2m(\vec{\omega}_{T\perp} \wedge \vec{v}_{//} + \vec{\omega}_{T//} \wedge \vec{v}_{\perp}) \text{ và}$$

$$m\vec{a}_{\perp} = \vec{T}_{\perp} + m\vec{g} - 2m\vec{\omega}_{T//} \wedge \vec{v}_{//}.$$

$\vec{a}_{\perp}$ *và* $\vec{\omega}_{//} \wedge \vec{v}_{//}$ *là nhỏ, vào bậc không, ta có :* $\vec{T}_{\perp} + m\vec{g} = 0$.

Suy ra : $\vec{T} + m\vec{g} = \vec{T}_{//} = -m\vec{g}\cdot\dfrac{\overrightarrow{AM}}{L} = -m\omega_0^2\,\overrightarrow{AM}$, *với* $\omega_0^2 = \dfrac{g}{L}$.

2) *Bỏ qua* $\vec{v}_{\perp}$ *trước* $\vec{v}_{//}$, $\vec{a}(M) = -\omega_0^2\,\overrightarrow{AM} - 2\omega_T \sin\lambda\,\vec{e}_z \wedge \vec{v}(M)$.

3) *Với các kí hiệu đã nêu :*

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + 2\Omega_F \dot{y} \text{ và } \ddot{y} = -\omega_0^2 y - 2\Omega_F \dot{x}.$$

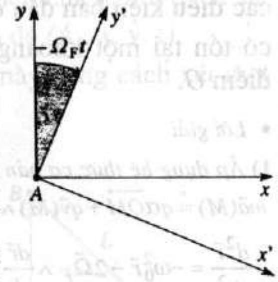
hay : $\ddot{u} + 2i\Omega_F\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$ *ta có nghiệm*

(với $\Omega^2 = \omega_0^2 + \Omega_F^2 \approx \omega_0^2$ *) :*

$$u = a\left[\cos\omega_0 t + i\frac{\Omega_F}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right]e^{-i\Omega_F t}.$$

Nếu ta đứng trong hệ quy chiếu R' quay với $-\Omega_F$ *xung quanh trục (Oz), ta thu được* $u' = a\cos\omega_0 t + i\dfrac{\Omega_F}{\omega_0}\sin\omega_0 t$, *phương trình của một elip dẹt, thực tế trùng với trục (Ax')* ($\Omega_F << \omega_0$).

Như vậy, ta có một chuyển động dao động quay với vận tốc $-\Omega_F$ *trong hệ quy chiếu trái đất.*



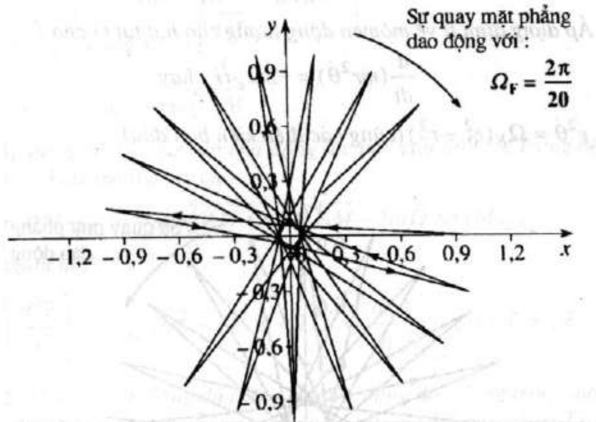
Áp dụng số : Ở Paris mặt phẳng dao động thực hiện một vòng trong 31 giờ 47 ph.

Sơ đồ sau cho hình dáng của quỹ đạo trong hệ quy chiếu trái đất; các giá trị có được là :

$$\omega_0 = 2\pi \text{ và } \Omega_F = \frac{\omega_0}{20},$$

mặc dầu trong cơ học trái đất, ta có :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{16{,}4}\,rad.s^{-1} \text{ và } \Omega_F = 5{,}5.10^{-5}\,rad.\,s^{-1}.$$



Nghiệm lại bằng đồ thị : chu kì của dao động tử gần bằng $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 1$. *Trong* $5T_0$, *mặt phẳng dao động của con lắc đã quét một góc* $\dfrac{\pi}{2}$ *; như vậy nó sẽ thực hiện đúng một vòng trong* $20T_0$, *điều này tương ứng tốt với một vectơ quay :*

$$\Omega_F = \frac{2\pi}{20T_0} = \frac{2\pi}{20}\,(T_0 = 1).$$

13 ** Tương tự từ của con lắc FOUCAULT

Một hạt có khối lượng *m*, có điện tích *q* chuyển động trong một mặt phẳng *(xOy)* trong đó có một điện trường tĩnh $\vec{E} = -\alpha\overrightarrow{OM}$ và một từ trường tĩnh đều $\vec{B} = B.\vec{e}_Z$. Bỏ qua số hạng trọng lực và mọi ma sát.

1) Hãy thiết lập phương trình chuyển động của hạt và đối chiếu với phương trình hai chiều của con lắc FOUCAULT trong trường hợp $\alpha q > 0$.

2) Bằng cách nghiên cứu các tính chất của mômen động lượng tại O của hạt, hãy thiết lập một tích phân đầu của chuyển động và chứng tỏ rằng, với các điều kiện ban đầu đã biết (với $\vec{L}_0$ khác không), có tồn tại một khoảng cách cực tiểu tiếp cận với điểm O.

• *Lời giải*

1) *Áp dụng hệ thức cơ bản của động lực học cho hạt, ta có :*

$m\vec{a}(M) = q\alpha\overrightarrow{OM} + q\vec{v}(M) \wedge B.\vec{e}_Z$ *, hay có thể viết là :*

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\omega_0^2\vec{r} - 2\vec{\Omega}_F \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}, \text{ với } \omega_0^2 = \frac{\alpha q}{m} \text{ và } \vec{\Omega}_F = \frac{qB}{2m}\vec{e}_z.$$

2) *Từ lực không thực hiện công. Tồn tại một bất biến, suy ra từ sự bảo toàn cơ năng của hạt này :*

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2.\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}\alpha q r^2 = cte$$

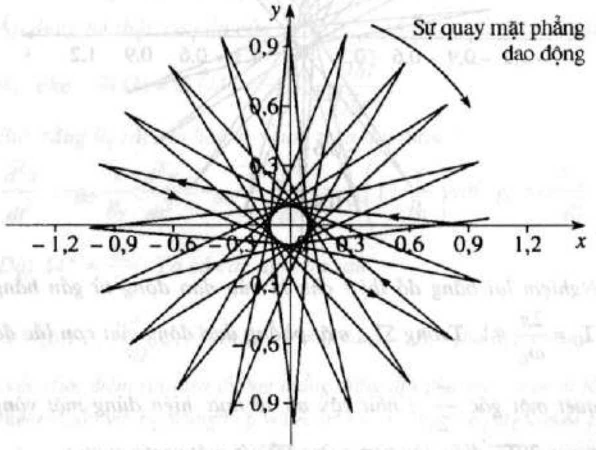
Với, lúc $t = 0$, $r = r_0$, $\dot{r}(0), \theta(0) = 0$ và $\dot{\theta}(0) = 0$ ta thu được:

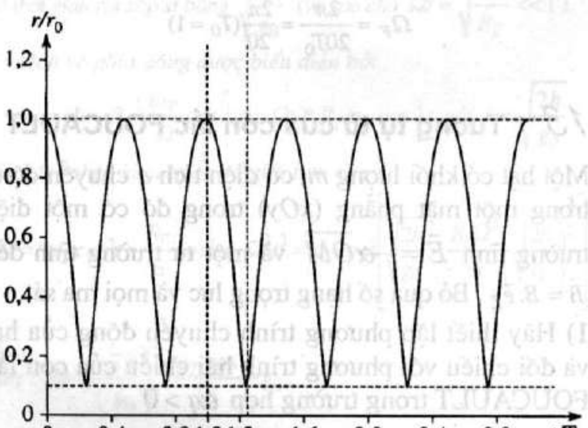
$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \omega_0^2(r_0^2 - r^2), (r \le r_0).$$

Áp dụng định lí về mômen động lượng cho hạt tại O cho :

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = -2\Omega_F r\dot{r}, \text{ hay}$$

$r^2\dot{\theta} = \Omega_F(r_0^2 - r^2)$ *(cùng các điều kiện ban đầu).*





Khử θ đi, ta có :

$$\dot{r}^2 + \Omega_F^2\frac{(r_0^2 - r^2)^2}{r^2} + \omega_0^2(r^2 - r_0^2) = 0.$$

$\dot{r}^2 > 0$; $r_0^2 - r^2 > 0$, *và bằng cách khử nghiệm đương nhiên* $r = r_0$ *:*

$$r^2 \ge \frac{\Omega_F^2}{\omega_0^2 + \Omega_F^2}r_0^2, \text{ tức } \frac{r_0}{\sqrt{1 + \dfrac{\omega_0^2}{\Omega_F^2}}} < r < r_0.$$

Bất đẳng thức trên có thể cho ta thấy rõ có r_{min} nếu giả thiết lấy $\omega_0 = 10\Omega_F$ *:*

$$r_{\min} = \frac{r_0}{\sqrt{1+100}} \approx \frac{r_0}{10}.$$

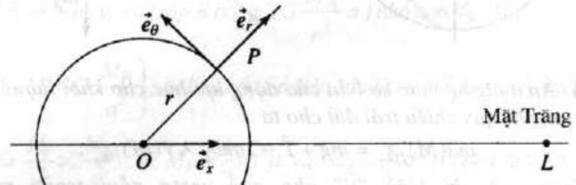
14 Số hạng vi sai thủy triều và lưỡng cực tĩnh điện

Bằng cách khai triển rõ số hạng vi sai mặt trăng, ở đây kí hiệu γ, tại một điểm P gần Trái Đất, vị trí được xác định bởi các tọa độ cầu r, θ và trục (Ox), hãy chứng tỏ rằng, với giả thiết $r << d = OL$, ta có thể tính được trường này bằng phép loại suy với trường tĩnh điện tạo ra bởi một lưỡng cực điện. Từ đó suy ra, các thành phần trong cơ sở e_r, e_θ của số hạng thủy triều mặt trăng là :

$$\gamma_r = GM_L r\frac{(3\cos^2\theta - 1)}{d^3} \text{ và } \gamma_\theta = -3GM_L r\frac{\cos\theta\sin\theta}{d^3}.$$

Hãy biểu diễn trường này tại những điểm khác nhau trên bề mặt Trái đất và kết luận rằng chuẩn có giá trị cực đại trên trục (Ox).

• *Lời giải*



Số hạng vi sai mặt trăng hay số hạng thủy triều do Mặt Trăng tạo ra cho bởi :

$$\vec{\gamma}(P) = \vec{\mathscr{G}}_L(P) - \vec{\mathscr{G}}_L(O) = GM_L\left(\frac{\overrightarrow{PL}}{PL^3} - \frac{\overrightarrow{OL}}{OL^3}\right), OP = r << OL = d.$$

Điện trường tĩnh tạo ra tại L bởi hai điện tích (-q đặt tại O, và +q đặt tại P) bằng :

$$\vec{E}(L) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\overrightarrow{PL}}{PL^3} - \frac{\overrightarrow{OL}}{OL^3}\right)$$

Với các phép gần đúng $OP = r << OL = d$, nó biểu diễn điện trường tạo ra tại L bởi một lưỡng cực điện $\vec{p} = q\overrightarrow{OP}$, đặt tại O, nghĩa là :

$$\vec{E}(L) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d^3}\left[(3\vec{p}.\overrightarrow{OL})\frac{\overrightarrow{OL}}{d^2} - \vec{p}\right].$$

Bằng phép loại suy với trường này :

$$\vec{\gamma}(P) = G\frac{M_L}{d^3}(3\overrightarrow{OP}.\vec{e}_x - \overrightarrow{OP})$$

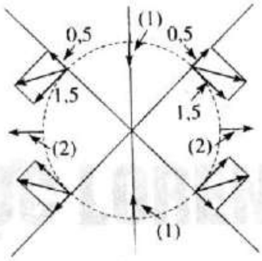
Suy ra :

$$\vec{\gamma}(P)\left|\begin{array}{l}\gamma_0(3\cos^2\theta - 1)\,\vec{e}_r\\ -3\gamma_0\cos\theta\sin\theta\,\vec{e}_\theta\end{array}\right.$$

Và, hơn nữa

$$\gamma(P) = \gamma_0(1+3\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}},$$

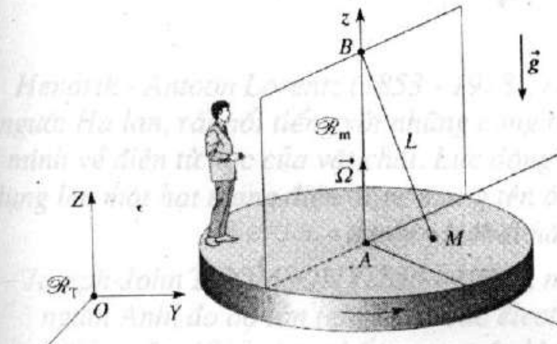
với $\gamma_0 = \dfrac{GM_L}{d^3 r}$



θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
γ_r/γ_0	2	0,5	-1	0.5	2
γ_θ/γ_0	0	-1,5	0	1,5	0
γ/γ_0	2	1,58	1	1,58	2

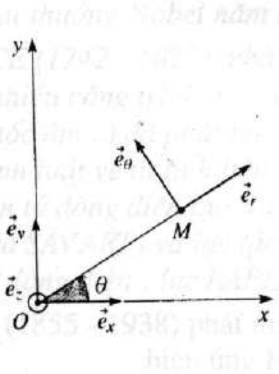
15 * Chuyển động của một con lắc nghiên cứu trong một hệ quy chiếu quay

Một người quan sát đứng trên mặt sàn của một mâm quay, quay với vận tốc góc không đổi $\vec{\Omega} = \Omega\vec{e}_z$ xung quanh trục *(Az)* đối với hệ quy chiếu trái đất giả thiết là Galilée.



Mâm đang quay

Người này quan sát chuyển động của một chất điểm *M* có khối lượng *m*, treo tại *B* nhờ một sợi dây dài *L* có khối lượng không đáng kể (*B* là cố định trong khi mâm quay); *M* thực hiện các chuyển động nhỏ xung quanh vị trí cân bằng *A*.



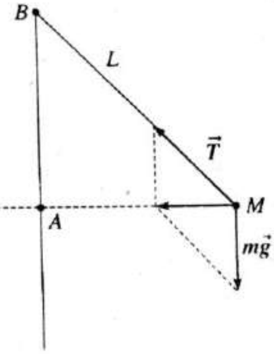
Đặt $\omega_0^2 = \dfrac{g}{L}$.

1) Hãy thiết lập phương trình vi phân của chuyển động của *M* trong hệ quy chiếu của người quan sát ($\mathcal{R}_m$) xác định bởi hệ trục tọa độ *(A ; x, y, z)*.

2) Nghiệm lại phương trình này bằng cách xét một chuyển động đã biết.

• *Lời giải*

1) *Chất điểm M chịu tác dụng của lực căng* $\vec{T}$ *của dây và trọng lượng của nó* $m\vec{g}$. *M thực hiện các chuyển động nhỏ xung quanh trục (Az), thực tế M di chuyển trong một mặt phẳng nằm ngang.*



Từ đó :

$$|\vec{T}| = mg$$

và $\quad \vec{T} + m\vec{g} = -mg\dfrac{\overrightarrow{AM}}{L}$,

hay : $\vec{T} + m\vec{g} = -m\omega_0^2\overrightarrow{AM}$.

Áp dụng hệ thức cơ bản của động lực học cho điểm M trong hệ quy chiếu mâm quay cho :

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_m} = -m\omega_0^2\overrightarrow{AM} + m\Omega^2\overrightarrow{AM} - 2m\vec{\Omega}\wedge\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_m} \ldots;$$

nghĩa là :

$$\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{/\mathcal{R}_m} = -(\omega_0^2 - \vec{\Omega}^2)\vec{r} - 2\vec{\Omega}\wedge\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_m}, \text{ với } \vec{r} = r.\vec{e}_r.$$

2) *Một chuyển động đã biết : chuyển động dao động trong một mặt phẳng đối với một người quan sát của hệ quy chiếu Trái đất, cho :*

$$r = r_0\cos\omega_0 t \text{ và } \theta = -\Omega t.$$

Bằng cách khai triển và chiếu trên $\vec{e}_r$ *và* $\vec{e}_\theta$, *ta có :*

$$\begin{cases}\dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 = -(\omega_0^2 - \Omega^2)r + 2\Omega r\dfrac{d\theta}{dt}\\[2mm] 2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\theta}{dt} + r\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -2\Omega\dfrac{dr}{dt}\end{cases}$$

Sự nghiệm lại là đương nhiên.

Chú ý : Phương trình thu được

$\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -(\omega_0^2 - \Omega^2)r - 2\Omega\wedge\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ *gần giống như phương trình liên quan đến vận động của con lắc FAUCAULT (xem bài tập 12) :*

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\omega_0^2\vec{r} - 2\vec{\Omega}_F\wedge\frac{d\vec{r}}{dt},$$

mà lời giải có thể được trình bày giống như một con lắc đơn dao động với tần số góc $\sqrt{\omega_0^2 + \Omega_F^2}$ *và mặt phẳng dao động quay với vận tốc góc* $-\vec{\Omega}_F$.

LỰC LORENTZ

3

Lịch sử

Hendrik - Antoon Lorentz (1853 - 1928), nhà vật lí người Hà lan, rất nổi tiếng với những công trình của mình về điện từ học của vật chất. Lực động điện tác dụng lên một hạt mang điện được mang tên ông; Giải thưởng Nobel năm 1902.

Joseph-John THOMSON (1856 - 1940), nhà vật lí người Anh, đo độ lớn (e/m) của các êlectron năm 1891 ; năm 1913, ông chế tạo ra máy khối phổ kí chứng tỏ sự tồn tại của các đồng vị (phương pháp các parabol). Giải thưởng Nobel năm 1906.

Pierre-Simon LAPLACE (1742 - 1827), nhà vật lí người Pháp, tác giả của nhiều công trình, (cơ học vũ trụ, lí thuyết về thế, vận tốc âm...) đã phát biểu một cách chính xác các định luật về từ tĩnh liên quan đến từ trường do các phần tử dòng điện tạo ra (hiện nay là định luật BIOT và SAVART) và lực tác dụng lên một phần tử dòng điện : lực LAPLACE.

Edwin - Herbert HALL (1855 - 1938) phát minh ra hiệu ứng HALL

MỤC TIÊU

- Chuyển động của các hạt mang điện trong điện trường hay từ trường không phụ thuộc thời gian.
- Mô hình về sự dẫn điện tử trong các kim loại.
- Lực LAPLACE tác dụng lên một phần tử của dây dẫn.
- Nguồn gốc vật lí của trường HALL.

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

- Cơ học chất điểm.

Ta sẽ luôn đặt cơ học cổ điển trong các hệ quy chiếu Galilée.

Tương tác điện từ

1.1. Lực LORENTZ

1.1.1. Thiết lập

Chính LORENTZ là người đầu tiên mô tả lực điện từ tác dụng lên một hạt mang điện tích.

Lực điện từ tác dụng lên một hạt mang điện tích q, có khối lượng m, ở thời điểm t đang ở điểm M trong hệ quy chiếu Galilée $\mathcal{R}$, trong đó có một điện trường $\vec{E}(M,t)$ và một từ trường $\vec{B}(M,t)$, và di chuyển với vận tốc $\vec{v}(M,t)_{/\mathcal{R}}$, được tính bởi công thức :

$$\vec{F}_{Lo} = q[\vec{E}(M,t) + \vec{v}(M,t)_{/\mathcal{R}} \wedge \vec{B}(M,t)] .$$

Trong trường hợp các trường không đổi và không phụ thuộc thời gian, ta có :

$$\vec{F}_{Lo} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) .$$

Lực LORENTZ này thể hiện một trong các tương tác cơ bản của vật lí học. Miền có hiệu lực của nó không giới hạn trong khuôn khổ kiến thức hiện nay.

Các trường $\vec{E}$ và $\vec{B}$ đưa vào đây được tạo ra bởi các nguồn (điện tích và dòng điện) và được xác định đối với hệ quy chiếu $\mathcal{R}$.

Cũng như mọi lực tương tác, $\vec{F}_{Lo}$ không phụ thuộc vào hệ quy chiếu mặc dầu vận tốc có phụ thuộc hệ quy chiếu. Như vậy, các trường $\vec{E}$ và $\vec{B}$ có thể phụ thuộc hệ quy chiếu. Chú ý rằng các trường $\vec{E}$ và $\vec{B}$ có bản chất khác nhau ; tỉ số $\dfrac{E}{B}$ có thứ nguyên của một vận tốc. Trong hệ đơn vị quốc tế SI, E tính bằng vôn trên mét (Vm^{-1}) và B tính bằng tesla (T).

Điện tích q là một tính chất riêng của hạt : nó độc lập với thời gian và với hệ quy chiếu.

Áp dụng 1

Sự thay đổi hệ quy chiếu đối với $\vec{E}$ và $\vec{B}$

Cho hai hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ và $\mathcal{R}'$. Gọi $\vec{u}$ là vận tốc của $\mathcal{R}'$ đối với $\mathcal{R}$. Gọi $\vec{v}$ và $\vec{v}'$ là các vận tốc của một hạt mang điện trong $\mathcal{R}$ và $\mathcal{R}'$. Bằng cách thể hiện lực trong cơ học Newton không phụ thuộc vào hệ quy chiếu nghiên cứu, hãy tìm các hệ thức nối liền các trường $\vec{E}'$ và $\vec{B}'$ trong $\mathcal{R}'$ liên kết với các trường $\vec{E}$ và $\vec{B}$ trong $\mathcal{R}$, đối với một vị trí cho trước.

Biết rằng $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$, ta phải có :

$$\vec{F}_{Lo} = q[\vec{E} + (\vec{v}' + \vec{u}) \wedge \vec{B}]$$
$$= q(\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}').$$

Đồng nhất theo $\vec{v}'$ của hai biểu thức cho :

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B} \text{ và } \vec{B}' = \vec{B}$$

Các hệ thức trên diễn tả sự thay đổi hệ quy chiếu đối với các trường điện từ trong khuôn khổ của cơ học cổ điển.

1.1.2. So sánh với lực hấp dẫn

Sự so sánh giữa các lực tĩnh điện và hấp dẫn đã được nêu ra trong *chương 2*, Cơ học II : tỉ số rất lớn thu được giải thích lí do sau này ta luôn bỏ qua lực hấp dẫn (và dĩ nhiên trọng lực).

1.2. Các giả thiết cho sự nghiên cứu

Xét chuyển động của hạt trong những trường $\vec{E}$ và (hay) $\vec{B}$ không phụ thuộc thời gian (hoặc rất ngoại lệ là có biến thiên nhất thời đủ chậm để có thể coi là các trường tĩnh ở mọi thời điểm)

Ta sẽ dùng một tính chất của các điện trường không phụ thuộc thời gian.

Có một hàm số vô hướng V(M) sao cho :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V .$$

<u>*Chú ý :*</u>

Hầu hết các thí nghiệm và bài tập nghiên cứu giả thiết thực hiện được một chân không cao (áp suất dưới 1 paxcan).

Hệ thức cơ bản của cơ học áp dụng cho một hạt khối lượng m, điện tích q có biểu thức :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Khối lượng *m* và điện tích *q* tham dự vào hệ thức qua tỉ số $\frac{q}{m}$. Do vậy, khi nghiên cứu chuyển động, ta không cần tìm cách xác định riêng rẽ *q* và *m*.

2 Chuyển động của một hạt mang điện trong các trường $\vec{E}$ và (hay) $\vec{B}$

2.1. Chỉ có trường $\vec{E}$

2.1.1. Vai trò gia tốc của một điện trường

Khi một điện tích *q* di chuyển trong một điện trường tĩnh $\vec{E} = -\overrightarrow{gradV}$, nó chịu lực tác dụng :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad(qV)} ,$$

lực này xuất xứ từ thế năng $\mathscr{E}_P = qV$.

Cơ năng $\mathscr{E}_M = \frac{1}{2}mv^2 + qV$ được bảo toàn ; ta thu được :

$$v^2(M_2) = v^2(M_1) + 2\frac{q}{m}(V_1 - V_2) .$$

Giả thiết hạt đi từ điểm *O* có thế năng không (mốc thế năng) với vận tốc bằng không, động năng của hạt tại điểm M bằng :

$$\mathscr{E}_K(M) = -qV(M).$$

Khi đó, hạt này có một động năng có thể biểu thị bằng êlectrôn-vôn (*kí hiệu* : eV)

Chú ý rằng với một *êlectrôn* (q = - e), ta phải có :

$$V(M) > 0.$$

Áp dụng 2

Năng lượng và vận tốc của một êlectrôn

Biết rằng 1eV = 1,6.10^{-19}J, hãy tính năng lượng (ra eV) và vận tốc của một êlectrôn khi nó được tăng tốc bởi một hiệu điện thế : V = 10 kV.

Động năng bằng $\mathscr{E}_K = +eV = 10\text{keV}$

($q = -e = -1{,}6.10^{-19}$C)

Vận tốc $v = \left(\sqrt{\dfrac{2e}{m}.V}\right)^{\frac{1}{2}}$, với m = 9,1.10^{-31}kg,

$v = 1{,}88.10^5\text{ms}^{-1}$.

Chú ý :

Năng lượng khối (thuyết tương đối) của điện tử cho bởi công thức $\mathscr{E} = mc^2$, tức có giá trị khoảng:

$$\mathscr{E} = 511\text{keV}.$$

Chừng nào thế tăng tốc còn thấp hơn 500 kV nhiều, chừng đó lí thuyết cổ điển vẫn được dùng để tính vận tốc .

Với V = 50 kV (năng lượng $eV = \dfrac{mc^2}{10}$), các phép tính cổ điển và tương đối tính lần lượt cho:

$$v_{\text{cổ điển}} = 1{,}33.10^8\ \text{m.s}^{-1}$$

và $v_{\text{tương đối}} = 1{,}24.10^8\ \text{m.s}^{-1}$

(sai số tương đối khoảng 7%).

Ta nên thoả thuận, đó là giới hạn trên không được vượt quá.

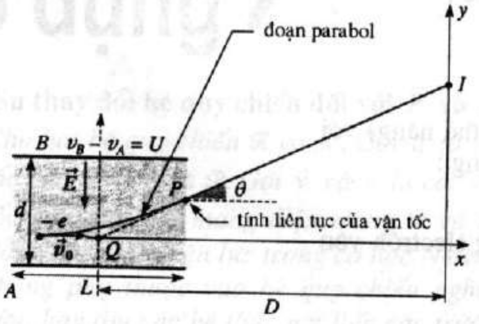
Những nhận xét tương tự có thể áp dụng cho prôtôn, nhưng năng lượng khối (năng lượng ứng với khối lượng) của prôtôn có giá trị cỡ MeV, nên cách xử lí cổ điển cho phép tiến hành với các điện thế tới 100kV (về giá trị tuyệt đối).

2.1.2. Chuyển động trong một điện trường đều $\vec{E}$ và không phụ thuộc thời gian

Áp dụng 3

Sự lệch tĩnh điện trong một tụ điện phẳng

Cho một hạt khối lượng m, điện tích q đi qua khoảng giữa hai bản của một tụ điện phẳng; hạt trước đó đã được tăng tốc đi vào O với vận tốc ban đầu $\vec{v}_O = v_O.\vec{e}_x$.



Hình 1. *Sự lệch tĩnh điện*

Giữa các bản kim loại có chiều dài L , và khoảng cách d, có một hiệu điện thế U > 0. Giả thiết trong khoảng không gian giữa các bản điện trường tĩnh là đều và bằng $\vec{E} = -\dfrac{U}{d}\vec{e}_y$, ngoài các bản điện trường bằng không.

Giả thiết hạt không gặp một trong các bản của tụ điện, hãy xác định quỹ đạo của êlectrôn và điểm chạm của êlectrôn trên một màn huỳnh quang đặt ở hoành độ $x = D + \dfrac{L}{2}$.

Hệ thức cơ bản của động lực học (cơ học cổ điển) $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}$ cho :

$\dfrac{dv_x}{dt} = 0$, vậy $v_x = v_0$ và $x = v_0t$

(gốc thời gian là lúc qua điểm O) .

$$\frac{dv_y}{dt} = q\frac{E}{m} = \frac{eU}{md}, \text{ hay } v_y = \frac{eU}{md}t,$$

sau đó : $y = \frac{1}{2}\frac{eU}{md}t^2$ (khi $x < L$). Trong không gian giữa các bản, quỹ đạo là một đoạn parabol có phương trình

$$y = \frac{1}{2}\frac{eU}{mv_0^2}x^2.$$

Tại điểm P, $x = L$, hạt đi ra khỏi trường $\vec{E}$ và quỹ đạo của nó trở thành đường thẳng. Tính liên tục của vectơ vận tốc tại P :

$$\left(v_{xp} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_p = v_0 \text{ và } v_{yp} = \left(\frac{dy}{dt}\right)_p = \frac{L}{d}\frac{eU}{mv_0} \right)$$

cho độ dốc của quỹ đạo bằng :

$$\tan\theta = \left(\frac{dy}{dx}\right)_P = \frac{L}{d}\frac{eU}{mv_0^2} = \frac{2}{L}y_P.$$

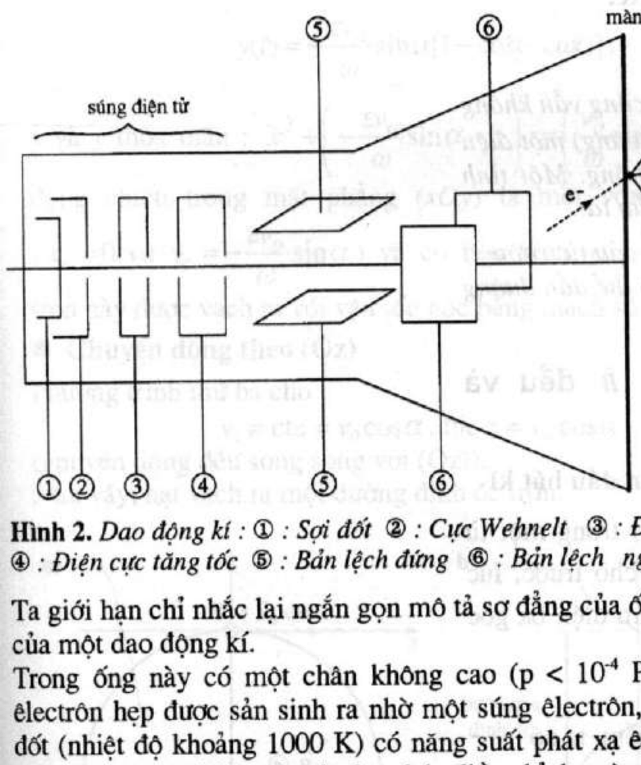
Phương trình của đường thẳng cho bởi :

$$y = \frac{L}{d}\frac{eU}{mv_0^2}\left(x - \frac{L}{2}\right) \text{ (PI đi qua } Q\left(\frac{L}{2}, 0\right)\text{)}.$$

Do vậy điểm chạm I trên màn huỳnh quang có tung độ $y_I = \frac{L}{d}\frac{eU}{mv_0^2}D$ (chú ý rằng $y_I = y_P\frac{D}{L/2}$).

Sự lệch này phụ thuộc vào U (áp dụng vào dao động kí) và động năng $\frac{1}{2}mv_0^2$ của hạt tới : những hạt có cùng điện tích và động năng ban đầu giống nhau đều chịu cùng một độ lệch.

■ Nguyên lí hoạt động của một dao động kí tương tự



Hình 2. *Dao động kí : ① : Sợi đốt ② : Cực Wehnelt ③ : Điện cực tụ tiêu ④ : Điện cực tăng tốc ⑤ : Bản lệch đứng ⑥ : Bản lệch ngang.*

Ta giới hạn chỉ nhắc lại ngắn gọn mô tả sơ đẳng của ống tia âm cực của một dao động kí.

Trong ống này có một chân không cao ($p < 10^{-4}$ Pa). Chùm tia êlectrôn hẹp được sản sinh ra nhờ một súng êlectrôn, gồm một sợi đốt (nhiệt độ khoảng 1000 K) có năng suất phát xạ êlectrôn mạnh, một điện cực gọi là *wehnelt* cho phép điều chỉnh cường độ của dòng êlectrôn và các điện cực tụ tiêu và tăng tốc (thấu kính điện tử).

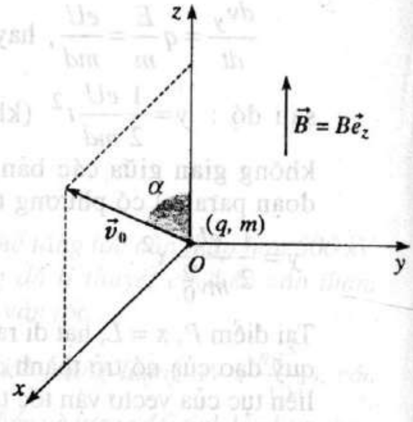
Sau đó các êlectrôn đi qua những bản lệch đứng và lệch ngang. Khi các êlectrôn đi qua các bản đặt dưới một hiệu điện thế U_V, chúng bị lệch thẳng đứng và ta đã chứng minh trước đây độ lệch này tỉ lệ với hiệu điện thế U_V.

Tương tự, khi qua các bản thẳng đứng, độ lệch ngang tương ứng tỉ lệ với hiệu điện thế U_H đặt vào các bản. Trên màn, vết của êlectrôn (chấm sáng) thể hiện các độ lệch này :

$$X = K_1 U_H \text{ và } Y = K_2 U_V .$$

Ta sẽ đưa vào các bài tập thí nghiệm ứng dụng của tính chất này.

▸ **Để luyện tập : BT 1.**



Hình 3. *Chuyển động của một hạt trong từ trường.*

2.2. Chỉ có trường $\vec{B}$

2.2.1. Tính chất của chuyển động trong trường $\vec{B}$ dừng

Một êlectrôn trong một từ trường $\vec{B}$ không phụ thuộc thời gian (dừng), chuyển động chỉ dưới tác dụng của từ lực $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ (cũng thường gọi là lực LORENTZ)

Công suất của lực này bằng không, vì :

$$\vec{F}.\vec{v} = (q\vec{v} \wedge \vec{B}).\vec{v} = 0 ,$$

(tích hỗn hợp với hai vectơ thẳng hàng)

Công của từ lực $\vec{F} = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$ tác dụng lên một hạt bằng không.
Động năng của hạt này bằng không đổi (định lí về động năng).
Trong khi chuyển động, chuẩn (độ lớn) vận tốc của hạt không đổi

$$\frac{d\mathscr{E}_K}{dt} = \vec{F}.\vec{v} = 0 \text{, vậy } \mathscr{E}_K = \text{cte và } v = \text{cte.}$$

Chú ý :

• *Nếu $\vec{B}$ phụ thuộc thời gian $\vec{B} = \vec{B}(M,t)$ thì từ lực cũng vẫn không thực hiện công, nhưng lại xuất hiện (hiện tượng cảm ứng) một điện trường mà công suất của nó nói chung là khác không. Một tình huống như thế nằm ngoài các giả thiết nghiên cứu của ta.*

• *Từ đó, không nên kết luận tính vô dụng của vai trò của từ trường : từ trường làm lệch các hạt mang điện và như vậy có thể dẫn đường chúng hoặc giam chúng trong các miền nào đó.*

2.2.2. Chuyển động trong một trường $\vec{B}$ đều và không phụ thuộc thời gian

2.2.2.1. Trường hợp tổng quát của một vận tốc ban đầu bất kì

Ta hãy nghiên cứu chuyển động của một hạt *(q,m)* trong một từ trường tĩnh $\vec{B} = B\vec{e}_z$ $(B > 0)$ đều, trong một miền cho trước, lúc $t = 0$ (vận tốc ban đầu $\vec{v}_o$) hạt nằm ở gốc O của tam diện ba góc vuông $(O; x, y\, z)$.

Đặt $\vec{v}_o = v_o\vec{e}_o = v_o(\sin\alpha.\vec{e}_x + \cos\alpha.\vec{e}_z)$.

Áp dụng hệ thức cơ bản của động lực học cho chất điểm, ta có :

$$\frac{md\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge B\vec{e}_z .$$

Đặt $q = \varepsilon$ e ($\varepsilon = +1$ đối với một prôtôn và $\varepsilon = -1$ đối với một êlectrôn).

Ta đưa vào đại lượng $\omega = \dfrac{eB}{m}$ có thứ nguyên là nghịch đảo của thời gian và gọi là *mạch số xyclôtron.*

Ta thu được :

$$\frac{dv_x}{dt} = \varepsilon\omega v_y\,,\ \frac{dv_y}{dt} = -\varepsilon\omega v_x \text{ và } \frac{dv_z}{dt} = 0\,.$$

■ **Chuyển động chiếu trên mặt phẳng (xOy)**

Lấy tích phân theo thời gian hai phương trình đầu, ta có :

$$v_x = \varepsilon\omega y + v_o \sin\alpha \text{ và } v_y = -\varepsilon\omega x\,.$$

Thay v_x và v_y vào các phương trình trên và lấy tích phân một lần nữa, nhưng cũng có hiệu quả, nếu đưa vào biến số $\xi = x + iy$, biểu diễn *tọa vị* của hình chiếu vuông góc của vectơ $\overrightarrow{OM}$ (vectơ vị trí của hạt) xuống mặt phẳng (xOy).

Vì $\dfrac{d\xi}{dt} = v_x + iv_y$ ta có $\dfrac{d\xi}{dt} = -\varepsilon i\omega\xi + v_o \sin\alpha$, mà nghiệm là :

$$\xi = -i\frac{\varepsilon v_o}{\omega}\sin\alpha + A\exp(-i\varepsilon\omega t)\,.$$

Lúc t = 0 , ξ = 0, vậy $A = i\dfrac{\varepsilon v_o}{\omega}\sin\alpha$ và $\xi = i\dfrac{\varepsilon v_o}{\omega}\sin\alpha[\exp(-i\varepsilon\omega t) - 1]$.

Suy ra các phương trình chuyển động :

$$x(t) = -\frac{\varepsilon v_o}{\omega}\sin\alpha\sin(-\varepsilon\omega t)$$

$$y(t) = -\frac{\varepsilon v_o}{\omega}\sin\alpha[1 - \cos(-\varepsilon\omega t)]\,.$$

x và y thỏa mãn : $x^2 + \left(-\dfrac{\varepsilon v_o}{\omega}\sin\alpha - y\right)^2 = \left(\dfrac{v_o}{\omega}\sin\alpha\right)^2$: chuyển động chiếu trong mặt phẳng (xOy) là một vòng tròn tâm C ($x_c = 0$ và $y_c = -\dfrac{\varepsilon v_o}{\omega}\sin\alpha$) và có bán kính $\rho = \dfrac{v_o}{\omega}\sin\alpha$. Vòng tròn này được vạch ra với vận tốc góc bằng mạch số xyclôtrôn.

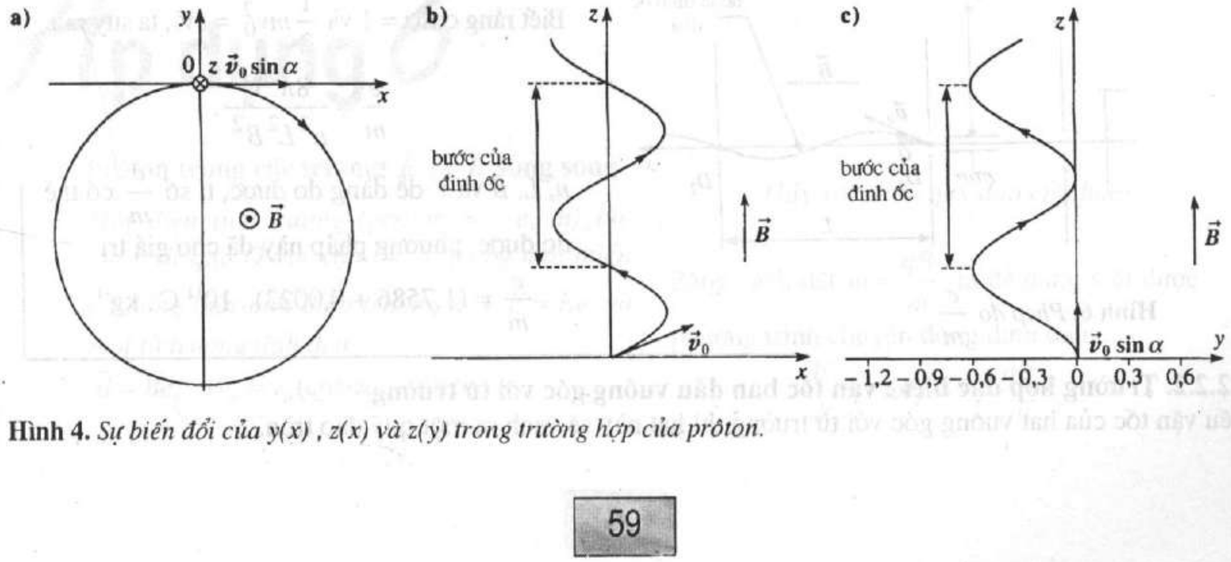
■ **Chuyển động theo (Oz)**

Phương trình thứ ba cho :

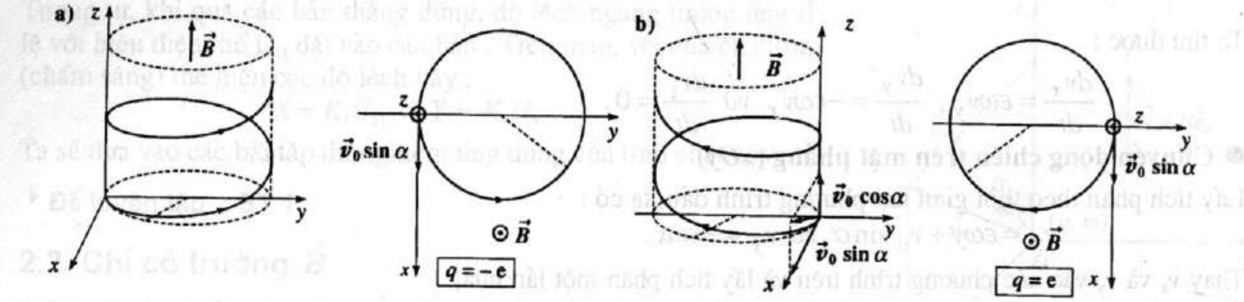
$$v_z = \text{cte} = v_0 \cos\alpha\,,\ \text{tức } z = v_0 \cos\alpha\, t$$

(chuyển động đều song song với (Oz)).

Như vậy, hạt vạch ra một đường đinh ốc tròn.



Hình 4. *Sự biến đổi của y(x) , z(x) và z(y) trong trường hợp của prôton.*



Hình 5. *Quỹ đạo của một điện tử và một prôtôn trong trường $\vec{B}$ đều.*

Chú ý :

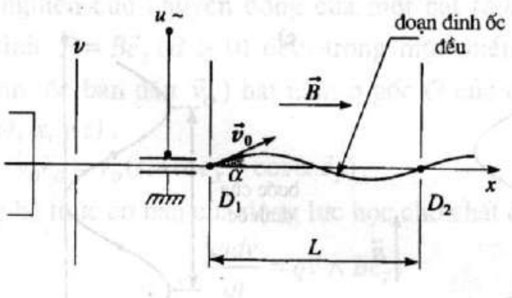
- *Bán kính $\rho = \frac{mv_0}{eB}\sin\alpha$ không nhất thiết phải trùng với bán kính quỹ đạo.*
- *Bước của đường đinh ốc là : $h = v_0\cos\alpha T$, trong đó $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\frac{m}{eB}$,*

vậy : $h = 2\pi\frac{mv_0}{eB}\cos\alpha$.

Áp dụng 4

Một phép đo điện tích riêng rất chính xác

Hình 6 vẽ sơ đồ của một phương pháp thực nghiệm rất chính xác của phép đo điện tích riêng $\frac{e}{m}$ của êlectrôn. Các êlectrôn đi qua một vành chắn tròn thứ nhất D_1 với một vận tốc ban đầu $\vec{v}_0$ (điện thế tăng tốc V), hợp với trục Ox một góc α nhỏ, nhưng thay đổi được (nhờ một tụ điện dưới điện thế thay đổi trên đường đi của các êlectrôn tới). Sau D_1, các êlectrôn đi vào một cuộn dây S ở đó có một trường từ tĩnh dọc đều $\vec{B} = B\vec{e}_x$.



Hình 6. *Phép đo* $\frac{e}{m}$

Cách D_1 một khoảng L có đặt một vành chắn thứ hai D_2 tương tự.

Hỏi trong điều kiện nào các êlectrôn của chùm tia có thể lọt qua được D_2 ?

Từ đó suy ra một phép đo có thể được $\frac{e}{m}$.

Quỹ đạo của các êlectrôn giữa D_1 và D_2 là một đoạn của đường đinh ốc và các điều kiện tối ưu để lọt qua được D_2 là L bằng một số nguyên lần bước của đường đinh ốc.

Nghĩa là : $L = n\frac{2\pi mv_0\cos\alpha}{eB}$, trong đó n là một số nguyên.

Biết rằng $\cos\alpha = 1$ và $\frac{1}{2}mv_0^2 = eV$, ta suy ra :

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 V}{n^2 L^2 B^2}.$$

n, L, B và V dễ dàng đo được, tỉ số $\frac{e}{m}$ có thể đo được, phương pháp này đã cho giá trị

$$\frac{e}{m} = (1{,}7586 + 0{,}0023)\,.\,10^{11}\ \mathrm{C\,.\,kg^{-1}}.$$

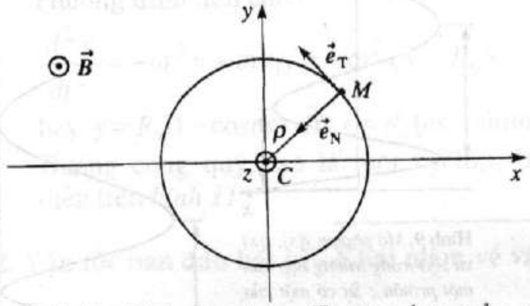
2.2.2.2. Trường hợp đặc biệt : vận tốc ban đầu vuông góc với từ trường

Nếu vận tốc của hạt vuông góc với từ trường thì hạt này sẽ vạch ra một quỹ đạo tròn.

Áp dụng 5

Quỹ đạo tròn

Chứng tỏ rằng trong một từ trường tĩnh đều $\vec{B} = B\vec{e}_z$, một êlectrôn có vận tốc ban đầu $\vec{v}_o$ nằm trong mặt phẳng (xOy) sẽ vẽ một quỹ đạo tròn mà ta sẽ tính được bán kính.



Hình 7. *Quỹ đạo tròn. Trường hợp của một êlectrôn điện tích q = -e*

Vận tốc v_Z lúc đầu bằng không, quỹ đạo nằm trong mặt phẳng (xOy). Để diễn tả phương trình chuyển động, ta dùng các tọa độ riêng và cơ sở của FRÉNET $(\vec{e}_T, \vec{e}_N, \vec{e}_Z)$:

$$m\frac{dv}{dt}\vec{e}_T + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_N = -e\vec{v} \wedge B\vec{e}_Z = eB\vec{e}_Z \wedge v\vec{e}_T$$

$$= eBv\vec{e}_N .$$

Hay bằng cách đồng nhất hóa $\frac{dv}{dt} = 0$ ($v = \text{cte} = v_0$, như ta đã biết) : $\frac{mv^2}{\rho} = eBv$.

Ở mọi điểm, quỹ đạo có bán kính cong không đổi $\rho = \frac{mv_o}{eB} = \frac{v_o}{\omega}$, vậy đó là một đường tròn.

Để luyện tập : BT 2, 3, 4 và 5.

2.3. Tác dụng đồng thời của các trường $\vec{E}$ và $\vec{B}$

Đối với các trường đều, về mặt định tính, ta có thể dự đoán các tính chất sau đây.

2.3.1. Trường hợp các trường song song

Nếu $\vec{E}$ và $\vec{B}$ song song, hình chiếu của quỹ đạo trên một mặt phẳng trực giao với trường luôn luôn là một vòng tròn. Ngược lại, thành phần của vận tốc song song với trường tăng dần. Vận tốc không phải là hằng số và qũy đạo không phải là một đường đinh ốc có bước không đổi.

Áp dụng 6

Prôton trong các trường $\vec{E}$ và $\vec{B}$ song song

Một điện tích dương (prôton = +e, m) lúc t = 0 đi qua O với vận tốc $\vec{v}_0$ trong một miền có đồng thời một điện trường đều $\vec{E} = E\vec{e}_z$ và một từ trường tĩnh đều $\vec{B} = B\vec{e}_z$, $(\vec{v}_o = v_o(\cos\alpha\vec{e}_z + \sin\alpha\vec{e}_y))$.

Hãy xác định quỹ đạo của hạt

Bằng cách đặt $\omega = \frac{qB}{m}$, ta dễ dàng viết được phương trình chuyển động dưới dạng :

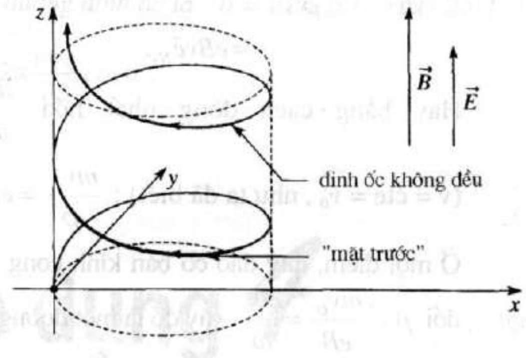
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega\vec{e}_Z \wedge \vec{v} + \frac{qE}{m}\vec{e}_Z .$$

Một phương pháp tính toán tương đương với phép tính toán đã thấy ở § **2.2.2.1** cho :

$$x = \frac{v_o \sin\alpha}{\omega}(1 - \cos\omega t),\; y = \frac{v_o \sin\alpha}{\omega}\sin\omega t$$

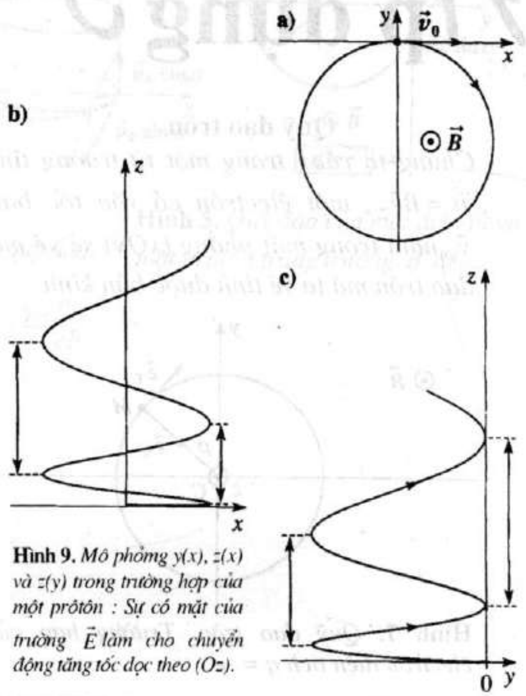
và : $$z = \frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2 + v_o \cos\alpha t$$

(chuyển động nhanh dần đều trong điện trường $\vec{E}$). Ta thu được một chuyển động chiếu hình tròn, có bán kính $\rho = \dfrac{mv_o \sin\alpha}{qB}$, cuốn theo chiều nghịch xung quanh $\vec{B}$ (điện tích dương).



Hình 8. *Prôtôn trong $\vec{E}$ và $\vec{B}$ song song.*

Quỹ đạo trên hình trụ không còn là một đường đinh ốc (sự có mặt của trường $\vec{E}$ làm cho chuyển động tăng tốc dọc theo (Oz)).



Hình 9. *Mô phỏng y(x), z(x) và z(y) trong trường hợp của một prôtôn : Sự có mặt của trường $\vec{E}$ làm cho chuyển động tăng tốc dọc theo (Oz).*

▸ **Để luyện tập : BT 6 và 7.**

2.3.2. Trường hợp các trường $\vec{E}$ và $\vec{B}$ bắt chéo

Nếu $\vec{E}$ và $\vec{B}$ bắt chéo nhau, thì từ trường có tác dụng làm cong quỹ đạo. Các ví dụ sau đây chứng tỏ từ đó dẫn tới một sự giạt, nghĩa là một chuyển động "trung bình" mà vận tốc vuông góc với $\vec{E}$ và $\vec{B}$.

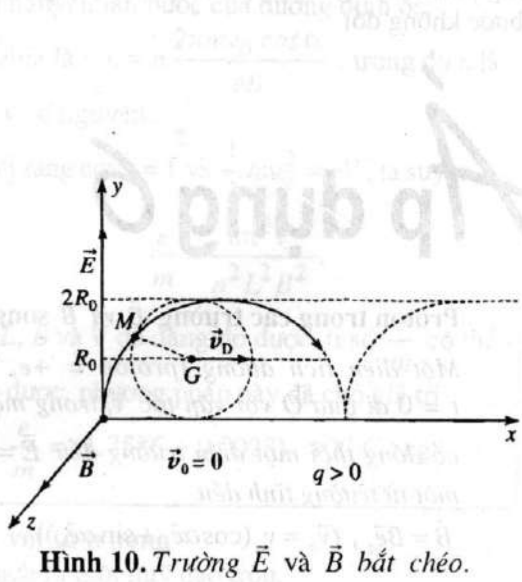
2.3.2.1. Trường hợp vận tốc ban đầu bằng không

Áp dụng 7

$\vec{E}$ và $\vec{B}$ bắt chéo : một vận tốc ban đầu bằng không

Một hạt (q = +e, m), ở thời điểm ban đầu nằm tại gốc O của hệ tọa độ ba gốc vuông $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ gắn vào hệ quy chiếu Galilée $\mathcal{R}$, với vận tốc $\vec{v}(0)$ bằng không. Hãy nghiên cứu chuyển động tiếp theo của hạt trong các trường đều và không đổi $\vec{E} = E\vec{e}_y$ và $\vec{B} = B\vec{e}_z$.

Đặt $\omega = \dfrac{eB}{m}$, $v_D = \dfrac{E}{B}$ và $R_o = \dfrac{mE}{eB^2} = \dfrac{v_D}{\omega}$



Hình 10. *Trường $\vec{E}$ và $\vec{B}$ bắt chéo.*

Áp dụng hệ thức cơ bản của động lực học cho hạt, ta có :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E} + e\vec{v} \wedge \vec{B},$$

hay : $\frac{d\vec{v}}{dt} = \omega v_D \vec{e}_y - \omega \vec{e}_z \wedge \vec{v}$.

Quỹ đạo nằm trong mặt phẳng (xOy) :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = +\omega\frac{dy}{dt} \text{ tức } \frac{dx}{dt} = \omega y;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega\frac{dx}{dt} + \omega v_D, \text{ tức } \frac{dy}{dt} = -\omega(x - v_D t);$$

Phương trình trên cho :

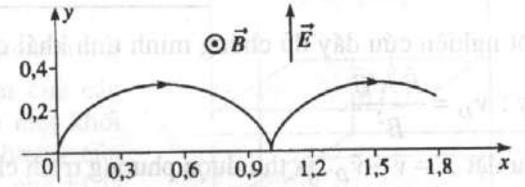
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y + \omega v_D = -\omega^2(y - R_o).$$

hay $y = R_o(1 - \cos\omega t)$ và $x = R_o(\omega t - \sin\omega t)$.

Đường cong quỹ đạo là một cycloit, biểu diễn trên *hình 11*.

Ta quan sát thấy trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}'$ tịnh tiến đều với vận tốc $\vec{v}_D$ (vận tốc giạt bằng $\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2}$ đối với $\mathcal{R}$), hạt vẽ một quỹ đạo tròn tâm G bán kính R_0.

Trong $\mathcal{R}'$ điện trường $\vec{E}'$ bằng không (công thức chuyển đổi hệ quy chiếu cho $\vec{E}$ và $\vec{B}$ đã thấy ở **1.1.2**) : như vậy, ta được đưa về trường hợp của chuyển động trong một từ trường đều : $\vec{B}' = \vec{B}$.



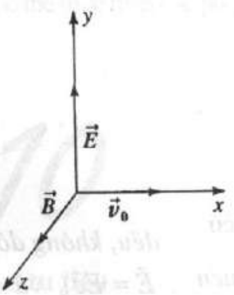
Hình 11. *Chuyển động của prôtôn trong $\vec{E}$ và $\vec{B}$ bắt chéo ; $\vec{v}_o = 0$.*

2.3.2.2. Vận tốc ban đầu bất kì - Khái niệm về vận tốc giạt

Áp dụng 8

$\vec{E}$ và $\vec{B}$ bắt chéo : vận tốc ban đầu khác không.

Ta giữ nguyên hình dáng của áp dụng trên, nhưng giả thiết hạt có một vận tốc ban đầu $\vec{v}(0) = v_o\vec{e}_x$ và nghiên cứu đặc tính của quỹ đạo khi cho v_o thay đổi.



Hình 12.

Đặt

$$\omega = \frac{eB}{m},\ v_D = \frac{E}{B} \text{ và } a_o = \frac{(v_D - v_o)}{\omega}$$

$\frac{d\vec{v}}{dt} = \omega v_D \vec{e}_y - \omega \vec{e}_z \wedge \vec{v}$; quỹ đạo luôn luôn nằm trong mặt phẳng (xOy) :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = +\omega\frac{dy}{dt}, \text{ hay } \frac{dx}{dt} = \omega y + v_0;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega\frac{dx}{dt} + \omega v_D, \text{ hay } \frac{dy}{dt} = -\omega(x - v_D t);$$

Phương trình đó cho :

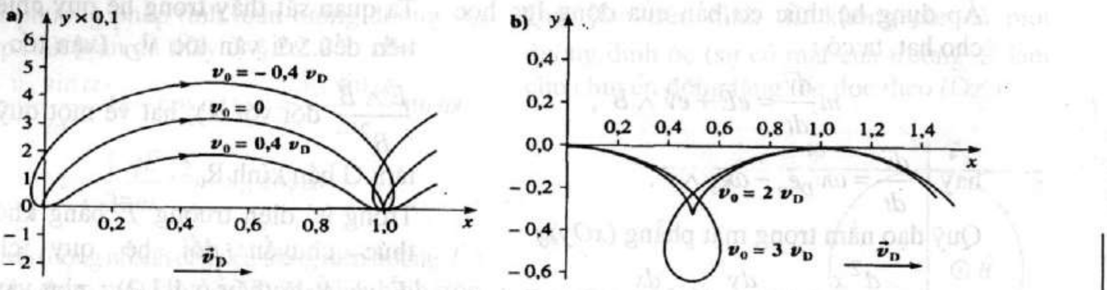
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y + \omega(v_D - v_0) = -\omega^2(y - a_0).$$

Từ đó $y = a_0(1 - \cos\omega t)$ và $x = v_D t + a_0 \sin\omega t$.

Các đường cong thu được bằng phép tích phân số được vẽ cho các trường hợp khác nhau (*hình* 13). Nói chung, ta thu được các đường cong có dạng cycloit, có hoặc không có vòng : khi đó từ trường đã "nhắc nhở" điện tích là điện trường có khuynh hướng kéo điện tích ra xa dần trục (Ox). Kết quả được thể hiện bằng *một chuyển động giạt trung bình* về phía các $x > 0$ với vận tốc $v_D\vec{e}_x$, với $v_D = \frac{E}{B}$ (vận tốc giạt $\vec{v}_D = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2}$).

Có hai trường hợp đáng chú ý :

- $v_0 = v_D$: chuyển động là thẳng đều ;
- $v_0 = 2v_D$: ta lại thu được một đường cycloit.



Hình 13. *Chuyển động của một prôtôn trong* $\vec{E}$ *và* $\vec{B}$ *bắt chéo :* a) $\vec{v}_o = -0,4\vec{v}_D$, $\vec{v}_o = 0$, $\vec{v}_o = 0,4\vec{v}_D$ b) $\vec{v}_o = 2\vec{v}_D$, $\vec{v}_o = 3\vec{v}_D$.

Một nghiên cứu đầy đủ chứng minh tính khái quát của vận tốc giạt này : $v_D = \dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{B^2}$.

Nếu đặt $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_D$, ta thu được phương trình chuyển động :

$$m\frac{d\vec{v}'}{dt} = q\vec{v}'\wedge\vec{B}.$$

Quỹ đạo là một đường tròn trong hệ tọa độ tịnh tiến với $\vec{v}_D$.

Một hạt đặt trong các trường $\vec{E}$ và $\vec{B}$ bắt chéo, không đổi và không phụ thuộc thời gian sẽ chịu một vận tốc giạt :

$$\vec{v}_D = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{B^2}$$

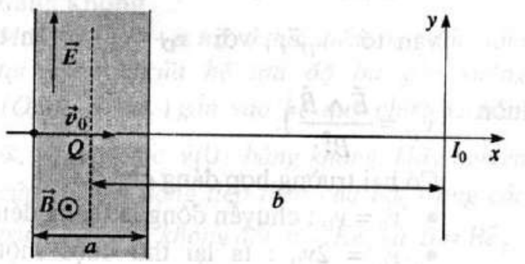
▸ **Để luyện tập : BT. 8**

2.3.2.3. Phép đo $\frac{e}{m}$ với $\vec{E}$ và $\vec{B}$ bắt chéo

Áp dụng 9

Phép đo $\frac{e}{m}$ với các trường $\vec{E}$ và $\vec{B}$ bắt chéo

Một chùm électrôn cùng tốc độ đi qua một miền $\mathcal{D}$ rộng a, ở đó có các từ trường và điện trường đều, không đổi và trực giao với nhau : $\vec{E} = E\vec{e}_y$ *và* $\vec{B} = B\vec{e}_z$ *mà không bị lệch.*



Hình 14. *Đo* $\frac{e}{m}$ *bằng các trường bắt chéo.*

Khi đó điểm chạm trên màn ảnh đặt cách tâm Q của miền là I_0.

Nếu bỏ từ trường $\vec{B}$ đi, ta quan sát thấy điểm chạm màn ảnh dịch chuyển tới I, có độ cao y_I

Chứng minh rằng nếu biết $\vec{E}$, $\vec{B}$, a , b và y_I ta sẽ đo được $\frac{e}{m}$.

Tình huống thứ nhất tương ứng với sự cân bằng tuyệt đối của các lực điện và từ làm tác dụng của chúng triệt tiêu nhau; vận tốc bằng $v_0 = v_D = \dfrac{E}{B}$;

Tình huống thứ hai tương ứng với sự lệch trong một điện trường đều :

$$y_1 = -b\frac{eEa}{mv_0^2}.$$

Khử v_0 trong hai hệ thức, ta có :

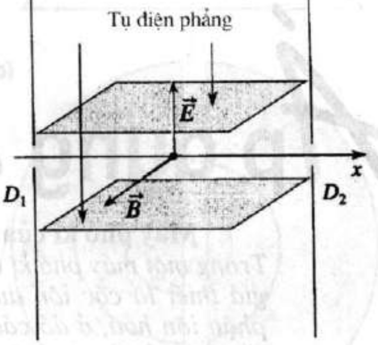
$$\frac{e}{m} = -y_1\frac{E}{abB^2}.$$

Phương pháp giả thiết đã biết $\vec{E}$ *và* $\vec{B}$ (đều) và ranh giới của miền $\mathscr{D}$ được định khá rõ, điều đó đặt ra một số vấn đề thực nghiệm.

3 Một số ứng dụng khác nhau

3.1. Khái niệm về các máy khối phổ kí

Các tính chất về chuyển động của các hạt (sau khi iôn hóa) trong các trường $\vec{E}$ và $\vec{B}$ được dùng để xác minh sự có mặt của các đồng vị trong một mẫu chất. Nghiên cứu nguyên lí của một khối phổ kí là tìm cách chia chọn các đồng vị theo khối lượng của chúng. *Bài tập 7* nêu ra một nguyên lí khác của khối phổ kí là dùng phương pháp các parabol.



Hình 15. *Một ví dụ về cái lọc*

3.1.1. Cái lọc vận tốc

Ta thực hiện một cái lọc vận tốc nhờ dùng tính chất chuyển động của một hạt mang điện trong các trường $\vec{E}$ và $\vec{B}$ bắt chéo. Hạt mang điện tích q (giả thiết là dương) đi qua không gian giữa hai bản của một tụ điện phẳng. Điện trường hướng lên phía trên, còn từ trường đều lại hướng ra phía trước mặt phẳng hình vẽ. Hạt chỉ có thể qua hai vành chắn D_1 và D_2 nếu chuyển động của nó là thẳng, nghĩa là vận tốc của nó thỏa mãn $v = v_D = \frac{E}{B}$.

Chùm tia ra khỏi D_2 có cùng một vận tốc với độ chính xác cao.

3.1.2. Sự tụ tiêu

Cần thiết phải tụ tiêu các chùm tia để có thể thực hiện các phép đo chính xác.

Áp dụng 10

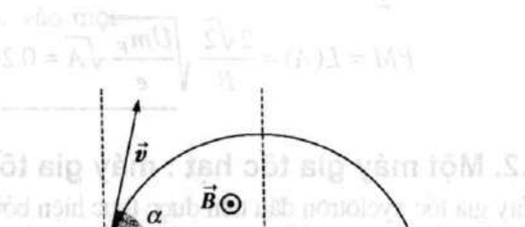
Ví dụ về sự tụ tiêu

Các hạt ($q > 0$, m) xuất phát từ một khe F rất hẹp, với một vận tốc $\vec{v}$. Các vectơ vận tốc $\vec{v}$ có cùng chuẩn v, nằm trong một mặt phẳng và có một độ tán sắc góc $\Delta\alpha$ nhỏ.

Các hạt này bị lệch đi bởi một từ trường tĩnh đều $\vec{B} = B\vec{e}_z$.

Chứng tỏ rằng có một điểm tụ tiêu F' của chùm tia xuất phát từ F. Hãy đánh giá kích thước ngang của chùm tia tại F'.

Cho : $\rho = \frac{mv}{qB} = 5cm$ và $\Delta\alpha = 3°$.



Hình 16. *Một ví dụ về sự tụ tiêu.*

Quỹ đạo của một hạt xuất phát từ F là một cung tròn bán kính $\rho = \frac{mv}{qB}$.

Điểm M mà cung tròn cắt trục có khoảng cách $FM = 2\rho\sin\alpha$.

Có sự tụ tiêu tại M nếu khoảng cách FM có giá trị ổn định khi α biến thiên, cho $\alpha = \frac{\pi}{2}$, suy ra $FF' = 2\rho$.

Đặt $\alpha = \frac{\pi}{2} + \delta\alpha$. Một phép khai triển có giới hạn ở bậc 2 của FM cho :

$$FM = 2\rho\frac{1-(\delta\alpha)^2}{2}$$

Vì $\delta\alpha = \Delta\frac{\alpha}{2}$ nên kích thước ngang của chùm tia tại F' bằng $\Delta F' = \frac{\rho}{4}(\Delta\alpha)^2$.

Áp dụng bằng số : $\Delta F' = 0{,}03$ mm.

3.1.3. Máy phổ kí của BAINBRIDGE

Áp dụng 11

Máy phổ kí của BAINBRIDGE

Trong một máy phổ kí như thế, các iôn (ở đây giả thiết là các iôn dương), đi ra từ một bộ phận iôn hóa, ở đó các iôn đã được tăng tốc từ trước dưới một hiệu điện thế có độ lớn U, trước hết đi qua một cái lọc vận tốc, sau đó đi vào một từ trường ngang đều $\vec{B} = B\vec{e}_z$, rồi vạch ra một nửa vòng tròn và tới tác động lên một kính ảnh. Khe F được giả thiết rất hẹp, hãy xác định khoảng cách phân chia các vết thẳng liên kết với hai đồng vị.

Tính khoảng cách giữa các đồng vị $^{39}K^+$ và $^{41}K^+$ trên kính ảnh

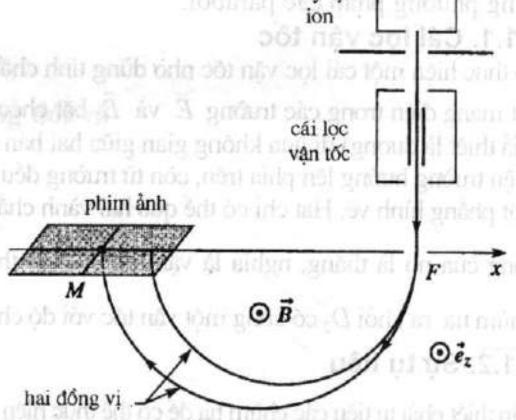
Cho : $B = 0{,}1$ T *và* $U = 10$ kV.

Sử dụng các kết quả của áp dụng trước :

$$FM = 2\rho = \frac{2mv_0}{qB}, \text{ với } q = e.$$

Vì $\frac{1}{2}mv_0^2 = eU$, bằng cách đặt $m = Am_P$, ta có:

$$FM = L(A) = \frac{2\sqrt{2}}{B}\sqrt{\frac{Um_P}{e}}\sqrt{A} = 0{,}289\sqrt{A}\,.$$



Hình 17. *Máy phổ kí BAINBRIDGE*

Áp dụng bằng số : L(39) = 1,806 ... m

và L(41) = 1,852 ... m ;

ở đây số các chữ số có nghĩa không thể được xác định chính xác, nhưng khoảng tách biệt giữa các đồng vị là rõ ràng.

3.2. Một máy gia tốc hạt : máy gia tốc xyclôtrôn

Máy gia tốc xyclôtrôn đầu tiên được thực hiện bởi LAWRENCE, đã gia tốc cho các êlectrôn. Hiện nay, các xyclôtrôn được dùng chủ yếu để gia tốc các iôn. Ta sẽ giới hạn chỉ mô tả máy một cách cơ bản; sự nghiên cứu đầy đủ các máy gia tốc nằm ngoài khuôn khổ của cuốn sách này.

3.2.1. Mô tả

Một xyclôtrôn gia tốc các iôn (ví dụ các prôtôn) gồm chủ yếu một hộp trụ trục (Oz) đặt trong khe của một nam châm điện, trong đó có chân không cao. Đặt một từ trường đều $\vec{B} = B\vec{e}_z$ trong toàn bộ hộp trụ bán kính R.

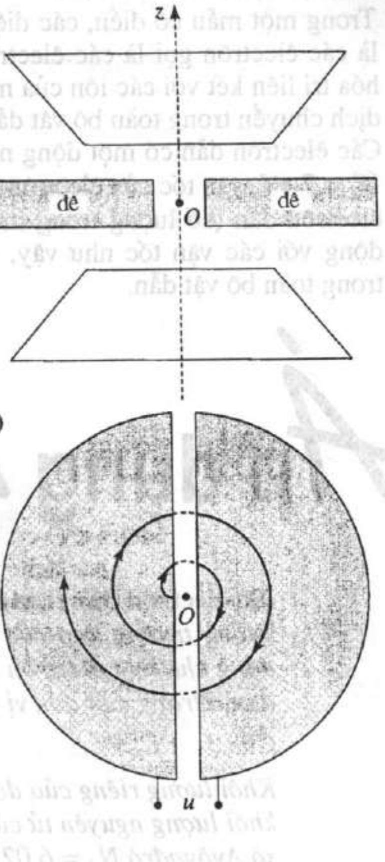
Các thành của hộp trụ được thể hiện thành hai điện cực dẫn điện rỗng, gọi là các đê, phân cách nhau bởi một khe có bề dày d nhỏ, nằm ở hai phía của một mặt phẳng chứa trục của hộp trụ.
Một nguồn (không vẽ ở đây) cho phép phụt các iôn vào tâm với một động năng nhỏ không đáng kể.
Một máy phát điện tạo ra giữa các điện cực kim loại (*đê*) một hiệu điện thế hình sin có tần số ν, và như vậy tạo ra giữa các *đê* một điện trường đều $\vec{E}$ biến thiên theo hàm sin với tần số ν:

$$E = E_m cos(2\pi\nu t) = \frac{U}{d} cos(2\pi\nu t).$$

Bên trong mỗi điện cực, điện trường được coi như bằng không. Ta thừa nhận rằng các iôn được tăng tốc lần đầu tiên bởi một điện trường E_m trên khoảng cách d trước khi đi vào trong *đê* thứ nhất.

a)

b)



Hình 18. *Máy xyclôtrôn*

a) *Nhìn ngang*

b) *Các đê nhìn từ trên xuống.*

3.2.2. Vận hành tối ưu

Khi một iôn đi vào trong các *đê* với vận tốc $\vec{v}$ (giả thiết vuông góc với (Oz) và với các mặt *đê*), nó sẽ vạch một quỹ đạo tròn (do đó một nửa vòng tròn) bán kính $\rho = \frac{mv}{qB}$, trước khi qua lại khoảng không gian giữa hai đê, rộng d. Do vậy thời gian chuyển động trong một đê bằng $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_c}$, nếu đặt $\omega_c = \frac{qB}{m}$ (mạch số xyclôtrôn của các iôn đang xét). Nếu khoảng thời gian này bằng (hoặc bằng một số lẻ lần...) nửa chu kì biến thiên của điện trường (nghĩa là $\omega_C = \omega$ hay $\nu = \frac{qB}{2\pi m}$), thì điện trường $E = -E_m$ sẽ lại tăng tốc cho các iôn. Cứ mỗi nửa vòng điện trường lại cung công tối ưu :

$$W = qE_m d = qU.$$

làm cho động năng của các iôn tăng lên.
Sau n lần qua trong các điều kiện trên, động năng của iôn bằng :

$$\mathscr{E}_K = \frac{1}{2}mv_n^2 = nqU \quad và \quad \rho_n = \frac{mv_n}{eB}.$$

Do vậy các bán kính tăng tỉ lệ với $\sqrt{n}$. Số nửa vòng được giới hạn bởi bán kính lớn nhất của các điện cực.
Khi $\rho_n = R$, bộ lái tia làm lệch các iôn đã được tăng tốc vào một buồng nghiên cứu (va chạm, v.v).

▸ **Để luyện tập : BT. 9.**

4 Các êlectrôn dẫn trong kim loại

4.1. Mẫu của chuyển động tập thể

Một dòng điện được tạo ra bởi sự dịch chuyển của một tập thể các điện tích trong một hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ cho trước. Ta chỉ giới hạn ở trường hợp các êlectrôn dịch chuyển trong kim loại, tạo thành một dòng điện gọi là **dòng điện dẫn.**

4.1.1. Các êlectrôn dẫn

Trong một mẫu cổ điển, các điện tích chuyển động trong kim loại là các êlectrôn gọi là các êlectrôn dẫn (ngược lại với các êlectrôn hóa trị liên kết với các iôn của mạng tinh thể và không có khả năng dịch chuyển trong toàn bộ vật dẫn).

Các êlectrôn dẫn có một động năng vào cỡ vài êlectrôn - vôn. Nếu $\mathscr{E}_K = 7$ eV, vận tốc của êlectrôn tiêu biểu bằng vào cỡ 10^6 ms^{-1}. Các êlectrôn dẫn (số lượng trong một đơn vị thể tích rất lớn), chuyển động với các vận tốc như vậy, có thể được coi như một chất khí trong toàn bộ vật dẫn.

Áp dụng 12

Số êlectrôn dẫn trong một đơn vị thể tích

Trong trường hợp của đồng, mỗi nguyên tử đồng cho một êlectrôn dẫn. Tính số êlectrôn dẫn n trong một đơn vị thể tích.

Cho :

Khối lượng riêng của đồng $\rho = 8900$ kg . m^{-3}; khối lượng nguyên tử của đồng $M = 63,6$g và số Avôgađrô $N_A = 6,02 . 10^{23}$.

Số êlectrôn dẫn n trong một đơn vị thể tích cho bởi :

$$n = N_A \frac{\rho}{M}$$

hay :

$$n = 6,02.10^{23} \frac{8900}{63,6.10^{-3}} = 8,4.10^{28}\ m^{-3}.$$

Khi không có lực tác dụng, ta thừa nhận rằng các vận tốc của các êlectrôn dẫn khác nhau được phân bố một cách hỗn loạn sao cho giá trị trung bình được xác định bởi $\vec{v} = <\vec{u}> = \frac{1}{\delta n}\sum_{\delta n}\vec{u}_i$ bằng không, trong đó δn là số êlectrôn dẫn chứa trong một phần tử thể tích. Do vậy không có dòng điện vĩ mô tương ứng. Khi có lực tác dụng (ví dụ của điện trường), vận tốc trung bình này mà ta gọi là *vận tốc toàn bộ* hay *vận tốc giạt* sẽ khác không.

4.1.2. Vận tốc toàn bộ (hay vận tốc giạt) khi có lực vĩ mô $\vec{F}$

Ta giới hạn ở sự tiếp cận sơ đẳng bắt đầu từ một mẫu đơn giản.

Cho một vật dẫn trong đó mỗi điện tích chịu tác dụng của một lực vĩ mô $\vec{F}$ (chẳng hạn có nguồn gốc điện trường). Áp dụng nguyên lí cơ bản của động lực học cho các điện tích (chuyển động tham gia vào sự dẫn điện) trong một phần tử thể tích dδ, phần tử dịch chuyển với vận tốc toàn bộ $\vec{v}$. Số hạt trong phần tử này bằng ndδ và có khối lượng bằng nmdδ. Ta thu được :

$$nmd\delta\frac{d\vec{v}}{dt} = nd\delta\vec{F} + \vec{f},$$

trong đó $\vec{f}$ là một lực do các tương tác giữa chất khí êlectrôn này với mạng tinh thể trong đó chúng dịch chuyển. Lực này (cản lại chuyển động) càng lớn nếu số các "va chạm" càng "cao", mà số va chạm này lại tỉ lệ với vận tốc toàn bộ $\vec{v}$ của phần tử dδ và với phần tử thể tích dδ đang xét. Vì vậy ta đặt $\vec{f} = -k\vec{v}d\delta$ (lực ma sát kiểu "ma sát nhớt"). Suy ra phương trình biến đổi của $\vec{v}$:

$$nm\frac{d\vec{v}}{dt} = -n\vec{F} - k\vec{v},$$

và có thể viết : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{m\vec{v}}{\tau}$ với $\tau = \frac{nm}{k}$.

τ (đồng nhất với thời gian) là một đại lượng đặc trưng cho hiện tượng đang nghiên cứu : đó là *thời gian tích thoát của sự dẫn điện.*

Để giải thích một cách đơn giản thời gian τ này, ta giả thiết rằng ta đã tác dụng một lực $\vec{f}$ đều và không đổi kể từ thời điểm ban đầu t=0. Biết rằng tại thời điểm đó $\vec{v} = 0$, nghiệm của phương trình trên là :

$$\vec{v} = \frac{\vec{F}\tau}{m}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right);$$

Vậy τ diễn tả thời gian thiết lập một chế độ ổn định cho một vận tốc giạt $\vec{v} = \frac{\vec{F}\tau}{m}$ tỉ lệ với $\vec{F}$.

Chú ý :

Trong khuôn khổ của một lí thuyết thống kê, τ được gắn với thời gian trung bình giữa hai va chạm kế tiếp của một êlectrôn dẫn.

4.2. Vectơ mật độ dòng điện dẫn

4.2.1. Định nghĩa

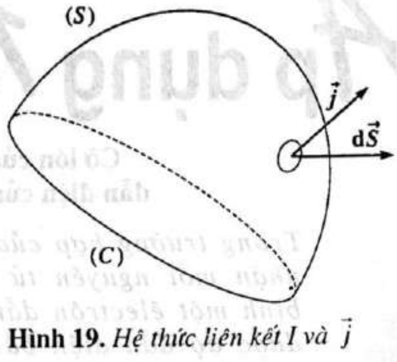
Một chuyển động toàn bộ của các điện tích là một dòng điện, do đó vectơ mật độ dòng điện $\vec{j}$ được xác định bởi $\vec{j} = nq\vec{v}$, trong đó *n* biểu thị số hạt mang điện chuyển động trong một đơn vị thể tích và *q* là điện tích của mỗi hạt mang điện.

Trong trường hợp đang xét của tính dẫn kim loại. *n* là số các êlectrôn dẫn trong một đơn vị thể tích, q = -e và $\vec{v}$ là vận tốc toàn bộ hay vận tốc giạt.

Cường độ *I* qua một diện tích *S* ở thời điểm *t* là thông lượng của vectơ mật độ dòng điện qua *S* tại thời điểm đó, cho bởi :

$$I = \iint_S \vec{j}.d\vec{S}.$$

Định nghĩa trên cho thấy $\vec{j}$ được tính bằng *A*. m^{-2}. Ta có thể thấy ngay cường độ *I* định nghĩa như vậy sẽ bằng đúng điện tích qua *S* trong một đơn vị thời gian.



Hình 19. *Hệ thức liên kết I và* $\vec{j}$

4.2.2. Phương trình vận chuyển

Bằng cách nhân *nq* với hai vế của phương trình theo $\vec{v}$ diễn tả chuyển động toàn bộ của các êlectrôn dẫn của một kim loại khi có một điện trường vĩ mô tác dụng, ta có :

$$\tau\frac{d\vec{j}}{dt} + \vec{j} = \frac{nq\tau}{m}\vec{F} \text{ (phương trình vận chuyển).}$$

4.3. Đặc tính của hệ toàn bộ khi chỉ có điện trường

4.3.1. Định luật OHM cục bộ

Trong phần tiếp theo, ta thể hiện các tính chất của mẫu của ta trong giả thiết môi trường kim loại là đồng chất (n giả sử là đều), trong đó có một điện trường $\vec{E}$ giả thiết đều và không đổi một cách cục bộ ($\vec{F} = q\vec{E}$, với $q = -e$), tác dụng kể từ thời điểm $t = 0$, và ở thời điểm đó $\vec{v} = 0$ và do vậy $\vec{j} = 0$.

Với $t > 0$, phép tích phân trực tiếp cho :

$$\vec{v} = -\frac{e\tau}{m}\vec{E}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right), \text{ vậy } \vec{j} = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E}\left(1 - exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right).$$

Thời gian tích thoát của sự dẫn điện τ nói chung rất nhỏ (τ vào cỡ 10^{-14}s). Điều đó có nghĩa là với t lớn hơn τ, do vậy, thực tế với $t > 0$, trạng thái ổn định đạt tới ngay. Từ đó, ta có **định luật OHM cục bộ :**

$$\vec{v} = -\frac{e\tau}{m}\vec{E} \text{ và } \vec{j} = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E}.$$

Thực ra, các hệ thức trên còn có hiệu lực với chế độ chuẩn dừng, trong đó các biến thiên nhất thời có thể xảy ra của $\vec{E}$ thường chậm (thời gian điển hình của sự biến thiên rất lớn hơn τ).

Vận tốc toàn bộ (hay vận tốc giạt) của các hạt (q, m) tham gia vào sự dẫn điện cho bởi $\vec{v} = \mu\vec{E}$; μ là *độ linh động* của các hạt $\left(\mu = q\frac{\tau}{m}\right)$. Đối với các êlectrôn, $\left(\mu = -e\frac{\tau}{m}\right)$ là số âm.

Định luật OHM cục bộ :

Vectơ mật độ dòng điện $\vec{j}$ (tính bằng A . m^{-2}) tỉ lệ thuận với điện trường tác dụng lên vật dẫn :

$$\vec{j} = \gamma\vec{E},$$

γ là *độ dẫn điện* của môi trường (gọi là "ohmic") có biểu thức $\gamma = nq^2\frac{\tau}{m}$ (τ xấp xỉ bằng 10^{-14} s).

4.3.2. Một vài cỡ lớn

Áp dụng 13

Cỡ lớn của độ dẫn điện của đồng

Trong trường hợp của đồng, nếu thừa nhận mỗi nguyên tử đồng cho trung bình một êlectrôn dẫn thì có thể tính được độ dẫn điện bằng cách đo điện trở của một đoạn dây hình trụ dài l và tiết diện s ($R = \frac{l}{\gamma s}$) bằng : $\gamma = 6.10^7$ s^{-1} m^{-1}.

Cho một dòng điện cường độ 1A chạy qua một dây dẫn hình trụ tiết diện s = 1mm^2.

Hãy xác định :

a)*Chuẩn của vectơ mật độ dòng điện, giả thiết là đều.*

b) *thời gian tích thoát của sự dẫn điện τ trong khuôn khổ mẫu đã cho.*

c) *vận tốc toàn bộ (vận tốc giạt) và độ linh động của các êlectrôn dẫn ;*

d) *chuẩn của vận tốc trung bình của một êlectrôn giữa hai va chạm biết rằng quãng đường tự do trung bình (khoảng chạy trung bình giữa hai va chạm) bằng λ = 45nm.*

Biện luận về các giá trị đó.

Cho :

Khối lượng riêng của đồng $\rho = 8900\ kg\ m^{-3}$.

khối lượng nguyên tử của đồng M = 63,6g,

số Avôgađrô $N_A = 6{,}02\ .\ 10^{23}$, *khối lượng của một êlectrôn* $m = 9\ .\ 10^{-31}\ kg$.

a) j là đều $I = js$, vậy :

$$j = \frac{I}{s} = 10^6\ A.m^{-2}$$

và $$E = \frac{j}{\gamma} = 1{,}67.10^{-2}\ V.m^{-1}$$

b) $\gamma = ne^2\dfrac{\tau}{m}$ cho $\tau = \dfrac{m\gamma}{ne^2}$; $n = \rho\dfrac{N_A}{M} = 8{,}4.10^{28} m^{-3}$

vậy : $\tau = 2{,}5\ .\ 10^{-14}$ s.

c) $\vec{j} = -ne\vec{v}$ cho $\vec{v} = -\dfrac{\vec{j}}{ne}$,

$v = 7{,}4\ .\ 10^{-5}\ ms^{-1} = 0{,}074\ mms^{-1}$

(vận tốc rất nhỏ, tương đương với một chuyển động toàn bộ được 8 mm trong 2 phút). Độ linh động là :

$$\mu = -e\frac{\tau}{m} = -4{,}4\ .\ 10^{-3}\ C\ .\ s\ .\ kg^{-1}.$$

Ta nghiệm thấy $\vec{v} = \mu\vec{E}$.

d) Với $\lambda = u\tau$, ta có :

$$u = \frac{\lambda}{\tau} = 1{,}8\ .\ 10^6\ m\ .\ s^{-1}.$$

(giá trị lớn hơn $\vec{v}$ rất nhiều). Mặt khác, ta chú ý rằng λ lớn hơn rõ rệt kích thước của mắt mạng tinh thể, điển hình là vào khoảng vài phần mười nanômét.

4.4. Sự có mặt đồng thời của một điện trường và một từ trường

4.4.1. Phương trình vận chuyển và hằng số HALL

Khi có mặt đồng thời một điện trường $\vec{E}$ và một từ trường $\vec{B}$, lực $\vec{F}$ đưa vào để mô tả chuyển động toàn bộ là :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}),$$

Phương trình vận chuyển khi đó trở thành :

$$\tau\frac{d\vec{j}}{dt} + \vec{j} = \gamma\left(\vec{E} + \frac{1}{nq}\vec{j} \wedge \vec{B}\right),$$

$R_H = \dfrac{1}{nq}$ được gọi là *hằng số HALL.*

Phương trình vận chuyển khi đó (ở chế độ dừng hoặc chuẩn dừng, nghĩa là khi số hạng $\tau\dfrac{d\vec{j}}{dt}$ bằng không hoặc nhỏ không đáng kể) là :

$$\vec{j} = \gamma(\vec{E} + R_H\vec{j} \wedge \vec{B})$$

Sự tổng quát hóa định luật OHM cục bộ cho vật dẫn đặt đồng thời trong điện trường $\vec{E}$ và từ trường $\vec{B}$, cho :

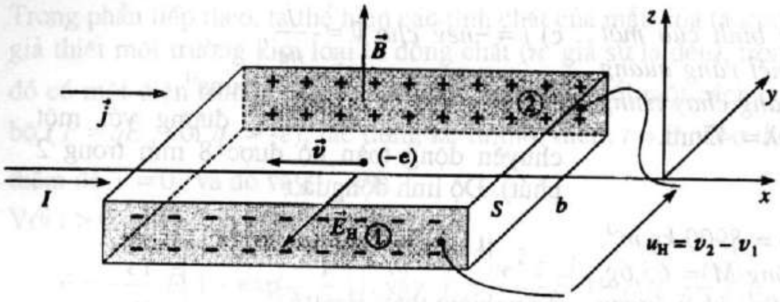
$$\vec{j} = \gamma(\vec{E} + R_H\vec{j} \wedge \vec{B})$$

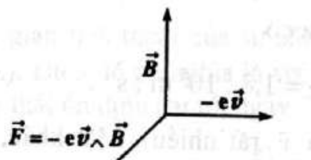
trong đó hằng số HALL bằng $R_H = \dfrac{1}{nq}$.

Các phương trình trên cho phép giải thích hiệu ứng HALL, sẽ được mô tả dưới đây.

4.4.2. Trường hợp của một hình dạng hình chỉ và hình chữ nhật

4.4.2.1. Trường HALL





Hình 20. *Hiệu ứng HALL trong hình dạng hình hộp (hình dạng HALL).*

Xét một băng dẫn có tiết diện hình chữ nhật, rộng b dọc (Oy), dày δ dọc (Oz), trên băng có dòng điện cường độ I, mật độ $j = \dfrac{I}{b\delta}$ đều trong chế độ ổn định liên tục và có mặt một từ trường $\vec{B} = B\vec{e}_z$ (B > 0). Các đường dòng là thẳng $\vec{j} = j\vec{e}_x$ (với j > 0). Thí nghiệm chứng tỏ rằng có một hiệu điện thế U_H xuất hiện, gọi là *hiệu điện thế HALL*, giữa mặt sau, kí hiệu ②, và mặt trước, kí hiệu ①, của vật dẫn, tỉ lệ thuận với từ trường $\vec{B}$.

Dùng các kết quả ở trên, ta hãy tính hiệu điện thế HALL này. Trong chế độ ổn định, trong một hình dạng như thế, các đường dòng chạy dọc (Ox), số hạng $R_H \vec{j} \wedge \vec{B}$ thẳng hàng với (Oy). Điều này cho thấy sự tồn tại của một thành phần, kí hiệu $\vec{E}_H$, của điện trường nằm trên (Oy) : $\vec{E}_H = R_H \vec{B} \wedge \vec{j}$.

Thành phần này của điện trường được gọi là *trường HALL*. Trong khuôn khổ của mẫu đã nêu, với $R_H = -\dfrac{1}{ne}$ ($R_H < 0$), $\vec{E}_H = -\dfrac{1}{ne} Bj\vec{e}_y$. Hiệu điện thế HALL U_H liên kết với $\vec{E}_H$ bởi hệ thức $U_H = -E_H b$.

Biết rằng $j = \dfrac{I}{\delta b}$, $U_H = \dfrac{Bj}{ne} b = \dfrac{IB}{ne\delta}$.

Trường hợp của bạc, $n = 6 \cdot 10^{28}$ m^{-3}.

Với $\delta = 0{,}1$ mm, $B = 1$T và $I = 5$A, ta thu được $U_H = 5{,}2$ μV. Giá trị này rất nhỏ : với một phép đo chính xác, ta phải khuếch đại nó. Thực ra, hiện tượng được quan sát một cách dễ dàng với các vật liệu bán dẫn điện, với chúng, số các phần tử mang điện trong một đơn vị thể tích n tham gia vào sự dẫn điện còn nhỏ hơn rất nhiều (10^5 tới 10^6 lần nhỏ hơn). Người ta thường dùng các đầu dò như thế bằng chất bán dẫn cho phép đo một từ trường, ví dụ trong các bài thí nghiệm.

4.4.2.2. Giải thích về mặt vật lí

Ta dễ dàng hiểu được nguồn gốc của trường HALL nếu để ý đến pha chuyển tiếp ở ngay trước chế độ ổn định trong thanh đã mô tả ở trên.

■ **Ở chế độ chuyển tiếp**

Hãy hình dung một êlectrôn (q = -e) chuyển động với vận tốc $\vec{v} = v\vec{e}_x$ với $v < 0$ $(I > 0)$. Từ lực tác dụng lên êlectrôn bằng :

$$q\vec{v} \wedge \vec{B} = -ev\vec{e}_x \wedge B\vec{e}_z = -evB\vec{e}_y .$$

Dưới tác dụng của lực này, êlectrôn có khuynh hướng dịch chuyển về phía mặt ①. Chính các êlectrôn dẫn đã thực hiện chuyển động này trong pha chuyển tiếp. Mặt ① sẽ tích điện âm, trong khi đó mặt ② thiếu êlectrôn nên xuất hiện điện tích dương.

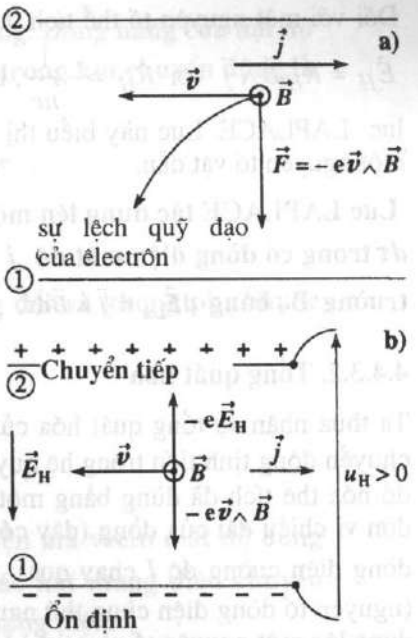
Các điện tích bề mặt này xuất hiện như vậy đã tạo ra điện trường (trường HALL), đến lượt nó, điện trường này lại tác dụng lên các êlectrôn dẫn.

■ **Khi chế độ ổn định được thiết lập**

Các đường dòng lúc này song song với (Ox), trường HALL triệt tiêu hoàn toàn từ lực tác dụng lên êlectrôn :

$$\vec{E}_H + \vec{v} \wedge \vec{B} = 0 ,$$

điều này cho $\vec{E}_H = -v\vec{e}_x \wedge B\vec{e}_z = vB\vec{e}_y = -\frac{1}{en} jB\vec{e}_y$, phù hợp với kết quả trước đây.

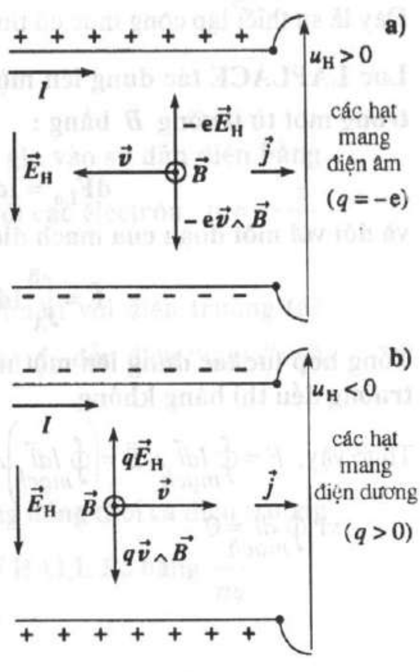


Hình 21. Nguồn gốc của trường HALL

<u>*Chú ý :*</u>

Ta đã xét một kim loại với các êlectrôn dẫn của nó. Cũng có thể nghĩ tới một sự dẫn điện bằng điện tích dương (gọi là các lỗ trong các chất bán dẫn). Đối với một dòng $I > 0$, thì dưới tác dụng của từ lực, các điện tích dương này cũng dịch chuyển về phía mặt trước ① trong pha chuyển tiếp. Khi đó, hiệu điện thế HALL ngược dấu với điện thế có được với các êlectrôn. Dấu của hiệu điện thế HALL có thể cho ta biết dấu của các hạt mang điện.

Ta cần luôn luôn rất thận trọng với những lời giải thích trên mà không nên quên rằng mẫu đã đưa ra còn quá đơn giản để tin tưởng vào nó quá mức.



Hình 22. Sự đảo ngược của trường HALL (và hiệu điện thế HALL) theo dấu của các hạt mang điện.

4.4.3. Trường HALL và lực LAPLACE

4.4.3.1. Mẫu thể tích

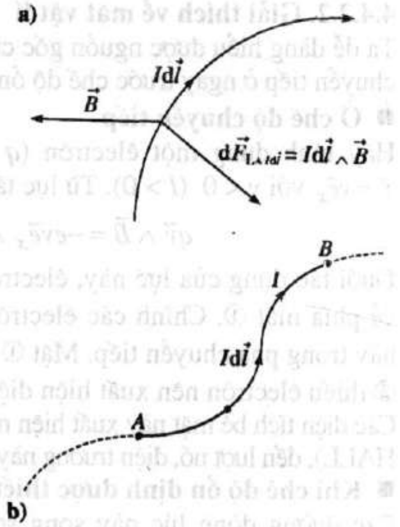
Ta hãy lấy lại băng kim loại trong có dòng điện cường độ I chạy qua, với sự có mặt của từ trường và hãy lưu tâm tới lực tác dụng lên một đơn vị thể tích của vật dẫn này, giả thiết đang đứng yên trong hệ quy chiếu ℜ. Trong một thể tích nguyên tố dτ, ta có các hạt điện chuyển động (n hạt trong một đơn vị thể tích) và có những hạt điện đứng yên (cũng bằng n hạt trong một đơn vị thể tích). Ta hãy nghiên cứu các lực tác dụng lên những điện tích đó (*hình 23*).

	Các lực trên một đơn vị thể tích		
Các điện tích	**ảnh hưởng của $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_H$**	**ảnh hưởng của $\vec{B}$**	**tổng hợp**
Các điện tích chuyển động	$-ne(\vec{E}_0 + \vec{E}_H)$	$-ne\vec{v} \wedge \vec{B}$	$-ne\vec{E}_0$ vì $\vec{E}_H + \vec{v} \wedge \vec{B} = 0$
Các điện tích đứng yên	$+ne(\vec{E}_0 + \vec{E}_H)$	0	$+ne(\vec{E}_0 + \vec{E}_H)$

◄ *Hình 23. Chi tiết về các lực trên một đơn vị thể tích. $\vec{E}_0$ là thành phần của $\vec{E}$ song song với $\vec{j}$ và điện trường toàn phần bằng $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_H$.*

Đối với một nguyên tố thể tích dτ, ta có $d\vec{F} = ne\vec{E}_H d\tau$. Biết rằng $\vec{E}_H = R_H \vec{B} \wedge \vec{j}$ với $R_H = -\dfrac{1}{ne}$, ta thu được $d\vec{F} = \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau$, đây là lực LAPLACE. Lực này biểu thị tổng hợp của các lực điện từ lên một nguyên tố vật dẫn.

Lực LAPLACE tác dụng lên một nguyên tố vật dẫn có thể tích $d\tau$ trong có dòng điện mật độ $\vec{j}$ chạy qua và đặt trong một từ trường $\vec{B}$, bằng $d\vec{F}_{La} = \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau$.



Hình 24. a) *Lực LAPLACE tác dụng lên một nguyên tố dòng điện có hình chỉ.*

b) *Lực LAPLACE tác dụng lên một phần của mạch AB.*

4.4.3.2. Tổng quát hóa

Ta thừa nhận sự tổng quát hóa của lực này khi nguyên tố vật dẫn chuyển động tịnh tiến trong hệ quy chiếu Galilée ℛ. Khi thay sự sơ đồ hóa thể tích đã dùng bằng một sơ đồ hóa bề mặt hay trên một đơn vị chiều dài của dòng (dây có tiết diện nhỏ không đáng kể có dòng điện cường độ *I* chạy qua), ta chỉ cần thay $\vec{j} d\tau$ bằng $I d\vec{l}$ (nguyên tố dòng điện cùng thứ nguyên) sao cho lực LAPLACE tác dụng lên một nguyên tố như thế bằng :

$$d\vec{F}_{La} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}.$$

Đây là sự thiết lập công thức có tính lịch sử của lực LAPLACE.

Lực LAPLACE tác dụng lên một nguyên tố dòng điện $I d\vec{l}$ đặt trong một từ trường $\vec{B}$ bằng :

$$\mathbf{d\vec{F}_{La} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}},$$

và đối với một đoạn của mạch điện :

$$\mathbf{\vec{F} = \int_A^B I d\vec{l} \wedge \vec{B}}.$$

Tổng hợp lực tác dụng lên một mạch điện kín đặt trong một từ trường đều thì bằng không.

Thực vậy, $\vec{F} = \oint_{mạch} I d\vec{l} \wedge \vec{B} = \left(\oint_{mạch} I d\vec{l}\right) \wedge \vec{B} = I\left(\oint_{mạch} d\vec{l}\right) \wedge \vec{B} = 0$,

vì $\oint_{mạch} d\vec{l} = 0$.

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ **Lực điện từ tác dụng lên một hạt có điện tích *q* và khối lượng *m*, ở thời điểm *t*, nằm tại điểm *M* của hệ quy chiếu Galilée ℛ, trong đó có một điện trường $\vec{E}(M,t)$ và một từ trường $\vec{B}(M,t)$, và dịch chuyển với vận tốc $\vec{v}(M,t)_{/ℛ}$ cho bởi $\vec{F}_{Lo} = q[\vec{E}(M,t) + \vec{v}(M,t)_{/ℛ} \wedge \vec{B}(M,t)]$; trong trường hợp các trường là không đổi và không phụ thuộc thời gian, ta có $\vec{F}_{Lo} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$.**

■ Công của từ lực $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ tác dụng lên một hạt bằng không. Động năng của hạt đó không đổi (định lí về động năng). Chuẩn (độ lớn) của vận tốc trong khi chuyển động là một hằng số:

$$\frac{d\mathscr{E}_K}{dt} = \vec{F}.\vec{v} = 0 \text{ , vậy } \mathscr{E}_K = \text{cte và } v = \text{cte.}$$

■ TRƯỜNG $\vec{E}$ VÀ $\vec{B}$ BẮT CHÉO

Một hạt điện đặt trong các trường $\vec{E}$ và $\vec{B}$ bắt chéo, không đổi và không phụ thuộc thời gian sẽ có một vận tốc giạt :

$$\vec{v}_D = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2}.$$

■ CHUYỂN ĐỘNG TOÀN BỘ

• Một chuyển động toàn bộ của các điện tích là một dòng điện mà vectơ mật độ dòng điện khối $\vec{j}$ được xác định bởi $\vec{j} = nq\vec{v}$, trong đó n là số các hạt mang điện chuyển động trong một đơn vị thể tích và q là điện tích của mỗi hạt mang điện.

• Cường độ dòng điện đi qua một diện tích S ở thời điểm t bằng thông lượng của vectơ mật độ dòng điện qua diện tích S tại thời điểm đó, xác định bởi :

$$I = \iint_S \vec{j}.d\vec{S}.$$

■ ĐỊNH LUẬT OHM CỤC BỘ

• Vận tốc toàn bộ (hay vận tốc giạt) của các hạt (q, m) tham gia vào sự dẫn điện bằng $\vec{v} = \mu\vec{E}$, (μ là độ linh động của các hạt trên ($\mu = q\frac{\tau}{m}$). Đối với các electron $\mu = -e\frac{\tau}{m}$ là một số âm.

• Vectơ mật độ dòng điện khối $\vec{j}$ (tính bằng A. m^{-2}) tỉ lệ thuận với điện trường tác dụng lên vật dẫn, $\vec{j} = \gamma\vec{E}$, γ là *độ dẫn điện* của môi trường (hay độ dẫn điện "ômic") và có biểu thức :

$$\gamma = nq^2\frac{\tau}{m}. \text{ (} \tau \text{ xấp xỉ bằng } 10^{-14} \text{ s).}$$

• Sự tổng quát hóa định luật OHM cục bộ khi vật dẫn đặt trong đồng thời cả điện trường $\vec{E}$ và từ trường $\vec{B}$, cho : $\vec{j} = \gamma\vec{E} + R_H(\vec{j} \wedge \vec{B})$, trong đó hằng số HALL R_H bằng $\frac{1}{nq}$.

■ LỰC LAPLACE

• Lực LAPLACE tác dụng lên một nguyên tố vật dẫn thể tích dτ, trong có một dòng điện, véctơ mật độ $\vec{j}$ chạy qua và đặt trong một từ trường $\vec{B}$ cho bởi :

$$d\vec{F}_{La} = \vec{j} \wedge \vec{B}d\tau.$$

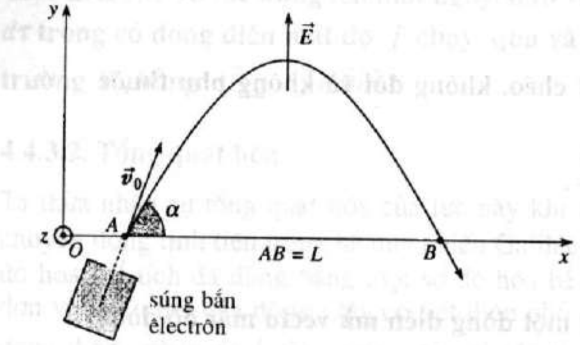
• Lực LAPLACE tác dụng lên một nguyên tố dòng điện $Id\vec{l}$,đặt trong một từ trường $\vec{B}$, cho bởi $d\vec{F}_{La} = Id\vec{l} \wedge \vec{B}$ và cho một đoạn mạch $\vec{F} = \int_A^B Id\vec{l} \wedge \vec{B}$.

• Tổng hợp lực tác dụng lên một mạch điện kín đặt trong một từ trường đều bằng không.

BÀI TẬP

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

1 Sự tụ tiêu các electrôn bằng một điện trường



Sau khi được tăng tốc bởi một hiệu điện thế V=10kV, các êlectrôn đi vào khe A, giả sử rất hẹp, trong một miền có một điện trường đều $\vec{E} = E\vec{e}_y$. Ta muốn thu các êlectrôn trên qua một khe B trổ trong mặt phẳng mờ (xAz) cách A một khoảng $AB = L = 20{,}0$ cm. Ta có thể điều chỉnh góc α, hợp bởi vectơ vận tốc $\vec{v}_o$ của êlectrôn tại A với trục (Ax), cũng như chuẩn (cường độ) và chiều của điện trường tĩnh $\vec{E}$. Vectơ $\vec{v}_o$ được giả thiết song song với mặt phẳng (xOy).

1) Tìm những giá trị tối ưu của α và $\vec{E}$ để thực hiện được sự tụ tiêu các êlectrôn trên, biết rằng chùm tới có một độ phân tán góc $\Delta\alpha$ nhỏ ? (α nằm trong khoảng $\left[\alpha_0 - \frac{\Delta\alpha}{2}\ ;\ \alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{2}\right]$).

2) Bề rộng của khe đặt tại B bằng $\Delta L = 2$ mm, hãy tìm một cỡ lớn chấp nhận được của độ phân tán góc $\Delta\alpha$ để không làm giảm rõ rệt cường độ của chùm êlectrôn đang nghiên cứu.

• *Lời giải*

1) Vận tốc v_0 của các êlectrôn bằng $v_0 = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$.

Phương trình vi phân của chuyển động của các êlectrôn là $m\frac{d\vec{v}}{dt} = -eE\vec{e}_y$.

Với $\vec{v}_{(t=0)} = v_0 \cos\alpha.\vec{e}_x + v_0 \sin\alpha.\vec{e}_y$, $x_{(t=0)} = 0$ *và* $y_{(t=0)} = 0$, *ta thu được các nghiệm sau :*

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha t \\ y = \dfrac{-eE}{2mv_0^2 \cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha. \end{cases}$$

y triệt tiêu với hai giá trị của x :

$$x_A = 0 \text{ và } x_B = 2\frac{mv_0^2}{eE}\sin\alpha\cos\alpha = 2\frac{V}{E}\sin 2\alpha.$$

Để x_B phụ thuộc ít vào α, phải có $\cos 2\alpha = 0$, tức $\alpha = \alpha_0 = \frac{\pi}{4}$.

Như vậy, ta sẽ phải chọn các điều kiện sau:

$$E = \frac{2V}{L} \text{ và } \alpha_0 = \frac{\pi}{4}.$$

Áp dụng số: $E = 10^5$ V m^{-1}.

2) Sự khai triển có giới hạn của x_B lân cận $\alpha = \alpha_0$ cho ta (nếu đặt $\alpha = \alpha_0 + \varepsilon$ và giới hạn ở các số hạng bậc 2):

$$x_B(\alpha) = x_B(\alpha_0) + \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{d^2x_B}{d\alpha}\right)_{\alpha=\alpha_0}$$

Biết rằng $x_B(\alpha) = L\sin 2\alpha$, ta có:

$$x_B(\alpha) - x_B(\alpha_0) = -2L\varepsilon^2.$$

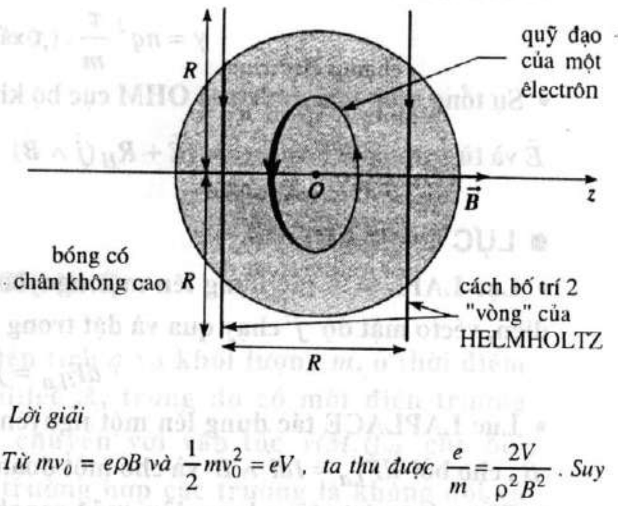
Vậy giá trị chấp nhận được của $\Delta\alpha$ cho bởi:

$$\frac{\Delta\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\Delta L}{2L}},\ \text{tức } \Delta\alpha = 0{,}14 rad \approx 8^o.$$

2 Phép đo $\frac{e}{m}$ với sự lắp ráp các cuộn dây của HELMHOLTZ

Trong cách lắp ráp sau đây, sau khi được tăng tốc bởi một hiệu điện thế $V = 2{,}5$ kV, trong một bóng thủy tinh có chân không cao, các êlectrôn vạch ra một quỹ đạo tròn bán kính $\rho = 3{,}27$ cm. Từ trường tạo ra bởi các cuộn dây, trong hình dạng helmholtz, là chuẩn đều có giá trị bằng 5,12 mT.

Từ đó hãy suy ra tỉ số $\frac{e}{m}$.



Lời giải

Từ $mv_0 = e\rho B$ và $\frac{1}{2}mv_0^2 = eV$, ta thu được $\frac{e}{m} = \frac{2V}{\rho^2 B^2}$. Suy ra $\frac{e}{m} = 1{,}8 \cdot 10^{11}$ C.kg^{-1} (độ chính xác về V không cho phép lấy quá nhiều các con số có nghĩa).

3 Sự lệch do từ trường

Với vận tốc $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$, các êlectrôn đi qua O vào một miền $\mathscr{D}$ rộng L, trong đó có một từ trường đều và không đổi $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Ta thừa nhận ngoài miền $\mathscr{D}$, từ trường bằng không. Giả thiết bề rộng L của miền thỏa mãn.

$$L << \frac{mv_0}{eB} = \rho \text{ hay } \frac{\omega L}{v_0} = \frac{eBL}{mv_0} << 1.$$

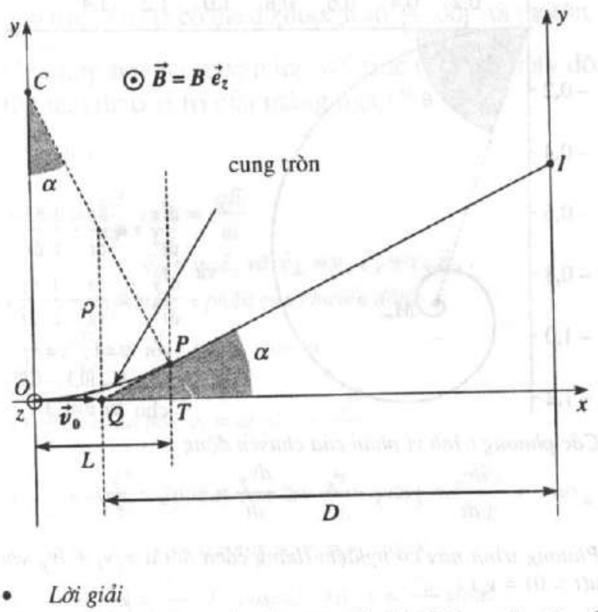
Cách điểm O một đoạn $D + \frac{L}{2}$ có đặt một màn huỳnh quang ($X_E = D + \frac{L}{2}$).

1) Xác định tung độ y_p của điểm P tại đó êlectrôn ra khỏi miền $\mathscr{D}$ và góc α hợp bởi vectơ vận tốc của êlectrôn tại điểm đó với trục Ox.

2) Suy ra vị trí của điểm chạm I trên màn.

3) Xác minh rằng giá của vectơ $\overrightarrow{PI}$ đi rất gần điểm Q có hoành độ $\frac{L}{2}$ với những giả thiết đã nêu.

Cho : $L = 1$cm ; hiệu điện thế tăng tốc $V = 10$ kV; $B = 3$mT và $D = 20$ cm.



- *Lời giải*

1) Trong $\mathscr{D}$ quỹ đạo của êlectrôn là một đường tròn tâm C ($x_C = 0$ và $y_C = \rho = \frac{mv_0}{eB}$).

Sau đó: $y_P = \rho(1 - \cos\alpha)$, với $L = \rho\sin\alpha$

và do vậy $y_P = L\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$, với $\sin\alpha = \frac{L}{\rho} = \frac{eBL}{mv_0}$.

hay $\sin\alpha \approx \alpha = \frac{eBL}{mv_0}$ và $y_P = \frac{L\alpha}{2} = \frac{eBL^2}{2mv_0}$

Áp dụng số : $v_o = \left(\frac{2eV}{m}\right)^{\frac{1}{2}} = 59{,}3.10^6 ms^{-1}$;

$\alpha = \frac{eBL}{mv_o} = 89.10^{-3}rad = 5{,}11^o$.

$\rho = 11{,}2cm$; $\frac{L}{\rho} = 0{,}09$ và $y_P = 0{,}445mm$.

2) Điểm chạm I có tung độ : $y_I = y_P + \frac{D-L}{2}\tan(\alpha) = D\alpha = \frac{eBL}{mv_o}$.

Áp dụng số : $y_I = 1{,}78cm$

3) $OQ = \rho\sin\frac{\alpha}{2} \approx \rho\frac{\alpha}{2} = \frac{L}{2}$ Đường thẳng PI đi qua điểm Q ở giữa OT.

<u>Chú ý :</u>

Hãy lưu ý sự khác nhau chủ yếu giữa độ lệch từ (y_I tỷ lệ nghịch với mv_o) và độ lệch tĩnh điện (y_I tỷ lệ nghịch với $\frac{1}{2}mv_o^2$).

Sau này điều đó được dùng sao cho có lợi để tách các đồng vị (bài tập 7)

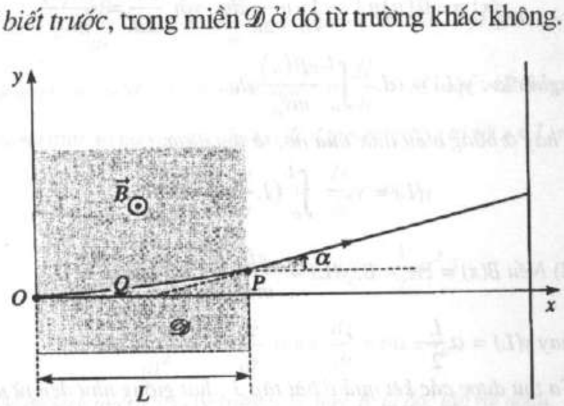
4 Chuyển động của một êlectrôn trong một từ trường ngang

Trong *bài tập 3*, đã đề cập đến sự nghiên cứu độ lệch do từ trường với giả thiết trường $\vec{B}$ đều trong miền $\mathscr{D}$ và bằng không ở những điểm khác.

Ta hãy tổng quát hóa nghiên cứu này cho trường hợp thực tế hơn trong đó $\vec{B}$ phụ thuộc hoành độ x theo quy luật :

$$\vec{B} = B(x)\vec{e}_z$$

đã biết trước, trong miền $\mathscr{D}$ ở đó từ trường khác không.



Một êlectrôn đi vào điểm O trong miền này với vận tốc ban đầu $\vec{v} = v_o.\vec{e}_x$. Ta giới hạn ở trường hợp một độ lệch nhỏ, khi ra khỏi miền $\mathscr{D}$, góc α tại điểm P giả thiết nhỏ (tính bằng radian).

1) Trong các điều kiện trên, chứng minh rằng tung độ của điểm P có biểu thức :

$$y_P = \frac{e}{mv_o}\int_0^L (L-x)B(x)dx.$$

2) Chứng minh rằng nếu $B(x)$ đều trong miền $\mathcal{D}$ và bằng không ở ngoài $\mathcal{D}$ thì ta thấy lại kết quả của *bài tập 3*.

- *Lời giải*

1) Từ trường là độc lập đối với thời gian, động năng của hạt là một hằng số của chuyển động $v_x^2 + v_y^2 = v_o^2$.

Ta giới hạn ở các độ lệch nhỏ, vậy $|v_y| << |v_x|$

Bằng cách bỏ qua các số hạng bậc 2, ta thu được : $v_x = v_o$.

Chiếu phương trình vi phân của chuyển động $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{v} \wedge B(x)\vec{e}_z$ *xuống trục (Oy) ta thu được :*

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{eB(x)}{m}v_x = \frac{eB(x)}{m}v_o.$$

Biết rằng : $\dfrac{d^2y}{dt^2} = v_o^2\dfrac{d^2y}{dx^2}$ *(vì $x = v_o t$), phương trình này được viết lại là :*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{eB(x)}{mv_o}.$$

Độ lệch là nhỏ nên $\dfrac{dy}{dx} = \theta(x)$ *là góc hợp bởi vectơ vận tốc với trục (Ox).*

Lấy tích phân phương trình trên, ta có :

$$\theta(x) = \frac{dy}{dx} = \int_o^x \frac{eB(u)}{mv_o}du \text{ ; vì } \theta(0) = 0.$$

Chú ý rằng : $\alpha = \displaystyle\int_o^L \frac{eB(u)}{mv_o}du$.

Tương tự $y(x) = \displaystyle\int_o^x \theta(u)du$*, mà phép lấy tích phân từng phần cho :*

$$y(x) = \left[\theta(u)u\right]_o^x - \int_o^x u\frac{d\theta}{du}du \text{, với } \frac{d\theta}{du} = \frac{eB(u)}{mv_o},$$

nghĩa là : $y(L) = \alpha L - \displaystyle\int_o^L \frac{eB(u)}{mv_o}du$.

Thay α bằng biểu thức của nó, ta thu được :

$$y(L) = y_P = \int_o^L (L-x)\frac{eB(x)}{mv_o}dx.$$

2) Nếu $B(x) = cte = B$, $y(L) = \dfrac{eB}{mv_o}\dfrac{L^2}{2}$ *và* $\alpha = \dfrac{eB}{mv_o}L$,

hay $y(L) = \alpha\dfrac{L}{2}$.

Ta thu được các kết quả ở bài tập 3 : hạt giống như đến từ một điểm Q nằm tại $\dfrac{L}{2}$.

5 Chuyển động của một hạt mang điện trong một từ trường có lực ma sát

Một hạt có điện tích $q = e$ và khối lượng m, lúc đầu ở O có một vận tốc $\vec{v}_o = v_o\vec{e}_x$, dịch chuyển trong một môi trường chất lưu trong một miền không gian ở đó có một từ trường đều :

$$\vec{B} = B.\vec{e}_z.$$

Hạt này còn chịu một lực ma sát giả thiết có dạng :

$$\vec{F}_{ms} = -k\vec{v} \ \ (k \text{ là hằng số dương}).$$

Hãy mô tả hành vi của hạt này. Ta có thể đưa vào một hằng số thời gian τ và mạch số tiêu biểu $\omega = \dfrac{eB}{m}$. Trước hết hãy dự đoán xem cái gì sẽ xảy ra, sau đó, nếu có thể, hãy xem xét một cách xử lí vấn đề bằng số và cuối cùng một cách xử lí bằng giải tích.

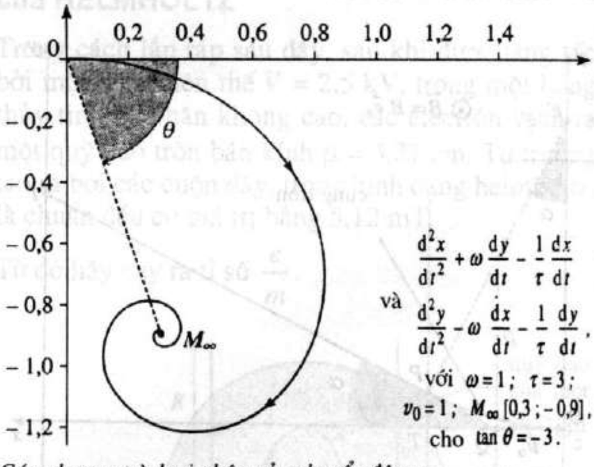
- *Lời giải :*

Chẳng hạn trước mắt ta có các prôtôn trong một chất lưu quá bão hòa (prôtôn trong một buồng bọt). Những bọt khí được tạo ra trên đường đi của prôtôn và cụ thể hóa quỹ đạo của nó. Phương pháp này được dùng để tìm ra các hạt.

Phương trình vi phân của chuyển động là : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B} - k\vec{v}$,

nghĩa là : $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -\omega\vec{e}_z \wedge \vec{v} - \dfrac{\vec{v}}{\tau}$, *với* $\omega = \dfrac{qB}{m}$ *và* $\tau = \dfrac{m}{k}$.

Trong lúc chuyển động, chuẩn (độ lớn) của $\vec{v}$ *giảm (do ảnh hưởng của lực ma sát) và bán kính cong của quỹ đạo* $\left(\rho = \dfrac{mv}{qB}\right)$ *giảm: hạt "cuộn lại" xung quanh một điểm tiệm cận* M_∞ *; đó là cái mà ta thấy dựa trên sự mô phỏng.*



$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega\frac{dy}{dt} - \frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt} \quad \text{và} \quad \frac{d^2y}{dt^2} - \omega\frac{dx}{dt} - \frac{1}{\tau}\frac{dy}{dt},$$

với $\omega = 1$; $\tau = 3$; $v_0 = 1$; $M_\infty[0,3 ; -0,9]$, cho $\tan\theta = -3$.

Các phương trình vi phân của chuyển động :

$$\frac{dv_x}{dt} = +\omega v_y - \frac{v_x}{\tau} \text{ và } \frac{dv_y}{dt} = +\omega v_x - \frac{v_y}{\tau}$$

Phương trình này có nghiệm (bằng cách đặt $u = v_x + iv_y$*, với* $u(t = 0) = v_o$*) :*

$$\frac{du}{dt} + \left(i\omega + \frac{1}{\tau}\right)u = 0 \text{, suy ra } u = v_o e^{-\left(i\omega + \frac{1}{\tau}\right)t},$$

nghĩa là : $v_x = v_o e^{-\frac{t}{\tau}}\cos\omega t$ *và* $v_y = -v_o e^{-\frac{t}{\tau}}\sin\omega t$.

$$\text{Vậy : } x = \frac{v_o\tau}{1+\omega^2\tau^2}\left[\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\cos\omega t\right) + \omega\tau e^{-\frac{t}{\tau}}\sin\omega t\right]$$

$$\text{và } y = \frac{v_o\tau}{1+\omega^2\tau^2}\left[-\omega\tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\cos\omega t\right) + e^{-\frac{t}{\tau}}\sin\omega t\right].$$

Các tọa độ của điểm M sẽ là :

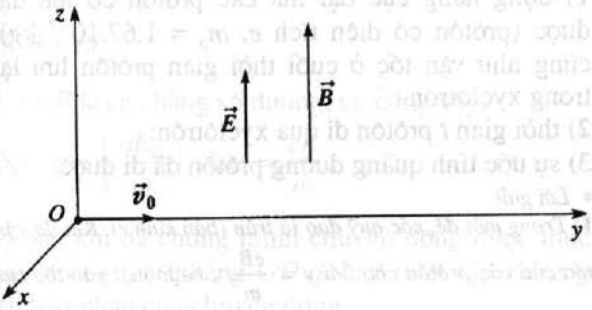
$$M_\infty\left[x=\frac{v_o\tau}{1+\omega^2\tau^2};\ y=-\frac{v_o\tau}{1+\omega^2\tau^2}\omega\tau\right]$$, *tức là* $\tan\theta = -\omega\tau$.

Đó chính là điều mà ta xác minh sự mô phỏng.

6 Prôtôn trong các trường $\vec{E}$ và $\vec{B}$ song song

Các prôtôn được phát ra ở O bởi một nguồn chuẩn điểm, với vận tốc ban đầu $\vec{v}_o = v_o\vec{e}_y$. Hãy khảo sát chuyển động tiếp sau của chúng khi có mặt các trường điện và từ đều :

$\vec{E} = E\vec{e}_z$ và $\vec{B} = B\vec{e}_z$ với $E > 0$ và $B > 0$.



Chứng minh rằng bằng cách đặt đúng các màng ngăn trên trục (Oz) ta có thể đo được tỉ số $\frac{q}{m}$ đối với prôtôn.

Góc hợp bởi vectơ vận tốc với trục (Oz) sẽ thay đổi thế nào theo vị trí của màng ngăn ?

• *Lời giải*

Đặt $\omega = \frac{qB}{m}$ *và* $a = \frac{qE}{m}$

$$\vec{v}_{//} = v_z.\vec{e}_z \text{ và } \vec{v}_\perp = v_x.\vec{e}_x + v_y.\vec{e}_y.$$

Các phương trình vi phân của chuyển động :

$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{qE}{m}\vec{e}_z + \frac{q}{m}\vec{v}\wedge B\vec{e}_z$ *cho ta :*

• $\frac{dv_{//}}{dt} = a$ *do đó :* $v_{//} = at$ *và* $z = \frac{at^2}{2}$

• $\frac{d\vec{v}_\perp}{dt} = -\omega\vec{e}_z\wedge\vec{v}_\perp$, *hay còn là :* $\frac{dv_x}{dt} = \omega v_y$ *và* $\frac{dv_y}{dt} = -\omega v_x$;

nghĩa là : $v_x = v_o\sin\omega t$ *và* $v_y = v_o\cos\omega t$

$$x = \frac{v_o}{\omega}(1 - \cos\omega t) \quad \text{và} \quad y = \frac{v_o}{\omega}\sin\omega t.$$

Với $t_n = nT = \frac{2\pi}{\omega}.n$, *hạt tiếp xúc với trục (Oz) :*

$$z_n = 2\pi^2\frac{mE}{qB^2}n^2.$$

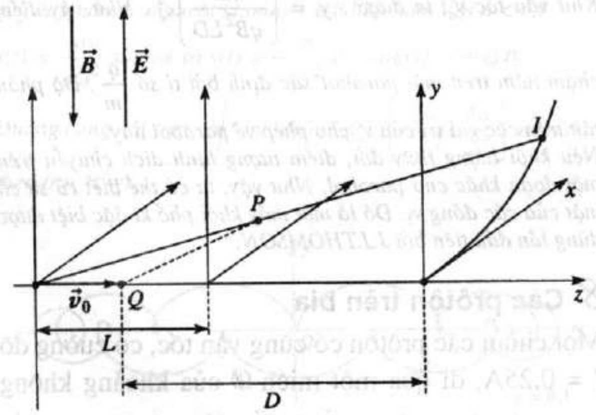
Tại những thời điểm đó : $\vec{v}_n = at_n\vec{e}_z + v_o\vec{e}_y$ *và*

$$\tan\alpha_n = \left|\frac{v_o}{v_{//}}\right| = \frac{v_o\omega}{an2\pi} = \frac{v_oB}{2\pi E}\frac{1}{n}$$

7 Phương pháp các parabol

Các iôn dương khối lượng m và điện tích q, chuyển động với vận tốc $\vec{v}_o = v_o\vec{e}_z$, đi vào một miền có bề rộng L trong đó có các trường đều và không đổi $\vec{E} = E\vec{e}_y$ và $\vec{B} = -B\vec{e}_y$ (E và B dương).

Giả thiết khoảng cách L rất nhỏ hơn $\frac{mv_o}{qB}$ và nghiên cứu (với sự gần đúng trên) các độ lệch do các trường $\vec{E}$ và $\vec{B}$ tạo ra. Hãy xác định điểm chạm I của hạt trên màn huỳnh quang đặt cách điểm Q một khoảng D, điểm giữa của miền trong đó có các trường $\vec{E}$ và $\vec{B}$.



• *Lời giải*

Đặt $\omega = \frac{qB}{m}$ *và* $a = \frac{qE}{m}$ *(a đồng nhất với một gia tốc).*

Phương trình vectơ của chuyển động là : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + q\vec{v}\wedge\vec{B}$ *và các phương trình vô hướng trong hệ tọa độ đang xét (có giá trị với x < L) :*

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega\frac{dz}{dt} \quad (\text{cho } \frac{dx}{dt} = \omega z),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a \quad (\text{mà nghiệm là } y = \frac{1}{2}at^2)$$

$$\text{và } \frac{d^2z}{dt^2} = -\omega\frac{dz}{dt} \quad (\text{cho } \frac{dz}{dt} = \omega x + v_o).$$

Các độ lệch tạo ra bởi các trường $\vec{E}$ *hay* $\vec{B}$ *là độc lập với nhau.*

Phương trình : $\frac{d^2z}{dt^2} = -\omega^2 z$ *có nghiệm* $z = \left(\frac{v_o}{\omega}\right)\sin\omega t$,

từ đó : $x = \left(\frac{v_o}{\omega}\right)(1 - \cos\omega t)$.

Biết rằng $\omega\tau << 1$ *(với* $\tau = \frac{L}{v_o}$ *là cỡ lớn của thời gian* τ *cần thiết để hạt vượt qua khoảng cách L), ta có thể viết :*

$z = v_o t$ *và* $x = \frac{v_o\omega t^2}{2}$ $(\omega t << 1)$ *ở mức gần đúng bậc 2.*

Như vậy hạt vượt qua mặt phẳng $z = L$ vào lúc $\tau = \dfrac{L}{v_o}$ và các tọa độ của điểm P tại đó hạt ra khỏi các trường là $x_p = \dfrac{\omega L^2}{2v_o}$ và $y_p = \dfrac{aL^2}{2v_o^2}$.

Chuyển động sau đó là chuyển động thẳng ; đường thẳng đi qua điểm Q có tọa độ $\left(0,0,\dfrac{L}{2}\right)$.

Các tọa độ của điểm chạm I là :

$$x_I = \frac{\omega L^2}{2v_o} \text{ và } y_I = \frac{aLD}{v_o^2}.$$

Kết quả này có thể được viết lại là :

$$x_I = \frac{qLBD}{mv_o} \text{ và } y = \frac{qELD}{mv_o^2}.$$

Khử vận tốc v_o, ta được : $y_I = \left(\dfrac{mE}{qB^2LD}\right)x_I^2$. Như vậy điểm chạm nằm trên một parabol xác định bởi tỉ số $\dfrac{q}{m}$. Độ phân tán trên các giá trị của v_o cho phép vẽ parabol này.

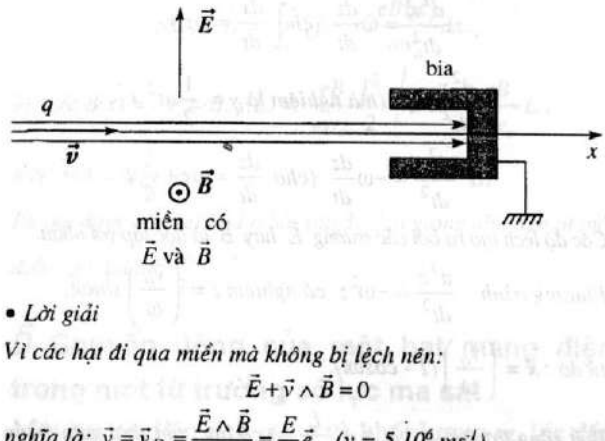
Nếu khối lượng thay đổi, điểm tượng hình dịch chuyển trên một đoạn khác của parobol. Như vậy, ta có thể biết rõ sự có mặt của các đồng vị. Đó là một máy khối phổ kí đặc biệt được dùng lần đầu tiên bởi J.J.THOMSON.

8 Các prôtôn trên bia

Một chùm các prôtôn có cùng vận tốc, có cường độ $I = 0{,}25$A, đi qua một miền $\mathcal{D}$ của khoảng không gian có các trường $\vec{E}$ và $\vec{B}$ đều và không đổi, ngang và bắt chéo $\left(\vec{E}.\vec{B} = 0\right)$ mà không bị lệch.

Sau đó, chùm này bị hấp thụ bởi một cái bia kim loại đã được nối đất. Hãy xác định lực trung bình tác dụng lên bia.

Cho : $E = 150\text{kVm}^{-1}$ và $B = 30\text{mT}$.



- *Lời giải*

Vì các hạt đi qua miền mà không bị lệch nên:

$$\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = 0$$

nghĩa là: $\vec{v} = \vec{v}_D = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2} = \dfrac{E}{B}\vec{e}_x$ *($v = 5.10^6$ ms^{-1}).*

Mỗi prôtôn có một động lượng $\vec{p} = mv\vec{e}_x$. Số prôtôn dn tới bia trong khoảng thời gian dt (cho bởi $dn = \dfrac{I}{e}dt$) có biến thiên động lượng bằng $\Delta\vec{p} = -\vec{p}$. Lực do bia tác dụng lên các prôtôn này bằng:

$$dn.\Delta\vec{p} = \vec{F}.dt = -\frac{I}{e}mv\vec{e}_x dt \text{ tức là } \vec{F}_{bia \to prôtôn} = -\frac{I}{e}mv\vec{e}_x.$$

Theo nguyên lí về các tác dụng tương hỗ, bia sẽ chịu một lực trực đối : $\vec{F}_{prôtôn \to bia} = \dfrac{I}{e}mv\vec{e}_x$.

Áp dụng số: F = 13mN.

9 Xyclôtrôn

Giả sử bán kính trong của các đê của một xyclôtrôn bằng $R = 0{,}5$m, từ trường tạo ra bởi một nam châm siêu dẫn bằng $B = 2T$, hiệu điện thế tăng tốc cực đại bằng 100 kV. Hãy xác định :

1) động năng cực đại mà các prôtôn có thể đạt được (prôtôn có điện tích e, $m_p = 1{,}67.10^{-27}$ kg), cũng như vận tốc ở cuối thời gian prôtôn lưu lại trong xyclôtrôn ;

2) thời gian t prôtôn đi qua xyclôtrôn;

3) sự ước tính quãng đường prôtôn đã đi được.

- *Lời giải*

1) *Trong mỗi đê, các quỹ đạo là tròn (bán kính r). Khi đó vận tốc của các prôtôn cho bởi $v = \dfrac{eB}{m}r$, hoặc một vận tốc cực đại $v_{max} = \dfrac{eBR}{m_p}$ và một động năng cực đại*

$$\mathscr{E}_{Kmax} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{e^2R^2B^2}{2m_p}$$

Áp dụng số : $v_{max} = 9{,}6.10^7 ms^{-1}$ và $\mathscr{E}_{max} = 48MeV$ (<< 1GeV).

<u>Chú ý :</u>

$\left(\dfrac{v_{max}}{c}\right)^2 = 0{,}09$*: như vậy các giá trị ở trên là đúng tới 10%.*

Để có các kết quả chính xác hơn, ta phải dùng tới các công thức của cơ học tương đối tính.

2) *Một lần đi qua trong mỗi đê được thực hiện trong thời gian $\dfrac{T}{2} = \dfrac{m_p\pi}{eB}$; số nửa vòng bằng : $N = \dfrac{\mathscr{E}_{K\,max}}{eU} = \dfrac{eB^2R^2}{2Um_p}$, suy ra thời gian prôtôn đi qua trong xyclôtrôn : $t = N.\dfrac{T}{2} = \dfrac{\pi BR^2}{2U}$.*

Áp dụng số : $t = 7{,}9\mu s$; $N = 480$.

3) *Ở nửa vòng thứ n, năng lượng bằng $neU = \dfrac{1}{2}m_pv_n^2$.*

Biết rằng $r_n = \dfrac{v_n}{\omega}$, quãng đường đi được trong nửa vòng này bằng $\pi r_n = l_1\sqrt{n}$ với $l_1 = \pi\sqrt{\dfrac{2m_pU}{eB^2}} = 0{,}072m$.

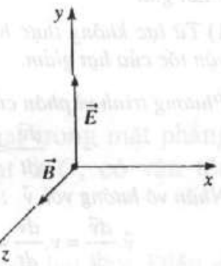
Quãng đường đi toàn bộ bằng : $L = l_1 \sum\limits_{n=1}^{N} \sqrt{n} = 500m$.

Khi tính toán, ta dùng công thức gần đúng

$$f(a) + f(a+h) + ... + f(b) = \frac{1}{h}\int_a^b f(x)dx + \frac{1}{2}(f(a) + f(b)).$$

10 Chuyển động của một prôtôn trong các trường $\vec{E}$ và $\vec{B}$ bắt chéo.

Một prôtôn đi qua O với vận tốc ban đầu nhỏ không đáng kể (giả thiết bằng không) vào một miền không gian trong đó có các trường $\vec{E}$ và $\vec{B}$ có biểu thức :



$\vec{E} = E_o\cos(\omega_1 t)\vec{e}_y$

và $\vec{B} = B\vec{e}_z$

E_o và B là các hằng số dương, ω_1 cũng vậy.

Đặt : $a = \left(\dfrac{aE_o}{m}\right)$ và $\omega = \dfrac{eB}{m}$.

1) Sau khi đã chứng minh chuyển động được thực hiện trong mặt phẳng (xOy), hãy thiết lập phương trình vi phân của chuyển động.

2) Hãy xem xét một cách giải bằng số hoặc bằng giải tích các phương trình đó. Bằng cách đặt $\omega_1 = n\omega$, hãy khảo sát đặc tính của quỹ đạo trong các trường hợp giới hạn $n << 1$, rồi $n >> 1$. Bạn có dự đoán gì với $n = 1$? Hãy nghiệm lại bằng cách tìm một nghiệm dưới dạng $y = \alpha t\sin(\omega t)$

• *Lời giải*

1) Nếu vận tốc v của prôtôn nằm trong mặt phẳng (xOy), nó sẽ nằm mãi mãi trong đó vì lực điện và lực từ nằm trong mặt phẳng đó. Thực vậy, không có thành phần lực nào nằm theo $\vec{e}_Z$, vậy vận tốc $\vec{v}_z$ bằng không đổi. Mà ở $t = 0$, $\vec{v} = \vec{0}$, vậy $v_z = 0$.

Các phương trình vi phân của chuyển động là :

$$\ddot{x} = \omega\dot{y} \quad (1)$$

$$\ddot{y} = a\cos(\omega_1 t) - \omega\dot{x} \quad (2)$$

2) Đem nghiệm của (1) ($\dot{x} = \omega y$) vào phương trình (2), ta được :

$$\ddot{y} = \omega^2 y = a\cos\omega_1 t,$$

hay : $y(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + \dfrac{a\cos\omega_1 t}{\omega^2 - \omega_1^2}$.

Với các điều kiện ban đầu $y(0) = 0$ và $\dot{y}(0) = 0$, ta có ($\omega \neq \omega_1$) :

$$y(t) = \frac{a}{\omega^2 - \omega_1^2}\,[\cos\omega_1 t - \cos\omega t]$$

và
$$x(t) = \frac{a}{\omega^2 - \omega_1^2}\left[\frac{\omega}{\omega_1}\sin\omega_1 t - \sin\omega t\right].$$

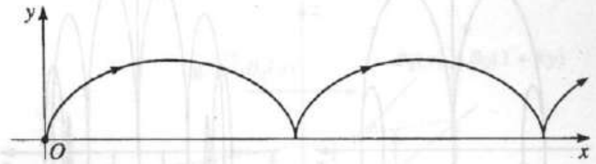
Đặt $\omega_1 = n\omega$ và khảo sát các mô phỏng theo các nghiệm của các phương trình

$$\ddot{x} = \omega\dot{y}$$
$$\ddot{y} = a\cos(n\omega t) - \omega\dot{x},$$

với $\omega = 2\pi$ và $a = 1$ với các giá trị khác nhau của n.

• **S.1.** $n = 0$:

ta thu được quỹ đạo xyclôit cổ điển của chuyển động của một điện tích (q, m) trong $\vec{E}$ và $\vec{B}$ bắt chéo, không phụ thuộc thời gian.

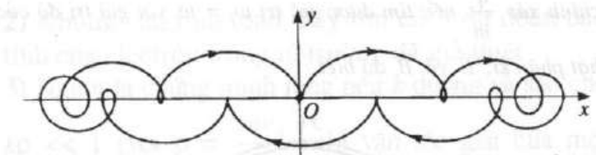


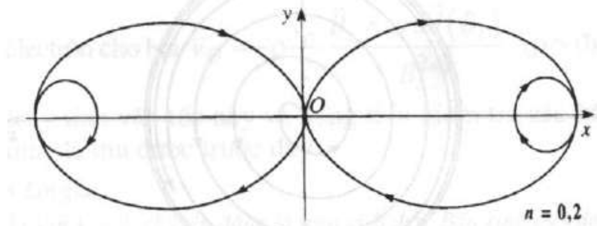
• **S.2.** $n = 0{,}1$ và **S.3.** $n = 0{,}2$:

quỹ đạo nằm trong một khoảng cách hữu hạn. Với $n << 1$:

$x(t) \approx \dfrac{a}{n\omega^2}\sin n\omega t$ *và* $y(t) \approx -\dfrac{a}{\omega^2}[\cos(n\omega t) - \cos\omega t]$.

Đường cong nội tiếp với hình chữ nhật : $\left[\dfrac{2a}{n\omega^2}; \dfrac{4a}{\omega^2}\right]$ *nằm dọc theo trục (Ox).*

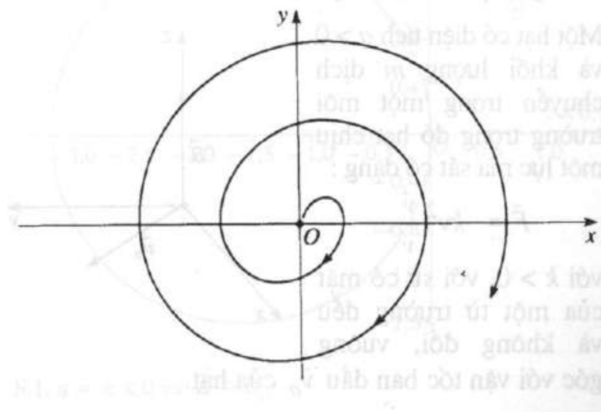




• **S.4.** $n = 1$

$y(t) = \dfrac{a}{2\omega}t\sin\omega t$ *và* $x(t) = \dfrac{a}{2\omega^2}[\sin\omega t - (\omega t)\cos\omega t]$,

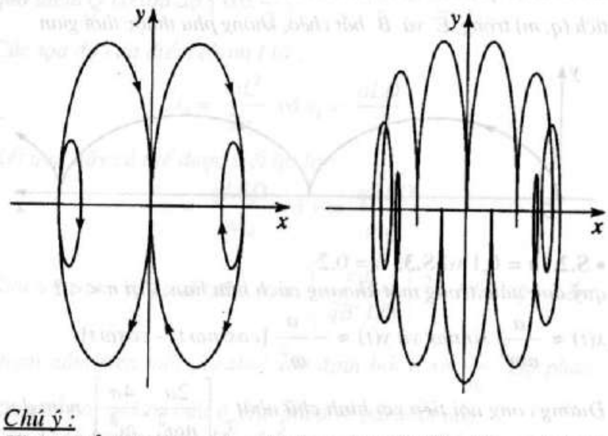
quỹ đạo phân kì.



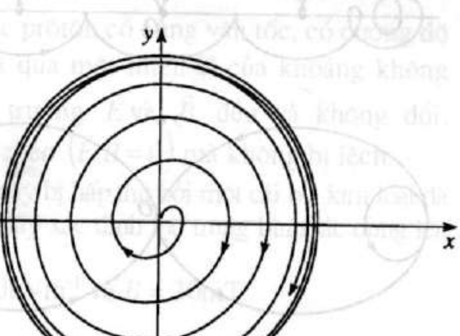
• **S.5.** $n = 5$ và **S.6.** $n = 10$:
Quỹ đạo vẫn ở khoảng cách hữu hạn.

Với $n >> 1$, $x(t) \approx \frac{a}{n^2\omega^2}\sin\omega t$ *và* $y(t) = -\frac{a}{n^2\omega^2}[\cos(n\omega t) - \cos\omega t]$.

Đường cong nội tiếp trong một hình chữ nhật $\left[\frac{2a}{n^2\omega^2};\frac{4a}{n^2\omega^2}\right]$.



Chú ý :
Không kể giá trị n = 0, quỹ đạo phân kì đối với n = 1. Tính chất này đã có một ứng dụng, máy omêgatròn : có thể "đo" chính xác $\frac{q}{m}$ *nếu tìm được giá trị* $\omega_1 = \omega$, *với giá trị đó các hạt phân kì.* $\vec{E}$ *và* $\vec{B}$ *đã biết.*



11 Chuyển động của một hạt mang điện trong một từ trường với ma sát

Một hạt có điện tích $q > 0$ và khối lượng m dịch chuyển trong một môi trường trong đó hạt chịu một lực ma sát có dạng :

$$\vec{F} = -kv^2\frac{\vec{v}}{v},$$

với $k > 0$, với sự có mặt của một từ trường đều và không đổi, vuông góc với vận tốc ban đầu $\vec{v}_o$ của hạt.

1) Chứng tỏ rằng chuẩn (độ lớn) của vận tốc của hạt giảm theo thời gian. Vận tốc bằng không có thể đạt được hay không sau một thời gian hữu hạn ?

2) Nếu có thể, hãy kiểm tra các kết quả bằng cách nghiên cứu trên máy vi tính.

• *Lời giải*

1) *Từ lực không thực hiện công. Lực ma sát có tác dụng làm vận tốc của hạt giảm.*

Phương trình vi phân của chuyển động là :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{qB}{m}\vec{e}_z \wedge \vec{v} - \frac{k}{m}v\vec{v}$$

Nhân vô hướng với $\vec{v}$:

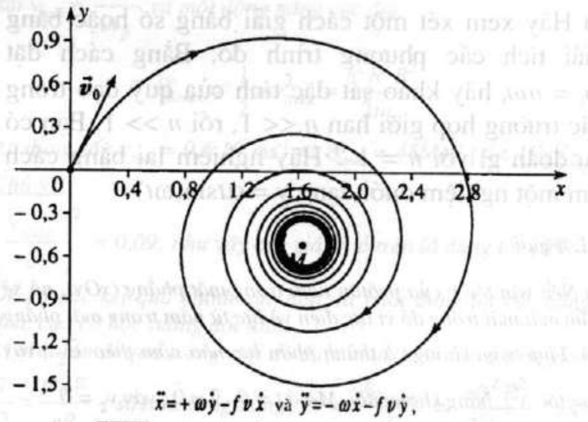
$$\vec{v}.\frac{d\vec{v}}{dt} = v.\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v^3,\ \text{hoặc}\ \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}.v^2,$$

và bằng cách tích phân, ta thu được :

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_o} = \frac{k}{m}t,\ \text{nghĩa là}\ v = \frac{v_o}{1 + v_o\frac{k}{m}t}$$

Chuyển động thực hiện trong mặt phẳng (xOy) và vận tốc v triệt tiêu sau một thời gian vô hạn.

2) *Vận tốc giảm theo thời gian. Bán kính cong của quỹ đạo giảm. Ta thu được một "đường xoắn ốc" quấn xung quanh một điểm tiệm cận giới hạn* M_∞ *như mô phỏng trên hình vẽ.*



$\ddot{x} = +\omega\dot{y} - f v\dot{x}$ và $\ddot{y} = -\omega\dot{x} - f v\dot{y}$,

với $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$; $\omega = 2\pi$; $f = 1$; $\dot{x}_0 = 0,5$; $\dot{y}_0 = 1$; $x_0 = 0$ và $y_0 = 0$.

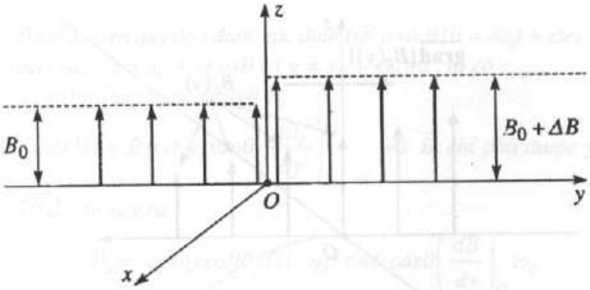
12 Vận tốc giật

Một hạt có khối lượng m và điện tích q (dương) chuyển động trong một từ trường bất biến với thời gian, nhưng lại không đồng nhất ở $y = 0$. Các đường sức từ trường song song với trục (Oz) ; từ trường phụ thuộc y theo quy luật :

$$\vec{B}(y < 0) = B_o\vec{e}_z$$

và $$\vec{B}(y > 0) = (B_o + \Delta B)\vec{e}_z,$$

Với $B_o > 0$ và $\Delta B > 0$.



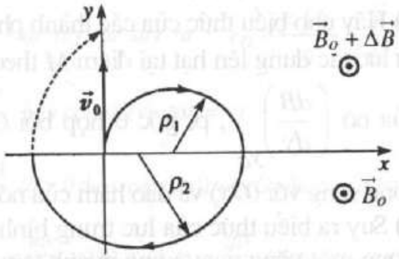
Ta giới hạn chuyển động của hạt trong mặt phẳng (xOy). Giả thiết lúc $t = 0$, hạt ở O, có vận tốc $\vec{v}_o = v_o.\vec{e}_y$.

Hãy khảo sát chuyển động trôi của hạt này. Điều gì xảy ra nếu $q < 0$?

• *Lời giải*

Vận tốc vẫn thường xuyên có độ lớn (chuẩn) bằng v_o. Xét một điện tích $q > 0$. Nếu $y > 0$, hạt vạch một nửa đường tròn bán kính : $\rho_1 = \dfrac{mv_o}{q(B_o + \Delta B)}$ trong thời gian $\tau_1 = \dfrac{\pi\rho_1}{v_o}$.

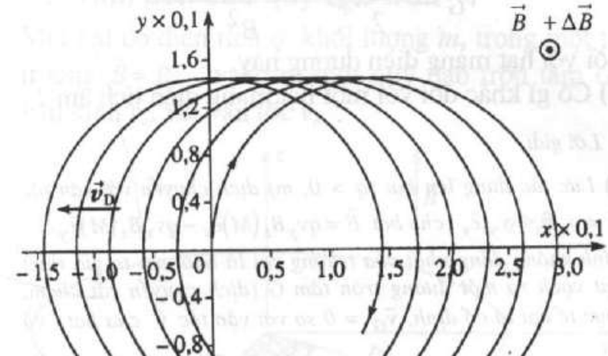
Nếu $y < 0$, hạt vạch một nửa đường tròn bán kính : $\rho_2 = \dfrac{mv_o}{qB_o}$ trong thời gian $\tau_2 = \dfrac{\pi\rho_2}{v_o}$ $(\rho_2 > \rho_1)$.



Do vậy có một vận tốc giạt V_D, theo chiều x giảm, được xác định bởi :

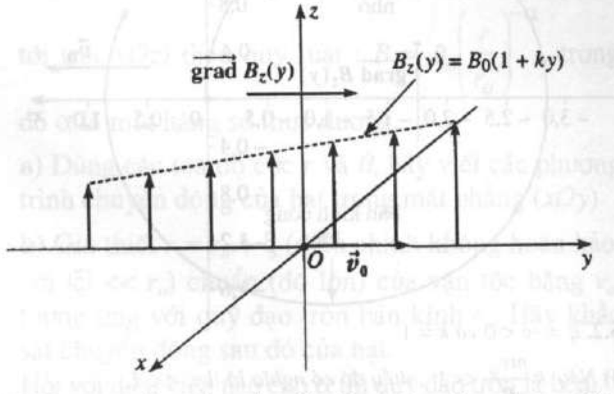
$$\vec{V}_D = -2\frac{\rho_2 - \rho_1}{\tau_1 + \tau_2}\vec{e}_x = -\frac{2v_o}{\pi}\frac{\Delta B\vec{e}_x}{2B + \Delta B}$$

Vận tốc giạt đổi chiều nếu $q < 0$.



13 Vận tốc giạt

Một êlectrôn chuyển động trong mặt phẳng (xOy), trong có một từ trường không đổi nhưng không đều, biến thiên với vị trí theo quy luật $\vec{B} = B_o(1 + ky)\vec{e}_z$, k là một hằng số dương. Giả sử lúc $t = 0$, êlectrôn ở gốc O của hệ tọa độ $(0 ; x, y, z)$ và có vận tốc $\vec{v}_o = v_o\vec{e}_y$.



1) Trong trường hợp $k = 0$, êlectrôn sẽ vạch ra quỹ đạo nào ?

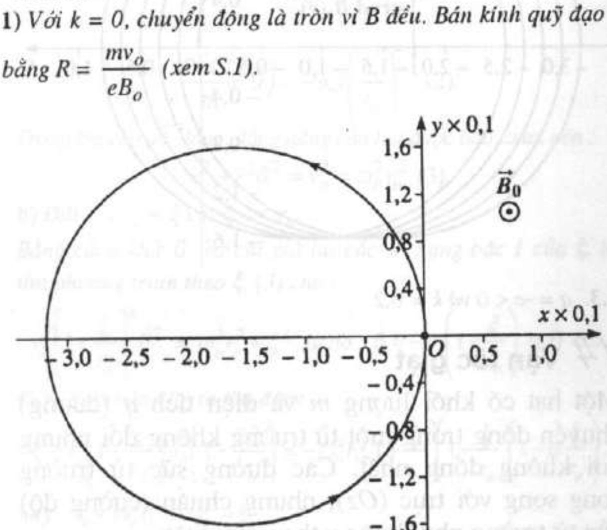
2) Không cần tính toán, hãy tìm cách dự đoán đặc tính của êlectrôn trong từ trường đã giả thiết

3) Người ta chứng minh rằng nếu k dương và sao cho $k\rho \ll 1$ (với $\rho = \dfrac{mv_o}{eB_o}$) thì vận tốc giạt của một êlectrôn cho bởi $\vec{v}_D = -\rho\dfrac{v_o}{2}\dfrac{\vec{B}_z \wedge \overrightarrow{grad}(B_z)}{B_z^2}$ $(\rho > 0)$.

Hãy tính vận tốc này và đồng thời kiểm tra các kết quả đã thu được trước đây .

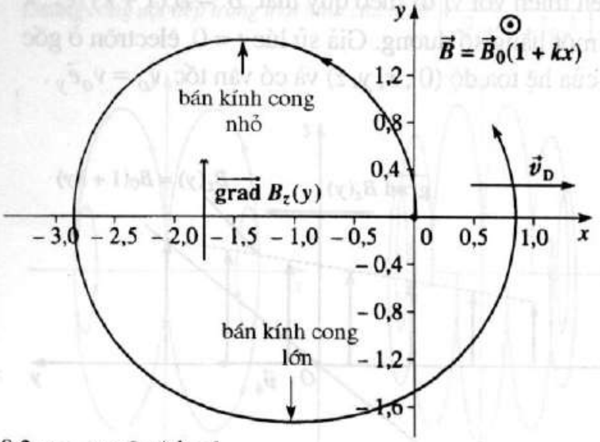
• *Lời giải*

1) Với $k = 0$, chuyển động là tròn vì B đều. Bán kính quỹ đạo bằng $R = \dfrac{mv_o}{eB_o}$ (xem S.1).



S.1. $q = -e < 0$ và $\vec{B} = \vec{B}_o$.

2) Bán kính cong của quỹ đạo (tỉ lệ nghịch với chuẩn của từ trường) càng nhỏ nếu y càng lớn. Suy ra bản vẽ trên mô phỏng (S.2) kèm theo. Có một chuyển động giạt theo chiều x dương.



S.2. $q = -e < 0$ *và* $k = 1$

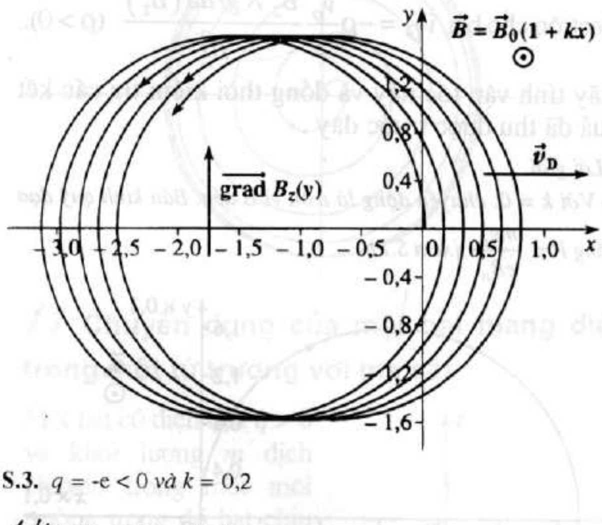
3) *Nếu* $k\frac{mv_o}{eB_o} << 1$ *, điều đó có nghĩa là* $|ky| << 1$.

$\overrightarrow{gradB} = kB_o\vec{e}_y$;

$v_D = -\frac{1}{2}v_0\frac{mv_0}{eB_0}B\vec{e}_z \wedge \frac{B_0k\vec{e}_y}{B^2}$, *với* $B = B_o(1 + kx) \approx B$,

nghĩa là : $v_D = +\frac{1}{2}\frac{v_o^2}{eB_o}k\vec{e}_x$.

Đó chính là điều mà ta thu được trên mô phỏng 3.

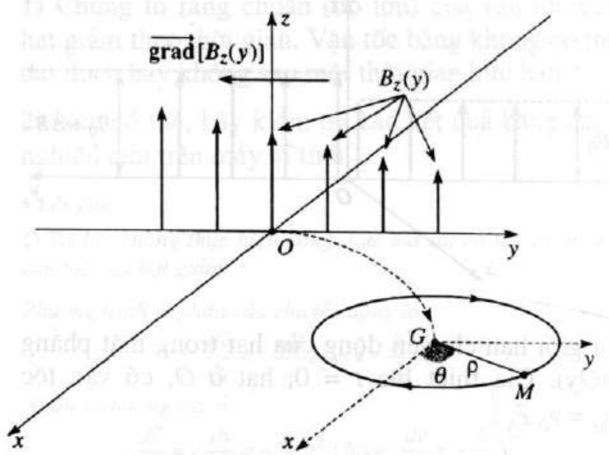


S.3. $q = -e < 0$ *và* $k = 0{,}2$

14 Vận tốc giạt

Một hạt có khối lượng m và điện tích q (dương) chuyển động trong một từ trường không đổi nhưng hơi không đồng nhất. Các đường sức từ trường song song với trục (Oz), nhưng chuẩn (cường độ) của từ trường phụ thuộc y theo quy luật:

$$\vec{B} = B_z(y)\,\vec{e}_z = B(y)\,\vec{e}_z$$



Ta giới hạn ở chuyển động của hạt trong mặt phẳng (xOy) ; và thừa nhận rằng sự biến thiên của B đủ nhỏ để có thể coi ảnh hưởng của nó lên chuyển động như là một nhiễu loạn nhỏ của nó. Vì vậy hạt vạch ra một quỹ đạo gần như tròn tâm G (chuyển động) và có bán kính $\rho = \frac{mv}{qB}$.

Giả thiết $\left(\frac{\rho}{B}\right)\left(\frac{dB}{dy}\right) << 1$.

1) Hãy cho biểu thức của các thành phần Descartes của từ lực tác dụng lên hạt tại điểm M theo $\vec{B}(G)$, đạo hàm của nó $\left(\frac{dB}{dy}\right)_{y_G}$, ρ, góc θ hợp bởi GM với trục (Gx) song song với (Ox) và đạo hàm của nó theo thời gian.

2) Suy ra biểu thức của lực trung bình tác dụng lên hạt trong một vòng quay xung quanh tâm dẫn đường G.

3) Bằng cách so sánh với sự nghiên cứu chuyển động của một hạt trong các trường $\vec{E}$ và $\vec{B}$ bắt chéo, chứng tỏ rằng vận tốc giạt của tâm dẫn đường bằng :

$$\vec{v}_G = -\frac{1}{2}v\rho\frac{\left(\vec{B} \wedge \overrightarrow{gradB}\right)}{B^2}$$

đối với hạt mang điện dương này.

4) Có gì khác đối với một hạt mang điện tích âm ?

• *Lời giải*

1) *Lực tác dụng lên hạt ($q > 0$, m) dịch chuyển với vận tốc* $\vec{v} = v_x.\vec{e}_x + v_y.\vec{e}_y$ *, cho bởi* $\vec{F} = qv_yB_z(M)\vec{e}_x - qv_xB_z(M)\vec{e}_y$.

Tính không đồng nhất của trường coi là nhỏ nên ta giả thiết hạt vạch ra một đường tròn tâm G (dịch chuyển rất chậm, thực tế coi là cố định, $\vec{v}_G = 0$ *so với vận tốc* $\vec{v}$ *của hạt), và bán kính ρ (thực tế không đổi và bằng* $\frac{mv}{qB}$*) với vận tốc góc* $\omega = -\omega_c = -\frac{qB}{m}$ *($q > 0$).*

Điểm M trên quỹ đạo được xác định bởi ρ và θ ($\theta = -\omega_c t + cte$).
Biết rằng $x = x_G + \rho\cos\theta$ và $y = y_G + \rho\sin\theta$, ta có :
$v_x = \rho\sin\theta\omega_c$, $v_y = -\rho\cos\theta\,\omega_c$

và $B_z(M) = B_z(G) + \rho\sin\theta\left(\dfrac{dB_z}{dy}\right)_{x_G,y_G}$ *và $\vec{B}$ chỉ phụ thuộc y.*

Từ đó, ta suy ra :

$$F_x = -q\rho\omega_c\cos\theta B_z(G) - q\rho^2\sin\theta\cos\theta\left(\frac{dB}{dy}\right)_G\omega_c$$

và

$$F_y = -q\rho\omega_c\sin\theta B_z(G) - q\rho^2\sin^2\theta\left(\frac{dB}{dy}\right)_G\omega_c .$$

2) *Biết rằng $\theta = -\omega_c t + cte$, trong một chu kì quay $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c}$, ta có : $<\cos\theta> = 0$; $<\sin\theta> = 0$; $<\sin\theta.\cos\theta> = 0$ và $<\sin^2\theta> = \dfrac{1}{2}$*

Từ đó :

$$<\vec{F}> = -q\frac{\omega_c}{2}\rho^2\left(\frac{dB}{dy}\right)_G\vec{e}_y\text{, hoặc } <\vec{F}> = -q\frac{\omega_C}{2}\rho^2\,\overrightarrow{gradB}.$$

3) *Trong trường hợp chuyển động của một hạt mang điện q trong các trường $\vec{E}$ và $\vec{B}$ đều, bắt chéo, vận tốc giạt cho bởi $\vec{v}_D = \vec{E}\wedge\dfrac{\vec{B}}{B^2}$ (xem Bài giảng), với $<\vec{F}> = q\vec{E}$.*

Từ đó, bằng phép loại suy, ta suy ra : $\vec{v}_D = \dfrac{<\vec{F}>}{q}\wedge\dfrac{\vec{B}}{B^2} = +\dfrac{\omega_c}{2}\rho^2\dfrac{\vec{B}\wedge\overrightarrow{gradB}}{B^2}$ *, hay còn là (vì $\varphi\omega_c = v$) :*

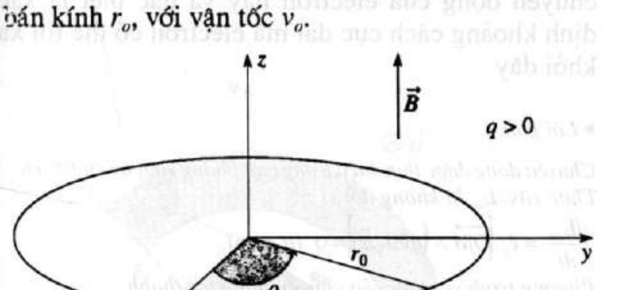
$\vec{v}_D = \dfrac{\varphi v}{2}\dfrac{\vec{B}\wedge\overrightarrow{gradB}}{B^2}$ *($q > 0$ theo trục (Ox)), vậy G nằm trên (Ox).*

4) *Nếu $q < 0$, $\varphi = -\dfrac{mv}{qB}$ và $\omega = \omega_c = -\dfrac{qB}{m}$ (theo quy ước φ và ω_c luôn luôn dương), hay $\varphi\omega_c = v$.*

Từ đó : $\vec{v}_D$ = *(dấu của điện tích)* $\times\ \dfrac{\varphi v}{2}.\dfrac{\vec{B}\wedge\overrightarrow{gradB}}{B^2}$ *với $\varphi > 0$.*

15 Tính bền của quỹ đạo tròn

Một hạt có điện tích q, khối lượng m, trong một từ trường $\vec{B} = B\vec{e}_z$, vạch ra một quỹ đạo tròn tâm O, bán kính r_o, với vận tốc v_o.



1) Hỏi chuẩn (độ lớn) B_o của từ trường phải bằng bao nhiêu để có được một quỹ đạo như thế ?

2) Thực ra từ trường, không đổi, nhưng không đều (đó là điều xảy ra trong thực tế trong một cấu trúc loại xyclôtrôn). Ở đây, người ta giả thiết vẫn giữ sự đối xứng trụ quanh trục (Oz) và ở gần quỹ đạo tròn trên có một từ trường B phụ thuộc khoảng cách r tới trục (Oz) theo quy luật : $B = B_o\left(\dfrac{r}{r_o}\right)^{-\alpha}$, trong đó α là một hằng số thực dương.

a) Dùng các tọa độ cực r và θ, hãy viết các phương trình chuyển động của hạt trong mặt phẳng (xOy)

b) Giả thiết $r = r_o + \xi$ (điều chỉnh không hoàn hảo, với $|\xi| << r_o$) chuẩn (độ lớn) của vận tốc bằng v_o, tương ứng với quỹ đạo tròn bán kính r_o. Hãy khảo sát chuyển động sau đó của hạt.

Hỏi với điều kiện nào cho α thì quỹ đạo tròn là bền.

<u>Chú ý</u> : α được gọi là chỉ số của trường.

• *Lời giải*

1) $B_o = \dfrac{mv_o}{qr_o}$ *hay* $v_o = \omega_o r_o$, *với* $\omega_o = \dfrac{qB_o}{m}$.

2) a) $B = B_o\left(\dfrac{r}{r_o}\right)^{-\alpha}$ *vậy* $B = B_o$ *với* $r = r_o$.

Phương trình vi phân của chuyển động :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{qB}{m}\vec{e}_z\wedge\vec{v}$$

cho ta các phương trình sau trong các tọa độ cực :

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \omega_o r\dot{\theta}\left(\frac{r}{r_o}\right)^{-\alpha} \quad (1)$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = -\omega_o\dot{r}\left(\frac{r}{r_o}\right)^{-\alpha} \quad (2).$$

Trong khi chuyển động, động năng của hạt được bảo toàn, nên :

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = v_o^2 = \omega_o^2 r_o^2 \quad (3).$$

b) *Đặt $r = r_o + \xi$ với $\xi << r_o$.*

Bằng cách khử $\dot{\theta}$ và chỉ giữ lại các số hạng bậc 1 của ξ, ta tìm phương trình theo ξ. (3) cho :

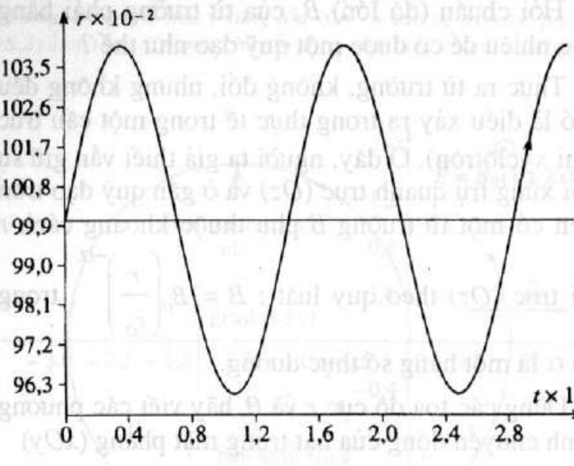
$$r_o^2\left[1+\frac{\xi}{r_o}\right]^2\dot{\theta}^2 = \omega_o^2 r_o^2 - \dot{\xi}^2\text{, từ đó : } \dot{\theta} = -\omega_o\left(1-\frac{\xi}{r_o}\right)\text{ vì } \dot{\theta} < 0.$$

Đem thay vào (1), ta thu được :

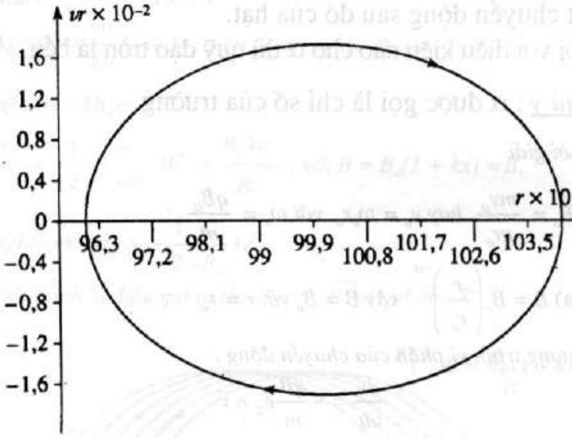
$$\ddot{\xi} - r_o\left(1-\frac{\xi}{r_o}\right)\omega_o^2\left(1-\frac{2\xi}{r_o}\right) = -\omega_o^2 r_o\left(1+\frac{\xi}{r_o}\right)\left(1-\frac{\xi}{r_o}\right)\left(1-\alpha\frac{\xi}{r_o}\right),$$

hay : $\ddot{\xi} + \omega_o^2(1-\alpha)\xi = 0$.

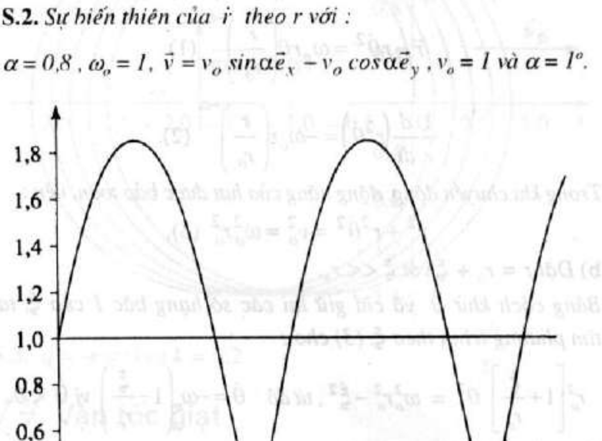
Để nghiệm là bền, phải có $0 < \alpha < 1$; khi đó nghiệm là hình sin, có mạch số $\Omega = \omega_o\sqrt{1-\alpha}$.



S.1. *Sự biến thiên của r theo thời gian*
$\alpha = 0,8$, $\omega_o = 1$, $\vec{v} = v_o \sin\alpha \vec{e}_x - v_o \cos\alpha \vec{e}_y$, *với* $v_o = 1$ *và* $\alpha = 1^o$.

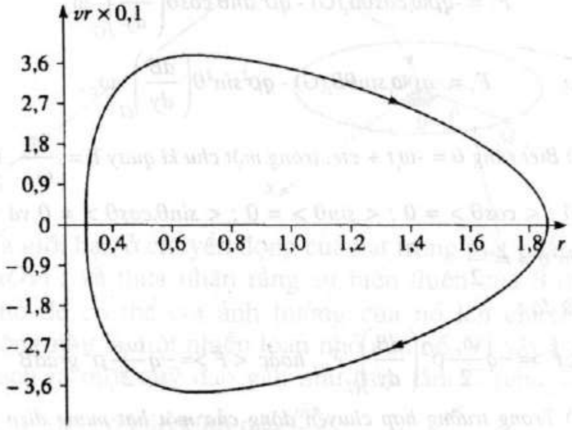


S.2. *Sự biến thiên của* $\dot{r}$ *theo r với :*
$\alpha = 0,8$, $\omega_o = 1$, $\vec{v} = v_o \sin\alpha \vec{e}_x - v_o \cos\alpha \vec{e}_y$, $v_o = 1$ *và* $\alpha = 1^o$.



S.3. *Sự biến thiên của r theo thời gian với* $\alpha = 0,8$, $\omega_o = 1$,
$\vec{v} = v_o \sin\alpha \vec{e}_x - v_o \cos\alpha \vec{e}_y$, $v_o = 1$ *và* $\alpha = 20^o$.

Trên mô phỏng 1, ta thấy rõ sự biến thiên của r theo t : đó là một đường hình sin, điều đó được xác nhận bởi đường cong elip trong không gian pha (r, v_r) trên mô phỏng 2.
Trên mô phỏng 3, sự biến thiên của r là tuần hoàn nhưng không phải hình sin : điều đó được xác nhận bởi đường cong không phải elip của mô phỏng 4 : các tham số bậc 2 không còn bỏ qua được nữa.

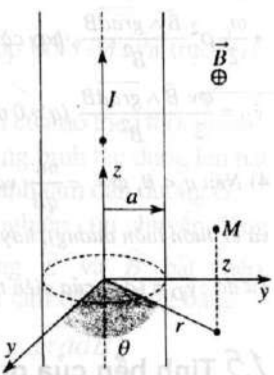


S.4. *Sự biến thiên của* $\dot{r}$ *theo r với :* $\alpha = 0,8$, $\omega_o = 1$.
$\vec{v} = v_o \sin\alpha \vec{e}_x - v_o \cos\alpha \vec{e}_y$, *với* $v_o = 1$ *và* $\alpha = 20^o$.

16 Electrôn phát ra bởi một dây hình trụ

Một vật dẫn hình trụ rất dài, có trục (*Oz*) và có tiết diện tròn bán kính *a*, có dòng điện cường độ *I* chạy qua và tạo ra tại một điểm *M* có tọa độ trụ (*r*, θ, *z*) một từ trường tĩnh cho bởi :

$$\vec{B} = \left(\frac{\mu_o I}{2\pi r}\right)\vec{e}_\theta .$$



Có một xác suất khác không để dây này phát ra một électrôn có một vận tốc ban đầu giả thiết là xuyên tâm. Hãy khảo sát chuyển động của électrôn này và đặc biệt là xác định khoảng cách cực đại mà électrôn có thể rời xa khỏi dây.

• *Lời giải*

Chuyển động được thực hiện trong mặt phẳng kinh tuyến $\theta = cte$.
Thực vậy, L_{oz} *là không đổi vì :*

$$\frac{dL_{oz}}{dt} = \vec{e}_z . \left[\overrightarrow{OM} \wedge \left(q\vec{v} \wedge \vec{B}\right)\right] = 0 \quad (q = -e).$$

Phương trình vi phân của chuyển động trở thành :

$$\ddot{r} = \frac{eB}{m}\dot{z} \text{ và } \ddot{z} = -\frac{eB}{m}\dot{r} .$$

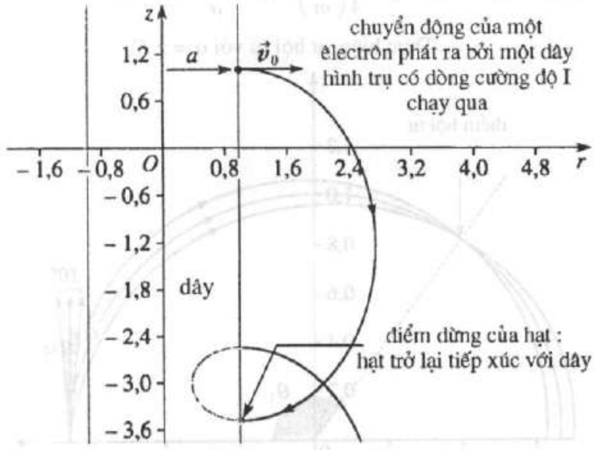
Thay B bằng biểu thức của nó, ta có :

$$\ddot{z} = -\frac{e}{m}\frac{\mu_o I\dot{r}}{2\pi r}, \text{ từ đó : } \dot{z} = -\frac{e}{m}\frac{\mu_o I}{2\pi}\ln\left(\frac{r}{a}\right).$$

Biết rằng $\dot{z}^2 + \dot{r}^2 = v_o^2$ *(từ lực không sinh công), độ rời xa* r_{max} *sẽ đạt được khi* $\dot{z} = -v_o$, *nghĩa là:*

$$r_{max} = a\exp\left[\frac{2\pi m v_o}{e\mu_o I}\right].$$

Hình mô phỏng cho thấy hình dáng của quỹ đạo.

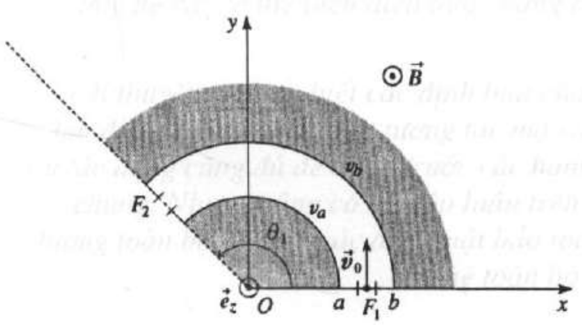


17 Sự tụ tiêu của một chùm êlectrôn trong một tụ điện trụ

Một tụ điện trụ được tạo bởi hai bản kim loại hình trụ, có cùng trục (Oz) và có các bán kính lần lượt bằng a và b, với $a < b$. Các bản này có các điện thế lần lượt bằng V_a và V_b, với $V_b > V_a$ và thừa nhận rằng điện trường tĩnh trong khoảng không gian giữa các bản cho bởi :

$$\vec{E} = -\frac{A}{r}\vec{e}_r, \text{ với } A = \frac{V_b - V_a}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

trong tọa độ trụ (r, θ, z) trục (Oz).



Thực ra thiết bị mô tả ở đây gồm một đoạn của tụ điện trụ, có góc mở θ_1 được chọn hợp lí, cho phép xác định bằng thực nghiệm tỉ số $\left(\frac{e}{m}\right)$. Cho các êlectrôn đi qua khe hẹp F_1 song song với trục Oz (với $OF_1 = r_o$), với một vận tốc ban đầu $\vec{v}_o$ giả thiết vuông góc với (Oz). Ngoài ra, còn có một từ trường đều $\vec{B} = B.\vec{e}_z$.

1) Trước hết, ta giả thiết $\vec{v}_0.\overrightarrow{OF_1} = \vec{0}$ (vận tốc ban đầu trực giao xuyên tâm). Xác định hệ thức phải có giữa A, r_0, v_0 và B để trong tụ điện, quỹ đạo của các êlectrôn là tròn. Chứng tỏ rằng có một giá trị tối ưu của A sao cho hệ thức đó gần được thỏa mãn ngay cả khi độ lớn vận tốc ban đầu của các êlectrôn có một sự phân tán (yếu) xung quanh giá trị v_0.

2) Bây giờ, ta giả thiết các vận tốc ban đầu của các êlectrôn hợp một góc nhỏ α với pháp tuyến với OF_1 tại F_1. Tuy vậy, chứng tỏ rằng sự chọn : $\theta_1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ (rađian) cho phép hội tụ các êlectrôn vào khe ra tại F_2.

3) Từ đó, suy ra một phương pháp xác định $\left(\frac{e}{m}\right)$.

Với giá trị nào của $V_b - V_a$ thì ta thu được một cường độ cực đại trong một máy dò đặt ở sau khe F_2 ? Ta lấy $r_o = \frac{a+b}{2}$.

Cho : $a = 3{,}00$ cm; $b = 4{,}00$ cm; $B = 3{,}00.\ 10^{-3}$T .

• ***Lời giải***

1) *Áp dụng hệ thức cơ bản của động lực học cho một êlectrôn trong hệ tọa độ cực cho:*

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{e}{m}\left(\frac{A}{r} - Br\dot{\theta}\right) & (1) \\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = \frac{eB}{m}r\dot{r} & (2) \end{cases}$$

Nếu $r = r_o = cte$ *thì* $\dot{\theta} = cte = \frac{v_0}{r_0}$.

Suy ra: $A = Br_0v_0 - \frac{mv_0^2}{e}$.

Biểu thức này phải ít phụ thuộc v_o, *hay* $\frac{dA}{dv_0} = 0 = Br_0 - 2\frac{mv_0}{e}$.

Điều này cho: $A = \frac{Br_0v_0}{2} = \frac{mv_0^2}{e}$.

Và sau khi khử vận tốc : $A = \frac{e}{4m}B^2r_0^2$, *vậy :* $\frac{e}{m} = \frac{4A}{B^2r_0^2}$.

2) *Các mô phỏng kèm theo cho thấy đúng là có một sự tụ tiêu (hội tụ) ($\alpha = 5^0$ và $\alpha = -5^0$) $125^0 < \theta_1 < 128^0$.*

Ta hãy tìm lại kết quả này bằng phép tính : đặt $r = r_o + \varphi$ và tìm cách tuyến tính hóa phương trình theo φ.

Phương trình (2) cho :

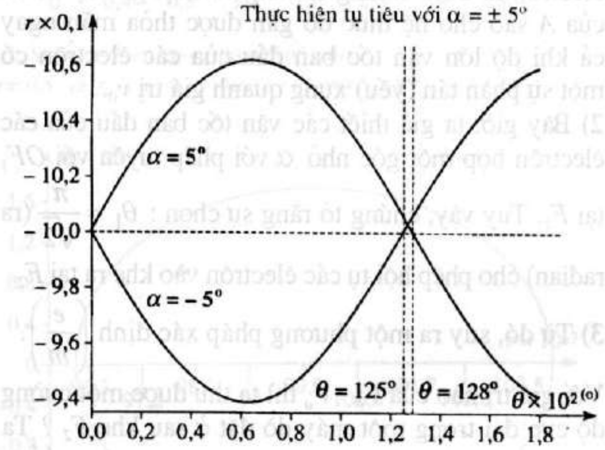
$r^2\dot{\theta} - r_0 v_0 \cos\alpha = \frac{eB}{m}(r^2 - r_0^2)$, *vậy* $\dot{\theta} = \frac{eB}{m}$ *(vì* $v_0 = \frac{eB}{m} r_0$ *và* $\alpha << 1$*).*

Phương trình (1) cho :

$$\ddot{\varphi} - \left(\frac{eB}{m}\right)^2 (r_0 + \rho) = \frac{e}{m}\left\{\frac{mv_0^2}{e(r_0+\rho)} - B(r_0+\rho)\frac{eB}{m}\right\},$$

hay sau khi tuyến tính hóa : $\ddot{\varphi} + 2\left(\frac{eB}{m}\right)^2 \varphi = 0$

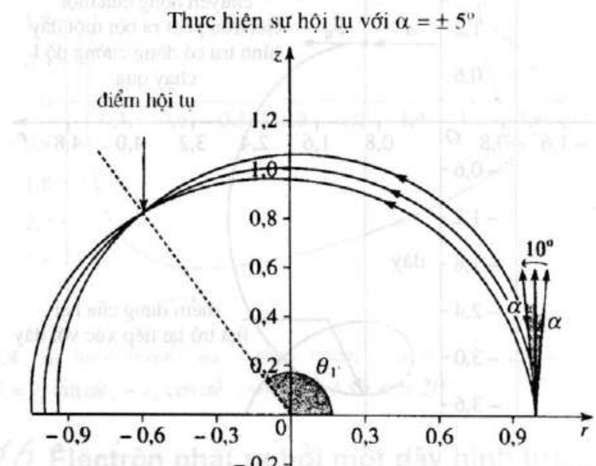
nghiệm của nó là: $\varphi = \frac{r_0 \sin\alpha}{\sqrt{2}} \sin\left(\sqrt{2}\frac{eB}{m} t\right)$.



Với $t_1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{m}{eB}$, $\varphi = 0$ *; tại thời điểm đó* $\theta = \theta_1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ *, vậy bằng* 127^0 *, điều này đáp ứng tốt với kết quả mong đợi.*

3) θ_1 ***đã cố định, cho A biến thiên sao cho thu được tối đa các êlectrôn và từ đó suy ra*** $\frac{e}{m} = \frac{4A}{B^2 r^2}$ ***, điều này tương ứng với một phép đo rất chính xác của*** $\frac{e}{m}$ ***.***

Áp dụng số : $V_b - V_a = \frac{1}{4}\left(\frac{e}{m}\right) B^2 r_0^2 \ln\frac{b}{a} = 139$ *vôn.*



HỆ CHẤT ĐIỂM

4

Mở đầu

Những ngôi sao của một thiên hà, một hành tinh và các vệ tinh của nó, một viên đạn và bia ngắm, các phân tử của một chất khí đơn nguyên tử (hay dưới các điều kiện nào đó, các phân tử của một chất khí bất kì), ở các thang độ lớn khác nhau, là các ví dụ về những hệ vật có thể biểu diễn được bằng các chất điểm.

Về lí thuyết, sự hiểu biết các định luật của cơ học chất điểm và các định luật tương tác mà các hệ đó chịu tác dụng cũng đủ để đoán trước các hành vi của chúng. Nhưng cũng có thể lập luận trên các đại lượng toàn bộ và trên các định luật bảo toàn riêng cho hệ toàn bộ của nó.

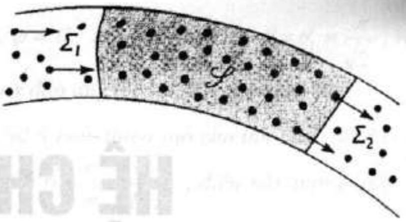
MỤC TIÊU

- Động lượng, mômen động lượng và năng lượng của một hệ.
- Các định luật bảo toàn.
- Áp dụng các định luật cho các va chạm.
- Trường hợp của vật rắn quay (PCSI).

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

- Động học và động lực học chất điểm.
- Cơ năng của một chất điểm.

1 Các định nghĩa và kí hiệu



Hình 1. *Hệ mở : các tiết diện Σ_1 và Σ_2 cố định.*

1.1. Hệ

Hệ là một tập hợp chất xác định. Ngược lại, *ngoại vi* là phần còn lại của Vũ trụ.
Trong thực tế, đối với một bài toán thông thường của cơ học, ngoại vi chỉ giới hạn ở một vài vật mà sự tương tác với hệ không thể bỏ qua.

1.2. Hệ kín

Một hệ là *kín* nếu nó không trao đổi chất với bên ngoài (ngoại vi). Ngược lại, một hệ là *mở* nếu nó trao đổi chất với bên ngoài. Ta tưởng tượng một cái ống có khí đi qua, được xem là một tập hợp các phân tử (hình 1). Tập hợp nằm giữa các tiết diện Σ_1 và Σ_2 là một hệ mở, vì, ở mỗi thời điểm, có các phân tử đi vào và đi ra khỏi đó.

Sau đây, ta chỉ nghiên cứu các hệ kín.

1.3. Kí hiệu

Trong phần tiếp theo của chương, ta sẽ dùng các kí hiệu sau :

- $\mathscr{S}$ để chỉ một hệ kín gồm n chất điểm M_i có khối lượng m_i, $i \in \{1, ..., n\}$.
- $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ chỉ khối lượng toàn phần của $\mathscr{S}$;
- $\mathscr{E}$ chỉ ngoại vi ;
- để đơn giản hóa, khi không nói rõ hệ quy chiếu thì ta hiểu đó là hệ quy chiếu nghiên cứu $\mathscr{R}$;
- $\vec{v}_i$ chỉ vận tốc của điểm M_i : $\vec{v}_i = \vec{v}(M_i)_{/\mathscr{R}}$

2 Khái niệm cơ sở về động học

2.1. Tâm tỉ cự

2.1.1. Định nghĩa

Tâm tỉ cự G của một hệ chất điểm $\mathscr{S}$ được xác định bởi :

$$\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{O}.$$

Cho O là một điểm bất kì, sao cho

$$\vec{O} = \sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i} - \sum_i m_i \overrightarrow{OG}$$

Từ đó, ta suy ra một định nghĩa khác của G :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}, \ O \text{ là một điểm bất kì.}$$

G còn được gọi là *khối tâm* hay *tâm quán tính*.

2.1.2. Sự tổng hợp các tâm tỉ cự

Xét hai hệ :

- $\mathscr{S}_1$, có tâm tỉ cự G_1, cấu tạo bởi n_1 chất điểm M_j,

$$j \in \{1, \ldots, n_1\} ;$$

- $\mathscr{S}_2$, có tâm tỉ cự G_2, cấu tạo bởi n_2 chất điểm M_k,

$$k \in \{n_1+1, \ldots, n_1+n_2\}$$

Gọi G là tâm tỉ cự của $\mathscr{S}$, hợp của $\mathscr{S}_1$ và $\mathscr{S}_2$, sao cho :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OM}_i = \frac{1}{m}\left(\sum_j m_j \overrightarrow{OM}_j + \sum_k m_k \overrightarrow{OM}_k\right) ;$$

ta thu được hệ thức tổng hợp các tâm tỉ cự :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\left(m_1\overrightarrow{OG}_1 + m_2\overrightarrow{OG}_2\right).$$

▸ **Để luyện tập : BT.1**

2.2. Động lượng (hay kết thức động học)

2.2.1. Định nghĩa

Động lượng $\vec{p}$ của $\mathscr{S}$ trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ bằng tổng động lượng của các chất điểm cấu tạo nên $\mathscr{S}$, nghĩa là :

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i .$$

Chú ý : $\vec{p}$ cũng gọi là kết thúc động học.

2.2.2. Vận tốc của tâm tỉ cự

$$\overrightarrow{OM}_i = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}_i \text{, từ đó : } \vec{v}_i = \vec{v}(G) + \frac{d\overrightarrow{GM}_i}{dt},$$

hay :
$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}(G) + \frac{d\sum_i m_i \overrightarrow{GM}_i}{dt}$$

Vì $\sum_i m_i = m$ và $\sum_i m_i \overrightarrow{GM}_i = \vec{0}$, ta có :

$$\vec{p} = m\vec{v}(G) \text{ và } \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}(G)$$

Chú ý : Động lượng của một hệ bằng động lượng của một chất điểm có khối lượng m và có vị trí G.

2.3. Mômen động lượng

2.3.1. Định nghĩa

Mômen động lượng của hệ $\mathscr{S}$ đối với O trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ bằng tổng mômen động lượng của các chất điểm cấu tạo nên hệ, nghĩa là :

$$\vec{L}_O = \sum_i m_i \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{v}_i .$$

2.3.2. Mômen động lượng đối với một trục

Mômen động lượng đối với trục Δ là hình chiếu vuông góc trên trục Δ của mômen động lượng tại một điểm *bất kì* của Δ. Vậy mômen động lượng đối với trục Δ là :

$$L_\Delta = \vec{L}_o.\vec{e}_\Delta$$

Chú ý :

- *L_Δ là tổng của các $L_\Delta(M_i)$;*
- *Giống như các $L_\Delta(M_i)$, L_Δ không phụ thuộc điểm O trên Δ ;*
- *Trong hệ tọa độ trụ, biểu thức của mômen động lượng đối với trục (Oz) là :*

$$L_{oz} = \sum_i m_i r_i^2 \dot{\theta}_i .$$

2.4. Động năng

2.4.1. Định nghĩa

Động năng của hệ $\mathscr{S}$ trong hệ quy chiếu $\mathscr{R}$ bằng tổng động năng của các chất điểm cấu tạo nên hệ :

$$\mathscr{E}_K = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 .$$

2.5. Hệ quy chiếu tâm tỉ cự

Còn gọi là hệ quy chiếu khối tâm.

2.5.1. Định nghĩa

$\mathscr{R}$ là hệ quy chiếu nghiên cứu, hệ quy chiếu tâm tỉ cự $\mathscr{R}^*$ (*hình* 2) được gắn vào *G* và chuyển động tịnh tiến đối với $\mathscr{R}$ (điều đó có nghĩa là các vectơ gắn vào $\mathscr{R}^*$ là các hằng số trong $\mathscr{R}$).

Mọi đại lượng liên quan với $\mathscr{R}^*$ đều được ghi thêm một dấu sao. Vì thế, ta kí hiệu $\vec{v}(M_i)_{/\mathscr{R}^*}$ bằng $\vec{v}_i^*$.

2.5.2. Động lượng trong $\mathscr{R}^*$

Động lượng của $\mathscr{S}$ trong hệ quy chiếu tâm tỉ cự bằng không :

$$\vec{p}_{/\mathscr{R}^*} = \vec{p}^* = m\vec{v}^*(G) = \vec{O}$$

2.5.3. Mômen động lượng tâm tỉ cự.

2.5.3.1. Định nghĩa

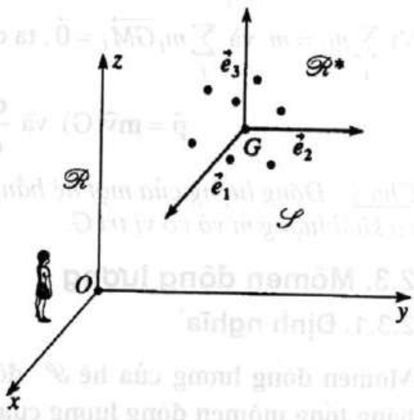
Mômen động lượng tâm tỉ cự của $\mathscr{S}$ là mômen động lượng tại *G* trong $\mathscr{R}^*$, hay : $\vec{L}^* = \vec{L}_G^*$.

2.5.3.2. Các biểu thức tương đương

Cho *O* là một điểm bất kì

$$\vec{L}_o^* = \sum m_i \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{v}_i^* = \sum m_i \overrightarrow{OG} \wedge \vec{v}_i^* + \sum m_i \overrightarrow{GM}_i \wedge \vec{v}_i^*$$

$\vec{L}_o^* = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{p}^* + \vec{L}^* = \vec{L}^*$; $\vec{L}_o^*$ *không phụ thuộc điểm O.*



Hình 2. *$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ là các hằng số trong $\mathscr{R}$ và hệ tọa độ (G ; $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) được gắn vào $\mathscr{R}^*$.*

Chứng tỏ rằng $\vec{L}^*$ cũng là mômen động lượng tại G trong hệ quy chiếu nghiên cứu $\mathcal{R}$.

• $\mathcal{R}^*$ chuyển động tịnh tiến đối với $\mathcal{R}$, vậy các vận tốc thỏa mãn :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}} + \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}^*},$$

hay : $\vec{v}_i = \vec{v}(G) + \vec{v}_i^*$, và $\vec{L}_G = \sum_i m_i \overrightarrow{GM}_i \wedge \vec{v}_i^* + \sum_i m_i \overrightarrow{GM}_i \wedge \vec{v}(G)$.

• Theo định nghĩa của tâm tỉ cự $\sum_i m_i \overrightarrow{GM}_i = \vec{0}$, suy ra :

$$\vec{L}_G = \sum_i m_i \overrightarrow{GM}_i \wedge \vec{v}_i^* = \vec{L}_G^* = \vec{L}^*.$$

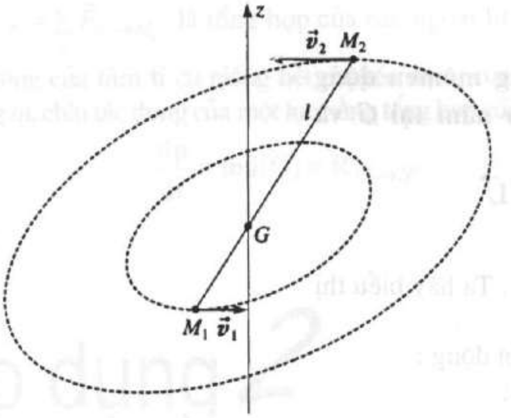
Tóm lại : $\vec{L}^* = \vec{L}_o^* = \vec{L}_G$

Áp dụng 1

Hệ quay

Cho một hệ hai chất điểm M_1 và M_2, khối lượng m_1 và m_2 nối với nhau bằng một sợi dây có khối lượng không đáng kể và có chiều dài l không đổi. Tâm tỉ cự của chúng được cố định trong hệ quy chiếu nghiên cứu $\mathcal{R}$ và chúng quay xung quanh trục (Gz), trực giao với M_1M_2, với vận tốc góc ω (hình 3).

Tìm biểu thức của mômen động lượng tại G của hệ.



Hình 3.

Có thể xem xét bằng nhiều phương pháp.

• *Phép tính trực tiếp* : Trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ của người quan sát, ta có thể viết :

$\vec{L}_G = m_1 \overrightarrow{GM_1} \wedge \vec{v}_1 + m_2 \overrightarrow{GM_2} \wedge \vec{v}_2$

$= m_1 \overrightarrow{GM_1} \wedge (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$,

vì : $m_2 \overrightarrow{GM_2} = -m_1 \overrightarrow{GM_1}$;

$\vec{v}_1 = \omega \vec{e}_z \wedge \overrightarrow{GM_1}$ và $\vec{v}_2 = \omega \vec{e}_z \wedge \overrightarrow{GM_2}$, từ đó :

$\vec{L}_G = m_1 \omega \overrightarrow{GM_1} \wedge (\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{M_2M_1})$,

với : $\overrightarrow{GM_1} = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} \overrightarrow{M_2M_1}$.

Phép tính tích vectơ kép cho :

$$\vec{L}_G = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2 \omega \vec{e}_z.$$

• *Cách tính thứ hai :* hệ quy chiếu nghiên cứu $\mathcal{R}$ cũng là hệ quy chiếu tâm tỉ cự $\mathcal{R}^*$.

$\vec{L}^* = \vec{L}_o$ không phụ thuộc O.

$\vec{L}_G = \vec{L}_{M_2} = m_1 \overrightarrow{M_2M_1} \wedge \vec{v}_1^*$, từ đó :

$\vec{L}_G = m_1 \omega \overrightarrow{M_2M_1} \wedge (\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{GM_1})$

Ta tìm lại được đúng kết quả trên.

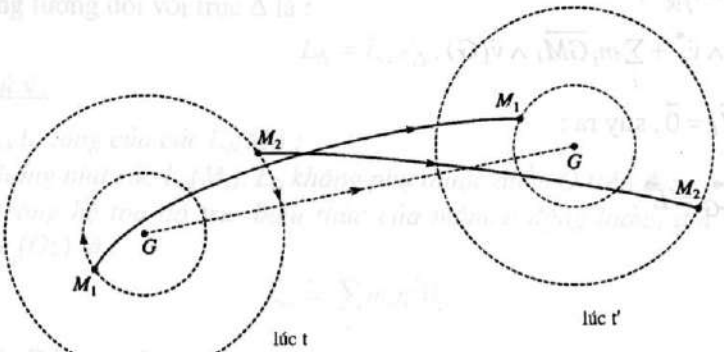
2.5.4. Phân tích chuyển động

Vận tốc của mỗi phần tử của $\mathcal{S}$ có thể phân tích thành :

$$\vec{v}_i = \vec{v}(G) + \vec{v}_i^*.$$

$\vec{v}(G)$ biểu diễn "vận tốc toàn bộ" của $\mathcal{S}$ và $\vec{v}_i$ là các vận tốc cá thể "khuấy động" trong $\mathcal{R}^*$ (*hình 4*).

Thường thường sự phân tích này phải làm một cách tự nhiên. Chuyển động của các hành tinh trong thiên hà đúng là một sự chồng chất của chuyển động của tâm tỉ cự của hệ mặt trời và chuyển động trên quỹ đạo của chúng trong hệ quy chiếu COPERNIC.



Hình 4. *Chuyển động của M_1 và M_2 được phân tích thành một chuyển động quay trong $\mathscr{R}^*$ và một chuyển động tịnh tiến của $\mathscr{R}^*$.*

Tương tự, đối với một dòng khí, $\vec{v}(G)$ là vận tốc của dòng và vận tốc của một phân tử cá thể là tổng của vận tốc dòng và một vận tốc của chuyển động hỗn độn gắn với nhiệt độ.

2.6. Các định lí KOËNIG

2.6.1. Mômen động lượng

Ta hãy tìm biểu thức của mômen động lượng của $\mathscr{S}$ nhờ phân tích chuyển động :

$$\vec{L}_O = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{v}_i = \sum_i m_i \overrightarrow{OG} \wedge \vec{v}_i + \sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} \wedge \vec{v}_i .$$

Mà ta đã biết :

$$\sum_i m_i \overrightarrow{OG} \wedge \vec{v}_i = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{p} \text{ và } \sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} \wedge \vec{v}_i = \vec{L}^* .$$

Định lí thứ nhất của KOËNIG:

Mômen động lượng tại O của hệ $\mathscr{S}$ bằng tổng mômen động lượng tại O của một chất điểm khối lượng m nằm tại G và mômen động lượng của tâm tỉ cự :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{p} + \vec{L}^* = m\overrightarrow{OG} \wedge \vec{v}(G) + \vec{L}^*$$

2.6.2. Động năng

Động năng tâm tỉ cự của $\mathscr{S}$ bằng $\mathscr{E}_K^* = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^{*2}$. Ta hãy biểu thị động năng trong $\Re$ nhờ dùng phép phân tích chuyển động :

$$2\mathscr{E}_K = \sum m_i v_i^2 = \sum_i m_i \left(\vec{v}(G) + \vec{v}_i^*\right)^2$$

$$= \sum_i m_i v^2(G) + \sum_i m_i \vec{v}_i^{*2} + 2\vec{v}(G).\left(\sum_i m_i \vec{v}_i^*\right)$$

Mà ta đã biết : $\sum_i m_i\, v^2(G) = mv^2(G)$,

$$\sum_i m_i \vec{v}_i^{*2} = 2\mathscr{E}_K^* ,$$

và $\vec{v}(G).\left(\sum_i m_i \vec{v}_i^*\right) = \vec{v}(G).\vec{p}^* = 0$.

Định lý thứ hai của KOËNIG :

Động năng của hệ $\mathscr{S}$ bằng tổng động năng của một chất điểm khối lượng *m* nằm tại *G* và động năng tâm tỉ cự :

$$\mathscr{E}_K = \frac{1}{2}mv^2(G) + \mathscr{E}_K^*$$

▸ **Để luyện: BT7**

3 Nghiên cứu động lực học

Giả thiết hệ quy chiếu nghiên cứu $\mathcal{R}$ là hệ quy chiếu GALILÉE

3.1. Định lí về động lượng

Cho mỗi phần tử của $\mathscr{S}$, ta áp dụng hệ thức cơ bản của động lực học :

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_{\mathscr{E}\to M_i} + \sum_{j\neq i}\vec{F}_{M_j\to M_i}.$$

- $\vec{F}_{\mathscr{E}\to M_i}$ biểu diễn lực do ngoại vi $\mathscr{E}$ tác dụng lên M_i ;
- $\vec{F}_{M_j\to M_i}$ biểu diễn lực do điểm M_j tác dụng lên M_i.

Đối với tập hợp các chất điểm của $\mathscr{S}$ ta có :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_{\mathscr{E}\to M_i} + \sum_i\sum_{j\neq i}\vec{F}_{M_j\to M_i}.$$

$\sum_i\sum_{j\neq i}\vec{F}_{M_j\to M_i}$ biểu diễn tổng các nội lực của hệ và theo định luật tác dụng tương hỗ, $\vec{F}_{M_j\to M_i} = -\vec{F}_{M_i\to M_j}$; mọi số hạng triệt tiêu với nhau từng đôi một và tổng hợp của các nội lực bằng không.

Đặt $\vec{R}_{\mathscr{E}\to\mathscr{S}} = \sum_i \vec{F}_{\mathscr{E}\to M_i}$ là tổng hợp của các ngoại lực.

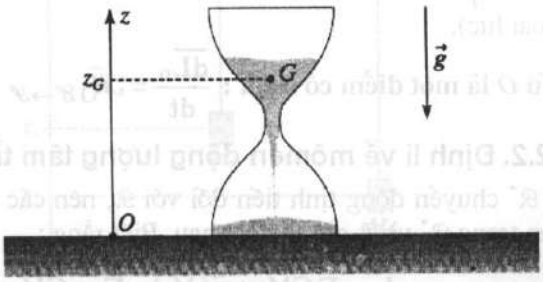
Chuyển động của tâm tỉ cự giống hệt chuyển động của một chất điểm khối lượng *m*, chịu tác dụng của một lực bằng tổng hợp của các ngoại lực.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}(G) = \vec{R}_{\mathscr{E}\to\mathscr{S}}$$

Áp dụng 2

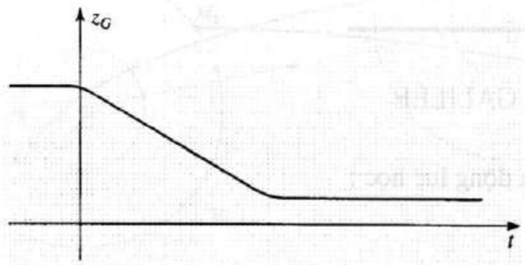
Trọng lượng biểu kiến của một đồng hồ cát

Để chuẩn bị cho các kì thi vật lí của mình, một sinh viên tự đặt cho mình phải giải một số bài tập trong vòng mười lăm phút. Cậu ta bèn lấy một chiếc đồng hồ cát, khối lượng toàn phần m (hình 5a), dốc ngược lại và tự đặt câu hỏi : trọng lượng biểu kiến của đồng hồ, nghĩa là lực mà nó tác dụng lên bàn, có *thay đổi hay không so với trạng thái cân bằng ?*



Hình 5a. *Đồng hồ cát .*

Để trả lời câu hỏi đó, ta giả thiết, không kể lúc bắt đầu và lúc kết thúc sự vận hành, độ cao z_G của tâm tỉ cự của cát giảm như một hàm afin của thời gian (hình 5b). Sự khảo sát định tính đường cong $z_G(t)$ đủ để đoán trước chiều của sự thay đổi.



Hình 5b. *Độ cao của tâm tỉ cự .*

Gọi $\mathscr{S}$ là hệ cấu tạo bởi đồng hồ cát và các hạt cát, có khối lượng toàn phần m.

Nếu R là phản lực của bàn lên đồng hồ cát, ta có thể viết :

$$m\ddot{z}_G = R - mg.$$

Do nguyên lí tác dụng tương hỗ, R cũng là lực tác dụng của đồng hồ cát lên bàn, nghĩa là trọng lượng biểu kiến của đồng hồ cát.

Khi cân bằng (lúc dòng chảy kết thúc) :

$$\ddot{z}_G = 0 \text{, từ đó } R = mg.$$

Lúc bắt đầu vận hành :

$$\ddot{z}_G < 0 \text{, từ đó } R < mg.$$

Trong thời gian dòng chảy ở chế độ ổn định :

$\ddot{z}_G = 0$, từ đó $R = mg$.

Trong pha dừng, $\ddot{z}_G > 0$, từ đó $R > mg$.

Với sự chấp nhận mẫu dòng chảy ở trên, thì trọng lượng biểu kiến, trong suốt thời gian chế độ ổn định, bằng giá trị của nó lúc cân bằng.

3.2. Định lí về mômen động lượng

3.2.1. Biểu thức trong hệ quy chiếu Galilée $\mathcal{R}$

Lập luận tương tự cho mômen động lượng tại 0, *một điểm cố định của* $\mathcal{R}$.

Đối với mỗi điểm M_i : $\dfrac{d\vec{L}_o(M_i)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{o\mathscr{E}\to M_i} + \sum\limits_{j\neq i}\vec{\mathcal{M}}_{OM_j\to M_i}$.

Đối với hệ $\mathscr{S}$, ta có thể viết :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_{O\mathscr{E}\to M_i} + \sum_i\sum_{j\neq i}\vec{\mathcal{M}}_{OM_j\to M_i}$$

Chứng tỏ rằng số hạng cuối, tương ứng với tổng các mômen nội lực, bằng không :

$\vec{\mathcal{M}}_{OM_j\to M_i} + \vec{\mathcal{M}}_{OM_i\to M_j} = \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{F}_{M_j\to M_i} + \overrightarrow{OM}_j \wedge \vec{F}_{M_i\to M_j}$.

Mà theo định luật tác dụng tương hỗ :

$$\vec{F}_{M_j\to M_i} = -\vec{F}_{M_i\to M_j} \text{ và } \overrightarrow{M_iM_j} \wedge \vec{F}_{M_j\to M_i} = \vec{0},$$

từ đó : $\vec{\mathcal{M}}_{OM_j\to M_i} + \vec{\mathcal{M}}_{OM_i\to M_j} = \vec{0}$.

Ta đặt $\sum\limits_i \vec{\mathcal{M}}_{O\mathscr{E}\to M_i} = \vec{\mathcal{M}}_{O\mathscr{E}\to\mathscr{S}}$ (mômen tổng hợp tại O của các ngoại lực).

Nếu O là một điểm cố định : $\dfrac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{O\mathscr{E}\to\mathscr{S}}$

3.2.2. Định lí về mômen động lượng tâm tỉ cự

Vì $\mathcal{R}^*$ chuyển động tịnh tiến đối với $\mathcal{R}$, nên các đạo hàm theo thời gian trong $\mathcal{R}^*$ và $\mathcal{R}$ giống hệt nhau. Biết rằng :

$$\vec{L}^* = \sum_i \overrightarrow{GM}_i \wedge \vec{p}(M_i) = \sum_i m_i \overrightarrow{GM}_i \wedge \vec{v}_i$$

ta có thể viết : $\dfrac{d\vec{L}^*}{dt} = \sum_i m_i\vec{v}_i \wedge \vec{v}_i + \sum_i m_i\vec{v}(G) \wedge \vec{v}_i + \sum_i m_i\overrightarrow{GM}_i \wedge \vec{a}_i$.

Mà ta lại có các hệ thức sau :

- $\vec{v}_i \wedge \vec{v}_i = 0$;
- $\sum_i \vec{v}(G) \wedge \vec{p}(M_i) = \vec{v}(G) \wedge \sum_i \vec{p}(M_i) = \vec{0}$;
- $\sum_i \overrightarrow{GM}_i \wedge \dfrac{d\vec{p}(M_i)}{dt} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_{G\mathscr{E}\to M_i} + \sum_i \sum_{j\neq i} \vec{\mathcal{M}}_{GM_j \to M_i}$.

Và, vì mômen tổng hợp của các ngoại lực bằng không, ta thu được :

$$\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{G\mathscr{E}\to\mathscr{S}}$$

Cần nhớ rằng hệ thức $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{\mathscr{E}\to\mathscr{S}}$ có thể được áp dụng tại G, mặc dầu nó có chuyển động, hay trong hệ quy chiếu tâm tỉ cự, mặc dầu nó không nhất thiết phải là hệ Galilée.

▸ **Để luyện tập : BT5**

3.2.3. Định lí vô hướng của mômen động lượng.

Gọi Δ là một trục cố định trong $\mathcal{R}$, có vectơ đơn vị $\vec{e}$ và đi qua điểm *0*.

$\dfrac{d\vec{L}_o}{dt}.\vec{e} = \vec{\mathcal{M}}_{O\mathscr{E}\to\mathscr{S}}.\vec{e}$, suy ra biểu thức sau :

Nếu Δ là một trục cố định : $\dfrac{dL_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta\mathscr{E}\to\mathscr{S}}$.

Áp dụng 3

Máy ATWOOD

Bằng một phương pháp khác, ta hãy khảo sát thiết bị đã mô tả trong áp dụng 2, chương 10, cơ học I.

Gọi $\mathscr{S}$ là hệ cấu tạo bởi M_1 và M_2 và Δ là trục của ròng rọc. Sự phân tích động học cho :

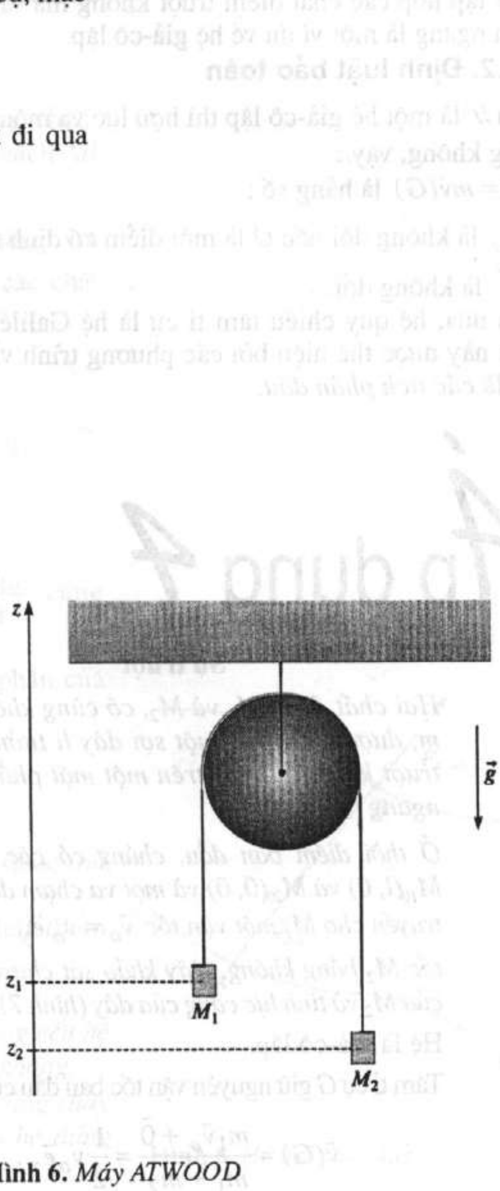
$\dot{z}_1 + \dot{z}_2 = 0$ và $L_\Delta = \left(m_1\dot{z}_1 + m_2\dot{z}_2\right)R$

Mà ròng rọc là lí tưởng, $\mathcal{M}_{\Delta ròng\ rọc\to\mathscr{S}} = 0$, vậy :

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta trọng\ lượng} = (m_2 - m_1)Rg.$$

Suy ra kết quả $\ddot{z}_1 = \dfrac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}.g$.

Sự áp dụng định lí về mômen động lượng cho hệ $\mathscr{S}$ cho phép không cần để ý đến các nội lực căng, cũng như lực tác dụng bởi trục của ròng rọc, mà mômen của nó đối với trục này bằng không.



Hình 6. *Máy ATWOOD*

3.3. Trường hợp hệ quy chiếu phi Galilée

Trong một hệ quy chiếu phi Galilée, đối với chất điểm M_i, có thể viết :

$$m\vec{a}(M_i) = \vec{F}_{\mathscr{E}\to M_i} + \vec{F}_e + \vec{F}_c + \sum_j \vec{F}_{M_j \to M_i}.$$

Các định lí đã được chứng minh cho một hệ vẫn có hiệu lực với điều kiện phải *coi các lực quán tính* tác dụng lên mỗi điểm *như các ngoại lực*.

3.4. Định luật quán tính cho một hệ

3.4.1. Hệ cô lập hoặc giả - cô lập

Một hệ chất điểm là cô lập nếu mỗi một trong các phần tử của nó không chịu tác dụng của một ngoại lực nào.

Đó là một trường hợp lí thuyết mà thí nghiệm không thể thực hiện được (chẳng hạn, không thể loại trừ được các lực hấp dẫn).

Trường hợp ít phi thực tế hơn là tưởng tượng một *hệ giả cô lập* sao cho các ngoại lực triệt tiêu với *mỗi một* trong các phần tử của nó.

Một tập hợp các chất điểm trượt không ma sát trên một mặt phẳng nằm ngang là một ví dụ về hệ giả-cô lập.

3.4.2. Định luật bảo toàn

Nếu $\mathscr{S}$ là một hệ giả-cô lập thì hợp lực và mômen của các ngoại lực bằng không, vậy :

- $\vec{p} = m\vec{v}(G)$ là hằng số ;
- $\vec{L}_O$ là không đổi nếu O là một điểm cố định trong $\mathscr{R}$;
- $\vec{L}^*$ là không đổi.

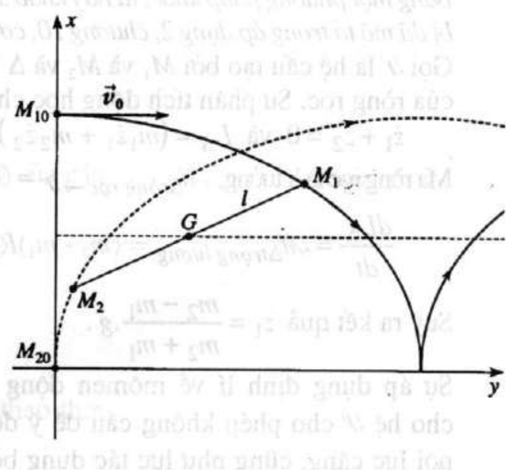
Hơn nữa, hệ quy chiếu tâm tỉ cự là hệ Galilée. Các định luật bảo toàn này được thể hiện bởi các phương trình vi phân bậc 1 và được gọi là *các tích phân đầu*.

Áp dụng 4

Sự trượt

Hai chất điểm M_1 và M_2, có cùng khối lượng m, được buộc vào một sợi dây lí tưởng dài l, trượt không ma sát trên một mặt phẳng nằm ngang (xOy).

Ở thời điểm ban đầu, chúng có các vị trí : $M_{10}(l, 0)$ và $M_{20}(0, 0)$ và một va chạm đột nhiên truyền cho M_1 một vận tốc $\vec{v}_o = v_o.\vec{e}_y$, còn vận tốc M_2 bằng không. Hãy khảo sát chuyển động của M_2 và tính lực căng của dây (hình 7).



Hình 7.

Hệ là giả-cô lập.

Tâm tỉ cự G giữ nguyên vận tốc ban đầu của nó :

$$\vec{v}(G) = \frac{m_1\vec{v}_o + \vec{0}}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2}v_o\vec{e}_y.$$

Vị trí của hệ trong hệ quy chiếu tâm tỉ cự $\mathcal{R}^*$ được xác định bởi góc θ, cho :

$$\vec{L}^* = 2m\left(\frac{l}{2}\right)^2 \dot{\theta}\,\vec{e}_z.$$

$\dot{\theta}$ giữ nguyên giá trị ban đầu của nó, nên $\dot{\theta} = \frac{v_o}{l}$ và ta thu được :

$$x_2^* = -\frac{l}{2}\cos\left(\frac{v_o t}{l}\right) \text{ và } y_2^* = -\frac{l}{2}\sin\left(\frac{v_o t}{l}\right),$$

$$x_2 = \frac{l}{2}\left[1-\cos\left(\frac{v_o t}{l}\right)\right] \text{ và } y_2 = -\frac{l}{2}\left[\frac{v_o t}{l} - \sin\left(\frac{v_o t}{l}\right)\right],$$

Quỹ đạo là một xyclôit

$\mathcal{R}^*$ là hệ quy chiếu Galilée, ta có: $m\vec{a}^*(M_2) = T\vec{e}$, nghĩa là :

$$T = m\dot{\theta}^2 \frac{l}{2} = \frac{mv_0^2}{2l}.$$

4 Nghiên cứu về mặt năng lượng

4.1. Công suất của các nội lực

Xét hệ $\mathcal{S}$ cấu tạo bởi hai chất điểm A và B. $\mathcal{R}$ là hệ quy chiếu nghiên cứu, không nhất thiết là hệ Galilée. Gọi r là khoảng cách AB và $\vec{e}_{AB}$ là vectơ đơn vị của trục AB.

Theo nguyên lí về tác dụng tương hỗ, $\vec{F}_{A\to B}$ thẳng hàng với $\vec{e}_{AB}$ (*hình 8*) (Nên nhớ rằng tính chất này chỉ đúng cho các chất điểm. Đối với hai nam châm nhỏ chẳng hạn, nó lại sai).

Đặt $\overrightarrow{AB} = r\vec{e}_{AB}$ và $\vec{F}_{A\to B} = F_{AB}\vec{e}_{AB} = -\vec{F}_{B\to A}$.

Ta hãy tính tổng công suất của các nội lực:

$$\mathcal{P}_{int} = \vec{F}_{A\to B}.\vec{v}(B) + \vec{F}_{B\to A}.\vec{v}(A) = \vec{F}_{A\to B}.\left[\vec{v}(B) - \vec{v}(A)\right],$$

$$\mathcal{P}_{int} = \vec{F}_{A\to B}.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = F_{AB}\vec{e}_{AB}.\left[\dot{r}\vec{e}_{AB} + r\frac{d\vec{e}_{AB}}{dt}\right].$$

Với bất kì hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ nào, tích vô hướng $\vec{e}_{AB}.\frac{d\vec{e}_{AB}}{dt}$ cũng bằng không.

F_{AB} và $\dot{r}$ không phụ thuộc hệ quy chiếu: công suất toàn phần của các nội lực không phụ thuộc vào hệ quy chiếu.

Biểu thức công suất của các nội lực là :

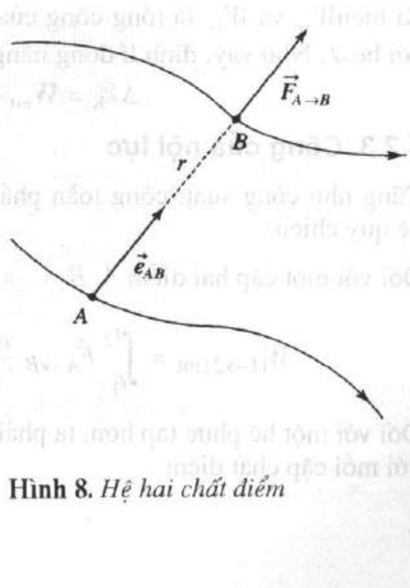
$$\mathcal{P}_{int} = \mathbf{F}_{A\to B}.\frac{\mathbf{d\overrightarrow{AB}}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{F}_{A\to B}\dot{\mathbf{r}}.$$

Kết quả này được thiết lập cho một cặp hai điểm, có thể được mở rộng cho một hệ bất kì; ta hãy nhớ :

Công suất toàn phần của các nội lực trong một hệ chất điểm không phụ thuộc vào hệ quy chiếu.

<u>*Chú ý:*</u>

- *Công suất toàn phần của các nội lực nói chung là khác không nếu hệ có thể biến dạng mặc dầu hợp lực của chúng luôn luôn bằng không.*
- *Công suất của các nội lực bằng không đối với một hệ cứng (hay vật rắn). Thực vậy, có tồn tại một hệ quy chiếu trong đó hệ đứng yên và ở đó mọi vận tốc đều bằng không.*



Hình 8. *Hệ hai chất điểm*

4.2. Định lí động năng

4.2.1. Động năng và công suất

Áp dụng cho mỗi chất điểm định lí về công suất động học

$$\frac{d\mathscr{E}_K(M_i)}{dt} = \mathscr{P}_i,$$

$\mathscr{P}_i$ biểu thị công suất của mọi lực tác dụng lên M_i, ngoại lực cũng như nội lực ở $\mathscr{S}$.

Đối với một tập hợp các chất điểm, định lí về công suất động học được biểu thị bởi

$$\frac{\mathbf{d}\mathscr{E}_\mathbf{K}}{\mathbf{dt}} = \mathscr{P}_\mathbf{ext} + \mathscr{P}_\mathbf{int}\,.$$

$\mathscr{P}_{ext}$ biểu thị tổng các công suất trong $\mathcal{R}$ của mọi ngoại lực ở $\mathscr{S}$.

<u>*Chú ý*</u> : Nếu $\mathscr{S}$ là hệ cứng thì : $\frac{d\mathscr{E}_K}{dt} = \mathscr{P}_{ext}$.

Nói đúng ra, mặc dầu đây không phải là vấn đề của một hệ chất điểm, song ta có thể tự đặt câu hỏi: "Cái gì đã làm chiếc xe tiến lên ?". Câu trả lời sẽ khác nhau tùy theo ta xem xét nó về lực hay về năng lượng.

Về quan hệ lực, động cơ là ở bên trong hệ, ngoại lực duy nhất nằm ngang là lực tác dụng của đất do sự có mặt của ma sát giữa lốp xe và mặt đường. Vậy câu trả lời ở đây, có vẻ nghịch lí con đường.

Về quan hệ năng lượng, công suất của các lực tiếp xúc bằng không (nếu bánh xe không trượt trên mặt đường) trong hệ quy chiếu là con đường, nhưng công suất (bên trong hệ) của động cơ phải được tính đến. Trên phương diện này, câu trả lời là : động cơ.

4.2.2. Động năng và công

Đối với mỗi lực, công giữa hai thời điểm t_1 và t_2 được xác định bởi :

$$W_{(1\to 2)} = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{P} dt$$

Kí hiệu W_{int} và W_{ext} là tổng công của tất cả nội lực và ngoại lực đối với hệ $\mathscr{S}$. Như vậy, định lí động năng còn được phát biểu :

$$\Delta\mathscr{E}_\mathbf{K} = \mathbf{W}_\mathbf{ext} + \mathbf{W}_\mathbf{int}\,.$$

4.2.3. Công của nội lực

Cũng như công suất, công toàn phần của nội lực không phụ thuộc hệ quy chiếu.

Đối với một cặp hai điểm A, B :

$$W_{(1\to 2)\,\text{int}} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{A\to B} \cdot \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\,dt = \int_{r_1}^{r_2} F_{AB}\,dr\,.$$

Đối với một hệ phức tạp hơn, ta phải cộng thêm các công tương ứng với mỗi cặp chất điểm.

Áp dụng 5

Trò chơi trên băng

Một phụ nữ A (m_A = 55 kg) và một người đàn ông B (m_B = 75 kg) đứng kề bên nhau và bất động trên một cái hồ đóng băng (bỏ qua các ma sát).
B đẩy A bằng một lực không đổi F = 150N. Biết rằng cánh tay của B dài l = 70 cm, hãy xác định vận tốc của hai người.

Công của các ngoại lực bằng không.

W_{int} dễ dàng tính được trong hệ quy chiếu Balthazar (chai sâm banh lớn) :

$$W_{\text{int}} = Fl = \Delta\mathscr{E}_K = \frac{1}{2}(m_A v_A^2 + m_B v_B^2).$$

Động lượng được bảo toàn, nghĩa là :

$$m_A v_A + m_B v_B = 0.$$

Từ đó :

$$v_A^2 = 2Fl\frac{m_B}{m_A(m_A + m_B)}$$

Suy ra $v_A = 1{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ và $v_B = 1{,}1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Hình 9.

4.3. Thế năng

4.3.1. Nội lực bảo toàn

Xét tương tác giữa hai phần tử A và B của $\mathscr{S}$. Công gắn với tương tác này, giữa hai vị trí 1 và 2 xác định bởi r_1 và r_2, bằng :

$$W_{1\to 2\,\text{int}} = \int_{r_1}^{r_2} F_{AB}.dr.$$

Nếu F_{AB} chỉ là hàm của r, thì với tương tác này, có một hàm *thế năng tương tác* $\mathscr{E}_{\text{Pint}}(r)$ sao cho :

$$F_{AB} = -\frac{d\mathscr{E}_{P\,int}}{dr} \quad \text{và} \quad W_{1\to 2\,\text{int}} = \mathscr{E}_{P\,\text{int}}(r_1) - \mathscr{E}_{P\,\text{int}}(r_2).$$

Trong trường hợp này, nội lực F_{AB} là lực bảo toàn và công của nó chỉ phụ thuộc vào sự biến thiên của khoảng cách r.

$\mathscr{E}_{\text{Pint}}(r)$ được xác định sai kém một hằng số. Ta thường chọn hằng số này sao cho $\mathscr{E}_{\text{Pint}}$ bằng không khi không có tương tác.

$\mathscr{E}_{\text{Pint}}$ không phụ thuộc hệ quy chiếu. Ví dụ, nếu A và B được nối với nhau bằng một lò xo thẳng, thì thế năng tương tác gắn với tương tác đó cho bởi $\mathscr{E}_{P\,int} = \frac{1}{2}k(r - l_0)^2$ bất kể chuyển động của A và B như thế nào, l_o là chiều dài tự do của lò xo.

4.3.2. Thế năng toàn phần

Thế năng $\mathscr{E}_P$ liên kết với hệ $\mathscr{S}$ là hàm của vị trí :

$$\mathscr{E}_P = \mathscr{E}_{\text{Pint}} + \mathscr{E}_{\text{Pext}}$$

$\mathscr{E}_{\text{Pint}}$ là tổng thế năng tương tác của mọi nội lực bảo toàn, và $\mathscr{E}_{\text{Pext}}$ là tổng thế năng gắn với các ngoại lực bảo toàn, tác dụng lên các phần tử của $\mathscr{S}$.

Công toàn phần của nội lực và ngoại lực có thể viết dưới dạng :

$$W = -\Delta\mathscr{E}_P + W_{nc}.$$

trong đó W_{nc} biểu thị công của các lực không bảo toàn (nc), nội lực cũng như ngoại lực.

Nếu tất cả các lực đều bảo toàn thì $\mathscr{E}_P$ biểu thị công cần thiết để tạo thành hệ từ trạng thái mốc có thế năng bằng không.

▸ **Để luyện tập : BT10.**

4.4. Cơ năng

4.4.1. Định nghĩa

Ta hãy đưa thế năng vào biểu thức của định lí động năng

$$\Delta\mathscr{E}_K = -\Delta\mathscr{E}_P + W_{nc}$$

Cơ năng $\mathscr{E}_M$ của hệ $\mathscr{S}$ là tổng thế năng và động năng

$$\mathscr{E}_M = \mathscr{E}_{Pint} + \mathscr{E}_{Pext} + \mathscr{E}_K$$

Công của các lực không bảo toàn :

$$\Delta\mathscr{E}_M = W_{nc}.$$

Dưới dạng vi phân :

$$\frac{d\mathscr{E}_M}{dt} = \mathscr{P}_{nc}$$ **: công suất của các lực không bảo toàn.**

Các lực không bảo toàn, trong và ngoài $\mathscr{S}$, là các lực không chỉ phụ thuộc vào riêng vị trí của các phần tử của $\mathscr{S}$.

4.4.2. Hệ bảo toàn

Một vài lực không bảo toàn có một công suất bằng không, ví dụ như :

- Lực tương tác giữa hai chất điểm có khoảng cách không đổi.
- Lực liên kết giữa một chất điểm và một thanh dẫn cố định, trong trường hợp một liên kết không có ma sát.

Hệ $\mathscr{S}$, đặt dưới tác dụng của một tập hợp các lực đã cho, là bảo toàn nếu công suất của các lực không bảo toàn bằng không.

Trong thực tế, hệ không bảo toàn là những hệ có ma sát và những hệ liên quan đến một lực phụ thuộc tường minh vào thời gian, chẳng hạn như sự can thiệp của một người thao tác ở bên ngoài.

4.5. Sự bảo toàn cơ năng

4.5.1. Tích phân đầu của năng lượng

Cơ năng của một hệ bảo toàn là không đổi. Điều đó được thể hiện bằng một phương trình trong đó chỉ có các tọa độ và đạo hàm bậc nhất của chúng : *tích phân đầu của năng lượng.*

Các lực liên kết mà công suất toàn phần bằng không, không có mặt một cách tường minh trong tích phân đầu này. Tuy nhiên, các lực liên kết này không phải là không có mặt trong bài toán bởi chúng gián tiếp gây ra các ứng lực động học.

Trong một hệ quy chiếu phi Galilée, mọi kết quả trên đều có thể áp dụng được với điều kiện phải coi các lực quán tính như các ngoại lực.

4.5.2. Hệ bảo toàn một bậc tự do

Hệ khảo sát trong *áp dụng* 6 là hệ có một bậc tự do, vì vị trí của hai chất điểm được liên kết với nhau và chỉ cần một biến số cũng đủ để mô tả vị trí của mỗi điểm.

Trong trường hợp tổng quát, tích phân đầu của năng lượng của hệ bảo toàn một bậc tự do, được đặt dưới dạng :

$$\mathscr{E}_M = \mathscr{E}_P(\xi) + \mathscr{E}_K(\xi,\dot{\xi}) = cte\,.$$

Đạo hàm phương trình trên theo thời gian, ta thu được phương trình vi phân hạng hai đặc trưng cho sự vận động của hệ.

Phương pháp này được ưu tiên sử dụng.

Thực vậy, các lực không bảo toàn có công suất bằng không, như các lực liên kết không xuất hiện trong biểu thức của $\mathscr{E}_M$, điều đó nói chung sẽ đơn giản hóa các phép tính.

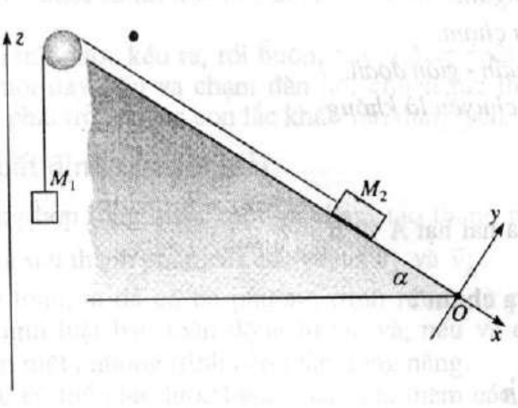
Áp dụng 6

Mặt phẳng nghiêng và ròng rọc

Hai vật có khối lượng m_1 và m_2 được xem như các chất điểm M_1 và M_2. M_2 trượt không ma sát trên mặt phẳng nghiêng và hai chất điểm được nối với nhau bằng một sợi dây lí tưởng luồn qua rãnh của một ròng rọc lí tưởng (hình 10).

1) *Hãy mô tả các lực không bảo toàn và tính công suất của chúng.*

2) *Xác định gia tốc của M_1.*



Hình 10.

1) • Tác dụng của dây lên M_1 :

$$\vec{F}_{T_1} = T\vec{e}_z\,.$$

trong đó T là lực căng của dây và $\mathscr{P}_{T_1} = T\dot{z}_1$.

• Tác dụng của dây lên M_2 :

$$\vec{F}_{T_2} = -T\vec{e}_x\,,$$

với : $\dot{x}_2 = \dot{z}_1$, từ đó : $\mathscr{P}_{T_2} = -T\dot{z}_1$

• Tác dụng của mặt phẳng nghiêng lên M_2 :

$$\vec{R} = R\vec{e}_y\,,\ \text{và}\ \mathscr{P}_R = R\vec{e}_y\,.\dot{x}\vec{e}_x = 0\,.$$

• Công suất toàn phần của các lực không bảo toàn đều bằng không.

2) • Phân tích động học :

$z_2 = -x_2\sin\alpha$, hay $\dot{z}_2 = -\dot{x}_2\sin\alpha = -\dot{z}_1\sin\alpha$.

• $\mathscr{E}_P = \mathscr{E}_{Pext} = m_1 g z_1 + m_2 g z_2$.

$$\mathscr{E}_K = \frac{1}{2}(m_1\dot{z}_1^2 + m_2\dot{x}_1^2) = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{z}_1^2\,.$$

Hệ là bảo toàn, vậy :

$$\frac{d\mathscr{E}_P}{dt} + \frac{d\mathscr{E}_K}{dt} = 0\,,$$

nghĩa là :

$$(m_1+m_2)\dot{z}_1\ddot{z}_1 + g\dot{z}_1(m_1 - m_2\sin\alpha) = 0\,.$$

Khử nghiệm kí sinh $\dot{z}_1 = 0$ đi, ta thu được :

$$\ddot{z}_1 = g\,\frac{m_2\sin\alpha - m_1}{m_1+m_2}\,.$$

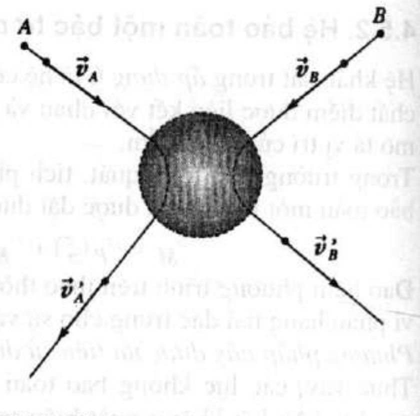
▸ **Để luyện tập : BT4 và 11 .**

5 Va chạm của hai chất điểm

5.1. Đại cương về các va chạm

5.1.1. Định nghĩa

Va chạm là một tương tác ngắn và mạnh giữa hai chất điểm gây ra một sự thay đổi gần như tức thời vận tốc của chúng.
Ta kí hiệu A và B là hai chất điểm, m_A và m_B là khối lượng của chúng, $\vec{v}_A$ và $\vec{v}_B$ là vận tốc của chúng trước va chạm, và $\vec{v}'_A$ và $\vec{v}'_B$ là vận tốc của chúng sau va chạm trong hệ quy chiếu nghiên cứu $\mathcal{R}$ (*hình* 11).



Hình 11. *Sự va chạm.*

5.1.2. Lực va chạm

Đó là các lực tiếp xúc đối với các vật vĩ mô hay lực tương tác ở tầm ngắn đối với các hạt sơ cấp.
Gọi $\vec{F}_c$ là lực va chạm đặt vào A, $\vec{F}_e$ là hợp lực của các lực khác và $<\vec{F}_c>$ và $<\vec{F}_e>$ là các giá trị trung bình của chúng trong khoảng thời gian va chạm τ.
Nếu hệ quy chiếu nghiên cứu là phi Galilée, thì các lực quán tính được coi như các ngoại lực; ta có :

$$m[\vec{v}'_A - \vec{v}_A] = \int_{t=0}^{\tau} (\vec{F}_c + \vec{F}_e)dt \,,$$

hay : $m[\vec{v}'_A - \vec{v}_A] = <\vec{F}_c>\tau + <\vec{F}_e>\tau$.

$\vec{F}_e$ là một lực giới hạn không phụ thuộc vào va chạm.

Khi τ tiến tới 0 $<\vec{F}_e>\tau$ cũng tiến tới 0, hai số hạng khác vẫn giữ một giá trị xác định. Ta có thể kết luận :

$$<\vec{F}_c> = m\frac{\vec{v}'_A - \vec{v}_A}{\tau}$$

<u>*Chú ý*</u> :
- *Các lực va chạm càng mạnh nếu tương tác càng ngắn.*
- *Các lực khác là không đáng kể trong thời gian va chạm.*
- *Các gia tốc rất lớn và sự biến thiên các vận tốc là chuẩn - gián đoạn.*

Các vận tốc bị chặn và trong thời gian τ, các dịch chuyển là không đáng kể.

5.1.3. Sự bảo toàn động lượng

Nếu các ngoại lực nhỏ không đáng kể, thì hệ $\mathcal{S}$ của hai hạt A và B được coi như một hệ cô lập.
Động lượng toàn phần được bảo toàn trong lúc va chạm :

$$\vec{p}(A) + \vec{p}(B) = \vec{p}'(A) + \vec{p}'(B)$$

$$\text{hay} \quad m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B = m_A\vec{v}'_A + m_B\vec{v}'_B$$

Định luật bảo toàn này vẫn còn đúng khi thời gian va chạm đủ ngắn để có thể bỏ qua các ngoại lực. Định luật không phụ thuộc bản chất của các lực va chạm.

▸ **Để luyện tập : BT 2.**

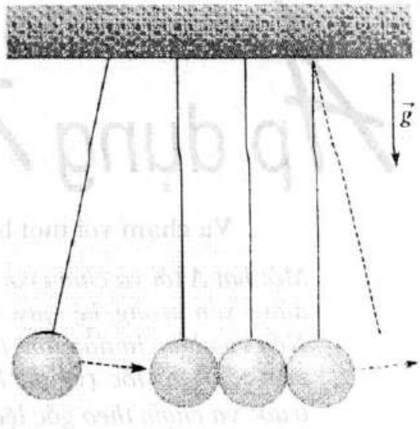
5.2. Va chạm đàn hồi

5.2.1. Định nghĩa

Va chạm là đàn hồi nếu công toàn phần của các nội lực bằng không; đó là trường hợp của các lực va chạm bảo toàn. Vì bỏ qua được các ngoại lực nên động năng của hệ được bảo toàn.

Một va chạm là đàn hồi nếu nó bảo toàn động năng của hệ, nghĩa là :

$$m_A v_A^2 + m_B v_B^2 = m_A v_A'^2 + m_B v_B'^2.$$



Hình 12. *Va chạm đàn hồi.*

5.2.2. Va chạm đàn hồi trực diện

Một va chạm là trực diện (hay trực tiếp, hay "thẳng vào đích") nếu vận tốc của các hạt trong hệ quy chiếu nghiên cứu, trước và sau va chạm, tất cả đều thẳng hàng.

v_A, v_B, v'_A và v'_B biểu diễn giá trị đại số của các vận tốc, ta có :

$$m_A(v_A^2 - v_A'^2) = m_B(v_B'^2 - v_B^2),$$

$$m_A(v_A - v'_A) = m_B(v'_B - v_B).$$

Từ hai phương trình trên, suy ra :

$$v_A + v'_A = v_B + v'_B \text{ hay } v'_B - v'_A = -(v_B - v_A),$$

hay : $$v'_A = \frac{(m_A - m_B)v_A + 2m_B v_B}{m_A + m_B}$$

và $$v'_B = \frac{(m_B - m_A)v_B + 2m_A v_A}{m_A + m_B}.$$

Các trường hợp đặc biệt :

- Nếu $m_A << m_B$, hạt B "không biết" đến hạt A, vậy $v'_B \approx v_B$.
- Nếu $m_A = m_B$, các hạt trao đổi vận tốc cho nhau : $v'_A = v_B$ và $v'_B = v_A$.

Tính chất này được minh họa bởi thiết bị (đồ dùng), biểu diễn trên *hình 12*.

Con lắc bên trái được kéo ra, rồi buông tay; nó va phải con lắc bên cạnh. Sau một dãy bốn va chạm đàn hồi chuẩn tức thời liên tiếp, con lắc bên phải trở về, các con lắc khác vẫn đứng yên.

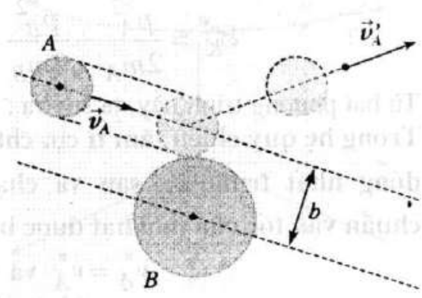
5.2.3. Sự bất định của lời giải

Trong trường hợp tổng quát, một va chạm tạo thành một bài toán sáu ẩn: đó là sáu thành phần của các vectơ $\vec{v}'_A$ và $\vec{v}'_B$.

Để giải bài toán, ta đã có ba phương trình rút ra từ phương trình vectơ của định luật bảo toàn động lượng và, nếu va chạm là đàn hồi, có thêm một phương trình bảo toàn động năng.

Bài toán chỉ có thể giải được bằng cách đưa thêm các dữ kiện phụ thể hiện bản chất của tương tác.

Nếu các hạt được biểu diễn bởi các quả cầu nhỏ tịnh tiến, thì rõ ràng là khoảng cách b (*hình 13*), gọi là thông số chạm (khoảng nhằm), sẽ quyết định góc lệch. Va chạm trực diện tương ứng với trường hợp $b = 0$.



Hình 13. *Thông số chạm.*

Áp dụng 7

Va chạm với một bia đứng yên

Một hạt A tới va chạm với một hạt B, lúc đầu đứng yên trong hệ quy chiếu nghiên cứu. Nếu va chạm là đàn hồi, hãy xác định tỉ số x của các vận tốc (về độ lớn) của A sau và trước va chạm theo góc lệch θ của hạt A.

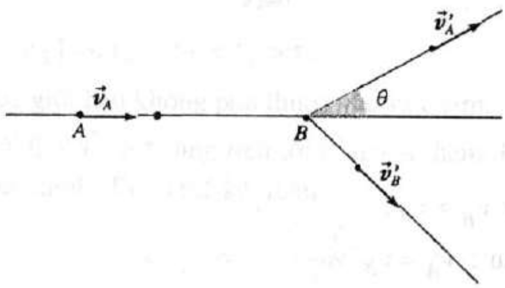
Các vận tốc $\vec{v}_A, \vec{v}'_A$ và $\vec{v}'_B$ là đồng phẳng, vậy :

$$\vec{p}_A - \vec{p}'_A = \vec{p}'_B,$$

từ đó : $p'^2_B = p_A^2 + p'^2_A - 2p_A p'_A \cos\theta$.

Mặt khác : $\mathscr{E}'_{K_A} - \mathscr{E}_{K_A} = \mathscr{E}'_{K_B}$,vậy :

$$\frac{m_A}{m_B} p'^2_B = p_A^2 - p'^2_A$$



Hình 14.

và $p_A^2\left(1-\frac{m_B}{m_A}\right)+p'^2_A\left(1+\frac{m_B}{m_A}\right)=2p_A p'_A \cos\theta$

x là nghiệm của phương trình bậc hai sau :

$$\frac{1}{x}\left(1-\frac{m_B}{m_A}\right)+x\left(1+\frac{m_B}{m_A}\right)=2\cos\theta.$$

- Nếu $m_A = m_B$, $x = \cos\theta$.

Đặt $f(x)=\frac{1}{x}\left(1-\frac{m_B}{m_A}\right)+x\left(1+\frac{m_B}{m_A}\right)$.

- Nếu $m_A < m_B$, $f(x)$ là đồng biến và lấy mọi giá trị thực. Có một nghiệm với mọi giá trị của θ.
- Nếu $m_A > m_B$, $f(x)$ nhận một giá trị cực tiểu dương $f_{\min}=2\left(1-\frac{m_B^2}{m_A^2}\right)^{1/2}$.

Vậy θ luôn luôn bé hơn θ_0, xác định bởi :

$$\cos\theta_0=\left(1-\frac{m_B^2}{m_A^2}\right)^{1/2}, \text{ hay } \sin\theta_0=\frac{m_A}{m_B}.$$

Kết quả này là đương nhiên : nếu A nặng hơn B, thì nó không thể bị hất về phía sau. Ở giới hạn mà $m_A >> m_B$, $\theta_0 \approx 0$ và x ≈ 1. Hạt rất nặng "không biết" đến hạt nhẹ và vectơ vận tốc của nó không bị thay đổi.

5.2.4. Khảo sát trong hệ quy chiếu tâm tỉ cự

Viết các hệ thức bảo toàn cho một va chạm đàn hồi giữa hai chất điểm trong $\mathcal{R}^*$ (*hình 15*) :

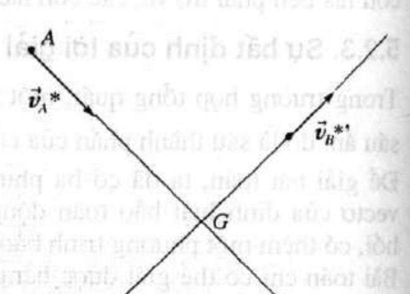
$$\vec{p}^* = \vec{0} = \vec{p}^*_A + \vec{p}^*_B = \vec{p}^{*\prime}_A + \vec{p}^{*\prime}_B,$$

$$\mathscr{E}^*_K = \frac{p_A^{*2}}{2m_A}+\frac{p_B^{*2}}{2m_B}=\frac{p_A^{*\prime 2}}{2m_A}+\frac{p_B^{*\prime 2}}{2m_B}.$$

Từ hai phương trình này, ta suy ra :

Trong hệ quy chiếu tâm tỉ cự, chuẩn động lượng của các hạt là đồng nhất trước và sau va chạm : $p^*_A = p^*_B = p^{*\prime}_A = p^{*\prime}_B$ và chuẩn vận tốc của mỗi hạt được bảo toàn khi va chạm đàn hồi :

$$v^*_A = v^{*\prime}_A \text{ và } v^*_B = v^{*\prime}_B$$



Hình 15. *Va chạm trong hệ quy chiếu tâm tỉ cự.*

▸ **Để luyện tập : BT6**

5.2.5. Va chạm không đàn hồi

Nếu các vật tới va chạm nhau là vĩ mô thì động năng có thể giảm do có các nội lực *tiêu tán* (như các ma sát), do đó công toàn phần là âm.

Sự không đàn hồi có tác dụng làm nóng hai vật, hoặc làm thay đổi cấu trúc bên trong của chúng (bởi các chỗ gãy).

Các vật vi mô (nguyên tử, các hạt) có thể hấp thụ năng lượng và chuyển sang trạng thái kích thích. Cũng có thể các hạt xuất hiện khác với các hạt tới.

Các phản ứng sau này chỉ có thể giải quyết trong khuôn khổ của cơ học tương đối tính.

6 Vật rắn quay xung quanh một trục cố định

6.1. Khái niệm cơ sở về động học của một vật rắn quay xung quanh một trục cố định

6.1.1. Định nghĩa

Vật rắn là một tập hợp các điểm mà khoảng cách giữa chúng giữ không đổi với thời gian.

Ta hãy khảo sát vật rắn S quay xung quanh một trục cố định Δ. Δ là đứng yên trong hệ quy chiếu nghiên cứu $\Re$ và nó được xác định bởi điểm O và vectơ đơn vị $\vec{e}$.

6.1.2. Vận tốc của các điểm của vật rắn

Nếu θ xác định sự quay của vật rắn S, thì mọi điểm của vật rắn đều vạch các đường tròn với cùng một vận tốc góc $\dot{\theta}$.

Trong tọa độ trụ trục Δ, ta có :

$$\vec{v}(M) = r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta \text{ ; mà } r\vec{e}_\theta = \vec{e} \wedge \overrightarrow{OM} \text{ , vậy } \vec{v}(M) = \dot{\theta}\,\vec{e} \wedge \overrightarrow{OM}$$

Nếu M là một điểm của một vật rắn quay xung quanh trục $\Delta(O\ ;\ \vec{e})$, thì vận tốc của nó được biểu thị bởi :

$$\vec{v}(M) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM},$$

với $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\,\vec{e}$: vectơ quay.

6.1.3. Tập hợp rắn của các chất điểm quay

S là một tập hợp rắn của n chất điểm M_i, khối lượng m_i.

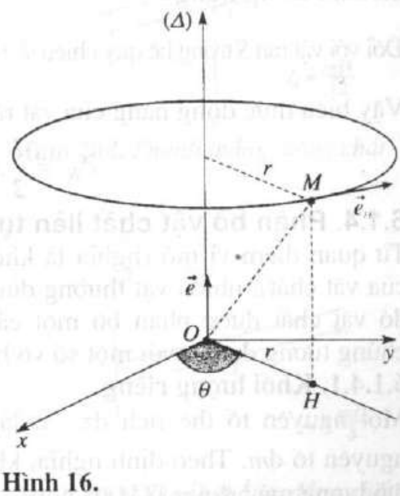
6.1.3.1. Mômen động lượng tại một điểm của Δ

Dùng các tọa độ trụ trục Δ ($\vec{e} = \vec{e}_z$) :

$$\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{v}(M_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i (z_i \vec{e}_z + r_i \vec{e}_{r_i}) \wedge r_i \dot{\theta} \vec{e}_{\theta_i},$$

từ đó :

$$\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \dot{\theta}\,\vec{e}_z - \sum_{i=1}^{n} m_i r_i z_i \dot{\theta}\,\vec{e}_{r_i}.$$



Hình 16.

Các tổng $\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ *và* $\sum_{i=1}^{n} m_i r_i z_i$ *là bất biến đối với thời gian và chỉ* phụ thuộc vào sự phân bố các khối lượng trong vật rắn (*hình 17*).

Gọi $J_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ là mômen quán tính của S đối với trục Δ.

Nếu $\sum_{i=1}^{n} m_i r_i z_i = 0$, trục Δ được gọi là *trục quán tính chính* và mômen động lượng tại O là thẳng hàng với $\vec{\Omega}$: $\vec{L}_0 = J_\Delta \vec{\Omega}$

Đó là trường hợp nếu Δ là trục đối xứng, hoặc nếu các điểm M_i nằm trong mặt phẳng $z = 0$.

Trong trường hợp tổng quát :

$$\vec{L}_0 = J_\Delta \vec{\Omega} - \sum_{i=1}^{n} m_i r_i z_i \dot{\theta} \vec{e}_{r_i}\ , \quad \text{với} \quad \vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{e}_z\ .$$

Khi Δ không phải là trục quán tính chính, mômen động lượng tại O là một vectơ không phải là hằng số, ngay cả khi quay đều.

Theo định lí về mômen động lượng :

$$\vec{\mathcal{M}}_{O_{ext}} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = J_\Delta \ddot{\theta} \vec{e}_z - \sum_{i=1}^{n} m_i r_i z_i \dot{\theta}^2 \vec{e}_{\theta_i}$$

Trong trường hợp quay đều ($\ddot{\theta} = 0$) xung quanh trục Δ cố định, thì có các lực mà cường độ biến thiên theo $\Omega^2 = \dot{\theta}^2$ xuất hiện. Các lực này có thể làm hỏng tập hợp rắn nếu Ω quá lớn.

Chú ý : *Khi có sự quay này, mômen động lượng được liên kết với tập hợp rắn các chất điểm, bởi vì* J_Δ *và* $\sum_{i}^{n} m_i r_i z_i$ *là các bất biến. Trong hệ quy chiếu gắn với tập hợp rắn,* $\vec{L}_O$ *là một vectơ không đổi.*

6.1.3.2. Mômen động lượng đối với trục Δ

Theo định nghĩa : $L_\Delta = \vec{L}_O . \vec{e}$. Đặt $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}$.

Theo trên, mômen động lượng đối với trục Δ bằng :

$$L_\Delta = J_\Delta \Omega$$

6.1.3.3. Động năng

Đối với vật rắn S trong hệ quy chiếu $\mathfrak{R}$: $\mathscr{E}_K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \dot{\theta}^2$

Vậy biểu thức động năng của vật rắn quay là :

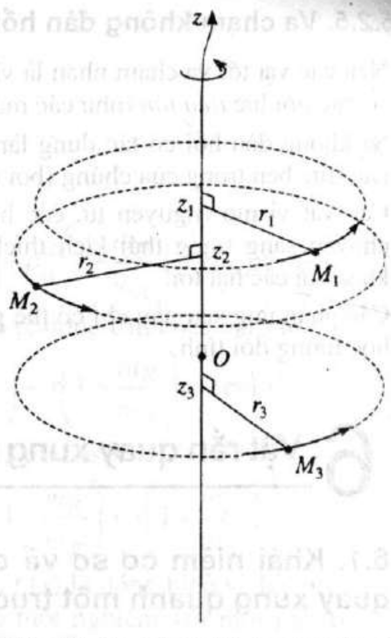
$$\mathscr{E}_K = \frac{1}{2} J_\Delta \Omega^2$$

6.1.4. Phân bố vật chất liên tục

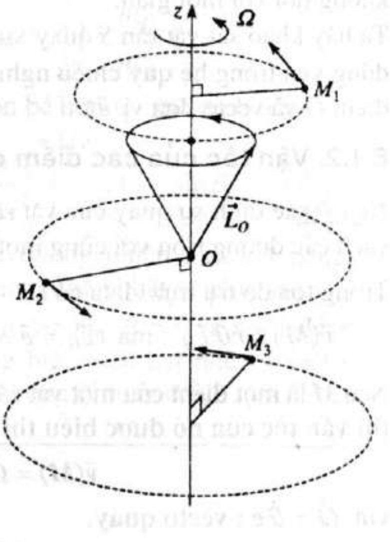
Từ quan điểm vĩ mô (nghĩa là không để ý tới bản chất nguyên tử của vật chất), nhiều vật thường dùng đều là các tập hợp cứng trong đó vật chất được phân bố một cách liên tục. Ta thừa nhận rằng chúng tương đương với một số vô hạn các chất điểm sơ cấp.

6.1.4.1. Khối lượng riêng

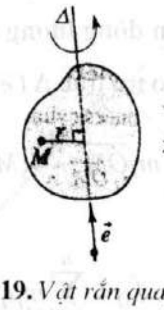
Một nguyên tố thể tích $d\tau$, ở lân cận điểm M, có khối lượng nguyên tố dm. Theo định nghĩa, khối lượng riêng ρ của nó là một đại lượng mà : $dm = \rho(M) d\tau$.



Hình 17. *M_1, M_2 và M_3 tạo thành một tập hợp cứng, quay xung quanh trục Oz.*



Hình 18. *Sự thay đổi mômen động lượng tại O.*



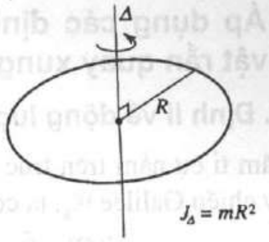
Hình 19. *Vật rắn quay xung quanh Δ.*

Khối lượng toàn phần của S là tổng của các khối lượng nguyên tố :

$$m = \int_S \rho(M) d\tau .$$

Kí hiệu $\int_S \rho(M) d\tau$ không dự định trước được kĩ thuật được dùng để tính tích phân.

Tùy theo hình dạng của vật rắn và tính chất đối xứng của nó, ta có thể gặp một tích phân đơn, kép hay bậc ba.



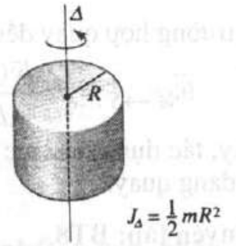
Hình 20a. *Vòng tròn.*

6.1.4.2. Tâm quán tính

Theo cách tương tự, G được xác định bởi :

$$\vec{0} = \int_S \overrightarrow{GM} \rho(M) d\tau \ \text{ hay } \ \overrightarrow{OG} = \int_S \overrightarrow{OM} \rho(M) d\tau$$

Nếu vật rắn có một tâm đối xứng, thì G trùng với điểm đó.



Hình 20b. *Trụ đặc, đồng chất.*

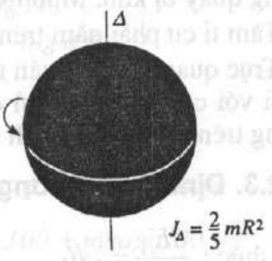
6.1.4.3. Mômen quán tính đối với một trục

Ta tổng quát hóa các phương pháp đã khai triển đối với một tập hợp các chất điểm.

Đối với một vật rắn quay xung quanh một trục cố định Δ :

$$L_\Delta = J_\Delta \Omega \ \text{ và } \ \mathscr{E}_K = \frac{1}{2} J_\Delta \Omega^2 \text{ , với } \ J_\Delta = \int_S r^2 \rho(M) d\tau \ .$$

Đối với các vật rắn thường gặp, phép tích phân trên cho các kết quả sau :



Hình 20c. *Cầu đặc, đồng chất .*

- Vật rắn mà khối lượng được phân bố trên chu vi của một vòng tròn bán kính R (ví dụ chiếc vòng), trục Δ :

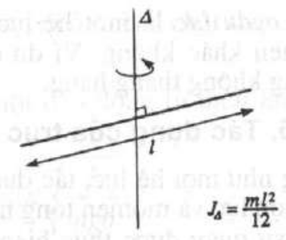
$$J_\Delta = \frac{1}{2} mR^2 \ ;$$

- Trụ tròn xoay (hoặc đĩa) đặc, đồng chất, quay xung quanh trục đối xứng Δ của nó :

$$J_\Delta = \frac{1}{2} mR^2 \ ;$$

- Cầu đặc, đồng chất bán kính R, quay xung quanh một đường kính của nó :

$$J_\Delta = \frac{2}{5} mR^2 \ ;$$



Hình 20d. *Thanh thẳng, đồng chất.*

- Cầu rỗng, đồng chất, bán kính R, quay xung quanh một đường kính của nó :

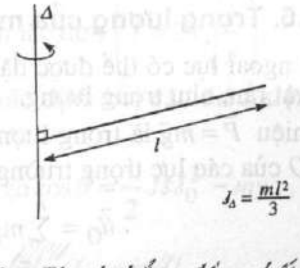
$$J_\Delta = \frac{2}{3} mR^2 \ ;$$

- Thanh thẳng, đồng chất, dài l, quay xung quanh một trục Δ vuông góc và đi qua đầu thanh :

$$J_\Delta = \frac{1}{3} ml^2 \ ;$$

- Thanh thẳng, đồng chất, dài l, quay xung quanh một trục Δ vuông góc và đi qua tâm của thanh :

$$J_\Delta = \frac{1}{12} ml^2$$



Hình 20 e. *Thanh thẳng, đồng chất.*

6.2. Áp dụng các định luật của động lực học cho một vật rắn quay xung quanh một trục cố định.

6.2.1. Định lí về động lượng (kết thức động học)

Nếu tâm tỉ cự nằm trên trục quay, mà giả thiết lại cố định đối với hệ quy chiếu Galilée $\mathcal{R}_g$, ta có thể viết :

$$\vec{v}(G)=\vec{0} \text{ , từ đó : } \vec{\mathcal{R}}_{\mathcal{E}\to S}=\vec{0}$$

Nếu tâm tỉ cự cách trục quay một đoạn a, ta có :

$$\vec{v}(G)=a\Omega\,\vec{e}_\theta .$$

Trong trường hợp quay đều :

$$\vec{\mathcal{R}}_{\mathcal{E}\to S}=m\frac{d\vec{v}(G)}{dt}=ma\Omega\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}=-m\Omega^2 a\vec{e}_r .$$

Lực này, tác dụng lên trục quay, có thể gây ra rung động và làm hư hại hệ đang quay.

▸ **Để luyện tập: BT8**

6.2.2. Vật rắn thăng bằng

Hệ được gọi là "thăng bằng" khi hai tác dụng có thể làm hư hại hệ đang quay bị khử. Muốn vậy :

- Tâm tỉ cự phải nằm trên trục quay (thăng bằng tĩnh) .
- Trục quay là trục quán tính chính (thăng bằng động lực).

Đối với các vật quay thì điều cốt yếu là thực hiện hai phép thăng bằng trên (ví dụ các bánh xe ôtô).

6.2.3. Định lí vô hướng của mômen động lượng

Hệ thức : $\frac{dL_\Delta}{dt}=\mathcal{M}_{\Delta_{\mathcal{E}\to S}}$ trở thành :

$$J_\Delta\dot{\Omega}=J_\Delta\ddot{\theta}=\mathcal{M}_{\Delta_{\mathcal{E}\to S}}$$

6.2.4. Ngẫu lực

Một *ngẫu lực* là một hệ lực có một hợp lực bằng không và một mômen khác không. Ví dụ đơn giản nhất là hệ hai lực đối nhau, nhưng không thẳng hàng.

6.2.5. Tác dụng của trục quay lên vật rắn

Cũng như mọi hệ lực, tác dụng của trục quay lên vật rắn đặc trưng bởi hợp lực và mômen tổng hợp.

Nếu sự quay được thực hiện không có ma sát thì mômen đối với trục quay do trục tác dụng lên vật rắn bằng không.

▸ **Để luyện tập: BT9.**

6.2.6. Trọng lượng của một vật rắn

Các ngoại lực có thể được đặt tại một điểm hoặc phân bố trên toàn bộ vật rắn, như trọng lượng.

Kí hiệu $\vec{P}=m\vec{g}$ là trọng lượng toàn phần và tính mômen tổng hợp tại O của các lực trọng trường :

$$\vec{\mathcal{M}}_O=\sum_{i=1}^{n}m_i\overrightarrow{OM_i}\wedge\vec{g}=\overrightarrow{OG}\wedge\vec{P},$$

hoặc, với một sự phân bố liên tục của vật chất :

$$\mathcal{M}_O = \int_S \rho(M)\overrightarrow{OM} \wedge \vec{g} d\tau = \left[\int_S \rho(M)\overrightarrow{OM} d\tau\right] \wedge \vec{g} = m\overrightarrow{OG} \wedge \vec{g} = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P}$$

Tác dụng của trọng trường lên một hệ tương đương với một lực bằng trọng lượng toàn phần đặt vào tâm tỉ cự.

Hãy khẳng định rằng "trọng lượng đặt tại G" là một sự lạm dụng ngôn ngữ, vì trọng lượng là một lực phân bố. Tính chất này chỉ đúng bởi lẽ trọng trường $\vec{g}$ là đều. Ta rất nên dứt khoát tránh nói đặt tại G cho mọi lực có tính chất phân bố.

Áp dụng 8

Con lắc vật lí

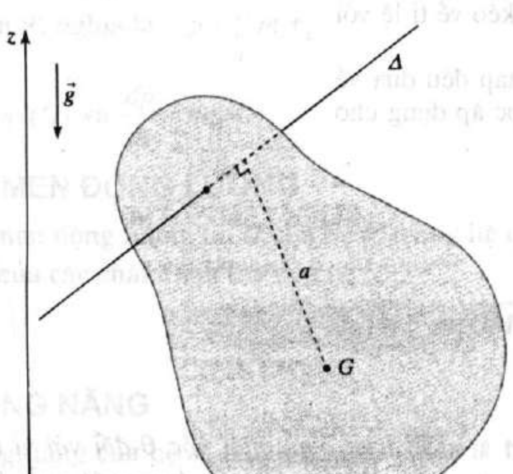
Một vật rắn S chuyển động không ma sát xung quanh một trục Δ cố định (đối với hệ quy chiếu trái đất, Galilée) và nằm ngang. J biểu thị mômen quán tính của S đối với Δ và a là khoảng cách từ tâm tỉ cự G tới trục Δ.

1) *Xác định chu kì của các dao động nhỏ.*

2) *S được đẩy ra từ vị trí cân bằng với vận tốc góc Ω_0.*

Hãy mô tả chuyển động sau đó của S.

Hệ nghiên cứu là bảo toàn (không có ma sát) và có một bậc tự do. Vậy phương pháp đương nhiên là viết tích phân đầu của năng lượng.



Hình 21. *Con lắc vật lí.*

Phương pháp thứ nhất : tích phân đầu của năng lượng.

Trọng lượng tương đương với một lực $m\vec{g}$ đặt tại G. Vậy thế năng là :

$$\mathscr{E}_P = mg\, z_G = -mg\, a \cos\theta \,.$$

Cơ năng có biểu thức :

$$\mathscr{E}_M = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - mga\cos\theta = cte\,.$$

1) Biểu thức của phương trình vi phân:

$\dfrac{d\mathscr{E}_M}{dt} = 0$, suy ra : $J\dot{\theta}\ddot{\theta} + mga\sin\theta\dot{\theta} = 0$.

Khử nghiệm kí sinh $\dot{\theta} = 0$ đi, ta thu được :

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin\theta\text{, với } \omega^2 = \frac{mga}{J}.$$

Đối với các dao động nhỏ, ở bậc nhất theo θ, $\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$.

Ta đã biết đó là một dao động tử điều hòa, có chu kì :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}.$$

Nếu vật rắn thu về một chất điểm mang bởi một thanh có khối lượng bằng không, có chiều dài l, $J = ml^2$ và $a = l$, ta tìm lại biểu thức của chu kì con lắc đơn $\left(T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}\right)$.

2) Cơ năng được xác định bởi các điều kiện ban đầu, nghĩa là :

$$\mathscr{E}_M = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - mga\cos\theta = \frac{1}{2}J\Omega_0^2 - mga\,,$$

Suy ra : $\dot{\theta}^2 = \Omega_0^2 - \dfrac{mga}{J}(1 - \cos\theta)$.

Biên độ θ_m của dao động được xác định bởi :

$$\dot{\theta}^2 = 0 = \Omega_0^2 - \frac{mga}{J}(1-\cos\theta_m),$$

hay là : $\cos\theta_m = 1 - \frac{J\Omega_0^2}{mga} \geq -1$

• Nếu $J\Omega_0^2 > 2mga$, thì không có cực trị và chuyển động là một chuyển động quay.

• Nếu $J\Omega_0^2 < 2mga$, θ_m tồn tại và chuyển động là dao động.

Phương pháp thứ hai : định lí mômen động lượng

Các tác dụng cơ học đặt lên S là :

• tác dụng của trục, có mômen bằng không đối với Δ;

• tác dụng của trọng lượng : $\mathcal{M}_\Delta = -mga\sin\theta$.

Ta tìm lại được phương trình vi phân :

$$\mathcal{M}_\Delta = -mga\sin\theta = J\ddot{\theta}.$$

Nhân hai vế với $\dot{\theta}$ và lấy tích phân, ta tìm lại được phương trình bảo toàn năng lượng.

6.2.7. Công suất

Đối với một vật rắn, công suất của các nội lực bằng không. Ta hãy tính công suất của một ngoại lực $\vec{F}$ tác dụng vào điểm M của vật rắn :

$$\mathcal{P} = \vec{F}.\vec{v}(M) = F_\theta\, a\dot{\theta} \text{ (theo tọa độ trụ)},$$

Với $F_\theta a = \mathcal{M}_\Delta$: là mômen của F đối với Δ, và $\dot{\theta} = \Omega$.

Công suất và công của một lực tác dụng lên một vật rắn quay cho bởi :

$$\mathcal{P} = \mathcal{M}_\Delta\Omega \text{ và } W_{(1\to2)} = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathcal{M}_\Delta\, d\theta$$

▸ **Để luyện tập : BT9 và 22.**

6.2.8. Ngẫu lực kéo về đàn hồi

Xét một vật rắn S mà trục quay Δ được cụ thể hóa bằng một sợi dây căng, một phần gắn vào S và phần kia gắn vào một điểm cố định (*hình 22*).

Khi S quay xung quanh trục Δ, sợi dây bị biến dạng, và do tính đàn hồi, nó tác dụng một lực cơ học chống lại sự quay.

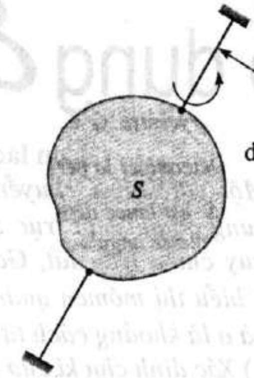
Nếu tác dụng này là tuyến tính, thì lực tác dụng của dây lên S có thể tạo ra một ngẫu lực kéo về tỉ lệ với góc xoắn.

$$\mathcal{M}_{\Delta\,dây\to S} = -C\theta,$$

trong đó C là hằng số xoắn.

Một lò xo hình xoắn ốc cũng tạo ra một ngẫu lực kéo về tỉ lệ với góc xoắn.

Vì mọi phép gần đúng của một hiện tượng phức tạp đều đưa về một định luật tuyến tính, nên quan hệ này chỉ được áp dụng cho các giá trị θ đủ nhỏ.



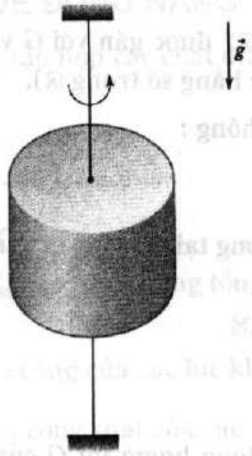
Hình 22. *Sự xoắn của dây tạo ra một ngẫu lực kéo về.*

Áp dụng 9

Con lắc xoắn

Một sợi dây kim loại thẳng đứng, có hai đầu cố định, được gắn vào một hình trụ đồng chất khối lượng m và có bán kính R. Sợi dây bị căng và trùng với trục đối xứng của hình trụ.

Khi trục quay một góc θ đối với vị trí cân bằng thì sợi dây tác dụng một ngẫu lực kéo về đàn hồi với một hằng số xoắn C. Hãy xác định tần số dao động của trụ. Điều gì xảy ra nếu dây không thẳng đứng ?


Hình 23.

Mô men của trọng lực đối với trục đối xứng bằng không.

Áp dụng định lí vô hướng về mômen động lượng, ta có :

$$J\ddot{\theta} = \frac{1}{2}mR^2\ddot{\theta} = -C\theta .$$

Ta nhận ra đây là một chuyển động hình sin:

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi); \text{ với } \omega^2 = \frac{C}{J}.$$

Mômen của trọng lượng đối với trục bằng không, bất kể hướng của trục như thế nào. Chu kì dao động vẫn không thay đổi.

Nếu trục của dây không phải là trục đối xứng và G nằm ngoài trục thì khi đó, ta phải kể tới mômen của trọng lượng và hướng của trục ảnh hưởng tới kết quả.

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ TÂM TỈ CỰ

Tâm tỉ cự G của một hệ chất điểm $\mathscr{S}$ được xác định bởi $\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$;

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i} \text{ , } O \text{ là một điểm bất kì.}$$

■ ĐỘNG LƯỢNG

• **Động lượng $\vec{p}$ của $\mathscr{S}$ trong hệ quy chiếu $\mathscr{R}$ bằng tổng động lượng của các chất điểm tạo nên $\mathscr{S}$, nghĩa là : $\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i$.**

• **$\vec{p} = m\vec{v}(G)$ và $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}(G)$.**

■ MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG

• **Mômen động lượng tại O của hệ $\mathscr{S}$ trong hệ quy chiếu $\mathscr{R}$ bằng tổng các mômen động lượng của các chất điểm tạo nên hệ :**

$$\vec{L}_O = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{v}_i .$$

■ ĐỘNG NĂNG

• **Động năng của hệ $\mathscr{S}$ trong hệ quy chiếu $\mathscr{R}$ bằng tổng động năng của các chất điểm tạo nên hệ : $\mathscr{E}_K = \dfrac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2$.**

■ HỆ QUY CHIẾU TÂM TỈ CỰ

• $\mathcal{R}$ là hệ quy chiếu nghiên cứu, hệ quy chiếu tâm tỉ cự $\mathcal{R}^*$ được gắn với G và tịnh tiến đối với $\mathcal{R}$ (điều đó có nghĩa là các vectơ gắn vào $\mathcal{R}^*$ là các hằng số trong $\mathcal{R}$).

• Động lượng của $\mathcal{S}$ trong hệ quy chiếu tâm tỉ cự bằng không :

$$\vec{p}_{/\mathcal{R}^*} = \vec{p}^* = m\vec{v}^*(G) = \vec{0}.$$

• Mômen động lượng tâm tỉ cự của $\mathcal{S}$ là mômen động lượng tại G trong $\mathcal{R}^*$, nghĩa là :

$$\vec{L}^* = \vec{L}_G^*.$$

■ ĐỊNH LÍ KOENIG (PCSI)

• *Định lí KOËNIG thứ nhất*

Mômen động lượng tại O của hệ $\mathcal{S}$ bằng tổng mômen động lượng tại O của một chất điểm khối lượng m nằm tại G và mômen động lượng tâm tỉ cự :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{p} + \vec{L}^* = m\overrightarrow{OG} \wedge \vec{v}(G) + \vec{L}^*$$

• *Định lí KOËNIG thứ hai*

Động năng của hệ $\mathcal{S}$ bằng tổng động năng của một chất điểm khối lượng m nằm tại G và động năng tâm tỉ cự :

$$\mathscr{E}_K = \frac{1}{2}mv^2(G) + \mathscr{E}_K^*$$

■ ĐỊNH LÍ VỀ ĐỘNG LƯỢNG

Chuyển động của tâm tỉ cự giống hệt chuyển động của một chất điểm khối lượng m, chịu tác dụng của một lực bằng tổng hợp của các ngoại lực :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}(G) = \vec{R}_{\mathscr{E}\to\mathscr{S}}.$$

■ ĐỊNH LÍ VỀ MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG

Nếu O là một điểm cố định : $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathscr{M}}_{O_{\mathscr{E}\to\mathscr{S}}}$.

• *Mômen động lượng tâm tỉ cự* :

$$\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \vec{\mathscr{M}}_{G_{\mathscr{E}\to\mathscr{S}}}.$$

• *Định lí vô hướng:*

Nếu Δ là một trục cố định :

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \mathscr{M}_{\Delta_{\mathscr{E}\to\mathscr{S}}}.$$

■ CÔNG SUẤT CỦA CÁC NỘI LỰC

Công suất toàn phần của các nội lực của một hệ chất điểm không phụ thuộc vào hệ quy chiếu

$$\mathscr{P}_{int} = \vec{F}_{A\to B}.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = F_{A\to B}\dot{r}$$

■ ĐỊNH LÍ VỀ ĐỘNG NĂNG

• Đối với một tập hợp các chất điểm, định lí về công suất động học biểu thị bởi :

$$\frac{d\mathscr{E}_K}{dt} = \mathscr{P}_{ext} + \mathscr{P}_{int}.$$

• $\Delta\mathscr{E}_K = W_{ext} + W_{int}$

■ CƠ NĂNG

• Cơ năng $\mathscr{E}_M$ của hệ $\mathscr{S}$ bằng tổng các thế năng và động năng :

$$\mathscr{E}_M = \mathscr{E}_{Pint} + \mathscr{E}_{Pext} + \mathscr{E}_K.$$

• $\Delta\mathscr{E}_M = W_{nc}$: công của các lực không bảo toàn.

• $\frac{d\mathscr{E}_M}{dt} = \mathscr{P}_{nc}$: công suất của các lực không bảo toàn.

■ VA CHẠM

• Trong một va chạm, động lượng toàn phần được bảo toàn :

$$\vec{p}(A) + \vec{p}(B) = \vec{p}'(A) + \vec{p}'(B)$$

$$\text{hay } m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B = m_A\vec{v}'_A + m_B\vec{v}'_B.$$

• *Va chạm đàn hồi :*

Một va chạm là đàn hồi nếu nó bảo toàn động năng của hệ :

$$m_A v_A^2 + m_B v_B^2 = m_A v'^2_A + m_B v'^2_B$$

• Trong hệ quy chiếu tâm tỉ cự, độ lớn (chuẩn) động lượng của các hạt trước và sau va chạm giống hệt nhau : $p^*_A = p^*_B = p^{*\prime}_A = p^{*\prime}_B$, và độ lớn (chuẩn) vận tốc của mỗi hạt được bảo toàn trong một va chạm đàn hồi : $v^*_A = v^{*\prime}_A$ và $v^*_B = v^{*\prime}_B$.

• *Vật rắn quay xung quanh một trục cố định (PCSI)*

Nếu M là một điểm của vật rắn quay xung quanh trục Δ $(O, \vec{e})$ thì vận tốc của nó có thể biểu thị bởi :

$$\vec{v}(M) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM},$$

với $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\,\vec{e}$: vectơ quay

• $L_\Delta = J_\Delta\Omega$ và $\mathscr{E}_K = \frac{1}{2}J_\Delta\Omega^2$ với $J_\Delta = \int_S r^2\rho(M)d\tau$.

J_Δ là mômen quán tính của S đối với Δ.

• *Định lí vô hướng của mômen động lượng*

$$J_\Delta\,\dot{\Omega} = J_\Delta\,\ddot{\theta} = \mathscr{M}_{\Delta\,\mathscr{E}\to S}$$

• Công suất và công của một lực đặt vào một vật rắn quay được biểu thị bởi :

$$\mathscr{P} = \mathscr{M}_\Delta\Omega \text{ và } W_{(1\to 2)} = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathscr{M}_\Delta d\theta.$$

• *Ngẫu lực kéo về đàn hồi*

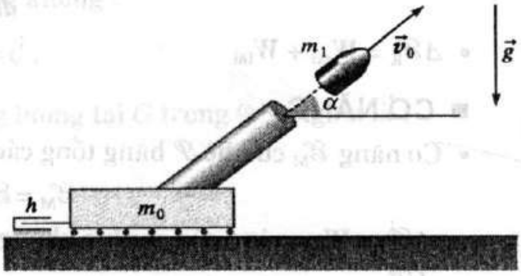
$$M_{\Delta\,dây\to S} = -C\theta,$$

Trong đó C là một hằng số xoắn.

*B*ài tập có lời giải

Sự giật lùi của súng

ĐỀ BÀI



Một khẩu súng có khối lượng m_0 bắn ra một viên đạn khối lượng m_1 với vận tốc v_1 và một góc α. Súng đặt trên đất (cứng) và được gắn vào một điểm cố định bằng một thiết bị giảm giật tạo ra một lực ma sát nhớt : $\vec{F}_{frott} = -h\vec{v}$.

Giả thiết thời gian τ của pha bắn rất ngắn.

1) Hỏi tại sao có thể bỏ qua ảnh hưởng của bộ phận giảm giật trong thời gian τ của pha bắn ?

2) Xác định vận tốc v_0 của súng ngay sau khi bắn, cũng như khoảng cách giật lùi của súng.

HƯỚNG DẪN

• *Những lực nào tác dụng lên súng trong pha bắn ?*

• *Trong các phép tính, ta dựa vào lời chỉ dẫn "thời gian τ rất ngắn" như thế nào ?*
*Ta có thể dựa theo cách biện luận đã làm ở § **5.1.2** về đặc tính rất mạnh của các lực va chạm.*

• *Trong thời gian bắn τ, các giá trị của gia tốc, vận tốc và độ dịch chuyển có rất lớn không ? có khác không nhưng bị hạn chế không ? gần như bằng không ?*
Nhớ rằng nếu $f(t)$ là một hàm chặn thì :

$$\lim_{\tau \to 0} \int_0^\tau f(t)dt = 0 .$$

• *Trong lúc bắn, mỗi vật chịu những lực rất mạnh rồi biến mất ngay sau đó. Vậy đương nhiên, phải khảo sát hai pha kế tiếp nhau :*

- Pha bắn, trong đó chỉ có các lực rất mạnh tham dự ;

- Chuyển động sau đó, trong đó có tất cả các lực khác tham gia.

• *Trong lúc bắn, hệ {súng - đạn} được coi như một hệ cô lập ? Có thành phần nào của động lượng được bảo toàn ?*

• *Vận tốc và vị trí của súng khi kết thúc pha bắn tạo nên các điều kiện ban đầu của chuyển động sau đó.*

LỜI GIẢI

1) Gọi x là hoành độ xác định vị trí của súng, $v = \dot{x}$ là vận tốc của nó và $\vec{F}_p$ là lực tác dụng của viên đạn lên súng.

$\vec{F}_p$ trực đối với lực do súng tác dụng lên viên đạn, do đó :

$$m_0 \frac{dv}{dt} = -hv + \vec{F}_p . \vec{e}_x .$$

Lấy tích phân từ *0* đến τ, ta thu được :

$$m_0[v(t) - 0] = -h[x(\tau) - 0] + \int_0^\tau F_{P_x} dt .$$

Nếu ta cho τ tiến tới *0* :

• Vận tốc bị hạn chế, nhưng tăng đột ngột từ *0* đến $v(\tau)$;

• Gia tốc và lực có giá trị rất lớn trong khoảng giữa *0* và τ.

$x(\tau) = \int_0^\tau v dt$ tiến tới 0.

Kết luận : Trong khoảng thời gian giữa 0 và τ, số hạng ma sát có thể bỏ qua trước các số hạng khác và độ dịch chuyển $x(\tau)$ gần như bằng không.

2) Xét hệ gồm súng và đạn (bỏ qua khối lượng của thuốc nổ). Theo trên, giữa 0 và τ, thành phần nằm ngang của ngoại lực có thể bỏ qua và thành phần p_x của $\vec{p}$ được bảo toàn (thành phần p_z không bảo toàn vì đất cứng tác dụng một phản lực thẳng đứng không bị chặn khi τ tiến tới 0. Vậy :

$$m_0\, v(\tau) + m_1\, v_1 \cos\alpha = 0, \text{ tức } v(\tau) = v_0 = -\, v_1 \cos\alpha \frac{m_1}{m_0} .$$

Sau khi bắn, súng chịu tác dụng của lực ma sát : $m_0 \frac{dv}{dt} = -hv$

Dựa vào điều kiện ban đầu, ta thu được :

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{h}{m_0}t\right) \text{ và } x(t) = \frac{m_0 v_0}{h}\left[1 - \exp\left(-\frac{h}{m_0}t\right)\right]$$

Khoảng cách toàn phần đi được trong lúc giật lùi bằng :

$$d = \lim_{x \to \infty} |x(t)| = \frac{m_0 |v_0|}{h} = \frac{m_1 v_1 \cos\alpha}{h}$$

Với mô hình này, khoảng cách giật lùi không phụ thuộc vào khối lượng của súng.

1 Tổng hợp các tâm tỉ cự

Cho bốn chất điểm có cùng khối lượng, không đồng phẳng, có các vị trí A, B, C và D. Bằng một phép dựng hình học, hãy xác định tâm tỉ cự của các hệ thống sau :

1) $\mathscr{S}_1$ tạo bởi A và B ;

2) $\mathscr{S}_2$ tạo bởi A, B và C ;

3) $\mathscr{S}_3$ tạo bởi A, B, C và D.

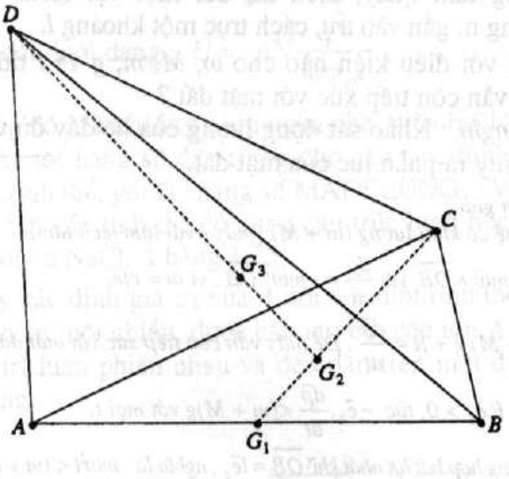
• *Lời giải*

1) $\mathscr{S}_1$: *G_1 nằm giữa đoạn AB.*

2) $\mathscr{S}_2$: $2\overrightarrow{G_2G_1} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. *Vậy G_2 ở $\frac{1}{3}$ của trung tuyến G_1C.*

3) $\mathscr{S}_3$: $3\overrightarrow{G_3G_2} + \overrightarrow{GD} = 0$. *Vậy :*

G_3 ở $\frac{1}{4}$ đoạn G_2D và nó là giao điểm của các đường thẳng nối một đỉnh với tâm tỉ cự của tam giác đối diện.



2 Đo vận tốc của một viên đạn

Một con lắc được cấu tạo bởi một vật mềm, coi như một chất điểm khối lượng M và một sợi dây lí tưởng dài l.

Đầu kia của dây được cố định. Một viên đạn khối lượng m bay tới cắm vào chiếc bia đó và toàn bộ nhận được một dao động có biên độ góc α.

Hãy xác định vận tốc của viên đạn.

Lời giải

$$v^2 = 2gl(1 - cos\alpha)\left(\frac{M+m}{m}\right)^2$$

3 Sự nẩy của hai hòn bi

Hai hòn bi, được coi như những chất điểm M_1 và M_2 có khối lượng m_1 và m_2, được thả rơi từ một độ cao h. M_1 nằm ngay dưới M_2 và bỏ qua khoảng cách rất nhỏ giữa hai bi. Sự nẩy trên mặt đất và các va chạm giữa các hòn bi là đàn hồi, và các chuyển động giữ phương thẳng đứng.

Hãy xác định độ cao của lần nẩy thứ nhất của M_2.

• *Lời giải*

Gọi v là vận tốc của các hòn bi ngay trước các va chạm khác nhau. Lúc bi M_1 va chạm với mặt đất, vận tốc của nó bị "đảo ngược" lại. Với va chạm giữa M_1 và M_2 :

$$+ m_1v - m_2v = m_1v_1' + m_2v_2'.$$

$$v_2' - v_1' = -((-v) - v) = 2v$$

Từ đó : $v_1' = \frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2}v$ *và* $v_2' = \frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v$.

Biết rằng $v^2 = 2gh$ *và* $v_2'^2 = 2gh'$: $h' = h\left(\frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2$

4 Xích ở mép bàn

Một chiếc xích có khối lượng tổng cộng m và có chiều dài l, có thể trượt không ma sát trên một cái bàn nằm ngang. Xích được giữ yên, với phần thõng xuống dài a, sau đó, xích được thả rơi.

Hỏi trong khoảng thời gian τ bao lâu, xích vẫn còn tiếp xúc với bàn ?

Đề nghị : Dùng bảo toàn cơ năng.

• *Lời giải :*

$\mathscr{E}_M = \mathscr{E}_K + \mathscr{E}_P = cte$, $\mathscr{E}_K = \frac{1}{2}m\dot{z}^2$ *và* $\mathscr{E}_P = -\frac{m}{l}z\frac{z}{2}g$

$z = 0$ ở trên bàn ($\mathscr{E}_P = 0$ ở $z = 0$). Khối tâm của phần thõng xuống bằng z/2

$$\frac{1}{2}m\dot{z}^2 - \frac{m}{l}g\frac{z^2}{2} = 0 - \frac{m}{l}g\frac{a^2}{2}, \text{ hay là } \dot{z}^2 = \frac{g}{l}(z^2 - a^2)$$

Bằng cách lấy đạo hàm : $\ddot{z} = +\frac{g}{l}z$ *mà nghiệm là :*

$z = a\,ch\alpha t$, *với* $\alpha^2 = \frac{g}{l}$, *từ đó* $\mathrm{ch}\alpha\tau = \frac{l}{a}$.

5 Sự lướt

• Hai chất điểm M_1 và M_2 có cùng khối lượng m trượt trên một mặt phẳng nằm ngang (ví dụ, một hồ đóng băng). Chúng được nối với nhau bằng một sợi dây lí tưởng dài $2l$, và một người điều khiển ở bên ngoài kéo M_1 bằng một lực không đổi $\vec{F} = F.\vec{e}_x$. Hãy khảo sát chuyển động của M_2.

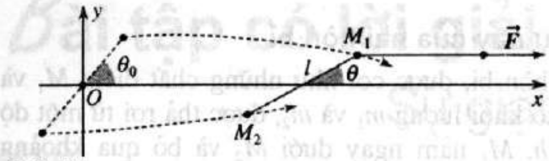
Cho : (ở $t = 0$)

• Các vận tốc bằng không

• $M_1(0)$: $x_1(0) = l\cos\theta_o$, $y_1(0) = l\sin\theta_o$

• $M_2(0)$: $x_2(0) = -l\cos\theta_o$, $y_2(0) = -l\sin\theta_o$

• $\theta_o << 1$ rad.



• *Lời giải*

$y_G = y_G(0) = 0$ *và* $x_G = \frac{1}{2}\frac{F}{2m}t^2$

M_1 và M_2, trong $\mathcal{R}^*$, có một chuyển động quay được xác định bởi θ và bán kính l :

$\frac{d\vec{L}^*}{dt} = 2ml^2\ddot{\theta}\vec{e}_z = \vec{\mathcal{M}}_{Gext} = Fl\sin\theta\vec{e}_z$, *suy ra :* $\ddot{\theta} = \frac{F}{2ml}\sin\theta$.

Nếu $\theta_0 << 1$ *rad,* $\theta(t) = \theta_0\cos\omega t$, *với* $\omega^2 = \frac{F}{2ml}$.

Đối với các giá trị nhỏ của θ : $x_2 = \frac{F}{4m}t^2 - l\cos\theta(t)$ *và* $y_2 = -l\sin\theta(t)$.

6 Va chạm đàn hồi trực diện (phương pháp thứ hai)

Hai hạt M_1 và M_2 chịu các va chạm đàn hồi trực diện (xem § **5.22**). Hãy tìm lại biểu thức của các vận tốc sau va chạm bằng cách dùng hệ quy chiếu tâm tỉ cự.

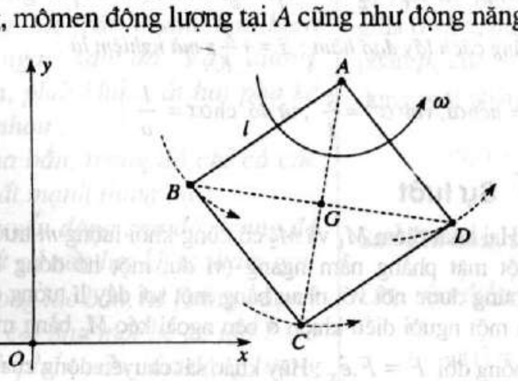
• *Lời giải :*

$\vec{v}(G) = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$, $\vec{v}_1^{*\prime} = -\vec{v}_1^* = (\vec{v}_1 - \vec{v}(G))$,

$\vec{v}'_A = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$.

7 Sử dụng các định lí KOËNIG (PCSI)

Một hình vuông *ABCD* cạnh *l* có thể quay xung quanh một điểm *A* mà vẫn nằm trong mặt phẳng (*xOy*), với một vận tốc góc quay ω. Ở các đỉnh có các chất điểm khối lượng *m* và khối lượng của các que được bỏ qua. Hãy xác định, trong hệ quy chiếu nghiên cứu $\mathcal{R}$, động lượng, mômen động lượng tại *A* cũng như động năng.



• *Lời giải*

• *Phương pháp thứ nhất : Tính toán trực tiếp.*

Đối với A : $\vec{p} = \vec{0}, \vec{L}_A = \vec{0}$, $\mathcal{E}_K = 0$.

Đối với B : $\vec{p} = m\omega\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{AB}$, $\vec{L}_A = m\omega l^2\vec{e}_z$ *và* $\mathcal{E}_K = \frac{1}{2}ml^2\omega^2$.

Đối với hệ đầy đủ : $\vec{p} = 2m\omega\overrightarrow{BD}$

$\vec{L}_A = 4m\omega l^2\vec{e}_z$ và $\mathcal{E}_K = 2ml^2\omega^2$.

• Phương pháp thứ hai : các định lí KOËNIG :

$\vec{v}_{G/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}\omega\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{AC}$, vậy $\vec{p} = 2m\omega\overrightarrow{BD}$.

Trong $\mathcal{R}^*$, bốn điểm vẽ một vòng tròn bán kính $\frac{l}{\sqrt{2}}$ với vận tốc góc ω : $\vec{L}^* = 4m\frac{l^2}{2}\omega\vec{e}_z$ và $\mathcal{E}_K^* = 4.\frac{1}{2}m\frac{l^2}{2}\omega^2 = ml^2\omega^2$.

Trong $\mathcal{R}$, G vạch một đường tròn bán kính $\frac{l}{\sqrt{2}}$, từ đó :

$\vec{L}_A = 2ml^2\omega\vec{e}_z + \vec{L}^*$, từ đó $\mathcal{E}_K = ml^2\omega^2 + \mathcal{E}_K^*$

8 Máy quay với sự lệch trọng tâm quay

Một máy quay có khối lượng toàn phần *M* được cấu tạo bởi một cái giá đặt trên mặt đất và một hình trụ quay với vận tốc góc ω không đổi. Máy được cân bằng hoàn toàn, điều đó có nghĩa là tâm tỉ cự của nó đứng yên. Người ta thêm vào máy một vật làm lệch trọng tâm quay, biểu thị bởi một vật điểm khối lượng m gắn vào trụ, cách trục một khoảng *l*.

Hỏi với điều kiện nào cho ω, *M*, *m*, *g* và *l* thì cái giá vẫn còn tiếp xúc với mặt đất ?

Đề nghị : Khảo sát động lượng của hệ đầy đủ và từ đó suy ra phản lực của mặt đất.

• *Lời giải :*

Có hệ có khối lượng (m + M) {máy - vật làm lệch tâm}

$\vec{p} = m\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OB}$ *và* $\frac{d\vec{p}}{dt} = -m\omega^2\overrightarrow{OB}$, *vì* ω = *cte*.

$(m + M)\vec{g} + \vec{R} = \frac{d\vec{p}}{dt}$. *Để máy vẫn còn tiếp xúc với mặt đất :*

nếu $\vec{R}.\vec{e}_z > 0$, *tức* $-\vec{e}_z.\frac{d\vec{p}}{dt} < (m + M)g$ *với mọi t.*

Trường hợp bất lợi nhất khi $\overrightarrow{OB} = l\vec{e}_z$, *nghĩa là :* $m\omega^2 l < (m + M)g$.

9 Tời

Một cái tời được cấu tạo bởi một hình trụ tròn xoay, bán kính *R* và có mômen quán tính đối với trục của nó là *J*.

Tời có thể quay không ma sát xung quanh trục Δ của nó, đứng yên trong một mặt phẳng nằm ngang. Trên trụ có quấn một sợi dây (bỏ qua bề dày và khối lượng) giữ một chiếc xô có khối lượng *M*.

1) Xác định gia tốc của xô nếu hệ được thả tự do.

2) Làm lại phép tính trên nếu dây có chiều dài tổng cộng *l* và có khối lượng *m*, và đoạn dây treo xô có chiều dài *h*.

• *Lời giải :*

1) *Định lí mômen động cho toàn bộ hệ {tời - xô} :*

$\vec{L}_0 = J\vec{\omega} + MR\dot{x}\vec{e}_z$, với $\dot{x} = R\omega$, nghĩa là : $\vec{L}_0 = (J + MR^2)\vec{\omega}$.

$\mathcal{M}_0(\vec{F}_{ext}) = \mathcal{M}_0(M\vec{g})$, hay : $MgR\vec{e}_z$.

từ đó : $(J + MR^2)\dfrac{d\omega}{dt} = MgR$, nghĩa là $\vec{a} = \dfrac{1}{1+\dfrac{J}{MR^2}}\vec{g}$

2) Xét toàn bộ hệ {tời - dây - xô} :

$\vec{L}_0 = J\vec{\omega} + MR\dot{x}\vec{e}_z + mR\dot{x}\vec{e}_z$, hay : $\vec{L}_0 = [J + (m+M)R^2]\vec{\omega}$.

$\mathcal{M}_0\vec{F}_{ext} = \mathcal{M}_0(M\vec{g}) + \mathcal{M}_0\left(m\dfrac{h}{l}.\vec{g}\right)$, vậy :

$[J + (m+M)R^2]\dfrac{d\omega}{dt} = \left(M + m\dfrac{h}{l}\right)gR$, $\vec{a} = \dfrac{\left(M + m\dfrac{h}{l}\right)R^2}{J + (m+M)R^2}.\vec{g}$

SỬ DỤNG VỐN KIẾN THỨC

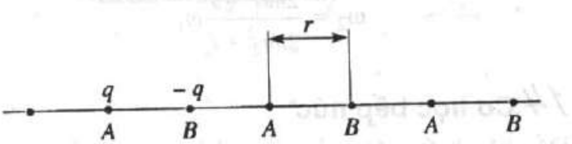
10 Thế năng tĩnh điện của một tinh thể

Cho một tinh thể iôn tạo bởi N iôn A có điện tích $+q$ và N iôn B có điện tích $-q$ ($N >> 1$).

Thế năng tĩnh điện trong trường hợp tổng quát có thể đặt dưới dạng : $U = -AN\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_o r}$,

trong đó r là khoảng cách ngắn nhất giữa hai iôn và A là một hằng số đặc trưng cho cấu trúc hình học của tinh thể, gọi là "hằng số MADELUNG" (Ví dụ, đối với các tinh thể có cùng cấu trúc hình học như muối ăn NaCl, A bằng 1,75)

Hãy xác định giá trị của A đối với một tinh thể giả định có một chiều, được cấu tạo bởi các iôn A và B bố trí luân phiên nhau và đều đặn trên một đường thẳng.



• *Lời giải.*

Đối với hai hạt mang điện A và B cách nhau d ta có :

$F_{A\to B} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}.\dfrac{q_A q_B}{d^2}$, *suy ra :* $\mathcal{E}_{P_{int}} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}.\dfrac{q_A q_B}{d}$

• *Ta hãy xác định tổng các thế năng tương tác của các cặp tạo thành với một iôn :*

$$\mathcal{E}_{P_o} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o r}\left(-2\frac{1}{r} + 2\frac{1}{2r} - 2\frac{1}{3r} + 2.\frac{1}{4r} + ...\right) = -\frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_o r}\ln 2.$$

Nếu nhân $\mathcal{E}_{P_o}$ với 2N, thì tính mỗi cặp hai lần. Thế năng tĩnh điện bằng $N\mathcal{E}_{P_o}$, nghĩa là $A = 2\ln 2 = 1,39$.

11 * Dao động tử

Cho một thiết bị biểu diễn trên hình vẽ bên. Lò xo là lí tưởng và có độ cứng k. Các chất điểm M_1 và M_2, có khối lượng m_1 và m_2, có thể dịch chuyển thẳng đứng.

Ròng rọc treo ở M_1 và dây là lí tưởng.

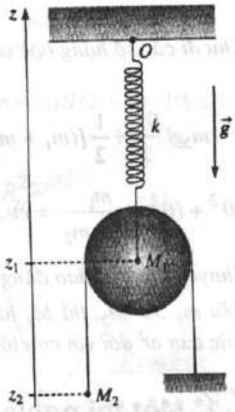
Hãy xác định chu kì của các dao động.

• *Lời giải*

Hệ là bảo toàn. Chiều dài l của dây không đổi, từ đó : $2\dot{z}_1 = \dot{z}_2$

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}k(z_1 - z_{10})^2 + gz_1(m_1 + 2m_2) + cte.$$

$$\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}(m_1\dot{z}_1^2 + m_2\dot{z}_2^2) = \frac{1}{2}(m_1 + 4m_2)\dot{z}_1^2.$$



Có sự bảo toàn cơ năng, nghĩa là :

$$k\dot{z}_1(z_1 - z_{10}) + g\dot{z}_1(m_1 + 2m_2) + \dot{z}_1\ddot{z}_1(m_1 + 4m_2) = 0$$

$$\ddot{z}_1 = -\omega^2(z_1 - z_{eq}),$$

với $z_{eq} = z_{10} - \dfrac{g}{k}(m_1 + 2m_2)$

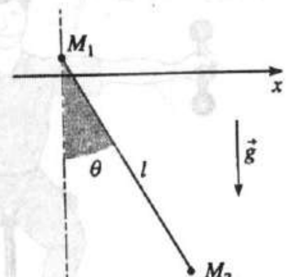
và $\omega^2 = \dfrac{k}{m_1 + 4m_2}$

Các dao động là hình sin với chu kì :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

12 ** Con lắc có điểm treo di động

Một con lắc được cấu tạo bởi một chất điểm M_2 có khối lượng m_2, nối bằng một sợi dây lí tưởng dài l với một vật khối lượng m_1, tạo nên bởi một chất điểm M_1 trượt không ma sát trên một trục nằm ngang (Ox). M_2 dao động trong mặt phẳng (xOz), và vị trí của nó so với M_1 được xác định bởi góc θ.



Hệ được thả rơi không vận tốc ban đầu từ một góc θ_0. Hãy xác định chuyển động của hệ với các giá trị θ_0 nhỏ.

• *Lời giải*

Hệ đang khảo sát có hai bậc tự do : x (hoành độ của M_1) và θ, có thể biến thiên một cách độc lập.

Hai phương trình vi phân liên hệ θ và x có thể được suy ra từ hai tích phân đầu biết rằng hệ là bảo toàn và thành phần p_x của động lượng được bảo toàn.

• Tích phân đầu của năng lượng.

Hệ là bảo toàn.

Thế năng :

$\mathscr{E}_p = -m_2 g l\cos\theta,\ \vec{v}(M_2) = (\dot{x} + l\cos\theta\dot{\theta})\vec{e}_x + l\sin\theta\,\dot{\theta}\vec{e}_z,$

từ đó :

$$\mathscr{E}_K = \frac{1}{2}[m_1\dot{x}^2 + m_2(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\cos\theta\,\dot{\theta})],\ \mathscr{E}_p + \mathscr{E}_K = cte.$$

• Tích phân đầu của động lượng

Thành phần nằm ngang của tổng hợp các ngoại lực bằng không, nghĩa là :

$$p_x = m_1\dot{x} + m_2(\dot{x} + l\cos\theta\,\dot{\theta}) = cte = 0 \text{ và } \dot{x} = -\frac{m_2 l\cos\theta}{m_1+m_2}\dot{\theta}$$

Khử đi các số hạng bậc cao hơn 2 : $\dot{x} = -\dfrac{m_2 l}{m_1+m_2}\dot{\theta}$ *và*

$$m_2 g l\frac{\theta^2}{2} + \frac{1}{2}[(m_1+m_2)\dot{x}^2 + m_2(l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta})] = cte$$

$$g\theta^2 + l\dot{\theta}^2\frac{m_1}{m_1+m_2} = cte, \text{ từ đó : } \ddot{\theta} = -\omega^2\theta, \text{ với } \omega^2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{l}{g}.$$

Chuyển động là dao động, với một mạch số (tần số góc) ω.

Nếu $m_1 >> m_2$, thì M_1 hầu như đứng yên và ta thấy lại biểu thức của ω^2 đối với con lắc đơn.

13* Một thí nghiệm cổ điển

Người trong thí nghiệm ngồi yên trên một chiếc ghế đẩu quay, và cầm hai quả tạ khối lượng *m*.

Để đơn giản hóa, ta thừa nhận :

• Các quả tạ là các điểm ;

• Về mặt chuyển động quay xung quanh trục (Oz), người và ghế tương đương với một hệ chất điểm mà mômen động lượng đối với trục (Oz) và động năng được cho bởi :

$$L_{Oz} = J\omega \text{ và } \mathscr{E}_K = \frac{1}{2}J\omega^2 \ (J \text{ không đổi})$$

(mô hình này là đúng nếu bỏ qua khối lượng của các cánh tay) ;

• Chuyển động quay không có ma sát, điều đó có nghĩa là trục không tác dụng một mômen hãm nào.

Người giới thiệu yêu cầu người trong thí nghiệm dang hai tay ra, làm cho các quả tạ cách trục quay một đoạn r_1, rồi truyền cho người đó một chuyển động quay với vận tốc góc ω_1. Sau đó, lại yêu cầu người làm thí nghiệm đưa hai cánh tay về gần thân mình tới một khoảng cách r_2 với trục. Hỏi khi đó, vận tốc quay ω_2 bằng bao nhiêu ? (Dùng hai phương pháp khác nhau).

Cho : $m = 10$ kg ; $J = 1{,}8$ kg. m^2 ; $r_1 = 80$ cm, $r_2 = 20$ cm.

• *Lời giải*

• *Phương pháp thứ nhất*

$\mathscr{S}$ được cấu tạo bởi người, ghế và tạ. Các ngoại lực (trọng lượng và phản lực của trục) có mômen đối với (Oz) bằng không và L_{Oz} được bảo toàn :

$$L_{Oz} = (2mr^2 + J)\omega, \text{ từ đó } \omega_2 = \frac{2mr_1^2 + J}{2mr_2^2 + J}\omega_1. \text{ Vậy } \omega_2 = 5{,}6\omega_1.$$

• *Phương pháp thứ hai*

Người cung cấp một công suất (công suất nội đối với hệ) :

$$\mathscr{P} = -2m\omega^2(r)r\dot{r}.$$

• *Các lực khác (liên kết không ma sát và trọng lượng) có công suất bằng không. Mà* $\dfrac{d\mathscr{E}_K}{dt} = \mathscr{P}$ *từ đó :*

$$2\left(mr^2 + \frac{J}{2}\right)\omega\dot{\omega} + 2mr\dot{r}\omega^2 = -2m\omega^2 r\dot{r} \text{ hay : } \frac{\dot{\omega}}{\omega} = -\frac{2mr\dot{r}}{mr^2 + \frac{J}{2}}$$

Dựa vào các điều kiện ban đầu, ta có nghiệm :

$$\omega_2 = \frac{2mr_1^2 + J}{2mr_2^2 + J}\omega_1.$$

14 Cơ học bếp núc

Để nhận biết một quả trứng chín với một quả trứng sống mà không cần đập vỡ, ta chỉ cần đặt trứng lên bàn và truyền cho nó một chuyển động quay (giống như con quay). Hãy giải thích định tính điều gì xẩy ra trong hai trường hợp.

• *Lời giải.*

Lòng trắng và lòng đỏ có tỉ trọng khác nhau, chuyển động quay gây ra các chuyển động nội tại. Các chất lỏng này rất nhớt, công suất nội gắn với các nội ma sát rất lớn (rất âm), và động năng giảm nhanh. Trong thực tế, quả trứng chỉ quay được vài vòng.

Trong quả trứng chín, các chuyển động nội tại không thể xảy ra, và công suất của các lực không bảo toàn chỉ giới hạn ở công suất của các ngoại ma sát, về giá trị tuyệt đối nhỏ hơn rõ rệt. Vì vậy quả trứng chín quay lâu hơn quả trứng sống rất nhiều.

15^{**} Mô hình hóa một lực ma sát

Vật rắn S là một khối trụ tròn xoay bán kính R và trục (Oz) tận cùng bởi một phần hình nón có góc mở 2α, đứng yên.

Trụ chịu tác dụng của một dòng khí hiếm, tạo bởi ν phân tử có khối lượng m cho một đơn vị thể tích. Với một phép gần đúng bậc nhất, ta chấp nhận mô hình sau :

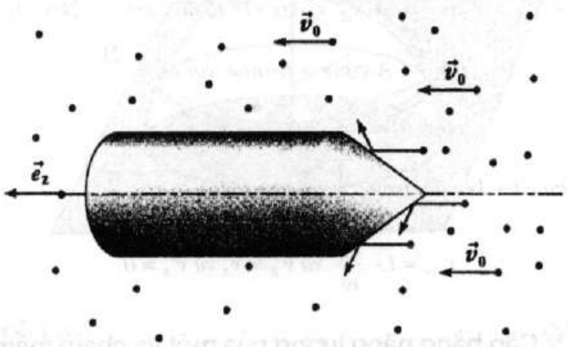
- mọi phân tử khí đều có cùng một vận tốc trước khi va vào vật rắn ;
- các cú nẩy là đàn hồi (động năng của các phân tử được bảo toàn) và không có ma sát ;
- mỗi phân tử chỉ chịu một va chạm.

1) Chứng tỏ rằng các cú nẩy, tuân theo một định luật giống hệt như định luật phản xạ ánh sáng.

2) Gọi $\mathscr{S}$ là hệ tạo bởi n phân tử nảy ra từ vật rắn trong thời gian Δt. Hãy xác định số phân tử ΔN của $\mathscr{S}$ và độ biến thiên động lượng của nó trong Δt.

3) Tìm biểu thức của lực ma sát do chất khí tác dụng lên vật rắn.

4) Cũng câu hỏi trên nếu trụ tận cùng bởi một bán cầu.

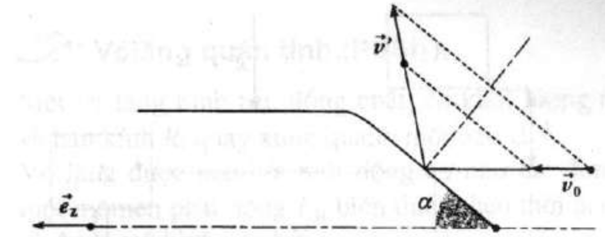


- *Lời giải*

1) Khi không có ma sát, thành phần tiếp tuyến của vận tốc được bảo toàn. Độ lớn của nó (chuẩn) cũng được bảo toàn, thành phần pháp tuyến bị đảo ngược.

2) Trước khi gặp S, hệ $\mathscr{S}$ chiếm thể tích của một hình trụ có đáy πR^2 và có chiều cao $v_o\Delta t$, nghĩa là $\Delta n = \nu\pi R^2 v_o \Delta t$.

- *Với một phân tử :* $\Delta \vec{p} = m(v_o\cos 2\alpha - v_o)\vec{e}_z + \Delta \vec{p}_r$.
- *với* $\mathscr{S}$: $\Delta\vec{p}_r = 0$; $\Delta \vec{p} = -m\nu\pi R^2 v_o^2 (1 - \cos 2\alpha)\vec{e}_z \Delta t$.



3) $\dfrac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$ *là tổng hợp lực do S tác dụng lên $\mathscr{S}$.*

Theo nguyên lí tác dụng tương hỗ :
$\vec{F}_{\mathscr{S}\to S} = m\nu\pi R^2 v_o^2 (1 - \cos 2\alpha)\vec{e}_z$.

4) Ta xác định vị trí các điểm của bán cầu bằng góc θ.
Số phân tử có một điểm chạm xác định bởi góc nằm giữa θ và $\theta + d\theta$ trong thời gian Δt bằng :

$$dn = \nu v_o \Delta t 2\pi R^2 \sin\theta\cos\theta d\theta.$$

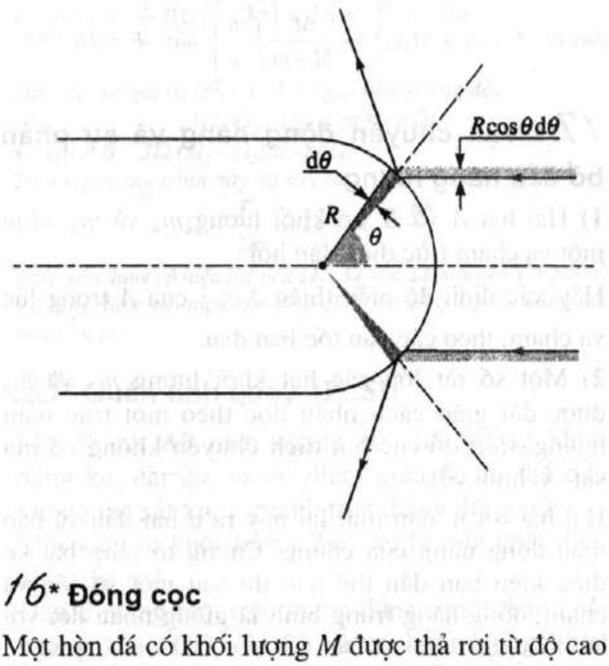
Độ biến thiên động lượng của chúng bằng :

$$-dnmv_o(1 + \cos 2\theta),$$

Vậy: $\vec{F}_{\mathscr{S}\to S} = \nu m v_o^2 \pi R_o^2 \vec{e}_z \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\theta\cos\theta(1 + \cos 2\theta)\, d\theta,$

nghĩa là :

$$\vec{F}_{\mathscr{S}\to S} = \rho v_o^2 \pi R_o^2 \vec{e}_z .$$

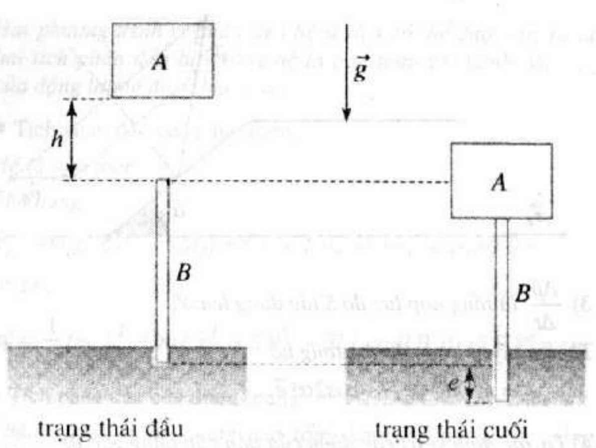


16^{*} Đóng cọc

Một hòn đá có khối lượng M được thả rơi từ độ cao h ở phía trên một cái cọc. Hòn đá vẫn tiếp xúc với cọc và toàn bộ cắm sâu vào đất một độ sâu e.

Hãy xác định giá trị của lực F, giả sử không đổi, do đất tác dụng lên cọc trong pha cuối cùng của chuyển động.

Cho : $m = 5{,}0$ kg ; $M = 10{,}0$ kg ; $h = 50$cm ; $e = 5{,}0$ cm ; $g = 9{,}8$ m.s^{-2}.



• *Lời giải*

• *Pha thứ nhất : sự rơi tự do của hòn đá.*

Vận tốc cuối cùng bằng : $v_A = \sqrt{2gh}$

• *Pha thứ hai : sự va chạm*

Gọi v' là vận tốc của toàn bộ hệ sau va chạm :

$$(m + M)v' = 0 + Mv_A$$

• *Pha thứ ba : sự cắm sâu.*

Công của lực F bằng độ biến thiên cơ năng của hệ :

$$Fe = (m + M)\left(ge + \frac{1}{2}v'^2\right)$$

Suy ra : $F = (m+M)g\left[\left(1+\frac{M}{M+m}\right)^2\frac{h}{e}\right]$, *hay :* $F = 8{,}0.10^2 N.$

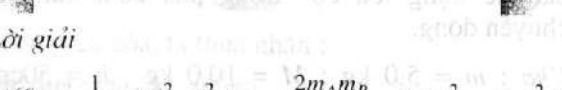
17** Vận chuyển động năng và sự phân bố đều năng lượng

1) Hai hạt A và B, có khối lượng m_A và m_B, chịu một va chạm trực diện đàn hồi.

Hãy xác định độ biến thiên $\Delta\mathscr{E}_{K_A}$ của A trong lúc va chạm, theo các vận tốc ban đầu.

2) Một số rất lớn các hạt khối lượng m_A và m_B được đặt gián cách nhau dọc theo một trục nằm ngang, trên đó các hạt dịch chuyển không có ma sát (x. hình vẽ).

Hai hạt ở các đầu mút lại nẩy ra ở hai đầu và bảo toàn động năng của chúng. Chứng tỏ rằng bất kể điều kiện ban đầu thế nào thì sau một số lớn va chạm, động năng trung bình là giống nhau đối với hai loạt hạt.



• *Lời giải*

1) $\Delta\mathscr{E}_{K_A} = \frac{1}{2}m_A(v'^2_A - v^2_A) = \frac{2m_Am_B}{(m_A+m_B)^2}[m_Bv_B^2 - m_Av_A^2 + (m_A - m_B)v_Av_B]$.

2) Nếu không thể chứng minh chặt chẽ điều đó bằng cách đơn giản, ta có thể thừa nhận một cách hợp lí rằng sau một số lớn va chạm, giá trị trung bình của tích v_Av_B là bằng không và động năng trung bình của mỗi loại hạt đạt tới một giá trị không đổi.

$$\langle\Delta\mathscr{E}_{K_A}\rangle = 0 = \frac{2m_Am_B}{(m_A+m_B)^2}[m_B\langle v_B^2\rangle - m_A\langle v_A^2\rangle + 0].$$

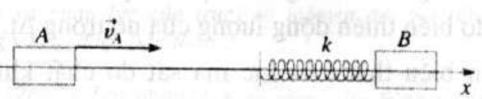
nghĩa là : $m_B\langle v_B^2\rangle = m_A\langle v_A^2\rangle$.

Yêu cầu đề ra đã được chứng minh.

18* Mô hình hóa một va chạm đàn hồi trực diện

Hai hạt A và B có cùng khối lượng, bị buộc phải trượt không ma sát dọc theo một trục nằm ngang. A được ném ra với vận tốc ban đầu v_A vào B, lúc đầu đứng yên. Các lực va chạm được mô hình hóa bởi một lò xo gắn vào B, có chiều dài tự nhiên bằng l, có độ cứng k và có khối lượng không đáng kể.

Hãy xác định thời gian va chạm, khoảng cách AB nhỏ nhất và các vận tốc sau va chạm.



• *Lời giải*

Kí hiệu $r = x_B - x_A$ *là khoảng cách AB :*

$$m\ddot{x}_A = +k(r - l) \text{ và } \ddot{x}_B = -k(r-l), \text{ từ đó : } m\ddot{r} = -2k(r-l)$$

$$r(t) = l + A\cos\omega t + B\sin\omega t, \text{ với } \omega^2 = \frac{2k}{m}.$$

$$r(t=0) = l \text{ và } \dot{r}(t=0) = -\dot{x}_A = -v_A.$$

Tương tác kéo dài trong $\frac{1}{2}$ *chu kì, nghĩa là* $\tau = \frac{\pi}{\omega}$;

$$r_{min} = l - \frac{v_A}{\omega} \text{ và } v'_B = v_A \text{ và } v'_A = 0.$$

19 Cân bằng năng lượng của một va chạm mềm

Một vật A tới va chạm với một vật B, lúc đầu đứng yên trong hệ quy chiếu nghiên cứu. Va chạm là mềm nếu sau va chạm A và B dính vào nhau.

Trong trường hợp này, hãy xác định tỉ số x giữa các động năng cuối và đầu theo tỉ số của các khối lượng m_A và m_B.

• *Lời giải*

$$m_Av_A = (m_A + m_B)v', \text{ suy ra}$$

$$x = \frac{m_A}{m_A + m_B}.$$

Vì vậy, nhà địa chất dùng một chiếc búa có khối lượng nhỏ với một chiếc cán dài. Một phần lớn năng lượng ban đầu được dùng để đập vỡ hòn đá.

20 *Ngưỡng năng lượng

Khi một vật A bị vỡ thành hai mảnh, công của các lực liên kết, về giá trị tuyệt đối, bằng W_o.

Vật A, có khối lượng m_A, đứng yên, bị một vật B có khối lượng m_B và có động năng $\mathscr{E}_K$ va phải.

Hãy xác định giá trị nhỏ nhất của $\mathscr{E}_K$ cần để làm vỡ A.

Đề nghị : dùng hệ quy chiếu tâm tỉ cự.

• *Lời giải*

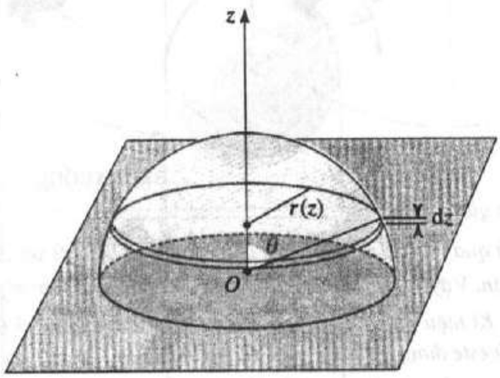
$$\mathscr{E}_K^* > W_o \text{ vậy } \mathscr{E}_K > W_o\left(1+\frac{m_A}{m_B}\right)$$

Trong hệ quy chiếu nghiên cứu, động lượng khác không, vậy động năng cuối cũng khác không.

Điều đó buộc $\mathscr{E}_K > W_o$.

21 * Bán cầu đồng chất (PCSI)

Xác định vị trí của tâm quán tính của một bán cầu, có khối lượng riêng đều và có bán kính R.



• *Lời giải*

Tâm tỉ cự G nằm trên trục đối xứng (Oz). Xét một lát nguyên tố, có độ cao z và bề dày dz. Khối lượng nguyên tố của lát bằng :

$dm = \rho\pi r^2(z)dz = \rho\pi R^2\sin^2\theta dz$

$$\text{Mặt khác : } \overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\int_{z=0}^{R} z\vec{e}_z dm .$$

với $z = R\sin\theta$ *và* $dz = R\cos\theta d\theta$.

$$z_G = \frac{1}{m}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \rho\pi R^4 \sin^3\theta\cos\theta d\theta = \frac{\rho\pi R^4}{4m} .$$

$m = \frac{2}{3}\rho\pi R^3$, *vậy* $z_G = \frac{3}{8}R$.

22** Vôlăng quán tính (PSSI)

Một vô lăng hình trụ, đồng chất, có khối lượng m và bán kính R, quay xung quanh một trục Δ.

Vô lăng được kéo bởi một động cơ nhờ tác động một mômen phát động Γ_M biến thiên theo thời gian và được mô hình hóa bởi :

$$\Gamma_M = \Gamma, \text{ nếu } \cos\theta > 0$$
$$\text{và } \Gamma_M = 0, \text{ nếu } \cos\theta < 0.$$

Chiếc vôlăng này kéo một cái máy ; máy tác động một mômen cản có dạng :

$$\Gamma_R = -h\Omega.$$

Hãy xác định các giá trị cực trị của Ω trong chế độ ổn định với mômen quán tính lớn của vôlăng (tiêu chuẩn cần định rõ). Lợi ích của vôlăng ?

• *Lời giải*

Ở chế độ ổn định (sau một số lớn vòng quay), động cơ đã đạt tới một chế độ tuần hoàn.

Kí hiệu Ω_1 *và* Ω_2 *là các giá trị của* Ω *ở đầu và cuối của pha phát động.*

Hãy thực hiện một sự cân bằng năng lượng :

$$\bullet\ \cos\theta > 0 : \frac{1}{2}J\left(\Omega_2^2 - \Omega_1^2\right) = \Gamma\pi + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} -h\Omega\, d\theta .$$

Đối với các giá trị lớn của J, Ω gần như không đổi :

$$J\Omega(\Omega_2 - \Omega_1) = \pi(\Gamma - h\Omega).$$

$$\bullet\ \cos\theta < 0 : J\Omega(\Omega_1 - \Omega_2) = -\pi h\Omega.$$

Từ hai phương trình này, ta suy ra :

$$\Omega \approx \frac{\Gamma}{2h} \text{ và } \Omega_1 - \Omega_2 = \frac{\pi h}{J} .$$

Phép gần đúng có hiệu lực nếu $\Omega_2 - \Omega_1 << \Omega$, *hay nếu* $\Gamma J >> h^2$.

Vô lăng được coi như một bình chứa cơ năng có tác dụng điều hòa vận tốc .

23* Quán tính quay (PCSI)

Một thanh AB nằm ngang có khối lượng không đáng kể, dài $2a$, và có điểm giữa O, có thể quay không ma sát xung quanh trục thẳng đứng (Oz).

Một viên bi khối lượng $2m$, coi là một chất điểm, được đặt ở A.

Đầu B mang một trục thẳng đứng ; một thanh nằm ngang khác CD, dài $2b$ và có khối lượng không đáng kể có thể quay xung quanh trục thẳng đứng trên và xung quanh điểm giữa O' của nó.

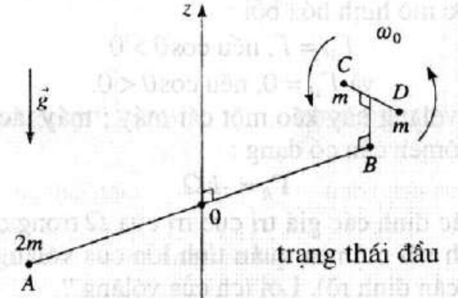
Hai viên bi có cùng khối lượng m được cố định tại C và D.

Trong trạng thái ban đầu, thanh AB đứng yên và thanh CD quay với vận tốc góc ω_o. Các lực ma sát tại O' đưa thanh CD cuối cùng đến thẳng hàng với AB. Hãy xác định vận tốc quay cuối cùng ω_1 của hệ cứng tạo bởi hai thanh.

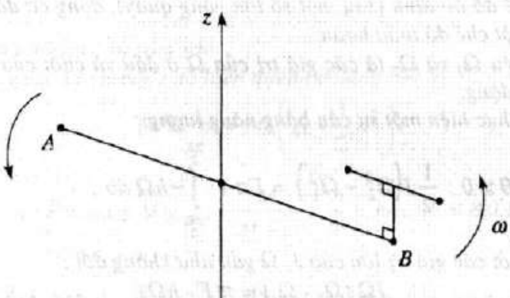
• *Lời giải.*

Gọi $\mathcal{S}$ là hệ cấu tạo bởi ba viên bi và các thanh không khối lượng. Liên kết tại O không có ma sát, mọi ngoại lực đều có một mômen bằng không đối với (Oz).

Vì vậy L_{Oz} được bảo toàn.



trạng thái đầu



trạng thái cuối

• *Trạng thái ban đầu : chỉ có thanh CD chuyển động. Theo định lí Koënic , đối với hệ AB, ta có :*

$$\vec{L}_0 = \vec{L}^* + m\overrightarrow{OO'} \wedge \vec{v}\,(O') = \vec{L}^*\text{ , vậy : } L_{Oz} = 2mb^2\omega_o.$$

• *Trạng thái cuối : ba viên bi quay với vận tốc ω :*

$$L_{Oz} = 2ma^2\omega_1 + m(a - b)^2\omega_1 + (a + b)^2\omega_1$$

Cuối cùng : $\omega_1 = \dfrac{b^2}{2a^2 + b^2}\,\omega_o$

24 ** Cái đu

Bạn trẻ Alceste đang chơi trên một cái đu, treo trên một trục nằm ngang cố định Δ. Để duy trì được chuyển động, nó đột ngột đứng lên (gần như tức thời) khi $\theta = 0$ và cũng đột ngột ngồi xuống khi θ bằng cực trị.

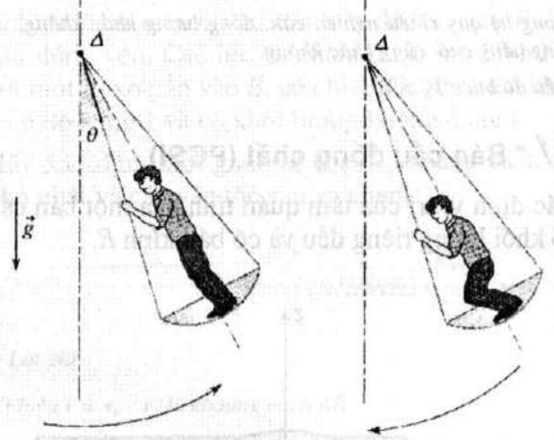
Khối lượng của toàn bộ {đu + người} bằng m và mômen quán tính của hệ bằng J_1 khi người đứng và bằng J_2 khi người ngồi xuống. Khoảng cách tương ứng giữa trục và tâm tỉ cự của toàn bộ hệ là a_1 và a_2.

Các lực ma sát tác dụng lên cái đu một mômen cản, giả thiết có giá trị tuyệt đối không đổi. Gọi α là biên độ dao động trong chế độ ổn định. Hãy viết phương trình liên kết α với các dữ kiện khác và biện luận sự tồn tại của các nghiệm.

Đề nghị :

• Đại lượng nào trong số các đại lượng $\dot{\theta}$, L_Δ hoặc $\mathscr{E}_K$ là liên tục khi đi qua vị trí $\theta = 0$?

• Làm một bản tổng kết cơ năng cho mỗi phần tư chu kì.



đứng lên ngồi xuống

• *Lời giải*

Khi đi qua vị trí $\theta = 0$, mômen của các ngoại lực đối với Δ vẫn bị chặn. Vậy L_Δ là liên tục, điều này kéo theo $\dot{\theta}$ và $\mathscr{E}_K$ gián đoạn. Kí hiệu ω_1 và ω_2 là các giá trị tuyệt đối của $\dot{\theta}$ ở $\theta = 0$, khi Alceste đứng lên hoặc ngồi xuống, nghĩa là $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$.

Đối với mỗi nửa chu kì, độ biến thiên cơ năng bằng công của các lực ma sát :

$$\alpha\mathcal{M}_f = mga_1(1 - \cos\alpha) - \frac{1}{2}J_1\omega_1^2\,.$$

$$\alpha\mathcal{M}_f = mga_2(1 - \cos\alpha) - \frac{1}{2}J_2\omega_2^2\,.$$

Sau khi khử ω_1 và ω_2, ta thu được:

$$\cos\alpha = 1 - \alpha\frac{\mathcal{M}_f}{mg}\,\frac{J_1 + J_2}{J_2a_2 - J_1a_1}\,.$$

Nghiệm tìm được bao hàm giữa 0 và π :

Phương trình theo α có dạng: $1 - \cos\alpha = A\,\alpha$ (A là một thông số dương vì, theo đề bài: $J_2 > J_1$ và $a_2 > a_1$).

• *Nghiệm $\alpha = 0$ tồn tại với mọi giá trị của A. Các chuyển động đã mô tả có thể duy trì một chuyển động, nhưng không làm nó tắt dần.*

• *Chỉ tồn tại nghiệm khác không đối với các giá trị đủ nhỏ của thông số A.*

Giá trị cực đại này gần bằng 0,72.

Trong một chu kì đầy đủ, công âm của các lực ma sát được bù lại đầy đủ bởi công toàn phần dương của người (nội lực). Thực vậy, lực mà người tác dụng lên đôi chân của mình ở $\theta = 0$ mạnh hơn là ở $\theta = \alpha$.

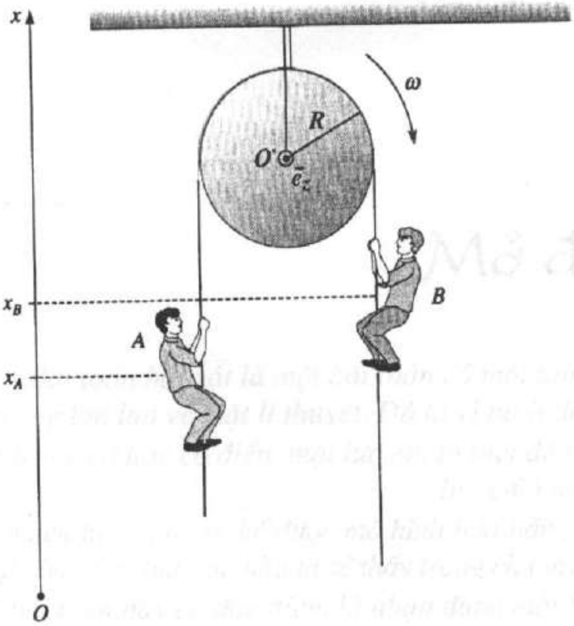
25 * Thi trèo (PCSI)

Cũng như trong bài tập "Một cuộc thi công bằng", *chương 2*, Cơ *I*, hai người *A* và *B* có cùng khối lượng, bám vào hai đoạn của một sợi dây khối lượng không đáng kể, vắt qua khe của một ròng rọc bán kính *R* treo ở trên trần.

Các lực ma sát luôn luôn được bỏ qua, nhưng phải kể tới mômen quán tính *J* của ròng rọc đối với trục quay của nó. *A* chỉ muốn nắm lấy dây trong khi đó *B* lại cố gắng trèo lên.

Tìm biểu thức gia tốc của *B* theo gia tốc của *A*.

Kết luận



• *Lời giải :*

$$\dot{x}_A = -\dot{x}_B = \omega R \text{ hay } \ddot{x}_A = -\ddot{x}_B = \dot{\omega} R.$$

Xét hệ { ròng rọc + hai người A và B}

$$\vec{L}_0 = mR((\dot{x}_A - \dot{x}_B)\vec{e}_z + J\omega\vec{e}_z).$$

$$\sum \mathcal{M}_0(\vec{F}_{ext}) = 0.$$

Suy ra : $mR(\ddot{x}_A - \ddot{x}_B) + J\dot{\omega} = 0.$

$$\text{Vậy : } a_B = a_A\left(1 + \frac{J}{R^2}\right).$$

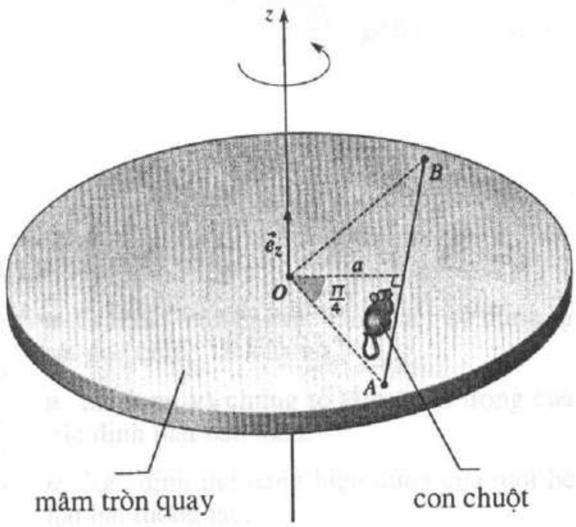
26 ** Chuyển động trên một mâm quay (PCSI)

Một mâm nằm ngang có thể quay không ma sát xung quanh một trục thẳng đứng $\Delta\ (0; \vec{e}_z)$. Gọi *J* là mômen quán tính của nó đối với trục *Δ*. Một con chuột, coi như một chất điểm khối lượng *m*, lúc đầu đứng yên trên mâm không chuyển động, dịch chuyển trên một đường thẳng từ *A* đến *B* (*A* và *B* là hai điểm cố định trên mâm nhìn điểm *O* dưới góc $\frac{\pi}{2}$ (x. h. vẽ).

Hỏi mâm quay một góc α bằng bao nhiêu khi con chuột tới điểm *B* ?

Đề nghị : Xác định vị trí của con chuột bằng tọa độ cực (r, θ), viết biểu thức của định luật bảo toàn mômen động lượng và biểu thức liên hệ giữa θ và α với β (khoảng cách góc mà con chuột đã đi được trên mâm).

$$Cho: \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\beta}{1 + \lambda\cos^2\beta} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda}}\right).$$



• *Lời giải :*

Dùng tọa độ cực trong hệ quy chiếu cố định, sự bảo toàn các mômen động lượng cho :

$$mr^2\frac{d\theta}{dt} + J\omega = 0 \text{ hay } mr^2 d\theta + J d\alpha = 0.$$

Mà $\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\beta}{dt} + \frac{d\alpha}{dt}$, vậy $mr^2 d\beta + (J + mr^2)\, d\alpha = 0$,

với $r = \frac{a}{\cos\beta}$; $d\beta + \left(1 + \frac{J\cos^2\beta}{ma^2}\right) d\alpha = 0$,

$$\alpha = -\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \frac{d\beta}{1 + \frac{J\cos^2\beta}{ma^2}} = -\frac{2}{\sqrt{1+\lambda}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda}}\right),$$

với $\lambda = \frac{J}{ma^2}$.

HỆ HAI CHẤT ĐIỂM - LỰC XUYÊN TÂM 5

Mở đầu

Bài toán hai vật là một bài toán có một tầm quan trọng lớn lao về mặt lí thuyết. Đó là vì ba lí do sau :

- *trong cơ học cổ điển, mọi lực mà ta biết đều là các lực giữa hai vật ;*
- *nhiều hệ vật lí có thể được mô hình hóa bằng các hệ vật chất gồm hai hạt, như ta sẽ thấy trong chương này ;*
- *bài toán này có đặc điểm là nhận được một lời giải tổng quát đầy đủ nhờ sử dụng hệ quy chiếu tâm tỉ cự và khái niệm khối lượng rút gọn.*

Các định luật bảo toàn động lượng và mômen động lượng cho phép ta thu được các kết quả quan trọng có giá trị với mọi lực tương tác. Khi các lực tương tác phát sinh từ một thế năng, thì sự bảo toàn cơ năng sẽ cho phép xác định được các phương trình chuyển động. Việc sử dụng các định luật bảo toàn này là rất đáng chú ý về tính hiệu quả và xứng đáng được nhấn mạnh.

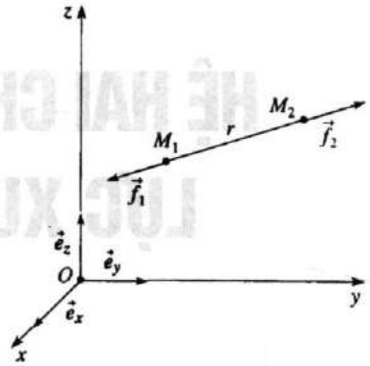
MỤC TIÊU

- Giải bài toán hai vật bằng cách sử dụng sự rút gọn chính tắc của nó.
- Sử dụng và chứng tỏ tầm quan trọng của các định luật bảo toàn.
- Xác định thế năng hiệu dụng của một hệ hai hạt tương tác.
- Khai thông các khái niệm trạng thái ràng buộc và trạng thái khuếch tán.

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

- TOÁN
  - Tọa độ cực.
- LÍ
  - Hệ quy chiếu tâm tỉ cự.
  - Hệ chất điểm .

Sự rút gọn chính tắc bài toán hai vật



Hình 1. *Hệ hai chất điểm tương tác :* $\vec{f}_1 = -\vec{f}_2$.

1.1. Đối tượng của bài toán

Trong một hệ quy chiếu Galilée $\mathfrak{R}$, xét một hệ cô lập gồm hai chất điểm M_1 và M_2, có khối lượng m_1 và m_2, cách nhau r. Chúng chuyển động dưới tác dụng lẫn nhau của các lực $\vec{f}_1$ và $\vec{f}_2$ (*hình 1*).

Áp dụng nguyên lí cơ bản của động lực học cho mỗi chất điểm của hệ M_1 và M_2, ta có :

$$m_1.\frac{d^2\overrightarrow{OM_1}}{dt^2} = \vec{f}_1,\ m_2\frac{d^2\overrightarrow{OM_2}}{dt^2} = \vec{f}_2.$$

Hai phương trình vi phân trên được *ghép đôi* qua trung gian của các lực tương tác. *Dưới dạng này*, phương trình thứ nhất chỉ có thể giải được nếu phương trình thứ hai đã được giải trước và ngược lại. Người ta dự định thiết lập một hệ hai phương trình *không ghép đôi*, tương đương với hệ phương trình trên.

1.2. Chuyển động của tập hợp các hạt

Theo nguyên lí tác dụng tương hỗ, $\vec{f}_1$ trực đối với $\vec{f}_2$. Cộng vế với vế hai phương trình trên :

$$m_1\frac{d^2\overrightarrow{OM_1}}{dt^2} + m_2\frac{d^2OM_2}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}\right) = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = 0$$

Đưa tâm quán tính G của hệ vào :

$$(m_1+m_2)\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OM}_1 + m_2\overrightarrow{OM}_2\text{; ta có : }\frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2} = \vec{O}.$$

Chuyển động toàn bộ của một hệ cô lập gồm hai hạt, xác định bởi chuyển động của tâm quán tính G của nó, là một chuyển động thẳng đều : $\overrightarrow{OG}(t) = \overrightarrow{OG}(0) + \vec{v}_G t$.

$\overrightarrow{OG}(0)$ và $\vec{v}_G$ là các vectơ không đổi được xác định bởi các điều kiện ban đầu.

1.3. Chuyển động tương đối của các hạt

Chia mỗi phương trình vi phân ban đầu lần lượt cho m_1 và m_2, sau đó trừ các phương trình vế với vế :

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM_2}}{dt^2} - \frac{d^2\overrightarrow{OM_1}}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{M_1M_2}}{dt^2} = \frac{1}{m_2}\vec{f}_2 - \frac{1}{m_1}\vec{f}_1 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{f}_2.$$

Kí hiệu $\vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2}$ là vectơ vị trí tương đối của M_2 đối với M_1, và μ là khối lượng rút gọn của hệ xác định bởi :

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

Phương trình trở thành : $\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{f}_2$, nghiệm $\vec{r}(t)$ của phương trình này xác định chuyển động tương đối của M_2 đối với M_1.

1.4. Chuyển động của các hạt trong $\mathcal{R}$

Biết *chuyển động toàn bộ của các hạt* xác định bởi $\overrightarrow{OG}(t)$ và *chuyển động tương đối* của chúng xác định bởi $\vec{r}(t)$, ta có thể suy ra chuyển động của mỗi hạt.

Muốn vậy, chỉ cần trở lại định nghĩa của tâm quán tính :

$$m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} = \vec{O}$$

từ đó : $\dfrac{\overrightarrow{GM_2}}{m_1} = \dfrac{-\overrightarrow{GM_1}}{m_2} = \dfrac{\vec{r}}{m_1+m_2}$,

hay : $\overrightarrow{GM_1} = -\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}$ và $\overrightarrow{GM_2} = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}$

và cuối cùng là vectơ vị trí của hai hạt :

$$\overrightarrow{OM_1}(t) = \overrightarrow{OG}(t) + \overrightarrow{GM_1}(t) = \overrightarrow{OG}(t) - \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}(t),$$

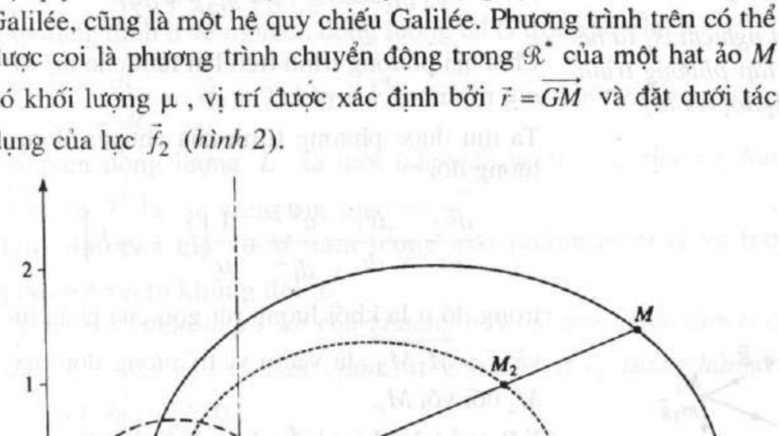
$$\overrightarrow{OM_2}(t) = \overrightarrow{OG}(t) + \overrightarrow{GM_2}(t) = \overrightarrow{OG}(t) + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}(t).$$

1.5. Chuyển động trong hệ quy chiếu tâm tỉ cự của các hạt

Lấy lại phương trình vi phân xác định chuyển động tương đối của M_2 đối với M_1 :

$$\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{f}_2 .$$

Hệ quy chiếu tâm tỉ cự $\mathcal{R}^*$, chuyển động tịnh tiến đều trong $\mathcal{R}$ Galilée, cũng là một hệ quy chiếu Galilée. Phương trình trên có thể được coi là phương trình chuyển động trong $\mathcal{R}^*$ của một hạt ảo M có khối lượng μ , vị trí được xác định bởi $\vec{r} = \overrightarrow{GM}$ và đặt dưới tác dụng của lực $\vec{f}_2$ (*hình 2*).



Hình 2. *Quỹ đạo của các hạt M_1 và M_2 là vị tự của quỹ đạo của hạt rút gọn M trong một phép vị tự tâm G .*

Vì $\frac{\overrightarrow{GM_2}}{m_1} = -\frac{\overrightarrow{GM_1}}{m_2} = \frac{\overrightarrow{GM}}{m_1+m_2}$:

Quỹ đạo trong $\mathcal{R}^*$ của các hạt M_1 và M_2 là vị tự của quỹ đạo của hạt rút gọn.

Cuối cùng, ta chú ý rằng trong $\mathcal{R}^*$ giá của lực $\vec{f}_2$ đi qua điểm cố định G: lực tác dụng lên hạt ảo M là một *lực xuyên tâm.*

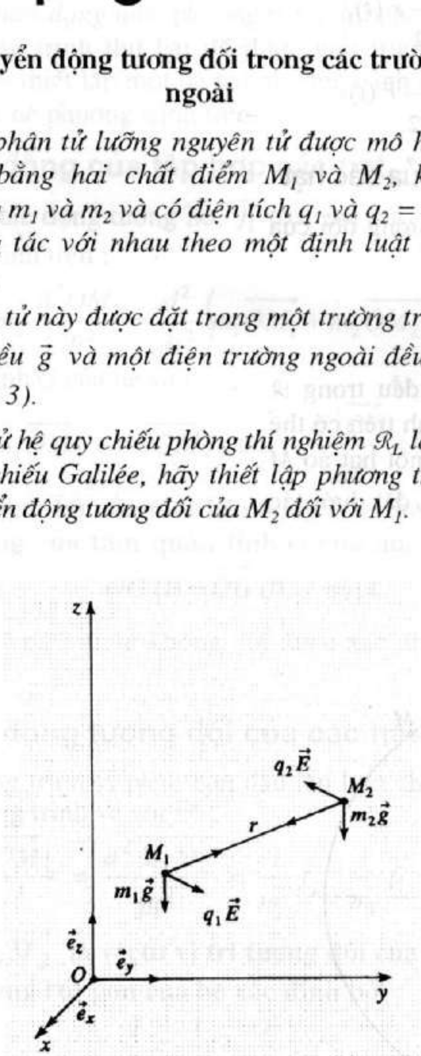
Áp dụng 1

Chuyển động tương đối trong các trường ngoài

Một phân tử lưỡng nguyên tử được mô hình hóa bằng hai chất điểm M_1 và M_2, khối lượng m_1 và m_2 và có điện tích q_1 và $q_2 = -q_1$, tương tác với nhau theo một định luật của lực f.

Phân tử này được đặt trong một trường trọng lực đều $\vec{g}$ và một điện trường ngoài đều $\vec{E}$ (hình 3).

Giả sử hệ quy chiếu phòng thí nghiệm $\mathcal{R}_L$ là hệ quy chiếu Galilée, hãy thiết lập phương trình chuyển động tương đối của M_2 đối với M_1.



Hình 3. *Phân tử lưỡng nguyên tử trong một trường ngoài.*

Gọi $\mathcal{R}^*$ là hệ quy chiếu tâm tỉ cự của phân tử. Theo định nghĩa, nó chuyển động tịnh tiến trong $\mathcal{R}_L$. Từ đó, ta không cần phân biệt các đạo hàm theo thời gian trong $\mathcal{R}_L$ hoặc trong $\mathcal{R}^*$.

Áp dụng hệ thức cơ bản của động lực học cho M_1 và M_2 trong $\mathcal{R}_L$:

$$m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{f}_1 + m_1\vec{g} + q_1\vec{E}$$

$$\text{và } m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{f}_2 + m_2\vec{g} + q_2\vec{E}$$

Chia hai phương trình trên lần lượt cho m_1 và m_2, rồi trừ vế với vế.

Ta thu được phương trình của chuyển động tương đối :

$$\frac{d\vec{v}_2}{dt} - \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{1}{\mu}\left[\vec{f}_2 + q_2\vec{E}\right],$$

trong đó μ là khối lượng rút gọn của phân tử và $\vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2}$ là véctơ vị trí tương đối của M_2 đối với M_1.

Kết quả trên được biểu diễn dưới dạng :

$$\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{f}_2 + q_2\vec{E}$$

cũng là phương trình của hạt ảo M trong hệ quy chiếu tâm tỉ cự $\mathcal{R}^*$.

Trong một trường trọng lực đều, chuyển động tương đối của hai hạt không phụ thuộc vào trường ngoài này.

▸ **Để luyện tập: BT1 .**

2 Các định luật bảo toàn

2.1. Bảo toàn động lượng

Hệ hai hạt được giả thiết là cô lập, trong hệ quy chiếu nghiên cứu Galilée $\mathcal{R}$, động lượng của hệ không đổi.

Kết quả này đã được dùng ở §1.2.

Chuyển động toàn bộ được xác định, các định luật bảo toàn dưới đây sẽ được sử dụng để xác định chuyển động tương đối của các hạt M_1 và M_2 hay, cũng như thế, xác định chuyển động tâm tỉ cự của hạt ảo M.

2.2. Bảo toàn mômen động lượng.

Gọi $\vec{L}^*$ là mômen động lượng tâm tỉ cự của hệ hai hạt :

$$\vec{L}^* = m_1\overrightarrow{GM}_1 \wedge \vec{v}_1^* + m_2\overrightarrow{GM}_2 \wedge \vec{v}_2^*$$

$$= \overrightarrow{GM} \wedge \left[-\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_1 + \frac{m_2 m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_2 \right].$$

$\vec{v}^* = \vec{v}_2^* - \vec{v}_1^*$ biểu thị vận tốc trong $\mathcal{R}^*$ của hạt ảo M.

Từ đó ta suy ra rằng $\vec{L}^*$ bằng mômen động lượng tại G của hạt ảo :

$$\vec{L}^* = \mu\overrightarrow{GM} \wedge \vec{v}^*.$$

Ta nhớ lại các hệ quả của một lực xuyên tâm, có tâm lực G, áp dụng cho hạt ảo M (x. *Cơ I, chương* **2, §7**).

Mômen $\vec{\mathcal{M}}_G$ của lực $\vec{f}_2$ tại G bằng không.

Áp dụng định lí về mômen động lượng tại G trong $\mathcal{R}^*$ cho :

$$\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_G = \vec{0}\text{, hay : } \vec{L}^* = \overrightarrow{GM} \wedge \mu\vec{v}^* \text{ không đổi.}$$

Mômen động lượng $\vec{L}^*$ là một *bất biến vectơ của chuyển động*

$\overrightarrow{GM}$ và $\vec{v}^*$ là các vectơ trực giao với $\vec{L}^*$.

Quỹ đạo của hạt ảo M nằm trong mặt phẳng chứa G và trực giao với vectơ không đổi $\vec{L}^*$.

Trong mọi phần tiếp theo của chương này, hệ quy chiếu tâm tỉ cự $(G ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sẽ được chọn sao cho $\vec{L}^*$ và $\vec{e}_z$ thẳng hàng và cùng chiều (hình 4).

Kí hiệu (r, θ) là các tọa độ của M, ta có :

$$\vec{L}^* = \overrightarrow{GM} \wedge \mu\vec{v}^* = \mu r^2\dot{\theta}\vec{e}_z.$$

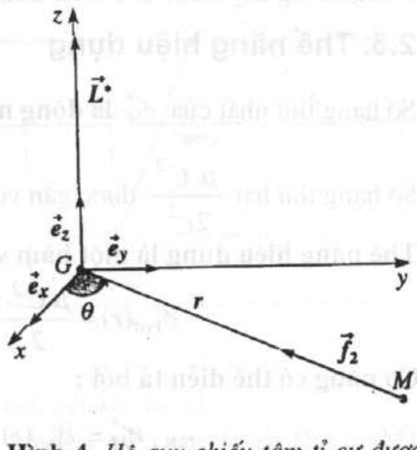
Sự bất biến của mômen động lượng kéo theo định luật về các diện tích:

$$r^2\dot{\theta} = \frac{L_z}{\mu} = C.$$

trong đó C là hằng số diện tích, được xác định bởi các điều kiện ban đầu.

Kí hiệu dS là diện tích quét bởi bán kính vectơ $\overrightarrow{GM}$ trong thời gian dt. *Vận tốc diện tích* của hạt ảo M cũng là một hằng số của chuyển động của nó :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{C}{2}.$$



Hình 4. *Hệ quy chiếu tâm tỉ cự được chọn sao cho $\vec{L}^*$ và $\vec{e}_z$ thẳng hàng và cùng chiều.*

2.3. Động năng

Động năng tâm tỉ cự của hệ hai hạt bằng động năng trong $\mathcal{R}^*$ của hạt ảo.

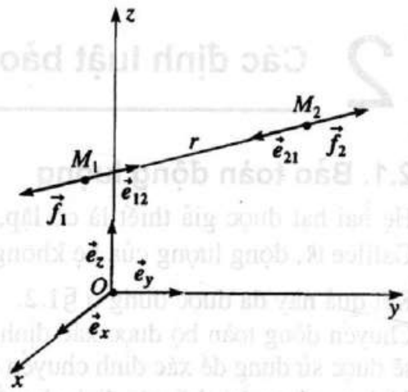
Thực vậy : $2\mathcal{E}_K^* = m_1\vec{v}_1^{*2} + m_2\vec{v}_2^{*2}$;

mà : $\vec{v}_1^{*2} = \dfrac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\vec{v}^{*2}$ và $\vec{v}_2^{*2} = \dfrac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\vec{v}^{*2}$, vậy :

$$2\mathcal{E}_K^* = \mu\vec{v}^{*2}.$$

Trong tọa độ cực :

$$\mathcal{E}_K^* = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2).$$



Hình 5. *Định nghĩa các vectơ đơn vị* $\vec{e}_{12}$ *và* $\vec{e}_{21}$.

2.4. Bảo toàn cơ năng

Xét trường hợp đặc biệt, quan trọng của các hệ hai hạt mà các lực tương tác phát sinh từ một thế năng $\mathcal{E}_p(r)$.

Nếu lực tương tác có dạng :

$$\vec{f}_2 = f(r)\vec{e}_{12}.$$

thì tồn tại một hàm số $\mathcal{E}_p(r)$ sao cho :

$$\vec{f}_1 = -\frac{d\mathcal{E}_p(r)}{dr}\vec{e}_{21} \text{ và } \vec{f}_2 = -\frac{d\mathcal{E}_p(r)}{dr}\vec{e}_{12}.$$

trong đó $\vec{e}_{12}$ và $\vec{e}_{21}$ là các vectơ đơn vị của hướng $\overrightarrow{M_1M_2}$ (*hình 5*).

Trong trường hợp một lực tương tác bảo toàn phát sinh từ thế năng $\mathcal{E}_p(r)$ thì cơ năng trong $\mathcal{R}^*$, $\mathcal{E}_M^*$ của hạt rút gọn có biểu thức :

$$\mathcal{E}_M^* = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \mathcal{E}_p(r),$$

hay còn là, vì $C = r^2\dot{\theta}$:

$$\mathcal{E}_M^* = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{\mu C^2}{2}\frac{1}{r^2} + \mathcal{E}_p(r).$$

Năng lượng này được bảo toàn trong chuyển động.

2.5. Thế năng hiệu dụng

Số hạng thứ nhất của $\mathcal{E}_M^*$ là **động năng xuyên tâm** $\mathcal{E}_{K_r}^* = \dfrac{\mu}{2}\dot{r}^2$.

Số hạng thứ hai $\dfrac{\mu C^2}{2r^2}$ được gắn với sự quay của hạt ảo.

Thế năng hiệu dụng là một hàm số của *r* được xác định bởi :

$$\mathcal{E}_{\text{Peff}}(r) = \frac{\mu C^2}{2}\frac{1}{r^2} + \mathcal{E}_{\text{P}}(r)$$

Cơ năng có thể diễn tả bởi :

$$\mathcal{E}_M^* = \mathcal{E}_{\text{Peff}}(r) + \frac{\mu}{2}\dot{r}^2,$$

$$\text{với } \mathcal{E}_{\text{K}} = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2.$$

3 Chuyển động của hạt rút gọn

3.1. Giới hạn của chuyển động xuyên tâm của hạt rút gọn

Đặt biểu thức của cơ năng $\mathscr{E}_M^*$ của hạt rút gọn dưới dạng :

$$\frac{\mu}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \mathscr{E}_M^* - \mathscr{E}_{\text{Peff}}(r).$$

Các điều kiện ban đầu đã cho, cơ năng $\mathscr{E}_M^*$ được xác định.

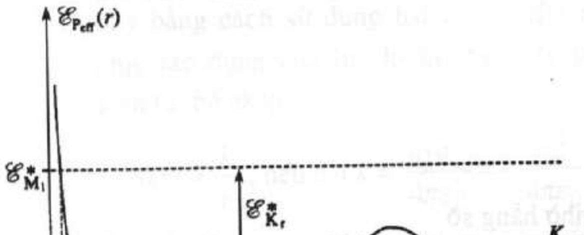
Khi đó, các giá trị cho phép của r đối với hạt rút gọn M là các giá trị thỏa mãn bất đẳng thức sau :

$$\mathscr{E}_{\text{Peff}}(r) \leq \mathscr{E}_M^*,$$

vì động năng xuyên tâm $\frac{\mu}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ không bao giờ âm.

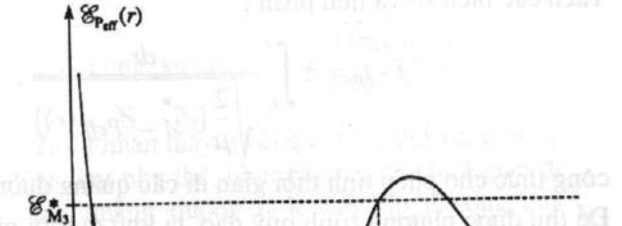
Các giá trị của r cho $\mathscr{E}_{\text{Peff}}(r) = \mathscr{E}_M^*$ xác định các *giới hạn của chuyển động xuyên tâm* của hạt rút gọn. Thực vậy, vận tốc xuyên tâm $\frac{dr}{dt}$ bằng không thì hàm số $r(t)$ từ đồng biến trở thành nghịch biến hoặc ngược lại : *hạt quay ngược trở lại*. Vì thế, ta không được kết luận là hạt ngừng lại đứng yên, vì vận tốc trực xuyên tâm (tiếp tuyến) $r\frac{d\theta}{dr} = \frac{C}{r}$ không triệt tiêu ở một điểm giới hạn như thế.

Các hình 6 và 7, bằng cách minh họa các tổng kết năng lượng, cho thấy rõ hai loại chuyển động đã được nghiên cứu dưới đây.



Hình 6. *Các trạng thái khuếch tán.*

Nhờ có các năng lượng $\mathscr{E}^*_{M_1}$ hay $\mathscr{E}^*_{M_2}$, một hạt tới từ vô cùng rồi lại quay trở lại về đó. Trên các điểm giới hạn, ($r = r_{min1}$ hay $r = r_{min2}$) động năng xuyên tâm $\mathscr{E}^*_{K_r}$ bằng không.



Hình 7. *Các trạng thái liên kết (buộc).*

Với các năng lượng $\mathscr{E}^*_{M_3}$ (hay $\mathscr{E}^*_{M_4}$) một chuyển động có thể có giữa $r_{min\,3}$ và $r_{max\,3}$ (hay giữa r_{min4} và $r_{max\,4}$), hạt ở trong trạng thái liên kết (buộc). Với năng lượng $\mathscr{E}^*_{M_5}$, quỹ đạo là tròn.

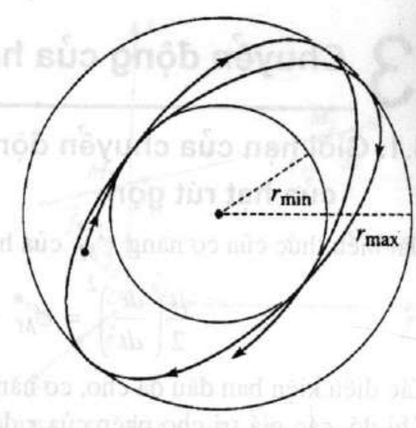
3.2. Trạng thái khuếch tán

Nếu miền giá trị có thể có của r chỉ giới hạn bởi một điều kiện duy nhất là $r \geq r_{min}$, thì khi đó hạt rút gọn có thể đi ra xa vô cùng. Ta nói hạt ở trong *trạng thái khuếch tán* hay còn gọi là *trạng thái tự do.*

3.3. Trạng thái liên kết

Ngược lại, nếu các giá trị có thể có của r bị chặn bởi hai điều kiện là $r_{min} \leq r \leq r_{max}$, thì khi đó chuyển động của hạt rút gọn được thực hiện ở bên trong một hình vành khăn, giới hạn bởi hai vòng tròn đồng tâm bán kính $r = r_{min}$ và $r = r_{max}$. Ta nói hạt ở trong trạng thái *liên kết* với tâm lực G.

Trong các điều kiện trên đây, chuyển động của hạt không nhất thiết phải tuần hoàn bởi lẽ nói chung quỹ đạo của hạt là không khép kín (*hình* 8). Người ta chứng minh được rằng chỉ tồn tại hai loại trường lực mà quỹ đạo của các hạt liên kết là khép kín: các trường Newton biến thiên theo r^{-2} và các trường của dao động tử điều hòa theo r.



Hình 8. *Trong trường hợp tổng quát, quỹ đạo của một điểm dưới tác dụng của một lực hướng tâm không phải là một đường cong kín.*

3.4. Phương trình tổng quát của chuyển động của hạt rút gọn

Từ biểu thức cơ năng $\mathscr{E}_M^*$ của hạt rút gọn M :

$$\mathscr{E}_M^* = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \mathscr{E}_{P_{eff}}(r),$$

ta suy ra biểu thức vận tốc của hạt trong $\mathscr{R}^*$:

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}[\mathscr{E}_M^* - \mathscr{E}_{Peff}(r)]},$$

trong đó dấu trước dấu căn là + hay - tùy theo hạt rút gọn đi ra xa hay tiến về gần tâm lực G.

Tách các biến số và tích phân :

$$t - t_0 = \pm\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}[\mathscr{E}_M^* - \mathscr{E}_{Peff}(r)]}},$$

công thức cho phép tính thời gian đi các quãng đường.

Để thu được phương trình quỹ đạo, ta khử đi thời gian nhờ hằng số diện tích :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{C}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}[\mathscr{E}_M^* - \mathscr{E}_{Peff}(r)]},$$

Sau khi tách biến số và tích phân, ta có phương trình quỹ đạo :

$$\theta - \theta_0 = \pm\int_{r_0}^{r}\frac{\frac{C}{r^2}dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}[\mathscr{E}_M^* - \mathscr{E}_{Peff}(r)]}}.$$

<u>Chú ý</u> : Mặc dầu công thức trên có thể gợi lên điều trái ngược, chiều quay của hạt rút gọn M xung quanh tâm lực G, luôn luôn được thực hiện theo cùng một chiều vì $\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2}$ *có dấu không thay đổi.*

Áp dụng 2

Thời gian của một chuyển động tương đối

Hai iôn M_1 và M_2 lần lượt có khối lượng m_1 và m_2, và có điện tích q_1 và q_2 trái dấu, được thả ra không vận tốc ban đầu, ở khoảng cách r_0 giữa hai iôn, trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm được giả thiết là hệ quy chiếu Galilée.

1) *Tìm thời điểm t_o các iôn sẽ gặp nhau ?*

2) *Tìm khoảng cách r_1 mà ta phải thả các iôn, không vận tốc ban đầu, để chúng gặp nhau ở thời điểm $t_1 = 8t_0$?*

Hình 9. *Hút nhau, các hạt thu được các vận tốc không bằng nhau và gặp nhau tại tâm quán tính của hệ.*

1) Ta đã thấy trong *Áp dụng 1*, chuyển động tương đối của hai hạt không phụ thuộc vào trường trọng lực nếu là trọng trường đều. Với giả thiết trên, ta hãy khảo sát chuyển động này bằng cách sử dụng hạt ảo M. Hạt này chịu tác dụng của lực hướng tâm $\vec{f}_2$ phát sinh từ thế năng :

$$\mathscr{E}_p(r) = \frac{k}{r}\text{, nếu đặt } k = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} = -\frac{q_1^2}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Chuyển động của M được thực hiện với sự bảo toàn cơ năng :

$$\mathscr{E}_M = \frac{\mu}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{k}{r} = \frac{k}{r_0},$$

trong đó μ là khối lượng rút gọn của hệ hai hạt.

Trong biểu thức vận tốc của M :

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2k}{\mu}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)} = -\sqrt{\frac{2|k|}{\mu r_0}\left(\frac{r_0}{r} - 1\right)},$$

ta tách biến số

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{r_0}{r} - 1}} = -\sqrt{\frac{2|k|}{\mu r_0}}\,dt,$$

và đặt $\frac{r}{r_0} = \cos^2\theta$ với $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

Ta có : $r_0\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta\, d\theta = \sqrt{\frac{2|k|}{\mu r_0}}\int_0^{t_0} dt$,

hay còn là :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta = \sqrt{\frac{2|k|}{\mu}}\frac{1}{r_0^{3/2}}t_0\ ;$$

cuối cùng, suy ra : $t_0 = \pi\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0\mu}{8|q_1 q_2|}}\,r_0^{3/2}$.

2) Ta nhận thấy ở kết quả trên, đối với một hệ hai hạt như thế, bình phương của thời gian đi hết quãng đường tỉ lệ với lập phương của quãng đường đi. Nhờ vậy, ta tính ngay được :

$$r_1 = r_0\left(\frac{t_1}{t_0}\right)^{2/3} = r_0\, 8^{2/3} = 4r_0.$$

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ CHUYỂN ĐỘNG CỦA HỆ HAI HẠT

• Trong một hệ quy chiếu nghiên cứu Galilée $\mathcal{R}$, xét một hệ cô lập gồm hai hạt tương tác. Chuyển động của hệ này là kết quả của sự tổng hợp của chuyển động của tâm quán tính G của nó trong $\mathcal{R}$ và của chuyển động của các hạt M_1, M_2 tạo nên hệ trong hệ quy chiếu tâm tỉ cự $\mathcal{R}^*$

• Chuyển động toàn bộ của một hệ cô lập gồm hai hạt, được xác định bởi chuyển động của tâm quán tính G của nó, là một chuyển động thẳng đều :

$$\overrightarrow{OG}(t) = \overrightarrow{OG}(0) + \vec{v}_G t$$

• Kí hiệu $\vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2}$ là vectơ vị trí của M_2 đối với M_1 và μ là khối lượng rút gọn của hệ, xác định bởi :

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

Ta có : $\mu \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{f}_2$, mà nghiệm $\vec{r}\,(t)$ xác định chuyển động tương đối của M_2 đối với M_1.

• Quỹ đạo trong $\mathcal{R}^*$ của các hạt M_1 và M_2 là vị tự của quỹ đạo của hạt rút gọn.

■ BẢO TOÀN MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG

• Quỹ đạo của hạt ảo M nằm trong mặt phẳng chứa G và trực giao với vectơ không đổi $\vec{L}^*$.

• Bất biến của mômen động lượng kéo theo định luật diện tích :

$$r^2\dot{\theta} = \frac{L_z}{\mu} = C$$

trong đó C là hằng số diện tích, được xác định bởi các điều kiện ban đầu.

■ THẾ NĂNG HIỆU DỤNG

• Thế năng hiệu dụng là một hàm của r xác định bởi :

$$\mathcal{E}_{Peff}(r) = \frac{\mu C^2}{2} \cdot \frac{1}{r^2} + \mathcal{E}_P(r).$$

• Cơ năng có thể biểu thị bởi :

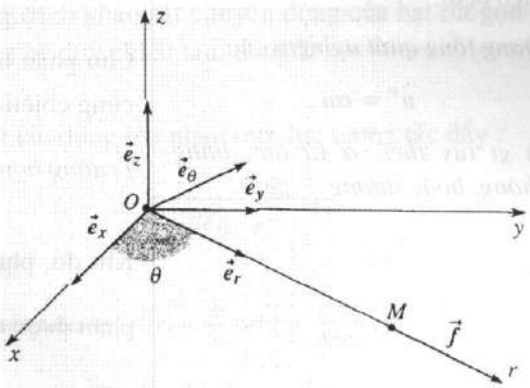
$$\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_{Peff}(r) + \frac{\mu}{2}\dot{r}^2, \text{ với } \mathcal{E}_K = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2.$$

*B*ÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI

Áp dụng các công thức BINET

ĐỀ BÀI

Trong hệ quy chiếu Galilée, xét một hạt M có khối lượng m, chịu tác dụng của một lực hướng tâm $\vec{f} = f(r)\vec{e}_r$.



1) Đặt $u = \dfrac{1}{r}$. Chứng minh rằng vận tốc $\vec{v}$ và gia tốc $\vec{a}$ của hạt này có thể biểu thị theo u và các đạo hàm của u đối với θ.

2) Xác định quy luật của lực $f(r)$ để quỹ đạo của hạt là một đường xoắn ốc lôga $r = ae^{\theta}$.

Định rõ hằng số theo các điều kiện ban đầu r_0 và $\dot{\theta}_0$.

3) Lúc $t = 0$, hạt M được ném ra tại M_0 ($\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$) với vận tốc ban đầu $\vec{v}_0$ trực giao với $\vec{r}_0$.

Hãy xác định quỹ đạo của hạt biết rằng hạt nằm trong một trường lực hút xuyên tâm : $\vec{f} = -\dfrac{k}{r^3}\vec{e}_r$.

Hãy biện luận theo các giá trị của $v_0 = \|\vec{v}_0\|$ tính chất của các quỹ đạo.

HƯỚNG DẪN

• *Câu hỏi* **1)** *đề nghị khử biến số thời gian trong các phương trình vi phân. Muốn vậy phải sử dụng quy tắc tính đạo hàm của các hàm số kép :*

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}.$$

• *Dùng các biểu thức của vận tốc và gia tốc theo tọa độ cực.*

• *Làm thế nào để đưa vào các phép tính lời chỉ dẫn "hạt chịu tác dụng của một lực xuyên tâm"?*

• *Dùng định luật diện tích, thay thế một cách triệt để $\dot{\theta}$ bằng một hàm của u.*

• *Đối với câu hỏi* **2)** *hàm $u(\theta)$ đã biết.*

Từ đó suy ra gia tốc và quy luật của lực.

LỜI GIẢI

1) Ta nhớ lại biểu thức của vận tốc trong tọa độ cực :

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta.$$

Chuyển động dưới tác dụng của lực xuyên tâm, ta có tích phân đầu của diện tích :

$$r^2\dot{\theta} = C. \text{ Suy ra } \dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -C\frac{du}{d\theta} \text{ và } r\dot{\theta} = \frac{C}{r} = Cu,$$

dẫn tới *công thức thứ nhất của BINET* : $\vec{v} = C\left(-\dfrac{du}{d\theta}\vec{e}_r + u\vec{e}_\theta\right)$.

Bây giờ ta xét biểu thức của gia tốc trong tọa độ cực :

$$\vec{a} = [\ddot{r} - r\dot{\theta}^2]\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\vec{e}_\theta.$$

Thành phần trực xuyên tâm (tiếp tuyến) bằng không trong trường hợp chuyển động dưới tác dụng của lực xuyên tâm. Ta xét thành phần xuyên tâm :

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -C\frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{C}{r^2} = -C^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} \text{ và } r\dot{\theta}^2 = \frac{C}{r^3} = C^2u^3$$

suy ra *công thức thứ hai của BINET* : $\vec{a} = -C^2u^2\left(\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)\vec{e}_r$.

2) Áp dụng nguyên lí cơ bản của động lực học cho hạt, ta có :

$$f = -mC^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right), \text{ với } u = \frac{1}{a}e^{-\theta}.$$

suy ra ngay : $f = -mC^2u^2[u + u]$, hay $f(r) = -\dfrac{2mC^2}{r^3}$.

• Vậy quy luật của lực có dạng : $f(r) = -\dfrac{k}{r^3}$.

• Giá trị của C được xác định bởi các điều kiện ban đầu, vậy $k = 2m\,r_0^4\dot{\theta}_0^2$.

• *Đối với câu hỏi* **3)**, *cần phải giải một phương trình vi phân theo* $u(\theta)$.

Dạng tổng quát nghiệm của :

$$u'' = \alpha u,$$

là gì tùy theo α *là âm, bằng không, hoặc dương ?*

3) áp dụng hệ thức cơ bản của động lực học cho hạt M :

$$-mC^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right) = -ku^3 \text{, suy ra } \frac{d^2u}{d\theta^2}+\left(1-\frac{k}{mC^2}\right)u = 0 \text{, với } C = r_0v_0.$$

Cho phần tiếp theo của bài toán, trục cực sẽ được chọn thẳng hàng và cùng chiều với $\overrightarrow{OM_0}$, điều này có nghĩa là $\theta(0) = 0$.

Trường hợp 1 : $\dfrac{k}{mC^2} = 1$, từ đó $v_0 = \dfrac{1}{r_0}\sqrt{\dfrac{k}{m}} = v_c$.

Khi đó, phương trình vi phân của chuyển động là $\dfrac{d^2u}{d\theta^2} = 0$, lấy tích phân được $u = A\theta + B$, với A và B xác định bởi các điều kiện ban đầu :

$$u(0) = \frac{1}{r_0} \text{ và } \left(\frac{du}{d\theta}\right)_{t=0} = -\frac{1}{C}\dot{r}(0) = 0$$

từ đó $r = r_0$, đây là phương trình của một đường tròn có tâm là tâm lực.

Trường hợp 2 : $\dfrac{k}{mC^2} < 1$, suy ra $v_0 > \dfrac{1}{r_0}\sqrt{\dfrac{k}{m}} = v_c$.

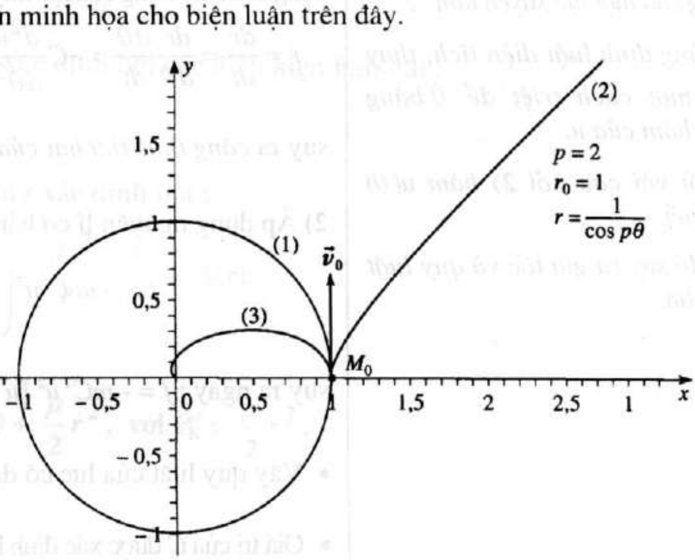
Đặt $p = \sqrt{1-\dfrac{k}{mC^2}}$; ta có : $\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + pu = 0$. Với cùng các điều kiện ban đầu, phương trình vi phân của chuyển động khi tích phân được $u = u(0)\cos(p\theta)$, từ đó : $r = \dfrac{r_0}{\cos(p\theta)}$. Quỹ đạo nhận một tiệm cận có phương trình $\theta = \dfrac{\pi}{2p}$.

Trường hợp 3 : $\dfrac{k}{mC^2} > 1$, từ đó $v_0 < \dfrac{1}{r_0}\sqrt{\dfrac{k}{m}} = v_c$.

Đặt $p = \sqrt{\dfrac{k}{mC^2}-1}$ phương trình chuyển động là : $\dfrac{d^2u}{d\theta^2} = pu$.

Nghiệm của nó là : $u = u(0)\mathrm{ch}(p\theta)$, suy ra : $r = \dfrac{r_0}{\mathrm{ch}(p\theta)}$.

Quỹ đạo nhận tâm lực là điểm tiệm cận.
Sơ đồ bên minh họa cho biện luận trên đây.



Các quỹ đạo trong một trường lực theo r^{-3}
(1) : *quỹ đạo tròn* $v_0 = v_c$;
(2) : $v_0 > v_c$ *và* $p = 2$;
(3) : $v_0 < v_c$ *và* $p = 2$.

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

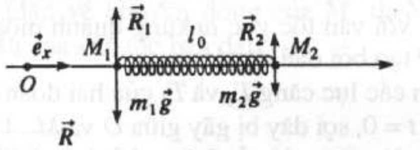
1 Dao động của hệ { khối lượng - lò xo }

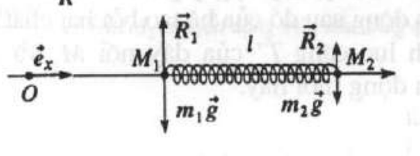
Hai khối lượng m_1 và m_2 được gắn vào các đầu M_1 và M_2 của một lò xo có độ cứng k và có chiều dài tự nhiên l_o. Các khối lượng, buộc phải trượt không ma sát trên một trục nằm ngang, nằm cân bằng và đứng yên. Lúc $t = 0$, một va chạm truyền cho khối lượng m_1 một vận tốc v_0.

Hãy xác định :

a) chuyển động của tâm quán tính G của hệ.

b) quy luật biến thiên $l(t)$ của chiều dài của lò xo.





• *Lời giải*

a) *Chuyển động của tâm quán tính là đều với vận tốc*

$$\vec{v}_G = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_0 \text{, nghĩa là :}$$

$$\overrightarrow{OG}(t) = \overrightarrow{OG}(0) + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_0 t.$$

b) $\mu \ddot{l} = -k(l - l_0)$, *đặt* $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{\mu}}$, *ta còn có :*

$$\ddot{l}(t) + \omega_0^2(t) = \omega_0^2 l_0.$$

Các điều kiện ban đầu là :

$$l(0) = l_o \text{ và } \left(\frac{dl}{dt}\right)_{t=0} = \left(\frac{dx_2}{dt}\right)_{t=0} - \left(\frac{dx_1}{dt}\right)_{t=0} = -v_0.$$

Suy ra : $l(t) = l_0(1 - cos\omega_0 t) - \dfrac{v_0}{\omega_0} sin\omega_0 t.$

2 Vận tốc giới hạn của các hạt ở trạng thái khuếch tán

Trong hệ quy chiếu Galilée $\mathcal{R}_L$ của phòng thí nghiệm, xét hai hạt M_1 và M_2 khối lượng m_1 và m_2, có điện tích q_1 và q_2 cùng dấu.

Ở thời điểm ban đầu, hai hạt được buông ra không vận tốc ban đầu ở khoảng cách r_0 giữa chúng.

Bỏ qua trọng lượng của các hạt, hãy tính vận tốc giới hạn $v_{1\infty}$ và $v_{2\infty}$ của chúng :

a) bằng cách sử dụng tích phân đầu của năng lượng trong $\mathcal{R}_L$,

b) bằng cách khảo sát chuyển động của hạt rút gọn M trong hệ quy chiếu tâm tỉ cự $\mathcal{R}^*$.

<u>*Chú ý :*</u>

Hai hạt tác dụng lên nhau một lực tương tác đẩy :

$$\vec{f}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{e}_{12}.$$

• *Lời giải*

a) *Thế năng của hệ :* $\mathscr{E}_P(r) = \dfrac{k}{r}$ *với* $k = \dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0}$.

cơ năng : $\mathscr{E}_M = \dfrac{m_1}{2}v_1^2 + \dfrac{m_2}{2}v_2^2 + \dfrac{k}{r} = \dfrac{k}{r_0}$,

vì các vận tốc ban đầu bằng không.

Tâm quán tính của hệ đứng yên trong $\mathcal{R}_L$, *do đó :*

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{0}.$$

$$v_1 = -\sqrt{\frac{2km_2}{m_1(m_1+m_2)}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)}$$

và :

$$v_2 = \sqrt{\frac{2km_1}{m_2(m_1+m_2)}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)}$$

Các vận tốc giới hạn đạt được khi các hạt ở xa nhau vô cùng :

$$v_{1\infty} = -\sqrt{\frac{2km_2}{m_1(m_1+m_2)}\frac{1}{r_0}} \text{ và } v_{2\infty} = \sqrt{\frac{2km_1}{m_2(m_1+m_2)}\frac{1}{r_0}}.$$

b) *hệ quy chiếu* $\mathcal{R}^*$ *trùng với* $\mathcal{R}_L$. *Sự bảo toàn cơ năng của hạt rút gọn M cho :*

$$\frac{\mu}{2}v^2 + \frac{k}{r} = \frac{k}{r_0}.$$

Vậy : $v = \sqrt{\dfrac{2k}{\mu}\left(\dfrac{1}{r_o} - \dfrac{1}{r}\right)}$, *và* $v_\infty = \sqrt{\dfrac{2k}{\mu}\dfrac{1}{r_0}}$.

Suy ra : $v_{1\infty} = \dfrac{-m_2}{m_1 + m_2}v_\infty = -\sqrt{\dfrac{2km_2}{m_1(m_1+m_2)}\dfrac{1}{r_0}}$;

$$v_{2\infty} = \frac{-m_1}{m_1 + m_2}v_\infty = \sqrt{\frac{2km_1}{m_2(m_1+m_2)}\frac{1}{r_0}}.$$

3 Hai hạt tương tác với nhau trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm

Một hệ cô lập gồm hai hạt M_1, M_2 tương tác với nhau theo quy luật của lực hút theo r^{-2}, dịch chuyển sao cho khoảng cách giữa hai hạt không đổi và bằng r_0. Kí hiệu m_1 và m_2 là khối lượng của hai hạt.

Hãy phân tích chuyển động của chúng trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm $\mathcal{R}_L$ giả thiết là Galilée.

• *Lời giải*

Bằng cách chọn hệ tọa độ và gốc thời gian :

• *Vận tốc của tâm tỉ cự* $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$;

• *chuyển động trong mặt phẳng* $(0; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$;

• $\overrightarrow{GM}(0) = r_0\vec{e}_y$.

Các hạt vạch ra trong $\mathcal{R}^*$ *những quỹ đạo tròn với vận tốc góc* ω :

$$\mu r_0\omega^2 = \frac{k}{r_0^2}.$$

$$x_1 = v_0 t - \frac{m_2}{m_1+m_2} r_0 \sin\omega t \; ; \; y_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2} r_0 \cos\omega t .$$

4 Phân tử lưỡng nguyên tử và thế MORSE

Trong một phân tử lưỡng nguyên tử, thế năng tương tác giữa hai nguyên tử cho bởi công thức MORSE :

$$\mathscr{E}_P(r) = D\,(1 - e^{-\alpha(r-r_o)})^2 ,$$

trong đó D và α là các hằng số, r là khoảng cách giữa hai nguyên tử tại một thời điểm đã cho và r_0 là khoảng cách ở vị trí cân bằng.

1) Tính lực kéo về $f(r)$ tác động giữa hai nguyên tử.

2) Kí hiệu $x = (r - r_0)$ là độ lệch khỏi vị trí cân bằng và μ là khối lượng rút gọn của phân tử. Chứng tỏ rằng lực kéo về tỉ lệ với x khi x nhỏ ($\alpha x << 1$).

Khi đó tần số dao động của phân tử bằng bao nhiêu khi kéo nhẹ phân tử ra khỏi vị trí cân bằng của nó ?

• *Lời giải*

1) $f(r) = -\dfrac{d\mathscr{E}_P}{dr} = -2\alpha D(1 - e^{-\alpha(r-r_0)})e^{-\alpha(r-r_0)}$.

2) $f = -2\alpha^2 Dx$ và $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{\alpha}{2\pi}\sqrt{\dfrac{2D}{\mu}}$.

VẬN DỤNG VỐN KIẾN THỨC

5 Xác định một định luật về lực

Xét hai hạt M_1 và M_2 tương tác với nhau theo một định luật về lực $f(r)$. Xác định $f(r)$ để quỹ đạo tương đối của M_2 đối với M_1 là :

a) một đường tròn đi qua M_1 : $r = 2a\cos\theta$

b) một đường cônic : $r = \dfrac{p}{1 \pm \cos\theta}$.

• *Lời giải*

Ta biểu thị lực bằng công thức thứ hai của BINET (x. Bài tập có lời giải):

$$f = -\mu C^2 u^2 \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right), \text{ với } u = \frac{1}{r}.$$

a) $f(r) = \dfrac{k}{r^5}$; b) $f(r) = \dfrac{k}{r^2}$

6 Hệ hai khối lượng nối với nhau bằng một sợi dây

Người ta gắn chặt hai chất điểm M_1 và M_2 có cùng khối lượng m : điểm thứ nhất, M_1 vào điểm giữa một sợi dây không dãn có chiều dài l và điểm thứ hai M_2, vào một trong hai đầu của sợi dây đó. Toàn bộ quay không ma sát trong một mặt phẳng nằm ngang, với vận tốc góc ω xung quanh một điểm cố định O tạo bởi đầu dây kia.

1) Tính các lực căng T_1 và T_2 của hai đoạn dây.

2) Lúc $t = 0$, sợi dây bị gãy giữa O và M_1. Hãy mô tả chuyển động sau đó của hệ tạo bởi hai chất điểm.

3) Tính lực căng T' của dây nối M_1 và M_2 trong chuyển động mới này.

• *Lời giải*

1) $T_1 = \dfrac{3}{2}ml\omega^2$, và $T_2 = ml\omega^2$.

2) *Hệ có một chuyển động toàn bộ thẳng và đều với vận tốc* $\vec{v}_G = \dfrac{3}{2}l\omega\,\vec{e}_\theta(0)$, *trong đó* $\vec{e}_\theta(0)$ *là vectơ đơn vị trực giao với dây lúc* $t = 0$.

Trong hệ quy chiếu tâm tỉ cự, hai hạt có một chuyển động tròn xung quanh G, điểm giữa của M_1M_2 , *với cùng một vận tốc góc như trước khi dây đứt.*

3) $T' = \dfrac{1}{4}ml\omega^2$.

7* Một chuyển động với lực hướng tâm

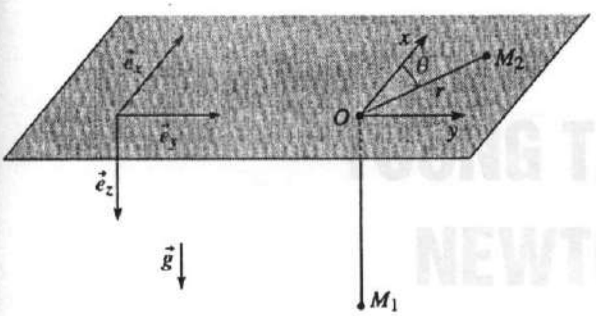
Hai chất điểm M_1 và M_2 có khối lượng m_1 và m_2 được nối với nhau bằng một sợi dây không dãn, dài l và có khối lượng không đáng kể.

Các chất điểm M_1 và M_2 buộc phải trượt không ma sát, điểm thứ nhất trên trục thẳng đứng $(O; \vec{e}_Z)$ hướng xuống dưới :

$$\vec{g} = g\vec{e}_z \text{ với } g > 0$$

(g là gia tốc trọng trường) và điểm thứ hai trên một mặt phẳng nằm ngang $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$, sợi dây nối hai chất điểm luôn không ma sát qua một cái lỗ chuẩn điểm nằm tại O.

Lúc $t = 0$, M_1 được buông ra không vận tốc ban đầu và M_2, ở A sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{r}_0$ có một vận tốc $\vec{v}_0$ trực giao xuyên tâm (tiếp tuyến).



1) Với giá trị v_c nào của v_0, điểm M_1 sẽ đứng yên ? Trong các điều kiện đó, chuyển động của M_2 là chuyển động gì ?

2) Tính thế năng hiệu dụng $\mathscr{E}_{Peff}(r)$ của hệ.

3) Biện luận về chuyển động của M_2 theo giá trị của chuẩn của vận tốc ban đầu v_0.

• *Lời giải*

1) $v_c = \sqrt{\dfrac{m_1 g r_0}{m_2}}$. *Điểm M_2 chuyển động tròn đều xung quanh O.*

2) *Trước hết, tính cơ năng của hệ :*

$$\mathscr{E}_M = \frac{m_1}{2}\dot{z}^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2) - mgz .$$

sau đó khử z và $\dot{\theta}$ nhờ $l = r + z$ và hằng số diện tích $C = r^2\dot{\theta} = r_0 v_0$:

$$\mathscr{E}_M = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{r}^2 + \mathscr{E}_{Peff}(r) \quad ,$$

với $\mathscr{E}_{Peff}(r) = \dfrac{m_2(r_0 v_0)^2}{2r^2} - m_1 g(l - r)$.

3) *Các điều kiện ban đầu cố định giá trị của cơ năng :*

$$\mathscr{E}_M = \frac{m_2}{2}v_0^2 - m_1 g z_0 .$$

Tích phân đầu của năng lượng khi đó là :

$$\frac{m_1 + m_2}{2}\dot{r}^2 + \frac{m_2}{2}\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - 1\right] + m_1 g(r - r_0),$$

Các giá trị giới hạn của r là các nghiệm của phương trình trên khi $\dot{r} = 0$.

Hạt M_2 có một quỹ đạo bao hàm giữa hai vòng tròn có tâm tại O và có bán kính r_0 và $r_l = r_0\left(\dfrac{v_0}{v_c}\right)^2\left(1 + \sqrt{1 + 8\left(\dfrac{v_c}{v_0}\right)^2}\right)$.

TƯƠNG TÁC NEWTON 6

Lịch sử

KEPLER (1571 - 1630), trong khoảng 1604 và 1618 đã phát biểu ba định luật thực nghiệm về chuyển động của các hành tinh. Ba định luật này là kết quả nghiên cứu một cách có hệ thống những quan sát do nhà thiên văn học người Đan mạch Tycho BRAHE (1546 - 1601) thu thập và những quan sát do chính ông thực hiện về chuyển động của hành tinh Mars (sao Hỏa) ;

- *Mỗi hành tinh vạch ra, theo chiều thuận, một elip mà Mặt trời là một trong các tiêu điểm (1605).*

- *Bán kính véctơ, đi từ tâm của Mặt trời tới tâm của mỗi hành tinh, trong những khoảng thời gian bằng nhau, đều quét những diện tích bằng nhau :* $\frac{dS}{dt} = cte$ *(1604).*

- *Các bình phương chu kì quay vòng thiên văn của các thiên thể tỉ lệ với lập phương của các trục lớn quỹ đạo của chúng :* $\frac{T^2}{a^3} = cte$ *(1618).*

Chính từ các định luật thực nghiệm này mà Newton đã xây dựng nên môn cơ học của mình và lí thuyết của ông về sự hấp dẫn vào năm 1687. Khái niệm lực hấp dẫn truyền đi tác dụng tức thời từ xa của mình mà không cần chỗ tựa vật chất đã gây ra nhiều nghi ngờ về phía một số nhà bác học đương thời với Ông. Hoàn toàn ý thức được khó khăn về mặt quan niệm này, ngay từ đầu, Newton đã có thể viết "vâng, đó là một điều rất bất hợp lí, nhưng hình như chưa có một người nào có một khả năng lập luận về mặt triết học nào đó, theo tôi, có thể tăng thêm được lòng tin vào đó". Thực nghiệm đã cho lí thuyết lòng tin mà những nhà phản bác nghi ngờ nó, nhưng vấn đề quan điểm do họ nêu ra, hẳn là, không phải không có mục đích.

MỤC TIÊU

- Định nghĩa bài toán KEPLER
- Đưa ra các tích phân đầu của chuyển động.
- Khảo sát các loại chuyển động KEPLER khác nhau.
- Xem xét một vài bài toán vệ tinh hóa.

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

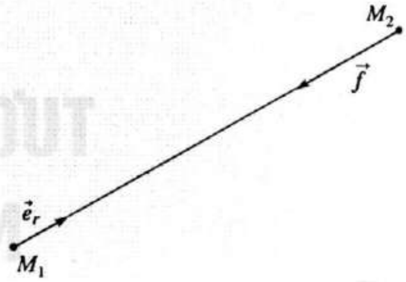
■ TOÁN

- Phương trình và tính chất của các đường cônic

■ VẬT LÍ

- Lực xuyên tâm
- Hệ hai chất điểm
- Hạt ảo và khối lượng rút gọn.

1 Tương tác hấp dẫn



Hình 1. *Trên điểm M_2 có lực tác dụng $\vec{f}$ thể hiện tương tác của nó với điểm nguồn M_1.*

1.1. Biểu thức của lực tương tác (nhắc lại)

Xét hai khối lượng điểm m_1 và m_2 nằm lần lượt tại M_1 và M_2 (hình 1). *Lực hấp dẫn* do m_1 tác dụng lên m_2, đặt ở khoảng cách r, bằng :

$$\vec{f} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e}_r = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r$$

Lực hấp dẫn đóng vai trò không đáng kể ở quy mô nguyên tử, ở đó các điện tích có thể được xét một cách riêng rẽ. Ngược lại, tình huống bị đảo ngược ở quy mô vĩ mô, tại đó vật chất biểu hiện tính trung hòa về điện. Ở bên ngoài vật chất, các tác dụng tĩnh điện, hút và đẩy, về toàn bộ bù trừ lẫn nhau, trong khi đó các tác dụng hấp dẫn lại cộng vào nhau.

Trong phần tiếp theo của chương này, ta chỉ quan tâm đến các tương tác hấp dẫn giữa những hệ lớn như các hành tinh, Mặt trời, các sao chổi, v.v...

1.2.Thế năng

Một lực dạng r^{-2} phát sinh từ thế năng :

$$\mathscr{E}_p(r) = -\frac{k}{r}$$

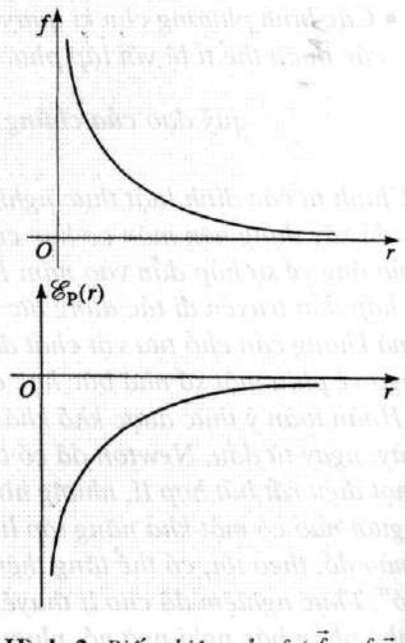
theo quy ước, bằng không, khi hai hạt cách xa nhau vô cùng.

2 Bài toán KEPLER

2.1. Chuyển động KEPLER của hạt ảo

Trong hệ quy chiếu $\mathscr{R}$ *Galilée*, xét một hệ cô lập gồm hai hạt M_1 và M_2 có khối lượng lần lượt bằng m_1 và m_2. Chuyển động của một hệ như thế được phân tích thành :

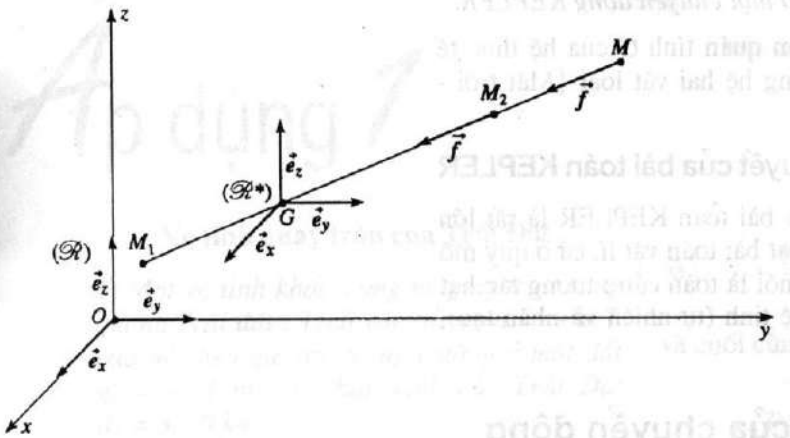
- chuyển động thẳng đều của tâm quán tính G trong $\mathscr{R}$;
- chuyển động của hai hạt trong hệ quy chiếu tâm tỉ cự $\mathscr{R}^*$ cũng là hệ Galilée (*hình 3*).



Hình 2. *Biến thiên của f ($\vec{f} = f.\vec{e}_r$) và $\mathscr{E}_p(r)$ theo r.*

Sự nghiên cứu chuyển động của hệ được thực hiện qua hạt ảo M có khối lượng rút gọn $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, đặt dưới tác dụng của lực tương tác xuyên tâm $\vec{f} = \dfrac{k}{r^2}\vec{e}_r$, có tâm lực cố định G.

Một chuyển động được gọi là chuyển động KEPLER khi nó được thực hiện dưới tác dụng của một lực xuyên tâm biến thiên theo r^{-2} với một tâm lực cố định. Chuyển động của hạt ảo M trong $\mathscr{R}^*$ là một chuyển động KEPLER.



Hình 3. *Chuyển động của hạt ảo M trong $\mathcal{R}^*$ xác định chuyển động tương đối của M_2 đối với M_1.*

2.2. Chuyển động của các hạt tương tác với nhau

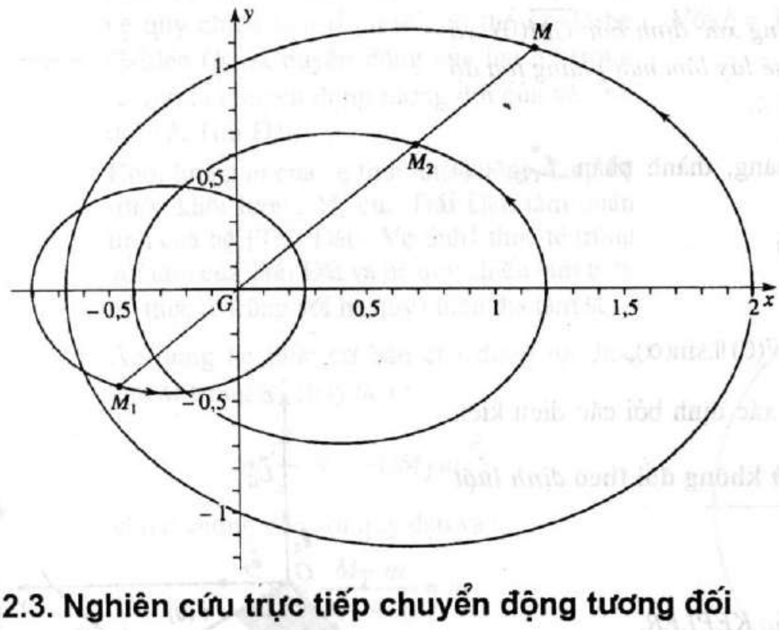
Một khi đã biết chuyển động của hạt ảo M trong $\mathcal{R}^*$ (hình 4) ta có thể suy ra :

• *Chuyển động tương đối của M_2 đối với M_1*, vì

$\overrightarrow{M_1M_2}\,(t) = \overrightarrow{GM}\,(t)$;

• *Chuyển động của hai hạt M_1 và M_2 trong $\mathcal{R}^*$*, vì :

$$\overrightarrow{GM_1}\,(t) = \frac{-m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{GM}\,(t) \text{ và } \overrightarrow{GM_2}\,(t) = \frac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{GM}\,(t).$$



Hình 4. *Các quỹ đạo của M_1 và M_2 trong $\mathcal{R}^*$ là vị tự của quỹ đạo của hạt ảo M.*

2.3. Nghiên cứu trực tiếp chuyển động tương đối

Chuyển động tương đối của M_2 đối với M_1 có thể được nghiên cứu trực tiếp trong *hệ quy chiếu của chuyển động tương đối* $\mathcal{R}_1$ gắn với hệ tọa độ (M_1, $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$). Mặc dầu hệ quy chiếu này không phải là hệ Galilée, ta có thể coi nó, về mặt hình thức là như thế với điều kiện phải thực hiện trên M_2 một sự *hiệu chỉnh về khối lượng rút gọn*, có nghĩa là phải gán cho nó *khối lượng quán tính* $\mu = \dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$.

Chuyển động của M_2 trong $\mathcal{R}_1$ cũng là một chuyển động KEPLER.

Nếu $m_1 >> m_2$, khi đó $\mu \approx m_2$ và tâm quán tính G của hệ thực tế trùng với M_1. Đó là trường hợp những hệ hai vật loại {Mặt trời - hành tinh} hay {hành tinh - vệ tinh}.

2.4. Tầm quan trọng về mặt lí thuyết của bài toán KEPLER

Tầm quan trọng về mặt lí thuyết của bài toán KEPLER là rất lớn lao, bởi lẽ nó liên quan đến cả một loạt bài toán vật lí, cả ở quy mô vi mô lẫn quy mô vĩ mô, nếu không nói là toàn cầu : tương tác hạt tới - hạt bia, tương tác hành tinh - vệ tinh (tự nhiên và nhân tạo), chuyển động của các sao đôi v.v...

3 Các tích phân đầu của chuyển động

Dưới đây, ta nhắc lại hai định luật bảo toàn có lợi cho sự giải một bài toán KEPLER .

3.1. Tích phân đầu của mômen động lượng

Lực là *xuyên tâm*, nên mômen động lượng của hạt ảo, tại G trong $\mathcal{R}^*$, là một bất biến của chuyển động :

$$\vec{L}_G^* = \overrightarrow{GM}(t) \wedge \mu\, \vec{v}(t) = \overrightarrow{GM}(0) \wedge \mu\, \vec{v}(0) .$$

Chuyển động thực hiện trong mặt phẳng xác định bởi $\overrightarrow{GM}(0)$ và $\vec{v}(0)$ mà trong toàn bộ chương này ta sẽ lấy làm mặt phẳng tọa độ $(G\,;\, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ (hình 5).

Nếu $\overrightarrow{GM}(0)$ và $\vec{v}(0)$ không thẳng hàng, thành phần L_{Gz}^* của mômen động lượng là :

$$L_{Gz}^* = \mu r^2 \dot{\theta}$$

Từ đó, suy ra *tích phân đầu diện tích* :

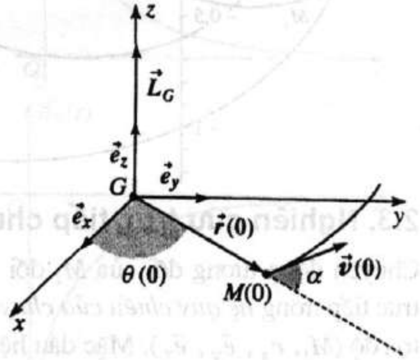
$$C = \frac{L_{Gz}}{\mu} = r^2\dot{\theta} = r(0).\|\vec{v}(0)\|.\sin(\alpha),$$

trong đó C là *hằng số diện tích*, được xác định bởi các điều kiện ban đầu.

Chuyển động có một *vận tốc diện tích* không đổi theo *định luật diện tích* :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2} .$$

Kết quả này tạo nên *định luật thứ hai của KEPLER.*



Hình 5. *Hạt ảo M có quỹ đạo nằm trong mặt phẳng xác định bởi $\vec{r}(0)$ và $\vec{v}(0)$.*

3.2. Tích phân đầu năng lượng

Lực tác dụng duy nhất phát sinh từ một thế năng, nên cơ năng của hạt là một bất biến thứ hai của chuyển động :

$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{k}{r} = \frac{1}{2}\mu v^2(0) - \frac{k}{r(0)} .$$

Áp dụng 1

Vệ tinh quay tròn của Trái Đất

1) *Một vệ tinh khối lượng m quay tròn xung quanh Trái đất ; Tính vận tốc v_c và chu kì T của nó theo gia tốc trọng trường ở mặt đất $g_o = 9,81\ ms^{-2}$ và bán kính của Trái Đất $R_T = 6370\ km$.*

2) *Trong trường hợp này, hãy suy ra định luật thứ ba của KEPLER :*

$$\frac{T^2}{r^3} = K,$$

r là bán kính quỹ đạo.

Tính hằng số K và biện luận kết quả thu được.

Tính v_c và T đối với một vệ tinh ở độ cao h = 500 km.

Đối với loại bài toán này, ta nên đứng trong hệ quy chiếu tâm tỉ cự $\mathcal{R}^*$, có thể coi là hệ Galilée (*h.6*).Chuyển động của hạt ảo trong $\mathcal{R}^*$ mô tả chuyển động tương đối của vệ tinh đối với Trái Đất.

Khối lượng m của vệ tinh nhỏ không đáng kể trước khối lượng M_T của Trái Đất, tâm quán tính của hệ {Trái Đất - Vệ tinh} thực tế trùng với tâm của Trái Đất và hệ quy chiếu tâm tỉ cự $\mathcal{R}^*$ thực tế trùng với hệ quy chiếu địa tâm $\mathcal{R}_o$.

Áp dụng hệ thức cơ bản của động lực học cho M trong $\mathcal{R}^*$ (hay $\mathcal{R}_o$) :

$$m\frac{v_c^2}{r}.\vec{N} = -GM_T m\frac{\vec{e}_r}{r^2},$$

vì lực vuông góc với quỹ đạo và :

$$\mu = \frac{M_T.m}{M_T + m} \approx m.$$

Từ định nghĩa của g_o :

$$mg_o = \frac{GM_T m}{R_T^2},$$

ta suy ra : $GM_T = g_o R_T^2$,

và : $$v_c = \sqrt{\frac{g_o R_T^2}{R_T + h}}$$

và cuối cùng, chu kì quay của vệ tinh :

$$T = \frac{2\pi r}{v_c} = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{g_o R_T^2}}.$$

Hệ thức trên được viết dưới dạng :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{g_o R_T^2} = \frac{4\pi^2}{GM_T} = K,$$

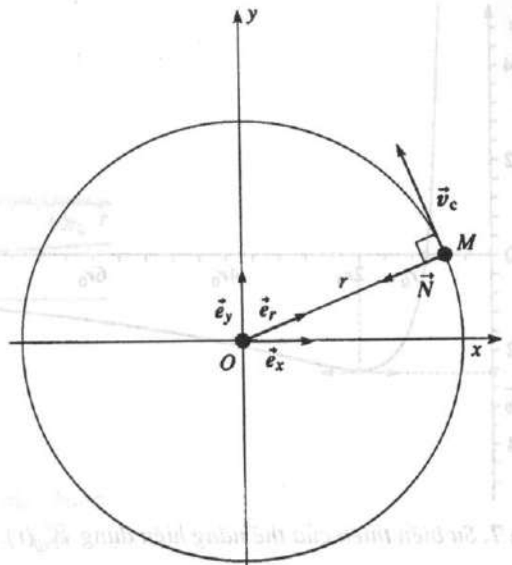
là định luật thứ ba của KEPLER, được thiết lập trong trường hợp đặc biệt của một quỹ đạo tròn.

Hằng số K chỉ phụ thuộc khối lượng M_T của Trái đất.

Với h = 500km, ta được :

$$v_c = 7,61\text{kms}^{-1}$$

và $T = 5,67.10^3\text{s} \approx 1$ giờ 28 phút.



Hình 6. *Vệ tinh quay tròn M trên quỹ đạo địa tâm.*

▸ **Để luyện tập : BT 1 và 2.**

4 Thế năng hiệu dụng

4.1. Định nghĩa

Ta diễn tả tích phân đầu năng lượng theo các tọa độ cực :

$$\mathscr{E}_M = \frac{1}{2}\mu\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right] - \frac{k}{r}.$$

Dùng bất biến của mômen động lượng, ta khử $\dot{\theta} = \frac{L_z}{\mu r^2}$ trong biểu thức trên:

$$\mathscr{E}_M = \frac{1}{2}\mu\,\dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}$$

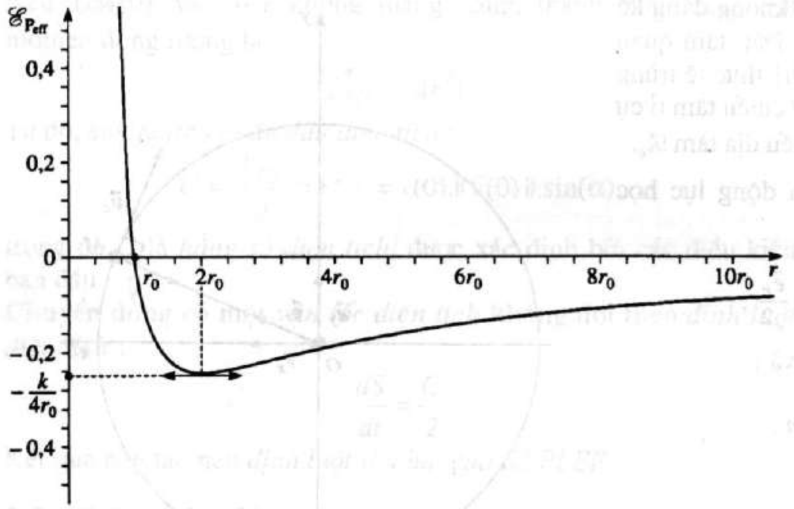
ta được biểu thức trong đó cơ năng chỉ là hàm số của r. Nó được phân tích thành tổng của hai số hạng :

- *động năng xuyên tâm :* $\mathscr{E}_{K_r} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2$;
- *Thế năng hiệu dụng :* $\mathscr{E}_{\text{Peff}} = \frac{L_z^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}$.

4.2. Biện luận

Thế năng hiệu dụng (hình 7) triệt tiêu ở vô cùng và ở $r_o = \frac{L_z^2}{2\mu k}$; từ đó ta có biểu thức thuận tiện hơn :

$$\mathscr{E}_{\text{Peff}} = k\left(\frac{r_o}{r^2} - \frac{1}{r}\right)$$



Hình 7. *Sự biến thiên của thế năng hiệu dụng $\mathscr{E}_{\text{Peff}}(r)$.*

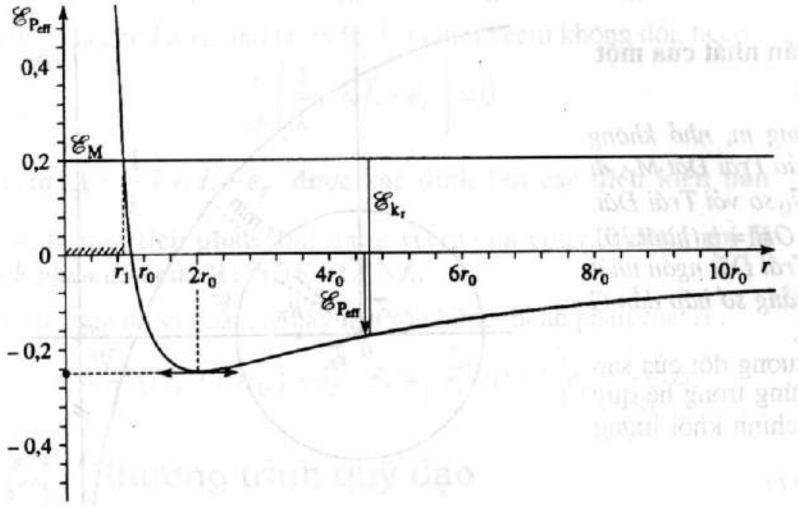
$\mathscr{E}_{\text{Peff}}(r)$ đi qua một cực tiểu khi $r = 2r_o$ và giá trị cực tiểu của nó là một số âm :

$$\mathscr{E}_{\text{Peff}}(2r_o) = -\frac{k}{4r_o} < 0.$$

Hai loại trạng thái có thể thực hiện được đối với hạt ảo M :

• $\mathscr{E}_M \geq 0$:

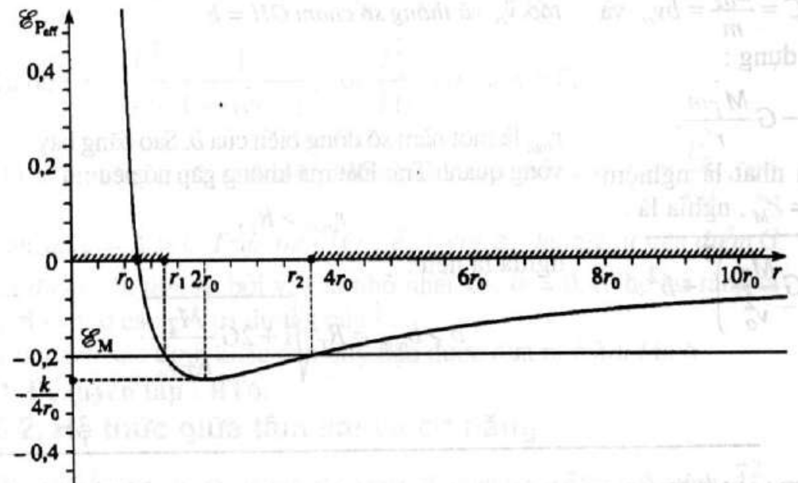
sau khi có thể tiến gần tới khoảng cách cực tiểu r_1, hạt, sau đó, lại đi ra xa vô cùng. Hạt ở trong *trạng thái khuếch tán* (hình 8).



Hình 8. *Hạt ảo có năng lượng $\mathscr{E}_M \geq 0$ ở trong trạng thái khuếch tán.*

• $-\dfrac{k}{4r_o} \leq \mathscr{E}_M < 0$:

hạt có một quỹ đạo nằm trong khoảng cách tiếp cận nhỏ nhất r_1 hay *khoảng cách cận tâm* và r_2 là *khoảng cách viễn tâm* (*hình* 9).



Hình 9. *Hạt ảo có năng lượng* $-\dfrac{k}{4r_o} \leq \mathscr{E}_M < 0$ *ở trong trạng thái ràng buộc*

Chú ý :

Nếu $\mathscr{E}_M = -\dfrac{k}{4r_o}$ *, khi đó* $r = 2r_o$ *; hạt luôn luôn nằm ở cùng khoảng cách tới tâm của lực : quỹ đạo của hạt là một đường tròn bán kính* $r = 2r_o$.

Áp dụng 2

Khoảng cách tiếp cận ngắn nhất của một sao băng

Một sao băng có khối lượng m, nhỏ không đáng kể so với khối lượng của Trái Đất M_T, đi từ vô cùng tới với vận tốc $\vec{v}_0$ so với Trái Đất. Thông số chạm của nó bằng OH = b (hình 10). Tính khoảng cách tiếp cận Trái Đất ngắn nhất r_{mm} của nó theo v_o, b, M_T, hằng số hấp dẫn G và bán kính R_T của Trái Đất .

Để khảo sát chuyển động tương đối của sao băng đối với Trái Đất, ta đứng trong hệ quy chiếu địa tâm $\mathcal{R}_0$. Sự hiệu chỉnh khối lượng rút gọn cho : $\mu = \dfrac{M_T m}{M_T + m} \approx m.$

Trong $\mathcal{R}_0$, cơ năng của sao băng là :

$$\mathscr{E}_M = \frac{1}{2} m v_o^2 .$$

Chú ý rằng mômen động lượng $\vec{L}_O$ được bảo toàn khi cho $m\vec{v}_o$ trượt trên giá thẳng D. Do đó :

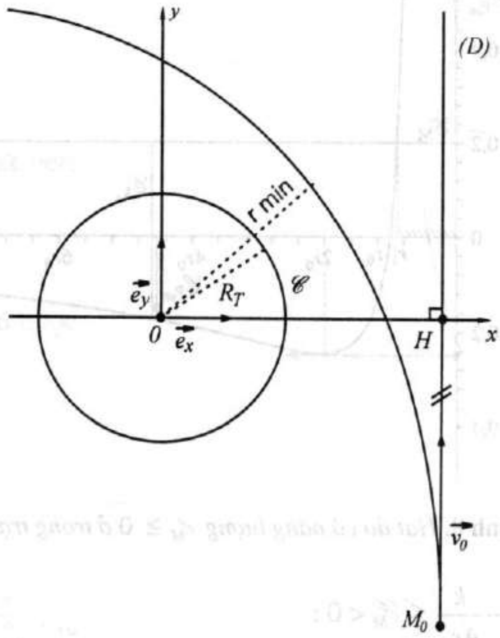
$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OH} \wedge m\vec{v}_o = mbv_o\vec{e}_z,$$

Suy ra hằng số diện tích : $C = \dfrac{L_{oz}}{m} = bv_o$ và biểu thức của thế năng hiệu dụng :

$$\mathscr{E}_{\text{Peff}}(r) = \frac{m}{2}\frac{(bv_o)^2}{r^2} - G\frac{M_T m}{r}.$$

Khoảng cách tiếp cận ngắn nhất là nghiệm của phương trình : $\mathscr{E}_{\text{Peff}}(r) = \mathscr{E}_M$, nghĩa là :

$$r_{\min} = -G\frac{M_T}{v_o^2} + \sqrt{\left(G\frac{M_T}{v_o^2}\right)^2 + b^2}.$$



Hình 10. *Sao băng đi tới từ M_o ở vô cùng với vận tốc $\vec{v}_o$ và thông số chạm OH = b.*

$r_{\min}$ là một hàm số đồng biến của b. Sao băng bay vòng quanh Trái Đất mà không gặp nó nếu :

$$r_{\min} > R_T,$$

nghĩa là nếu :

$$b > b_{\min} = R_T\sqrt{1 + 2G\frac{M_T}{R_T v_o^2}}.$$

5 Tích phân đầu của RUNGE - LENZ

Trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}^*$ Galileé, hệ thức cơ bản của động lực học áp dụng cho hạt ảo viết :

$$\mu\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r .$$

Đối với sự nghiên cứu này, ta hãy giới hạn ở những tương tác hấp dẫn : $k > 0$

Nhân vectơ *mômen động lượng của hạt ảo đối với G* trong $\mathcal{R}^*$ với $\vec{L} = \mu r^2\dot{\theta}\vec{e}_z$, ta có :

$$\mu\frac{d\vec{v}}{dt}\wedge\vec{L} = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r\wedge\mu r^2\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_z = k\mu\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta = k\mu\frac{d\vec{e}_r}{dt}\ ;$$

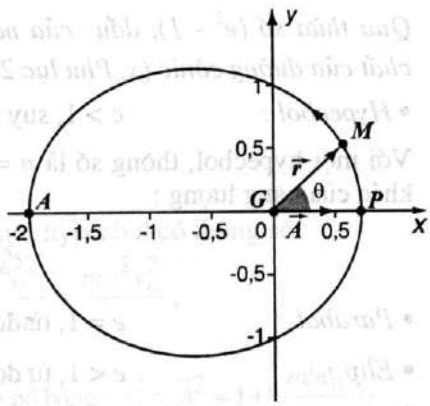
từ đó chia cho $k\mu$ và nhớ lại rằng $\vec{L}$ là một vectơ không đổi, ta có :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{k}\vec{v}\wedge\vec{L}-\vec{e}_r\right)=\vec{0}.$$

Vectơ $\vec{A} = \frac{1}{k}\vec{v}\wedge\vec{L}-\vec{e}_r$ được xác định bởi các điều kiện ban đầu, là một tích phân đầu dạng vectơ của chuyển động gọi là *tích phân đầu* của RUNGE - LENZ.

Để sử dụng nó sau này, ta hãy nêu rõ những thành phần của $\vec{A}$.

$$\vec{A} = \frac{L_z}{k}(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)\wedge\vec{e}_z - \vec{e}_r = \left(\frac{L_z}{k}r\dot{\theta}-1\right)\vec{e}_r - \frac{L_z}{k}\dot{r}\vec{e}_\theta.$$



Hình 11. *Vectơ $\vec{A}$ nằm trên trục tiêu và hướng từ tâm lực G về cận tâm P của quỹ đạo.*

6 Phương trình quỹ đạo

6.1. Bản chất của những quỹ đạo

Trong $\mathcal{R}^*$, hướng của vectơ $\vec{A}$ là một hướng đáng chú ý. Chọn trục cực $(G,\vec{e}_x)$ thẳng hàng và cùng chiều với $\vec{A}$ (*hình* 11).

Nhân vô hướng $\vec{A}$ với $r\vec{e}_r$. Ta thu được :

$$\vec{A}.\vec{r} = A.r\cos\theta = \frac{L_z}{k}r^2\dot{\theta} - r = \frac{L_zL_z}{k\mu} - r,$$

Từ đó : $r = \frac{L_z^2}{k\mu}.\frac{1}{1+A\cos\theta}$, với $\frac{L_z^2}{k\mu} > 0$ và $A > 0$.

Đó là phương trình của một đường *cônic có thông số* $p = \frac{L_z^2}{k\mu}$, *có tâm sai* $e = A > 0$. *Trục tiêu* $(G\ ;\vec{e}_x)$ *với* $\vec{e}_x$ *hướng từ tiêu điểm G tới điểm cận tâm A,* bởi vì r là nhỏ nhất khi $\theta = 0$. (Nhớ lại rằng ta giới hạn ở các giá trị dương của k).

Một cách xác định khác của quỹ đạo được đưa ra ở *bài tập 6*.

▸ **Để luyện tập : BT6.**

6.2. Hệ thức giữa tâm sai và cơ năng

Bằng cách sử dụng các thành phần của $\vec{A}$ thiết lập ở §5, ta hãy tính $\vec{A}^2$:

$$\vec{A}^2 = \left(\frac{L_z}{k}r\dot{\theta}-1\right)^2 + \left(\frac{L_z}{k}\dot{r}\right)^2 = \frac{L_z^2}{k^2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{2L_z}{k}r\dot{\theta}+1$$

Từ đó : $\vec{A}^2 - 1 = \frac{L_z^2}{k^2}v^2 - \frac{2L_z}{k}\frac{L_z}{\mu r} = \frac{2L_z^2}{\mu k^2}\left(\frac{\mu}{2}v^2 - \frac{k}{r}\right) = \frac{2L_z^2}{\mu k^2}\mathcal{E}_M,$

cuối cùng, vì $A^2 = e^2$ nên : $\mathcal{E}_M = \frac{k}{2p}(e^2-1)$.

Qua thừa số $(e^2 - 1)$, dấu của năng lượng $\mathscr{E}_M$ được gắn với bản chất của đường cônic (x. Phụ lục 2).

- *Hypecbol :* $e > 1$, suy ra $\mathscr{E}_M > 0$.

Với một hypecbol, thông số là $p = a(e^2 - 1)$, suy ra một biểu thức khác của năng lượng :

$$\mathscr{E}_M = \frac{k}{2a}.$$

- *Parabol :* $e = 1$, từ đó $\mathscr{E}_M = 0$.
- *Elip :* $e < 1$, từ đó $\mathscr{E}_M < 0$.

Thông số của một elip là $p = a(1 - e^2)$, vậy :

$$\mathscr{E}_M = -\frac{k}{2a}.$$

- *Đường tròn :* $e = 0$, từ đó $\mathscr{E}_M < 0$

Với một vòng tròn $p = r_o$ - bán kính của vòng tròn, suy ra :

$$\mathscr{E}_M = -\frac{k}{2r_o}.$$

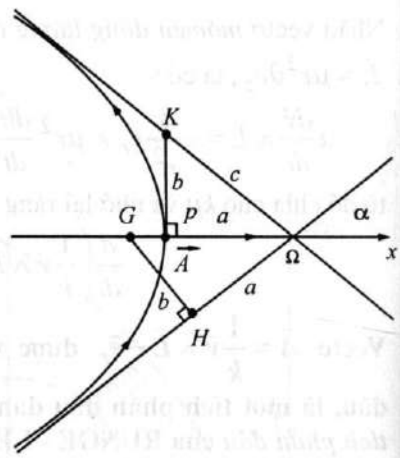
Hãy ghi nhớ là *cơ năng của những đường cônic có tâm* (hypecbol, elip, vòng tròn) *được biểu thị một cách đơn giản theo chiều dài 2a của trục lớn.*

Ta hãy khảo sát chi tiết hơn những chuyển động khác nhau này.

Một hạt chịu tác dụng của một lực hấp dẫn vạch ra một đường cong (cônic) có phương trình :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} (p > 0).$$

- Nếu $e = 0$, quỹ đạo là tròn ($\mathscr{E}_M = 0$).
- Nếu $0 < e < 1$, quỹ đạo là elip và $\mathscr{E}_M < 0$.
- Nếu $e = 1$, quỹ đạo là parabol với $\mathscr{E}_M = 0$.
- Nếu $e > 1$, quỹ là hypecbol với $\mathscr{E}_M > 0$.



Hình 12. *Trong một trường lực hút, quỹ đạo hypecbol bao lấy tâm lực G, là tiêu điểm của hypecbol. Các tam giác ΩPK và ΩHG bằng nhau.*

6.3. Chuyển động hypecbol

Trong trường hợp này, $\mathscr{E}_M > 0$ và vì lực hấp dẫn là lực hút, quỹ đạo của hạt là một nhánh hypecbol bao lấy tâm lực G (h.12). Phương trình của nó là :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \ (e > 1 \text{ và } \pi - \alpha < \theta < \pi + \alpha),$$

trong đó $\pm\,\alpha$ là góc nghiêng của các tiệm cận với trục tiêu :

$$\cos\alpha = \frac{1}{e} = \frac{a}{c}$$

Khoảng cách tiếp cận ngắn nhất bằng : $r_{\min} = \dfrac{p}{1+e} = c - a = a(e - 1)$

Ngoài ra, trong các *áp dụng* và *bài tập*, ta còn có thể tuỳ ý sử dụng sự bằng nhau của các tam giác ΩPK và ΩHG :

$$G\Omega^2 = c^2 = a^2 + b^2.$$

Áp dụng 3

Sự lệch đường của một sao băng

Một sao băng có khối lượng m, nhỏ không đáng kể so với khối lượng M_T của Trái đất, đi tới từ vô cùng với vận tốc $\vec{v}_o$ đối với Trái đất. Thông số chạm của nó bằng OH = b (hình 13). Hãy tính :

a) Bất biến $\vec{A}$ của RUNGE - LENZ của chuyển động ;

b) Khoảng cách tiếp cận nhỏ nhất r_{min} cũng như giá trị nhỏ nhất b_{min} để sao băng đi vòng quanh Trái đất mà không chạm vào nó ;

c) Độ lệch D của sao băng trong trường hấp dẫn của Trái đất, với giả thiết $b > b_{min}$.

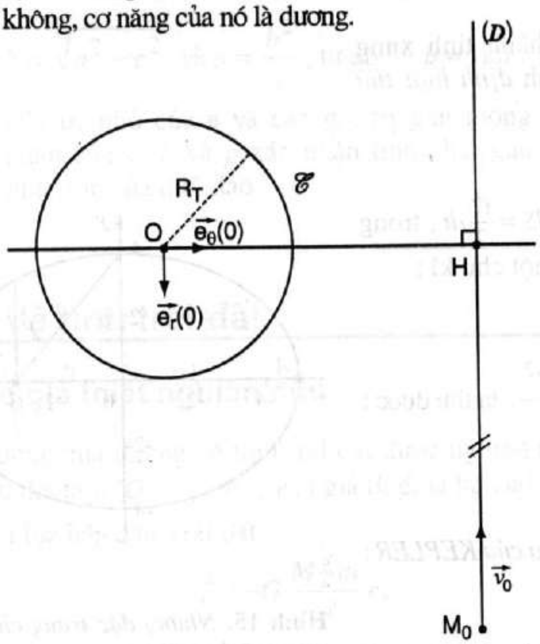
a) Theo giả thiết, $m << M_T$ vậy $\mu \approx m$ và hệ quy chiếu tâm tỉ cự thực tế trùng với hệ quy chiếu địa tâm $\mathcal{R}_0$. Ta hãy tính mômen động lượng của sao băng đối với Trái đất trong $\mathcal{R}_0$:

$$\vec{L} = \overrightarrow{OH} \wedge (M\vec{v}_0) = mbv_o^2\vec{e}_z ,$$

từ đó, nếu đặt $k = GM_Tm$, véctơ RUNGE - LENZ là :

$$\vec{A} = \frac{1}{k}\vec{v}_o \wedge \vec{L} - \vec{e}_r(0) = \frac{mbv_o^2}{k}\vec{e}_\theta(0) - \vec{e}_r(0) .$$

b) Sao băng đi từ vô cùng tới với vận tốc khác không, cơ năng của nó là dương.



Hình 13. *Sao băng đi từ vô cùng tới với vận tốc $\vec{v}_o$ và thông số chạm OH = b.*

Quỹ đạo là một hypecbol có thông số :

$$p = \frac{L^2}{mk} = \frac{mb^2v_o^2}{k},$$

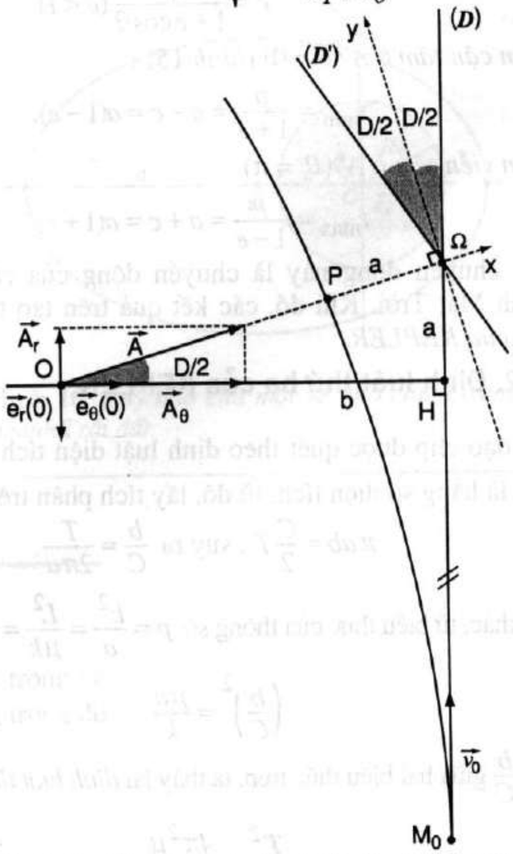
và tâm sai của nó bằng : $e^2 = \vec{A}^2 = 1 + \left(\frac{mbv_o^2}{k}\right)^2$

Khoảng cách tiếp cận ngắn nhất là :

$$r_{min} = \frac{p}{1+e} = p\frac{e-1}{e^2-1} = -\frac{k}{mv_o^2} + \sqrt{\left(\frac{k}{mv_o^2}\right)^2 + b^2}.$$

r_{min} là một hàm số đồng biến của b. Sao băng đi vòng quanh Trái đất không chạm vào nó nếu $r_{min} > R_T$, hay $b > b_{min}$ sao cho :

$$b_{min} = R_T\sqrt{1 + 2\frac{k}{R_T mv_o^2}}$$



Hình 14. *Các tiệm cận D và D' cắt nhau tại tâm Ω của hypecbol. Trục (Ωy) là phân giác của góc tạo bởi các tiệm cận.*

c) Ta thấy ngay trên hình 14 là :

$$\tan\left(\frac{D}{2}\right) = \frac{|A_r|}{A_\theta} = \frac{k}{mbv_o^2}.$$

<u>*Chú ý :*</u>
Sự bảo toàn năng lượng cho giá trị của bán trục lớn $\Omega P = a$:

$$\mathscr{E}_M = \frac{m}{2}v_o^2 = \frac{k}{2a}, \text{ từ đó : } a = \frac{k}{mv_o^2}.$$

Sử dụng tam giác ΩHO, ta có :

$$\tan\left(\frac{D}{2}\right) = \frac{a}{b} = \frac{k}{mbv_o^2}.$$

6.4. Chuyển động parabol

Trong trường hợp $e = 1$ và $\mathscr{E}_M = 0$. Phương trình tổng quát của các quỹ đạo, được thiết lập ở §6, là :

$$r = \frac{p}{1+\cos\theta}(-\pi < \theta < \pi).$$

Khoảng cách tiếp cận nhỏ nhất, vẫn tương ứng với $\theta = 0$, là : $r_{\min} = \dfrac{p}{2}$.

▸ **Để luyện tập : BT 3.**

6.5. Chuyển động elip

6.5.1. Định luật thứ nhất của KEPLER

Trường hợp này tương ứng với $\mathscr{E}_M < 0$. Phương trình tổng quát của các quỹ đạo, thu được ở §6, là :

$$r = \frac{p}{1+e\cos\theta}(e<1).$$

Điểm cận tâm ở A ($\theta = 0$) (hình 15) :

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e} = a - c = a(1-e).$$

Điểm viễn tâm ở A' ($\theta = \pi$)

$$r_{\max} = \frac{p}{1-e} = a + c = a(1+e).$$

Loại chuyển động này là chuyển động của các hành tinh xung quanh Mặt Trời. Khi đó, các kết quả trên tạo thành *định luật thứ nhất của KEPLER.*

6.5.2. Định luật thứ ba của KEPLER.

Quỹ đạo elip được quét theo định luật diện tích : $dS = \dfrac{C}{2}dt$, trong đó C là hằng số diện tích, từ đó, lấy tích phân trên một chu kì :

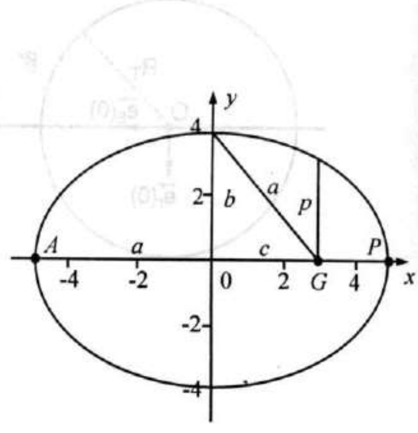
$$\pi ab = \frac{C}{2}T, \text{ suy ra } \frac{b}{C} = \frac{T}{2\pi a}.$$

Mặt khác, từ biểu thức của thông số $p = \dfrac{b^2}{a} = \dfrac{L^2}{\mu k} = \dfrac{\mu C^2}{k}$, ta thu được :

$$\left(\frac{b}{C}\right)^2 = \frac{\mu a}{k}.$$

Khử $\dfrac{b}{C}$ giữa hai biểu thức trên, ta thấy lại *định luật thứ ba của KEPLER* :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2\mu}{k}$$



Hình 15. *Những đặc trưng chính của một quỹ đạo elip.*

Áp dụng 4

Những đặc trưng của một vệ tinh eliptic

Vệ tinh nhân tạo đầu tiên có điểm viễn địa ở độ cao $h_A = 327$km và điểm cận địa ở $h_P = 180$km.

1) *Hãy xác định các đặc trưng hình học (a, b, c, e và p) của quỹ đạo của nó, biết rằng bán kính Trái đất bằng $R_T = 6370$ km.*

2) *Gia tốc trọng trường trên mặt đất bằng $g_0 = 9{,}81\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, từ đó hãy suy ra chu kì quay T của nó.*

1) Sự khảo sát chuyển động tương đối của vệ tinh đối với Trái đất được tiến hành trong hệ quy chiếu địa tâm $\mathcal{R}_o(O\,;\,\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Từ các hệ thức đương nhiên (*hình* 16)

$r_A = R_T + h_A = a + c$ và $r_P = R_T + h_P = a - c$,

ta rút ra ngay :

$$a = \frac{1}{2}(r_A + r_P) = R_T + \frac{h_A + h_P}{2} = 6623\text{km},$$

$$c = \frac{1}{2}(r_A - r_P) = \frac{h_A - h_P}{2} = 73{,}5 \text{ km},$$

Suy ra tâm sai : $e = \dfrac{c}{a} = 0{,}011$.

$b = \sqrt{a^2 - c^2}$ và $p = \dfrac{b^2}{a}$, từ đó $b - p = 1$km.

Giá trị nhỏ của e và các giá trị gần giống nhau của *a*, *b* và *p* xác nhận tính chất gần như tròn của quỹ đạo.

2) Dùng định luật thứ ba của KEPLER :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2\mu}{k},$$

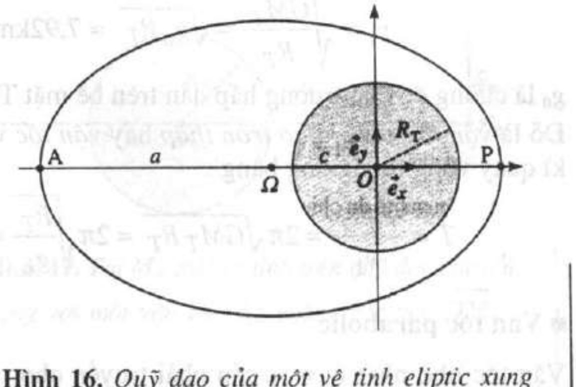
Với $k = GM_T m$ và $\mu = \dfrac{M_T.m}{M_T + m} \approx m$ là khối lượng của vệ tinh.

Từ đó : $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_T} = \dfrac{4\pi^2}{g_o R_T^2}$

Vì : $mg_o = \dfrac{GM_T m}{R_T^2}$;

Và chu kì : $T = \dfrac{2\pi}{R_T}\sqrt{\dfrac{a^3}{g_o}} = 5370$s,

tức là 1h 29ph.



Hình 16. *Quỹ đạo của một vệ tinh eliptic xung quanh Trái đất.*

7 Vệ tinh trái đất

7.1. Các giả thiết nghiên cứu

Chuyển động của những vệ tinh trái đất được nghiên cứu trong hệ quy chiếu địa tâm $(O\,;\,\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ giả thiết là hệ Galilée, trong đó chỉ xét tới lực hấp dẫn Trái đất :

$$\vec{f} = -G\frac{M_T m}{r^2}\vec{e}_r$$

M_T là khối lượng của Trái đất và $m \ll M_T$ khối lượng của vệ tinh.

Liên quan đến lực tác dụng vào vệ tinh, ta cần nhớ rằng :

• Biểu thức trên của lực hấp dẫn chỉ có giá trị nếu gán cho Trái đất một sự đối xứng cầu mà nó không có đúng như vậy, bởi lẽ Trái đất dẹt ở hai cực.

• Vệ tinh phải ở một độ cao h đủ lớn để không bị bầu khí quyển Trái đất hãm lại ($h > 200$ km), tuy nhiên lại phải không quá xa Trái đất để có lực thủy triều do mặt Trăng và mặt Trời vẫn không đáng kể ($r < 10R_T$).

7.2. Các vận tốc vũ trụ

Xét một vệ tinh được bắn đi từ M_0 với vận tốc $\vec{v}_0$ vuông góc với $\overrightarrow{OM_o}$.

■ Vận tốc quay tròn

Ta hãy tính vận tốc $v_0 = v_c$ cần phải truyền cho vệ tinh để quỹ đạo của nó là một đường tròn bán kính r_0. Muốn vậy, cơ năng của nó phải bằng :

$$\mathscr{E}_M = \frac{1}{2}mv_c^2 - \frac{k}{r_o} = -\frac{k}{2r_o},$$

Suy ra : $v_c = \sqrt{\dfrac{k}{mr_o}} = \sqrt{\dfrac{GM_T}{r_o}}$.

Giá trị cực đại của v_c thu được với $r_0 = R_T$, nghĩa là :

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} = \sqrt{g_o R_T} \approx 7{,}92\text{km.s}^{-1},$$

g_0 là cường độ của trường hấp dẫn trên bề mặt Trái đất.

Đó là *vận tốc ở quỹ đạo tròn thấp* hay *vận tốc vũ trụ cấp một*. Chu kì quay vòng tương ứng bằng :

$$T = \frac{2\pi R_T}{v_1} = 2\pi\sqrt{GM_T R_T} = 2\pi\sqrt{\frac{R_T}{g_o}} \approx 84 \text{ phút}.$$

■ Vận tốc parabolic

Vận tốc nhỏ nhất $v_0 = v_P$ cần phải truyền cho vệ tinh tại M_0 để nó thoát ra khỏi trường hấp dẫn Trái đất tương ứng với một cơ năng $\mathscr{E}_M$ bằng không. Thực vậy, ở xa vô cùng $\mathscr{E}_p = 0$ và giá trị nhỏ nhất của động năng bằng $\mathscr{E}_K = 0$.

Suy ra giá trị của *vận tốc parabolic* v_p, còn gọi là *vận tốc giải phóng* :

$$\mathscr{E}_M = \frac{m}{2}v_p^2 + \frac{k}{r_o} = 0.$$

từ đó : $v_P = \sqrt{\dfrac{-2k}{r_o}} = \sqrt{\dfrac{2GM_T}{r_o}} = \sqrt{2}v_c$.

Giá trị lớn nhất của v_p thu được với $r_o = R_T$, gọi là *vận tốc vũ trụ cấp hai*.

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2g_o R_T} \approx 11{,}2 \text{ km.s}^{-1}.$$

Áp dụng 5

Điều kiện phóng một vệ tinh Trái đất

Một vệ tinh được phóng lên quỹ đạo tại một điểm M_0, cách tâm O của Trái đất một khoảng r_o, với vận tốc $\vec{v}_o$ vuông góc với OM_0 (hình 17). Kí hiệu $\vec{v}_c$ là vận tốc của vệ tinh trên quỹ đạo tròn $(0, r_0)$ và $\lambda = \frac{r_o}{R_T}$ là tỉ số giữa các bán kính, trong đó R_T là bán kính Trái đất. Chứng minh rằng vệ tinh sẽ không thoát khỏi lực hút Trái đất và không gặp Trái đất nếu $\frac{2}{1+\lambda} < \left(\frac{v_o}{v_c}\right)^2 < 2$

Việc phóng vệ tinh sẽ thành công nếu năng lượng của nó không cho phép vệ tinh thoát khỏi sức hút Trái đất ($\mathscr{E}_M < \mathscr{E}_{M2}$) mà chỉ cho phép nó đi vòng quanh Trái đất ($\mathscr{E}_M > \mathscr{E}_{M1}$). Năng lượng $\mathscr{E}_{M2}$ bằng không, đó là năng lượng của một quỹ đạo parabolic :

$$\mathscr{E}_{M2} = \frac{m}{2}v_{0_2}^2 - \frac{GM_Tm}{r_o} = 0$$

nghĩa là : $v_{0_2}^2 = 2.\frac{GM_T}{r_o} = 2v_c^2$.

Năng lượng $\mathscr{E}_{M1}$ tính được bằng cách cho điểm cận địa trên quỹ đạo nằm cách tâm O của Trái đất một đoạn R_T.

Ở điểm cận địa, vận tốc v_P của vệ tinh thỏa mãn :

$$C = R_T v_P = r_o v_{o1}$$

từ đó : $\mathscr{E}_{M1} = \frac{m}{2}v_{o1}^2 - \frac{GM_Tm}{r_o} = \frac{m}{2}v_P^2 - \frac{GM_Tm}{R_T}$.

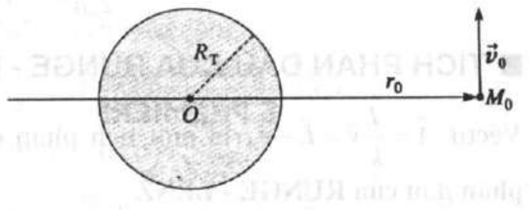
Nhân với $\frac{2}{m}$, ta thu được :

$$v_{o1}^2 - 2v_c^2 = \lambda^2 v_{o1}^2 - 2\lambda v_c^2,$$

hay : $v_{o1}^2 = 2v_c^2\frac{\lambda-1}{\lambda^2-1} = \frac{2}{\lambda+1}v_c^2$.

Gộp cả hai điều kiện trên lại, ta tìm được điều kiện phóng vệ tinh lên một quỹ đạo Trái đất eliptic.

$$\frac{2}{1+\lambda} < \left(\frac{v_o}{v_c}\right)^2 < 2.$$



Hình 17. *Tại M_o, một vệ tinh trên quỹ đạo chuyển động với một vận tốc $\vec{v}_o$ vuông góc với $\overrightarrow{OM}_o$.*

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ TƯƠNG TÁC HẤP DẪN

- **Lực tương tác :**

$$\vec{f} = -G\frac{m_1m_2}{r^2}\vec{e}_r = -\frac{k}{r^2}.\vec{e}_r$$

- **Thế năng :**

$$\mathscr{E}_P(r) = -\frac{k}{r}.$$

■ TÍCH PHÂN ĐẦU CỦA MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG

• Lực là xuyên tâm, mômen động lượng của hạt ảo M, tại G trong $\mathcal{R}^*$, là một bất biến của chuyển động :

$$\vec{L}_G^* = \overrightarrow{GM}(t) \wedge \mu\vec{v}(t) = \overrightarrow{GM}(0) \wedge \mu\vec{v}(0).$$

• Chuyển động có một vận tốc diện tích không đổi tuân theo định luật diện tích :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2}.$$

■ TÍCH PHÂN ĐẦU CỦA NĂNG LƯỢNG

Lực duy nhất tác dụng phát sinh từ một thế năng, thì cơ năng của hạt là một bất biến của chuyển động :

$$\mathscr{E}_M = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{k}{r} = \frac{1}{2}\mu v^2(0) - \frac{k}{r(0)}.$$

■ THẾ NĂNG HIỆU DỤNG

$$\mathscr{E}_M = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r},\ \mathscr{E}_{Kr} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2,$$

$$\mathscr{E}_{\text{Peff}} = \frac{L_z^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r},\ \mathscr{E}_{\text{Peff}} = k\left(\frac{r_o}{r^2} - \frac{1}{r}\right).$$

■ TÍCH PHÂN ĐẦU CỦA RUNGE - LENZ

Vécto $\vec{A} = \frac{1}{k}\vec{v} \wedge \vec{L} - \vec{e}_r$ là một tích phân đầu dạng vectơ của chuyển động, gọi là tích phân đầu của RUNGE - LENZ

■ Một hạt chịu tác dụng của một lực hấp dẫn vạch ra một đường cong (cônic) có phương trình :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}\quad (p > 0).$$

- **Nếu $e = 0$, quỹ đạo là tròn ($\mathscr{E}_M = 0$) ;**
- **Nếu $0 < e < 1$, quỹ đạo là elip và $\mathscr{E}_M < 0$;**
- **Nếu $e = 1$, quỹ đạo là parabol với $\mathscr{E}_M = 0$;**
- **Nếu $e > 1$, quỹ đạo là hypecbol với $\mathscr{E}_M > 0$.**

■ ĐỊNH LUẬT THỨ BA CỦA KEPLER

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2\mu}{k}.$$

■ VỆ TINH CỦA TRÁI ĐẤT

$$\vec{f} = -G\frac{M_T m}{r^2}\vec{e}_r.$$

Bài tập có lời giải

Hậu quả của một điều sai lầm về vệ tinh hóa

ĐỀ BÀI

Người ta muốn đặt một vệ tinh Trái đất lên một quỹ đạo tròn bán kính r_o. Khi phóng vệ tinh lên quỹ đạo tại M_o, cách tâm O của Trái đất r_o, vệ tinh được buông ra với một vận tốc $\vec{v}'_o$ khác với vận tốc $\vec{v}_o$ mong muốn.

1) Vận tốc $\vec{v}'_o$ có hướng đúng nhưng có chuẩn (độ lớn) không đáp ứng. Tính tâm sai của quỹ đạo thu được theo $\dfrac{v'_o}{v_o}$ và biện luận kết quả.

2) Vận tốc $\vec{v}'_o$ có chuẩn (độ lớn) cần thiết nhưng hướng lại không được như mong muốn. Đặt $\alpha = (\vec{v}_o, \vec{v}'_o)$. Hãy xác định góc nghiêng $\beta = (\overrightarrow{OM}_o, \vec{e}\,'_x)$ của trục tiêu của quỹ đạo và tâm sai của nó.

HƯỚNG DẪN

- *Để giải loại bài toán này, có thể có hai cách.*
- *Viết sự bảo toàn của $\vec{L}$ và của $\mathcal{E}_M$. Muốn vậy, phải nhớ những điểm rời xa cực trị (viễn địa và cận địa đối với một vệ tinh Trái đất), vận tốc vuông góc với bán kính, điều này cho phép biểu thị L theo r và v.*
- *Sử dụng một bất biến như bất biến RUNGE - LORENZ chẳng hạn. Những điều kiện ban đầu xác định bất biến này, nó cho ngay tâm sai của quỹ đạo và góc lệch của trục tiêu với vận tốc ban đầu.*

Phương pháp này nhanh hơn, nhưng cần phải biết (hay biết tìm lại nhanh) bất biến cần dùng.

LỜI GIẢI

1) Khối lượng M_T của Trái đất là rất lớn hơn khối lượng m của vệ tinh, kết quả là $\mu \approx m$ và hệ quy chiếu tâm tỉ cự thực tế trùng với hệ quy chiếu địa tâm $\mathcal{R}_o = (O;\ \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Ta hãy tính mômen động lượng của vệ tinh đối với tâm O của Trái đất.

$$\vec{L}' = \overrightarrow{OM}_o \wedge m\vec{v}'_o = mr_o v'_o\, \vec{e}_z .$$

Vectơ RUNGE - LENZ của chuyển động là :

$$\vec{A} = \frac{1}{k}\vec{v}'_o \wedge \vec{L}' - \vec{e}_r(0) = \left(\frac{mr_o v'^2_o}{k} - 1\right)\vec{e}_r(0) .$$

Đối với chuyển động tròn, ta đã có :

$$\vec{A} = \frac{1}{k}\vec{v}_o \wedge \vec{L} - \vec{e}_r(0) = \left(\frac{mr_o v_o^2}{k} - 1\right)\vec{e}_r(0) = \vec{0}\text{, từ đó : } \frac{mr_o}{k} = \frac{1}{v_o^2},$$

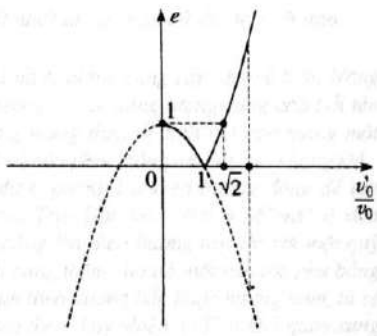
suy ra biểu thức định nghĩa của bất biến RUNGE - LENZ :

$$\vec{A} = \left[\left(\frac{v'_o}{v_o}\right)^2 - 1\right]\vec{e}_r .$$

Quỹ đạo nhận giá của $\overrightarrow{OM}_o$ làm trục tiêu và tâm sai của nó bằng :

$$e = \left|\left(\frac{v'_o}{v_o}\right)^2 - 1\right|$$

Các biến thiên của e theo $\dfrac{v'_o}{v_o}$ được minh họa trên hình vẽ bên.



Ta chỉ cần lưu ý rằng với $\dfrac{v'_o}{v_o} = 0$, thì quỹ đạo là thẳng và khái niệm tâm sai không còn có nghĩa nữa.

Hệ thức đơn giản nào liên hệ vận tốc và bán kính của một quỹ đạo tròn ?

Biểu thức này được tìm lại rất nhanh nhờ viết hệ thức cơ bản của động lực học.

Những ý nghĩa của chuẩn (độ lớn) và hướng của bất biến RUNGE - LENZ là gì ?

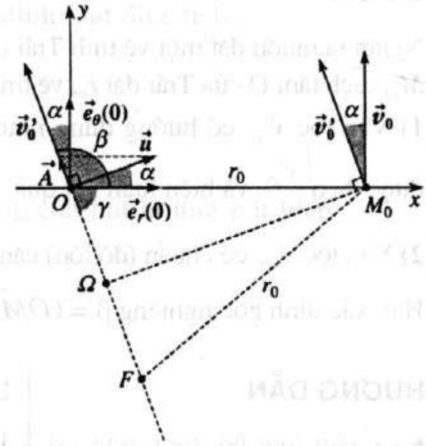
2) Ta hãy tính mômen động lượng mới của vệ tinh so với tâm O của Trái đất :

$$\vec{L}' = \overrightarrow{OM_o} \wedge m\vec{v}'_o = mr_o v_o \cos\alpha \vec{e}_z .$$

Vectơ RUNGE - LENZ của chuyển động mới là :

$$\vec{A} = \frac{1}{k}\vec{v}'_o \wedge \vec{L}' - \vec{e}_r(0) =$$

$$= \frac{mr_o v_o^2 \cos\alpha}{k}\vec{u} - \vec{e}_r(0),$$



trong đó $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}_o}{v'_o} \wedge \vec{e}_z$.

Chú ý rằng $mr_o v_o^2 = k$ ta thu được biểu thức định nghĩa của $\vec{A}$.

$$\vec{A} = \cos\alpha\,\vec{u} - \vec{e}_r(0),$$

mà chuẩn (độ lớn) là : $e = \|\vec{A}\| = \sqrt{\cos^2\alpha + 1 - 2\cos^2\alpha} = |\sin\alpha|$

Quỹ đạo là elip.

Góc nghiêng của trục tiêu mới với $\overrightarrow{OM_o}$ thu được bằng tích vô hướng :

$$\vec{A}.\vec{e}_r(0) = e\cos\beta = \sin\alpha\cos\beta$$

$$= [\cos\alpha\,\vec{u} - \vec{e}_r(0)].\,\vec{e}_r(0)$$

$$= \cos^2\alpha - 1 = -\sin^2\alpha.$$

Từ đó : $\cos\beta = -\sin\alpha$, hay, $\beta = \dfrac{\pi}{2} + \alpha$

• Cách giải khác

Vệ tinh có cơ năng như mong muốn :

$$\mathscr{E}_M = \frac{1}{2}mv'^2_o - \frac{k}{r_o} = -\frac{k}{2r_o}, \text{ suy ra : } a = r_o.$$

Ở điểm viễn địa hay ở điểm cận địa, các vận tốc $\vec{v}$ đều vuông góc với bán kính r. Ta có thể biểu thị năng lượng và mômen động lượng cho hai điểm đó :

$$L' = mr_o v_o \cos\alpha = mrv,\ \mathscr{E}_M = -\frac{k}{2r_o} = -\frac{k}{r} = \frac{1}{2}mv^2 .$$

Bằng cách khử v, ta suy ra một phương trình bậc hai của r. Biết rằng $rv_o^2 = k$, hai nghiệm là :

$$r_A = r_o(1 + |\sin\alpha|)$$
$$r_P = r_o(1 - |\sin\alpha|)$$

Ta tìm lại ngay :

$$a = \frac{1}{2}(r_A + r_P) = r_o \text{ và } c = \frac{(r_A - r_P)}{(r_A + r_P)} = |\sin\alpha|.$$

BÀI TẬP

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

1 Vệ tinh địa tĩnh

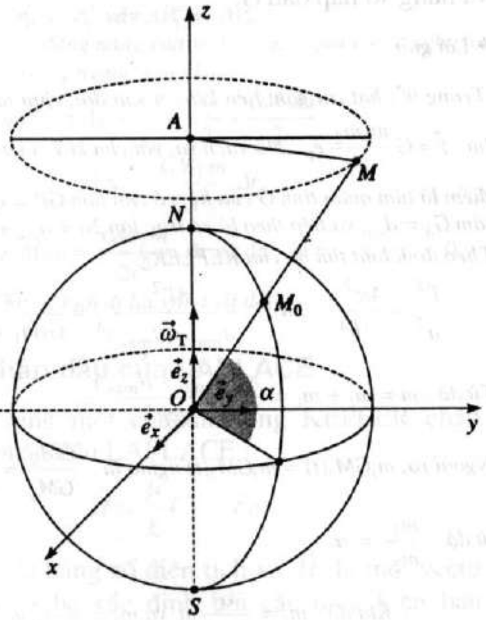
Một vệ tinh gọi là *địa tĩnh* khi nó đứng yên trong mọi hệ quy chiếu gắn với Trái Đất.

1) Chứng minh rằng một vệ tinh địa tĩnh bắt buộc phải có quỹ đạo nằm trong mặt phẳng xích đạo.

2) Tính độ cao h của nó theo gia tốc trọng trường trên mặt đất $g_o = 9{,}81\,\text{ms}^{-2}$ và bán kính của Trái Đất $R_T = 6{,}37.10^6$ m.

• *Lời giải*

1) Giả sử vệ tinh đứng yên ở phía trên của một điểm M_o trên mặt đất. Quỹ đạo của nó sẽ là một đường tròn tâm A.
Để mặt phẳng quỹ đạo chứa tâm lực O thì nó phải là mặt phẳng xích đạo.



2) Chuyển động của vệ tinh đối với Trái Đất cũng là chuyển động của hạt ảo trong hệ quy chiếu tâm tỉ cự. Sử dụng định luật thứ ba của KEPLER (x. Áp dụng 1).

$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{g_o R_T^2}$ *, với $T = 86{,}2.10^3$s là chu kì quay của Trái Đất trong hệ quy chiếu địa tâm, ta tìm được :*

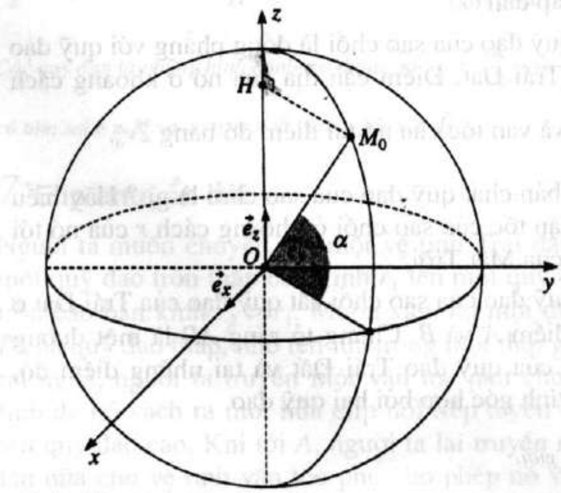
$$r = 42{,}2.10^3 \text{ km, nghĩa là :}$$
$$h = r - R_T \approx 35{,}8.10^3 \text{ km.}$$

2 Năng lượng cần đặt một vệ tinh trái đất lên quỹ đạo

Một vệ tinh trái đất có khối lượng m được phóng lên từ một căn cứ M_o nằm ở vĩ độ λ.

Hỏi cần phải cung cho vệ tinh năng lượng $\Delta\mathscr{E}$ nào để đặt nó trên một quỹ đạo tròn bán kính r ? Ta sẽ biểu thị $\Delta\mathscr{E}$ theo m, λ, gia tốc trọng trường ở mặt đất g_o, bán kính R_T của Trái Đất và vận tốc quay ω_T của Trái Đất trong hệ quy chiếu địa tâm $\mathscr{R}_o = (O\,;\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

Hãy biện luận về biểu thức thu được.



• *Lời giải*

Khối lượng của vệ tinh là không đáng kể so với khối lượng của Trái Đất, ta có thể cho các hệ quy chiếu $\mathscr{R}_o$ và $\mathscr{R}^*$ trùng nhau.

Ta hãy tính năng lượng của vệ tinh ở mặt đất, trong $\mathscr{R}_o$:

$$\mathscr{E}_{M_o} = \frac{m}{2}(HM_o\omega_T)^2 - G\frac{M_T m}{R_T} = \frac{m}{2}(R_T\omega_T\cos\lambda)^2 - G\frac{M_T m}{R_T}$$

Trên quỹ đạo tròn của nó : $\frac{mv^2}{r} = G\frac{M_T m}{r^2} (\mu \approx m)$

Khi đó vệ tinh có động năng : $\mathscr{E}_K = \frac{m}{2}v^2 = G\frac{M_T m}{2r}$ *và cơ năng :*

$$\mathscr{E}_M = G\frac{M_T m}{2r} - \frac{GM_T m}{r} = -G\frac{M_T m}{2r}.$$

Năng lượng cần đặt lên quỹ đạo bằng : $\Delta\mathscr{E} = \mathscr{E}_M - \mathscr{E}_{M_o}$

$$\Delta\mathscr{E} = GM_T m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r}\right) - \frac{m}{2}(R_T\omega_T)^2\cos^2\lambda.$$

Năng lượng này càng nhỏ nếu $\cos^2\lambda$ càng lớn, nghĩa là căn cứ càng ở gần xích đạo.

Những căn cứ phóng tốt nhất là các căn cứ thuộc xích đạo.

<u>Chú ý</u> :

Ta cần lưu ý rằng $\Delta\mathscr{E}$ là năng lượng cung cấp cho vệ tinh. Năng lượng này nhỏ hơn rất nhiều so với năng lượng cung cấp bởi tên lửa. Tên lửa không những mang theo vệ tinh mà còn mang một khối lượng lớn nhiên liệu và còn phải thắng ma sát của không khí. Nói chung các vệ tinh được phóng lên theo hướng đông để tận dụng vận tốc kéo theo của Trái Đất, vào cỡ $v = 465\text{ms}^{-1}$ ở xích đạo. Nếu vệ tinh được phóng lên theo hướng tây, thì với một quỹ đạo ở cùng vĩ độ, ta phải cung thêm cho nó một vận tốc phụ bằng 930ms^{-1}. Khi phóng vệ tinh theo hướng bắc hoặc hướng nam, ta sẽ mất cái lợi của vận tốc kéo theo. Tuy nhiên, vì Trái Đất quay xung quanh trục của các cực, nên trên quỹ đạo của mình, vệ tinh sẽ đi qua ở phía trên mọi miền của địa cầu trong một vài chu kì.

3 Chuyển động của một sao chổi parabolic

Trong hệ quy chiếu Galilée gắn với Mặt Trời khối lượng Mo, người ta xét chuyển động của Trái Đất và chuyển động của một sao chổi. Giả sử quỹ đạo của Trái Đất là tròn, bán kính r_o.

1) Tính vận tốc v_o của Trái Đất theo M_o, r_o và hằng số hấp dẫn G.

2) Quỹ đạo của sao chổi là đồng phẳng với quỹ đạo của Trái Đất. Điểm cận địa của nó ở khoảng cách $\frac{r_o}{2}$ và vận tốc của nó tại điểm đó bằng $2v_o$.

Hỏi bản chất quỹ đạo của sao chổi là gì ? Hãy biểu thị vận tốc của sao chổi ở khoảng cách r của nó tới tâm của Mặt Trời.

3) Quỹ đạo của sao chổi cắt quỹ đạo của Trái Đất ở hai điểm A và B. Chứng tỏ rằng AB là một đường kính của quỹ đạo Trái Đất và tại những điểm đó, hãy tính góc hợp bởi hai quỹ đạo.

• *Lời giải.*

1) *Kí hiệu m là khối lượng của Trái Đất. Theo hệ thức cơ bản của động lực học :*

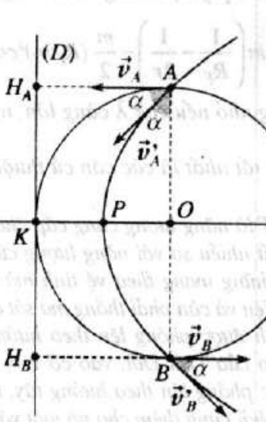
$$m\frac{v_o^2}{r_o} = -G\frac{M_o m}{r_o^2}, \text{ từ đó : } v_o = \sqrt{G\frac{M_o}{r_o}}$$

2) *Gọi m' là khối lượng của sao chổi. Ta hãy tính cơ năng của nó :*

$$\mathscr{E}'_M = \frac{m'}{2}(2v_o)^2 - G\frac{M_o m'}{\frac{r_o}{2}} = 2m'\left(v_o^2 - G\frac{M_o}{r_o}\right) = 0$$

Quỹ đạo của sao chổi là một parabol.
Khi nó nằm cách tâm của Mặt Trời một khoảng r, thì vận tốc v của nó thỏa mãn :

$$\mathscr{E}'_M = \frac{m'}{2}v^2 - \frac{GM_o m'}{r} = 0, \text{ từ đó : } v = \sqrt{\frac{2GM_o}{r}} = v_o\sqrt{\frac{2r_o}{r}}.$$



Tại giao điểm A, vận tốc $\vec{v}'_A$ của sao chổi thẳng hàng với phân giác của góc $\widehat{OAH_A}$. Ta thấy lại cùng một kết quả tại B.

3) *Đường chuẩn D của parabol tiếp tuyến với quỹ đạo Trái đất ở K, đối xứng của tâm mặt trời O so với điểm cận địa P của sao chổi (x. sơ đồ).*
Từ các tính chất hình học của parabol (định nghĩa của đường chuẩn, các tính chất của tiếp tuyến), ta suy ra: A, O, B là thẳng hàng và $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

4 Sao đôi

Một ngôi sao đôi là một tập hợp cô lập của hai ngôi sao thành phần M_1 và M_2 tương tác hấp dẫn với nhau. Các ngôi sao này, được quan sát trong hệ quy chiếu COPERNIC, vạch ra các elip mà các trục lớn nằm trong tỉ số $\frac{a_2}{a_1} = \alpha$, khoảng cách cực trị của chúng biến thiên giữa d_{min} và d_{max}. Ngoài ra, biết chu kì quay của hệ bằng T, hãy xác định các khối lượng m_1 và m_2 của hai ngôi sao theo α, d_{min}, d_{max}, T và hằng số hấp dẫn G.

• *Lời giải*

Trong $\mathscr{R}^*$, hạt rút gọn, liên kết với sao đôi, chịu tác dụng của lực $\vec{f} = G\frac{m_1m_2}{r^2}\vec{e}_r$. Nó vạch ra, với chu kì T, một elip có tiêu điểm là tâm quán tính G của hệ, có cận tâm $GP = d_{min}$, và viễn tâm $G_A = d_{max}$ và tiếp theo là có trục lớn $2a = d_{min} + d_{max}$
Theo định luật thứ ba của KEPLER :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2\mu}{|k|}, \text{ hay : } \frac{8T^2}{(d_{min}+d_{max})^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)},$$

Từ đó : $m = m_1 + m_2 = \frac{\pi^2(d_{min}+d_{max})^3}{2GT^2}$.

Ngoài ra, $m_1GM_1(t) = m_2GM_2(t)$ *nghĩa là :* $\frac{GM_2}{GM_1} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$

từ đó : $\frac{m_1}{m_2} = \alpha$.

Khi đó : $m_1 = \frac{\alpha}{\alpha+1}m$ *và* $m_2 = \frac{1}{\alpha+1}m$.

VẬN DỤNG VỐN KIẾN THỨC

5 Hãm một vệ tinh chuẩn tròn

Trong các lớp trên của bầu khí quyển, một vệ tinh quay tròn có khối lượng m, bị hãm nhẹ bởi một lực có cường độ $f_r = \alpha m v^2$, trong đó α là một hằng số dương và v là vận tốc của vệ tinh trong hệ quy chiếu địa tâm $\mathscr{R}_o$. Thừa nhận rằng quỹ đạo của vệ tinh vẫn là chuẩn tròn, hãy tính các biến thiên $\Delta\mathscr{E}_M$ của cơ năng, $\Delta\mathscr{E}_K$ của động năng của nó và Δr của bán kính quỹ đạo của nó, sau một một vòng quay.

• *Lời giải*

$m << M_T$, ta có $\mu \approx m$. Trong $\mathcal{R}_o$:

$$m\frac{d\vec v}{dt} = -\frac{GM_T m}{r^2}\vec e_r - \alpha m v^2 \vec T.$$

$\vec T$: vectơ đơn vị của tiếp tuyến hướng theo chiều chuyển động. Quỹ đạo là chuẩn tròn:

$m\frac{v^2}{r} = \frac{GM_T m}{r^2}$, *từ đó* $m\frac{d\vec v}{dt} = -\frac{GM_T m}{r^2}\vec e_r - \alpha\frac{GM_T m}{r}.\vec T$.

Nhân với $\vec v dt = d\overrightarrow{OM}$ *ta được:*

$$m\vec v.d\vec v = -\frac{GM_T m}{r^2}dr - \alpha\frac{GM_T m}{r}rd\theta.$$

nghĩa là: $d\left(\frac{m\vec v^2}{2} - \frac{GM_T m}{r}\right) = -\alpha GM_T m d\theta.$

$\Delta\mathcal{E}_M = -\alpha GM_T m 2\pi < 0$. *Vệ tinh mất cơ năng của mình. Với một vệ tinh quay tròn:*

$$\mathcal{E}_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GM_T m}{2r} = -\frac{\mathcal{E}_p}{2};$$

mà $\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_K + \mathcal{E}_P = -\mathcal{E}_K$, *vậy* $\Delta\mathcal{E}_K = -\Delta\mathcal{E}_M > 0$.

*Sự hãm làm tăng động năng của vệ tinh. **Kết quả có vẻ nghịch lí này là do** $\mathcal{E}_M$ và $\mathcal{E}_K$ ngược dấu nhau.*

Lấy vi phân của $\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_K + \mathcal{E}_P = \frac{\mathcal{E}_p}{2} = \frac{GM_T m}{2r}$.

$$\Delta\mathcal{E}_M = \frac{GM_T m}{2r^2}\Delta r.$$

$$\Delta\mathcal{E}_M = -2\pi\alpha GM_T m = \frac{GM_T m}{2r^2}.\Delta r, \text{ từ đó: } \Delta r = -4\pi\alpha r^2 < 0.$$

Sự hãm làm cho vệ tinh đi lại gần mặt đất.

6 Tích phân đầu của LAPLACE

Chứng tỏ rằng một chuyển động KEPLER chấp nhận tích phân đầu LAPLACE:

$$\vec H = \frac{\mu}{k}C\vec v - \vec e_\theta,$$

trong đó C là hằng số diện tích và $\vec H$ là một vectơ không đổi, được xác định bởi các điều kiện ban đầu. Suy ra rằng chuẩn (môđun) của $\vec H$ bằng tâm sai e của đường conic quỹ đạo.

• *Lời giải*

Trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}^*$ *Galilée,* $\mu\frac{d\vec v}{dt} = -\frac{k}{r^2}\vec e_r$. *Nhân với* $C = r^2\dot\theta$

ta có: $\mu C\frac{d\vec v}{dt} = -\frac{k}{r^2}.r^2\frac{d\theta}{dt}\vec e_r = -k\frac{d\theta}{dt}\vec e_r = \frac{d\vec e_\theta}{dt}$,

hay là: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{k}C\vec v - \vec e_\theta\right) = \vec 0$

từ đó: $\vec H = \frac{\mu}{k}C\vec v - \vec e_\theta$.

$\vec H$: vectơ hằng, không có thứ nguyên, được xác định bởi các điều kiện ban đầu. Sự thành công của thừa số tích phân $r^2\dot\theta$ là do lực có dạng theo r^{-2}.

Tích phân đầu của LAPLACE chỉ có giá trị đối với những chuyển động KEPLER.

Trục cực: trục định hướng bởi $\vec e_x$ *sao cho* $(\vec e_x, \vec H) = \frac{\pi}{2}$.

Nhân vô hướng $\vec H$ *với* $\vec e_\theta$, *ta có:*

$$\frac{\mu C}{k}r^2\dot\theta - 1 = H\cos\theta,\ \frac{\mu C^2}{kr} - 1 = H\cos\theta,\ r = \frac{\mu C^2}{k(1 + H\cos\theta)}$$

Các quỹ đạo là những hình cônic có thông số: $p = \frac{\mu C^2}{k} = \frac{L^2}{\mu k}$,

có tâm sai $e = H$ *và có trục tiêu vuông góc với* $\vec H$.

7 Elip chuyển dời

Người ta muốn chuyển dời một vệ tinh Trái đất từ một quỹ đạo tròn thấp bán kính r_1 lên một quỹ đạo tròn cao bán kính $r_2 > r_1$. Muốn vậy, tại một điểm P của quỹ đạo thấp, nhờ tên lửa trong một thời gian rất ngắn, người ta truyền một vận tốc phụ cho vệ tinh để nó vạch ra một nửa elip nối tiếp tuyến ở A với quỹ đạo cao. Khi tới A, người ta lại truyền một lần nữa cho vệ tinh vận tốc phụ cho phép nó vạch ra quỹ đạo tròn cao. Ký hiệu g_o là gia tốc trọng trường trên mặt đất và R_T là bán kính của Trái Đất.

1) Tính vận tốc v_1 của vệ tinh quay tròn trên quỹ đạo thấp của nó và vận tốc mới v'_1 sau khi đốt các tên lửa biết rằng $\vec v_1$ và $\vec v'_1$ là thẳng hàng.

2) Vệ tinh đạt tới điểm A ở vận tốc v'_2 nào? Vận tốc cuối cùng v_2 của vệ tinh trên quỹ đạo cao của nó bằng bao nhiêu?

• *Lời giải*

1) $v_1 = \sqrt{\frac{k}{mr_1}} = R_T\sqrt{\frac{g_o}{r_1}}$. *Quỹ đạo chuyển dời là một nửa elip có điểm cận địa P và điểm viễn địa A. Trên elip này, vệ tinh có năng lượng:*

$$\mathcal{E}_M = -\frac{k}{r_1 + r_2} = \frac{m}{2}v'^2_1 - \frac{k}{r_1},$$

từ đó: $v'_1 = R_T\sqrt{\frac{2g_o r_2}{r_1(r_1 + r_2)}} = v_1\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} > v_1$.

2) *Sử dụng hằng số diện tích:*

$$v'_2 = C.\frac{r_1 v'_1}{r_2} = R_T\sqrt{\frac{2g_o r_1}{r_2(r_1 + r_2)}}.$$

Sự truyền thêm vận tốc phụ cho vệ tinh vận tốc:

$$v_2 = \sqrt{\frac{k}{mr_2}} = R_T\sqrt{\frac{g_o}{r_2}} > v'_2.$$

Với mỗi thao tác, năng lượng của vệ tinh tăng, vì người ta đưa nó từ một quỹ đạo sang một quỹ đạo ở bên ngoài.

Phụ lục 1

Một vài dữ liệu thiên văn

1 TRÁI ĐẤT

• Hành tinh trong hệ mặt trời (thái dương hệ) có bán kính trung bình:

$R_T = 6370$ km (về mặt địa diện)

có khối lượng $M_T = 6.10^{24}$ kg.

• Trường hấp dẫn riêng ở mặt đất vào cỡ :

$$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2} = 9{,}8\ m.s^{-2}.$$

• Chu kì thiên văn (quay riêng):

$T_{sid} = 86.\ 164$s.

• Chu kì quay vòng (năm thiên văn):

$T_{orb} = 365{,}25d\ (\pi.10^7\text{s}).$

• Khoảng cách trung bình tới Mặt Trời :

TS = 1UA = $1{,}5.10^{11}$m.

• Dễ dàng tính được vận tốc của Trái Đất trên quỹ đạo quanh Mặt Trời của nó :

$v_{orb} = 30$ km. s^{-1}.

2 MẶT TRĂNG

• Mặt Trăng, vệ tinh của Trái Đất, là hình cầu có bán kính :

$R_L = 0{,}27R_T$,

Có khối lượng :

$$M_L = \frac{M_T}{81}$$

• Mặt Trăng quay xung quanh mình nó quanh một trục nghiêng $6^05'$ với mặt phẳng eliptic trong một chu kì quay vòng thiên văn :

$T_{rot} = 27{,}3$ ngày,

và thực hiện đúng một vòng xung quanh Trái Đất trong cùng thời gian :

$T_{orb} = T_{rot}$,

điều này làm cho Mặt Trăng luôn luôn hướng cùng một mặt về phía Trái Đất.

• Thời gian giữa hai pha đồng nhất của Mặt Trăng (Trái Đất, Mặt Trăng và Mặt Trời thẳng hàng theo thứ tự này) gọi là tuần trăng hay chu kì quay giao hội :

$T_L = 29$ ngày 12 giờ 44 phút.

• Khoảng cách trung bình từ Mặt Trăng tới Trái Đất :

$TL = 384\ 000$ km $\approx 60R_T$

• Ta thấy :

$g_L \approx \dfrac{g_0}{6}$ và $v_{orrb\ moy} \approx 1$ km.s^{-1} (vận tốc quỹ đạo trung bình).

3 MẶT TRỜI

Cần nhớ cỡ lớn khối lượng của nó :

$M_S = 2.10^{30}$ kg

và bán kính :

$R_S \approx 10^9\ R_T$.

Phụ lục 2

Những đường cônic

1 TÍNH CHẤT CHUNG CỦA NHỮNG ĐƯỜNG CÔNIC

1.1. Đường cônic được xác định bởi đường chuẩn, tiêu điểm và tâm sai

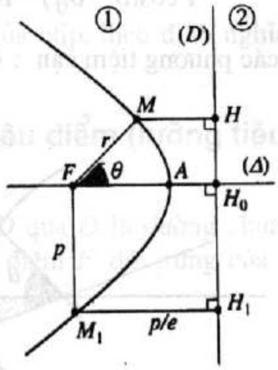
Cho một đường thẳng D gọi là **đường chuẩn**, một điểm F gọi là **tiêu điểm** và một số thực dương e **gọi là tâm sai**, một đường cônic là tập hợp những điểm M trong mặt phẳng (F, D) (*hình* 1) sao cho :

$$\frac{MF}{MH} = e.$$

Cônic là một *elip* nếu $e < 1$, một *parabol* nếu $e = 1$ và một hypecbol nếu $e > 1$.

Thông số p của một cônic, theo định nghĩa, là chiều dài của bán kính vectơ $\overrightarrow{FM_1}$ song song với đường chuẩn D. Rút ra khoảng cách từ tiêu điểm F tới đường chuẩn D bằng :

$$FH_0 = \frac{p}{e}.$$



Hình 1. *Elip và parabol nằm hoàn toàn trong nửa mặt phẳng* ①.

Trục tiêu Δ của một cônic là trục đối xứng FH_0, vuông góc với đường chuẩn D.

1.2. Phương trình cực của một đường cônic

Đường chuẩn D chia mặt phẳng (F, D) thành hai nửa mặt phẳng mà một (nửa mặt phẳng ①) chứa tiêu điểm F liên kết với D (*x. hình* 2).

Nếu $e \leq 1$ (elip hoặc parabol), mọi điểm của cônic đều nằm trong nửa mặt phẳng ①.

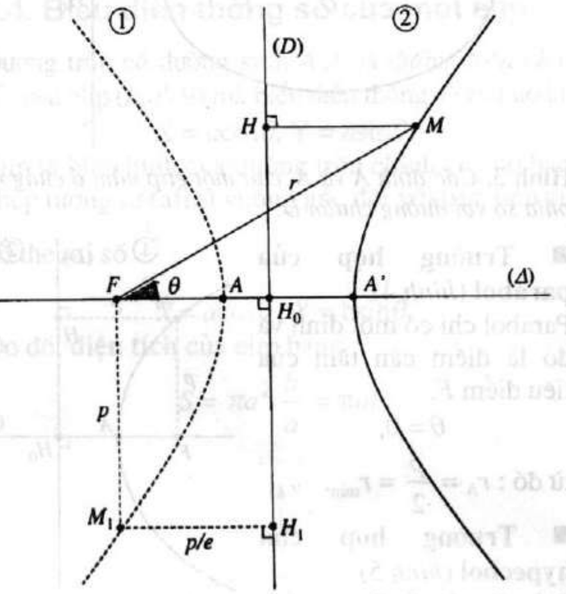
Ngược lại, nếu $e > 1$ (hypecbol), những điểm M của cônic nằm trong cả hai nửa mặt phẳng ① và ②.

Ta lấy làm trục cực là trục tiêu hướng từ F về H_0 và xác định vị trí của điểm chạy M của đường cônic bằng các tọa độ cực (r, θ) của nó.

■ **Phương trình cực của một elip hoặc một parabol**

$$MF = r = eMH = e\left(\frac{p}{e} - r\cos\theta\right),$$

từ đó : $$r = \frac{p}{e\cos\theta + 1}.$$



Hình 2. *Hypecbol có một nhánh trong mỗi nửa mặt phẳng* ① *và* ②.

■ **Phương trình cực của một hypecbol**

Phương trình của *nhánh* ① cũng được thiết lập tương tự như trên :

$$r = \frac{p}{e\cos\theta + 1} \quad \text{và} \quad |\theta| \leq Arc\cos\left(-\frac{1}{e}\right).$$

Đối với nhánh ②, ta có hình ② :

$$MF = r = eMH = e\left(r\cos\theta - \frac{p}{e}\right),$$

từ đó : $$r = \frac{p}{e\cos\theta - 1} \quad \text{và} \quad |\theta| \leq Arc\cos\left(\frac{1}{e}\right).$$

1. 3. Đỉnh của một đường cônic

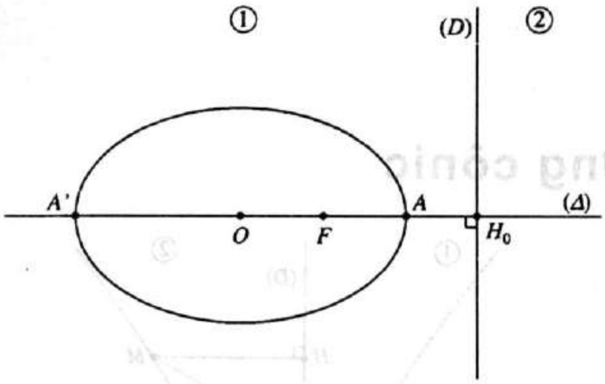
Những đỉnh của một đường cônic là những điểm A và A', nằm trên trục tiêu ($\theta = 0$ và $\theta = \pi$) .

■ **Trường hợp của elip** (*x. hình* 3)

$\theta = 0$, từ đó $r_A = \dfrac{p}{1+e} = r_{\min}$,

$\theta = \pi$, từ đó $r_{A'} = \dfrac{p}{1-e} = r_{\max}$.

Đối với tiêu điểm F, đỉnh A là **điểm cận tâm** (nghĩa là điểm gần nhất) và đỉnh A' là **điểm viễn tâm** (nghĩa là điểm xa nhất) .

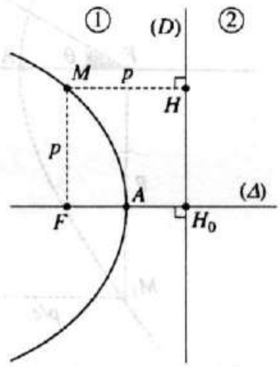


Hình 3. *Các đỉnh A và A' của một elip nằm ở cùng một phía so với đường chuẩn D.*

■ **Trường hợp của parabol** (*hình* 4)
Parabol chỉ có một đỉnh và đó là điểm cận tâm của tiêu điểm F.

$$\theta = 0,$$

từ đó : $r_A = \dfrac{p}{2} = r_{\min}$.



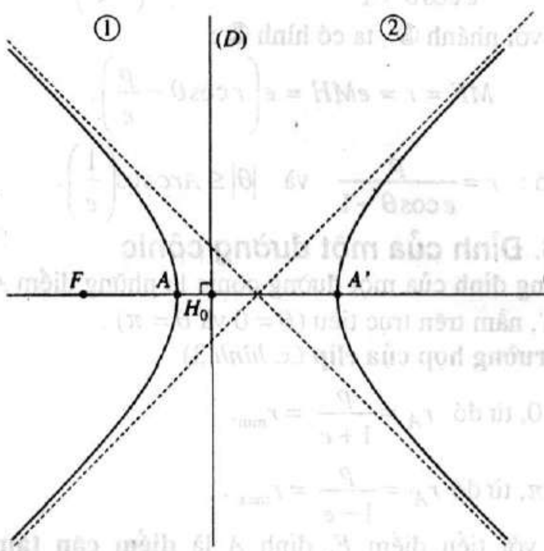
Hình 4. *Parabol chỉ có một đỉnh A và không phải là một cônic có tâm.*

■ **Trường hợp của hypecbol** (*hình* 5)
Đối với mỗi nhánh, các đỉnh là những điểm cận tâm :

$$\theta = 0$$

từ đó : $r_A = \dfrac{p}{e+1} = r_{\min}$ nhánh ① ;

$$r_{A'} = \frac{p}{e-1} = r'_{\min} \text{ nhánh ② .}$$



Hình 5. *Hai đỉnh A và A' nằm ở hai phía khác nhau của đường chuẩn D.*

1.4. Phương trình trong tọa độ cực mở rộng của một đường cônic.

Trong trường hợp tổng quát, trục tiêu nghiêng một góc θ_0với trục cực ($-\pi \le \theta_0 \le \pi$) (*hình* 6).

Thay θ bằng $(\theta - \theta_0)$ vào các phương trình trên của những đường cônic khác nhau, ta có :

• Elip : $r = \dfrac{p}{e\cos(\theta - \theta_0) + 1}$;

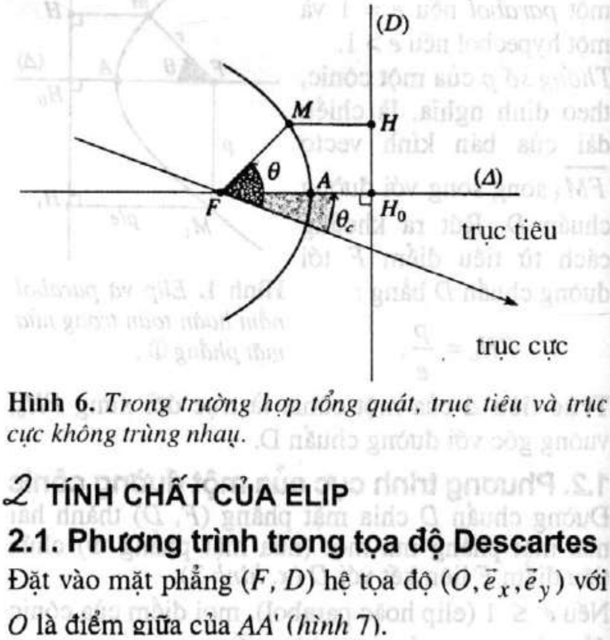
• Parabol : $r = \dfrac{p}{\cos(\theta - \theta_0) + 1}$;

phương tiệm cận $\theta = \theta_0$;

• Hypecbol : $r = \dfrac{p}{e\cos(\theta - \theta_0) + 1}$ nhánh ①

và $r = \dfrac{p}{e\cos(\theta - \theta_0) - 1}$ nhánh ② ;

các phương tiệm cận : $\theta = \theta_0 \pm \arccos\left(\dfrac{1}{e}\right)$.

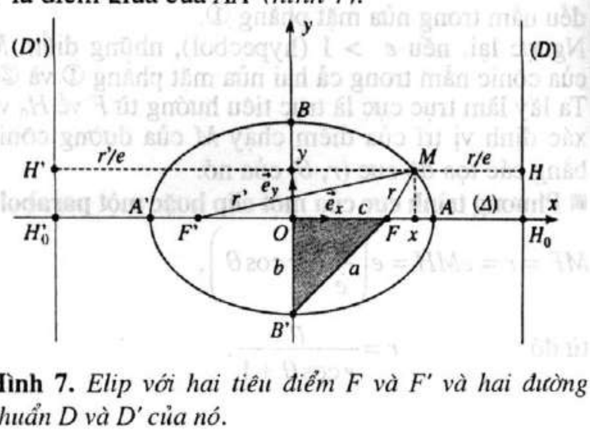


Hình 6. *Trong trường hợp tổng quát, trục tiêu và trục cực không trùng nhau.*

2 TÍNH CHẤT CỦA ELIP

2.1. Phương trình trong tọa độ Descartes

Đặt vào mặt phẳng (F, D) hệ tọa độ $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ với O là điểm giữa của AA' (*hình* 7).



Hình 7. *Elip với hai tiêu điểm F và F' và hai đường chuẩn D và D' của nó.*

Gọi F' là điểm đối xứng của F so với O, B và B' là giao điểm của elip với trục (Oy).

Nhớ rằng : $a = \dfrac{A'A}{2}$: bán trục lớn;

$b = \dfrac{B'B}{2}$: bán trục nhỏ;

$c = \dfrac{F'F}{2}$: nửa khoảng cách giữa hai tiêu điểm.

Ta có thể suy ra từ định nghĩa hình học các tính chất sau :

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad c = ea \quad \text{và} \quad p = \frac{b^2}{a}.$$

Hơn nữa, phương trình trong tọa độ Descartes có thể viết :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Gốc O là tâm đối xứng của elip, theo định nghĩa, đó là tâm của elip.

2.2. Định nghĩa hai tiêu điểm (lưỡng tiêu) của elip

Đường đối xứng D' của D qua O là đường chuẩn của elip liên kết với tiêu điểm F' đối xứng của F qua O.

Vậy : $\dfrac{MF'}{MH'} = e \ (e < 1)$

và $H'H = \dfrac{r}{e} + \dfrac{r'}{e} = \dfrac{1}{e}(r + r') = 2OH_0 = 2\ \dfrac{a}{e}$,

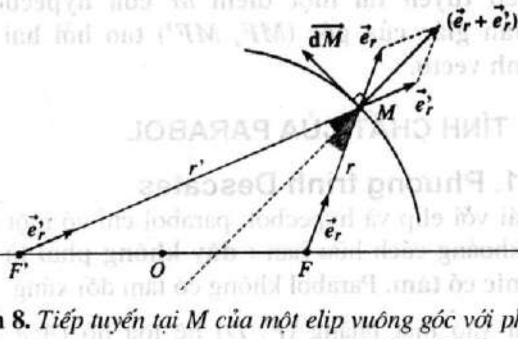
từ đó : $r + r' = 2a$.

Một elip là tập hợp của những điểm M của một mặt phẳng sao cho tổng các khoảng cách tới hai điểm cố định, gọi là các tiêu điểm, là không đổi.

2.3. Tính chất của các tiếp tuyến

Lấy vi phân định nghĩa hai tiêu điểm của elip, ta thu được (*hình* 8) :

$$dr + dr' = (\vec{e}_r + \vec{e}_{r'})\ \overrightarrow{dM} = 0$$



Hình 8. *Tiếp tuyến tại M của một elip vuông góc với phân giác của góc tạo bởi hai bán kính vectơ $\overrightarrow{MF}$ và $\overrightarrow{MF'}$.*

Vectơ $\overrightarrow{dM}$ vuông góc với vectơ $(\vec{e}_r + \vec{e}_{r'})$ mang bởi đường phân giác của góc (MF, MF'), Suy ra định lí :

Tiếp tuyến tại một điểm M của một elip vuông góc với phân giác của góc hợp bởi hai bán kính vectơ.

2.4. Biểu diễn thông số của một elip

Đường tròn có đường kính $A\,A'$ là *đường tròn chính* Γ của elip (*hình* 9) mà biểu diễn thông số của nó là :

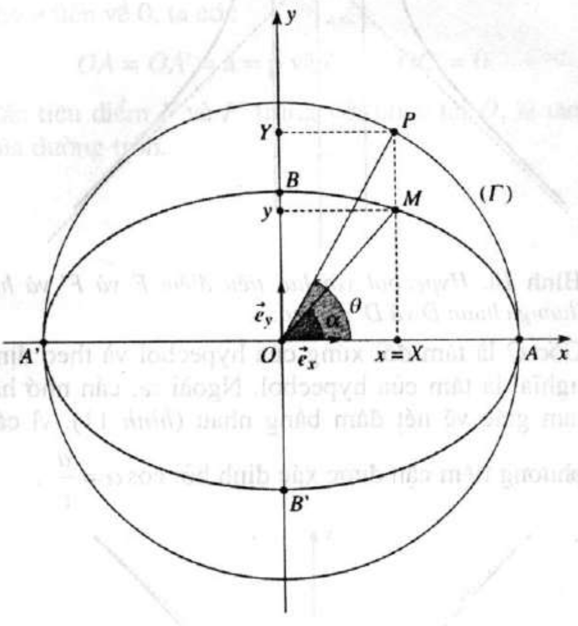
$$X = a\cos\theta, Y = a\sin\theta.$$

Elip là biến hình của đường tròn chính của nó bằng phép tương tự (afin) vuông góc đối với trục tiêu của nó theo tỉ số $\dfrac{b}{a}$:

$$X = a\cos\theta,\ Y = b\sin\theta.$$

Do đó, **diện tích** của elip bằng :

$$S = \pi a^2 \frac{b}{a} = \pi ab.$$



Hình 9. *Vòng tròn chính của một elip.*

3 TÍNH CHẤT CỦA HYPECBOL

3.1. Phương trình trong tọa độ Descartes

Đặt vào mặt phẳng (F, D) hệ tọa độ $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ với O là điểm giữa của AA' (*hình* 10).

Gọi F' là điểm đối xứng của F qua O.

Nhớ rằng : $a = \dfrac{AA'}{2}$ và $c = \dfrac{FF'}{2}$.

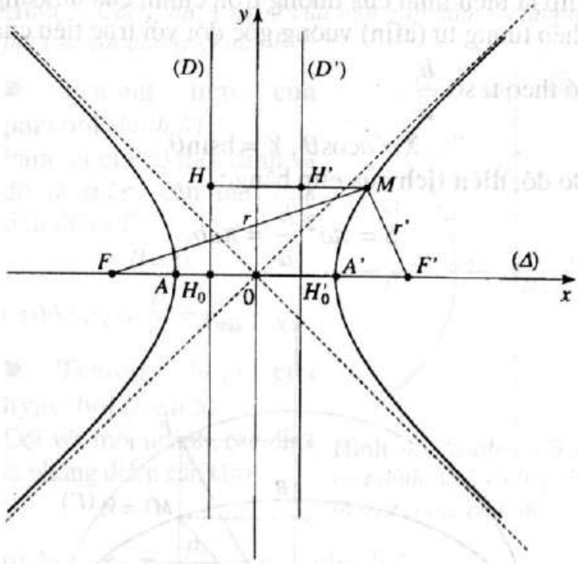
Ta có thể từ định nghĩa hình học suy ra các tính chất sau :

$$c = ea \text{ và } p = \frac{b^2}{a} \text{ với } b^2 = c^2 - a^2.$$

b bằng khoảng cách giữa F và hình chiếu vuông góc của nó xuống đường tiệm cận (*h*.11).

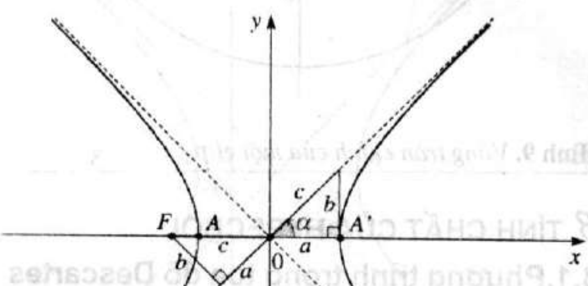
Hơn nữa, phương trình trong tọa độ Descartes có thể viết :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Hình 10. *Hypecbol với hai tiêu điểm F và F' và hai đường chuẩn D và D' của nó.*

Gốc O là tâm đối xứng của hypecbol và theo định nghĩa, là tâm của hypecbol. Ngoài ra, cần nhớ hai tam giác vẽ nét đậm bằng nhau (*hình* 11), vì các phương tiệm cận được xác định bởi $\cos\alpha = \frac{a}{c}$.



Hình 11. *Sự bằng nhau có ích của các tam giác.*

3.2. Định nghĩa hai tiêu điểm (lưỡng tiêu) của hypecbol

Đường đối xứng D' của D qua O là đường chuẩn liên kết với tiêu điểm F' đối xứng của F qua O.

Nếu M là một điểm của hypecbol : $\frac{MF'}{MH'} = e \ (e > 1)$.

Đối với một điểm M trên nhánh ①, ta có thể viết :

$$HH' = MH' - MH = \frac{r'}{e} - \frac{r}{e} = \frac{1}{e}(r' - r) = 2OH_0 = 2\frac{a}{e}$$

từ đó : $r - r' = 2a$.

Ngược lại, đối với một điểm trên nhánh ② ta có :

$$HH' = MH - MH' = \frac{r}{e} - \frac{r'}{e} = \frac{1}{e}(r - r') = 2OH_0 = 2\frac{a}{e},$$

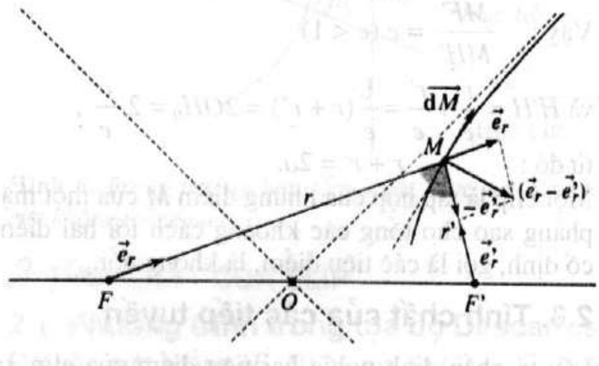
từ đó : $r' - r = 2a$.

Tóm lại, một hypecbol là tập hợp những điểm M của một mặt phẳng sao cho giá trị tuyệt đối của hiệu các khoảng cách tới hai điểm cố định, gọi là tiêu điểm, là không đổi :

$$|r - r'| = 2a.$$

3.3. Tính chất của các tiếp tuyến

Ta có thể chứng tỏ rằng có một tính chất tương tự như tính chất đã được thiết lập cho elip.



Hình 12. *Tiếp tuyến tại điểm M của hypecbol là phân giác của góc tạo bởi hai bán kính vectơ.*

Tiếp tuyến tại một điểm M của hypecbol là phân giác của góc (MF, MF') tạo bởi hai bán kính vectơ.

4 TÍNH CHẤT CỦA PARABOL

4.1. Phương trình Descates

Trái với elip và hypecbol, parabol chỉ có một đỉnh ở khoảng cách hữu hạn : **đây không phải là một cônic có tâm.** Parabol không có tâm đối xứng.

Đặt vào mặt phẳng (F, D) hệ tọa độ $(A; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ (*hình* 13).

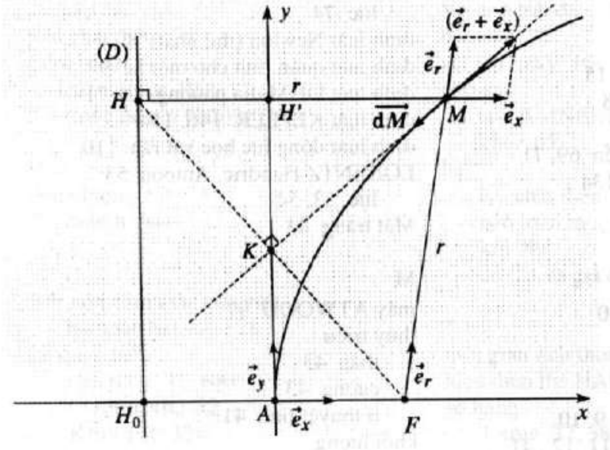
Đối với parabol $e = 1$, vậy :

$$FH_0 = p \quad \text{và} \quad AH_0 = AF = \frac{p}{2}.$$

Với mọi điểm M của parabol, ta có thể viết :

$$MF^2 = MH^2, \text{ hay : } \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

Suy ra phương trình Descartes của parabol : $y^2 = 2px$.



Hình 13. *Dựng một điểm M của parabol. Tiếp tuyến tại M là phân giác của góc (MF, MH), AH' = 2AK.*

4.2. Tính chất của tiếp tuyến

Ta thừa nhận các kết quả này :

- Tiếp tuyến tại một điểm M của một parabol là phân giác của gốc (MF, MH).
- Khoảng cách AH' bằng hai lần khoảng cách AK.

5 TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Xét phương trình trong tọa độ cực của elip :

$$r = \frac{p}{e\cos\theta + 1} \quad (e < 1).$$

Nếu $e = 0$, ta có $r = p$, đó là phương trình của một đường tròn bán kính p.

Đối với elip, ta đã thiết lập được :

$$OA = OA' = a = \frac{p}{1 - e^2} \text{ và } OC = OC' = ae,$$

cho e tiến về 0, ta có :

$$OA = OA' = \text{a} = \text{p và } OC = OC' = 0.$$

Các tiêu điểm F và F' trùng với nhau tại O, là tâm của đường tròn.

Bảng tra cứu

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Biên tập lần đầu :
TRẦN VĂN QUANG

Biên tập tái bản :
PHÙNG THANH HUYỀN

Biên tập kĩ thuật :
NGUYỄN HOÀNG OANH
NGUYỄN THANH HẢI

Trình bày bìa :
PHẠM NGỌC TỚI

Sửa bản in :
TRẦN VĂN QUANG

Sắp chữ :
PHÒNG CHẾ BẢN (NXB GIÁO DỤC)

CƠ HỌC II

Mã số: 7K442y9 – DAI

In 1.000 bản (QĐ : 41A), khổ 19 x 27 cm. In tại Công ty CP In Thái Nguyên.
Địa chỉ : Phường Quang Trung, TP. Thái Nguyên.
Số ĐKKH xuất bản : 04 – 2009/CXB/333 – 2117/GD.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2009.

P.F.I.E.V

CƠ HỌC 2

CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC - DẠY NGHỀ
HEVOBCO
Địa chỉ : 25 Hàn Thuyên, Hà Nội
Website: www.hevobco.com.vn

8 934980 937051

Giá: 27.000đ