Vũ Thanh Khiết (Chủ biên) - Lưu Hải An
Phạm Vũ Kim Hoàng - Nguyễn Đức Hiệp - Nguyễn Hoàng Kim

Bồi dưỡng học sinh giỏi Vật lí Trung học phổ thông

BÀI TẬP

Cơ học - Nhiệt học

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Vũ Thanh Khiết (Chủ biên)
Lưu Hải An - Phạm Vũ Kim Hoàng
Nguyễn Đức Hiệp - Nguyễn Hoàng Kim

Bồi dưỡng học sinh giỏi Vật lí Trung học phổ thông

BÀI TẬP Cơ học - Nhiệt học

(Tái bản lần thứ ba)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Lời nói đầu

Để giúp học sinh giỏi rèn luyện kĩ năng giải quyết các bài toán vật lí, chuẩn bị tốt các kì thi chọn học sinh giỏi cấp tỉnh, thành phố và cấp quốc gia, chúng tôi biên soạn hai cuốn sách bài tập bổ trợ cho bộ sách "***Bồi dưỡng học sinh giỏi Vật lí Trung học phổ thông***" :

1. Bài tập Cơ học – Nhiệt học
2. Bài tập Điện học – Quang học – Vật lí hiện đại

Trong số các bài toán đưa vào các cuốn sách này có một số bài được trích từ *Đề thi Olimpic Vật lí các nước*, để học sinh làm quen và thử sức với các dạng bài toán của các kì thi quốc tế.

Cuốn *Bài tập Cơ học - Nhiệt học* gồm bốn chương : *Cơ học chất điểm ; Cơ học vật rắn ; Dao động cơ ; Nhiệt học* tương ứng với 8 chủ đề : Động học chất điểm, Động lực học chất điểm và hệ chất điểm, Động học vật rắn, Động lực học vật rắn- Các định luật bảo toàn, Tĩnh học, Dao động cơ, Dao động liên kết, Nhiệt học và vật lí phân tử.

Cuối sách có hướng dẫn giải, đáp số.

Chúng tôi mong nhận được sự góp ý của quý độc giả, mọi ý kiến góp ý xin gửi về

Ban biên tập sách Vật lí

CTCP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội – Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam

Tầng 4 - tòa nhà Diamond Flower - số 1 Hoàng Đạo Thuý - Hà Nội

CÁC TÁC GIẢ

Chương I
CƠ HỌC CHẤT ĐIỂM

Chủ đề 1. ĐỘNG HỌC CHẤT ĐIỂM

1.1. Một người xuất phát từ điểm A trên đường quốc lộ để trong một khoảng thời gian ngắn nhất phải đến điểm B trên cánh đồng trước mặt. Khoảng cách từ B đến đường quốc lộ là h. Tốc độ của anh ta trên đường quốc lộ là v_1, trên cánh đồng là $v_2 = \frac{v_1}{n}$ (n là số nguyên). Hỏi anh ta phải chạy theo quỹ đạo thế nào ?

Áp dụng: h = 1 km, n = 3.

1.2. Hai động tử 1 và 2 chuyển động đều với tốc độ v_1 và v_2 dọc theo hai đường thẳng vuông góc với nhau và hướng về giao điểm O của hai đường ấy. Tại thời điểm t = 0 chúng ở cách điểm O những khoảng l_1, l_2. Sau khoảng thời gian là bao nhiêu thì khoảng cách giữa chúng cực tiểu ? Khoảng cách cực tiểu ấy bằng bao nhiêu ?

1.3. Tại ba đỉnh A, B, C của một tam giác đều cạnh a = 30 cm, có ba động tử 1, 2 và 3. Chúng bắt chuyển động đều cùng một lúc với tốc độ v = 2 cm/s. Cho biết trong quá trình chuyển động, động tử 1 luôn hướng về động tử 2, động tử 2 luôn hướng về động tử 3 và động tử 3 luôn hướng về động tử 1. Hỏi sau bao lâu chúng gặp nhau và quãng đường mỗi động tử đã đi được là bao nhiêu ?

1.4. Trên mặt biển có hai tàu thủy chạy thẳng và đều. Chiếc thứ nhất lúc giữa trưa ở cách một cù lao nhỏ 40 dặm về phía Bắc, chuyển động với tốc độ 15 dặm/giờ và hướng về phía Tây. Chiếc thứ hai, lúc 8 giờ sáng cùng ngày, ở cách cù lao 100 dặm về phía Tây và chạy với tốc độ 15 dặm/giờ hướng về phía Nam.

Khoảng cách tối thiểu của hai con tàu bằng bao nhiêu và thời điểm nào thì xảy ra điều này ?

(Trích Đề thi Olimpic Vật lí Liên bang Nga, năm 2002)

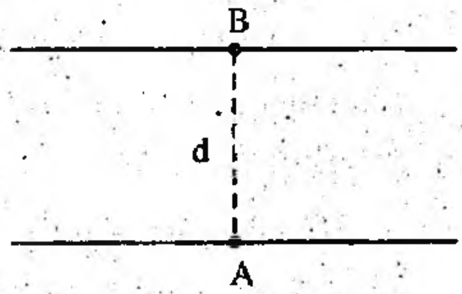
1.5. Trên quãng đường AB dài 81 km, có một chiếc xe đi từ A đến B. Cứ sau 15 phút chuyển động thẳng đều, xe này dừng lại nghỉ 5 phút. Trong khoảng thời gian

15 phút đầu, xe có vận tốc $v_1 = 10$ km/h và trong các khoảng thời gian kế tiếp, xe có vận tốc lần lượt $2v_1$, $3v_1$, $4v_1$,... Xuất phát cùng lúc với xe thứ nhất là một xe khác chuyển động thẳng đều từ B về A với vận tốc $v_2 = 30$ km/h.

a) Tìm thời điểm và vị trí gặp nhau của hai xe.

b) Tìm vị trí hai xe gặp nhau nếu xe đi từ B xuất phát muộn hơn xe đi từ A là 12 phút.

1.6. Một người cần bơi qua một con sông rộng AB = d = 750 m với tốc độ chảy của dòng nước là u = 1 m/s. Biết tốc độ chạy bộ của người đó trên bờ là v = 2,5 m/s, tốc độ bơi đối với nước là v' = 1,5 m/s (Hình 1.1).



Hình 1.1

Tìm lộ trình của người xuất phát từ A để đến B nhanh nhất và tính khoảng thời gian đó. Biết $\cos 25,4^o = 0,9$; $\sin 25,4^o = 0,43$; $\tan 25,4^o = 0,47$.

1.7. Một vật chuyển động chậm dần đều trên ba đoạn đường liên tiếp bằng nhau trước khi dừng lại. Biết rằng để chuyển động trên đoạn đường thứ hai thì vật phải đi trong 1 giây. Tính thời gian vật đi cả ba đoạn đường nói trên.

1.8. Để chạy thử chiếc xe đạp mới, một vận động viên đua xe đạp tự bấm giờ giữa hai điểm mốc cách nhau một khoảng s = 100 m. Gia tốc cực đại anh ta đạt được là a = 1 m/s^2. Khi hãm phanh, thì gia tốc có giá trị tuyệt đối lớn nhất a = 5 m/s^2. Vận tốc đầu và vận tốc cuối đều bằng 0.

Tính vận tốc cực đại của vận động viên và xác định thời gian cực tiểu để anh ta đi được quãng đường s.

1.9. Một buồng thang máy có khoảng cách giữa trần và sàn là 2,47 m chuyển động đi lên với gia tốc không đổi 2 m/s^2. Sau khi xuất phát 1,2 s, một chiếc bulông từ trần thang máy rơi xuống. Xác định :

a) Khoảng thời gian rơi của bulông.

b) Độ dời của bulông.

c) Quãng đường bulông đã đi được.

1.10. Một học sinh cầm hai quả bóng trong tay, lúc đầu em tung quả bóng thứ nhất thẳng đứng lên với vận tốc $v_0 = 8$ m/s.

Hỏi sau đó bau lâu, phải tung quả bóng thứ hai lên trên với vận tốc $\frac{v_0}{2}$ để hai quả bóng đập vào nhau sau khoảng thời gian là ngắn nhất (kể từ lúc đầu).

Vị trí hai quả bóng đập vào nhau cách vị trí tung bóng một khoảng bằng bao nhiêu ? Lấy $g = 10\ m/s^2$.

1.11. Một chiếc thuyền chuyển động với tốc độ u không đổi đối với nước, theo hướng vuông góc với dòng nước. Biết tốc độ chảy của nước tăng tỉ lệ với khoảng cách, từ giá trị 0 ở bờ đến giá trị v_0 ở giữa sông. Khoảng cách giữa hai bờ sông là l. Hãy xác định :

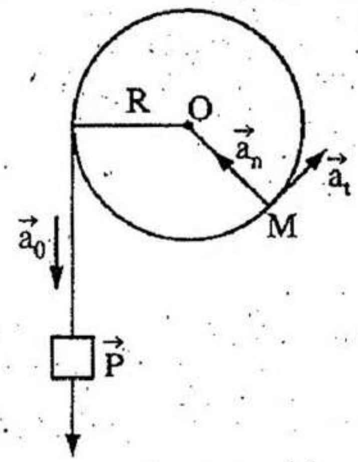
a) Khoảng cách thuyền bị dòng nước đưa trôi.

b) Quỹ đạo chuyển động của thuyền.

1.12. Một sợi dây được quấn quanh một trục nằm ngang, có bán kính là R (Hình 1.2).

Một đầu dây treo một tải trọng P. Tải trọng rơi với vận tốc ban đầu bằng 0, gia tốc $\vec{a}_0$ không đổi và làm trục quay.

Tìm biểu thức gia tốc toàn phần của một điểm trên mặt trục theo độ cao h của tải trọng.

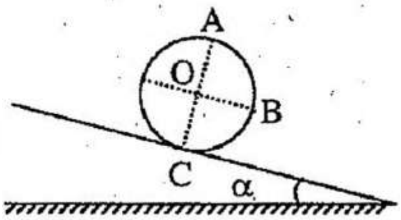


Hình 1.2

1.13. Một quả cầu bán kính R = 10,0 cm bắt đầu lăn không trượt dọc theo một mặt phẳng nghiêng sao cho tâm của nó chuyển động với gia tốc không đổi $a = 2,5\ m/s^2$ (Hình 1.3). Sau t = 2,00 s từ lúc bắt đầu chuyển động, vị trí quả cầu như hình vẽ. Hãy xác định:

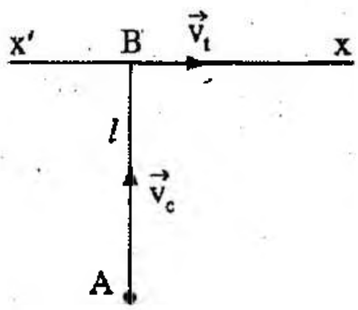
a) Vận tốc của những điểm A, B, C.

b) Gia tốc của chúng.



Hình 1.3

1.14. Một con thỏ đang chạy trên đường thẳng x'x với vận tốc $\vec{v}_t$ không đổi. Con chó săn ở A thấy thỏ thì lập tức tăng tốc đuổi theo, lúc đó khoảng cách giữa chúng là AB = l. Vận tốc của chó $\vec{v}_c$ có độ lớn không đổi nhưng luôn hướng về phía thỏ. Thỏ bị chó bắt được. Tính gia tốc tức thời của chó tại A (Hình 1.4).



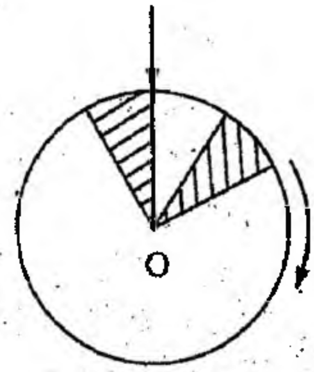
Hình 1.4

1.15. Một đĩa chia thành n hình quạt đều nhau quay chậm dần đều. Một kim chỉ thị gắn ở ngoài gần mép đĩa (Hình 1.5).

Hình quạt thứ nhất đi qua kim trong thời gian $t_1 = 4$ s.

Hình quạt thứ hai đi qua kim trong thời gian $t_2 = 5$ s.

Sau đó, đĩa quay thêm được một góc $\varphi = 0{,}75\pi$ rồi dừng lại. Tính gia tốc của đĩa.



Hình 1.5

1.16. Một dây cao su AB đàn hồi, đồng chất, tiết diện đều có độ dài tự nhiên L, đầu B được gắn chặt vào tường. Tại thời điểm t = 0, đầu A được kéo căng ngang ra xa tường với tốc độ không đổi V. Cùng lúc đó, một con kiến từ đầu A bắt đầu bò dọc theo dây về phía tường với tốc độ không đổi u so với dây. Hỏi con kiến có bò được tới tường không ? Nếu có thì sau thời gian bao lâu ?

1.17. Một máy bay bay đi và về giữa hai địa điểm A và B. Khoảng cách giữa A và B là L và máy bay có vận tốc không đổi V. Ngoài ra, có gió nhẹ với vận tốc là v.

a) Hãy tính tổng thời gian của chuyến bay nếu gió thổi dọc theo AB.

b) Tính tổng thời gian của chuyến bay nếu gió có phương vuông góc với AB.

c) Viết biểu thức tính tổng thời gian của chuyến bay, nếu gió có phương bất kì. Chú ý nếu có gió thổi theo bất kì phương nào, thời gian bay tăng lên.

(Trích đề thi Olimpic Vật lí Canada - 1998)

1.18. Bốn con rùa đứng ở bốn đỉnh hình vuông cạnh a, chúng bắt đầu chuyển động với vận tốc không đổi với độ lớn v sao cho mỗi con rùa luôn hướng về con bên cạnh theo chiều kim đồng hồ.

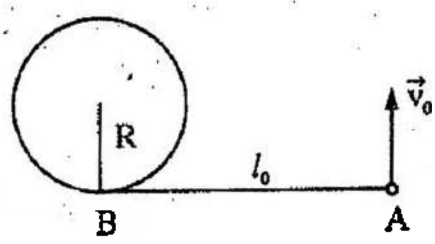
a) Hỏi các con rùa gặp nhau ở đâu, sau bao lâu ?

b) Quỹ đạo chuyển động của mỗi con rùa có dạng thế nào ?

Coi mỗi con rùa là một chất điểm.

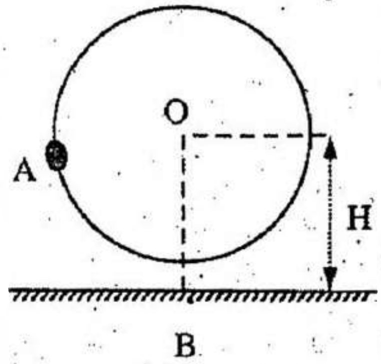
Chủ đề 2. ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT ĐIỂM VÀ HỆ CHẤT ĐIỂM

2.1. Trên mặt phẳng nằm ngang có một hình trụ thẳng đứng, cố định, bán kính đáy R và một vòng nhỏ A nối với hình trụ bằng sợi dây nằm ngang AB có độ dài l_0 (hình vẽ 2.1 nhìn từ trên xuống).



Hình 2.1

Vòng nhỏ A nhận vận tốc ban đầu $\vec{v}_0$ theo phương ngang vuông góc với dây. Tính thời gian chuyển động trong mặt phẳng của A cho đến khi nó gặp hình trụ. Bỏ qua ma sát.

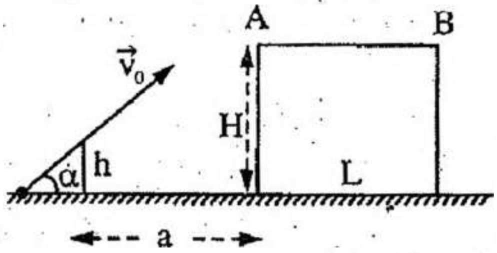


Hình 2.2

2.2. Một bánh xe bán kính R, có tâm cách mặt đất một đoạn H, quay đều với tốc độ góc ω. Từ bánh xe bắn ra một giọt nước và rơi chạm đất tại B ngay dưới tâm của bánh xe (Hình 2.2). Tính thời gian rơi của giọt nước và xác định điểm A trên bánh xe, nơi mà giọt nước bắn ra.

2.3. Một người đứng ở bờ biển ném một hòn đá ra biển từ độ cao H = 20 m so với mặt biển. Hỏi góc ném phải bằng bao nhiêu để hòn đá rơi xa bờ nhất ? Tính khoảng cách xa nhất đó. Vận tốc ban đầu của hòn đá là v_0 = 14 m/s.

2.4. Trên mặt phẳng nằm ngang có một vật cản với độ cao H, chiều dài L. Để bay qua vật cản đó, một vận động viên môtô đã chạy trên một mặt phẳng nghiêng có độ dốc α, độ cao h như hình 2.3. Biết người đó đã bay qua vật cản với vận tốc khi rời mặt dốc là nhỏ nhất. Hãy tính góc α và khoảng cách a từ chân mặt dốc đến vật cản theo phương ngang.



Hình 2.3

2.5. Một bóng đèn hình cầu treo ở độ cao h = 5 m bị nổ, các mảnh vỡ bắn ra theo hướng li tâm với tốc độ v = 10 m/s. Tìm vùng rơi của các mảnh vụn trên mặt đất. Bỏ qua sức cản của không khí và kích thước của bóng đèn. Gia tốc trọng trường g = 10 m/s^2.

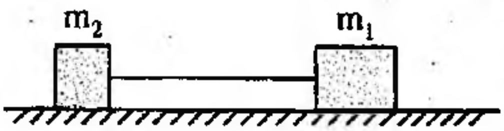
2.6. Hai vật nặng đặt trên mặt phẳng ngang được nối với nhau bằng một sợi dây chịu được lực căng tối đa là $\vec{T}_0$. Hệ số ma sát giữa các vật m_1 và m_2 với mặt phẳng là μ_1 và μ_2 (Hình 2.4).

Tìm giá trị lớn nhất của lực $\vec{F}$ theo phương ngang tác dụng lên vật m_1, rồi lên vật m_2 mà không làm sợi dây bị đứt. Xét bài toán trong các trường hợp :

a) $\mu_1 \neq \mu_2$.   b) $\mu_1 = \mu_2$.

c) Không ma sát.

Hình 2.4

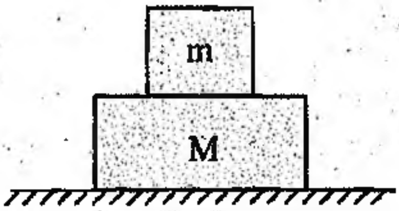


Để kéo cho hệ vật chuyển động thì lực $\vec{F}$ nên đặt vào vật nào ?

2.7. Hai vật m và M chồng lên nhau được đặt lên mặt sàn ngang như trên hình 2.5. Hệ số ma sát giữa m và M là μ_1 giữa M và sàn là μ_2. Hãy tìm độ lớn của lực $\vec{F}$ nằm ngang

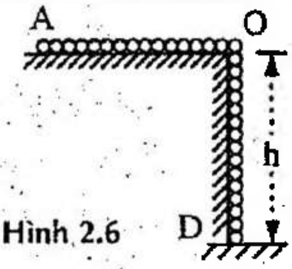
a) đặt lên M để M trượt khỏi m.

b) đặt lên m để m trượt trên M.



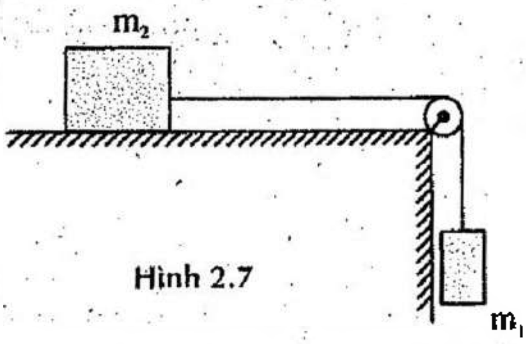
Hình 2.5

2.8. Một đoạn dây xích AOD (Hình 2.6) có độ dài l, đầu D chạm đất, đầu A được giữ chặt trên mặt bàn nằm ngang OA. Cho biết OD = h. Khi thả đầu A ra sợi dây xích sẽ tuột xuống đất. Tìm vận tốc của đầu A khi nó tới mép bàn O. Áp dụng số : l = 50 cm, h = 30 cm, g = 9,81 m/s^2.



Hình 2.6

2.9. Cho hệ cơ như hình 2.7. Biết m_1 = 0,5 kg, m_2 = 1 kg. Hệ số ma sát giữa m_2 và bàn là μ = 0,2 ; g = 10 m/s^2.



Hình 2.7

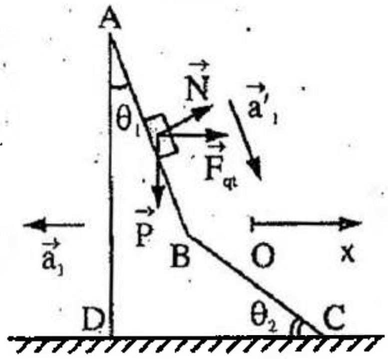
1. Khi bàn đứng yên, buông tay đỡ m_1. Tính gia tốc của các vật.

2. Cho bàn chuyển động theo phương thẳng đứng với gia tốc a_0. Tính a_0 để :

a) Gia tốc các vật đối với bàn bằng nửa gia tốc của chúng khi bàn đứng yên.

b) Các vật không chuyển động đối với bàn.

2.10. Một cái nêm có dạng ABCD (Hình 2.8). (Có khối lượng 2m ; $\theta_1 = 30^o$; $\theta_2 = 45^o$), có thể trượt không ma sát trên mặt sàn. Một vật nhỏ có khối lượng m bắt đầu trượt không ma sát trên mặt nêm AB và BC từ đỉnh A (không vận tốc ban đầu).



Hình 2.8

a) Xác định gia tốc của nêm.

b) Biết AB = BC = 0,5 m, xác định quãng đường mà nêm trượt được từ khi vật nhỏ bắt đầu trượt đến lúc nó rời khỏi nêm. (Lấy g = 10 m/s^2).

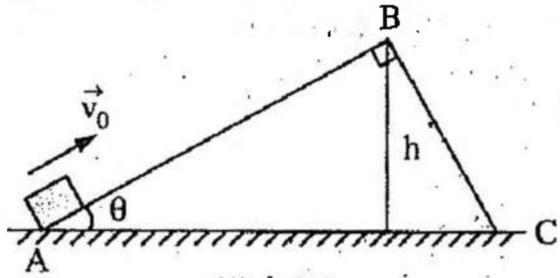
2.11. Người ta bắn viên đạn theo phương ngang vào tâm của một tấm bảng hình vuông được treo tự do. Nếu vận tốc $\vec{v}$ của viên đạn lớn hơn một giá trị $\vec{v}_0$ thì viên đạn xuyên qua tấm bảng. Hỏi tấm bảng sẽ chuyển động với vận tốc bằng bao nhiêu, nếu vận tốc của viên đạn bằng : $2\vec{v}_0$, $n\vec{v}_0$? Với vận tốc nào của viên đạn thì vận tốc của tấm bảng sẽ đạt cực đại. Biết khối lượng của viên đạn là m, của tấm bảng là M. Cho rằng lực cản của tấm bảng đối với viên đạn không phụ thuộc vận tốc viên đạn.

2.12. Trong không gian giữa các vì sao có một đám mây khí hình cầu, được tạo bởi các hạt coi như các chất điểm. Ban đầu đám mây đứng yên khối lượng phân bố đều với khối lượng riêng là ρ. Dưới tác dụng của lực hấp dẫn giữa các hạt, đám mây này bắt đầu co lại và từ đó mỗi hạt đều có một vận tốc theo bán kính. Giả thiết trong quá trình co lại này, hạt bên ngoài không đuổi kịp hạt bên trong.

Chứng minh rằng, nếu bỏ qua tất cả các lực khác thì tất cả các hạt đều đến tâm của đám mây trong cùng một khoảng thời gian bằng nhau. Tính thời gian đó. Áp dụng bằng số với $\rho = 10^{-20}$ kg/m^3.

2.13. Một học sinh muốn ném một quả bóng tới một mục tiêu A ở ngang đầu mình nhưng lại vướng một bức tường cao hơn đầu mình một khoảng h. Khoảng cách từ học sinh đến tường là a, từ tường đến mục tiêu A là b. Hỏi để bóng có vận tốc ban đầu tối thiểu thì góc ném phải bằng bao nhiêu ?

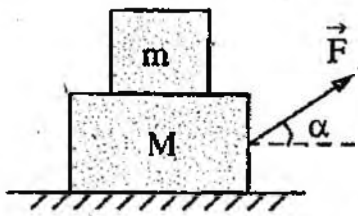
2.14. Trên mặt sàn nằm ngang có một chiếc nêm có khối lượng M, có mặt cắt là tam giác vuông ABC. Góc giữa hai cạnh AB và AC là θ, chiều cao từ B đến mặt sàn là h. Tại A của cạnh nêm AB đặt một vật có khối lượng m (Hình 2.9). Lúc đầu vật và nêm đứng yên, sau đó cho vật m chuyển động theo hướng AB với vận tốc đầu $\vec{v}_0$. Bỏ qua ma sát giữa nêm và mặt sàn và ma sát giữa vật và cạnh AB. Hỏi v_0 phải lớn hơn giá trị bao nhiêu để vật có thể vượt qua được đỉnh B ?



Hình 2.9

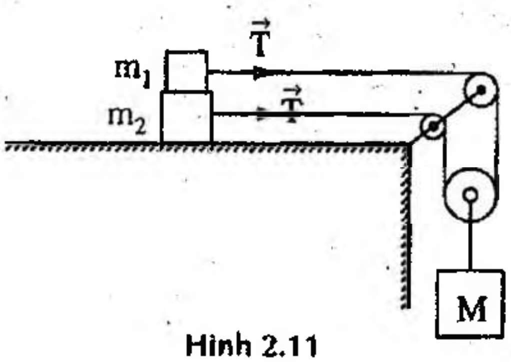
(Trích Đề thi Olimpic Vật lí Trung Quốc năm 1983)

2.15. Hệ cơ gồm hai vật m và M chồng lên nhau, được đặt trên mặt sàn ngang như trên hình 2.10. Hệ số ma sát giữa hai vật m và M là μ_1 ; giữa M và mặt sàn là μ_2. Tác dụng vào M lực $\vec{F}$ hợp với mặt ngang góc α. Khi α thay đổi $(0 < \alpha < 90^o)$. Tìm $\vec{F}$ nhỏ nhất để vật M trượt khỏi vật m và tính góc α khi đó.



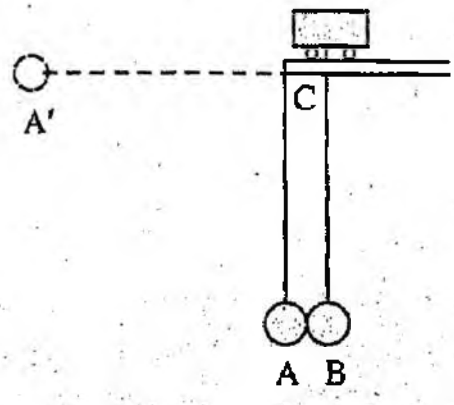
Hình 2.10

2.16. Cho hệ cơ như hình 2.11 : $M = m_1 + m_2$. Mặt bàn nhẵn, hệ số ma sát giữa hai vật m_1 và m_2 là μ. Tìm tỉ số $\dfrac{m_2}{m_1}$ để chúng không trượt lên nhau.



Hình 2.11

2.17. Trên hình 2.12, một chiếc xe lăn nhỏ đang nằm yên trên mặt phẳng ngang không ma sát ; hai sợi dây mảnh cùng chiều dài 0,8 m, một dây buộc vào giá đỡ C, một dây treo vào chiếc xe lăn, đầu dưới của hai sợi dây có mang những quả cầu nhỏ có khối lượng lần lượt $m_A = 0,4$ kg và $m_B = 0,2$ kg. Khi cân bằng thì hai quả cầu tiếp xúc nhau.



Hình 2.12

Kéo quả cầu A lên để cho dây treo nó có phương nằm ngang (vị trí A') từ đó A thả ra, sau khi hai quả cầu đã va chạm nhau, quả cầu A bật lên tới độ cao 0,2 m so với vị trí ban đầu của hai quả cầu. Hỏi :

a) Sau va chạm, quả cầu B sẽ lên tới độ cao nào ?

b) Khi quả cầu B từ vị trí bên phải rơi xuống tới vị trí thấp nhất, thì tốc độ của nó là bao nhiêu ?

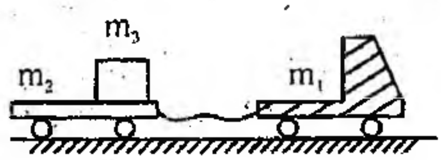
(Trích Đề thi Olimpic Vật lí Thượng Hải - Trung Quốc, năm 1986)

2.18. Trên mặt phẳng ngang không ma sát, có một chiếc xe nhỏ khối lượng $m_1 = 20$ kg. Nhờ một sợi dây không co dãn, xe nhỏ kéo theo một xe khác khối lượng $m_2 = 25$ kg. Một vật nhỏ khối lượng $m_3 = 20$ kg được đặt lên trên xe lăn, hệ số ma sát giữa vật và xe lăn là $\mu = 0,20$. Lúc ban đầu xe lăn đứng yên, dây nối chưa bị căng (Hình 2.13). Xe nhỏ đi với vận tốc không đổi $v_0 = 3$ m/s.

a) Tính vận tốc sau cùng v của hệ.

b) Hỏi khi dây nối vừa bị căng, thì hệ sẽ có vận tốc v là bao nhiêu?

c) Tìm quãng đường vật nhỏ trượt trên xe lăn.



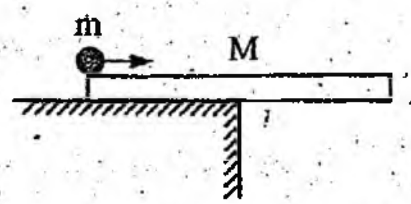
Hình 2.13

(Trích Đề thi Olimpic Vật lí Thượng Hải - Trung Quốc, năm 1987)

2.19. Một tên lửa, không chịu tác dụng của các lực hấp dẫn trong vũ trụ, đang chuyển động nhanh dần theo một quỹ đạo thẳng. Khối lượng vỏ tên lửa (cùng các thiết bị gắn vào nó) là M. Ở thời điểm t, khối lượng của nhiên liệu chứa trong tên lửa là $m = m_0 e^{-kt}$ (k là hằng số dương), và vận tốc tương đối (so với tên lửa) của lượng khí nhiên liệu phụt ra là $v = v_0 e^{-kt}$. Giả sử $m_0 \ll M$, hãy chứng minh rằng vận tốc cuối của tên lửa lớn hơn vận tốc đầu của nó một lượng xấp xỉ bằng $\frac{m_0 v_0}{2M}$.

(Trích Đề thi Olimpic Vật lí Vương quốc Anh năm 1979)

2.20. Một ống hút bằng rơm đồng chất đặt vuông góc ở mép bàn không có ma sát sao cho nửa chiều dài ống thò ra ngoài (Hình 2.14). Một con ruồi bò từ đầu ống này đến đầu ống kia. Ống hút vẫn nằm cân bằng. Liệu ống hút có cân bằng không khi một con ruồi khác đậu ngay vào phía trên con ruồi thứ nhất ?



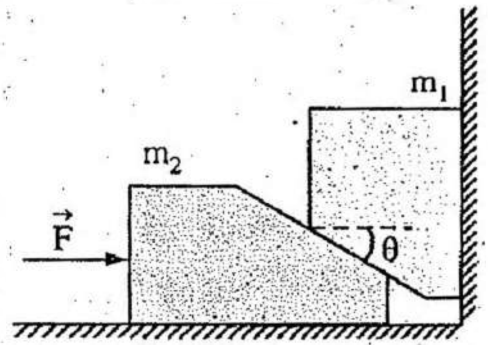
Hình 2.14

2.21. Cho hai vật khối lượng m_1 và m_2 bố trí như hình 2.15. Tác dụng một lực $\vec{F}$ lên vật m_2 để hệ cân bằng.

a) Phân tích lực tác dụng lên từng khối.

b) Xác định độ lớn của lực $\vec{F}$.

c) Vào thời điểm $t = 0$, tăng gấp đôi giá trị của lực $\vec{F}$. Tính gia tốc chuyển động đi lên của khối m_1.



Hình 2.15

d) Viết biểu thức tính công suất của lực $\vec{F}$ (giá trị câu c) theo thời gian.

e) Nếu có lực ma sát giữa khối m_1 với mặt phẳng thẳng đứng và khối m_2 với mặt phẳng nằm ngang với hệ số ma sát μ, hãy xác định giá trị tối thiểu của lực $\vec{F}$ để hệ cân bằng.

Áp dụng bằng số : $g = 9{,}81$ m/s^2 ; $m_1 = 5$ kg, $m_2 = 3$ kg, $\theta = 30^\circ$, $\mu = 0{,}2$.

(Trích đề thi Olimpic Vật lí - 2007)

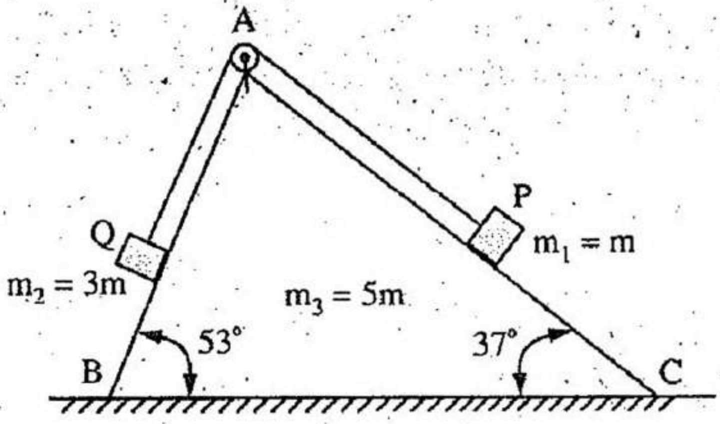
2.22. Một giọt nước hình cầu bán kính r_0 rơi (với vận tốc ban đầu $v = 0$) vào một đám mây chứa đầy hơi nước bão hòa. Trong thời gian giọt nước rơi trong đám mây, hơi nước bão hòa ngưng tụ vào giọt nước, làm cho khối lượng giọt nước tăng thêm, nhưng giọt nước vẫn giữ nguyên dạng hình cầu. Cho biết phần khối lượng tăng thêm của giọt nước trong một đơn vị thời gian tỉ lệ thuận với diện tích mặt ngoài của giọt nước với hệ số tỉ lệ là k. Hãy tìm :

a) Biểu thức vận tốc phụ thuộc thời gian của giọt nước trong quá trình rơi trong đám mây.

b) Gia tốc ổn định của giọt nước trong đám mây sau thời gian đủ lớn. Bỏ qua mọi lực cản lên giọt nước. Coi gia tốc trọng trường g và khối lượng riêng ρ của nước là không đổi. Xem đám mây đủ dày.

(Trích đề thi Olimpic Vật lí Ba Lan - 1988)

2.23. Hai vật P và Q có khối lượng $m_1 = m$ và $m_2 = 3m$ được nối với nhau bằng sợi dây không co dãn. Dây được lồng qua ròng rọc nhẹ, không ma sát, đặt tại đỉnh A của một nêm có khối lượng $m_3 = 5m$. Nêm có tiết diện ngang là tam giác ABC với $\widehat{ABC} = 53^o$ và $\widehat{ACB} = 37^o$, cạnh BC nằm trên mặt bàn nằm ngang (Hình 2.16). Nêm có thể trượt trên bàn này. Giữ nguyên ba vật và sau đó thả ra cùng một lúc.



Hình 2.16

a) Xác định các lực tác dụng lên từng vật.

b) Giả sử tất cả các mặt đều không có ma sát. Tính gia tốc của mỗi vật so với mặt bàn đứng yên.

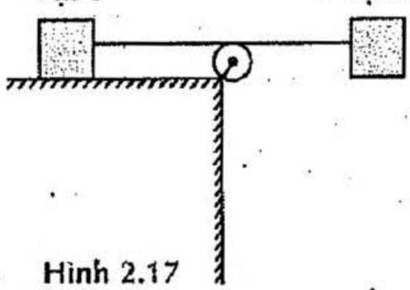
c) Nếu có lực ma sát giữa nêm và mặt bàn, hãy tính hệ số ma sát sao cho nêm vẫn còn đứng yên trên mặt bàn.

Lấy $g = 10\ m/s^2$; $\sin 37^o = 0,6 = \cos 53^o$.

(Trích đề thi Olimpic Vật lí Đảo Ship - 1998)

2.24. a) Trên một bệ cao 10 m có đặt thùng nước hình trụ cao 10 m, đường kính 3 m. Phải khoan một lỗ ở vị trí nào trên thùng để nước bắn đến vị trí cách chân bệ 5 m ?

b) Có hai vật như nhau nối với nhau bằng sợi dây dài 1 m. Một vật nằm trên bàn không có ma sát (Hình 2.17). Nâng vật 2 còn lại lên sao cho dây nằm ngang, ròng rọc nằm ở giữa đoạn dây.



Hình 2.17

Bằng lí luận, hãy dự đoán xem sau khi thả vật 2 ra, sự kiện nào sau đây xảy ra trước :

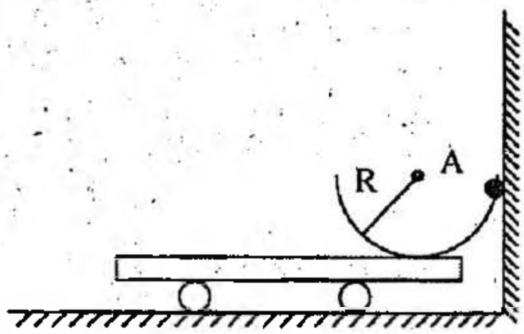
– Vật 1 đụng vào ròng rọc.

– Vật 2 chạm vào thành bàn.

Làm lại bằng thí nghiệm để kiểm tra.

(Trích đề thi Olimpic Vật lí Canada - 2000)

2.25. Một mặt cong nhẵn hình bán cầu bán kính R được gắn chặt trên một xe lăn nhỏ như hình 2.18. Khối lượng tổng cộng của xe và mặt cong là M. Xe được đặt trên mặt phẳng nhẵn nằm ngang. Lúc ban đầu, đầu A của mặt cong được đặt tiếp xúc với vách tường thẳng đứng.



Hình 2.18

Từ A, người ta thả một quả cầu nhỏ khối lượng m cho trượt xuống mặt cong với vận tốc đầu bằng 0. Hãy tính :

a) Độ lên cao tối đa của vật nhỏ trong mặt cong.

b) Vận tốc tối đa mà xe lăn đạt được sau đó.

(Trích đề thi Olimpic Vật lí Trung Quốc - 1988)

2.26. Một sợi dây nhẹ chiều dài l có một đầu buộc vào điểm cố định O, đầu kia mang một hình cầu nhỏ khối lượng m. Nâng quả cầu lên tới vị trí ở ngay dưới điểm O khoảng $\frac{l}{4}$ rồi từ đó truyền cho quả cầu một vận tốc $\vec{v}$ theo phương ngang sang bên phải. Sau một lúc, dây căng trở lại, kể từ đó quả cầu dao động như một con lắc quanh trục O. Cho biết lúc dây vừa bị căng thẳng nó hợp với phương thẳng đứng góc 60°. Hãy tính :

a) Vận tốc ban đầu của quả cầu lúc vừa được phóng ra.

b) Xung lượng đặt vào trục O khi dây vừa bị căng thẳng.

c) Lực căng dây khi quả cầu xuống tới vị trí thấp nhất.

(Trích đề thi Olimpic Vật lí Trung Quốc - 1992)

2.27. Trên một mặt phẳng ngang nhẵn có đặt hai khối gỗ A và B cùng khối lượng m, được nối với nhau bởi một lò xo, khối lượng lò xo không đáng kể. Một viên đạn khối lượng $\frac{m}{4}$ bay theo phương ngang với vận tốc v tới cắm vào khối gỗ A.

a) Khi viên đạn vừa cắm vào khối gỗ hãy tính vận tốc của khối A (có viên đạn bên trong) và của khối B.

b) Trong quá trình chuyển động của hệ sau đó hãy tìm động năng tối đa của B, động năng tối thiểu của A và thế năng đàn hồi lớn nhất của lò xo.

(Trích đề thi Olimpic Vật lí Trung Quốc - 1993)

2.28. Hai quả cầu 1 và 2, khối lượng $m_1 = 50$ g và $m_2 = 100$ g, được gắn vào hai đầu một thanh nhẹ mỏng, tuyệt đối vuông dài $l = 30$ cm. Ban đầu thanh được dựng thẳng đứng trên đỉnh một cái tháp cao h = 300 m. Một quả cầu nhỏ khối lượng $m_0 = m_1$ chuyển động theo phương ngang với vận tốc ban đầu $v_0 = 10$ m/s, tới va chạm vào quả cầu 1. Va chạm là xuyên tâm, tuyệt đối không đàn hồi. Sau va chạm, hai quả cầu 1 và 3 gắn vào nhau và toàn bộ hệ rời khỏi tháp, quay quanh khối tâm của nó. Bỏ qua mọi ma sát. Hãy tính :

a) Vận tốc dài của hệ khi rời tháp.

b) Vận tốc góc của hệ.

c) Vị trí của hệ cách chân tháp khi chạm đất.

d) Vận tốc của hệ khi chạm đất.

e) Số vòng quay mà hệ đã thực hiện trong thời gian bay.

Hãy biện luận về các tình huống (tư thế) khả dĩ của hệ khi chạm đất. Tình huống nào là sát với thực tế nếu căn cứ vào dữ kiện của đề bài ?

(Trích đề thi Olimpic Vật lí Anbani - 1996)

Chương II
CƠ HỌC VẬT RẮN

Chủ đề 3. ĐỘNG HỌC VẬT RẮN

3.1. Một vành tròn bán kính R lăn không trượt trên mặt phẳng với vận tốc v không đổi.

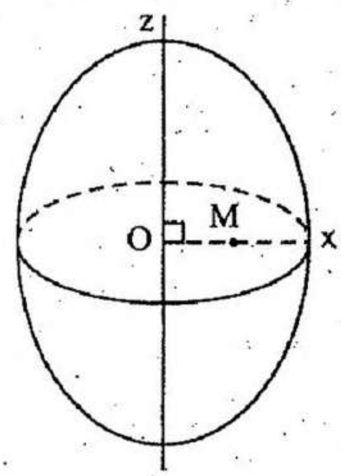
a) Tìm phương trình chuyển động và phương trình quỹ đạo của một điểm bất kì trên vành tròn.

b) Tính quãng đường s giữa hai lần gặp nhau liên tiếp của điểm khảo sát trên vành tròn và của vòng tròn.

c) Tìm gia tốc toàn phần.

3.2. Một vật rắn quay quanh một trục Oz với gia tốc không đổi γ và vận tốc góc tức thời ω. Xét các điểm M trên đường thẳng Ox vuông góc với Oz (Hình 3.1). Chứng minh các vectơ gia tốc của các điểm ấy tỉ lệ với khoảng cách tới trục và nghiêng cùng một góc so với Ox.

Xét hai trường hợp quay nhanh dần đều và quay chậm dần đều. So sánh với các vectơ vận tốc của các điểm M.



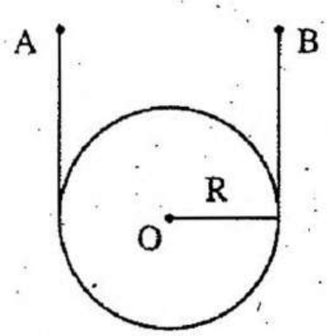
Hình 3.1

3.3. Một ròng rọc tâm O, bán kính R được đỡ bằng một sợi dây có hai nhánh thẳng đứng (Hình 3.2). Dây không trượt trên ròng rọc.

Tính vận tốc của tâm O và vận tốc góc của ròng rọc trong hai trường hợp :

a) Đầu A của dây đi lên với vận tốc v, đầu B đi xuống với vận tốc v'.

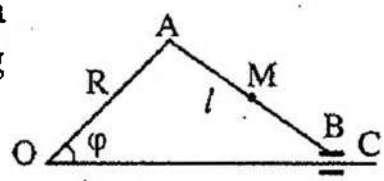
b) Cả hai đầu đi lên với các vận tốc v, v'.



Hình 3.2

3.4. Tay quay OA = R quay quanh O với vận tốc góc ω và kéo thanh biên AB = l đầu B chuyển động trên đường thẳng OC (Hình 3.3). Tính theo góc $\widehat{COA} = \varphi$:

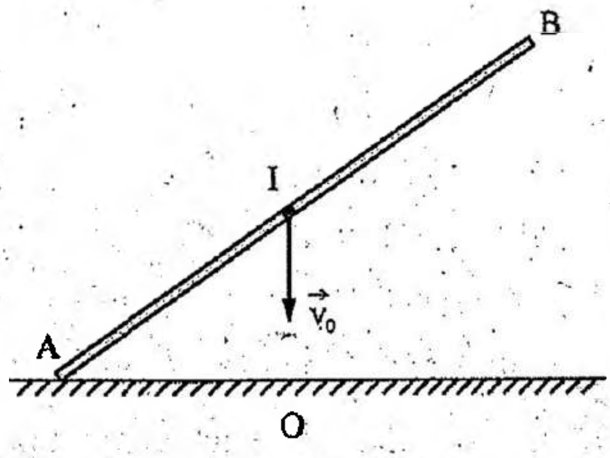
a) Vận tốc của đầu B.



Hình 3.3

b) Tìm (bằng phép vẽ) vận tốc của một điểm M của biên. Điểm nào có vận tốc nhỏ nhất ?

3.5. Khối tâm I của một thanh gỗ AB đồng chất tiết diện đều, chiều dài $2l$, chuyển động dọc theo trục thẳng đứng vận tốc không đổi v_0 và một đầu của nó trượt dọc theo đường thẳng nằm ngang nhẵn. Ban đầu ($t = 0$) AB thẳng đứng, đầu A nằm trên mặt phẳng ngang như hình 3.4.



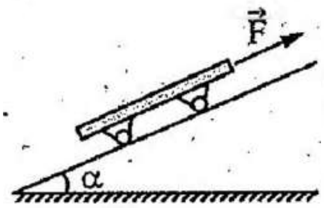
Hình 3.4

a) Tìm phương trình quỹ đạo đầu B.

b) Xác định giá trị vận tốc và gia tốc đầu B của thanh gỗ tại thời điểm thanh gỗ tạo với phương thẳng đứng một góc $\alpha = 45^0$.

Chủ đề 4. ĐỘNG LỰC HỌC VẬT RẮN CÁC ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN

4.1. Một xe gồm sàn có khối lượng $M = 18$ kg và 4 bánh xe mỗi cái có khối lượng $m = 2$ kg, được kéo lên trên một mặt phẳng nghiêng góc $\alpha = 30^0$ so với phương ngang, bởi lực $F = 160$ N song song với mặt phẳng (Hình 4.1). Vận tốc ban đầu bằng 0. Các bánh xe lăn không trượt ; coi chúng như các đĩa đồng chất.



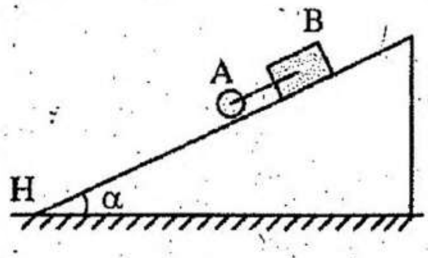
Hình 4.1

a) Tính vận tốc tịnh tiến của xe khi đã đi được quãng đường $l = 4$ m.

b) Tính gia tốc a của xe.

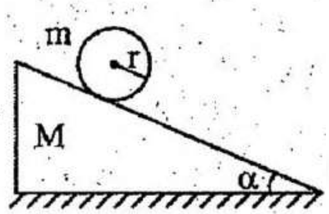
c) Nếu 4 bánh xe không quay mà chỉ trượt không ma sát trên mặt phẳng nghiêng thì cũng lực $\vec{F}$ trên đây sẽ gây ra gia tốc a' bằng bao nhiêu ? So sánh a' với a và giải thích. Lấy $g = 10$ m/s^2.

4.2. Trên mặt phẳng nghiêng góc α, người ta đặt một hình trụ đặc A có khối lượng $m_1 = 4$ kg và bán kính $r = 5$ cm, cách chân H của mặt phẳng nghiêng một đoạn 2m. Người ta xuyên dọc theo trục của hình trụ một thanh nhỏ không khối lượng, tì vào các ổ bi. Dùng một sợi dây không dãn, không khối lượng, nối vào thanh lõi của hình trụ một vật B có khối lượng $m_2 = 2$ kg (Hình 4.2). Tìm lực căng của dây nối và thời gian hình trụ lăn đến H kể từ khi bắt đầu thả vật B khi góc nghiêng $\alpha = 30^o$. Nếu $\alpha = 45^o$ thì có hiện tượng gì xảy ra ? Cho biết hệ số ma sát giữa vật B và mặt phẳng nghiêng là $\mu = 0,2$. Bỏ qua ma sát ở các ổ bi và ma sát lăn. Lấy $g = 10$ m/s^2.



Hình 4.2

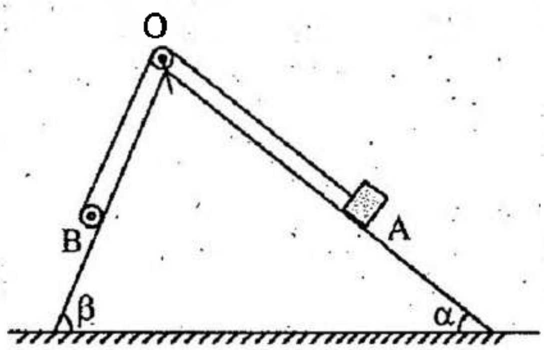
4.3. Một khối trụ đồng chất bán kính r, khối lượng m, momen quán tính $I = \frac{1}{2}mr^2$, lăn không trượt từ trạng thái nghỉ trên một cái nêm khối lượng M có góc nghiêng α (Hình 4.3). Nêm lúc đầu đứng yên có thể trượt không ma sát trên mặt bàn nằm ngang.



Hình 4.3

Tính gia tốc a của tâm hình trụ đối với nêm và gia tốc a_0 của nêm đối với bàn.

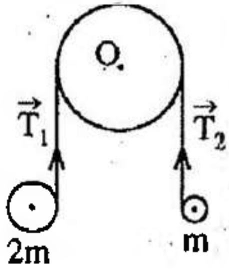
4.4. Một cơ hệ như hình 4.4 : vật A có khối lượng m_1, ròng rọc O có khối lượng m_2. Sợi dây mảnh không dãn nối từ A vắt qua ròng rọc quấn vào con lăn B có khối lượng m_3. Ròng rọc và con lăn coi như khối trụ đồng chất có cùng bán kính R. Các góc α, β đã biết. Bỏ qua ma sát.



Hình 4.4

Vật A đi xuống không vận tốc đầu, con lăn lăn không trượt. Tìm gia tốc chuyển động của vật A.

4.5. Một ròng rọc cố định O có khối lượng m và bán kính R. Một sợi dây không dãn, khối lượng không đáng kể vắt lên ròng rọc ấy và không trượt. Hai đầu dây quấn nhiều vòng lên hai ròng rọc động có khối lượng $m_1 = 2m$ (ròng rọc 1) và $m_2 = m$ (ròng rọc 2). Các phần dây không quấn đủ dài để có thể coi gần đúng là thẳng đứng. Gia tốc trọng trường là $\vec{g}$. Thả hệ từ trạng thái nghỉ, hai ròng rọc động quay và đi xuống trong mặt phẳng của ròng rọc cố định, làm ròng rọc này cũng quay (Hình 4.5).



Hình 4.5

a) Tính gia tốc góc γ của ròng rọc O, các gia tốc dài a_1 và a_2 của hai ròng rọc động.

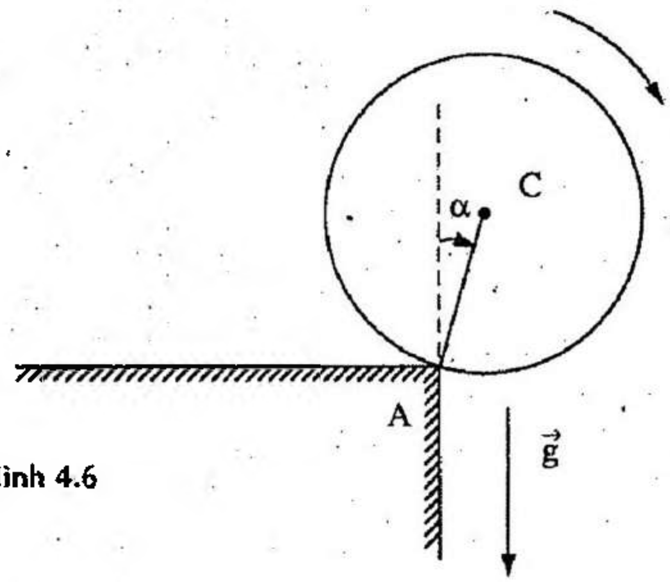
b) Tính các lực căng dây $\vec{T}_1$ và $\vec{T}_2$. So sánh các phản lực của trục O khi hệ chưa và đang chuyển động. Coi các ròng rọc là các đĩa đồng chất khi tính momen quán tính.

4.6. Trên mặt phẳng nghiêng góc α có một hộp nhỏ A khối lượng m_1 và một hình trụ rỗng B khối lượng m_2 (momen quán tính của hình trụ đối với trục của nó là $I = m_2r^2$). Hai vật cùng bắt đầu chuyển động xuống phía dưới. Hộp trượt với hệ số ma sát μ, còn hình trụ lăn không trượt.

a) Tìm góc nghiêng α để khi chuyển động hai vật luôn luôn cách nhau một khoảng không đổi.

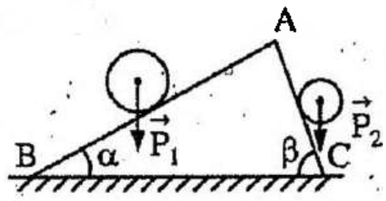
b) Để có chuyển động trên đây thì hệ số ma sát giữa hình trụ và mặt phẳng nghiêng phải thỏa mãn điều kiện gì ?

4.7. Một vật hình trụ đồng chất khối lượng m, bán kính R (có momen quán tính đối với trục đối xứng $I_C = \frac{1}{2}mR^2$) nằm ở mép bàn sao cho đường sinh mặt trụ tiếp xúc với cạnh A của mép bàn (Hình 4.6). Ban đầu trụ cân bằng, sau đó trụ đổ xuống bàn ($v_0 = 0$) theo góc nghiêng α tăng dần. Ở độ nghiêng α_0 nào thì mặt trụ bắt đầu trượt trên cạnh mép bàn ? Biết hệ số ma sát trượt giữa mặt trụ và cạnh bàn là $\mu = 0,2$.



Hình 4.6

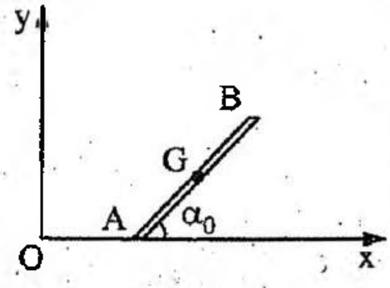
4.8. Hai hình trụ đồng chất có khối lượng m_1, m_2 được cuốn vào hai đầu sợi dây không dãn, không khối lượng vắt qua điểm gấp A của hai mặt nghiêng nhẵn AB, AC hợp với mặt phẳng ngang những góc α, β (Hình 4.7).



Hình 4.7

Khi thả cho lăn theo mặt phẳng nghiêng, các trụ chuyển động xuống. Xác định lực căng dây và gia tốc của dây đối với mặt phẳng nghiêng.

4.9. Trên hình 4.8, xOy là mặt phẳng thẳng đứng, Ox nằm ngang. Trong mặt phẳng này có một thanh đồng chất AB chiều dài $2l$, khối lượng m. Đầu A có thể trượt không ma sát trên Ox. Thả nhẹ cho thanh đổ từ vị trí ban đầu làm với Ox góc α_0.



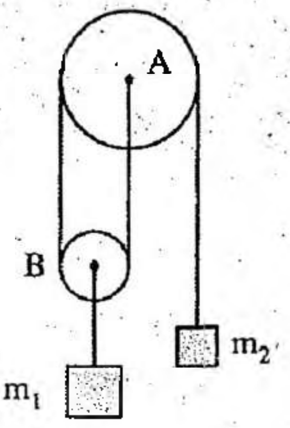
Hình 4.8

a) Khối tâm G của thanh chuyển động thế nào ?

b) Tính vận tốc của khối tâm theo góc α mà thanh làm với Ox.

c) Tính vận tốc của khối tâm lúc sắp đập vào Ox trong trường hợp riêng $\alpha_0 = 90^o$. So sánh với trường hợp chất điểm có khối lượng m rơi từ độ cao l. Gia tốc trọng trường là g.

4.10. Trong hình 4.9 là hệ ròng rọc : A cố định và B (lưu) động. Dây nối rất nhẹ, không dãn và không trượt trên các ròng rọc. Hệ mang hai vật có khối lượng m_1 và m_2 ($m_1 \neq m_2$).



Hình 4.9

a) Cả hai ròng rọc có khối lượng không đáng kể. Thả cho hệ thống chuyển động từ trạng thái nghỉ. Tính gia tốc a_2 của m_2. So sánh lực $\vec{Q}$ mà trục A phải chịu khi hệ chuyển động với lực $\vec{P}$ mà nó chịu khi hệ đứng yên.

b) B có khối lượng không đáng kể, A có khối lượng m, bán kính R (momen quán tính $I = \frac{mR^2}{2}$), $m_1 = m_2$. Hỏi như câu a).

4.11. Trên một mặt bàn nhẵn nằm ngang có một thanh mảnh AB đồng chất khối lượng m, chiều dài $2l$ đang nằm yên. Một viên đạn khối lượng m bay ngang với vận tốc v_0 tới cắm vuông góc vào đầu B của thanh (va chạm hoàn toàn không đàn hồi).

a) Tìm vị trí và vận tốc của khối tâm G của hệ gồm thanh và đạn sau va chạm.

b) Tìm vận tốc góc quay quanh G của thanh sau va chạm.

c) Tìm độ giảm động năng của hệ do va chạm.

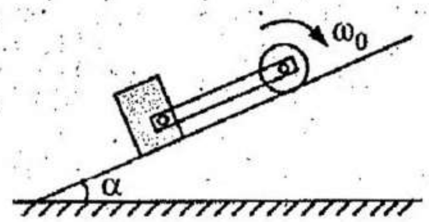
d) Ngay sau va chạm có một điểm G của thanh có vận tốc tuyệt đối bằng 0 (gọi là tâm quay tức thời). Xác định vị trí của G. Cho biết momen quán tính của thanh đối với trục đi qua trung điểm O của thanh (khối tâm của thanh) bằng $I_0 = \frac{ml^2}{3}$.

4.12. Thanh AB đồng chất dài là a, đầu A tựa vào tường nhẵn, đầu B tựa lên mặt sàn nằm ngang nhẵn. Giữ thanh cân bằng tĩnh tạo với mặt nằm ngang một góc φ_0 rồi thả cho nó chuyển động. Xác định :

a) Vận tốc góc và gia tốc góc của thanh theo góc φ.

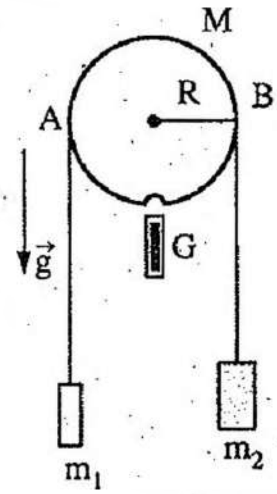
b) Tính phản lực do tường và sàn tác dụng lên thanh theo góc φ. Suy ra giá trị của φ lúc đầu A rời khỏi tường.

4.13. Một vật khối lượng m được nối cố định vào trục một con lăn hình trụ bán kính R có cùng khối lượng m. Quay con lăn theo chiều cho như trên hình 4.10, đến khi nó có vận tốc góc ω_0. Ngay sau đó đặt hệ lên mặt phẳng nghiêng có góc nghiêng α. Hệ số ma sát trượt đối với mặt nghiêng của con lăn là $\mu_1 = 5\tan\alpha$, của vật là $\mu_2 = \tan\alpha$. Thanh nối giữa hình trụ và vật song song với mặt nghiêng. Bỏ qua khối lượng thanh nối và ma sát lăn. Hãy mô tả chuyển động của hệ thống trên mặt nghiêng.



Hình 4.10

4.14. Sợi dây không dãn, khối lượng không đáng kể, được vắt qua ròng rọc cố định, hai đầu buộc vào hai vật nặng m_1 và m_2 ($m_1 < m_2$). Ròng rọc có khối lượng M, bán kính R và có một khe hẹp để phanh lại khi chốt G găm vào đó (Hình 4.11). Biết hệ số ma sát trượt giữa dây và ròng rọc là μ. Bỏ qua ma sát ở ổ trục của ròng rọc. Lúc đầu ròng rọc bị chốt lại, hệ ở trạng thái cân bằng.



Hình 4.11

a) Khi chốt G rời khỏi ròng rọc, hệ bắt đầu chuyển động. Tính gia tốc $\bar{a}$ và vận tốc của các vật khi ròng rọc quay được một vòng.

b) Ngay sau khi ròng rọc quay được một vòng, chốt G lại găm tức thời vào khe của ròng rọc làm cho dây bị trượt trên ròng rọc. Biết rằng trên đoạn dl của phần dây tiếp xúc với ròng rọc thì lực căng T của dây biến thiên một lượng theo quy luật $dT = \dfrac{k}{R}T\,dl$.

Hãy xác định gia tốc a' của các vật và các lực căng T_1, T_2 tại các điểm A và B tương ứng là nơi dây bắt đầu tiếp xúc với ròng rọc.

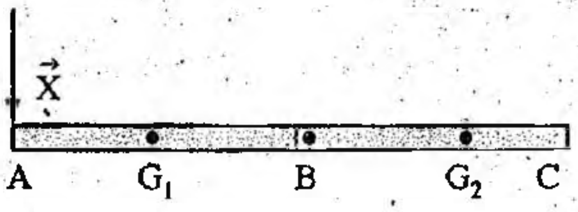
c) Tính vận tốc của các vật sau thời gian t kể từ thời điểm dây bị trượt trên ròng rọc.

Áp dụng bằng số: $m_1 = 1,0$ kg ; $m_2 = 1,5$ kg ; $k = 0,2$; $t = 2$ s ; $M = 1,0$ kg và $R = 0,1$ m. Cho momen quán tính của ròng rọc đối với trục quay là $I = \frac{MR^2}{2}$.

4.15. Hai thanh giống nhau AB, BC có thể quay dễ dàng quanh chốt ở B. Các thanh đồng chất tiết diện đều có chiều dài l, khối lượng m. Đặt hệ lên mặt bàn nằm ngang nhẵn sao cho ABC thẳng hàng và đứng yên (Hình 4.12). Bỏ qua mọi ma sát. Sau đó tác dụng vào hệ một xung của lực $\vec{X}$ vuông góc với AB đập vào đầu A. Tính :

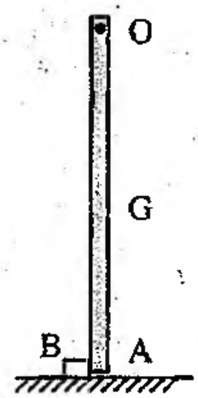
a) Các vận tốc ngay sau va chạm của G_1, G_2 của hai thanh, khối tâm G của cả hệ và của chốt B.

b) Các vận tốc góc của hai thanh ngay sau va chạm.



Hình 4.12

4.16. Một thanh OA dài $L = 0,3$ m đồng chất tiết diện đều, quay dễ dàng không ma sát trong mặt phẳng thẳng đứng quanh một trục quay cố định nằm ngang đi qua đầu O. Khi cân bằng thanh ở trạng thái thẳng đứng, đầu A tiếp xúc vật nhỏ B nằm yên trên sàn ngang và đầu A không chạm sàn (Hình 4.13). Biết rằng momen quán tính đối với trục quay đi qua trọng tâm của thanh và vuông góc với thanh là $I_G = \frac{1}{2}mL^2$; hệ số ma sát trượt giữa vật B và sàn $\mu = 0,15$; thanh OA và vật B cùng khối lượng ; lấy $g = 10$ m/s^2.



Hình 4.13

Người ta kéo thanh đến vị trí nằm ngang và buông không vận tốc đầu, sau đó thanh va chạm tuyệt đối đàn hồi với vật B. Hãy xác định góc lệch cực đại của thanh so với phương thẳng đứng và quãng đường vật B đi được sau va chạm.

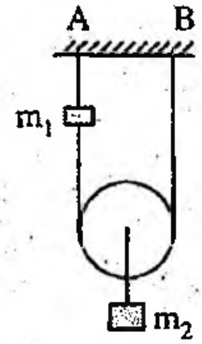
4.17. Một hình trụ A khối lượng m_1, bán kính r_1 quay quanh một trục cố định nằm ngang trùng với trục của nó với vận tốc góc ω_1. Người ta áp sát vào hình trụ đó một hình trụ B khối lượng m_2 bán kính r_2, có thể quay quanh trục nằm ngang trùng với trục của nó, sao cho hai hình trụ có chung một đường sinh.

Mới đầu mặt trụ A trượt trên mặt trụ B, sau đó A và B lăn không trượt lên nhau. Hãy tìm các vận tốc góc ω_1 và ω_2 của A và B lúc đã hết trượt và lượng nhiệt tỏa ra do sự trượt.

4.18. Cơ hệ như hình 4.14. Khối lượng các vật nặng là m_1, m_2. Bỏ qua khối lượng của dây và ma sát. Cắt dây nối m_1 với điểm treo A. Tìm gia tốc của các vật ngay sau khi cắt dây :

a) Bỏ qua khối lượng ròng rọc.

b) Ròng rọc có khối lượng m và bán kính R.

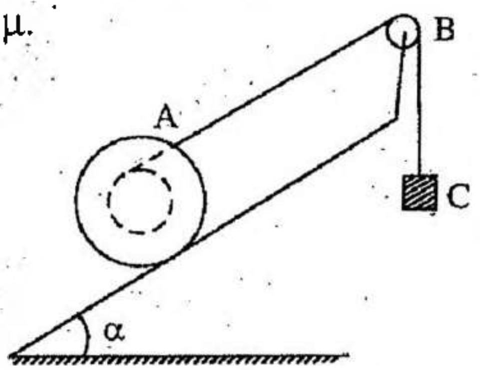


Hình 4.14

4.19. Một khối trụ đồng chất khối lượng M, bán kính R, có momen quán tính đối với trục là $I = \frac{MR^2}{2}$, được đặt lên mặt phẳng nghiêng góc $\alpha = 30^\circ$. Giữa chiều dài khối trụ có một khe hẹp trong đó có lõi có bán kính $\frac{R}{2}$. Một sợi dây nhẹ không dãn được quấn nhiều vòng vào lõi rồi vắt qua ròng rọc B (khối lượng không đáng kể). Đầu còn lại của dây mang một vật C khối lượng $m = \frac{M}{5}$ (Hình 4.15). Phần dây AB song song với mặt phẳng nghiêng. Hệ số ma sát nghỉ cực đại (cũng là hệ số ma sát trượt) là μ.

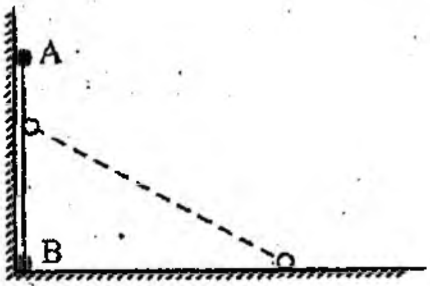
a) Tìm điều kiện về μ để khối trụ lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng. Tính gia tốc a_0 của trục khối trụ và gia tốc a của m khi đó.

b) Giả sử μ không thỏa mãn điều kiện trên. Tìm gia tốc a_0 của trục khối trụ và gia tốc a của m.



Hình 4.15

4.20. Một thanh AB chiều dài *l*, khối lượng không đáng kể, mỗi đầu gắn một quả cầu nhỏ có cùng khối lượng, tựa vào tường thẳng đứng. Do một va chạm rất nhẹ quả cầu ở đầu B trượt trên mặt sàn nằm ngang. Tường và sàn đều rất nhẵn. Giả thiết thanh luôn ở trong một mặt phẳng vuông góc với tường và sàn. Tính vận tốc của quả ở đầu B vào thời điểm mà quả ở đầu A bắt đầu rời khỏi tường (Hình 4.16). Gia tốc trọng trường là g.

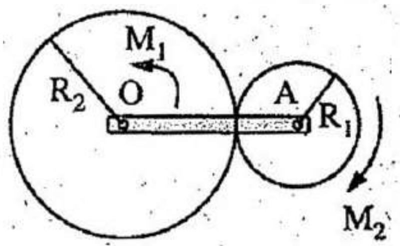


Hình 4.16

4.21. Một quả cầu đặc đồng chất bán kính R, khối lượng m được ném ngang với vận tốc ban đầu v_0 sao cho nó vừa lăn vừa trượt trên mặt sàn nằm ngang. Hỏi quả cầu đi được một quãng đường s bằng bao nhiêu thì bắt đầu lăn không trượt và khi đó vận tốc dài của nó bằng bao nhiêu ? Cho biết hệ số ma sát trượt là μ và momen quán tính của quả cầu đối với trục đi qua tâm bằng $I = \frac{2}{5}mR^2$.

Áp dụng số : $v_0 = 6{,}3$ km/h ; $\mu = 0{,}2$.

4.22. Cơ hệ như hình 4.17. Biết bánh răng có bán kính R_2 cố định, bánh răng bán kính R_1 là một đĩa đồng chất, khối lượng m_1. Tay quay là thanh đồng chất có khối lượng m.



Hình 4.17

Hệ thống chuyển động từ trạng thái nghỉ do tác dụng của một ngẫu lực phát động có momen không đổi bằng M_1 đặt vào tay quay OA. Bánh răng R_1 chịu tác dụng của một ngẫu lực cản có momen là M_2 không đổi. Bỏ qua ma sát. Xác định vận tốc của tay quay OA theo góc quay của nó.

4.23. Một rơ moóc chuyển động trên đường ngang dưới tác dụng của lực $\vec{F}$ nằm ngang. Hai bánh xe mỗi bánh có khối lượng m, bán kính R, bán kính quán tính đối với trục quay là δ. Giả thiết các bánh xe lăn không trượt. Bỏ qua ma sát lăn. Thùng xe có khối lượng M.

a) Tính gia tốc của thùng xe.

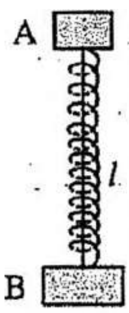
b) Tìm vận tốc của thùng xe theo quãng đường đi được kể từ trạng thái đứng yên.

4.24. Một sàn xe chở một khối nặng hình chữ nhật đồng chất. Sàn xe đang chạy với vận tốc v. Trên sàn xe có mấu A để cản không cho khối hộp trượt về phía trước. Chiều cao của khối hộp là 2h, chiều dài là 2a.

a) Tìm vận tốc góc của khối hộp khi xe bị hãm đứng lại tức thì.

b) Tìm vận tốc giới hạn của sàn xe ứng với khối hộp bị lật nhào quanh mấu A.

4.25. Một cơ hệ gồm hai khối lập phương A và B giống nhau, cùng khối lượng m, được nối với nhau bằng một sợi dây sao cho một lò xo khối lượng không đáng kể, có chiều dài tự nhiên l_0 và độ cứng k, bị nén lại giữa hai khối đó (Hình 4.18). B nằm trên mặt đất.



Hình 4.18

a) Tìm độ co ban đầu tối thiểu $\Delta l = l_0 - l$ của lò xo để cho B được nâng lên khỏi mặt đất khi đốt dây nối.

b) Giả sử độ co ban đầu của lò xo bằng $\Delta l = l_0 - l = \frac{7mg}{k}$.

Tìm độ cao được nâng lên của khối tâm của hệ.

4.26. Một tấm nặng khối lượng m đặt nằm ngang trên hai con lăn. Mỗi con lăn là một khối trụ đồng chất, cùng bán kính, khối lượng m_1. Tác dụng lực $\vec{F}$ nằm ngang vào tấm nặng. Hệ số ma sát lăn giữa các con lăn và sàn ngang là μ. Các con lăn không trượt trên sàn và tấm nặng cũng không trượt trên chúng. Tìm gia tốc của tấm nặng và lực ma sát trượt tổng cộng do sàn tác dụng lên các con lăn.

4.27. Đặt trên mặt phẳng ngang nhẵn một lăng trụ tam giác đồng chất có góc nghiêng α so với mặt nằm ngang, khối lượng M. Trên lăng trụ đặt một khối trụ tròn đồng chất bán kính r, khối lượng m. Khối trụ bắt đầu lăn không trượt xuống theo mặt phẳng nghiêng. Bỏ qua ma sát lăn. Tìm gia tốc chuyển động của lăng trụ và gia tốc tương đối của hình trụ đối với lăng trụ.

4.28. Một con tàu vũ trụ quay xung quanh một trục (D) đi qua khối tâm của nó, khối tâm này chuyển động thẳng đều đối với hệ quy chiếu quán tính. Con tàu có một bánh đà có thể quay quanh (D) nhờ một động cơ. Momen quán tính đối với (D) của bánh đà là I, của con tàu không kể bánh đà là I_0. Ban đầu con tàu và bánh đà cùng quay quanh (D) với vận tốc góc ω_0. Bằng cách nào có thể làm con tàu (không kể bánh đà) dừng quay ? Tính công tối thiểu để làm việc ấy.

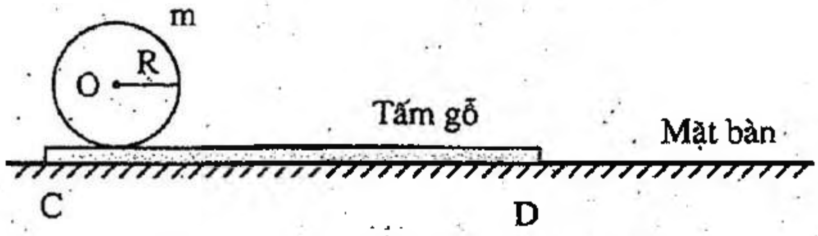
4.29. Thanh thẳng AB đồng chất chiều dài 2a, khối lượng m được treo nằm ngang nhờ hai dây như nhau thẳng đứng. Tìm lực căng của dây còn lại ngay khi dây kia bị đứt tức thời.

4.30. Trên mặt phẳng ngang nhẵn có hai khối lập phương cạnh H, cùng khối lượng M đặt cạnh nhau (giữa chúng có khe hở nhỏ). Đặt nhẹ nhàng một quả cầu có bán kính R, khối lượng m = M lên trên vào khe nhỏ. Bỏ qua mọi ma sát và vận tốc ban đầu của quả cầu. Tìm vận tốc quả cầu ngay trước khi va đập xuống mặt phẳng ngang.

4.31. Một vật hình cầu bán kính R đang đứng yên trên tấm gỗ mỏng CD. Mật độ khối lượng của vật phụ thuộc vào khoảng cách r đến tâm của nó theo quy luật :

$\rho = \frac{3m}{7\pi R^3}\left(1 + \frac{r}{R}\right)$, m là một hằng số dương.

Tấm gỗ được kéo trên mặt bàn nằm ngang theo chiều DC với gia tốc không đổi a (Hình 4.19). Kết quả là vật lăn không trượt về phía D được đoạn l và rơi xuống mặt bàn. Hệ số ma sát trượt giữa vật và mặt bàn là μ, gia tốc trọng trường là g.



Hình 4.19

a) Tính khối lượng và momen quán tính của vật đối với trục quay qua tâm của nó.

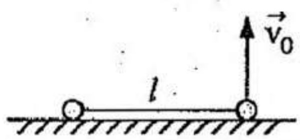
b) Hãy xác định thời gian vật lăn trên tấm gỗ và gia tốc tâm O của vật đối với mặt bàn.

c) Tại thời điểm vật rơi khỏi tấm gỗ vận tốc góc của vật bằng bao nhiêu ?

d) Chứng minh rằng trong suốt quá trình chuyển động trên mặt bàn vật luôn luôn lăn có trượt.

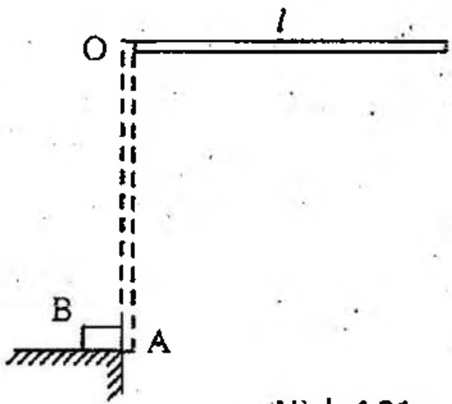
e) Vật chuyển động được một quãng đường s bằng bao nhiêu trên mặt bàn ?

4.32. Hai viên bi giống nhau, được nối với nhau bằng một sợi chỉ không dãn, chiều dài l, khối lượng không đáng kể, đặt trên một mặt phẳng nhẵn nằm ngang (Hình 4.20). Người ta truyền cho một trong hai viên bi một vận tốc $\vec{v}_0$ có phương thẳng đứng, hướng lên. Hỏi vận tốc đó phải bằng bao nhiêu để trong suốt thời gian viên bi này rời mặt phẳng, sợi chỉ luôn luôn căng còn viên bi kia vẫn không rời mặt phẳng ? Bỏ qua lực ma sát của viên bi với mặt phẳng. (Ta có thể khảo sát sức căng của sợi chỉ khi sợi chỉ ở vị trí thẳng đứng để tìm điều kiện cho viên bi dưới không rời mặt phẳng ngang).



Hình 4.20

4.33. Một thanh đồng chất OA dài l, khối lượng M quay dễ dàng quanh đầu O cố định của nó. Lúc đầu thanh có vị trí nằm ngang, sau đó được thả với vận tốc đầu bằng 0. Khi thanh đạt tới vị trí thẳng đứng, đầu A của nó đập vuông góc vào một vật B có kích thước nhỏ và có khối lượng m, đặt trên giá đỡ (Hình 4.21). Hãy xác định vận tốc của hai vật sau khi va chạm.



Hình 4.21

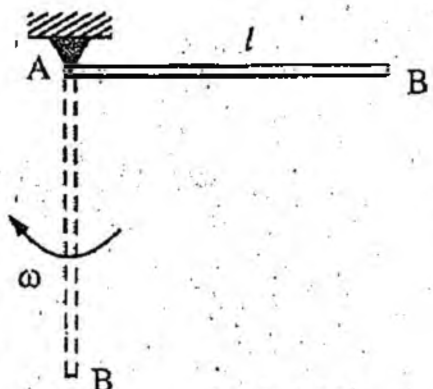
Xét hai trường hợp :

a) Va chạm là hoàn toàn đàn hồi.

b) Va chạm là hoàn toàn mềm.

Bỏ qua ma sát của trục quay O.

4.34. Một thanh đồng chất AB có chiều dài $l = 2a$, quay được quanh trục A cố định, còn đầu B đặt trên sàn. Truyền cho thanh tốc độ góc ban đầu ω_0 và khi thanh lên đến vị trí nằm ngang thì liên kết tại A bị mất (Hình 4.22). Tiếp theo thanh chuyển động tự do trong mặt phẳng đứng dưới tác dụng của trọng lực. Tìm giá trị ω_0 để thanh rơi chạm sàn lúc nó có vị trí thẳng đứng.

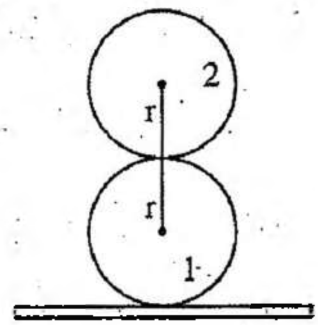


Hình 4.22

(Trích đề thi Olimpic Vật lí Canada - 1986)

4.35. Hai quả cầu rắn đồng nhất, bán kính bằng nhau được đặt lên nhau. Quả cầu 1 nằm dưới được giữ cố định. Quả cầu 2 ở trên, ban đầu nằm tại đỉnh quả cầu 1, sau đó bắt đầu lăn xuống (Hình 4.23).

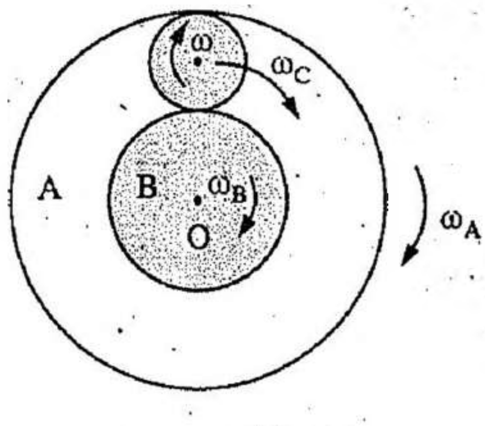
Chứng minh rằng quả cầu 2 sẽ trượt lên quả cầu 1 khi : $\sin\theta = \mu(16\cos\theta - 10)$ với θ là góc hợp bởi đường nối hai tâm của quả cầu và đường thẳng đứng ; μ là hệ số ma sát trượt giữa hai mặt cầu. Cho biết momen quán tính của một quả cầu rắn khối lượng M, bán kính r đối với một đường kính của nó bằng $\frac{2}{5}Mr^2$.



Hình 4.23

(Trích đề thi Olimpic Vật lí Vương quốc Anh - 1986)

4.36. Một khối trụ khối lượng $m_0 = 40$ g, bán kính $r = 2{,}0$ cm quay với tốc độ góc ω. Quay khối trụ này tiếp xúc với mặt trong của ống trụ A có khối lượng $M_A = 5m_0$ và mặt ngoài của ống trụ B có khối lượng $M_B = 3m_0$ (Hình 4.24). Cho $R_A = 2R_B$. Khi đó tốc độ góc của A và B đối với trục đi qua tâm O của hai ống trụ là ω_A và ω_B. Còn khối trụ quay quanh O với tốc độ góc ω_C.



Hình 4.24

a) Hãy biểu thị ω và ω_C qua ω_A và ω_B.

b) Ống trụ B quay theo chiều kim đồng hồ với vận tốc 3 vòng/giây. Hãy xác định chu kì quay của khối trụ nếu A được giữ yên.

c) Tính vận tốc khối tâm của khối trụ quanh O nếu khối trụ này không tự quay quanh nó.

d) Nếu khối trụ chỉ quay quanh khối tâm, hãy xác định tốc độ góc của A.

e) Tính cơ năng của hệ.

(Trích đề thi Olimpic Vật lí Italia - 2000)

4.37. Một thanh chiều dài L, khối lượng M được đặt thẳng đứng tại vị trí O trên mặt phẳng nằm ngang. Do cân bằng không bền, thanh bắt đầu lệch khỏi vị trí cân bằng. Xét các tình huống sau :

1. Giữa thanh và mặt phẳng nằm ngang hoàn toàn không có lực ma sát. Xác định vị trí trọng tâm của thanh khi chạm mặt phẳng nằm ngang.

2. Tại O có thêm mặt tường thẳng đứng. Thanh bắt đầu quay quanh O.

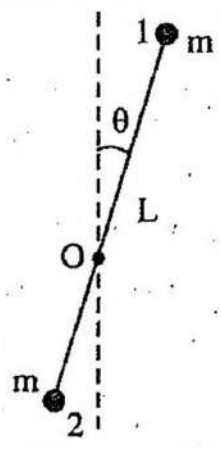
a) Viết biểu thức gia tốc hướng tâm và gia tốc tiếp tuyến của trọng tâm thanh theo góc θ (θ là góc giữa thanh và mặt phẳng nằm ngang).

b) Xác định góc θ ứng với thời điểm thanh mất tiếp xúc với tường.

3. Thanh được đặt tại vị trí như ở câu 1, nhưng giữa thanh và mặt phẳng nằm ngang có lực ma sát. Lúc đầu, điểm tiếp xúc O cố định, sau đó đến một giá trị góc θ nào đó, thanh bắt đầu trượt. Xác định góc θ này.

(Trích đề thi Olimpic Vật lí Hungari - 2004)

4.38. Một thanh nhẹ chiều dài L, ở hai đầu có gắn hai quả cầu 1 và 2 khối lượng m. Thanh có thể quay trong mặt phẳng thẳng đứng quanh một trục O nằm ngang đi qua điểm cách đầu dưới của thanh một đoạn $\frac{L}{3}$. Lúc đầu, để thanh theo phương thẳng đứng rồi buông ra (Hình 4.25). Do cân bằng không bền, thanh bắt đầu quay quanh trục O.



Hình 4.25

a) Gọi θ là góc hợp bởi thanh với phương thẳng đứng. Xác định tốc độ góc của thanh theo θ.

b) Quả cầu 1 dính không chặt vào thanh, khi lực ép chỉ còn bằng 1,8 trọng lượng quả cầu, quả cầu bị tách ra. Gọi $\vec{F}$ là lực mà thanh tác dụng lên quả cầu 1. Chứng minh rằng biểu thức của lực hướng tâm và lực tiếp tuyến có dạng :

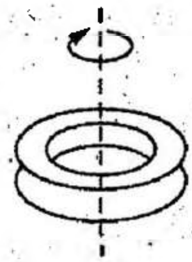
$$F_n = \frac{1}{5}mg(4 - 9\cos\theta) \text{ và } F_t = -\frac{3}{5}mg\sin\theta$$

c) Tính góc θ_d ứng với thời điểm quả cầu bị tách khỏi thanh.

d) Sau khi quả cầu 1 bị tách ra, quả cầu 2 lên đến độ cao ứng với góc cực đại θ_1 là bao nhiêu thì quả cầu quay lại ?

(Trích đề thi Olimpic Vật lí Italia - 2006)

4.39. Một vành tròn mỏng có bán kính r = 10 cm, đang quay trong mặt phẳng nằm ngang với tốc độ góc $\omega_0 = 21\ s^{-1}$ quanh trục thẳng đứng thì rơi từ độ cao h = 20 cm xuống mặt bàn (Hình 4.26).



Hình 4.26

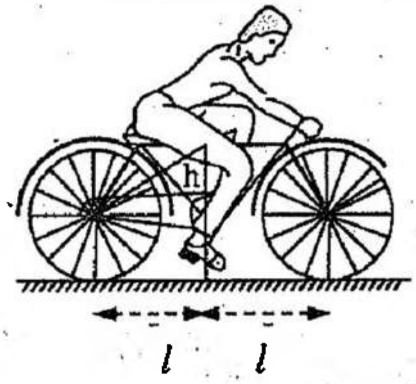
Xem va chạm là không đàn hồi và diễn ra trong thời gian rất ngắn. Hệ số ma sát giữa bàn và vành tròn là $\mu = 0,3$. Hãy tìm số vòng quay mà vành tròn quay được cho đến khi dừng hẳn.

(Trích đề thi Olimpic Vật lí Hungari - 1995)

4.40. Một thanh mỏng thẳng, đồng chất có chiều dài l, lúc đầu được đặt nằm ngang. Tâm của thanh được giữ cố định sao cho thanh có thể quay trong mặt phẳng thẳng đứng. Một con nhện rơi thẳng đứng với vận tốc v_0 vào điểm chính giữa của đoạn nối đầu mút và tâm quay. Khối lượng nhện bằng khối lượng thanh. Khi vừa chạm thanh, nhện bắt đầu bò dọc theo thanh sao cho tốc độ góc của thanh không đổi. Hãy xác định giá trị cực đại của v_0 để sao cho nhện có thể đi đến tận đầu mút của thanh. Cho rằng nhện rời khỏi thanh khi thanh nằm thẳng đứng. Vẽ đường đi mà nhện đi được trong mặt phẳng thẳng đứng.

(Trích đề thi Olimpic Vật lí Phần Lan - 1998)

4.41. Bánh của một chiếc xe đạp có bán kính R, khối lượng m (xem khối lượng phân bố đều ở vành bánh xe). Tổng khối lượng của xe và người là M, khối tâm của hệ nằm ở độ cao h và cách đều hai điểm tiếp xúc của bánh xe và mặt đường (Hình 4.27).



Hình 4.27

Tác dụng một momen lực T lên bàn đạp.

a) Tính gia tốc của xe.

b) Tính giá trị lớn nhất T để bánh xe vẫn còn lăn mà không trượt (hệ số ma sát μ).

c) Nếu μ lớn đến mức bánh xe không thể nào trượt, liệu có giá trị của T có trùng với cực đại ở câu b) không ?

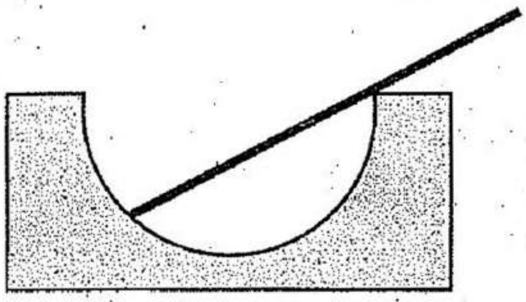
(Trích đề thi Olimpic Vật lí Iran - 1998).

Chủ đề 5. TĨNH HỌC

5.1. Một thanh đồng chất tiết diện đều, chiều dài a được đặt vào một lòng cối hình bán cầu bán kính R (Hình 5.1). Giữa thanh và cối không có ma sát.

a) Trường hợp thanh có cân bằng, xác định vị trí cân bằng của thanh (góc hợp bởi thanh và phương ngang).

b) Tìm điều kiện của a để thanh có cân bằng. Cân bằng của thanh là bền hay không bền ?

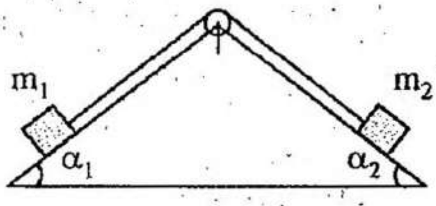


Hình 5.1

5.2. Hai vật khối lượng m_1 và m_2 nối với nhau bằng dây không dãn vắt lên một ròng rọc rất nhẹ và có thể trượt không ma sát lên hai mặt của một cái nêm cố định có các góc nghiêng so với phương nằm ngang α_1 và α_2 (Hình 5.2).

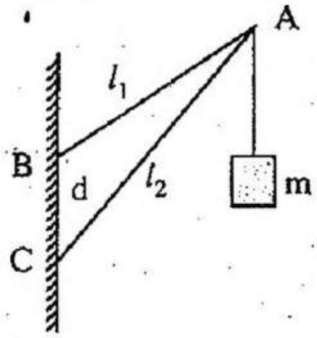
a) Tìm điều kiện cân bằng của hệ hai vật. Cân bằng ấy là bền, không bền, hay phiếm định ?

b) Giải bằng hai phương pháp : phân tích lực và tính thế năng của hệ.



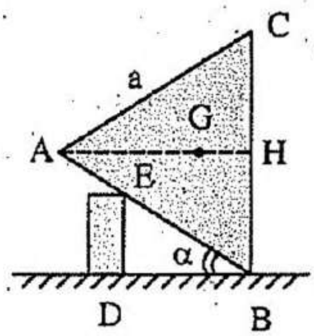
Hình 5.2

5.3. Hai thanh sắt $AB = l_1 = 0{,}5$ m và $AC = l_2 = 0{,}7$ m được nối với nhau và với tường (đứng thẳng) bằng các chốt. BC = d = 0,3 m (Hình 5.3). Treo một vật có khối lượng m = 45 kg vào đầu A. Các thanh có khối lượng không đáng kể. Tính lực mà mỗi thanh phải chịu, lực ấy là lực kéo hay nén ? Lấy $g = 10\ m/s^2$.



Hình 5.3

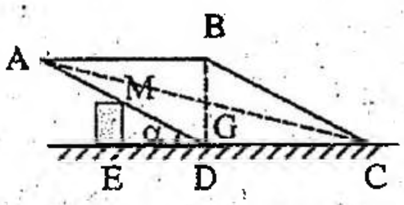
5.4. Một vật khối lượng m = 10 kg hình lăng trụ có tiết diện thẳng là tam giác đều ABC cạnh a = 60 cm, được kê trên một giá đỡ cố định D sao cho mặt BC thẳng đứng, mặt AB tiếp xúc với giá đỡ tại E mà EB = 40 cm (Hình 5.4).



Hình 5.4

Coi hệ số ma sát tại giá đỡ và tại sàn là như nhau. Tìm hệ số ma sát giữa vật và sàn. Xác định phản lực của giá đỡ và của sàn tác dụng lên vật. Lấy $g = 10\ m/s^2$.

5.5. Một khối hộp khối lượng $m = 20$ kg có tiết diện thẳng là hình bình hành ABCD (đường chéo $BD = \frac{AD}{2}$) được đặt trên mặt sàn nằm ngang, mặt AD nghiêng góc $\alpha = 30^o$ so với mặt sàn và tì lên một giá đỡ E tại M ở chính giữa AD (Hình 5.5).

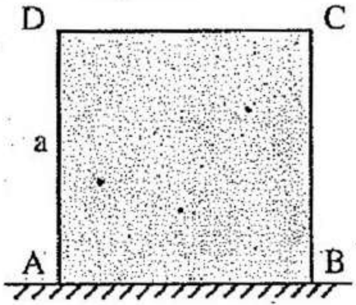


Hình 5.5

a) Tìm lực ép của khối hộp lên giá đỡ.

b) Đặt vào cạnh A của khối hộp một lực $\vec{F}$ hướng thẳng đứng xuống dưới. Tìm độ lớn tối thiểu của $\vec{F}$ để có thể nâng khối hộp khỏi sàn. Tìm lực ma sát giữ cho khối hộp không bị trượt so với giá đỡ khi nó bị nâng khỏi sàn. Lấy $g = 10\ m/s^2$.

5.6. Một khối gỗ đồng chất có dạng lập phương ABCD, khối lượng $m = 100$ kg, cạnh bằng a, đặt trên mặt đất nằm ngang theo cạnh AB (Hình 5.6). Người ta muốn lật khối gỗ cho nó nằm theo cạnh AD.

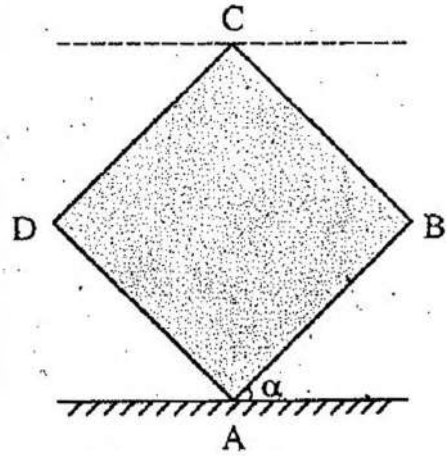


Hình 5.6

a) Giả sử ma sát giữa gỗ và đất rất lớn, gỗ không thể trượt mà chỉ có thể quay. Phải đặt lực vào điểm nào của khối gỗ, theo phương và chiều nào, để cường độ của lực làm chuyển động gỗ là nhỏ nhất (vẽ hình và giải thích) ? Tính cường độ tối thiểu ấy.

b) Giả thiết hệ số ma sát giữa gỗ và đất là $\mu = 0,3$. Có gì xảy ra nếu dùng lực đã tìm được ở câu a để lật khối gỗ ?

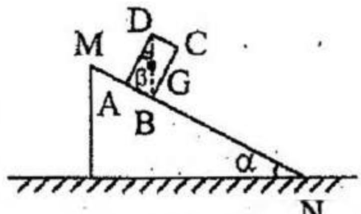
c) Giả sử ma sát rất lớn. Người ta dùng lực $\vec{F}$ có phương luôn luôn nằm ngang và đặt vào đỉnh C để lật gỗ (Hình 5.7). Tìm biểu thức đại số của F theo góc α mà cạnh AB làm với mặt đất ($0^o < \alpha < 90^o$) sao cho gỗ bị lật rất chậm, và nói riêng không đổ nhào quá nhanh.



Hình 5.7

Vẽ đường biểu diễn $F = f(\alpha)$. Lấy $g = 10\ m/s^2$.

5.7. Một vật hình hộp chữ nhật khối lượng $m = 1$ kg, có tiết diện thẳng ABCD ($AB = 10\sqrt{3}$ cm ; $BC = 30$ cm), được đặt trên mặt MN của một cái nêm có góc nghiêng α thay đổi được (Hình 5.8).

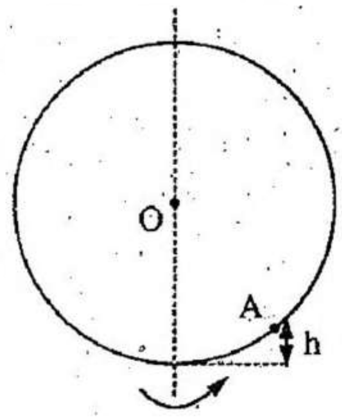


Hình 5.8

a) Tìm góc nghiêng cực đại α_0 của mặt nêm MN để vật còn chưa bị lật. Khi $\alpha = \alpha_0$, muốn cho vật không trượt trên mặt nêm thì hệ số ma sát μ giữa vật và mặt nêm phải bằng bao nhiêu ?

b) Cho góc nghiêng $\alpha = \alpha_0$ và hệ số ma sát $\mu = 0,2$. Hỏi vật có bị trượt trên mặt MN không ? Khi đó có thể làm cho vật dừng lại, không trượt trên mặt MN và không bị lật được không, bằng cách cho nêm dịch chuyển sang phải với gia tốc a ? Nếu được thì a phải có trị số bằng bao nhiêu ? Cho $g = 10$ m/s^2.

5.8. Một hình cầu rỗng bán kính mặt trong $R = 0,5$ m quay quanh một trục thẳng đứng đi qua tâm O với vận tốc góc $\omega = 5$ rad/s. Ở trên mặt trong tại vị trí A có một vật nhỏ khối lượng m cùng quay với hình cầu, ở độ cao $h = 0,25$ m so với đáy hình cầu (Hình 5.9).



Hình 5.9

a) Tìm giá trị cực tiểu μ_{min} của hệ số ma sát ở mặt cầu để trạng thái đó có thể tồn tại.

b) Nếu vận tốc góc $\omega = 8$ rad/s thì μ_{min} phải bằng bao nhiêu ?

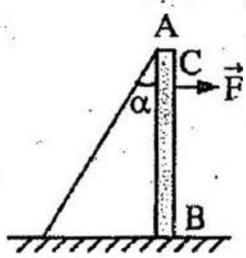
c) Khảo sát sự vững bền của cân bằng khi :

– Vật có di chuyển nhỏ khỏi vị trí A.

– Vận tốc góc ω có biến thiên nhỏ.

Xét hai trường hợp ứng với hai giá trị tìm được của hệ số ma sát. Lấy $g = 10$ m/s^2.

5.9. Một cột có chiều dài $AB = 1,0$ m nặng $P = 50$ N được đặt thẳng đứng trên mặt đất nằm ngang nhám, hệ số ma sát là $\mu = 0,4$. Đầu A được neo chặt vào đất bằng dây thép, trọng lượng không đáng kể, nghiêng góc $\alpha = 37^o$ so với cột. Một lực $\vec{F}$ nằm ngang tác dụng vào điểm C của cột như hình 5.10, $F > 0$.



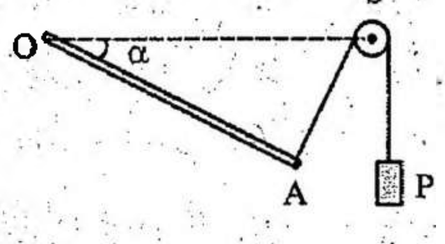
Hình 5.10

a) C là trung điểm của AB. Tính lực F lớn nhất ($F = F_{max}$) mà đầu B của cột còn chưa bị trượt.

b) C là điểm ứng với $n = \frac{AB}{AC} \geq 1$. Chứng minh rằng nếu C đủ cao, tức là n đủ lớn thì dù F lớn đến mấy đầu B cũng không trượt (giả thiết dây thép không bị đứt hoặc bật đầu neo). Tính n và BC ứng với độ cao ấy.

c) Cho n = 3 ; F = 900 N. Tính lực căng dây R. (Lấy $\cos 37^o \approx 0{,}8$; $\sin 37^o \approx 0{,}6$).

5.10. Một thanh đồng chất, trọng lượng $Q = 2\sqrt{3}$ N có thể quay quanh chốt ở đầu O (Hình 5.11). Đầu A của thanh được nối bằng dây không dãn, vắt qua ròng rọc S, với một vật có trọng lượng P = 1 N.



Hình 5.11

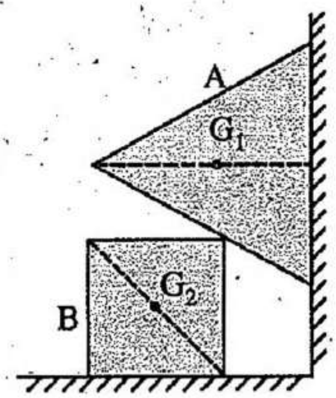
S ở cùng độ cao với O và OS = OA.

Khối lượng của ròng rọc và dây nhỏ không đáng kể.

a) Tính góc $\alpha = \widehat{SOA}$ ứng với cân bằng của hệ thống và tìm phản lực của chốt O.

b) Cân bằng này bền hay không bền ?

5.11. Vật A khối lượng $m_1 = 5$ kg có dạng khối lăng trụ có tiết diện thẳng là một tam giác đều, được chèn sát vào một bức tường đứng thẳng nhờ kê trên vật B khối lượng $m_2 = 5$ kg có dạng khối lập phương, đặt trên mặt sàn nằm ngang (Hình 5.12). Coi rằng hệ số ma sát ở tường và ở sàn nhà đều bằng μ.



Hình 5.12

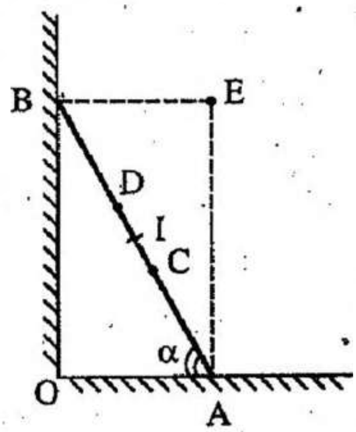
Tính μ và áp lực tại các chỗ tiếp xúc.

Lấy $g = 10$ m/s^2.

Bỏ qua ma sát tại chỗ tiếp xúc vật A với vật B.

5.12. Một chiếc thang có chiều dài AB = l, đầu A tựa vào sàn nhà nằm ngang, đầu B tựa vào tường thẳng đứng (Hình 5.13). Khối tâm C của thang ở cách đầu A là $\frac{l}{3}$. Thang hợp với sàn nhà một góc α.

1. Chứng minh rằng thang không thể đứng cân bằng nếu không có ma sát.



Hình 5.13

2. Gọi μ là hệ số ma sát ở sàn và ở tường. Cho biết $\alpha = 60^{\circ}$. Tính giá trị nhỏ nhất μ_{min} của μ để thang đứng cân bằng.

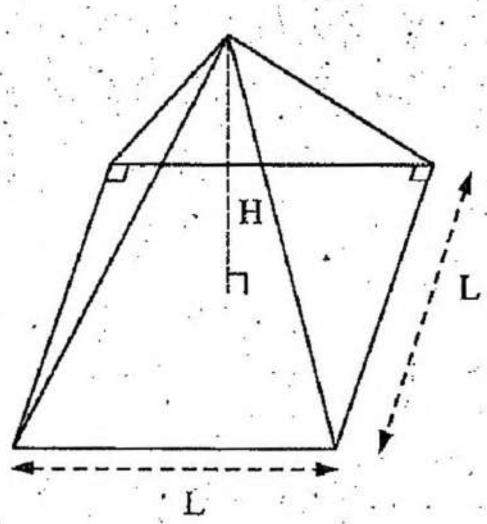
3. Cho $\mu = \mu_{min}$. Thang có trượt không, nếu :

a) Một người có trọng lượng bằng trọng lượng của thang đứng ở điểm C ?

b) Người ấy đứng ở điểm D cách đầu A là $\frac{2l}{3}$?

4. Chứng minh rằng nếu α càng nhỏ thì muốn cho thang không trượt, ma sát phải càng lớn. Tính μ_{min} ứng với $\alpha = 45^{\circ}$ (thang không có người).

5.13. Kim tự tháp Cheops ở Ai Cập có chiều cao H = 147 m, trước khi khối đá ở đỉnh rơi xuống. Đáy của nó là một hình vuông cạnh L = 250 m (Hình 5.14). Giả thiết tháp có khối lượng riêng đồng đều, thì khối tâm của nó ở cách đáy bao nhiêu ?

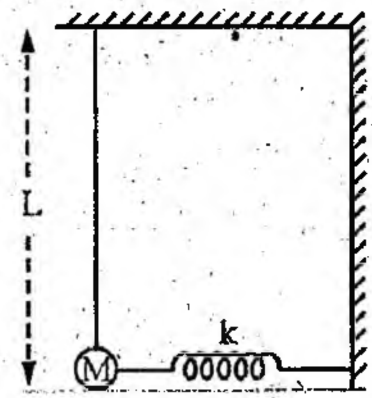


Hình 5.14

Chương III
DAO ĐỘNG CƠ

Chủ đề 6. DAO ĐỘNG CƠ

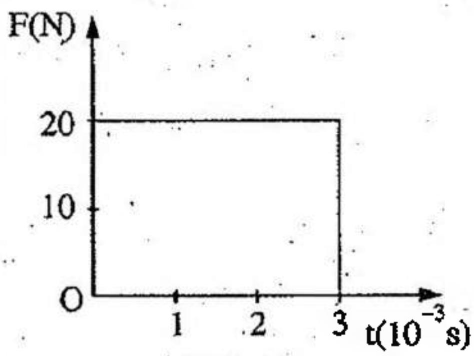
6.1. Một con lắc được cấu tạo bởi một thanh nhẹ, chiều dài L và vật treo có khối lượng M. Vật treo được nối với lò xo có độ cứng k đặt nằm ngang, đầu kia lò xo gắn vào tường (Hình 6.1). Khi thanh treo có phương thẳng đứng, lò xo có độ dài tự nhiên. Hãy tìm chu kì dao động của con lắc ở biên độ nhỏ.



Hình 6.1

(Trích đề thi Olimpic Vật lí Canada - 1989)

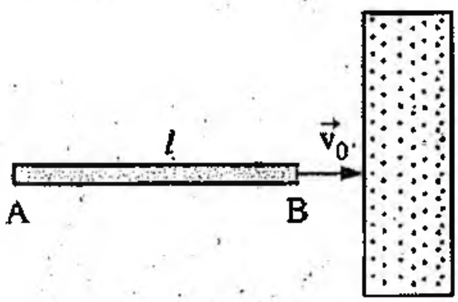
6.2. Trên mặt bàn nhẵn có một con lắc lò xo nằm ngang với quả cầu có khối lượng m = 100 g ; con lắc có thể dao động với tần số 2 Hz. Quả cầu nằm cân bằng. Tác dụng lên quả cầu một lực có hướng nằm ngang và có cường độ được chỉ rõ trên đồ thị ở hình 6.2 ; quả cầu dao động. Tìm biên độ dao động của quả cầu.



Hình 6.2

(Trích đề thi Olimpic Vật lí Extonia - 2000)

6.3. Một thanh AB đồng chất, khối lượng m, chiều dài l, chuyển động trên mặt phẳng nằm ngang với vận tốc ban đầu v_0 (hướng dọc theo thanh) từ vùng không có ma sát sang vùng có ma sát với hệ số ma sát trượt là μ (Hình 6.3).



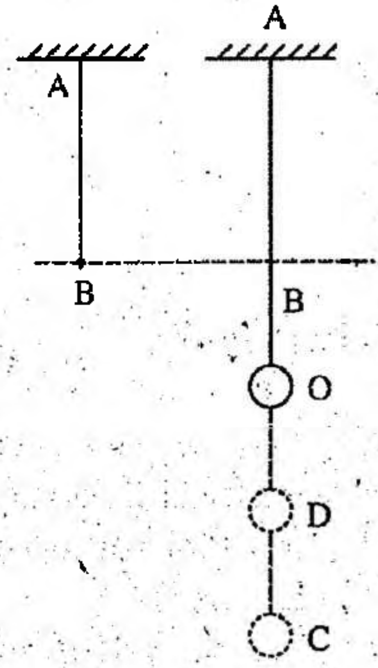
Hình 6.3

a) Tìm điều kiện về v_0 để khi dừng lại, toàn bộ thanh nằm trong vùng có ma sát.

b) Với một trị số cho trước của v_0, hãy tính khoảng thời gian kể từ lúc đầu B bắt đầu chạm vào mép vùng có ma sát cho đến khi thanh dừng lại. Khi thanh dừng lại, đầu A cách mép vùng có ma sát một khoảng bao nhiêu ?

(Trích đề thi Olimpic Vật lí Hungari - 1986)

6.4. ***Phần A.*** Một dây cao su nhẹ đàn hồi có chiều dài $AB = l_0 = 1$ m, có lực đàn hồi tuân theo định luật Húc : $F = kx$. Một đầu sợi dây được treo ở A, đầu kia gắn vật có khối lượng m = 0,2 kg. Dây dãn đoạn OB và vật nằm ở vị trí cân bằng O. Kéo vật xuống đoạn OC = 0,10 m rồi buông ra. Vật dao động điều hòa theo phương thẳng đứng với chu kì T = 2 s. (Hình 6.4).



Hình 6.4

Hãy tìm :

a) Hệ số đàn hồi của dây.

b) Vận tốc của vật ở vị trí OD = 0,05 m.

c) Thời gian để vật đi từ C đến D.

d) Động năng cực đại của vật.

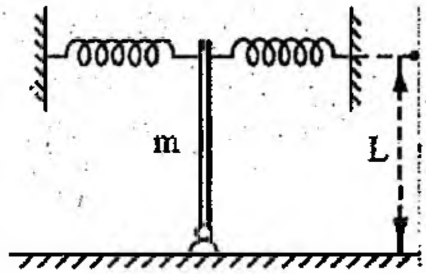
Phần B.

a) Khối m được nâng lên đến vị trí A rồi được thả rơi tự do. Tìm thời gian để khối m quay trở lại A lần thứ nhất.

b) Vẽ đồ thị vận tốc của khối m theo thời gian trong chuyển động ở câu a).

(Trích đề thi Olimpic Vật lí Đảo Ship - 1989)

6.5. Một thanh khối lượng m, chiều dài L, được đặt thẳng đứng có thể quay quanh một trục nằm ngang. Hai lò xo có độ cứng giống nhau, được đặt nằm ngang, hai đầu lò xo nối với đầu trên của thanh (Hình 6.5). Hãy xác định độ cứng k của lò xo để thanh ở trạng thái cân bằng.



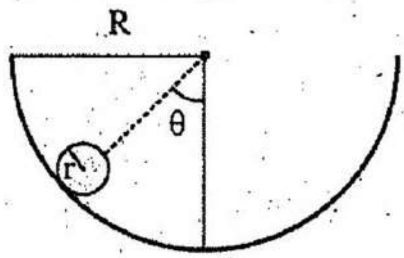
Hình 6.5

(Trích đề thi Olimpic Vật lí Hungari - 1989)

6.6. Một quả cầu bán kính r, khối lượng m lăn bên trong một hốc cầu bán kính R. Hãy tính :

a) Chu kì dao động ứng với biên độ nhỏ.

b) Lực ma sát khi góc θ cực đại. Momen quán tính của quả cầu đối với trục đối xứng là $\frac{2}{5}mr^2$ (Hình 6.6).



Hình 6.6

(Trích đề thi Olimpic Vật lí Iran - 1989)

6.7. Uốn một sợi dây mảnh thành đường cong có dạng được mô tả bằng các phương trình :

$x = b(\theta + \sin\theta)$

$y = b(1 - \cos\theta)$

Ox, Oy là trục hoành và trục tung.

Luồn sợi dây này qua hạt ngọc trai rồi cho hạt rơi dọc theo sợi dây từ một độ cao nào đó. Mô tả chuyển động của hạt ngọc trai.

(Trích đề thi Olimpic Vật lí Thổ Nhĩ Kì - 1989)

6.8. Một quả cầu khối lượng M, bán kính R nằm trên mặt nằm ngang. Quả cầu có vận tốc v_C nhờ nhận được momen lực tạo ra từ một lực có phương nằm ngang và đi qua tâm. Hệ số ma sát giữa mặt bàn và quả cầu là μ.

a) Tìm khoảng cách tính từ lúc bắt đầu chuyển động đến lúc quả cầu chuyển động trượt sang chuyển động lăn.

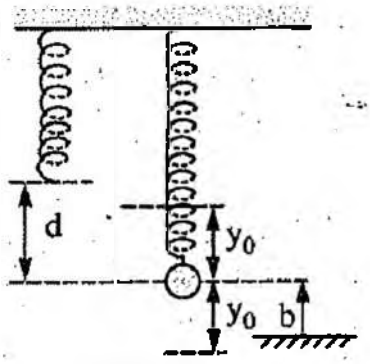
b) Lực tác dụng vào đâu thì quả cầu có chuyển động lăn ngay từ lúc đầu ?

(Trích đề thi Olimpic Vật lí CHDC Đức - 1998)

6.9. Vật có khối lượng m = 0,2 kg khi gắn vào đầu lò xo thẳng đứng thì lò xo dãn 30 cm. Đưa vật lên một đoạn y_0 = 20 cm khỏi vị trí cân bằng rồi buông ra không vận tốc đầu (Hình 6.7).

a) Tính chu kì T_0 của dao động.

b) Người ta đặt một bản cứng, nằm ngang cách vị trí cân bằng một đoạn b. Khi dao động vật va chạm đàn hồi vào bản này. Vẽ đồ thị mô tả vị trí y của vật theo thời gian và tính chu kì mới của dao động. Thiết lập biểu thức tính T theo b ($y_0 > b > 0$ cm).



Hình 6.7

(Trích đề thi Olimpic Vật lí Thụy Sĩ - 2000)

6.10. Một khối trụ đặt trên một mặt ván nằm ngang. Mặt ván này có thể dao động điều hòa theo phương nằm ngang với biên độ 2 cm nhờ vào một động cơ.

a) Lúc đầu, khối trụ chuyển động cùng với ván. Hãy viết phương trình vận tốc v(t) của khối trụ, biết rằng tần số dao động là 2 Hz. Tính vận tốc của khối trụ khi cách vị trí cân bằng 1 cm.

b) Khi tăng tần số đến một giá trị nào đó, khối trụ bắt đầu trượt. Tính tần số này biết rằng hệ số ma sát giữa trụ và mặt phẳng là 0,6.

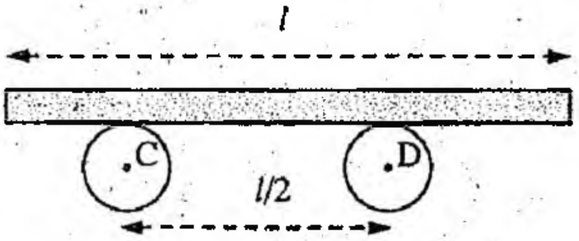
c) Cho mặt ván dao động theo phương thẳng đứng với biên độ 5 cm. Với tần số dao động là bao nhiêu thì khối trụ vẫn còn nằm yên trên mặt ván.

(Trích đề thi Olimpic Vật lí Thụy Sĩ - 2001)

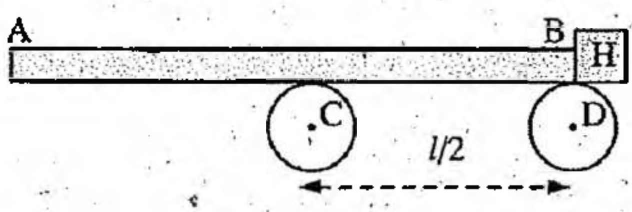
6.11. Một thanh đồng chất AB, khối lượng m, chiều dài l được đặt trên hai trục quay như hình 6.8. Trục quay hình trụ có bán kính r, tâm C và D của hai trục cách nhau một khoảng $\frac{l}{2}$, hệ số ma sát giữa thanh và các trục quay là μ.

1. Lúc đầu, trọng tâm của thanh cách đường trung trực của đoạn CD một khoảng $\frac{l}{5}$ về phía D. Hãy xác định các lực của trụ tác dụng lên thanh.

2. Cho hai trục quay với cùng vận tốc góc và ngược chiều nhau. Xét thời điểm thanh nằm ở vị trí sao cho đầu mút B nằm ngay phía trên điểm D (Hình 6.9). Đặt một nêm gỗ H để giữ cho thanh không chuyển động. Tính lực của thanh tác dụng lên nêm.



Hình 6.8



Hình 6.9

3. Lấy nêm ra

a) Chứng minh thanh dao động điều hòa và tính chu kì dao động.

b) Tính giá trị của tần số góc sao cho thanh không bị trượt trên các trụ.

c) Tính công suất của động cơ dùng để duy trì dao động nói trên.

(Trích đề thi Olimpic Vật lí Ý - 1997)

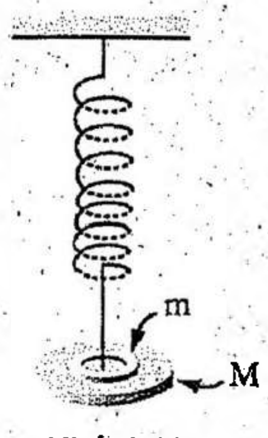
6.12. Hai hình trụ có bán kính khác nhau quay theo chiều ngược nhau quanh các trục song song nằm ngang với tốc độ góc $\omega_1 = \omega_2 = \omega = 2$ rad/s. Khoảng cách giữa các trục theo phương ngang bằng $l = 4$ m.

Hình 6.10

Ở thời điểm t = 0, người ta đặt một tấm ván lên các hình trụ vuông góc với các trục quay sao cho nó ở vị trí nằm ngang, đồng thời tiếp xúc với cả bề mặt của cả hai hình trụ, còn điểm nằm giữa của nó nằm chính xác trên trục của hình trụ có bán kính nhỏ hơn r = 0,25 m, như trên hình 6.10. Hãy tính và minh họa bằng đồ thị sự phụ thuộc của độ dịch chuyển nằm ngang của tấm ván theo thời gian. Hệ số ma sát $\mu = 0,05$, gia tốc rơi tự do $g = 10\ m/s^2$.

(Trích đề thi Olimpic Vật lí Nga - 1978)

6.13. Một đĩa tròn có khối lượng M = 100 g được treo vào lò xo khối lượng không đáng kể và có độ cứng k = 10 N/m. Trên đĩa có đặt đồng trục một vành tròn khối lượng m = 10 g. Hệ dao động tự do theo phương thẳng đứng (Hình 6.11).



Hình 6.11

a) Xác định độ dãn của lò xo khi hệ cân bằng.

b) Cho hệ dao động. Hãy xác định lực mà đĩa tác dụng lên vành.

c) Trong quá trình dao động, có những vị trí mà vành và đĩa tách khỏi nhau. Hãy xác định các vị trí này.

d) Kéo hệ xuống một đoạn $y_1 = 30$ cm rồi buông ra. Hãy xác định vận tốc của hệ đĩa - vành khi vành bắt đầu tách khỏi đĩa.

e) Xác định độ cao cực đại của đĩa sau khi vành được tách ra.

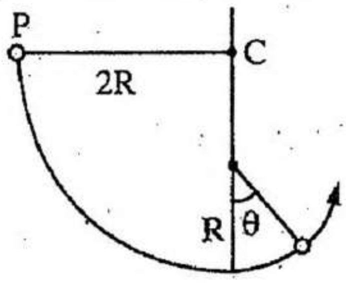
f) Viết phương trình của hai vật sau khi hai vật được tách ra.

g) Xác định thời gian để vành rơi lại vào đĩa.

(Trích đề thi Olimpic Vật lí Ý - 1998)

6.14. Một quả cầu khối lượng M được mắc vào sợi dây không co dãn có chiều dài 2R. Đầu kia của dây được mắc cố định vào điểm C. Phía dưới dây theo đường thẳng đứng cách C một đoạn R có đóng đinh P. Nâng quả cầu lên sao cho dây treo có phương nằm ngang rồi buông ra. Khi bị mắc vào đinh P, dây treo rút ngắn còn chiều dài R (Hình 6.12). Coi như kích thước quả cầu và khối lượng dây treo không đáng kể.

a) Khi chiều dài dây treo còn lại R, gọi θ là góc hợp bởi dây và phương thẳng đứng, hãy xác định θ sao cho lực căng dây $T = \frac{7}{2}Mg$.



Hình 6.12

b) Khi tiếp tục dao động, quả cầu sẽ không lên đến điểm C nữa. Giải thích tại sao ?

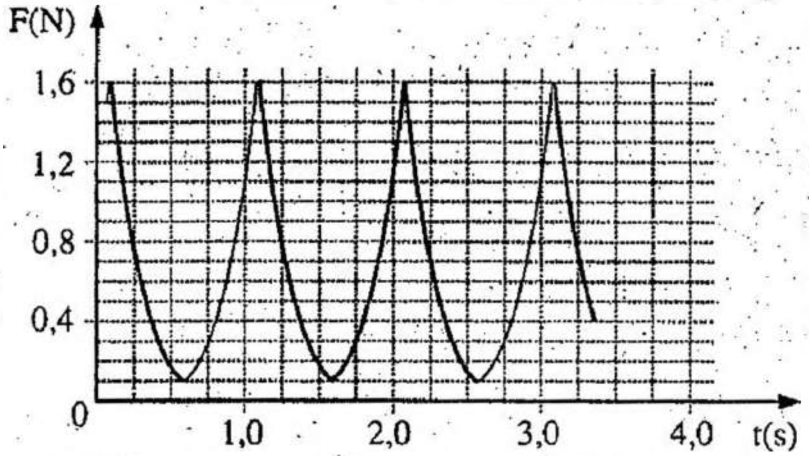
c) Xác định góc θ ứng với lực căng dây bằng 0.

d) Quả cầu sẽ cắt đường PC ứng với vị trí cách C một đoạn bao nhiêu ?

e) Tính giá trị vận tốc của quả cầu ứng với vị trí tìm được ở câu d.

(Trích đề thi Olimpic Vật lí Ý - 2001)

6.15. Một con lắc đơn gồm vật khối lượng m treo vào dây có chiều dài *l*. Đầu kia của dây được treo vào bộ cảm biến để có thể đo được lực căng của dây treo theo phương thẳng đứng. Kéo con lắc ra khỏi vị trí cân bằng một góc α rồi buông để con lắc dao động. Đồ thị trên hình 6.13 biểu thị sự biến thiên độ lớn của lực căng dây theo phương thẳng đứng theo thời gian.



Hình 6.13

a) Hãy cho biết các giá trị cực đại và cực tiểu trong đồ thị trên ứng với các vị trí nào trong quá trình dao động ?

b) Tính chu kì dao động của con lắc.

c) Tính góc α và khối lượng của vật treo.

(Trích đề thi Olimpic Vật lí Ý - 2002)

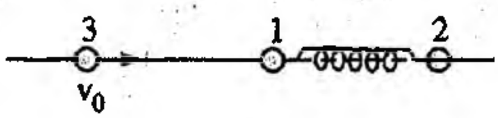
6.16. Một lò xo, dài *l*, có khối lượng M được phân bố đều dọc theo các vòng của lò xo :

a) Để xác định độ cứng k của lò xo này, người ta đặt nó trên một mặt phẳng nằm ngang, không có ma sát, một đầu được giữ cố định, đầu kia được kéo bởi một lực F nằm ngang. Khi cân bằng, lò xo dãn ra một đoạn Δ*l*. Tính độ cứng k của lò xo.

b) Treo lò xo thẳng đứng, lò xo dãn ra bao nhiêu ? Nếu móc vào đầu dưới của lò xo một vật, khối lượng m, thì khi cân bằng lò xo dãn ra bao nhiêu ?

c) Cho con lắc dao động theo phương thẳng đứng. Hãy xác định tần số dao động của con lắc.

6.17. Ba quả cầu được xâu vào một sợi dây thép căng thẳng nằm ngang (Hình 6.14) và có thể trượt không ma sát trên dây. Các quả cầu 1 và 2 giống nhau có khối lượng m được nối với nhau bằng một lò xo có độ cứng k và khối lượng



Hình 6.14

không đáng kể. Lúc đầu hai quả cầu đứng yên, lò xo có chiều dài tự nhiên l. Quả cầu 3 có khối lượng $\frac{m}{2}$ được truyền vận tốc $\vec{v}_0$ và va chạm đàn hồi vào quả cầu 1.

a) Tính vận tốc của các quả cầu 1 và 3 ngay sau va chạm.

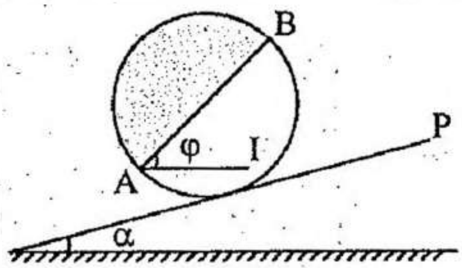
b) Sau va chạm, khối tâm G của các quả cầu 1 và 2 chuyển động thế nào ? Tính vận tốc của G.

c) Chứng minh rằng hai quả cầu 1 và 2 dao động điều hòa ngược pha quanh các vị trí cố định đối với G. Tính tần số góc ω của dao động ấy.

d) Tính khoảng cách cực đại d giữa hai quả cầu, coi các quả cầu như những chất điểm. Lò xo có độ cứng đồng đều.

e) Áp dụng bằng số : $m = 0{,}1$ kg ; $l = 0{,}3$ m ; $k = 5$ N/m ; $v_0 = 3$ m/s. Tính ω và d.

6.18. Một khối trụ gồm hai nửa, mỗi nửa có tiết diện là một nửa hình tròn, bán kính R, chiều cao h, có khối lượng riêng lần lượt là ρ và ρ′, với ρ′ > ρ. Khối trụ được đặt trên một tấm phẳng P. Hệ số ma sát trượt giữa trụ và mặt phẳng P đủ lớn để trụ chỉ có thể lăn không trượt trên P (Hình 6.15).



Hình 6.15

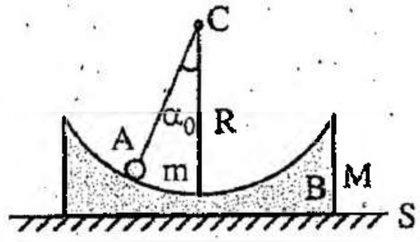
a) Dùng phép tính tích phân, hãy chứng minh rằng khối tâm của một nửa hình tròn đặc, đồng tính, ở cách tâm O của đường tròn một khoảng $OG = \frac{4R}{3\pi}$.

b) Cho mặt P nghiêng một góc α so với đường ngang. Tính góc φ mà mặt phân cách AB của hai nửa khối trụ làm với mặt phẳng nằm ngang, khi khối trụ cân bằng.

c) Tăng dần góc nghiêng α. Đến giá trị nào của α thì khối trụ bắt đầu lăn xuống ? Lúc đó góc φ đạt giá trị bao nhiêu ?

d) P hoàn toàn nằm ngang, và khối trụ đang nằm cân bằng. Đẩy nhẹ cho trụ lăn một góc nhỏ θ rồi buông ra. Chuyển động của khối tâm khối trụ có thể coi là dao động điều hòa được không ? Tại sao ?

6.19. Cho vật nhỏ A có khối lượng m và vật B có khối lượng M. Mặt trên của B là một phần mặt cầu bán kính R (Hình 6.16). Lúc đầu B đứng yên trên mặt sàn S. Bán kính của mặt cầu đi qua A hợp với



Hình 6.16

phương thẳng đứng một góc α_0 (α_0 có giá trị nhỏ). Thả cho A chuyển động với vận tốc ban đầu bằng 0. Ma sát giữa A và B không đáng kể. Cho gia tốc trọng trường là g.

1. Giả sử A dao động, B đứng yên (do có ma sát giữa B và sàn S).

a) Tìm chu kì dao động của A.

b) Tính độ lớn của lực mà A tác dụng lên B khi bán kính qua vật A và hợp với phương thẳng đứng một góc α ($\alpha \leq \alpha_0$).

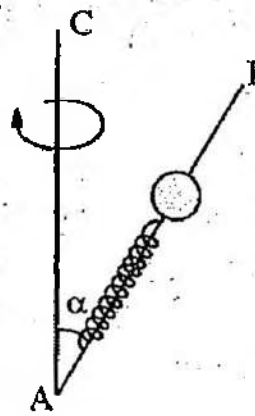
c) Hệ số ma sát giữa B và mặt sàn S phải thỏa mãn điều kiện nào để B đứng yên khi B dao động ?

2. Giả sử ma sát giữa vật B và mặt sàn S có thể bỏ qua.

a) Tính chu kì dao động của hệ.

b) Lực mà A tác dụng lên B có giá trị cực đại bằng bao nhiêu ?

6.20. Thanh cứng AB quay đều quanh trục thẳng đứng AC với vận tốc góc ω. Góc giữa AB và AC là α không đổi ($0 < \alpha < 90^\circ$). Lò xo có độ cứng k, khối lượng không đáng kể, độ dài khi không biến dạng là l_0, được lồng vào thanh AB. Một đầu của lò xo được gắn vào A, đầu kia gắn với hòn bi khối lượng m. Bi có thể trượt trên thanh AB nhờ một lỗ xuyên tâm (Hình 6.17).



Hình 6.17

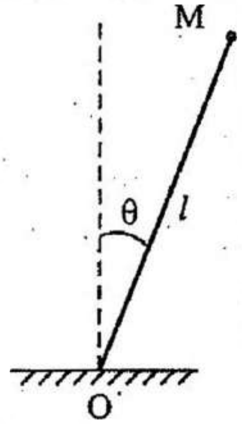
1. Ma sát giữa hòn bi và thanh không đáng kể.

a) Xác định vị trí cân bằng của hòn bi. Vị trí đó ứng với cân bằng bền hay không bền ?

b) Giả sử hòn bi đang nằm cân bằng trên thanh, trong khi thanh vẫn quay đều quanh trục thẳng đứng với tốc độ góc ω thì cả hệ thống chuyển động theo phương thẳng đứng lên trên với gia tốc a không đổi. Hòn bi chuyển động như thế nào ? Mô tả và tìm các đặc trưng chuyển động của nó.

2. Cho biết hệ số ma sát giữa thanh và hòn bi là μ. Hãy xác định vị trí cân bằng của hòn bi.

6.21. Để đo gia tốc trọng trường g, người ta có thể dùng con lắc rung, gồm một lá thép phẳng chiều dài l, khối lượng m, một đầu của lá thép gắn chặt vào điểm O của giá, còn đầu kia gắn một chất điểm khối lượng M. Ở vị trí cân bằng lá thép thẳng đứng. Khi làm lá thép lệch khỏi vị trí cân bằng một góc nhỏ θ (radian) thì sinh ra momen lực $c.\theta$ (c là một hệ số không đổi) kéo lá thép trở về vị trí ấy (Hình 6.18).



Hình 6.18

Trọng tâm của lá thép nằm tại trung điểm của nó và momen quán tính của riêng lá thép đối với trục quay qua O là $\frac{ml^2}{3}$.

a) Tính chu kì T các dao động nhỏ của con lắc.

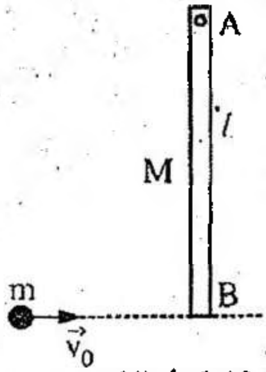
b) Cho $l = 0{,}20$ m , m = 0,01 kg , M = 0,10 kg. Để con lắc có thể dao động, hệ số c phải lớn hơn giá trị nào ? Biết g không vượt quá 9,9 m/s^2.

c) Cho l, m, M có các giá trị như b), c = 0,203. Nếu đo được T = 10 s thì g có giá trị bằng bao nhiêu ?

d) Cho l, m, M, c có các giá trị cho ở c). Tính độ nhạy của con lắc, xác định bởi $\frac{dT}{dg}$, dT là biến thiên nhỏ của T ứng với biến thiên nhỏ dg của g quanh giá trị trung bình $g_0 = 9{,}8\ m/s^2$. Nếu ở gần g_0, gia tốc g tăng 0,01 m/s^2 thì T tăng hay giảm bao nhiêu ?

e) Xét một con lắc đơn có chiều dài $l = 1$ m cũng dùng để đo g. Tính độ nhạy của con lắc đơn ở gần giá trị trung bình g_0 ; g tăng 0,01 m/s^2 thì chu kì T của con lắc đơn tăng hay giảm bao nhiêu ? So sánh độ nhạy của hai con lắc.

6.22. Một thanh cứng AB đồng chất dài l, khối lượng M có thể quay không ma sát trong mặt phẳng thẳng đứng quanh một trục nằm ngang cố định xuyên qua đầu A. Ban đầu thanh ở vị trí cân bằng. Một hòn bi nhỏ có khối lượng m chuyển động theo phương nằm ngang tới va chạm vào đầu B của thanh với vận tốc v_0, gắn chặt vào đầu B và cứng chuyển động của thanh (Hình 6.19).

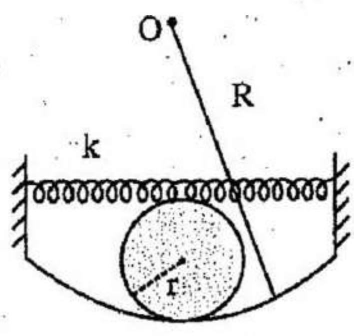


Hình 6.19

a) Giả sử sau va chạm, thanh lệch khỏi vị trí cân bằng một góc nhỏ. Chứng minh rằng thanh dao động điều hòa. Tính góc lệch cực đại của thanh so với phương thẳng đứng và tìm chu kì dao động của thanh.

b) Để thanh có thể quay tròn cả vòng quanh đầu A thì vận tốc tối thiểu của vật m phải bằng bao nhiêu ? Cho gia tốc rơi tự do là g.

6.23. Một hình trụ đặc đồng chất, trọng lượng P, bán kính r đặt trong một mặt lõm bán kính cong R (Hình 6.20). Ở điểm trên của hình trụ người ta gắn hai lò xo với độ cứng k như nhau. Tìm chu kì dao động nhỏ của hình trụ với giả thiết hình trụ lăn không trượt.

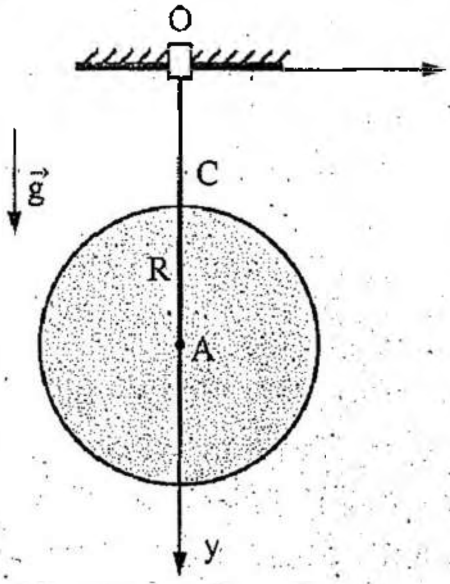


Hình 6.20

6.24. Một thanh OA đồng nhất tiết diện đều, khối lượng m chiều dài 2R, khối tâm C và momen quán tính đối với trục vuông góc với thanh đi qua C là $I_C = \frac{1}{3}mR^2$ (Hình 6.21).

Một đĩa đồng chất khối lượng m, bán kính R ; có tâm đặt tại A và momen quán tính đối với trục đối xứng qua tâm và đĩa vuông góc mặt đĩa là $\frac{1}{2}mR^2$.

Đĩa liên kết với thanh nhờ một cái chốt tại tâm đĩa và vuông góc mặt đĩa.



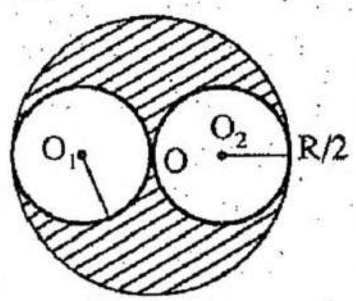
Hình 6.21

Hệ có thể quay trong mặt phẳng đứng (Oxy) và quanh trục nằm ngang Oz đi qua O vuông góc với mặt đĩa, bỏ qua ma sát giữa trục quay Oz và thanh OA.

a) Đĩa và thanh liên kết chặt với nhau. Tính chu kì T_1 dao động của hệ.

b) Đĩa và thanh có thể quay tự do đối với nhau quanh chốt liên kết. Tính chu kì T_2 của những dao động bé của thanh quanh trục Oz.

6.25. Một đĩa bằng đồng khối lượng riêng $\rho = 9.10^3$ kg/m^3, có bề dày b = 2 cm, bánh kính R = 0,5 m. Đĩa bị khoét thủng hai lỗ giống nhau có cùng bán kính $\frac{R}{2}$, đường viền hai lỗ thủng tiếp xúc nhau tại tâm O của đĩa như hình 6.22.



Hình 6.22

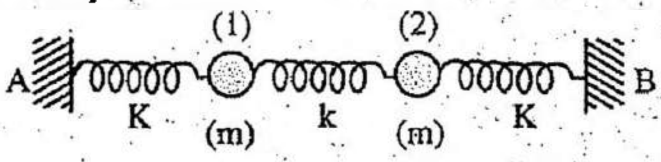
a) Tìm momen quán tính của đĩa đã bị khoét đối với trục vuông góc với đĩa và đi qua tâm O của đĩa.

b) Đặt đĩa trên mặt trụ có bán kính 3R, mặt trụ cố định trên mặt phẳng ngang. Kích thích cho đĩa dao động bé. Tìm chu kì dao động biết đĩa chỉ lăn không trượt và g = 10 m/s^2.

Chủ đề 7. DAO ĐỘNG LIÊN KẾT

7.1. Một hệ dao động liên kết gồm hai con lắc lò xo giống hệt nhau. Trong đó hai quả cầu 1 và 2 nối với hai điểm cố định A và B và nối với nhau bằng các lò xo có độ cứng K, k và K như trên hình 7.1. Khi các quả cầu nằm cân bằng, các lò xo chưa bị biến dạng.

a) Thiết lập phương trình dao động của các quả cầu.

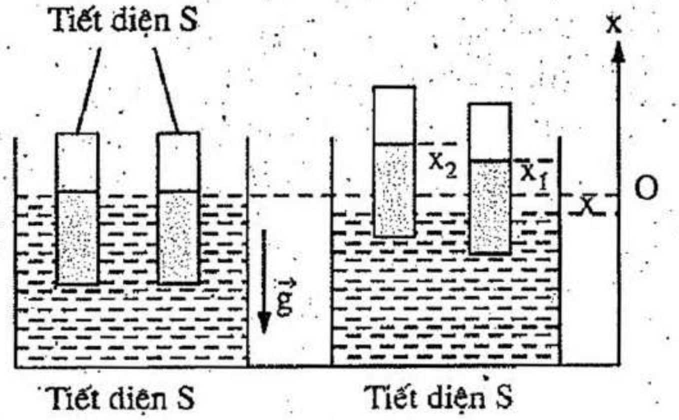


Hình 7.1

Xét các trường hợp liên kết yếu ($k \ll K$) và liên kết mạnh ($K = k$).

b) Tìm các mode (kiểu) dao động và tần số của mode.

7.2. Hai cái phao hình trụ như nhau (có cùng khối lượng m, tiết diện s) có thể dao động theo phương thẳng đứng trong một khối nước đựng trong một cái bình tiết diện S. Vị trí của các phao được đánh dấu bằng các dịch chuyển dọc x_1, x_2 của chúng so với vị trí cân bằng (Hình 7.2).



Hình 7.2

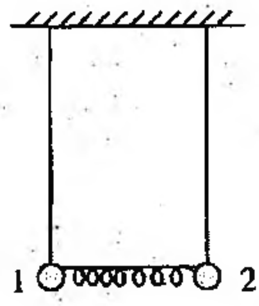
a) Thiết lập phương trình của định luật II Niu-tơn xác định chuyển động của hai cái phao. Giả thiết mặt thoáng của nước trong bình luôn là mặt nằm ngang và có thể áp dụng được định luật Ác-si-mét.

b) Viết phương trình dao động của mỗi phao. Cho biết ở thời điểm ban đầu cả hai phao đều nằm ở vị trí cân bằng, phao thứ nhất có vận tốc ban đầu bằng $2v_0$, còn phao thứ hai có vận tốc ban đầu bằng v_0.

7.3. Hai con lắc đơn 1 và 2 giống nhau, liên kết với nhau bằng một lò xo nằm ngang. Ở trạng thái cân bằng, hai dây thẳng đứng (Hình 7.3). Tìm :

a) Các mode dao động và tần số của mode dao động.

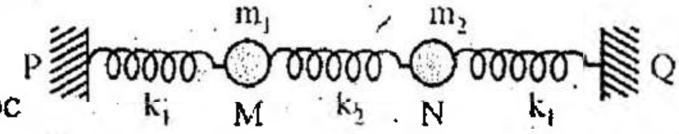
b) Phương trình dao động của mỗi quả cầu trong mỗi mode dao động.



Hình 7.3

7.4. Hai quả nặng M và N, được coi như hai chất điểm, có các khối lượng tương ứng là m_1 và m_2. Chúng được nối với nhau bằng một lò xo có độ cứng k_2, và nối với hai điểm cố định P, Q bằng hai lò xo có cùng độ cứng k_1 như trên hình 7.4. Các quả nặng có thể trượt không ma sát trên một trục nằm ngang. Ta gọi x và y lần lượt là các độ dời khỏi vị trí cân bằng của các quả nặng M và N (Hình 7.4).

1. Giả sử các quả nặng lệch khỏi vị trí cân bằng của chúng.



Hình 7.4

a) Hãy viết phương trình động lực học mô tả chuyển động của các quả nặng.

b) Xác định các tần số đặc trưng của hệ.

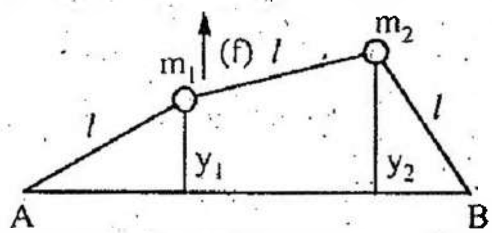
c) Tìm biểu thức x(t) và y(t) cho độ dời của các quả nặng theo thời gian.

2. Giả sử $m_1 = m_2 = m$. Cho một ngoại lực điều hoà $F = F_0\cos\Omega t$ hướng theo trục, tác dụng lên N. Giả thiết có một lực ma sát nhỏ tác dụng lên các quả nặng, sao cho sau một giai đoạn chuyển tiếp kể từ khi lực điều hòa bắt đầu tác dụng, hệ sẽ dao động ổn định với tần số của ngoại lực.

a) Tính biên độ dao động của các quả nặng theo tần số Ω của ngoại lực và tần số đặc trưng của hệ.

b) Phác hoạ dạng biến thiên độ dao động của quả nặng N theo tần số Ω của ngoại lực.

7.5. Hai quả cầu nhỏ khối lượng $m_1 = m_2 = m$, nằm trên mặt bàn nằm ngang không ma sát, được nối với nhau và nối với hai điểm cố định A và B trên mặt bàn bằng các sợi dây đàn hồi có sức căng T không đổi và chiều dài l (Hình 7.5). Cho hai quả cầu dịch ra khỏi vị trí cân bằng một li độ là y_1 và y_2 rồi buông tay (Hình 7.5).



Hình 7.5

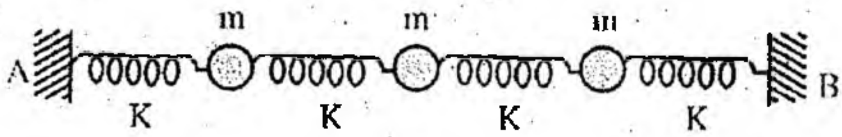
a) Lập phương trình vi phân của chuyển động của mỗi con lắc khi dao động nhỏ.

b) Tìm phương trình dao động tổng quát của mỗi con lắc.

c) Tìm các tần số của mode dao động và tỉ số các biên độ ở mỗi mode dao động. Vẽ hình minh họa.

7.6. Cho một hệ dao động liên kết gồm ba quả cầu cùng khối lượng m và bốn lò xo cùng độ cứng K, bố trí như ở hình 7.6. Hãy tìm các tần số riêng của hệ. Cho biết hệ ba phương trình tuyến tính :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$$

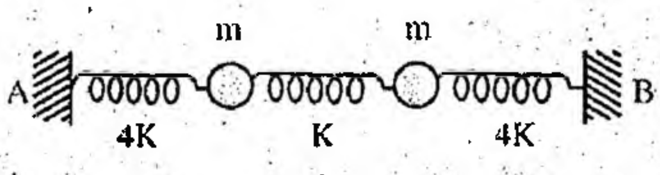


Hình 7.6

chỉ có nghiệm khác 0 ($x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$) nếu thỏa mãn điều kiện :

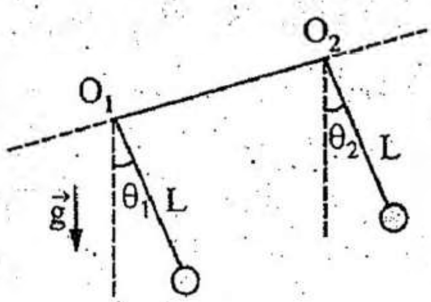
$$a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) = 0.$$

7.7. Cho một hệ dao động liên kết gồm hai quả cầu cùng khối lượng m và ba lò xo như trên hình 7.7. Trong đó, hai lò xo hai bên cùng độ cứng 4K, còn lò xo ở giữa có độ cứng K. Lực ma sát tác dụng lên hai quả cầu là lực ma sát nhớt, có biểu thức $f_{ms} = -\mu v$, với μ là hệ số ma sát nhớt, v là vận tốc quả cầu. Hãy thiết lập phương trình dao động của các quả cầu, biết rằng lúc $t = 0$ thì $X_1(0) = X_0$, $X_2(0) = 0$, $X_1'(0) = X_2'(0) = 0$.



Hình 7.7

7.8. Một hệ dao động liên kết gồm hai con lắc như nhau có cùng khối lượng M (khối tâm của con lắc cách trục quay một khoảng L) và momen quán tính $I = ML^2$ đối với trục quay, liên kết với nhau bằng một sợi dây có hằng số xoắn C (Hình 7.8). Bỏ qua ma sát.

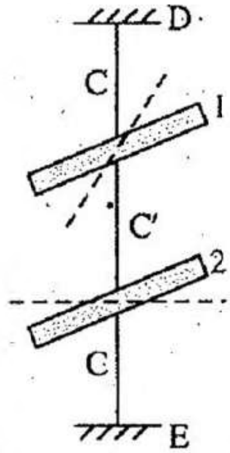


Hình 7.8

a) Thiết lập phương trình dao động nhỏ của hai con lắc.

b) Xét trường hợp liên kết yếu ($C \ll MgL$). Giả thiết lúc $t = 0$, $\theta_{10} = \theta_0$, $\theta_{20} = 0$ và $\theta_1'(0) = \theta_2'(0) = 0$.

7.9. Hai thanh đồng chất giống nhau, có momen quán tính I đối với đường trung trực, được gắn chặt vào một dây kim loại căng thẳng đứng giữa hai điểm cố định D và E. Hằng số xoắn của hai đoạn dây trên và dưới là C, của đoạn dây giữa là C' (hằng số xoắn bằng momen lực mà dây sinh ra khi xoắn một góc 1 radian). Ở vị trí cân bằng, hai thanh song song với nhau và dây không bị xoắn (Hình 7.9). Gọi α_1 và α_2 lần lượt là những góc quay của hai thanh tính từ vị trí cân bằng.



Hình 7.9

1. Chứng minh $\varphi = \alpha_1 + \alpha_2$ và $\theta = \alpha_1 - \alpha_2$ là những hàm điều hòa với những tần số góc ω và ω' (gọi là tần số chuẩn). Tính ω và ω' theo I, C, C'. Viết biểu thức tổng quát của α_1 và α_2.

2. Xét trường hợp riêng : ban đầu thanh 1 bị quay góc A và thả ra nhẹ nhàng, thanh 2 ở vị trí cân bằng.

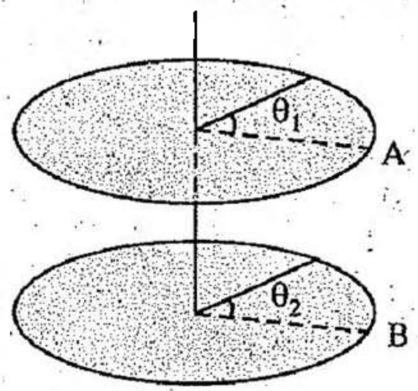
a) Tìm biểu thức của α_1 và α_2.

b) Tìm α_1 và α_2 đơn giản nhất tạo thành các dao động chuẩn φ và θ. Mô tả ngắn gọn chuyển động của hai thanh trong các dao động ấy.

c) Chứng minh nếu C' rất nhỏ so với C thì có hiện tượng phách đối với mỗi thanh. Tính tần số phách Ω theo ω và ω'.

d) Cho biết $\omega = \frac{\pi}{6}$ rad/s, $\omega' = \frac{\pi}{3}$ rad/s. Chứng minh có sự luân chuyển tuần hoàn với chu kì T của năng lượng từ thanh này sang thanh kia (sau một chu kì thì $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \alpha_{max}$; sau hai chu kì thì ngược lại, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = \alpha_{max}$). Tính T. Vẽ trên cùng một hình đường biểu diễn α_1 (bằng nét gạch liền) và đường biểu diễn α_2 (bằng nét gạch rời) trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq 12$ s.

7.10. Hai đĩa tròn A và B đồng tính và giống hệt nhau. Mỗi đĩa có momen quán tính I đối với trục quay đi qua tâm của đĩa và vuông góc với mặt phẳng của đĩa. Đĩa A nằm ngang, tâm của đĩa gắn vào đầu dưới của một sợi dây mảnh thẳng đứng có hằng số xoắn K, đầu trên của dây gắn vào một điểm cố định C. Đĩa B cũng nằm ngang và tâm đĩa gắn vào đầu dưới của một sợi dây mảnh khác có hằng số xoắn bằng K, giống như dưới đĩa A, chỉ khác là đầu trên của sợi dây này gắn vào tâm mặt dưới đĩa A, khiến cho hai dây treo nằm trên cùng một đường thẳng (Hình 7.10).



Hình 7.10

Ở vị trí cân bằng của hai đĩa, hai dây treo không bị xoắn. Kí hiệu θ_1 và θ_2 lần lượt là tọa độ góc của mỗi đĩa (vào thời điểm t) tính từ vị trí cân bằng.

a) Viết phương trình vi phân cho chuyển động của từng đĩa.

b) Giả thiết hai đĩa đều dao động điều hòa với cùng tần số góc ω theo các phương trình $\theta_1 = A\cos\omega t$; $\theta_2 = B\cos\omega t$. Với giá trị nào của ω thì hai phương trình trên đều được thỏa mãn ? Tính tỉ số A/B.

c) Ban đầu đĩa A có tọa độ góc $\theta_1(0) = \theta_0$ và vận tốc góc bằng 0. Cần phải để đĩa B ở tọa độ góc ban đầu bằng bao nhiêu (vận tốc góc ban đầu của đĩa B bằng 0) thì hai đĩa đều dao động với cùng tần số góc như ở câu b ? Chiều quay của hai đĩa so với nhau như thế nào ?

Chương IV
NHIỆT HỌC

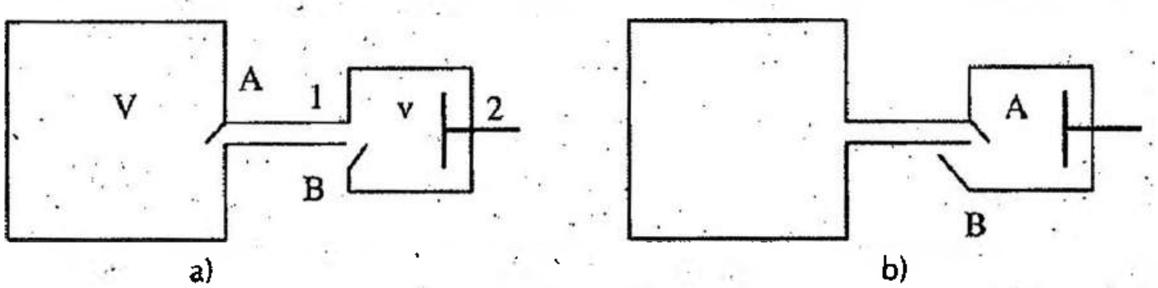
Chủ đề 8. NHIỆT HỌC VÀ VẬT LÍ PHÂN TỬ

8.1. Một xilanh có chứa khí được đậy bằng pittông. Pittông có thể trượt không ma sát dọc theo xilanh. Pittông có khối lượng m, diện tích tiết diện S. Khí có thể tích ban đầu V. Áp suất khí quyển p_0. Tìm thể tích khí nếu xilanh chuyển động theo phương thẳng đứng với gia tốc a. Coi nhiệt độ không thay đổi.

8.2. Một bình chứa không khí ở điều kiện chuẩn, được đậy bằng một vật có khối lượng 2 kg. Tiết diện của miệng bình là 10 cm^3. Tìm nhiệt độ cực đại của không khí trong bình để không khí trong bình không đẩy nắp bình lên và thoát ra ngoài. Biết áp suất khí quyển là $p_0 = 1$ atm.

8.3. Hai bình có thể tích bằng nhau V và thông với nhau bởi một ống có tiết diện nhỏ, được giữ ở hai nhiệt độ khác nhau T_1 và T_2. Lượng khí trong bình có tổng cộng N phân tử ở trạng thái cân bằng (số phân tử khí trong mỗi bình là không đổi). Số phân tử khí trong mỗi bình là bao nhiêu ?

8.4. Hình 8.1a là sơ đồ nén không khí vào bình có thể tích V bằng bơm có thể tích v. Khi pitông đi sang bên phải thì van A đóng không cho không khí thoát ra khỏi bình đồng thời van B mở cho không khí đi vào xilanh. Khi pittông đi sang bên trái thì van B đóng, van A mở, pittông nén không khí vào bình.



Hình 8.1

a) Ban đầu pittông ở vị trí 1 và áp suất trong bình là p_0, áp suất khí quyển p_k. Tính số lần phải ấn pittông để áp suất trong bình có giá trị cuối p_c. Người ta ấn chậm để nhiệt độ trong bình không đổi.

b) Bố trí lại các van như trong hình 8.1b thì có thể rút không khí trong bình. Ban đầu pittông ở vị trí 1, áp suất trong bình là p_0. Tính số lần cần kéo pittông để áp suất trong bình giảm đi r lần, $p_c = p_0$. Áp dụng bằng số : r = 100, V = 10v. Tính số lần kéo cần pittông.

8.5. Một pittông nặng có thể chuyển động không ma sát trong một xilanh kín đứng thẳng. Phía trên pittông có một mol khí, phía dưới cũng có 1 mol khí của cùng một chất khí lí tưởng. Ở nhiệt độ tuyệt đối T chung cho cả xilanh, tỉ số các thể tích khí là $\frac{V_1}{V_2} = n > 1$. Tính tỉ số $x = \frac{V_1'}{V_2'}$ khi nhiệt độ của khí có giá trị T' cao hơn. Dãn nở của xilanh không đáng kể.

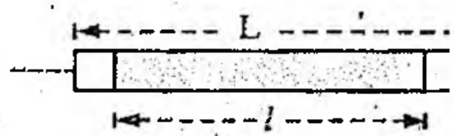
Áp dụng bằng số : n = 2, T' = 2T. Tính x.

8.6. Một mol khí nhận nhiệt lượng Q và dãn nở theo quy luật V = bp, b là một hệ số không đổi. Áp suất tăng từ p_1 đến p_2. Biết nhiệt dung mol đẳng tích C_V. Tính b (theo Q, C_V, p_1, p_2).

8.7. Một ống hình trụ hai đầu kín có chiều dài l = 50,00 cm, tiết diện S = 80 cm^2, bên trong có một khối vật trượt dọc theo thành ống (Hình 8.2). Khối vật hình trụ cách nhiệt, có chiều dài l = 40,00 cm, khối lượng riêng $\rho = 1,60.10^3$ $kg.m^{-3}$.

Hai đầu còn lại của thành ống chứa khí nitơ được xem là chất khí lí tưởng lưỡng nguyên tử.

– Khi ống được đặt vị trí nằm ngang thì thể tích hai khối khí là như nhau.



Hình 8.2

– Khi đặt ống thẳng đứng thì khối vật đi xuống một đoạn Δl = 25,0 mm.

a) Hãy xác định áp suất chất khí ống nằm ngang.

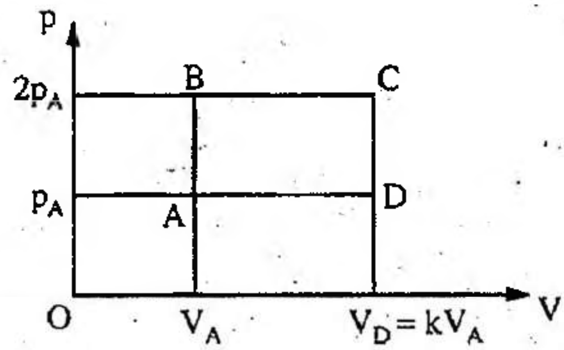
Ống được đặt nằm ngang, sau đó cho ống chuyển động đột ngột theo phương ngang, khi đó do quán tính khối trụ dịch chuyển một đoạn s = 25,0 mm dọc theo thành ống.

b) Hãy xác định công để thực hiện dịch chuyển này.

c) Tính gia tốc của ống.

(Trích Đề thi Olimpic Italia - 1997)

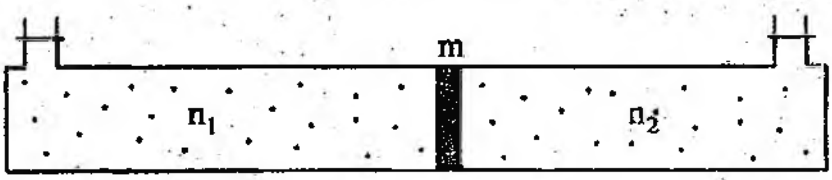
8.8. Một khí lí tưởng đơn nguyên tử hoạt động với chu trình sau (Hình 8.3) :



Hình 8.3

Hãy xác định tỉ số $k = \dfrac{V_D}{V_A}$ khi mà hiệu suất của chu trình là 15%.

8.9. Một xilanh có thành cách nhiệt, tiết diện $S = 100\ cm^2$, chiều dài $l = 100$ cm được đặt nằm ngang. Bên trong xilanh có một pittông khối lượng m = 0,13 kg, chiều dài không đáng kể, trượt không ma sát dọc theo thành xilanh. Nhiệt dung riêng của pittông là $c = 390\ Jkg^{-1}K^{-1}$ (Hình 8.4).



Hình 8.4

Ở buồng trái xilanh có n_1 = 2,3 mol khí lí tưởng đơn nguyên tử ở nhiệt độ $t_1 = -90^\circ C$, còn ở buồng bên phải có n_2 mol khí lí tưởng đơn nguyên tử ở $t_2 = 46^\circ C$. Khi đó pittông nằm cân bằng cách thành bên trái 53 cm.

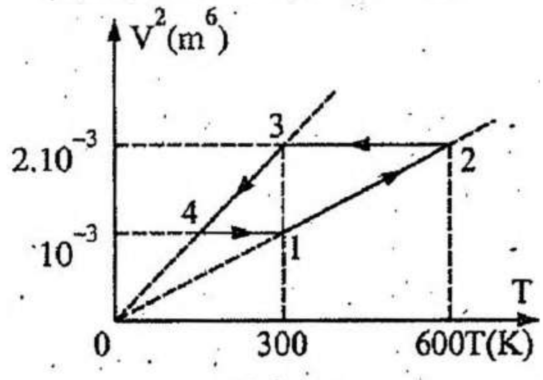
a) Xác định số mol khí ở buồng bên phải.

b) Pittông được đốt nóng để có nhiệt độ ban đầu là $100^\circ C$. Cho pittông tỏa nhiệt và sau đó hệ ở trạng thái cân bằng. Hãy xác định nhiệt độ cân bằng của hệ.

c) Xác định vị trí cân bằng mới của pittông.

8.10. Một mol khí lưỡng nguyên tử hoạt động theo một chu trình kín được mô tả bởi đồ thị $T - V^2$ như trên hình 8.5.

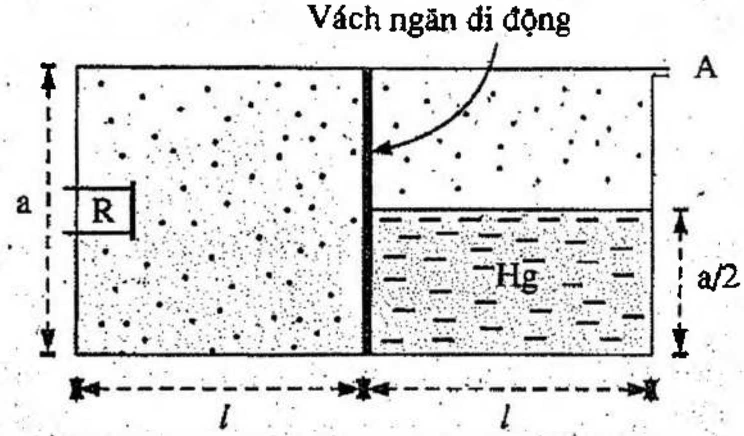
Hãy biến đổi thành đồ thị p – V từ đó tính ra công và hiệu suất của chu trình.



Hình 8.5

(Trích đề thi Olimpic Italia - 2000)

8.11. Một vách ngăn mỏng khối lượng đáng kể có thể trượt bên trong lòng xilanh có tiết diện ngang là hình vuông. Vách ngăn và thành xilanh làm bằng vật liệu cách nhiệt. Ngăn bên trái có chứa khí lí tưởng đơn nguyên tử. Một nửa ngăn bên phải chứa thủy ngân, phần còn lại chứa không khí ở áp suất thường thông qua lỗ A.



Hình 8.6

a) Khi vách ngăn nằm ngay chính giữa xilanh, hệ ở trạng thái cân bằng. Tính áp suất của khối khí lên vách ngăn.

b) Dùng điện trở R đun nóng khối khí. Khi đó vách ngăn dịch chuyển sang phải. Xác định mối liên hệ giữa áp suất và thể tích khối khí.

c) Xác định nhiệt độ khối khí khi vách ngăn đi đến chạm thành bên phải.

d) Tính công mà khối khí thực hiện được.

e) Tính nhiệt lượng cung cấp cho khối khí.

Áp dụng bằng số : $a = 4{,}00$ cm ; $l = 5{,}00$ cm ; $p_{atm} = 101{,}2$ kPa.

Nhiệt độ ban đầu khối khí : $t_0 = 27{,}0^oC$.

Khối lượng riêng của thủy ngân : $\rho = 13{,}6.10^3\ kg.m^{-3}$.

8.12. Người ta bơm $10\ m^3$ khí nóng ở nhiệt độ $T = 300$ K vào khinh khí cầu. Nhiệt độ và áp suất khí quyển khi ấy là $T_0 = 279$ K và $p_0 = 1{,}00$ bar. Khối lượng khinh khí cầu là 240 kg. Khi đó khinh khí cầu chưa thể bay lên được.

a) Hãy tính lượng không khí chứa trong khinh khí cầu khi ấy.

Muốn khinh khí cầu bay lên người ta phải tăng nhiệt độ của khối khí lên bên trong khinh khí cầu mà không thêm vào hoặc lấy bớt không khí ra. Đây là quá trình đẳng áp. Xem không khí là phân tử lưỡng nguyên tử có nhiệt dung riêng đẳng áp là $c_{mp} = 7\dfrac{R}{2}$. Cho biết hằng số khí lí tưởng là R = 8,31 J/mol.K và khối lượng mol của không khí là $M_A = 29$ g/mol.

b) Tính thể tích của khinh khí cầu đạt được để có thể bắt đầu bay lên.

c) Cần phải cung cấp nhiệt lượng bằng bao nhiêu trong quá trình đun nóng khối khí ?

(Trích đề thi Olimpic Thụy Sĩ - 1996)

8.13. Trong pha đầu tiên của chu trình Ốt-tô, người ta cho hỗn hợp xăng và không khí vào trong xilanh. Khi đó các thông số của hỗn hợp là như sau : thể tích $V = 1\ l$, áp suất $p_0 = 1$ bar, nhiệt độ 323 K. Trong toàn bộ các quá trình thì tỉ số $\frac{c_p}{c_V}$ là $\gamma = 1{,}3$.

a) Trong giai đoạn nén, người ta nén đoạn nhiệt khối khí còn $\frac{1}{8}$ thể tích ban đầu. Tính nhiệt độ hỗn hợp khối khí vào cuối quá trình này.

b) Sau đó đến giai đoạn cháy nổ. Vì quá trình xảy ra rất nhanh ta có thể xem thể tích dường như không thay đổi. Trong quá trình này số phân tử tăng lên 10% và nhiệt độ đạt đến 1500 K. Tính áp suất của khối khí vào cuối giai đoạn này.

c) Sau giai đoạn cháy, khối khí dãn nở đoạn nhiệt đến thể tích ban đầu. Cuối cùng, đến giai đoạn thoát khí. Tính công thực hiện được trong cả quá trình.

d) Nếu các bạn không giải được câu c) giả sử pittông nhận được 400 J mỗi chu trình.

Một xe có động cơ bốn kì hoạt động theo nguyên tắc và các thông số đã tính toán ở trên. Giả sử vận tốc của xe là 100 km/h, pittông quay 3500 vòng/phút, hiệu suất là 33%. Tính lượng xăng tiêu thụ (kg) trên đoạn đường 100 km.

(Trích đề thi Olimpic Thụy Sĩ - 1996)

8.14. Khi có giông, gió đi xuống nhanh từ đỉnh núi vì vậy sự nén không khí có thể xem như quá trình đoạn nhiệt. Lúc đầu không khí có nhiệt độ $10^{\circ}C$ và đi xuống 100 m. Nhiệt độ khối khí tăng một lượng là bao nhiêu ? Sự tăng áp suất theo độ cao (ứng với $10^{\circ}C$) biểu thị bằng công thức sau :

$$p(h) \approx p_0 . e^{-\frac{h}{8300\,m}}$$

trong đó h là độ cao ứng với áp suất p_0. Lấy $\gamma = 1{,}4$.

(Trích đề thi Olimpic Thụy Sĩ - 1997)

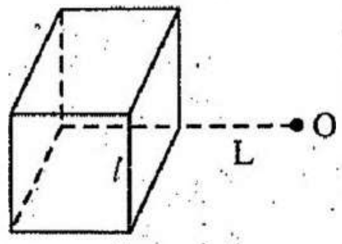
8.15. Có hai khối cầu bằng nhôm giống nhau, một quả nằm trên mặt phẳng cách nhiệt, quả kia được treo vào sợi dây cách nhiệt. Truyền cho các quả cầu các nhiệt lượng như nhau. Hỏi sau đó quả cầu nào sẽ có nhiệt độ cao hơn ? Tính toán độ chênh lệch nhiệt độ giữa hai quả cầu nếu mỗi quả cầu có khối lượng 100 g, nhận được nhiệt lượng 25 kJ.

(Trích đề thi Olimpic Canada - 1998)

8.16. Một khối lập phương cạnh l được xem như một hộp đen. Đặt một ngọn đèn công suất Q(J/s) tại điểm O cách một mặt của khối lập phương một đoạn L. Xem đèn phát xạ liên tục, và khối lập phương hấp thụ toàn bộ bước sóng, bỏ qua sự mất mát năng lượng.

a) Cần bao nhiêu thời gian để tăng nhiệt độ của khối lập phương lên $1^{o}C$.

b) Điều gì xảy ra nếu khối lập phương bức xạ lại như vật đen tuyệt đối. Tìm thời gian để nhiệt độ giảm xuống 1 K.



Hình 8.7

c) Hãy tính nhiệt độ cuối cùng của khối lập phương sau một thời gian dài.

(Trích đề thi Olimpic Canada - 1999)

8.17. a) Tìm áp suất bên trong bọt xà phòng bán kính r, nếu suất căng bề mặt là σ.

b) Điều gì sẽ xảy ra nếu cho hai bọt xà phòng tiếp xúc nhau (cho biết bọt này lớn hơn bọt kia và màn ngăn giữa hai bọt chưa bị phá vỡ).

c) Mô tả hiện tượng tiếp theo nếu màn ngăn cách bị vỡ và hai bọt nhập chung lại.

d) Điều gì sẽ xảy ra nếu hai bọt xà phòng nằm ở hai đầu của một ống hút.

(Trích đề thi Olimpic Canada - 2000)

8.18. Một thanh có hệ số nở dài là λ, chiều dài ban đầu L. Nhiệt độ ban đầu của thanh là T_1.

a) Tăng nhiệt độ thanh lên nhiệt độ T_2. Tìm chiều dài mới của thanh. Nếu cho nhiệt độ hạ xuống T_1, tìm chiều dài của thanh sau chu trình này.

b) Tăng và hạ nhiệt độ n lần. Chiều dài của thanh cuối cùng là bao nhiêu ? Bạn hãy lí giải điều gì khiến bạn thấy là phi lí.

(Trích đề thi Olimpic Canada - 2000)

8.19. Một bình hình trụ bán kính r chứa n mol chất khí lí tưởng đơn phân tử. Đặt một pittông mỏng khối lượng M lên miệng bình sao cho pittông vừa khít với thành trong của bình. Nhiệt độ của khí là T. Xem pittông và bình là hoàn toàn cách nhiệt.

a) Hãy tìm độ cao của pittông so với đáy.

Đặt một vật nhỏ khối lượng m lên pittông. Pittông bắt đầu dao động.

b) Nếu dao động là tắt dần thì độ cao cuối cùng của pittông là bao nhiêu ?

Nếu dao động là không tắt dần thì vị trí độ cao ở câu (b) là vị trí cân bằng. Pittông sẽ dao động quanh vị trí cân bằng này.

c) Có thể mô hình hóa dao động trên như quả cầu gắn vào lò xo. Hãy xác định các thông số tương ứng của hai dao động.

d) Tính vị trí thấp nhất trong dao động này.

8.20. Có bao giờ các bạn nghĩ đến vận tốc chuyển động của các phần tử không khí trong buồng phổi lớn như thế nào không ? Không khí trong bầu khí quyển chứa nhiều loại khí khác nhau, động năng của chúng phụ thuộc vào chuyển động nhiệt. Các phân tử chất khí này va chạm lẫn nhau, khiến vận tốc của chúng ảnh hưởng lẫn nhau. Khi nói đến vận tốc các phân tử, phải nói đến tập hợp rất lớn các phân tử để tìm xác suất phân bố giá trị của vận tốc. Còn vận tốc của một phân tử không có ý nghĩa nào đó.

Theo Mắc-xoen, hàm số phân bố vận tốc là : $\rho(v) = 4\pi\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{Mv^2}{2RT}}$.

Trong đó : M là khối lượng mol của chất khí.

T là nhiệt độ tuyệt đối.

R là hằng số chất khí.

Từ hàm số phân bố này sẽ xác định được xác suất để một hạt có vận tốc trong khoảng từ v đến v + dv.

a) Hãy tính xác suất phân bố của vận tốc phân tử khí O_2 ở nhiệt độ T = 300 K. Biết M = 0,0320 kg/mol, R = 8,31 J/mol K.

b) Hãy vẽ đồ thị hàm phân bố Mắc-xoen.

(Trích đề thi Olimpic Canada - 1999)

8.21. Một khối cầu bằng đồng ở nhiệt độ 100^oC. Khi đó, đường kính khối cầu là 25,4508 mm. Sau đó đặt khối cầu lên một vành tròn bằng nhôm có khối lượng m = 20 g đang ở 0^oC. Ở nhiệt độ này, đường kính trong của vành là 25,4 mm, vì vậy khối cầu không lọt qua vành. Một lúc sau, hệ ở trạng thái cân bằng, khối cầu bắt đầu lọt qua vành đồng. Giả sử không có mất mát nhiệt ra môi trường xung quanh, hãy tính khối lượng của khối cầu.

Cho biết :

– Hệ số nở nhiệt : Cu = 431,8 nm.K^{-1} ; Al = 548,2 nm.K^{-1}.

– Nhiệt dung riêng : Cu = 386 J.$kg^{-1}K^{-1}$; Al = 900 J.kg^{-1}.K^{-1}.

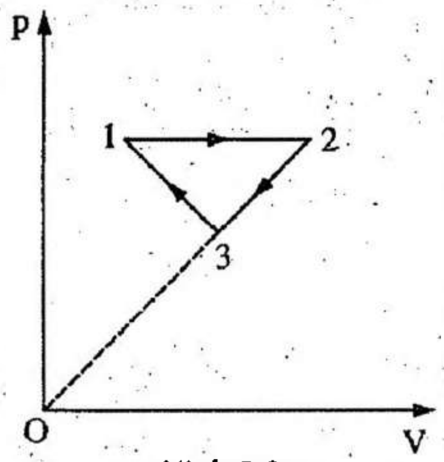
(Trích đề thi Olimpic Canada - 2000)

8.22. Một bình có thành bằng thép mỏng, dung tích 1 *l* chứa khí He ở điều kiện tiêu chuẩn. Hãy tính áp suất cực đại và nhiệt độ khối He trong bình khi đó, xem khí He là chất khí lí tưởng và bình có hệ số dãn nở dài là α. Biết rằng không chỉ có khối khí mà bình cũng dãn nở khi nhiệt độ tăng. Hãy xác định thể tích của bình ở nhiệt độ này.

Cho biết phương trình dãn nở nhiệt theo chiều dài là : $\Delta x = \alpha x \Delta T$, trong đó Δx : độ dãn nở ; α : hệ số dãn nở ; x : độ dài ban đầu ; ΔT : độ biến thiên nhiệt độ ; $\alpha = 1,1.10^{-5}K^{-1}$.

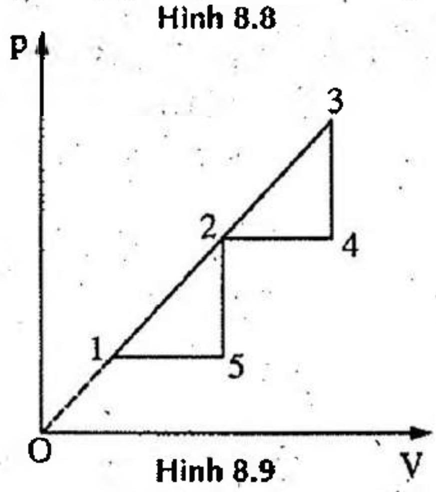
(Trích đề thi Olimpic Canada - 2001)

8.23. Trên hình vẽ 8.8, cho chu trình thực hiện bởi n mol khí lí tưởng, gồm một quá trình đẳng áp và hai quá trình có áp suất p phụ thuộc tuyến tính vào thể tích V. Trong quá trình đẳng áp 1 – 2, khí thực hiện một công A và nhiệt độ của nó tăng 4 lần. Nhiệt độ tại 1 và 3 bằng nhau. Các điểm 2 và 3 nằm trên đường thẳng đi qua gốc tọa độ. Hãy xác định nhiệt độ khí tại điểm 1 và công mà khối khí thực hiện trong chu trình trên.



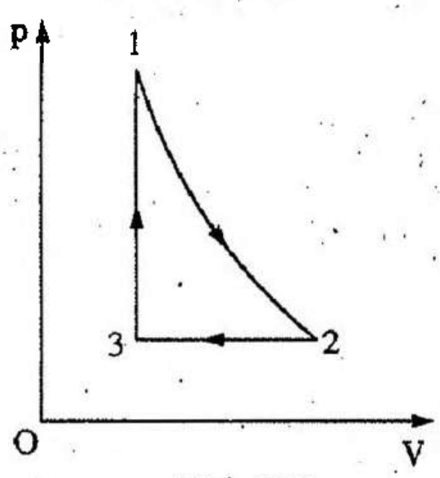
Hình 8.8

8.24. Một máy nhiệt, với chất công tác là khí lí tưởng đơn nguyên tử, thực hiện công theo chu trình 1 – 2 – 3 – 4 – 2 – 5 – 1 được biểu diễn trên giản đồ p–V như hình 8.9. Các điểm 1, 2 và 3 nằm trên một đường thẳng đi qua gốc tọa độ của giản đồ, trong đó điểm 2 là trung điểm của đoạn 1 – 3. Tìm hiệu suất của máy nhiệt trên, biết rằng nhiệt độ cực đại của khí trong chu trình này lớn hơn nhiệt độ cực tiểu của nó n lần. Tính hiệu suất với n = 4.



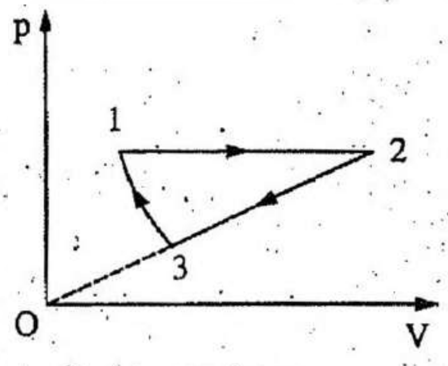
Hình 8.9

8.25. Một mol khí He thực hiện một chu trình như hình 8.10 gồm các quá trình : đoạn nhiệt 1 – 2, đẳng áp 2 – 3 và đẳng tích 3 – 1. Trong quá trình đoạn nhiệt hiệu nhiệt độ cực đại và cực tiểu của khí là ΔT. Biết rằng trong quá trình đẳng áp, khí tỏa ra một nhiệt lượng bằng Q. Hãy xác định công A do khối khí thực hiện trong chu trình trên.



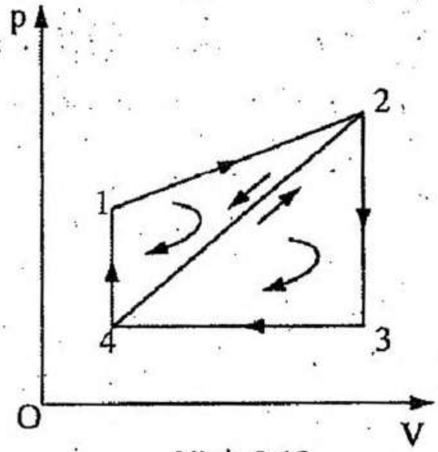
Hình 8.10

8.26. Một khối khí He chứa trong một xilanh có pittông di chuyển được. Người ta đốt nóng khối khí này trong điều kiện áp suất không đổi, đưa khí từ trạng thái 1 tới trạng thái 2. Công mà khí thực hiện trong quá trình này là A_{1-2}. Sau đó, khí bị nén theo quá trình 2 – 3, trong đó áp suất p tỉ lệ thuận với thể tích V. Đồng thời khối khí nhận một công là A_{2-3} ($A_{2-3} > 0$). Cuối cùng khí được nén đoạn nhiệt về trạng thái ban đầu. Hãy xác định công A_{31} mà khí nhận được trong quá trình này (Hình 8.11).



Hình 8.11

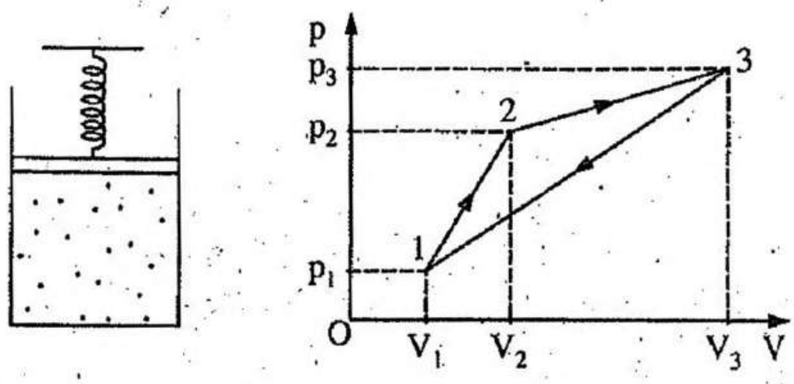
8.27. Cho hiệu suất của chu trình 1 – 2 – 4 – 1 bằng η_1 và của chu trình 2 – 3 – 4 – 2 bằng η_2 (Hình 8.12). Hãy xác định hiệu suất của chu trình 1 – 2 – 3 – 4 – 1, biết rằng các quá trình 4 – 1, 2 – 3 là đẳng tích, quá trình 3 – 4 là đẳng áp, còn trong các quá trình 1 – 2 ; 2 – 4 áp suất p phụ thuộc tuyến tính vào thể tích V. Các quá trình nói trên đều được thực hiện theo chiều kim đồng hồ. Biết rằng chất công tác ở đây là khí lí tưởng.



Hình 8.12

8.28. Một mol khí lí tưởng thực hiện chu trình gồm các quá trình sau : quá trình đoạn nhiệt AB, quá trình đẳng nhiệt BC ở nhiệt độ T_1, quá trình đẳng tích CD và quá trình đẳng nhiệt DA ở nhiệt độ $T_2 = \alpha T_1$. Hãy xác định tỉ số $\dfrac{V_A}{V_C}$ theo α và hệ số γ để công mà khí nhận được trong chu trình trên bằng 0. Biểu diễn chu trình trên giản đồ p – V. Biện luận theo α.

8.29. Khí lí tưởng ở trong một xilanh có diện tích đáy là S ở dưới một pittông được giữ cân bằng bởi một lò xo có một đầu được gắn cố định (Hình 8.13). Bên ngoài xilanh là chân không. Người ta đòi hỏi cho khối khí đó thực hiện chu trình 1 – 2 – 3 – 1 như được biểu diễn trên hệ tọa độ p – V. Để làm điều đó, cho phép nung nóng và làm lạnh chậm khối khí đồng thời có thể thay lò xo mỗi khi chuyển sang đoạn tiếp theo của chu trình. Hãy xác định độ cứng, độ biến dạng ban đầu và cuối cùng của các lò xo cần thiết để thực hiện được chu trình trên. Các giá trị của áp suất và thể tích khí ở các trạng thái 1, 2 và 3 cho trên hình là đã biết.



Hình 8.13

8.30. Một lượng khí lí tưởng đơn nguyên tử chuyển từ trạng thái 1 sang trạng thái 2 theo hai cách trong hệ tọa độ T–V : đi theo đường cong 1 a 2 là một phần của parabol với phương trình $T = \alpha V^2$ và theo hai đoạn thẳng 1 – 3 (đẳng tích) và 3 – 2 (đoạn thẳng qua gốc tọa độ). Hỏi khí nhận một nhiệt lượng bằng bao nhiêu trong quá trình 1 – 3 – 2, nếu trong quá trình 1 a 2 người ta cung cấp cho khí đó một nhiệt lượng 2200 J, biết $T_1 = 250$ K và $T_2 = 360$ K.

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

Chương I. CƠ HỌC CHẤT ĐIỂM

Chủ đề 1

1.1. Đặt AD = d ; CD = x (Hình 1.1G)

Thời gian để người này đi từ A đến B :

$$t = \frac{d - x}{v_1} + \frac{n\sqrt{h^2 + x^2}}{v_1} = \frac{n\sqrt{h^2 + x^2} - x + d}{v_1} = \frac{y + d}{v_1}$$

Xét : $y = n\sqrt{h^2 + x^2} - x$.

Biến đổi ta được phương trình bậc hai theo x :

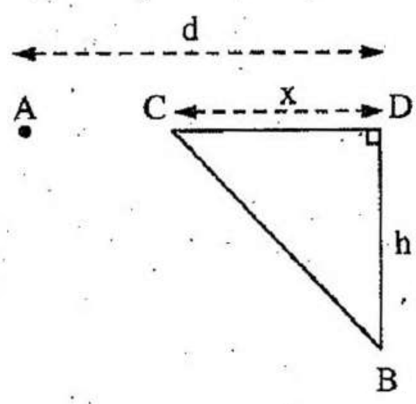
$$(n^2 - 1)x^2 - 2xy + n^2h^2 - y^2 = 0$$

$$\Delta' = y^2 - (n^2 - 1)(n^2h^2 - y^2)$$

Bài toán có nghĩa với $\Delta' \geq 0$, suy ra : $y^2 \geq h^2(n^2 - 1)$.

$$y_{min} = h\sqrt{n^2 - 1}$$

Giá trị y_{min} cho ta : $x = \dfrac{h}{\sqrt{n^2 - 1}}$



Hình 1.1G

Biện luận :

- Trước tiên ta thấy x (vị trí C) không phụ thuộc vào d (vị trí của A)
- Nếu $v_2 = v_1 \Rightarrow n = 1$ thì t(x) là một hàm giảm đơn điệu của x.

Như vậy sẽ có lợi khi người đó chạy vào cánh đồng ngay tại A.

- Nếu v_2 tiến về 0 thì x tiến về D – phải giảm đường đi trên cánh đồng.

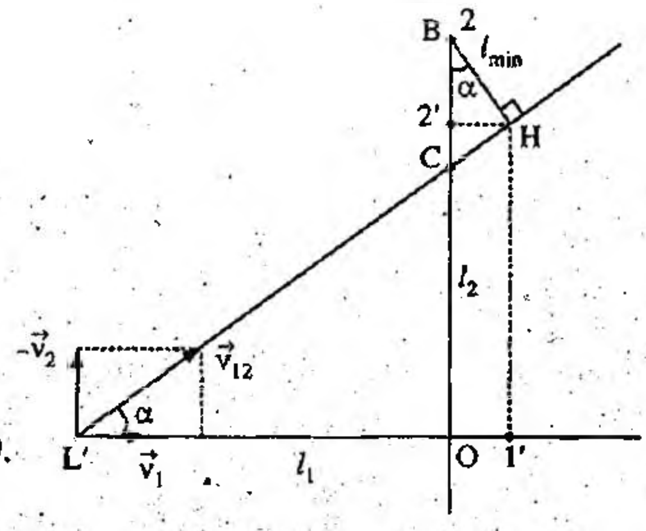
1.2. Chọn hệ quy chiếu đứng yên là động tử 2 : $\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

Khoảng cách cực tiểu giữa hai động tử là : $l_{min} = BH$.

Từ hình 1.2G ta có : $l_{min} = (l_2 - l_1\tan\alpha)\cos\alpha$, với

$$\tan\alpha = \frac{v_2}{v_1} \; ; \cos\alpha = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

Vậy $l_{min} = \dfrac{l_2 v_1 - l_1 v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$.



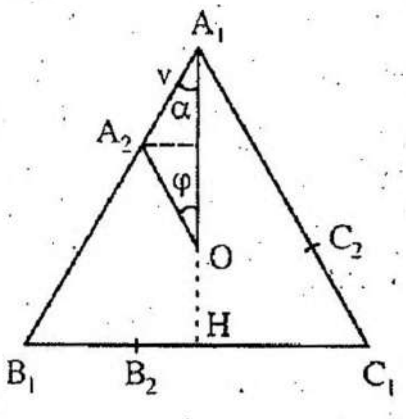
Hình 1.2G

Tổng quát là : $l_{min} = \dfrac{|l_2 v_1 - l_1 v_2|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$

Biện luận :

- Nếu $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{l_1}{l_2}$ thì $l_{min} = 0$: 1 gặp 2 tại O.
- Nếu $\dfrac{v_1}{v_2} > \dfrac{l_1}{l_2}$ thì $l = l_{min}$ khi 1 đã đi qua O.
- Nếu $\dfrac{v_1}{v_2} < \dfrac{l_1}{l_2}$ thì $l = l_{min}$ khi 2 đã đi qua O.
- Nếu $l_2 = 0$ thì $l_{min} = \dfrac{l_1 v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$.

1.3. a) Giả sử lúc t các động tử ở A_1, B_1, C_1 và lúc t + dt chúng ở A_2, B_2, C_2. Vì lí do đối xứng nên $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ là các tam giác đều, với $A_1A_2 = vdt$, $OA_1 = r_1$ và $OA_2 = r_2$ (Hình 1.3G).



Hình 1.3G

Xét ΔA_1A_2O ta có :

$$\overline{OA_2}^2 = \overline{OA_1}^2 + \overline{A_1A_2}^2 - 2\overline{OA_1}.\overline{A_1A_2}\cos\alpha$$

$$r_2^2 = r_1^2 + v^2dt^2 - 2r_1vdt.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Bỏ qua vô cùng bé bậc hai v^2dt^2 ta được :

$$-r_1v\sqrt{3}\,dt = r_2^2 - r_1^2 = (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) \approx 2r_1dr$$

Suy ra $dt = -\dfrac{2dr}{v\sqrt{3}} \Rightarrow \displaystyle\int_0^t dt = -\frac{2}{v\sqrt{3}}\int_{OA_1}^{0} dr = \frac{2}{v\sqrt{3}}r\Big|_0^{OA_1}$ (1)

Ta phải tính OA_1 : Đường cao $A_1H = \dfrac{3}{2}OA_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OA_1 = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

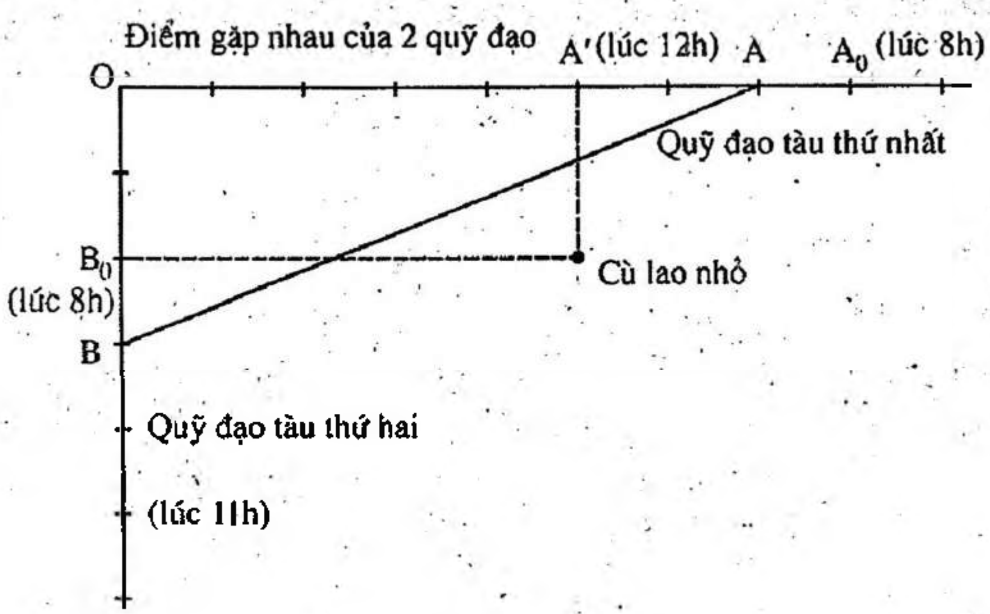
Thay vào (1): $t = \frac{2}{v\sqrt{3}} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{3v}$

Thay số $t = \frac{2.0,3}{3.0,02} = 10$ s.

b) Vì v = const nên s = vt = 2.10 = 20 cm.

1.4. Quỹ đạo của hai tàu được vẽ ở hình 1.4G. A' là vị trí tàu thứ nhất lúc 12 h, A_0 là vị trí của tàu này lúc 8h, $A_0A' = 60$ dặm ; B_0 là vị trí tàu thứ hai lúc 8 h. Chọn 1 đơn vị độ dài = 20 dặm và lấy thời điểm 8 h làm thời điểm ban đầu. Vì tốc độ hai tàu như nhau (15 dặm/giờ), cho nên ta có :

$$\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{A_0O} + \overline{OB_0} = 10 \text{ (đơn vị độ dài).}$$



Hình 1.4G

Khoảng cách giữa hai tàu :

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = 2\overline{OA}^2 - 20.\overline{OA} + 10^2 = 2\overline{OB}^2 - 20.\overline{OB} + 10^2$$

Vế phải là các tam thức bậc hai dạng $ax^2 + bx + c$, đạt cực trị khi $x = -\frac{b}{2a}$; cho nên suy ra $\overline{AB}$ đạt cực tiểu khi $\overline{OA} = 5$ đơn vị, hoặc khi $\overline{OB} = 5$ đơn vị, tức là khi tàu thứ nhất ở A' thì tàu thứ hai cách O một khoảng bằng 5.20 dặm = 100 dặm.

Khoảng cách ngắn nhất giữa hai con tàu là $5\sqrt{2}.20 \approx 141$ dặm, vào lúc 12 h trưa.

1.5. a) Giả sử hai xe gặp nhau khi xe đi từ A đang chạy với vận tốc $(k+1)v_1$ và đi với vận tốc này được Δt giờ $(0 \le \Delta t \le \frac{1}{4}$ (h)) (1). Quãng đường xe từ A đi được là :

$$s_A = v_1.\frac{1}{4} + 2v_1.\frac{1}{4} + ... + kv_1.\frac{1}{4} + (k+1)v_1\Delta t$$

$$= \frac{5}{4}k(k+1) + (k+1)10\Delta t \text{ (km)} \quad (2)$$

Quãng đường xe từ B đi được là :

$$s_B = v_2\left[k\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) + \Delta t\right] = 10k + 30\Delta t \text{ (km)} \quad (3)$$

Khi hai xe gặp nhau : $s_A + s_B = 81$ (km) (4)

Từ (1), (2), (3) và (4) rút ra : $3,8 \le k \le 4,7 \Rightarrow k = 4 \Rightarrow \Delta t = 0,2$ h.

Thời điểm hai xe gặp nhau kể từ lúc xuất phát :

$$t = k\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right) + \Delta t = \frac{23}{15}\text{(h)} = 1\text{h } 32 \text{ ph}$$

Vị trí gặp nhau cách B là : $s_B = v_2t = 46$ km, cách A là 35 km.

Dễ dàng kiểm tra lại rằng không xảy ra trường hợp hai xe gặp nhau khi xe đi từ A đang nghỉ.

b) Nếu coi hai xe xuất phát cùng một lúc thì ban đầu hai xe cách nhau :

$$s = 81 + \frac{12}{60}.30 = 87 \text{ km}$$

và hai xe gặp nhau khi $s_A + s_B = 87$ km (5)

Giả sử hai xe gặp nhau khi xe đi từ A đang nghỉ lần thứ k và xe đã nghỉ được Δt giờ với : $0 \le \Delta t \le \frac{1}{12}$ (h) (6)

Khi đó quãng đường xe A và xe B đi được tương ứng là :

$$s_A = \frac{5}{4}k(k+1) \text{ (km)} \quad (7)$$

và $s_B = v_2\left[k\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{12} + \Delta t\right] = 10k - 2,5 + 30\Delta t$ (km) (8)

Từ (5), (6), (7) và (8) rút ra : $4,98 \le k \le 5,08 \Rightarrow k = 5 \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{15}$ h.

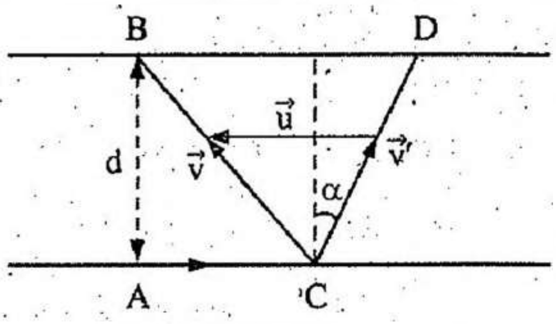
Thời điểm hai xe gặp nhau kể từ lúc xe đi từ A xuất phát là :

$$t = k\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right).\frac{1}{12} + \Delta t = \frac{33}{20}h = 1h\ 39\ \text{phút}$$

Vị trí hai xe gặp nhau cách A là : $s_A = \frac{5}{4}k(k+1) = 37,5$ km.

Không xảy ra trường hợp hai xe gặp nhau khi xe A đang chạy.

1.6. Người chạy bộ trên bờ một đoạn AC rồi bơi theo hướng CD (CD tạo với AB một góc α) sao cho đối với bờ người chuyển động theo hướng CB (Hình 1.5G) :



Hình 1.5G

$$t_1 = \frac{AC}{v}$$

$$t_2 = \frac{AB}{v'\cos\alpha} = \frac{AC}{u - v'\sin\alpha} \Rightarrow AC = AB.\frac{u - v'\sin\alpha}{v'\cos\alpha}$$

$$t = t_1 + t_2$$

$$t = \frac{AB}{vv'\cos\alpha}(v + u - v'\sin\alpha) \qquad (1)$$

Với AB = 750 m ; v = 2,5 m/s ; u = 1 m/s ; v' = 1,5 m/s

$$t = 200\left(\frac{3,5 - 1,5\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) \qquad (2)$$

Đặt $y = \frac{3,5 - 1,5\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (3)

$$\Rightarrow \ y\cos\alpha + 1,5\sin\alpha \le \sqrt{y^2 + 1,5^2} \Rightarrow y^2 + 1,5^2 \ge 3,5^2 \Rightarrow y \ge \sqrt{10}$$

$$y_{min} = \sqrt{10} \approx 3,16$$

Vậy $t_{min} = 200\,y_{min} \approx 632$ s.

Thay $y_{min} = \sqrt{10}$ vào (3)

$$\sqrt{10}\cos + 1,5\sin\alpha = 3,5 \Rightarrow 0,9\cos\alpha + 0,43\sin\alpha = 1$$

Đề bài cho : $\cos 25,4^\circ = 0,9$; $\tan 25,4^\circ = 0,47$; $\sin 25,4^\circ = 0,43$.

Vậy suy ra : $\alpha = 25,4^o$.

Thay vào trên, ta được : AC = 198 m.

1.7. Gọi v_1, v_2, v_3 lần lượt là vận tốc của vật ở thời điểm đầu của mỗi đoạn đường, ta có :

Đoạn đường cuối : $-v_3^2 = 2as$ (1)

Đoạn đường thứ hai : $v_3^2 - v_2^2 = 2as \Rightarrow -v_2^2 = 4as$ (2)

Đoạn đường thứ nhất : $v_2^2 - v_1^2 = 2as \Rightarrow -v_1^2 = 6as$ (3)

Theo đề bài ta có :

- $t_2 = \dfrac{v_3 - v_2}{a} = 1.s \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2|as|}}{a}(\sqrt{2} - 1) = 1 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2|as|}}{a} = \sqrt{2} + 1$
- $t_3 = \dfrac{-v_3}{a} = (\sqrt{2} + 1)$ s
- $t_1 = \dfrac{v_2 - v_1}{a} = \dfrac{\sqrt{2|as|}}{a}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2})$
- $t_1 = (\sqrt{6} + \sqrt{3})$ s

Thời gian vật đi cả ba đoạn đường nói trên :

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = (\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2} + 2) \approx 7,59 \text{ s}$$

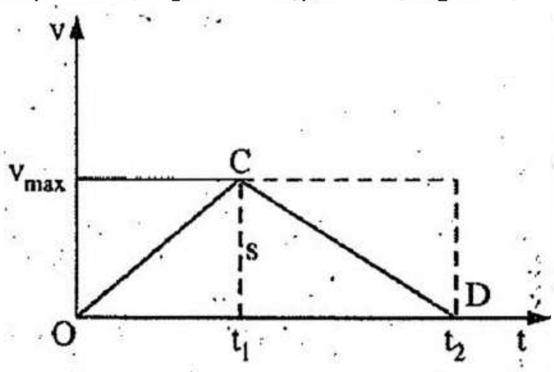
1.8. Theo đề bài vận tốc đầu và cuối đều bằng 0, nên giai đoạn đầu chuyển động là chuyển động nhanh dần đều, giai đoạn sau chuyển động là chuyển động chậm dần đều :

Có hai cách giải.

- *Cách 1 :* Dùng đồ thị vận tốc (Hình 1.6G)

$v_{max} = a_1t_1 = a_2(t - t_1)$

$$t_1 = \frac{a_2t}{a_1 + a_2}$$



Hình 1.6G

Vậy : $v_{max} = \dfrac{a_1a_2}{a_1 + a_2}t$ (1)

Diện tích ΔOCD biểu diễn quãng đường đi được.

Vậy : $s = \frac{1}{2}(v_{max}.t)$ (2)

Trong biểu thức (2) tương ứng với v_{max} ta có t là t_{min}.

Từ (1), (2) suy ra : $t_{min}^2 = 2.s\frac{a_1 + a_2}{a_1a_2} \Rightarrow t_{min} = \sqrt{2s\frac{a_1 + a_2}{a_1a_2}}$ (3)

Thay (3) vào (1) ta có : $v_{max} = \sqrt{\frac{2a_1a_2}{a_1 + a_2}s}$.

• *Cách 2 :* Áp dụng công thức về đường đi : $v_t^2 - v_0^2 = 2as$.

Theo đề bài ta có : $v_{max}^2 = 2a_1s_1 = 2a_2s_2$

$$s_1 + s_2 = s = AB$$

Suy ra : $s_1 = \frac{a_2}{a_1 + a_2}s \Rightarrow v_{max}^2 = \frac{2a_1a_2}{a_1 + a_2}s$.

Vậy : $v_{max} = \sqrt{\frac{2a_1a_2}{a_1 + a_2}s} \Rightarrow v_{max} = 12,9$ m/s.

Thời gian cực tiểu đi hết quãng đường d : $t = t_1 + t_2 = v_{max}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right)$.

$$t = \sqrt{2s\frac{a_1 + a_2}{a_1a_2}} \Rightarrow t = 15,5 \text{ s}.$$

1.9. Chọn hệ quy chiếu gắn với buồng thang máy, gốc toạ độ O ngang với sàn thang máy, gốc thời gian là lúc chiếc bulông bắt đầu rơi.

a) Khoảng thời gian rơi của chiếc bulông :

Ta có : $v_0 = at = 2,4$ m/s

Phương trình toạ độ của sàn : $y_1 = v_0t + \frac{a}{2}t^2 = 2,4\,t + t^2$ (1)

Phương trình toạ độ của chiếc bulông :

$$y_2 = h + v_0t + \frac{1}{2}gt^2 = 2,47 + 2,4t - 5t^2 \quad (2)$$

Khi bulông chạm sàn : $y_1 = y_2$.

Cân bằng (1) và (2) ta có : $6t^2 = 2{,}47$. Suy ra $t \approx 0{,}64$ s.

b) Độ dời của chiếc bulông là :

$$d = \Delta y_{2(0)} = y_{2(0)} - y_{2(t)} = -2{,}4t + 5t^2 = -2{,}4.0{,}64 + 5.064^2 = 0{,}512 \text{ m}$$

c) Quãng đường chiếc bulông đi được :

Khi chiếc bulông vừa rời trần thang máy, theo quán tính chiếc bulông chuyển động lên phía trên cho tới lúc chiếc bulông đạt độ cao cực đại.

$$t_1 = \frac{v_0}{g} = \frac{2{,}4}{10} = 0{,}24 \text{ s}$$

Thời gian từ độ cao cực đại rơi đến sàn : $t_2 = t - t_1 = 0{,}64 - 0{,}24 = 0{,}4$ s.

Quãng đường bulông đi được :

$$s = s_1 + s_2 = \frac{v_0^2}{2g} + \frac{1}{2}gt_2^2 = \frac{2{,}4^2}{2.10} + 5.0{,}4^2 = 1{,}08 \text{ m}$$

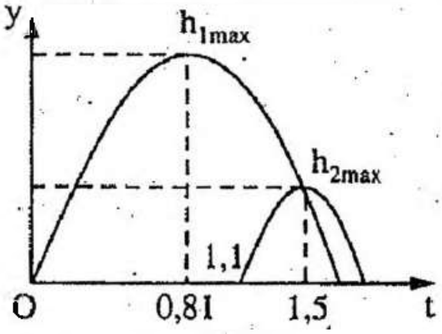
Gợi ý : Có thể tính s bằng cách : $s = 2s_1 + \Delta y = \dfrac{v_0^2}{g} + \Delta y = 1{,}08$ m.

1.10. Có hai cách giải.

Cách 1. Phương pháp đồ thị

Độ cao cực đại mà các quả bóng đạt tới (Hình 1.7G) :

$$h_{1\,max} = \frac{v_0^2}{2g} \;;\; h_{2\,max} = \frac{v_0^2}{8g}$$



Hình 1.7G

• Vì $v_{01} = 2v_{02}$; $h_{1\,max} = 4h_{2\,max}$; quả bóng thứ hai lại ném lên sau quả bóng 1 nên hai quả bóng chỉ có thể gặp nhau trong khi quả bóng 1 đi xuống, quả bóng 2 đi lên. Muốn hai quả bóng đập vào nhau sau khoảng thời gian là nhỏ nhất thì quả bóng 1 phải đập vào quả bóng 2 khi quả bóng 2 ở vị trí cực đại.

Vậy vị trí hai quả bóng đập vào nhau : $h = h_{2\,max} = \dfrac{v_0^2}{8g} = 0{,}81$ m.

* Thời gian quả bóng 1 đi lên : $s = \dfrac{1}{2}g t_2^2 = h_{1\,max} - h_{2\,max} = \dfrac{3v_0}{8g}$.

$$t_2 = \frac{v_0\sqrt{3}}{2g}$$

• Thời gian nhỏ nhất kể từ lúc tung quả bóng 1 đến lúc hai quả bóng đập vào nhau là :

$$t_{min} = t_1 + t_2 = \frac{(2+\sqrt{3})v_0}{2g} = 1,5 \text{ s}$$

• Thời gian quả bóng 2 đi lên đến độ cao cực đại : $t = \frac{v_0}{2g}$.

* Khoảng thời gian từ lúc ném quả bóng 1 đến lúc ném quả bóng 2 :

$$T = t_{min} - t = \frac{(1+\sqrt{3})v_0}{2g} = 1,1 \text{ s}$$

Cách 2 : Gọi T là khoảng thời gian từ lúc ném quả bóng 1 cho đến lúc tung quả bóng 2 ; t là khoảng thời gian từ lúc tung quả bóng 1 đến lúc hai quả bóng đập vào nhau.

Phương trình cho quá trình đi xuống của quả bóng 1 và đi lên của quả bóng 2 :

$$y_1 = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{1}{2}g\left(t - \frac{v_0}{g}\right)^2 \qquad (1)$$

$$y_2 = \frac{v_0}{2g}(t - T) - \frac{1}{2}g(t - T)^2 \qquad (2)$$

Điều kiện hai quả bóng gặp nhau : $y_1 = y_2$.

Từ (1) và (2) suy ra : $t = \dfrac{gT^2 + v_0t}{2gT - v_0}$ (3)

Điều kiện để $t = t_{min}$ là $\dfrac{dt}{dT} = 0$.

$$\frac{dt}{dT} = \frac{(2gT - v_0)(2gT + v_0) - (gT^2 + v_0T).2g}{(2gT - v_0)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2g^2T^2 - 2gv_0T - v_0^2 = 0 \Rightarrow T = \frac{(1+\sqrt{3})v_0}{2g} \qquad (4)$$

$$t_{min} = \frac{(\sqrt{3} + 2)v_0}{2g} \quad (5)$$

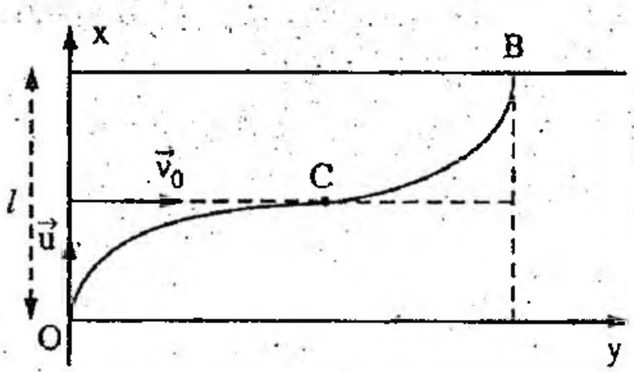
Thay (5) vào (1) ta được vị trí hai quả bóng đập vào nhau : $y_1 = y_2 = \frac{v_0^2}{8g}$

1.11. a) Chọn gốc toạ độ O trùng vị trí xuất phát của thuyền. Gốc thời gian lúc thuyền xuất phát (Hình 1.8G).

Phương trình chuyển động : $x = ut$ (1)

Liên hệ giữa vận tốc dòng nước v_y theo toạ độ x : $v_y = kx$; với $x = \frac{l}{2}$ thì $v_y = v_0$

$\Rightarrow v_0 = k\frac{l}{2} \Rightarrow k = \frac{2v_0}{l}$



Hình 1.8G

Vậy : $v_y = \frac{2v_0}{l}.x$ (2)

Liên hệ giữa v_y với thời gian t.

Thế (1) vào (2) ta có : $v_y = \frac{2v_0u}{l}t = at$ với $a = \frac{2v_0u}{l}$

Phương trình chuyển động của thuyền theo trục Oy : $y = \frac{1}{2}at^2 = \frac{v_0u}{l}t^2$ (3)

Khi $x_C = \frac{l}{2}$ thì $t_1 = \frac{l}{2u}$ và $y_C = \frac{v_0u}{l}.\frac{l^2}{4u^2} = \frac{v_0l}{4u}$.

Khi sang tới bờ bên kia tại B thì thuyền bị nước đưa trôi một khoảng là :

$L = 2y_C = \frac{v_0l}{2u}$.

b) Quỹ đạo của thuyền

Rút t từ (1) thay vào (3), ta được : $y = \frac{v_0}{ul}x^2$. Suy ra quỹ đạo chuyển động dạng parabol.

Ta có hai nhánh parabol (Hình 1.8G).

1.12. Chọn gốc thời gian lúc tải trọng P bắt đầu rơi (Hình 1.9G) :

– Tải trọng rơi nhanh dần đều với gia tốc a_0 nên bất kì điểm M nào trên mặt trục cũng có gia tốc tiếp tuyến bằng a_0.

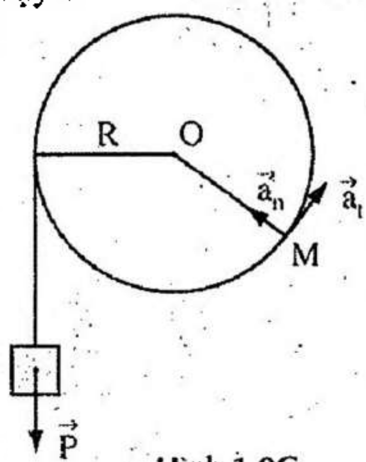
$a_t = a_0$

– Vận tốc dài của M ở thời điểm t : $v_t = a_0 t$.

– Gia tốc pháp tuyến của M : $a_n = \dfrac{v_t^2}{R} = \dfrac{a_0^2 t^2}{R}$.

– Sau thời gian t, tải trọng rơi được quãng đường là h, vậy :

$h = \dfrac{a_0}{2}t^2$ hay $t^2 = \dfrac{2h}{a_0}$.



Hình 1.9G

Suy ra : $a_n = \dfrac{2a_0 h}{R}$.

Gia tốc toàn phần : $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$.

$a = \dfrac{a_0}{R}\sqrt{R^2 + 4h^2}$.

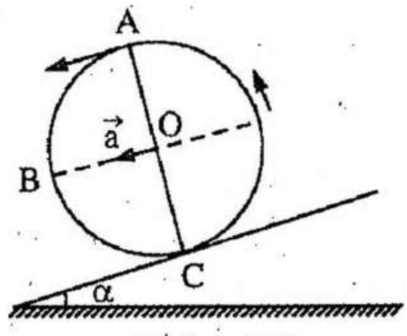
1.13. a) Xác định vận tốc của các điểm A, B, C (Hình 1.10G) :

• Vận tốc của trục O sau t = 2 s.

$v_0 = at = 2,5.2 = 5$ m/s

• Vận tốc của các điểm trên đường tròn bán kính R : $\vec{v}_M = \vec{v}_{MO} + \vec{v}_{Od}$.

Với $v_{MO} = v_{Od} = v_0$ (lăn không trượt)



Hình 1.10G

• Điểm A : $\vec{v}_{MO}$ cùng phương cùng chiều với $\vec{v}_a$ nên :

$v_a = v_{MO} + v_{Od} = 2v_O = 10$ m/s

• Điểm B : $\vec{v}_{CO}$ vuông góc $\vec{v}_{Od}$ nên : $v_B = v_O\sqrt{2} = 7$ m/s.

• Điểm C : $\vec{v}_{CO}$ ngược hướng $\vec{v}_{Od}$ nên : $v_C = 0$ (C tâm quay tức thời).

b) Gia tốc của các điểm trên :

• Gia tốc hướng tâm : $a_{ht} = \dfrac{v_M^2}{R} = \dfrac{v_0}{R} = \dfrac{5^2}{10} = 2{,}5\ m/s^2$.

Vậy : $a_{ht} = a = a_{tt}$.

• Gia tốc của điểm M đối với tâm O : $\vec{a}_{MO} = \vec{a}_{ht} + \vec{a}_{tt}$.

• Gia tốc M đối với đất : $\vec{a}_M = \vec{a}_{MO} + \vec{a}_{Od}$

$\vec{a}_M = \vec{a}_{ht} + \vec{a}_{tt} + \vec{a}_{Od}$

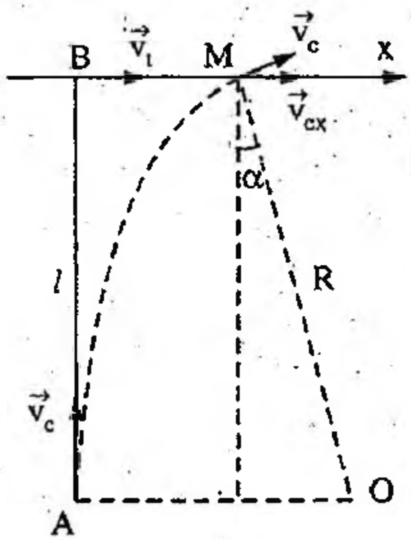
• Điểm A : $\vec{a}_{tt}$ cùng phương chiều với $\vec{a}_{Od}$ nên :

$$a_A = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5} = 5{,}6\ m/s^2$$

• Điểm B : $\vec{a}_{ht}$ ngược hướng $\vec{a}_{Od}$ nên : $a_B = a_{tt} = 2{,}5\ m/s^2$.

• Điểm C : $\vec{a}_{ht}$ ngược hướng $\vec{a}_{Od}$ nên : $a_C = a_{ht} = 2{,}5\ m/s^2$.

1.14. Giả sử chó bắt được thỏ tại M. Chó phải chạy trên đường tròn tâm O, bán kính R với vận tốc không đổi (Hình 1.11G).



Hình 1.11G

Gia tốc hướng tâm tại A : $a = \dfrac{v_c^2}{R}$ (1)

Điều kiện để chó bắt được thỏ là : $v_{cx} \geq v_t$.

Tại M : $v_{cx} = v_c\cos\alpha \geq v_t$ (2)

Mặt khác : $\cos\alpha = \dfrac{l}{R}$.

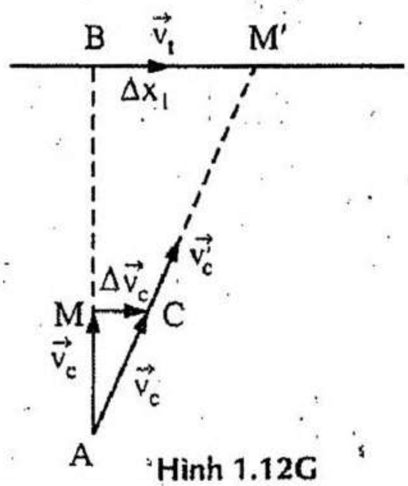
Vậy : $v_c.\dfrac{l}{R} \geq v_t \Rightarrow R \leq \dfrac{lv_c}{v_t}$ (3)

Thay (3) vào (1), ta có : $a \geq \dfrac{v_c . v_t}{l}$,

Cách 2 : (Hình 1.12G)

Xét khoảng thời gian Δt nhỏ :

• Thỏ chạy được quãng đường $BM' = x_t$.



Hình 1.12G

$$\Delta x_t = v_t.\Delta t \qquad (1)$$

• Khi đó chó đến vị trí C với vận tốc $\vec{v}'_c$:

Ta có : $\overrightarrow{\Delta v_c} = \vec{v}'_c - \vec{v}_c$

• Vì Δt rất nhỏ nên : MC // BM′

$$\frac{\Delta v_c}{\Delta x} = \frac{v_c}{l} \qquad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta có : $\dfrac{\Delta v_c}{v_t.\Delta t} = \dfrac{v_c}{l} \Rightarrow \dfrac{\Delta v_c}{\Delta t} = \dfrac{v_t.v_c}{l}$ (3)

Gia tốc của chó tại điểm A : $a = \dfrac{\Delta v_c}{\Delta t}$ (4)

Vậy : $a = \dfrac{v_t.v_c}{l}$.

1.15. Gọi α là góc ở tâm của mỗi hình quạt.

Áp dụng phương trình chuyển động tròn : $\varphi = \dfrac{1}{2}\gamma t^2 + \omega_0 t$.

Với $t_1 = 4$ s và $t_2 = 4 + 5 = 9$ s,

ta có : $\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2}\gamma.4^2 + 4\omega_0 & (1) \\ 2\alpha = \dfrac{1}{2}\gamma.9^2 + 9\omega_0 & (2) \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{81}{2}\gamma + 9\omega_0 = 16\gamma + 8\omega_0 \Rightarrow \omega_0 = -\dfrac{49}{2}\gamma$ (3)

Vận tốc góc ngay lúc hình quạt thứ hai vừa qua khỏi kim :

$$\omega_2 = \gamma t_2 + \omega_0 = 9\gamma + \omega_0.$$

Áp dụng công thức : $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\gamma.\varphi$.

Đĩa dừng lại nên : $\omega = 0$; $\omega_0 = \omega_2$ và $\varphi = 0{,}75\pi$

$$-\left(9\gamma - \frac{49}{2}\gamma\right)^2 = 2.0{,}75\pi\gamma$$

Do đó : $-\frac{31^2}{4}\gamma^2 = 1,5\pi\gamma \Rightarrow \gamma = -\frac{6\pi}{961} = -0,02 \text{ rad/s}^2$.

1.16. Tại thời điểm t, dây dài $l = L + Vt$ và con kiến cách tường một đoạn x. Dễ dàng thấy rằng phần dây ngay dưới chân con kiến sẽ chuyển động với tốc độ : $v = \frac{V}{L}x$. Do đó vận tốc của con kiến so với mặt đất sẽ bằng :

$v_{k,d} = v - u = \frac{V}{L}x - u$. Từ đó : $dx = \left(\frac{V}{L}x - u\right)dt$.

Đặt : $y = \frac{x}{l}$, ta có : $dy = \frac{x + dx}{l + dl} - \frac{x}{l} = \frac{x + \left(\frac{V}{L}x - u\right)dt}{l + Vdt} - \frac{x}{l}$

$dy = -\frac{udt}{l + Vdt} \approx -\frac{udt}{L + vt}$

Lấy tích phân hai vế, chú ý điều kiện ban đầu y(0) = 1,

ta có : $y = 1 - \frac{u}{V}\ln\left(1 + \frac{V}{l}t\right)$

Con kiến đến được tường khi y = 0, hay :

$$\frac{u}{V}\ln\left(1 + \frac{V}{L}t\right) = 1 \Rightarrow t = \frac{L}{V}\left(e^{\frac{V}{u}} - 1\right).$$

Nhận xét :

– Nếu $V \ll u$ hay $\frac{V}{u} \ll 1$ ta có $t \approx \frac{L}{u}$: con kiến đến được tường sau thời gian $t \approx \frac{L}{u}$.

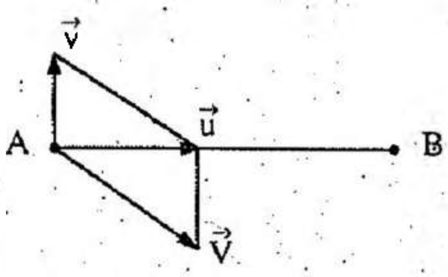
– Nếu $V \gg u$ thì t rất lớn : Về mặt lí thuyết thì con kiến vẫn đến được tường sau thời gian rất lớn. Nhưng thực tế thì lúc đó độ dài của dây $l = L + vt$ là vô cùng lớn, nghĩa là dây sẽ bị đứt trước đó, nghĩa là con kiến không thể đến được tường.

1.17. a) Nếu gió thổi dọc theo AB, thời gian tổng cộng của hành trình (đi và về) :

$$T = \frac{L}{V + v} + \frac{L}{V - v} = \frac{2VL}{V^2 - v^2}$$

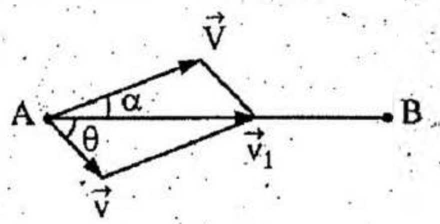
b) Nếu gió thổi vuông góc với AB, vận tốc của gió và máy bay hợp thành vận tốc tương đối u của máy bay và mặt đất (Hình 1.13G).

$$T = \frac{2L}{\sqrt{V^2 - v^2}}$$



Hình 1.13G

c) Trong trường hợp tổng quát, hướng gió hợp với AB góc θ và hướng của máy bay hợp với AB góc α (Hình 1.14G)



Hình 1.14G

$v\cos\theta + V\cos\alpha = v_1$

$v\sin\theta + V\sin\alpha = 0$.

Khi bay đi thì : $t_1 = \dfrac{L}{v_1} = \dfrac{L}{V\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{V^2}\sin^2\theta} + v\cos\theta}$

Khi bay về : $v\cos\theta - V\cos\alpha = -v_2$.

$v\sin\theta + V\sin\alpha = 0$

$$t_2 = \frac{L}{v_2} = \frac{L}{V\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{V^2}\sin^2\theta} - v\cos\theta}$$

Tổng thời gian của hành trình : $T = t_1 + t_2 = \dfrac{2VL}{V^2 - v^2}\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{V^2}\sin^2\theta}$.

1.18. a) Xét một con rùa trong hệ toạ độ cực, tại thời điểm t : xác định $\vec{r}$; φ.

Ta có : $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\varphi - r\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

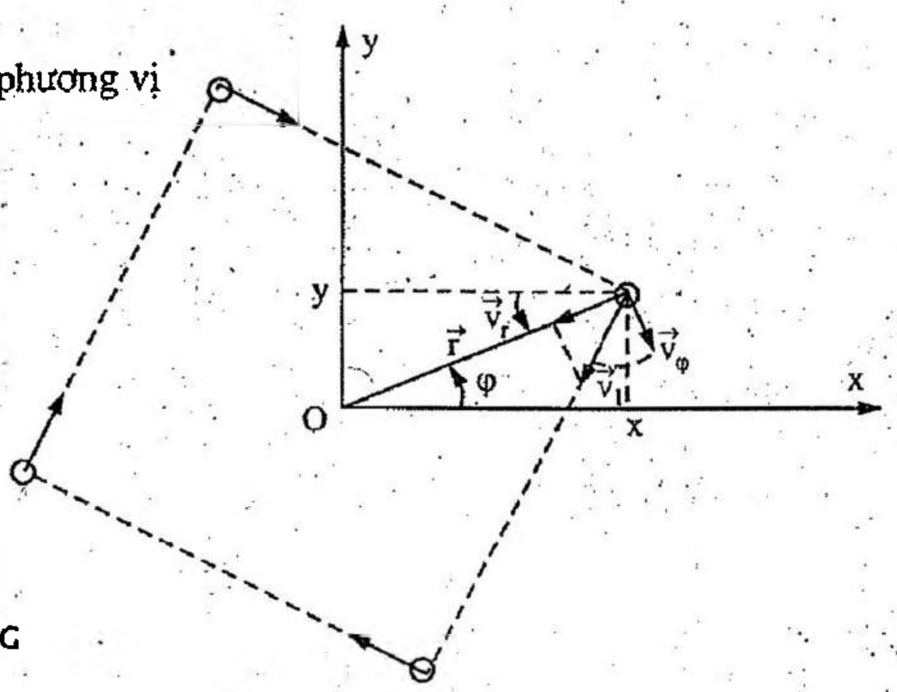
$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\varphi + r\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

$$v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2 \; ; \; v_r = \frac{dr}{dt} \; ; \; v_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt} = \omega r$$

Trong đó: $v_r = \dfrac{dr}{dt}$: vận tốc xuyên tâm

$v_\varphi = r\dfrac{d\varphi}{dt} = \omega r$: vận tốc phương vị



Hình 1.15G

Vì $\vec{r}$; $\vec{v}$ luôn tạo với nhau một góc 45^o ($\vec{r}$ qua tâm hình vuông).

Do đó : $v_r = -v\cos 45^o = -v\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \text{const}$; $v_\varphi = v\sin 45^o = v\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \text{const}$.

– Khi bốn con rùa gặp nhau lúc chúng tiến đến tâm và thời gian :

$$t = \frac{a\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{|v_r|} = \frac{a}{v}$$

b) Phương trình quỹ đạo : r = r(φ) , (φ có chiều (+) là chiều kim đồng hồ)

Từ : $v_r = \dfrac{dr}{dt} = -v\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $v_\varphi = \dfrac{d\varphi}{dt} = v\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \dfrac{dr}{rd\varphi} = -1$.

Với t = 0 thì $r = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$.

Suy ra : $\ln\dfrac{r}{c} = -\varphi \Rightarrow \ln\dfrac{a\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{c} = -\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow c = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$.

Vậy : $r = ce^{-\varphi} = \frac{a}{\sqrt{2}}e^{(-\frac{\pi}{4} - \varphi)}$: đây là phương trình quỹ đạo của con rùa 1.

– Vậy các con rùa 2, 3, 4 có quỹ đạo lần lượt là :

$r_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}e^{(-\frac{\pi}{4} - \varphi_2)}$; $r_3 = \frac{a}{\sqrt{2}}e^{(-\frac{\pi}{4} - \varphi_3)}$; $r_4 = \frac{a}{\sqrt{2}}e^{(-\frac{\pi}{4} - \varphi_4)}$;

Với $\varphi_2 = \varphi + \frac{\pi}{2}$; $\varphi_3 = \varphi + \pi$; $\varphi_4 = \varphi + \frac{3\pi}{2}$: Vậy quỹ đạo là đường xoắn lôgarit.

Chủ đề 2

2.1. Trong quá trình chuyển động, vận tốc của vòng A luôn vuông góc với dây, do đó lực căng dây tác dụng lên vòng vuông góc với vận tốc của vòng. Vì vậy độ lớn vận tốc của vòng là không đổi.

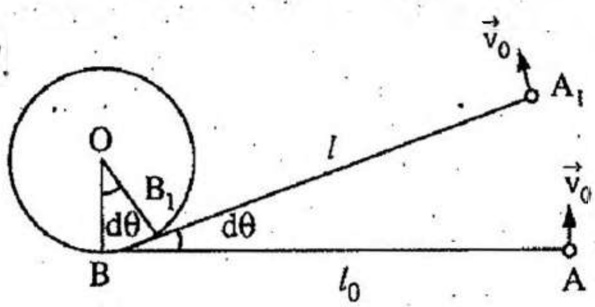
Giả sử tại thời điểm ban đầu, điểm tiếp xúc giữa sợi dây và mặt trụ là B. Sau khoảng thời gian dt rất nhỏ, điểm tiếp xúc giữa sợi dây và mặt trụ là B_1 (Hình 2.1G). Độ dài cung $\overset{\frown}{BB_1}$ là nhỏ. Đặt $\overset{\frown}{BB_1} = dl$, từ hình vẽ ta có :

$\widehat{BOB_1} = \widehat{ABA_1} = d\theta$.

Dễ dàng thấy rằng : $v_0.dt = l.d\theta$, $Rd\theta = dl$.

Từ đây suy ra : $Rv_0dt = ldl$.

Tích phân hai vế : $\int_0^t Rv_0dt = \int_0^{l_0} ldl$.



Hình 2.1G

Kết quả phân tích cho ta : $Rv_0t = \frac{l_0^2}{2}$, hay $t = \frac{l_0^2}{2Rv_0}$.

2.2. Tính thời gian rơi của giọt nước.

Khi bắn ra tại điểm A, giọt nước tham gia hai chuyển động :

– Chuyển động quán tính với vận tốc $\vec{v}$ theo phương AM với $v = \omega R$.

– Rơi tự do với gia tốc g.

Gọi t là thời gian giọt nước rơi từ A đến B.

Trong chuyển động quán tính, giọt nước đi được :

$$AM = vt$$

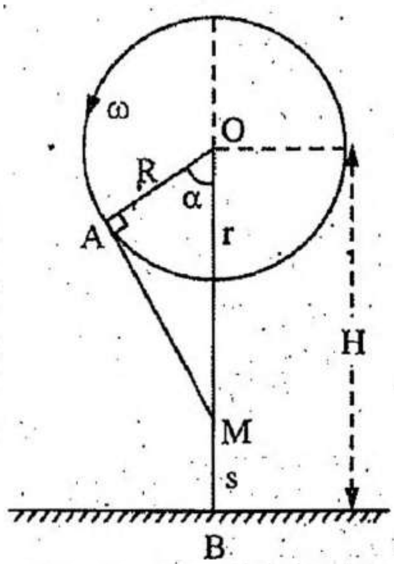
Ta có : $OM = r = \sqrt{R^2 + v^2t^2}$ (1)

Trong chuyển động rơi tự do, giọt nước rơi được quãng đường

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \qquad (2)$$

Theo đề bài thì : r = H – s. Suy ra :

$$R^2 + v^2t^2 = H^2 - gHt^2 + \frac{1}{4}g^2t^4$$



Hình 2.2G

Do đó : $g^2t^4 - 4(\omega^2R^2 + gH)t^2 + 4(H^2 - R^2) = 0$

$$\Delta' = 4(\omega^2R^2 + gH)^2 - 4g^2(H^2 - R^2) = 4[R^2(\omega^4R^2 + 2\omega^2gH + g^2)]$$

$$t^2 = \frac{2}{g^2}(\omega^2R^2 + gH \pm R\sqrt{\omega^4R^2 + 2gH\omega^2 + g^2})$$

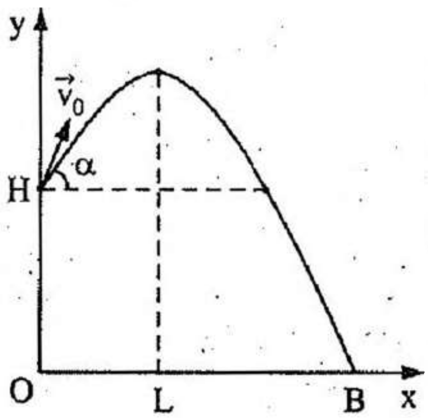
$$t_{min}^2 = \frac{2}{g^2}(\omega^2R^2 + gH - R\sqrt{\omega^4R^2 + 2gH\omega^2 + g^2})$$

Vị trí A xác định bằng góc α : $\tan\alpha = \frac{v.t_{min}}{R} = \omega t_{min}$.

2.3. Xem hình 2.3G.

Phương trình toạ độ : $x = v_0\cos\alpha t$ (1)

$$y = H + v_0\sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (2)$$



Hình 2.3G

Khi hòn đá chạm mặt nước tại B :

$$x = L \; ; \; y = 0$$

Từ (1) : $t = \frac{L}{v_0\cos\alpha}$; thế t vào (2) ta có :

$$\frac{gL^2}{2v_0^2}.\tan^2\alpha - L\tan\alpha + \frac{gL^2}{2v_0^2} - H = 0$$

$$\Delta = L^2 - \frac{4gL^2}{2v_0^2}\left(\frac{gL^2}{2v_0^2} - H\right) \geq 0 \Rightarrow L \leq \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gH}$$

$$L_{max} = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gH} \qquad (3)$$

Ứng với $L = L_{max}$ thì góc ném α là :

$$\tan\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{v_0^2}{gL_{max}} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gH}} \qquad (4)$$

Thay số ta được : $H = 20$ m ; $v_0 = 14$ m/s

$$L_{max} = 34{,}64 \text{ m.}$$

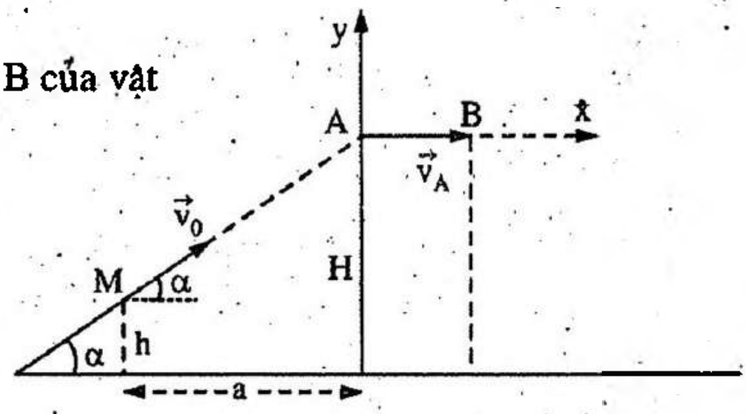
$$\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^o.$$

2.4. Xe phải bay qua hai đầu mép A, B của vật cản (Hình 2.4G).

Tầm xa : $l = \dfrac{v_A^2 \sin 2\varphi}{g}$.

v_A cực tiểu khi $\varphi = 45^o$.

Suy ra : $L = \dfrac{v_A^2}{g} \Rightarrow v_A^2 = gL$ (1)



Hình 2.4G

Chọn trục toạ độ như hình vẽ thì phương trình quỹ đạo của xe là :

$$y = \tan\varphi x - \frac{g}{2v_A^2\cos^2\varphi}.x^2$$

Với : $\varphi = 45^o$; $v_A^2 = gL$ ta được : $y = x - \dfrac{x^2}{L}$ (2)

Parabol (2) đi qua điểm M – vị trí mô tô bay : $y_m = -(H - h)$; $x_m = -a$.

Ta có : $-(H - h) = -a - \dfrac{a^2}{L} \Rightarrow \dfrac{a^2}{L} + a - (H - h) = 0$ (3)

Giải (3) lấy nghiệm thực : $a = \frac{L}{2}\sqrt{1 + \frac{4(H-h)}{L}} - 1$.

Tính góc α, độ dốc của v_0 tại M : $\tan\alpha = \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{2x}{L}$.

Tại M : $x = -a \Rightarrow \tan\alpha = 1 + \frac{2a}{L} \Rightarrow \tan\alpha = \sqrt{1 + \frac{4(H-h)}{L}}$ (4)

• Tính vận tốc v_0 :

Theo định luật bảo toàn cơ năng :

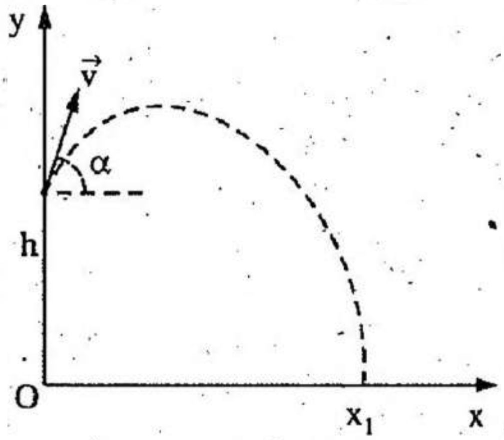
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 = mg(H-h) \Rightarrow v_0 = \sqrt{g[L + 2(H-h)]}$$

Phương pháp toạ độ bạn đọc tự tính theo công thức : $v_x = v_0\cos\alpha = v_A\cos\varphi$.

2.5. Cách thứ nhất :

Vì lí do đối xứng vùng rơi là một vòng tròn có tâm là hình chiếu của bóng đèn (coi như một điểm) trên mặt đất.

Xét một mảnh vỡ bắn ra theo góc α so với mặt phẳng nằm ngang, trong hệ toạ độ như hình 2.5G.



Hình 2.5G

$$\begin{cases} x = v(\cos\alpha)t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v(\sin\alpha)t + h \end{cases}$$

Phương trình quỹ đạo : $y = -\frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha} + x\tan\alpha + h$.

Muốn cho mảnh vỡ rơi xuống đất ở điểm có hoành độ x_1, ta phải có góc α thỏa mãn phương trình :

$$0 = -\frac{gx_1^2}{2v^2\cos^2\alpha} + x\tan\alpha + h \Rightarrow \frac{gx_1^2}{2v^2}\tan^2\alpha - x_1\tan\alpha + \frac{gx_1^2}{2v^2} - h = 0,$$

nếu phương trình có nghiệm thì với vận tốc ban đầu v mảnh vỡ có thể tới được điểm x_1, nếu phương trình vô nghiệm $\Delta < 0$ thì mảnh vỡ không tới được điểm x_1.

$$\Delta = x_1^2 - 4\frac{gx_1^2}{2v^2}\left(\frac{gx_1^2}{2v^2} - h\right) = \frac{2gx_1^2}{v^2}\left(\frac{v^2}{2g} - \frac{gx_1^2}{2v^2} + h\right)$$

Từ đó suy ra rằng : $\Delta < 0$ ứng với các giá trị của x_1 sao cho : $\frac{v^2}{2g} - \frac{gx_1^2}{2v^2} + h < 0$.

$x_1^2 > \frac{v^4}{g^2} + 2v^2\frac{h}{g}$ hay là : $x_1 > \frac{v^2}{g}\sqrt{1 + \frac{2gh}{v^2}} = R$ thì vô nghiệm.

Các mảnh vỡ rơi xuống mặt đất trong một vòng tròn có bán kính R :

$$R = \frac{v^2}{g}\sqrt{1 + \frac{2gh}{v^2}} = 10\sqrt{2} = 14{,}1 \text{ m}$$

Cách thứ hai : Chọn hệ toạ độ rơi tự do, lúc bóng đèn nổ $t = 0$, gốc toạ độ trùng với tâm bóng đèn lúc bắt đầu rơi. Trong hệ toạ độ này vào thời điểm t, các mảnh vỡ nằm trên một đường tròn tâm ở gốc toạ độ, bán kính $r = vt$.

Trong hệ toạ độ đứng yên, gốc ở mặt đất, đường tròn trên có phương trình :

$$x^2 + \left[y - \left(h - \frac{1}{2}gt^2\right)\right]^2 = (vt)^2$$

giao điểm của đường tròn với mặt đất ($y = 0$) là điểm rơi của mảnh vỡ vào thời điểm t.

Điểm rơi ấy có toạ độ $x_1(t)$:

$$x_1^2 = -\left(h - \frac{1}{2}gt^2\right)^2 + (vt)^2 = -\frac{1}{4}g^2t^4 + (v^2 + hg)t^2 - h^2$$

đó là một tam thức bậc hai của t^2, cực đại của tam thức là :

$$(x_1^2)_{max} = -h^2 + \frac{(v^2 + hg)^2}{g^2} = \frac{v^4}{g^2} + 2v^2\frac{h}{g}$$

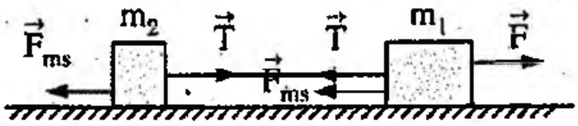
Từ đây cũng suy ra rằng giá trị cực đại của x_1 là :

$$\sqrt{\frac{v^4}{g^2} + 2v^2\frac{h}{g}} = 10\sqrt{2} = 14{,}1 \text{ m}$$

nghĩa là mảnh vỡ rơi xuống đất trong phạm vi một vòng tròn bán kính $R = 14{,}1$ m.

2.6. (Hình 2.6G).

a) Trường hợp $\mu_1 \neq \mu_2$:



Hình 2.6G

Lực kéo $\vec{F}$ đặt vào m_1 :

$$a = \frac{F_1 - (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)g}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

$$T = m_2 a + \mu_2 m_2 g \quad (2)$$

Thế (1) vào (2) : $T = \frac{m_2}{m_1 + m_2}[F - m_1 g(\mu_1 - \mu_2)]$ (3)

Điều kiện dây không đứt : $T \leq T_0$.

Từ (3) suy ra : F cực đại

$$F_{1max} = \frac{m_1 + m_2}{m_2}T_0 + (\mu_1 - \mu_2)m_1 g \quad (4)$$

Lực kéo $\vec{F}$ đặt vào m_2. Tương tự ta có :

$$F_{2max} = \frac{m_1 + m_2}{m_1}T_0 + (\mu_2 - \mu_1)m_2 g \quad (5)$$

Nếu $m_1 > m_2$ và $\mu_1 > \mu_2$ thì $F_{1max} < F_{2max}$. Vậy để kéo hệ vật đi thì lực kéo $\vec{F}$ nên đặt vào m_1, khi đó khả năng làm đứt dây khó hơn.

b) Trường hợp $\mu_1 = \mu_2$:

$$F_{1max} = \frac{m_1 + m_2}{m_2}T_0 \; ; \; F_{2max} = \frac{m_1 + m_2}{m_1}T_0$$

Nếu $m_1 > m_2$ thì $F_{1max} > F_{2max}$.

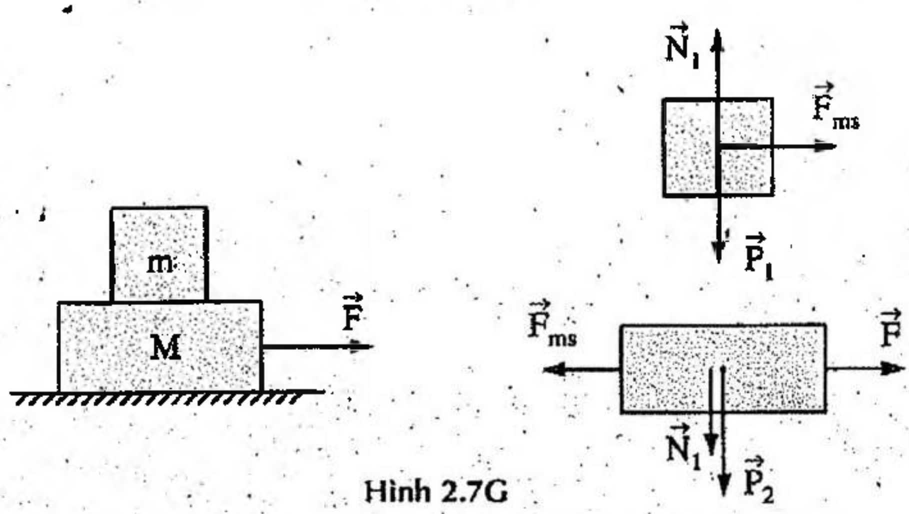
Lực $\vec{F}$ đặt vào m_2 thì khả năng dây đứt dễ hơn, vậy lực $\vec{F}$ nên đặt vào m_1.

c) Trường hợp không có ma sát :

Giống trường hợp b.

2.7. a) (Hình 2.7G)

$$\begin{cases} m\vec{a}_1 = \vec{P}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_{ms1} \\ M\vec{a}_2 = \vec{P}_2 + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{ms1} + \vec{F}_{ms2} + \vec{F} \end{cases}$$



Hình 2.7G

Chiếu lên các trục toạ độ, ta có :

$$\begin{cases} ma_1 = \mu_1 mg & (1) \\ Ma_2 = F - \mu_1 mg - \mu_2(M + m)g & (2) \end{cases}$$

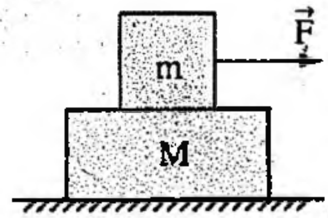
$$a_1 = \mu_1 g \qquad (3)$$

$$a_2 = \frac{F - \mu_1 mg - \mu_2(M + m)g}{M} \qquad (4)$$

Điều kiện M trượt khỏi m : $a_2 > a_1$

Từ (3) và (4) suy ra : $F > (\mu_1 + \mu_2)(M + m)g$ (5)

– Nếu $(\mu_1 + \mu_2)(M + m)g > F > \mu_2(M + m)g$ thì m nằm yên trên M và cả hai cùng chuyển động với gia tốc : $a = \dfrac{F - \mu_2(M + m)g}{M + m}$



Hình 2.8G

– Nếu $F < \mu_2(M + m)g$ thì hệ hai vật nằm yên.

b) Hình 2.8G.

Tương tự câu a, ta có : $a_1 = \dfrac{F - \mu_1 mg}{m}$ (1)

$$a_2 = \frac{\mu_1 mg - \mu_2(M + m)g}{M} \qquad (2)$$

Điều kiện m trượt trên M : $a_1 > 0 \Rightarrow F > \mu_1 mg$ và $a_1 > a_2$

$$\Rightarrow F > (\mu_1 - \mu_2)(M + m)\frac{mg}{M} \qquad (3)$$

Với $\mu_1 > \mu_2$.

Biện luận :

– Điều kiện M trượt trên sàn, m trượt trên M :

$$F > \mu_1 mg \text{ và } F > (\mu_1 - \mu_2)(M + m)\frac{mg}{M}$$

– Nếu $F > \mu_1 mg$ còn $\mu_1 mg < \mu_2(M + m)g$ thì M nằm yên trên sàn, còn m trượt trên M.

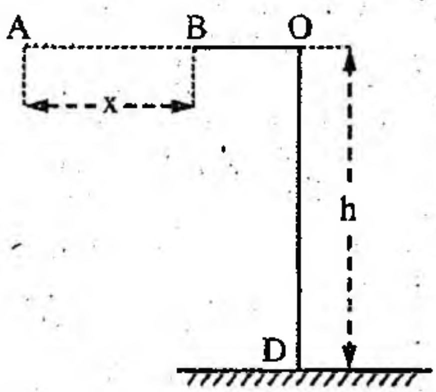
– Nếu $F < \mu_1 mg$ còn $F > \mu_2(M + m)g$ thì m nằm yên trên M và hệ trượt trên sàn với gia tốc :

$$a = \frac{F - \mu_2(M + m)g}{M + m}$$

– Nếu sàn nhẵn $\mu_2 = 0$ thì điều kiện vật m trượt trên vật M, $a_1 > a_2$ là :

$$\frac{F - \mu_1 mg}{m} > \frac{\mu_1 mg}{M} \Rightarrow F > \mu_1 mg\left(\frac{m}{M} + 1\right)$$

2.8. Gọi M là khối lượng của sợi dây xích. Giả sử ở thời điểm t, đầu trên A của xích dịch chuyển tới B, với AB = x (Hình 2.9G).



Hình 2.9G

Theo định lí biến thiên động lượng :

$$dp = d(mv) = mdv + vdm = Fdt \qquad (1)$$

trong đó m là khối lượng phần xích BOD :

$$m = \frac{M}{l}(l - x) \Rightarrow dm = -\frac{M}{l}dx$$

còn F là trọng lượng của phần xích OD : $F = \frac{M}{l}hg$.

Thay m, dm và F vào (1), ta có : $\frac{M}{l}(l - x)dv - \frac{Mv}{l}dx = \frac{M}{l}hgdt$ (2)

Từ $v = \frac{dx}{dt}$, suy ra : $dt = \frac{dx}{v}$ (3)

Thay (3) vào (2) ta được : $(l - x)dv - vdx = \frac{hg}{v}dx$ (4)

Sau một vài phép biến đổi, phương trình (4) trở thành : $\frac{vdv}{v^2 + gh} = \frac{dx}{l - x}$.

Lấy tích phân hai vế : $\int_0^v \frac{vdv}{v^2 + gh} = \int_0^{l-h} \frac{dx}{l - x}$.

Cuối cùng ta tìm được : $v = \sqrt{(l^2 - h^2)\frac{g}{h}}$.

Áp dụng số : $v = \sqrt{(0,5^2 - 0,3^2).\frac{9,81}{0,3}} \approx 2,3$ m/s.

2.9. • Khi bàn đứng yên.

Gia tốc hai vật : $a = \frac{(m_1 - \mu m_2)g}{m_1 + m_2}$ (1)

$a = 2$ m/s^2

• a) Xét chuyển động hai vật trong hệ quy chiếu gắn với bàn :

Để hai vật có gia tốc đối với bàn là : $a' = \frac{1}{2}a$ thì lực quán tính $\vec{F} = -m\vec{a}_0$ phải hướng lên, tức $\vec{a}_0$ hướng xuống.

$$a' = \frac{m_1(g - a_0) - \mu m_2(g - a_0)}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 - \mu m_2)(g - a_0)}{m_1 + m_2} \quad (2)$$

Đề ra : $a' = \frac{1}{2}a$ (3)

So sánh (1), (2) ta có : $g - a_0 = \frac{1}{2}g \Rightarrow a_0 = \frac{1}{2}g$ (4)

$$a_0 = 5 \text{ m/s}^2$$

– Bàn chuyển động nhanh dần đều đi xuống $a_0 = 5$ m/s^2.

– Bàn đang chuyển động đều với $\vec{v}_0$ phải chuyển động đi lên chậm dần đều với gia tốc $\vec{a}_0$.

b) Tìm $\vec{a}_0$ để các vật dừng lại (so với bàn) :

Muốn vậy : $a' = 0$.

Từ (2) suy ra : $a_0 = g = 10$ m/s^2. Vậy bàn rơi tự do.

2.10. a) Xét khi vật nhỏ trượt trên đoạn AB, nêm có gia tốc $\vec{a}_1$. Trong hệ quy chiếu gắn với nêm, vật có gia tốc $\vec{a}_1$ hướng xuống theo mặt AB ; vật chịu thêm lực quán tính $\vec{F}_{qt} = -m\vec{a}_1$. Áp dụng định luật II Niu-tơn và chiếu lên phương AB :

$$mg\cos\theta_1 + F_{qt}\sin\theta_1 = ma'_1 \Rightarrow a'_1 = g\cos\theta_1 + a_1\sin\theta_1 \quad (1)$$

Gia tốc của vật đối với mặt đất trên phương Ox là : $a'_{1x} - a_1 = a'_1\sin\theta_1 - a_1$.
Vì sàn nhẵn, không có ngoại lực trên phương ngang đối với hệ nên :

$$m(a'_{1x} - a_1) - 2ma_1 = 0 \Rightarrow a'_{1x} = 3a_1 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) suy ra : $a_1 = \dfrac{g\sin\theta_1\cos\theta_1}{3 - \sin^2\theta_1} = \dfrac{10\sqrt{3}}{11} \approx 1,57 \text{ m/s}^2$.

Tương tự, khi vật trượt trên đoạn BC, ta có : $a_2 = \dfrac{g\sin\theta_2\cos\theta_2}{3 - \cos^2\theta_2} = 2 \text{ m/s}^2$.

b) Gọi s, s'_x là quãng đường nệm trượt được và độ dịch chuyển theo phương ngang của vật đối với nêm. Do sàn nhẵn và các ngoại lực hướng thẳng đứng nên có bảo toàn động lượng theo phương ngang, suy ra :

$$m(s'_x - s) - 2ms = 0 \Rightarrow s = \frac{1}{3}s'_x = \frac{1}{3}DC$$

$$\Rightarrow s = \frac{1}{3}(AB\sin\theta_1 + BC\cos\theta_2) \approx 0,20 \text{ m}.$$

2.11. Vận tốc của tấm bảng là V :

Vận dụng các định luật bảo toàn động lượng và bảo toàn cơ năng cho hệ :

$$\begin{cases} mv = mv' + MV & (1) \\ \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}mv'^2 + \dfrac{1}{2}MV^2 + Q & (2) \\ Q = A = F_C d & (3) \end{cases}$$

• F_C không phụ thuộc vận tốc đạn nên Q là như nhau với mọi v.

– Trường hợp $v = v_0$ là giá trị nhỏ nhất để đạn đi hết chiều dày d của bảng. Khi đó đạn và bảng có cùng vận tốc là u.

$$\begin{cases} mv_0 = (m + M)u & (4) \\ \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(m + M)u^2 + Q & (5) \end{cases}$$

Suy ra : $Q = \dfrac{mMv_0^2}{2(m + M)}$ (6)

Thế (6) vào (2), rồi giải hệ (1) và (2) này, ta được :

$$V^2 - \frac{2mv}{m + M}V + \frac{2mQ}{M(m + M)} = 0$$

$$V = \frac{mv}{m + M} \pm \sqrt{\frac{m^2v^2}{(m + M)^2} - \frac{2mQ}{M(m + M)}}$$

$$V = \frac{m}{m + M}\left(v \pm \sqrt{v^2 - v_0^2}\right) \quad (7)$$

Độ biến thiên động lượng của đạn cũng là của bảng :

$$\Delta p = F_C.\Delta t = m(v - v') = MV.$$

Hiển nhiên rằng vận tốc ban đầu v của viên đạn càng lớn thì đạn xuyên càng nhanh qua bảng, nghĩa là thời gian Δt càng nhỏ. Do đó vận tốc của v càng tăng thì vận tốc của tấm bảng V càng giảm. Vậy trong (7) phải chọn :

$$V = \frac{m}{m + M}\left(v - \sqrt{v^2 - v_0^2}\right) \quad (8)$$

– Khi $v = 2v_0$ thì : $V = \dfrac{m}{m + M}(2 - \sqrt{3})\,v_0$.

– Khi $v = nv_0$ thì : $V = \dfrac{m}{m + M}\left(n - \sqrt{n^2 - 1}\right)v_0$

$n = 1$ thì $V_{max} = \dfrac{mv_0}{m + M}$.

2.12. Xét một hạt bất kì nằm cách tâm đám mây một khoảng R.

Khối lượng nằm trong hình cầu bán kính R là $M = \dfrac{4}{3}\pi R^3\rho$. Sau khi đến cách tâm $r < R$, hạt có vận tốc v xác định theo định luật bảo toàn năng lượng :

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{GMm}{r} - \frac{GMm}{R}, \text{ vì } v = \frac{dr}{dt} \text{ nên : } \frac{dr}{dt} = -\sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)}$$

$$dt = -\frac{dr}{\sqrt{2GM\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)}}\ ;\ t = \int_R^0 -\frac{dr}{\sqrt{2GM\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)}}$$

Vì r < R, nên ta có thể đặt : $r = R\sin^2\varphi$; $dr = 2R\sin\varphi\cos\varphi d\varphi$.

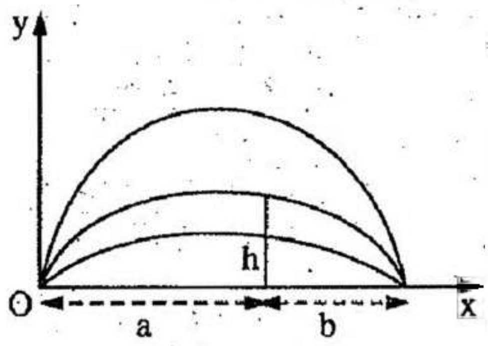
$$t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R.2\sin^2\varphi\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{2GMR(1-\sin^2\varphi)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2R\sin^2\varphi\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{2GMR(1-\sin^2\varphi)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2R^2\sin^2\varphi d\varphi}{\sqrt{2GMR}}$$

$$t = \frac{2R^2}{\sqrt{2G\frac{4}{3}\pi R^4}}\frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}}$$

Thay số : $t = 6{,}64.10^{15}$ s $\approx 2{,}1.10^{8}$ năm.

2.13. Phương trình quỹ đạo của quả bóng (Hình 2.10 G).

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2}(\tan^2\alpha + 1) \qquad (1)$$



Hình 2.10G

Điều kiện để quỹ đạo đi qua mục tiêu :

$x = a + b$; $y = 0$

$$\Rightarrow 0 = (a+b)\tan\alpha - \frac{g(a+b)^2}{2v_0^2}(\tan^2\alpha + 1)$$

$$\text{Suy ra : } v_0^2 = \frac{1}{2}g(a+b)\left(\tan\alpha + \frac{1}{\tan\alpha}\right) \qquad (2)$$

$$y_1 = x\left(1 - \frac{x}{a+b)}\right)\tan\alpha \qquad (3)$$

Điều kiện để quỹ đạo đi qua mép trên của tường : $x = a$; $y \geq h$.

$$\text{Từ (3) : } y_2 = a\left(1 - \frac{x}{a+b}\right)\tan\alpha \geq h \ \Rightarrow \tan\alpha \geq \frac{(a+b)h}{ab} \qquad (4)$$

$$\text{Đặt } h_0 = \frac{ab}{a+b} \Rightarrow \tan\alpha \geq \frac{h}{h_0}.$$

• Nếu $h \le h_0 \Rightarrow \dfrac{h}{h_0} \le 1 \Rightarrow \alpha_{max} = 45^o$.

Từ (2) ta thấy v_0 cực tiểu khi $\left(\tan\alpha + \dfrac{1}{\tan\alpha}\right)$ cực tiểu, suy ra khi đó :

$$\alpha = 45^o = \alpha_m \Rightarrow \tan\alpha = 1\ ;\ v_{0\,min}^2 = g(a+b)$$

Quỹ đạo khi đó là : $y_1 = x - \dfrac{x^2}{a+b}$.

Phải ném với góc $\alpha = 45^o$ để có v_0 cực tiểu.

• Nếu $h > h_0 \Rightarrow \tan\alpha \ge 1 \Rightarrow \varphi \ge 45^o$.

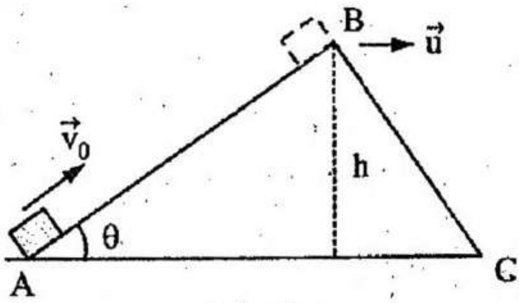
Xét trường hợp : $y = h$.

Từ (4) ta có : $\tan\alpha = \dfrac{(a+b)h}{ab} \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\dfrac{a+b}{ab}h\right)$.

Thay vào (3), ta có quỹ đạo là : $y = x\left(1 - \dfrac{x}{a+b}\right)\dfrac{(a+b)h}{ab}$.

Thay $\tan\alpha$ vào (2), ta được giá trị v_0 cực tiểu : $v_{0\,min}^2 = \dfrac{gab}{2h}\left[1 + \left(\dfrac{(a+b)\ R}{ab}\right)^2\right]$.

2.14. Ta hãy tìm v_{0min} để vật m đến được điểm B thì dừng lại (so với nêm) (Hình 2.11G). Khi ấy nêm và vật có cùng vận tốc $\vec{u}$.



Hình 2.11G

Áp dụng định luật bảo toàn động lượng theo phương ngang :

$$mv_{0min}\cos\theta = (m+M)\,u \qquad (1)$$

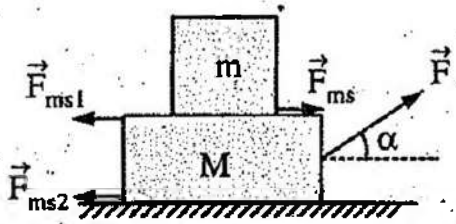
Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng :

$$\frac{1}{2}mv_{0\,min}^2 = \frac{1}{2}(m+M)u^2 + mgh \qquad (2)$$

Giải hệ phương trình, ta được : $v_{0min} = \sqrt{\dfrac{2gh(m+M)}{M + m\sin^2\theta}}$.

Vậy : $v_0 > \sqrt{\dfrac{2gh(m + M)}{M + m\sin^2\theta}}$ thì vật vượt được B.

2.15. (Hình 2.12G)



Hình 2.12G

Vật m : $ma_1 = \mu_1 mg \Rightarrow a_1 = \mu_1 g$ (1)

Vật M : $\begin{cases} Ma_2 = F\cos\alpha - \mu_1 N_1 - \mu_2 N_2 \\ N_2 = (M + m)g - F\sin\alpha \end{cases}$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{F\cos\alpha + \mu_2 F\sin\alpha - \mu_1 mg - \mu_2 g(M + m)}{M} \quad (2)$$

Điều kiện để M thoát khỏi m : $a_2 > a_1$.

Từ (1), (2) suy ra : $F > \dfrac{(\mu_1 + \mu_2)(M + m)g}{\cos\alpha + \mu_2 \sin\alpha}$ (3)

F cực tiểu khi mẫu số cực đại.

Đặt $\mu_2 = \tan\beta = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}$ thì mẫu số trở thành :

$$y = \frac{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos\beta}$$

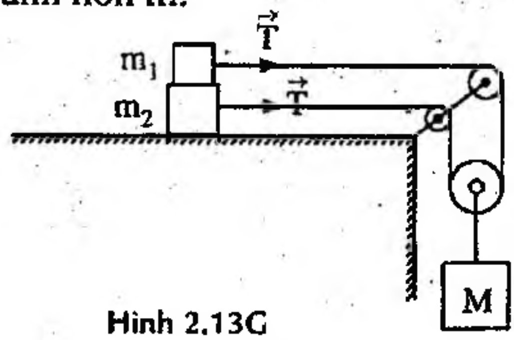
Mẫu số cực đại khi : $\alpha = \beta \Rightarrow \tan\alpha = \mu_2$; $\alpha = \arctan\mu_2$.

$F_{min} = (\mu_1 + \mu_2)(M + m)g\cos\alpha$

$$F_{min} = \frac{(\mu_1 + \mu_2)(M + m)g}{\sqrt{1 + \mu_2^2}}$$

F_{min} ứng với trạng thái giới hạn để M trượt nhanh hơn m.

2.16. (Hình 2.13G).



Hình 2.13G

Đề ra cho m_1 không trượt trên m_2 :

$\begin{cases} (M + m_1 + m_2)a = Mg \\ M = m_1 + m_2 \end{cases}$

Suy ra : $a = \dfrac{g}{2}$ (1)

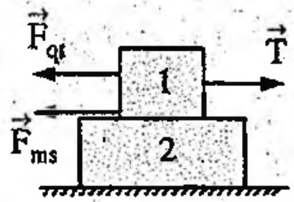
– Xét trạng thái giới hạn m_1 có xu hướng trượt ra trước m_2 :

$$m_1a = T - \mu m_1g \qquad (2)$$

$$m_2a = T + \mu m_1g \qquad (3)$$

Từ (3) và (2), cho ta : $T = \left(\dfrac{m_2}{2} - \mu m_1\right)g \qquad (4)$

Chọn vật 2 làm hệ quy chiếu thì điều kiện vật 1 không trượt được ra phía trước vật 2 là (Hình 2.14G) :



Hình 2.14G

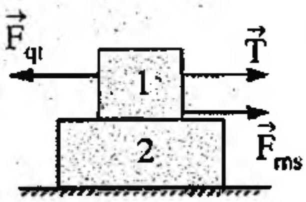
$$T < F_{ms} + F_{qt} \Rightarrow T < \left(\mu m_1 + \frac{m_1}{2}\right)g \qquad (5)$$

Thế (4) vào (5) biến đổi, ta được : $\dfrac{m_2}{m_1} < 1 + 4\mu \qquad (6)$

– Trường hợp vật 1 có xu hướng trượt ra sau vật 2 : $m_2a = T - \mu m_1g \qquad (7)$

Kết hợp (1) và (7) cho ta : $T = \left(\dfrac{m_2}{2} + \mu m_1\right)g \qquad (8)$

Điều kiện vật 1 không trượt được ra sau vật 2 (Hình 2.15G) :



Hình 2.15G

$$T + F_{ms} > F_{qt}$$

Suy ra : $T > \left(\dfrac{m_1}{2} - \mu m_1\right)g \qquad (9)$

Thế (8) vào (9), suy ra : $\dfrac{m_2}{m_1} > 1 - 4\mu \qquad (10)$

Để vật 1 không trượt trên vật 2 là : $1 - 4\mu < \dfrac{m_2}{m_1} < 1 + 4\mu$.

2.17. a) Gọi v_A và v'_A lần lượt là vận tốc của quả cầu A ngay trước và ngay sau va chạm ; gốc thế năng là vị trí ban đầu của quả cầu B, chiều dương từ trái qua phải. Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng ta có :

$$m_Agh = \frac{1}{2}m_Av_A^2 \Rightarrow v_A = \sqrt{2gh} = \sqrt{2.10.0,8} = 4 \text{ m/s}$$

$$m_Agh' = \frac{1}{2}m_Av_A'^2 \Rightarrow v'_A = \sqrt{2gh'} = \sqrt{2.10.0,2} = 2 \text{ m/s}$$

Trong va chạm giữa hai quả cầu có sự bảo toàn động lượng :

$$m_A v_A = m_A v'_A + m_B v'_B \Rightarrow v'_B = \frac{m_A(v_A - v'_A)}{m_B} = \frac{0,4.(4-2)}{0,2} = 4 \text{ m/s}$$

Sau khi nhận được vận tốc do va chạm, quả cầu B chuyển động và kéo xe lăn chuyển động theo, quả cầu B và xe lăn hợp thành một hệ kín nên có sự bảo toàn động lượng cho hệ này. Chuyển động của B là chậm dần trong khi chuyển động của xe lăn là nhanh dần, B sẽ không đi qua phải nữa – nghĩa là không lên cao nữa – khi B và xe có chung một vận tốc là v". Ta có hệ thức :

$$m_B v'_B = (m_B + M) v''_B \Rightarrow v''_B = \frac{m_B v'_B}{m_B + M} = \frac{0,2.4}{0,2+0,6} = 1 \text{ m/s}$$

Gọi h" là độ lên cao tối đa của quả cầu.

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng cho hệ B và xe lăn :

$$\frac{1}{2} m_B v'^2_B = \frac{1}{2}(m_B + M) v''^2_B + m_B g h'' \Rightarrow h'' = 0,6 \text{ m}$$

b) Gọi v_B là vận tốc của quả cầu B khi xuống trở lại tới điểm thấp nhất, v_x là vận tốc của xe lăn khi đó.

Áp dụng định luật bảo toàn động lượng : $m_B v'_B = M v_x + m_B v_B$.

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng : $\frac{1}{2} m_B v'^2_B = \frac{1}{2} m_B v^2_B + \frac{1}{2} M x^2_x$.

Ta tính được : $v_B = -2$ m/s dấu trừ vì lúc đó B đi sang bên trái.

2.18. a) Xét hệ bao gồm cả ba bộ phận, không có ngoại lực tác dụng trên phương chuyển động, động lượng của hệ được bảo toàn, gọi v là vận tốc sau cùng của hệ, ta có : $m_1 v_0 = (m_1 + m_2 + m_3)v$ tính được v = 1 m/s.

b) Do dây nối không co dãn nên thời gian để kéo cho dây căng rất nhỏ, ta có thể bỏ qua xung của lực ma sát giữa m_2 và m_3. Như vậy, động lượng của hệ bao gồm m_1 và m_2 coi như được bảo toàn, gọi v' là vận tốc lúc dây vừa căng, ta có : $m_1 v_0 = (m_1 + m_2)v'$; tính được : $v' = \frac{4}{3}$ m/s.

c) Lực ma sát giữa m_2 và m_3 có độ lớn : $f = \mu m_3 g = 0,2.15.10 = 30$ N.

Lực ma sát do m_3 đặt vào m_2 ngược chiều chuyển động, gia tốc của $(m_1 + m_2)$ là : $a_{12} = \frac{f}{(m_1 + m_2)} = -\frac{2}{3}$ m/s^2.

Lực ma sát do m_2 đặt vào m_3 có chiều dương nên : $a_3 = \frac{f}{m_3} = 2\ m/s^2$.

Trong hệ quy chiếu cố định, độ dịch chuyển tương ứng của $(m_1 + m_2)$ và của m_3 là :

$$s_{12} = \frac{v^2 - v'^2}{2a_{12}} = \frac{1-\left(\frac{4}{3}\right)^2}{-2\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{7}{12}\ m\ ;\ s_3 = \frac{v^2}{2a_3} = \frac{1}{2.2} = \frac{1}{4}\ m$$

Quãng đường m_3 trượt trên m_2 cho đến khi dừng lại : $s = s_{12} - s_3 = \frac{1}{3}$ m.

2.19. Kí hiệu $\vec{u}$ là vận tốc tên lửa (so với hệ quy chiếu cố định) ở thời điểm t. Giả sử trong thời gian dt tên lửa phụt ra sau một lượng khí nhiên liệu –dm (có dấu "–", vì khối lượng nhiên liệu của tên lửa giảm dần đi), lượng khí này có vận tốc $\vec{u} + \vec{v}$ (đối với hệ quy chiếu cố định). Độ biến thiên động lượng của hệ (tên lửa + khí nhiên liệu) là : $d\vec{p} = (M + m)d\vec{u} - dm.\vec{v}$

Vì không có ngoại lực, nên từ đó suy ra phương trình : $(M + m)\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v}$.

Chiếu phương trình vectơ này lên trục toạ độ đặt dọc theo phương quỹ đạo và có chiều của $\vec{u}$ (chú ý rằng $\vec{u}$ và $\vec{v}$ ngược chiều), ta thu được phương trình sau : $(M + m)\frac{du}{dt} = -v\frac{dm}{dt}$.

Từ đó, ta có : $(M + m_0e^{-kt})\frac{du}{dt} = -v_0e^{-kt}\frac{dm}{dt} = m_0v_0ke^{-2kt}$ (1)

Đặt $e^{-kt} = x$, ta có : $\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} = -kx\frac{du}{dx}$

và thay vào (1) : $(M + m_0x)\frac{du}{dx} = -v_0m_0x \Rightarrow du = -\frac{v_0m_0x}{M + m_0x}dx$ (2)

Chú ý rằng, khi t = 0, $u = u_{\text{ban đầu}}$, x = 1, và khi t = +∞, $u = u_{\text{cuối}}$, x = 0.
Lấy tích phân (2) ta được:

$$\int_{u_{bđ}}^{u_{\text{cuối}}} du = \int_1^0\left(-\frac{v_0m_0x}{M+m_0x}\right)dx \Rightarrow u_{\text{cuối}} - u_{\text{ban đầu}} = v_0 + v_0\frac{M}{m}\ln\left(\frac{M}{M+m_0}\right)$$

Với $m_0 \ll M$ ta có : $\ln\left(\frac{M}{M+m_0}\right) \approx \ln\left(1-\frac{m_0}{M}\right) \approx -\frac{m_0}{M}+\frac{m_0^2}{2M}$

$\Rightarrow u_{\text{cuối}} - u_{\text{ban đầu}} \approx \frac{m_0 v_0}{2M}$.

2.20. Gọi M, L, m là khối lượng, chiều dài của cọng rơm và khối lượng của con ruồi. Hệ gồm cọng rơm và ruồi là hệ kín vì mặt bàn không có ma sát. Khối tâm của hệ không thay đổi khi con ruồi đi sang phải. Khi ruồi đi được quãng đường a sang phải, cọng rơm dịch chuyển quãng đường b sang trái. Vì vậy :

$$Mb = ma \quad (1)$$

Ruồi đi đến cuối cọng rơm, vì vậy : $a + b = L$ (2)

Từ phương trình (1) và (2) ta có : $b = \frac{Lm}{M+m}$ (3)

a) Nếu $M \le m$, $b \ge \frac{L}{2}$, hầu như toàn bộ ống sẽ nằm trên bàn $\Rightarrow$ ruồi thứ hai có khối lượng bất kì.

b) Nếu m < M. Gọi khối lượng ruồi thứ hai là m. Điều kiện cân bằng là :

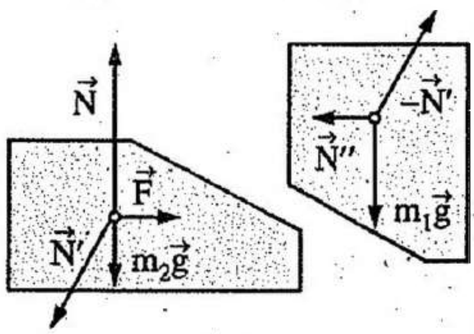
$$Mgb \ge (m+m')g\left(\frac{L}{2}-b\right) \quad (4)$$

Từ (2) và (3) : $m' \le m\frac{M+m}{M-m}$ (5)

Nếu $M \gg m$ thì $m' \ll m$, khối lượng con ruồi thứ hai phải nhỏ hơn con ruồi thứ nhất.

2.21. (Hình 2.16G)

a) Phân tích lực tác dụng như hình 2.16G.



Hình 2.16G

b) Theo phương nằm ngang : $F - N'\sin\theta = 0$

$N'\sin\theta - N'' = 0$

Theo phương thẳng đứng : $N - m_2g - N'\cos\theta = 0$

$N'\cos\theta - m_1g = 0$

Từ đó : $N' = \dfrac{m_1 g}{\cos\theta}$ và : $F = m_1 g\tan\theta = 28{,}3$ N.

c) Hệ không cân bằng :

$$2F - N'\sin\theta = m_2 a_2$$
$$N - m_2 g - N'\cos\theta = 0$$
$$N'\sin\theta - N'' = 0$$
$$N'\cos\theta - m_1 g = m_1 a_1$$

Do : $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, nên $a_2 = \dfrac{a_1}{\tan\theta}$

$$N' = \frac{2F}{\sin\theta} - \frac{m_2 a_1}{\sin\theta\tan\theta} = \frac{2m_1 g}{\cos\theta} - \frac{m_2 a_1}{\sin\theta\tan\theta}$$

Từ đó : $a_2 = \dfrac{N'\cos\theta}{m_1} - g = g\dfrac{m_1 tg^2\theta}{m_1\tan^2\theta + m_2} = 3{,}5\ m/s^2$.

d) Do $a_2 = \dfrac{a_1}{\tan\theta}$ là hằng số nên vật chuyển động nhanh dần đều

Vào thời điểm t, vận tốc của vật là $v = a_2 t$.

Vì vậy, biểu thức công suất của lực tác dụng là : $\mathscr{P} = 2Fv = \dfrac{2m_1 g a_1 t}{\sin\theta}$.

e) Gọi F'_{ms} là lực ma sát giữa khối m_2 và mặt phẳng nằm ngang, F''_{ms} là lực ma sát giữa khối m_1 và mặt thẳng đứng.

Vật m_1 cân bằng nên : $N'\sin\theta - N'' = 0$ (1)

$N'\cos\theta + F'_{ms} - m_1 g = 0$ (2)

Vật m_2 cân bằng nên : $F + F'_{ms} - N'\sin\theta = 0$ (3)

$N - m_2 g - N'\cos\theta = 0$ (4)

Ngoài ra : $F'_{ms} = \mu N$ và $F''_{ms} = \mu N''$.

Từ (1) : $N'' = N'\sin\theta$.

Từ (2) : $N'\cos\theta + \mu N'\sin\theta - m_1 g = 0 \Rightarrow N' = \dfrac{m_1 g}{\cos\theta + \mu\sin\theta}$.

Từ (4) : $N = m_2g + N'\cos\theta = m_2g + \dfrac{m_1g}{\cos\theta + \mu\sin\theta}\cos\theta$.

Từ (3) : $F = -F'_{ms} + N'\sin\theta = -\mu g m_2 - \mu g\dfrac{m_1\cos\theta}{\cos\theta + \mu\sin\theta} + g\dfrac{m_1\sin\theta}{\cos\theta + \mu\sin\theta}$

$$= \left[\frac{m_1\sin\theta - \mu m_1\cos\theta - \mu m_2\cos\theta - \mu^2 m_2\sin\theta}{\cos\theta + \mu\sin\theta}\right]g$$

$$= \left[\frac{m_1\sin\theta - \mu(m_1 + m_2)\cos\theta - \mu^2 m_2\sin\theta}{\cos\theta + \mu\sin\theta}\right]g = 10{,}7\ N$$

2.22. a) Áp dụng định luật II Niu-tơn cho giọt nước : $\dfrac{d(mv)}{dt} = mg$ (1)

Với $m = \dfrac{4}{3}\pi r^3\rho$ (r là bán kính giọt nước ở thời điểm). Ta có :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\rho v\right) = \frac{4}{3}\pi r^3\rho g \Rightarrow \frac{d}{dt}(r^2v) = r^3g = \frac{dr}{dt}\frac{d(r^3v)}{dr} \quad (2)$$

Theo đề bài : $\dfrac{dm}{dt} = kS = k.4.\pi r^2 = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{4}{3}\pi r^3\rho\right)$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{k}{\rho} = \text{const} \Rightarrow r = \frac{k}{\rho}t + r_0 \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta có : $\dfrac{k}{\rho}\dfrac{d}{dr}(r^3v) = r^3g$ (4)

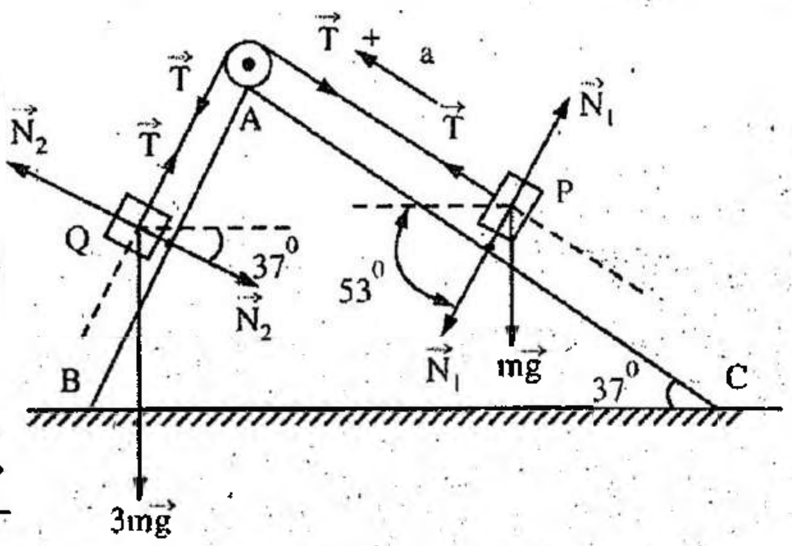
Lấy tích phân (4) và chú ý tới điều kiện ban đầu (lúc t = 0 thì $r = t_0$, v = 0), ta được : $\dfrac{k}{\rho}r^3v = \dfrac{g}{4}(r^4 - r_0^4)$

Từ đó : $v = \dfrac{\rho g}{4k}\left(r - \dfrac{r_0^4}{r^3}\right)$ với $r = \dfrac{k}{\rho}t + r_0$.

b) Sau một thời gian đủ lớn $r \gg r_0$, ta có : $a = \dfrac{dv}{dt} \approx \dfrac{g}{4}$.

2.23. a) Phân tích lực (Hình 2.17G)

b) Gọi a là gia tốc theo phương AC của P và Q so với nêm. Chọn chiều dương như hình vẽ :



Hình 2.17G

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{\sum m}$$

$$\Rightarrow a = \frac{3mg\sin 53^o - mg\sin 37^o}{4m}$$

$\Rightarrow a = 4{,}5\ m/s^2$.

Lực căng dây T : $3m\sin 53^o - T = 3ma$.

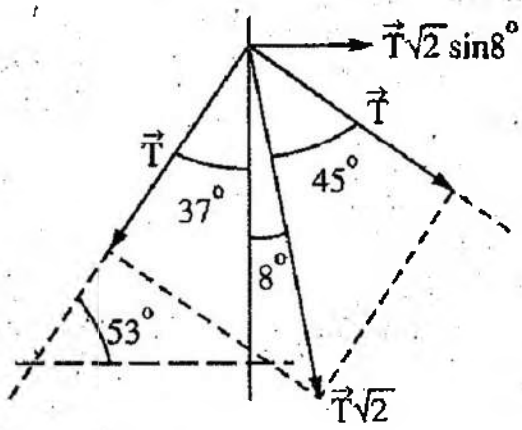
$T = 3m(g\sin 53^o - a) \approx 10{,}5m$

Các phản lực của mặt phẳng :

$N_2 = 3mg\cos 53^o$; $N_1 = mg\cos 37^o$

Hai lực căng dây T tạo lực ép lên ròng rọc :

$F = T\sqrt{2}$



Hình 2.18G

Lực này hợp với phương thẳng đứng góc 8^o (Hình 2.18G).

Thành phần $T\sqrt{2}\sin 8^o$ tham gia tạo ra gia tốc cho nêm.

Gọi a_3 là gia tốc này, ta có (Hình 2.19G) :

$$N_2\sin 53^o + T\sqrt{2}\sin 8^o - N_1\sin 37^o = 5ma_3$$

$$a_3 = \frac{3mg\cos 53^o\sin 53^o + 10.5m\sqrt{2}\sin 8^o - mg\cos 37^o\sin 37^o}{5m}$$

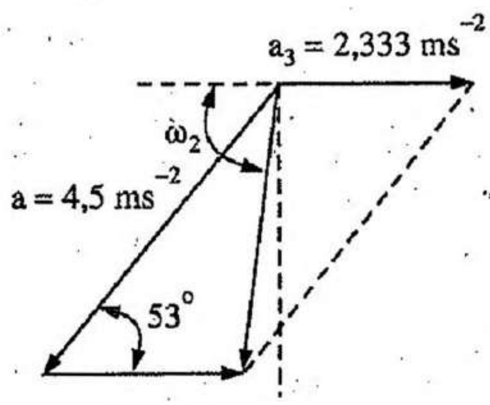
$a_3 = 2{,}333\ m/s^2$.

Gia tốc của Q đối với mặt bàn là :

$a_2 = 3{,}62\ m/s^2$; $\omega_2 = 84{,}2^o$

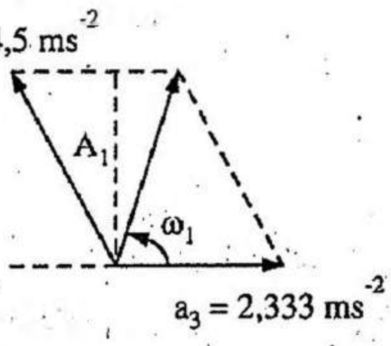
Gia tốc của P đối với mặt bàn (Hình 2.19G).

$a_1 = 2{,}98\ m/s^2$; $\omega_1 = 64{,}9^o$.



Hình 2.19G

c) Nếu nêm đứng yên, tổng ngoại lực tác dụng lên nêm bằng 0 :



Hình 2.20G

$$\sum \vec{F}_e = \vec{0}$$

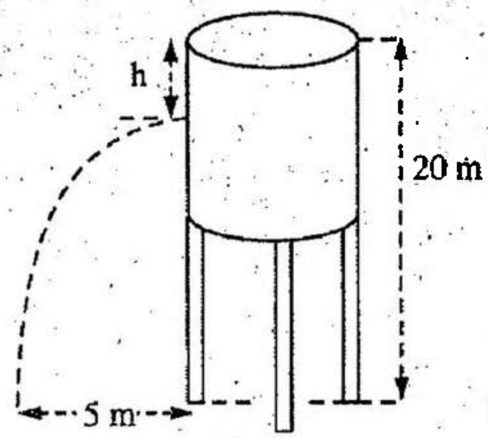
$$3mg\cos 53^o \sin 53^o + T\sqrt{2}\sin 8^o - mg\sin 37^o \cos 37^o$$

$$-\mu(3mg + 3mg\cos^2 53^o + mg\sin^2 37^o + T\sqrt{2}\cos 8^o) = 0$$

(μ là hệ số ma sát).

Giải ra : $\mu = \dfrac{11,67}{81,9} = 0,142$.

2.24. (Hình 2.21G).



Hình 2.21G

a) Trong thời gian Δt, thể tích nước chảy ra khỏi lỗ : $S(v.\Delta t)$.

S là diện tích lỗ

v là vận tốc dòng nước khi ra khỏi lỗ

Khi đó mực nước trong bình giảm một lượng : $S_0(v_0.\Delta t)$.

S_0 là diện tích đáy bình

v_0 là vận tốc hạ của mực nước.

Phương trình liên tục : $Sv\Delta t = S_0 v_0 \Delta t \Rightarrow v_0 = \dfrac{S}{S_0}v$.

Động năng khối nước chảy ra bằng độ giảm thế năng lượng nước trong bình.

$$\frac{1}{2}Mv^2 = M_0 gh$$

$$\frac{1}{2}(\rho Sv\Delta t)v^2 = (\rho S_0 h)g(v_0 \Delta t)$$

ρ là khối lượng riêng của nước.

Đơn giản biểu thức trên, ta tính được vận tốc nước lúc ra khỏi bình : $v^2 = 2gh$.

Thời gian để nước chạm đất xác định bởi : $t^2 = \dfrac{2(20-h)}{g}$.

Đây cũng là thời gian để dòng nước đi theo phương nằm ngang được 5 m :

$$vt = 5\text{ m} \Rightarrow (vt)^2 = 25$$

Từ đó : $4h(20 - h) = 25$.

Kết quả : $h = 32$ cm.

b) Khi buông vật 2, vật 1 chuyển động nằm ngang về phía ròng rọc, vật 2 chuyển động dọc quanh trục và dây càng lúc càng dài.

• Gia tốc vật 1 là : $a_1 = \dfrac{T}{m}$ (T : lực căng của dây).

• Gia tốc theo phương nằm ngang của vật 2 : $a_2 = \dfrac{T\cos\theta}{m}$.

θ là góc hợp bởi dây và phương nằm ngang.

Suy ra : $a_2 < a_1$.

Vì vậy vật 1 đụng vào ròng rọc trước khi vật 2 chạm vào thành bàn.

2.25. a) Khi quả cầu chưa xuống tới điểm thấp nhất thì xe chưa chuyển động, cơ năng được bảo toàn : $mgR = \dfrac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gR}$ (1)

Khi quả cầu lên tới điểm cao nhất trong quỹ đạo, vận tốc thẳng đứng bằng 0, quả cầu và xe có cùng vận tốc V theo phương ngang.

Áp dụng định luật bảo toàn động lượng ta có :

$$mv = (M + m)V \Rightarrow V = \frac{mv}{M + m} \quad (2)$$

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng ta có :

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh + \frac{1}{2}(M + m)V^2 \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta tính được độ lên cao tối đa của quả cầu trong mặt cong :

$$h = \frac{M}{M + m}R$$

b) Khi quả cầu từ điểm cao nhất trượt xuống, động lượng và cơ năng của hệ bảo toàn, xe sẽ đạt vận tốc tối đa khi quả cầu xuống tới điểm thấp. Gọi V' và v' lần lượt là vận tốc của xe và quả cầu trong trường hợp này, ta có :

$$(M + m)V = MV' - mv' \quad (4)$$

và $$mv^2 = MV'^2 + mv'^2 \quad (5)$$

Từ (1), (4) và (5) ta suy ra : $V' = \dfrac{2m}{M + m}\sqrt{2gR}$.

2.26. a) Khi mới được phóng ra, dây nối chưa căng nên quả cầu chỉ chịu tác dụng của trọng lực, chuyển động của nó là chuyển động ném ngang. Gọi t là thời điểm để dây nối bị căng, ta có các phương trình (gốc là điểm B nơi quả cầu được phóng ra) :

$$v_0t = l\sin60^o \text{ và } \frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{4}l = l\cos60^o \Rightarrow t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \Rightarrow v_0 = \frac{1}{2}\sqrt{6gl}.$$

b) Gọi v là vận tốc quả cầu khi dây vừa bị căng :

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2} \Rightarrow v = \sqrt{2gl}$$

Vectơ $\vec{v}$ hợp với phương thẳng đứng góc φ, ta có : $\tan\varphi = \frac{v_0}{gt} \Rightarrow \varphi = 60^o$.

Do $\varphi = 60^o$, khi dây treo bắt đầu bị căng, ta thấy rằng vận tốc v của quả cầu có phương trùng với phương sợi dây ; sau đó quả cầu nhận được một xung của lực căng dây nên vận tốc sẽ bằng 0 ; trong thời gian đó, điểm treo O cũng nhận được một xung lực cùng giá trị với xung do quả cầu nhận được :

$$Ft = mv - 0 = m\sqrt{2gl}$$

c) Áp dụng định lí động năng để tính vận tốc v′ khi con lắc xuống tới vị trí thấp nhất.

Lực căng dây : $T - mg = \frac{mv'^2}{l} \Rightarrow T = 2mg.$

2.27. a) Áp dụng định luật bảo toàn động lượng :

$$\frac{m}{4}v = \left(1 + \frac{1}{4}\right)mV \Rightarrow V = \frac{v}{5}$$

V là vận tốc của A ngay sau va chạm, lúc đó vận tốc của B bằng 0.

b) Sau va chạm, khối tâm G của hệ có chuyển động tịnh tiến, gọi V_G là vận tốc của khối tâm hệ trong chuyển động tịnh tiến. Trong hệ quy chiếu gắn với khối tâm, hai khối A và B có dao động điều hòa. Khi A và B có cùng vận tốc (bằng V_G), tức là vận tốc trong chuyển động tương đối bằng 0 thì lò xo có độ biến dạng lớn nhất.

$$\frac{m}{4}v = \left(\frac{5}{4} + 1\right)mV_G \Rightarrow V_G = \frac{v}{9} \Rightarrow V_{AB} = V_G = \frac{v}{9}$$

Thế năng đàn hồi tối đa của hệ :

$$W_p = \frac{1}{2}.\frac{5}{4}mv^2 - \frac{1}{2}.\left(\frac{5}{4}+1\right)m\,v_{AB}^2 = \frac{1}{90}mv^2$$

Gọi v_A và v_B lần lượt là vận tốc của A và B khi lò xo co lại độ dài như ban đầu, ta có :

$$\frac{m}{4}v = \frac{5}{4}mv_A + mv_B$$

$$\frac{1}{2}.\frac{5}{4}mv^2 = \frac{1}{2}.\frac{1}{5}mv_A^2 + \frac{1}{2}Mv_B^2$$

Tính được : $v_A = \frac{1}{45}v$; $v_B = \frac{2}{9}v$.

Động năng tối đa của B là : $W_{dB} = \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{2}{81}mv^2$.

Động năng tối thiểu của A là : $W_{dA} = \frac{1}{2}.\frac{5}{4}mv_A^2 = \frac{1}{3240}mv^2$.

2.28. a) Sau va chạm các quả cầu sẽ rời khỏi tháp và thực hiện hai loại chuyển động : chuyển động tịnh tiến cùng với khối tâm và chuyển động quay quanh khối tâm. Chuyển động tịnh tiến đặc trưng bởi chuyển động của khối tâm. Vận tốc ban đầu $\vec{v}_{OC}$ của khối tâm được xác định nhờ dựa vào định luật bảo toàn động lượng (xét theo phương ngang) :

$$m_0v_0 = (m_1 + m_2 + m_0)v_{OC} \Rightarrow v_{OC} = \frac{v_0}{4} = 2{,}5 \text{ m/s}$$

Vectơ vận tốc dài $\vec{v}_{OC}$ của hệ hướng theo phương ngang.

b) Vận tốc góc của hệ quay quanh khối tâm được xác định dựa vào định luật bảo toàn momen động lượng :

$$m_0v_0\frac{l}{2} = (m_1 + m_2 + m_0)\frac{l^2}{4}\omega \Rightarrow \omega = \frac{v_0}{2l} = 16{,}67 \text{ rad/s}$$

c) Độ dịch chuyển của hệ theo phương ngang là : $s = v_{OC}t$ và thời gian bay là :

$$t \approx \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 7{,}82 \text{ s (vì } l \ll h)$$

Như vậy : s = 19,55 m. Khi chạm đất hệ cách chân tháp 19,55 m.

d) Vận tốc của khối tâm của hệ khi hệ chạm đất bằng :

$$\sqrt{2gh + v_{OC}^2} \approx 76,72 \text{ m/s}$$

e) Số vòng quay mà hệ đã thực hiện trong thời gian bay là :

$$N = \frac{\omega}{2\pi}\sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 20,75 \text{ vòng.}$$

Ta nhận thấy chỉ có thể xảy ra bốn tình huống đặc biệt khi hệ chạm đất, đó là :

• Hệ ở tư thế thẳng đứng với các quả cầu 1 và 3 ở trên. Đó cũng là vị trí của các quả cầu trước khi chúng rời tháp và tình huống này xảy ra khi số vòng quay là một số nguyên.

• Hệ ở tư thế nằm ngang, khác với tư thế thứ ba do tăng thêm một phần tư vòng quay.

• Hệ ở tư thế thẳng đứng với các quả cầu 1 và 3 ở dưới, khác với tư thế ban đầu do tăng thêm nửa vòng quay.

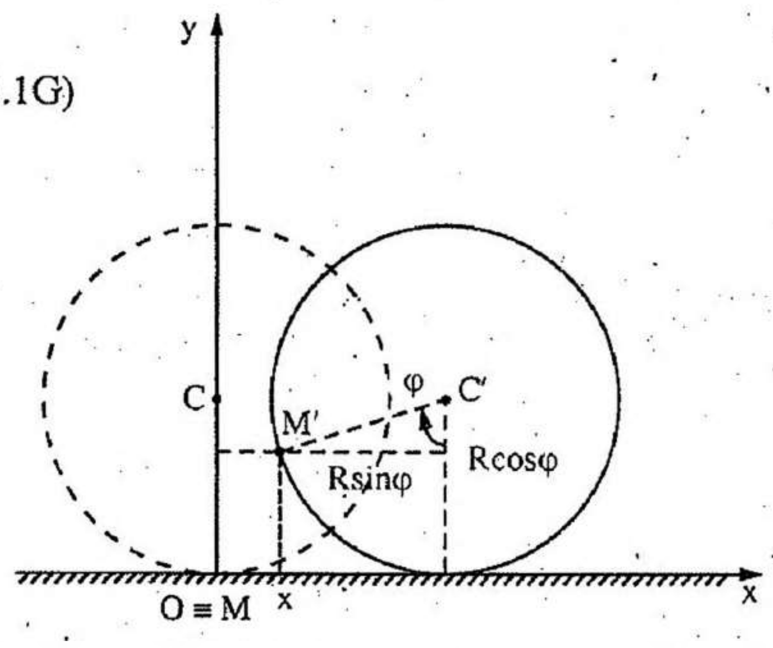
• Hệ ở tứ thế nằm ngang, khác với tư thế thứ ba do tăng thêm một phần tư vòng quay.

Rõ ràng là căn cứ vào dữ kiện của đề bài thì tư thế khi chạm đất của hệ gần với tư thế thứ tư bởi vì số vòng quay xấp xỉ bằng 20,75 vòng.

Chương II. CƠ HỌC VẬT RẮN

Chủ đề 3.

3.1. a) Tại t = 0 điểm M ≡ O (Hình 3.1G)



Hình 3.1G

Tại $t \neq 0$ điểm M ở vị trí (x, y).

$$x = vt - R\sin\varphi = vt - R\sin\omega t = vt - R\sin\frac{v}{R}t \qquad (1)$$

Tương tự : $y = R - R\cos\varphi = R - R\cos\frac{v}{R}t \qquad (2)$

Từ (2) $\Rightarrow \frac{v}{R}t = \arccos\left(1 - \frac{y}{R}\right) \Rightarrow t = \frac{R}{v}\arccos\left(1 - \frac{y}{R}\right) \qquad (3)$

Thay (3) vào (1) ta có phương trình quỹ đạo của điểm M :

$$x = R\arccos\left(1 - \frac{y}{R}\right) - \sqrt{2yR - y^2} \qquad (4)$$

Đây là phương trình đường cong xycloid.

b) Quãng đường của M đi được trong 1 chu kì là :

$$s = \int_0^T v(t)dt = \int_0^T \sqrt{x'^2 + y'^2}.dt$$

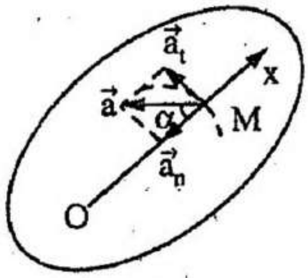
$$x' = v - v\cos\frac{v}{R}t \; ; \; y' = v\sin\frac{v}{R}t$$

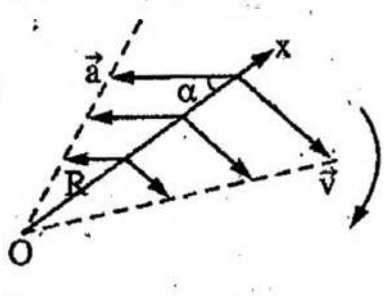
$$\Rightarrow x'^2 + y'^2 = v^2\left(1 - 2\cos\frac{v}{R}t + 1\right) = 2v^2(1 - \cos\frac{v}{R}t)$$

Vì $T = \frac{2\pi R}{v}$ ta có $s = \int_0^{\frac{2\pi R}{v}} 2v^2\left(1 - \cos\frac{v}{R}t\right)dt = 8R$

c) Gia tốc : $a = \sqrt{x''^2 + y''^2} = \frac{v^2}{R}$.

3.2. Xét tiết diện của vật rắn với một mặt phẳng vuông góc với trục quay, theo phương Ox (Hình 3.2Ga).

a) 

b) 

Hình 3.2G

Điểm M quay tròn có gia tốc $\vec{a}$ gồm 2 thành phần : gia tốc tiếp tuyến $a_t = \frac{dv}{dt}$ và gia tốc pháp tuyến $a_n = \frac{v^2}{R}(R = OM)$.

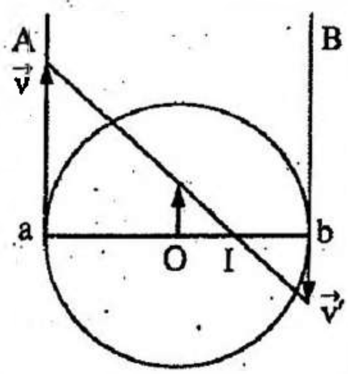
Nếu γ là gia tốc góc thì $\gamma = \frac{d\omega}{dt}$, ω là tốc độ góc ; $\gamma\omega > 0$ ứng với sự quay nhanh dần đều, $\gamma\omega < 0$ ứng với quay chậm dần đều.

Từ $v = R\omega$ suy ra : $\frac{dv}{dt} = a_t = \gamma R$.

Mặt khác $a_n = R\omega^2$. Góc α mà vectơ gia tốc $\vec{a}$ làm với Ox được xác định bởi $\tan\alpha = \frac{a_t}{a_n} = \frac{\gamma}{\omega^2}$ = const, không phụ thuộc R.

Độ lớn của gia tốc $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = R\sqrt{\gamma^2 + \omega^4}$ tỉ lệ với R. Vậy các vectơ gia tốc của các điểm khác nhau trên Ox được biểu diễn như trong hình 3.2Gb. Các vectơ vận tốc $\vec{v}$ cũng tỉ lệ với R và song song nhau, nhưng vuông góc với Ox. Trường hợp vẽ trong hình là quay theo chiều kim đồng hồ và chậm dần đều (a_t ngược chiều v). Nếu quay nhanh dần đều thì các vectơ $\vec{a}$ ở cùng một phía với các vectơ $\vec{v}$.

3.3. a) a và b là các điểm của ròng rọc tiếp xúc với các dây, $v_a = v$, $v_b = v'$. Ta vẽ các vectơ $\vec{v}$, $\vec{v}'$ (Hình 3.3G) và tìm được tâm quay I. Gọi ω là vận tốc góc của ròng rọc.



Hình 3.3G

$v = Ia\omega$, $v' = Ib\omega$. Cộng lại ta được :

$$v + v' = 2R\omega, \ \omega = \frac{v + v'}{2R} \quad (1)$$

I chia trong đường kính ab theo tỉ lệ $\frac{v}{v'}$ nên $\frac{Ia}{v} = \frac{Ib}{v'} = \frac{2R}{v + v'} = \frac{2IO}{v - v'}$.

$$\text{Vậy : } IO = R\frac{v - v'}{v + v'} \quad (2)$$

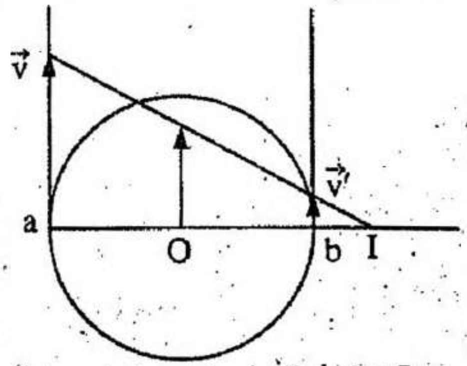
$$v_0 = \omega.IO = \frac{v - v'}{2} \quad (3)$$

Nếu $v > v'$ thì O đi lên (như trong hình 3.3G)

Nếu v < v′ thì O đi xuống.

Nếu v = v′ thì O đứng yên.

b) Cả a và b đi lên. I chia ngoài đường kính theo tỉ lệ $\frac{v}{v'}$. Thay v′ bằng –v′ trong (1 ÷ 3) ta có : $\omega = \frac{v - v'}{2R}$, $IO = R\frac{v + v'}{v - v'}$

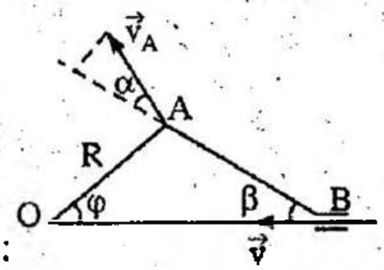


Hình 3.4G

Kết quả cuối khá hiển nhiên vì O là trung điểm của ab (Hình 3.4G).

3.4. a) A quay tròn nên $\vec{v}_A$ vuông góc với OA và $v_A = R\omega$.

Gọi α và β là các góc mà $\vec{v}_A$ và $\vec{v}_B$ làm với biên AB (Hình 3.5G).



Hình 3.5G

Các hình chiếu của $\vec{v}_A$ và $\vec{v}_B$ xuống AB phải bằng nhau :

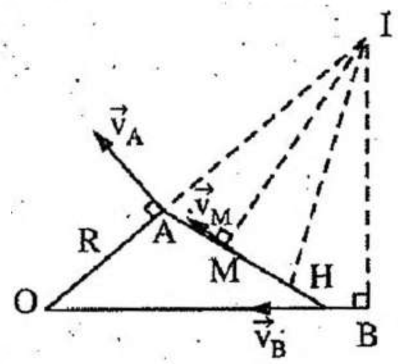
$$v_A\cos\alpha = v_B\cos\beta$$

Mặt khác : $\alpha = 90^o - (\varphi + \beta)$.

Vậy : $v_B = R\omega\frac{\sin(\varphi + \beta)}{\cos\beta} = R\omega(\sin\varphi + \cos\varphi\tan\beta)$.

Tam giác OAB cho : $\frac{\sin\beta}{R} = \frac{\sin\varphi}{l}$.

Suy ra : $\tan\beta = \frac{R\sin\varphi}{\sqrt{l^2 - R^2\sin^2\varphi}}$.



Hình 3.6G

b) Ta tìm tâm I các vận tốc (tâm quay tức thời) của AB bằng cách vẽ các đường vuông góc với $\vec{v}_A$ và $\vec{v}_B$. Giao điểm là I.

Các vận tốc của các điểm M của AB đều vuông góc với MI và có độ lớn tỉ lệ với MI : $v_M = \omega MI$.

Hiển nhiên chân H của đường vuông góc hạ từ I xuống AB có vận tốc nhỏ nhất (Hình 3.6G).

3.5. (Hình 3.7G)

a) Đầu B : (x_B, y_B) : $\frac{x_B}{l} = \cos\alpha$ (1)

$$\frac{y_B}{2l} = \sin\alpha \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{x^2}{l^2} + \dfrac{y^2}{4l^2} = 1 \qquad (3)$

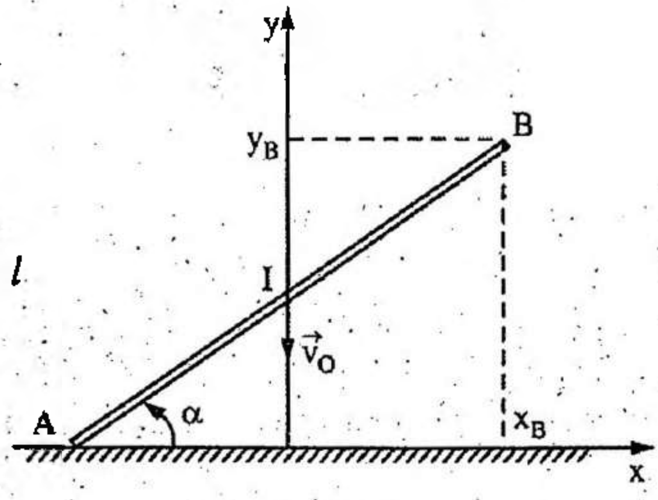
$\Rightarrow$ Elip có bán trục lớn $2l$, bán trục nhỏ l

b) Lưu ý giữa điểm I và B có quan hệ :

$$y_B = 2y_I \qquad (4)$$

với $\qquad y_I = l - v_0 t \qquad (5)$

Từ (4) và (5) $\Rightarrow y_B = 2(l - v_0 t) \qquad (6)$



Hình 3.7G

từ (3) $\Rightarrow x_B = l\sqrt{1 - \dfrac{y^2}{4l^2}} = l\sqrt{1 - \dfrac{1}{4l^2}4(l - v_0 t)^2} = \sqrt{l^2 - (l - v_0 t)^2} \quad (7)$

Từ (6) và (7) $\Rightarrow (v_y)_B = y'_B = -2v_0$; $(v_x)_B = x'_B = \dfrac{2v_0 l t}{\sqrt{l^2 - (l - v_0 t)^2}}$.

Từ đó suy ra : $v_B = v_0\sqrt{\dfrac{4l^2 - 3(l - v_0 t)^2}{l^2 - (l - v_0 t)^2}}$; $a = \dfrac{-v_0^2 l}{[l^2 - (l - v_0 t)^2]^{\frac{3}{2}}}$.

Khi $\alpha = 45^o$ thì $t = \dfrac{l - l\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{v_0} = \dfrac{l(2 - \sqrt{2})}{2v_0}$. Thay t vào biểu thức v_B và a ta được kết quả.

Chủ đề 4.

4.1. a) và b). Ta dùng định lí động năng để tìm vận tốc v của xe khi đã đi được quãng đường l.

Động năng của sàn $W_{d_1} = \dfrac{1}{2}Mv^2$.

Mỗi bánh xe có momen quán tính $I = \dfrac{1}{2}mR^2$, R là bán kính bánh xe.

Động năng quay là $W_{đ_q} = \frac{I}{2}\omega^2$, ω là vận tốc góc $\omega = \frac{v}{R}$, vậy $W_{đ_q} = \frac{1}{4}mv^2$.

Động năng của 4 bánh xe : $W_{đ_2} = 4\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mv^2\right)$, $W_{đ_2} = 3mv^2$.

Động năng của xe : $W_đ = W_{đ_1} + W_{đ_2} = \frac{M + 6m}{2}v^2$.

Công của lực $\vec{F}$ và của trọng lực $(M + 4m)\vec{g}$: $A = Fl - (M + 4m)g\sin\alpha.l$.

Theo định lí về động năng : $W_đ = A$

$$l[F - (M + 4m)g\sin\alpha] = \frac{M + 6m}{2}v^2$$

$$v^2 = \frac{2l[F - (M + 4m)g\sin\alpha]}{M + 6m}$$

Chuyển động của xe là nhanh dần đều từ trạng thái nghỉ nên ta có : $v^2 = 2al$,

suy ra gia tốc $a = \frac{F - (M + 4m)g\sin\alpha}{M + 6m}$ (1)

Thay số, ta được $a = 1$ m/s^2.

$v^2 = 8$; $v = \sqrt{8} = 2{,}83$ m/s.

c) Nếu các bánh xe không quay thì trong (1) tử số là lực không đổi (30 N) nhưng mẫu số phải thay bằng M + 4m = 26 kg ; $a' = 1{,}15$ m/s^2 > a. Đó là vì nếu các bánh xe quay thì quán tính quay cộng thêm vào quán tính tịnh tiến, làm tăng quán tính của xe.

4.2. *Cách giải 1* : Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng.

Kí hiệu h và *l* là độ cao và khoảng cách tới H của vị trí ban đầu C của hệ A + B.

Ta có : $W_{t_C} = W_{t_H}$ (1)

với $W_{t_C} = (m_1 + m_2)gh$

$W_{t_H} = W_{đ1} + W_{đ2} + A_{ms}$ (2)

Với $W_{đ1}$, $W_{đ2}$ là động năng của A và B ; A_{ms} là công mà hệ vật thực hiện để chống lại ma sát.

Ta có : $W_{d1} = \dfrac{m_1v^2}{2} + \dfrac{I\omega^2}{2}$; $W_{d2} = \dfrac{m_2v^2}{2}$

$h = l\sin\alpha$; $l = \dfrac{at^2}{2}$, với a là gia tốc của hệ ; $v = r\omega$; $I = \dfrac{m_1r^2}{2}$

$$A_{ms} = F_{ms}.l = \mu N_2 l = \mu m_2 g\cos\alpha.\frac{at^2}{2}$$

Thay vào (1) ta có :

$$\frac{(m_1 + m_2)gat^2\sin\alpha}{2} = \frac{(m_1 + m_2)a^2t^2}{2} + \frac{Ia^2t^2}{2r^2} + \mu m_2 g\cos\alpha\frac{at^2}{2} \quad (3)$$

Giải phương trình (3) và loại nghiệm a = 0 (vì hệ vật chuyển động có gia tốc), rút ra :

$$a = \frac{g[(m_1 + m_2)\sin\alpha - \mu m_2\cos\alpha]}{m_1 + m_2 + \dfrac{m_1}{2}} \approx 3{,}32 \text{ m/s}^2$$

Từ đó : $t = \sqrt{\dfrac{2l}{a}} \approx 1{,}1$ s.

• *Cách giải 2* : Kí hiệu $\vec{T}$ là lực căng của dây nối, áp dụng định luật II Niu-tơn cho vật B và vật A và chiếu phương trình lên phương chuyển động và lên phương vuông góc với mặt phẳng nghiêng :

$$m_2g\sin\alpha + T - \mu m_2g\cos\alpha = m_2a \quad (1)$$

$$m_1g\sin\alpha - T - F' = m_1a \quad (2)$$

với $\vec{F}'$ là lực ma sát làm cho hình trụ quay. Áp dụng phương trình của chuyển động quay quanh trục hình trụ : $M = I\gamma \Rightarrow F'r = \dfrac{m_1r^2}{2}.\dfrac{a}{r}$ (vì $a = r\gamma$)

hay $F' = \dfrac{m_1a}{2}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) rút ra : (thay $\alpha = 30^o$)

$$a = \frac{g[(m_1 + m_2)\sin\alpha - \mu m_2\cos\alpha]}{m_1 + m_2 + \dfrac{m_1}{2}} \approx 3{,}32 \text{ m/s}^2$$

và từ đó $t \approx 1{,}1$ s.

Ngoài ra, ta có : $T = m_2[a + g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)] \approx 0,1$ N.

Ta hãy so sánh gia tốc trượt của vật (khi không có A) với gia tốc tịnh tiến của hình trụ (khi không có B). Dễ dàng tính được : $a_2 = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \approx 3,27$ m/s^2.

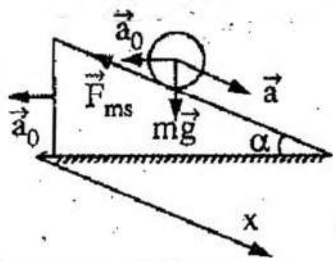
Đối với hình trụ, áp dụng phương trình chuyển động quay đối với trục đi qua đường tiếp xúc của hình trụ với mặt phẳng nghiêng : $M = I\gamma$, với $M = m_1 gr\sin\alpha$,

$$I = \frac{m_1 r^2}{2} + m_1 r^2 = \frac{3m_1 r^2}{2}, \text{ suy ra : } a_1 = r\gamma = \frac{2}{3}g\sin\alpha = \frac{g}{3}$$

$\Rightarrow a_1 = 3,33$ m/s$^2 > a_2$

Nhưng nếu $\alpha = 45^o$ thì $a_2 = 5,64$ m/s^2, và $a_1 = 4,7$ m/s$^2 < a_2$: Vật B trượt nhanh hơn hình trụ và thúc vào hình trụ. Khi đó lực căng T = 0 và thời gian hình trụ lăn đến B sẽ nhỏ hơn 1,1 s.

4.3. Ta thấy ngay vì động lượng bảo toàn nên hình trụ đi xuống, sang phải, thì nêm sẽ đi sang trái.



Hình 4.1G

Hình trụ chịu tác dụng của trọng lực $m\vec{g}$ và lực ma sát $\vec{F}_{ms}$ hướng sang trái (Hình 4.1G). Nó có gia tốc $\vec{a}$ đối với nêm và gia tốc kéo theo $\vec{a}_0$ có phương nằm ngang, sang trái.

$$m\vec{g} + \vec{F}_{ms} = m(\vec{a} + \vec{a}_0) \qquad (1)$$

Chiếu (1) xuống trục x gắn với bàn và song song với mặt nghiêng của nêm :

$$mg\sin\alpha - F_{ms} = m(a - a_0\cos\alpha) \qquad (2)$$

a_0 là môđun.

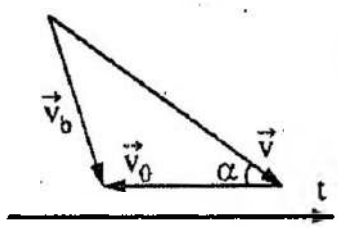
Phương trình quay của hình trụ là : $F_{ms}R = \frac{mR^2}{2}\gamma$.

Gia tốc góc $\gamma = \frac{a}{R}$ suy ra $F_{ms} = \frac{ma}{2}$.

Thay vào (2), ta có : $a = \frac{2}{3}(g\sin\alpha + a_0\cos\alpha)$ (3)

Mặt khác, vận tốc $\vec{v}_b$ của tâm C hình trụ đối với bàn bằng vận tốc đối với nêm $\vec{v}$, cộng với vận tốc của nêm đối với bàn $\vec{v}_0$:

$$\vec{v}_b = \vec{v} + \vec{v}_0 \text{ (Hình 4.2G).}$$



Hình 4.2G

Nếu chiếu xuống trục (t) trên mặt bàn thì $v_{bt} = v\cos\alpha - U_0$ (U_0 là môđun).

Ta có sự bảo toàn động lượng theo phương ngang : $mv_{bt} - MU_0 = 0$.

(Chú ý rằng định luật này và các định luật Niu-tơn áp dụng cho hệ quy chiếu gắn với bàn chẳng hạn).

$m(v\cos\alpha - U_0) - MU_0 = 0$ hay $mv\cos\alpha = U_0(M + m)$ (4)

Lấy đạo hàm (4) ta có liên hệ giữa hai gia tốc a và a_0.

$ma\cos\alpha = a_0(M + m)$ suy ra $a = \dfrac{a_0(M + m)}{m\cos\alpha}$ (5)

Cân bằng (3) và (5) ta có $\dfrac{2}{3}(g\sin\alpha + a_0\cos\alpha) = \dfrac{a_0(M+m)}{m\cos\alpha}$.

Nên $a_0 = \dfrac{mg\sin 2\alpha}{3(M + m) - 2m\cos^2\alpha} = \dfrac{mg\sin 2\alpha}{3M + 2m - m\cos 2\alpha}$ (6)

Gia tốc đại số của M là : $-a_0$.

Thay (6) vào (5) ta có sau khi biến đổi : $a = \dfrac{2(M + m)g\sin\alpha}{3M + 2m - m\cos 2\alpha}$.

4.4. Ở thời điểm t :

– Vật A có vận tốc v thì vận tốc dài của ròng rọc O cũng bằng v nên vận tốc góc của ròng rọc là $\omega_O = \dfrac{v}{R}$.

– Con lăn B có vận tốc tịnh tiến là $v_B = \dfrac{v}{2}$ nên vận tốc góc của nó là $\omega_B = \dfrac{v}{2R}$.

Ta có độ biến thiên động năng của hệ :

$$\Delta W_d = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}I_O\omega_O^2 + \frac{1}{2}m_3v_B^2 + \frac{1}{2}I_B\omega_B^2$$

Trong đó : $I_O = \dfrac{1}{2}m_2R^2$; $I_B = \dfrac{1}{2}m_3R^2$ thì : $\Delta W_d = \dfrac{8m_1 + 4m_2 + 12m_3}{16}v^2$ (1)

Công của các ngoại lực khi A đi xuống một đoạn s trong thời gian t :

$A = m_1g.\sin\alpha.s - m_3g.\sin\beta.\dfrac{s}{2} \Rightarrow A = (2m_1\sin\alpha - m_3\sin\beta)\dfrac{gs}{2}$ (2)

Định lí động năng : $\Delta W_d = A$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có : $v^2 = \dfrac{8(2m_1 \sin\alpha - m_3 \sin\beta)gs}{8m_1 + 4m_2 + 12m_3}$ (4)

Ta còn có : $v^2 = 2as$ (5)

So sánh (4) với (5) suy ra : $a = \dfrac{4(2m_1 \sin\alpha - m_3 \sin\beta)g}{8m_1 + 4m_2 + 12m_3}$

4.5. a) Phương trình tịnh tiến của hai ròng rọc 1 và 2 là : $2mg - T_1 = 2ma_1$; (1)

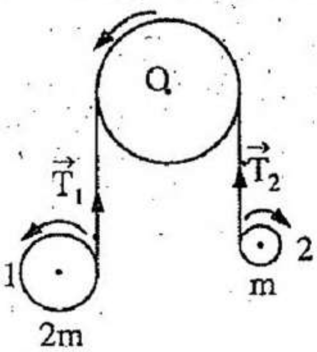
$mg - T_2 = ma_2$ (2)

Phương trình quay của chúng là : $T_1r_1 = I_1\gamma_1$; $T_1r_2 = I_2\gamma_2$

r_1, r_2 là các bán kính ; I_1, I_2 là các momen quán tính ;

γ_1, γ_2 là các gia tốc góc (Hình 4.3G).

Thay $I_1 = mr_1^2$, $I_2 = \dfrac{1}{2}mr_2^2$.



Hình 4.3G

Ta có : $T_1 = mr_1\gamma_1$ (3) ; $T_2 = \dfrac{m}{2}r_2\gamma_2$ (4)

Phương trình quay của ròng rọc O với $I = \dfrac{m}{2}R^2$ là $(T_1 - T_2)R = \dfrac{m}{2}R^2\gamma$

hay $T_1 - T_2 = \dfrac{m}{2}R\gamma$ (γ là gia tốc góc của O) (5)

Các ròng rọc 1 và 2 có chiều quay ngược nhau như trong hình 4.3G.

Giả thiết $T_1 > T_2$ ròng rọc O sẽ quay theo chiều của ròng rọc 1.

Nếu ròng rọc O quay theo góc α và ròng rọc 1 quay góc α_1 thì 1 đi xuống đoạn đường : $s_1 = r_1\alpha_1 + R\alpha$.

Suy ra : $a_1 = r_1\gamma_1 + R\gamma$ (6)

Tương tự ta có (O quay trái chiều 2)

$$s_2 = r_2\alpha_2 - R\alpha$$

$$a_2 = r_2\gamma_2 - R\gamma \quad (7)$$

Ta có 7 phương trình để tìm 7 ẩn : a_1, a_2, T_1, T_2, γ_1, γ_2, γ

(3), (4), (5) cho phép ta khử các gia tốc.

$$\gamma_1 = \frac{T_1}{mr_1} ; \gamma_2 = \frac{2T_2}{mr_2} ; \gamma = \frac{2(T_1 - T_2)}{mR}$$

Thay vào (6), (7) ta tính được : $a_1 = \dfrac{3T_1 - 2T_2}{m}$ (8)

$$a_2 = \frac{4T_2 - 2T_1}{m} \quad (9)$$

b) Dùng (1), (2) ta có các lực căng dây : $T_1 = 2m(g - a_1)$; $T_2 = mg(g - a_2)$.

Đưa vào (8), (9) ta đi đến : $T_1 = \dfrac{14}{27}mg$; $T_2 = \dfrac{11}{27}mg < T_1$ như giả thiết và

$$a_1 = \frac{20}{27}g,\ a_2 = \frac{16}{27}g,\ \gamma = \frac{6}{27}.\frac{g}{R}$$

Phản lực của trục O khi các ròng rọc 1, 2 chuyển động là :

$$Q = T_1 + T_2 + mg = \frac{52}{27}mg \approx 1{,}9mg$$

Khi chưa chuyển động : $Q' = 4mg > Q$.

Chú ý : Ta không có $\gamma_1 = \dfrac{a_1}{r_1}$; $\gamma_2 = \dfrac{a_2}{r_2}$ mà có (6), (7) vì : $\gamma_2 = \dfrac{a_2}{r_2}$ chẳng hạn, là gia tốc góc khi dây đứng yên, ở đây dây đi lên trên.

4.6. a) Áp dụng định luật II Niu-tơn cho hộp A ta tìm được gia tốc của hộp :

$$a_1 = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \quad (1)$$

Phương trình chuyển động tịnh tiến của hình trụ :

$$m_2 g\sin\alpha - F = m_2 a_2 \quad (2)$$

với $\vec{F}$ là lực ma sát giữ cho hình trụ không trượt, đồng thời gây ra sự quay của hình trụ quanh trục của nó theo phương trình :

$$M = I\gamma \Rightarrow F.r = m_2 r^2.\gamma \quad (3)$$

với $\gamma = \dfrac{a_2}{r}$ (vì lăn không trượt). Từ đó rút ra : $a_2 = \dfrac{g\sin\alpha}{2}$ (4)

Muốn cho khoảng cách giữa hộp và hình trụ giữ không thay đổi thì phải có $a_1 = a_2$. Từ (1) và (4) rút ra : $\tan\alpha = 2\mu$ (5)

b) Lực cản chuyển động hình trụ được suy từ (3) và (4) : $F = \dfrac{m_2 g \sin\alpha}{2}$ (6)

Lực ma sát cực đại giữa hình trụ và mặt phẳng nghiêng là :

$$F_{ms} = \mu' m_2 g\cos\alpha \quad (7)$$

Để vẫn có chuyển động như trên thì phải có : $F \le F_{ms}$, do đó, theo (5) phải có :

$$\mu' \ge \mu.$$

4.7. (Hình 4.4G).

$a_n = \dfrac{P\cos\alpha - N}{m}$ (với $a_n = \omega^2 R = R\alpha'^2$)

$\Leftrightarrow -mR\alpha'^2 = N - mg\cos\alpha$ (1)

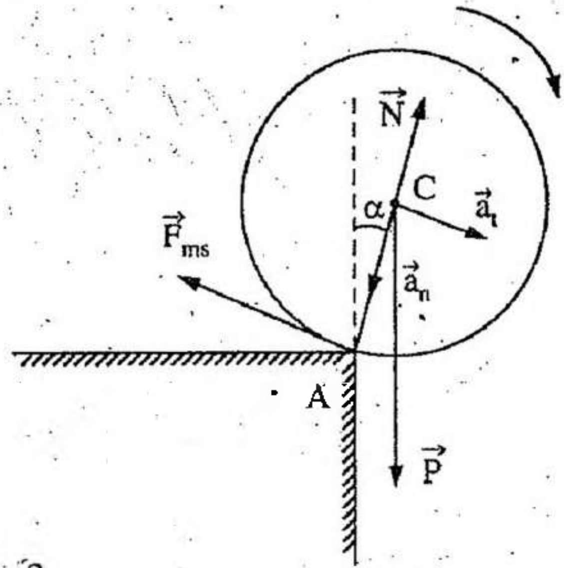
$a_t = -F_{ms} + mg\sin\alpha$

$\Leftrightarrow mR\alpha'' = -F_{ms} + mg\sin\alpha$ (2)

– Áp dụng định lí momen động lượng đối với trục quay A :

$I_A \dfrac{d\omega}{dt} = mgR\sin\alpha$ (với $I_A = mR^2 + \dfrac{1}{2}mR^2 = \dfrac{3}{2}mR^2$)

$\Rightarrow \dfrac{3}{2}mR^2\alpha'' = mgR\sin\alpha$ (3)



Hình 4.4G

(Nhân hai vế cho α') $\Leftrightarrow \dfrac{3}{2}mR^2\alpha''.\alpha' = mgR\sin\alpha.\alpha'$ ($\alpha''.\alpha' = \dfrac{1}{2}(\alpha'^2)'_t$

$$\sin\alpha.\alpha' = (-\cos\alpha)'_t) \Leftrightarrow \frac{3}{4}mR^2 d(\alpha'^2) = mgRd(-\cos\alpha)$$

Lấy tích phân hai vế ta được : $\dfrac{3}{4}mR^2\alpha'^2 = mgR(-\cos\alpha + 1)$ (4)

Từ (1), (2), (3), (4) khử α' và α'', ta tìm được : $F_{ms} = \dfrac{1}{3}mg\sin\alpha$ (5)

$$N = \frac{1}{3}mg(7\cos\alpha - 4) \quad (6)$$

– Với giả thiết : $N \ge 0 \Rightarrow 7\cos\alpha - 4 \ge 0 \Rightarrow \alpha \le \alpha_1 \quad (\cos\alpha_1 = \frac{4}{7})$

– Mặt khác : $F_{ms} \le \mu N$ (7)

Thay (5), (6) vào (7) : $\Rightarrow \sin\alpha_2 \le \mu(7\cos\alpha_2 - 4) \Rightarrow \alpha_0 = |\alpha_2| = 0{,}47 = 27^o$.

4.8. Phương trình chuyển động của khối tâm các trụ :

$$m\vec{a}_c = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N}.$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_{Cd} + \vec{a}$$

Với $\vec{a}$ là gia tốc của dây.

Chiếu lên phương chuyển động của mỗi trụ :

$$m_1(a_{1d} - a) = m_1 g\sin\alpha - T \quad (1)$$

$$m_2(a_{2d} + a) = m_2 g\sin\beta - T \quad (2)$$

– Phương trình quay của vật rắn : $I_C\beta = RT$.

Với : $I_C = \frac{1}{2}mR^2 \Rightarrow R\beta = \frac{2T}{m}$ (3)

Ta có : $v_{Cd} = R\omega$; $a_{Td} = R\beta$ (4)

Từ (3), (4) suy ra gia tốc trụ 1 đối với dây : $a_{1d} = \frac{2T}{m} \Rightarrow m_1 a_{1d} = 2T$ (5)

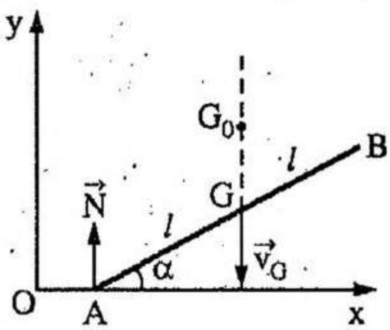
Thay (5) vào (1), ta được : $2T - m_1 a = m_1 g\sin\alpha - T$ (6)

Tương tự : $2T + m_2 a = m_2 g\sin\beta - T$ (7)

Từ (6), (7) : $$a = \frac{(m_2\sin\beta - m_1\sin\alpha)g}{m_1 + m_2}$$

$$T = \frac{m_1 m_2 g(\sin\alpha + \sin\beta)}{3(m_1 + m_2)}$$

4.9. a) Thanh chỉ chịu các lực thẳng đứng : trọng lực $m\vec{g}$ và phản lực $\vec{N}$ của Ox, nên khối tâm G chuyển động trên đường thẳng đứng đi qua vị trí ban đầu G_0, $\vec{v}_G$ cũng ở trên đường ấy (Hình 4.5G).



Hình 4.5G

b) $v_G = \frac{dy}{dt} = \frac{d(l\sin\alpha)}{dt} = \alpha' l\cos\alpha$ (1)

$\alpha' = \frac{d\alpha}{dt}$. Để tìm α' ta dùng định lí động năng. Động năng W_d của thanh gồm có động năng tịnh tiến của khối tâm $\frac{1}{2}mv_G^2$ và động năng quay $\frac{1}{2}I\omega^2$, với $I = \frac{ml^2}{3}$ và $\omega = \alpha'$.

Vậy : $W_d = \frac{1}{2}m(\alpha' l\cos\alpha)^2 + \frac{1}{6}ml^2\alpha'^2$.

Công của trọng lực khi thanh rơi từ vị trí α_0 xuống vị trí α là :

$$A = mgl(\sin\alpha_0 - \sin\alpha)$$

$W_d = \frac{1}{6}ml^2\alpha'^2(1 + 3\cos^2\alpha)$; $A = W_d$ cho ta : $\alpha'^2 = \frac{6g(\sin\alpha_0 - \sin\alpha)}{l(1 + 3\cos^2\alpha)}$.

Đưa vào (1) đã bình phương, ta có : $v_G^2 = \frac{6gl(\sin\alpha_0 - \sin\alpha)\cos^2\alpha}{1 + 3\cos^2\alpha}$ (2)

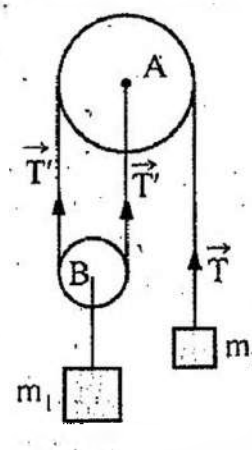
Lấy căn số ta có : v_G.

c) Trường hợp $\alpha_0 = 90^o$: Lúc sắp đập vào Ox thì $\alpha = 0$.

Với $\sin\alpha_0 = 1$, $\cos\alpha = 1$ (2) cho : $v_G^2 = \frac{3gl}{2}$, $v_G = \sqrt{\frac{3gl}{2}}$.

Chất điểm có khối lượng m rơi từ độ cao l sẽ có vận tốc $v = \sqrt{2gl}$; $v_G < v$, là điều dễ hiểu, vì phản lực N làm giảm tác dụng của trọng lực.

4.10. a) Chọn chiều dương hướng xuống. Khối lượng các ròng rọc A, B bằng 0 thì lực căng dây ở hai bên và ở giữa bằng nhau : $T = T'$ (Hình 4.6G).



Hình 4.6G

Các phương trình chuyển động của m_1, m_2 là :

$$-2T + m_1g = m_1a_1 \quad (1)$$

$$-T + m_2g = m_2a_2 \quad (2)$$

m_1, m_2 chuyển động ngược chiều nhau và m_2 đi được quãng đường gấp đôi m_1, nghĩa là : $$a_2 = -2a_1 \qquad (3)$$

Thay vào (2) và giải hệ ba phương trình với ba ẩn a_1, a_2 và T, ta đi tới :

$$a_1 = \frac{m_1 - 2m_2}{m_1 + 4m_2}g,\ a_2 = \frac{2(2m_2 - m_1)}{m_1 + 4m_2}g$$

$m_2 > \frac{m_1}{2}$ thì $a_2 > 0$, m_2 đi xuống, m_1 đi lên. $m_2 < \frac{m_1}{2}$ thì ngược lại.

$$T = \frac{3m_1m_2}{m_1 + 4m_2}g,\ Q = 3T = \frac{9m_1m_2}{m_1 + 4m_2}g$$

$$P = (m_1 + m_2)g,\ P - Q = \frac{(m_1 - 2m_2)^2}{m_1 + 4m_2} > 0.\ \text{Vậy } P > Q.$$

b) $T \neq T'$ các phương trình là (ta vẫn có $a_2 = -2a_1$) :

$$-2T' + mg = -m\frac{a_2}{2} \qquad (4)$$

$$-T' + mg = ma_2 \qquad (5)$$

Phương trình quay của ròng rọc A :

$$(T - T')R = \frac{mR^2}{2}.\frac{a_2}{R},\ (\frac{a_2}{R} \text{ là gia tốc góc của A})$$

$$T - T' = \frac{1}{2}ma_2 \qquad (6)$$

Ba phương trình (4), (5), (6) giúp ta tính ba ẩn a_2, T, T'.

$$a_2 = \frac{2}{7}g,\ a_1 = -\frac{1}{7}g,\ m_2 \text{ đi xuống, } m_1 \text{ đi lên.}$$

$$T = \frac{5}{7}mg,\ T' = \frac{4}{7}mg,\ Q = 2T' + T = \frac{13}{7}mg < 2mg = P$$

4.11. a) Khối tâm của thanh AB nằm ở trung điểm O. Ta chọn một cách tùy ý gốc của trục x trùng với trung điểm O của thanh AB. Sau khi viên đạn cắm vào đầu B của thanh thì vị trí khối tâm G của hệ thanh và đạn được xác định bởi công thức :

$$x_G = \frac{x_0.m + OB.m}{m + m} = \frac{l}{2}\text{; với } x_0 = 0$$

Trước va chạm, thanh đứng yên, động lượng của hệ bằng động lượng viên đạn $p_0 = mv_0$.

Sau va chạm, hệ thanh AB và đạn chuyển động với vận tốc v_G là vận tốc của khối tâm của hệ : $p_1 = 2mv_G$.

Giả sử tổng các ngoại lực tác dụng vào hệ bằng 0 (hệ cô lập) thì động lượng toàn phần của hệ là không đổi.

Ta có : $p_0 = p_1$ hay $mv_0 = 2mv_G \Rightarrow v_G = \frac{v_0}{2}$

b) Áp dụng định luật bảo toàn momen động lượng.

Momen động lượng của hệ đối với G ngay trước va chạm bằng :

$$M_1 = mv_0.\frac{l}{2} = \frac{mv_0 l}{2}$$

Kí hiệu ω là vận tốc góc của hệ quanh G ngay sau va chạm, momen động lượng của viên đạn là :

$$\frac{mvl}{2} = \frac{ml}{2}.\left(\omega\frac{l}{2}\right) = \frac{ml^2\omega}{4}$$

và của thanh là : $I_G\omega = (I_0 + m.\overline{OG}^2)\omega = \frac{7}{12}ml^2\omega$

và tổng momen động lượng của hệ ngay sau va chạm bằng :

$$M_2 = \frac{ml^2\omega}{4} + \frac{7}{12}ml^2\omega = \frac{5}{6}ml^2\omega$$

Từ đó $M_1 = M_2$ suy ra $\omega = \frac{3v_0}{5l}$.

c) Động năng của hệ trước va chạm : $W_đ = \frac{mv_0^2}{2}$.

Sau va chạm toàn bộ hệ tịnh tiến với vận tốc v_G, đồng thời quay quanh G theo chiều ngược với chiều kim đồng hồ với vận tốc góc ω, do đó tổng động năng của hệ bằng :

$$W_đ = \frac{1}{2}.2m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + \frac{I_G\omega^2}{2} + \frac{m}{2}\left(\omega\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{2}{5}mv_0^2$$

Độ giảm động năng do va chạm :

$$W_{đ0} - W_đ = \frac{mv_0^2}{10}.$$

d) Vận tốc tuyệt đối của một điểm M của thanh cách G một khoảng r bằng : $v_M = v_G - r\omega$.

Đối với tâm quay tức thời C thì $v_M = 0$, suy ra : $r_C = \frac{v_G}{\omega} = \frac{5l}{6}$.

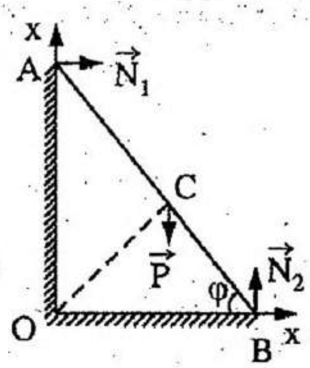
4.12. (Hình 4.7G)

a) Định lí động năng :

$$W_đ - W_{đ0} = A_{\vec{P}} \text{ với } W_{đ0} = 0 \qquad (1)$$

$$W_đ = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2$$

$$I_C = \frac{ma^2}{12};\ v_C = \frac{a}{2}\omega$$



Hình 4.7G

Trọng tâm C chuyển động trên đường tròn tâm O, bán kính là $\frac{a}{2}$.

Vậy : $$W_đ = \frac{1}{2}m\frac{a^2\omega^2}{4} + \frac{ma^2}{12}\frac{1}{2}\omega^2 = \frac{ma^2}{6}\omega^2 \qquad (2)$$

$$A_{\vec{P}} = mg(h_0 - h) = mg\frac{a}{2}(\sin\varphi_0 - \sin\varphi) \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) : $\omega^2 = \frac{3g}{a}(\sin\varphi_0 - \sin\varphi) \qquad (4)$

Để tìm gia tốc của thanh ; lấy đạo hàm (4) :

$$2\omega.\omega' = -\frac{3g}{a}\cos\varphi.\varphi' = -\frac{3g}{a}\omega.\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \omega' = \beta = -\frac{3g}{2a}\cos\varphi \qquad (5)$$

b) $$\begin{cases} m x''_C = N_1 & (6) \\ m y''_C = -P + N_2 & (7) \end{cases}$$

Với $x_C = \frac{a}{2}\cos\varphi$; $y_C = \frac{a}{2}\sin\varphi$.

$$x'_C = -\frac{a}{2}\sin\varphi.\varphi' ;\ y'_C = \frac{a}{2}\cos\varphi.\varphi'^2$$

$$x''_C = -\frac{a}{2}\sin\varphi.\varphi'' - \frac{a}{2}\cos\varphi.\varphi'^2 \qquad (8)$$

$$y''_C = \frac{a}{2}\cos\varphi.\varphi'' - \frac{a}{2}\sin\varphi.\varphi'^2 \qquad (9)$$

Thế (8), (9) vào (6), (7) :

$$N_1 = -\frac{ma}{2}(\sin\varphi.\varphi'' + \cos\varphi.\varphi'^2) \qquad (10)$$

$$N_2 = mg + \frac{ma}{2}(\cos\varphi.\varphi'' - \sin\varphi.\varphi'^2) \qquad (11)$$

Với $\varphi'^2 = \omega^2$; $\varphi'' = \beta$

Khi đầu A rời tường : $N_1 = 0 \Rightarrow \sin\varphi.\varphi'' + \cos\varphi.\varphi'^2 = 0$

$$\Rightarrow -\sin\varphi\frac{3g}{2a}\cos\varphi + \frac{3g}{a}\cos\varphi(\sin\varphi_0 - \sin\varphi) = 0$$

$$\Rightarrow \sin\varphi - 2(\sin\varphi_0 - \sin\varphi) = 0 \Rightarrow \sin\varphi = \frac{2}{3}\sin\varphi_0 \qquad (12)$$

4.13. (Hình 4.8G)

Hình 4.8G

Giai đoạn 1 : Hệ đi lên (Hình 4.8Ga)

Do vận tốc dài của mỗi điểm trên mép trụ $v_d = \omega R$ lớn hơn vận tốc tịnh tiến của khối tâm hình trụ nên hình trụ vừa lăn vừa trượt. Khi đó lực ma sát nghỉ trên hình trụ bằng ma sát trượt và là lực phát động :

$$2ma_1 = -2mg\sin\alpha - F_{ms2} + F_{ms1}$$

$\Rightarrow 2a_1 = -2g\sin\alpha + (\mu_1 - \mu_2)g\cos\alpha$

$\Rightarrow a_1 = \dfrac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2)g\cos\alpha - g\sin\alpha \Rightarrow a_1 = g\sin\alpha$

Hệ chuyển động nhanh dần đều.

– Vận tốc khối tâm của hình trụ : $v_t = a_1 t = g\sin\alpha.t$ (1)

– Chuyển động quay của hình trụ có gia tốc góc :

$$\varepsilon = \frac{M}{I} = \frac{F_{ms1}R}{I} = -\frac{\mu_1 mg\cos\alpha.R}{\frac{1}{2}mR^2} = -\frac{10g\sin\alpha}{R} < 0$$

Lực ma sát F_{msn1} có tác dụng làm trụ quay ngược chiều với ω_0 nên hình trụ quay với vận tốc góc ω nhỏ dần.

$$\omega_t = \omega_0 t + \varepsilon t = \omega_0 - \frac{10g\sin\alpha}{R}t$$

Vận tốc dài của mỗi điểm trên mép hình trụ : $v_d = \omega_t R$ (2)

Giai đoạn này ngừng khi : $v_t = v_d$.

Từ (1) và (2) suy ra thời gian t_1:

$$g\sin\alpha.t_1 = \left(\omega_0 - \frac{10g\sin\alpha.t_1}{R}\right)R \Rightarrow t_1 = \frac{\omega_0 R}{11g\sin\alpha} \quad (3)$$

Khi đó : $v_{t1} = a_1 t_1 = \dfrac{\omega_0 R}{11}$.

Quãng đường hệ đã đi được : $s_1 = \dfrac{1}{2}a_1 t_1^2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\omega_0 R}{11}\right)^2 \dfrac{1}{g\sin\alpha}$.

Giai đoạn 2 : (Hình 4.8Gb) Hệ tiếp tục đi lên.

Hình trụ lăn không trượt, lực ma sát lên hình trụ là lực ma sát lăn : $F_{msnl} < F_{mst1}$.

$$\begin{cases} 2ma_2 = -2mg\sin\alpha - F_{ms2t} - F_{msn1} \\ I\varepsilon = F_{msn1}.R \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2ma_2 = -3mg\sin\alpha - F_{msn1} \\ \frac{1}{2}mR^2\frac{a_2}{R} = F_{msn1}.R \end{cases} \Rightarrow a_2 = -\frac{6}{5}g\sin\alpha$$

Hệ chuyển động chậm dần cho đến lúc dừng lại :

$$t_2 = -\frac{v_{t1}}{a_2} = \frac{5\omega_0 R}{66g\sin\alpha}$$

$$s_2 = -\frac{v_{t1}^2}{2a_2} = \frac{5\omega_0^2 R^2}{1452g\sin\alpha}$$

Giai đoạn 3 : Hệ chuyển động xuống dưới

$$\begin{cases} 2ma_3 = 2mg\sin\alpha - F_{ms2} - F_{msn1} \\ I\varepsilon = F_{msn1}R \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mR^2\frac{a_3}{R} = F_{msn1}R \Rightarrow F_{msn1} = \frac{1}{2}ma_3$$

Thay vào trên, giải ra : $a_3 = \frac{2}{5}g\sin\alpha$.

4.14. a) Phương trình động lực học :

$$\begin{cases} (T_2 - T_1)R = I\beta = I\frac{a}{R} \\ P_2 - T_2 = m_2 a \\ T_1 - P_1 = m_1 a \end{cases} \qquad (1)$$

Giải hệ phương trình (1) thu được : $a = \dfrac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \dfrac{M}{2}} = 1{,}63\ m/s^2$

Khi ròng rọc quay được 1 vòng, các vật m_1, m_2 chuyển động được quãng đường $s = 2\pi R$

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{\frac{4\pi R(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}} = \sqrt{\frac{4\pi.0,1.(1,5-1).9,8}{1,5+1+\frac{1}{2}}} = 1,43 \text{ m/s } (*)$$

b) Các phường trình động lực học :

$$P_2 - T_2 = m_2a' \quad (2)$$

$$T_1 - P_1 = m_1a' \quad (3)$$

Do có mà sát giữa dây với nửa vòng tròn của ròng rọc (ma sát trượt) nên $\vec{T}_1 \neq \vec{T}_2$. Lực căng tại các điểm trên đoạn dây AB tiếp xúc với ròng rọc có độ lớn tăng dần từ A đến B. Cần xác định quan hệ giữa $\vec{T}_1$ và $\vec{T}_2$.

Xét đoạn dây dl chắn cung dφ, độ biến thiên lực căng dT của đoạn dây này :

$$dT = kTd\varphi$$

do đó : $\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \int_0^{\pi} kd\varphi$ suy ra : $T_2 = T_1\exp(k\pi)$

Kết hợp với các phương trình (2), (3) ta có hệ phương trình :

$$P_2 - T_2 = m_2a'$$

$$T_1 - P_1 = m_1a'$$

$$T_2 = T_1\exp(k\pi)$$

Giải hệ phương trình này thu được :

$$a' = \frac{(m_2 - m_1e^{k\pi})}{m_2 + m_1e^{k\pi}}g = -1,086 \text{ m/s}^2$$

$$T_1 = m_1(a' + g) = 8,7 \text{ N}$$

$$T_2 = m_1(a' + g)e^{k\pi} = 16,3 \text{ N}$$

c) Vận tốc các vật được xác định bởi : $v_t = v_0 + a't$ (với v_0 được xác định ở phần trước tại thời điểm dây bắt đầu bị trượt theo biểu thức và kết quả (*))

$$v_0 = \sqrt{\frac{4\pi R(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}}$$

Suy ra : $$v = \sqrt{\frac{4\pi R(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}} + \frac{(m_2 - m_1 e^{k\pi})}{m_2 + m_1 e^{k\pi}} gt \quad (**)$$

Nhận xét : do biểu thức gia tốc $a' = \frac{(m_2 - m_1 e^{k\pi})}{m_2 + m_1 e^{k\pi}} g$ có thể là dương, âm, bằng 0 ứng với từng bộ dữ kiện đầu bài khác nhau, nên với các trường hợp cụ thể của bộ giá trị (m_1, m_2, k, t) ta có các giá trị vận tốc khác nhau.

+ TH_1 : Khi $a' > 0$; vật chuyển động nhanh dần đều, giá trị v được tính theo công thức (**).

+ TH_2 : Khi $a' = 0$; $v = v_0$.

+ TH_3 : Khi $a' < 0$; vật chuyển động chậm dần đều ; ta tính v theo công thức (**) và nhận kết quả vận tốc vật sau thời gian t là v khi $v \geq 0$ và $v = 0$ khi giá trị tính được là giá trị âm.

Áp dụng bằng số với : $m_2 = 1{,}5$ kg ; $m_1 = 1$ kg ; $k = 0{,}2$;

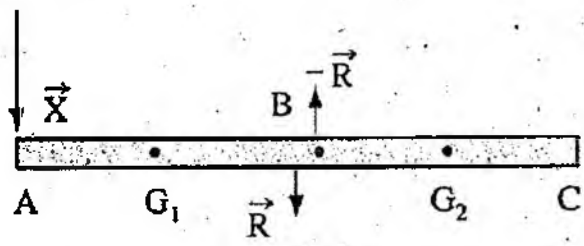
$t = 2$ s ; $M = 1$ kg ; $R = 0{,}1$ m ; $g = 9{,}8$ g/m^2

Tính được $a' = -1{,}087$ m/s^2 $\Rightarrow$ vật chuyển động chậm dần đều sau thời gian $t = 1{,}35$ s thì dừng lại. Vậy tại $t = 2$ s các vật có vận tốc $v = 0$.

4.15. (Hình 4.9G).

a) Gọi $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}$ là vận tốc của khối tâm G_1, G_2 và G của hệ ngay sau khi vừa va chạm.

$\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$, $\vec{v}_B$ là vận tốc góc của thanh AB, BC và vận tốc của chốt B.



Hình 4.9G

– Xét thanh AB : $$\begin{cases} X + R = mv_1 & (1) \\ (X - R)\frac{l}{2} = \left(\frac{1}{12}ml^2\right)\omega_1 & (2) \end{cases}$$

– Xét thanh BC : $$\begin{cases} -R\frac{l}{2} = \frac{1}{12}ml^2\omega_2 & (3) \\ -R = mv_2 & (4) \end{cases}$$

– Xét cả hệ : $X = 2mv$ (5)

- Xét chốt B : $\begin{cases} v_B = \omega_2 \dfrac{l}{2} + v_2 & (6) \\ v_B = -\omega_1 \dfrac{l}{2} + v_1 & (7) \end{cases}$

Giải hệ ta được : $v_1 = \dfrac{5X}{4m}$; $v_2 = \dfrac{-X}{4m}$; $v = \dfrac{X}{2m}$; $v_B = \dfrac{-X}{m}$.

b) Tương tự ta tìm được $\omega_1 = \dfrac{9X}{2ml}$; $\omega_2 = \dfrac{-3X}{2ml}$.

4.16. – Momen quán tính đối với trục quay O :

$$I = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}mL^2$$

– Vận tốc góc của thanh OA trước khi đập vào vật B là ω_1 :

$$\frac{1}{2}I\omega_1^2 = \frac{mgL}{2} \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{L}} = 10 \text{ rad/s}$$

– Vận tốc góc của thanh và vật B sau khi vừa va chạm là ω_2 và v : Áp dụng các định luật bảo toàn momen động lượng và bảo toàn cơ năng trong thời gian tương tác ngắn :

$$\begin{cases} I\omega_2 + mvL = I\omega_1 \\ \dfrac{1}{2}I\omega_2^2 + \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}I\omega_1^2 \end{cases}$$

Từ đó suy ra : $\omega_2 = -\dfrac{\omega_1}{2} = -5$ rad/s và $v = \dfrac{1}{3}L(\omega_1 - \omega_2) = \dfrac{L}{2}\omega_1 = 1,5$ m/s.

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng và định lí động năng :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}I\omega_2^2 = \dfrac{mgL}{2}(1 - \cos\theta) \\ \dfrac{1}{2}mv^2 = \mu mgs \end{cases}$$

Từ đó suy ra : $\cos\theta = 0,75$ hay $\theta = 41,4^o$ và $s = 0,75$ m.

4.17. Vì A và B lăn không trượt lên nhau nên vận tốc dài của các điểm trên A và B luôn luôn bằng nhau :

$$v = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \qquad (1)$$

Khi hình trụ B áp sát vào hình trụ A lực tương tác (tại chỗ tiếp xúc) giữa A và B là $\vec{F}$.

Đối với B, lực $\vec{F}$ có momen $M_2 = Fr_2$, nhờ đó vận tốc góc của B tăng từ 0 đến ω_2. Theo phương trình chuyển động quay của vật quanh một trục ta có :

$$M = I\gamma \Rightarrow M = I\frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Áp dụng cho hình trụ B ta có :

$$I_2\Delta\omega = M_2\Delta t \Rightarrow \frac{m_2 r_2^2}{2}(\omega_2 - 0) = Fr_2\Delta t \Rightarrow \omega_2 = \frac{2F.\Delta t}{m_2 r_2} \qquad (2)$$

Đối với A, lực $\vec{F}$ có momen $M_2 = F.r_1$, do đó vận tốc góc của A giảm từ ω_0 đến ω_1. Tương tự như trên ta có :

$$\frac{m_1 r_1^2}{2}(\omega_0 - \omega_1) = Fr_1.\Delta t \text{ hay } \omega_0 - \omega_1 = \frac{2F.\Delta t}{r_1} \qquad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) rút ra :

$$\omega_1 = \frac{m_1\omega_0}{m_1 + m_2} \text{ và } \omega_2 = \frac{m_1\omega_0 r_1}{r_2(m_1 + m_2)} \qquad (4)$$

Lượng nhiệt tỏa ra bằng hiệu động năng ban đầu của A và động năng lúc sau của A và B :

$$Q = \frac{I_1\omega_0^2}{2} - \left(\frac{I_1\omega_1^2}{2} - \frac{I_2\omega_2^2}{2}\right) \Rightarrow Q = \frac{m_1 m_2 r_1 \omega_0^2}{4(m_1 + m_2)} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}W_{đ0}$$

($W_{đ0}$ là động năng ban đầu của A)

4.18. a) Các phương trình động lực học của các vật ngay sau khi cắt dây :

$$m_1 g + T = m_1 a_1 \qquad (1)$$

$$m_2 g - 2T = m_2 a_2 \qquad (2)$$

$$a_1 = 2a_2 \qquad (3)$$

Giải hệ (1), (2), (3) :

$$a_1 = \frac{(4m_1 + 2m_2)g}{4m_1 + m_2}$$

$$a_2 = \frac{(2m_1 + m_2)g}{4m_1 + m_2}$$

b) Ngay sau khi cắt dây : $m_1g + T_1 = m_1a_1$ (4)

$$m_2g - (T_1 + T_2) = m_2a_2 \quad (5)$$

$$(T_2 - T_1)R = I\frac{a_2}{R} \quad (6)$$

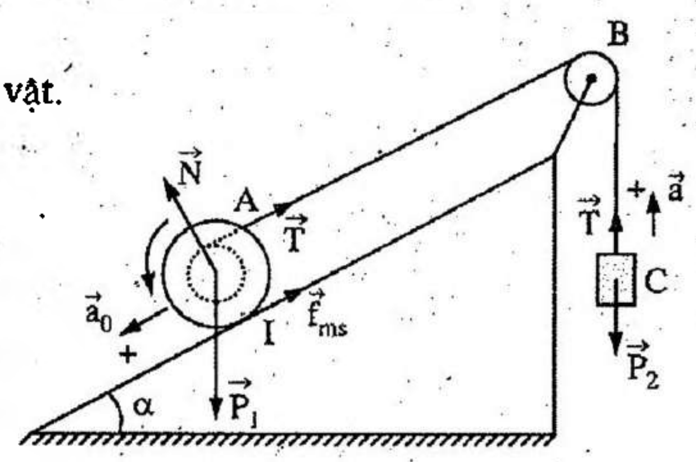
Với $I = \frac{1}{2}mR^2$; $a_1 = 2a_2$

Giải hệ, ta được : $a_1 = \frac{4(2m_1 + m_2)g}{8m_1 + 2m_2 + m}$; $a_2 = \frac{2(2m_1 + m_2)g}{8m_1 + 2m_2 + m}$

4.19. (Hình 4.10G).

a) Điều kiện của μ và gia tốc của các vật.

Khối trụ lăn không trượt, điểm tiếp xúc I giữa khối trụ và mặt nghiêng đứng yên tức thời và đóng vai trò làm tâm quay tức thời. Ta gọi gia tốc góc của khối trụ quanh trục của nó là ε, cũng là gia tốc góc quanh tâm quay tức thời I. Ta có :



Hình 4.10G

$$\begin{cases} a_0 = R.\varepsilon \\ a = \left(R + \frac{R}{2}\right).\varepsilon = \frac{3}{2}.a_0 \end{cases} \quad (1)$$

Mặt khác, phương trình định luật II Niu-tơn cho chuyển động tịnh tiến của các vật khi chiếu trên các trục với chiều dương như đã chỉ ra trên hình vẽ :

$$T - mg = ma$$

$$Mg\sin\alpha - T - f_{ms} = Ma_0 \quad (2)$$

Đối với chuyển động quay quanh trục của khối trụ :

$$f_{ms}.R - T.\frac{R}{2} = I.\varepsilon = \frac{1}{2}M.R^2\frac{a_0}{R} \Rightarrow T = 2.f_{ms} - M.a_0 \quad (3)$$

Từ (2) và (3) rút ra : $f_{ms} = \dfrac{Mg\sin\alpha}{3}$.

Và $a_0 = 2.\dfrac{2M\sin\alpha - 3m}{3(3m + 2M)}.g = \dfrac{4g}{39} > 0$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{2}a_0 = \frac{2M\sin\alpha - 3m}{(3m + 2M)}.g = \frac{2g}{13}$$

$$\Rightarrow T = mg + m.\frac{M\sin\alpha - 3m}{(3m + 2M)}.g = \frac{2 + \sin\alpha}{3m + 2M}Mmg = \frac{5}{26}Mg$$

Vậy hệ chuyển động theo đúng chiều ta chọn.

Điều kiện để khối trụ lăn không trượt :

$$f_{ms} = \frac{Mg\sin\alpha}{3} \le \mu.N = \mu.Mg\cos\alpha \Rightarrow \mu \ge \frac{\tan\alpha}{3} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

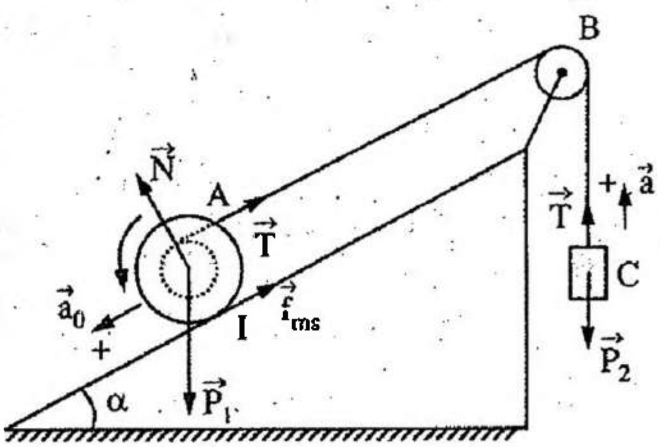
b) Gia tốc của các vật khi khối trụ trượt (Hình 4.11G)

Theo câu a), khối trụ sẽ vừa lăn vừa trượt khi có điều kiện :

$$\mu < \frac{\tan\alpha}{3} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

Lúc đó, lực ma sát có độ lớn bằng :

$$f_{ms} = \mu.N = \mu.Mg\cos\alpha$$



Hình 4.11G

Ta có quan hệ về gia tốc các vật :

$$a = a_0 + \varepsilon\frac{R}{2} \Rightarrow MR\varepsilon = 2Ma - 2Ma_0 \quad (4)$$

$$\varepsilon.R < a_0 \text{ (vừa lăn vừa trượt)}$$

Định luật II Niu-tơn cho chuyển động tịnh tiến của các vật :

$$T - mg = m.a \Rightarrow T = ma + mg$$

$$Mg\sin\alpha - T - f_{ms} = Ma_0 \qquad (5)$$

Và chuyển động quay quanh trục của khối trụ :

$$f_{ms}.R - T.\frac{R}{2} = I.\varepsilon = \frac{1}{2}M.R^2\varepsilon \Rightarrow M.R.\varepsilon = 2f_{ms} - T \qquad (6)$$

Kết hợp với (4) $\Rightarrow 2f_{ms} - T = 2Ma - 2Ma_0$

hay $2f_{ms} - ma - mg = 2Ma - 2Ma_0$ (7)

Cộng hai vế của (5) với nhau ta được :

$$Mg\sin\alpha - f_{ms} = m.a + mg + M.a_0 \qquad (8)$$

Nhân (8) với 2 rồi cộng với (7) :

$$2Mg\sin\alpha = 3ma + 3mg + 2Ma \Leftrightarrow 2Mg\sin\alpha - 3mg = 3ma + 2Ma$$

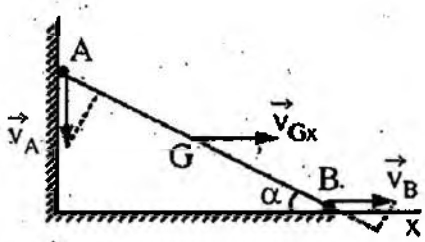
$$\Rightarrow a = \frac{2Mg\sin\alpha - 3mg}{3m + 2M} = \frac{2g}{13}\ ; T = mg + \frac{2mg}{13} = \frac{15mg}{13}\ ;$$

$$a_0 = \frac{Mg\sin\alpha - f_{ms} - m.a - mg}{M} = \frac{7 - 13\sqrt{3}\mu}{26}g > \frac{4g}{39}\ ;$$

$$\varepsilon = \frac{2f_{ms} - T}{MR} = \frac{2\mu Mg\cos\alpha - \dfrac{15mg}{13}}{MR} = \frac{(13\sqrt{3}\mu - 3)g}{13R}.$$

4.20. Ở thời điểm mà quả cầu A không tựa vào tường nữa, thanh AB làm với phương ngang Ox một góc α. Gọi các vận tốc của A, B lúc đó là $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$. Lúc đó A đã tụt một đoạn $l(1 - \sin\alpha)$.

Định luật bảo toàn cơ năng cho :



Hình 4.12G

$$\frac{m}{2}(v_A^2 + v_B^2) = mgl(1 - \sin\alpha)$$

$$v_A^2 + v_B^2 = 2gl(1 - \sin\alpha) \qquad (1)$$

AB là thanh cứng nên hình chiếu các vận tốc $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ xuống AB bằng nhau (Hình 4.12G) :

$$v_A\sin\alpha = v_B\cos\alpha \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta có : $v_B^2 = 2gl(\sin^2\alpha - \sin^3\alpha)$ (3)

Giai đoạn đầu, khi A chưa rời tường thì lực nằm ngang duy nhất gây ra cho khối tâm G của thanh gia tốc và vận tốc nằm ngang v_{Gx} là phản lực N của tường có phương nằm ngang, v_{Ax} tăng dần.

Lúc A rời tường thì N = 0, v_{Ax} không tăng nữa tức là đạt cực đại.

Do đó $v_B = 2v_{Ax}$ cũng đạt cực đại. Để tìm cực đại của v_B, ta xét hàm :

$$y = \sin^2\alpha - \sin^3\alpha = \sin^2\alpha(1 - \sin\alpha)$$

Viết lại dưới dạng $y = 4.\frac{\sin\alpha}{2}.\frac{\sin\alpha}{2}.(1 - \sin\alpha)$.

Tổng 3 thừa số ở cuối vế phải bằng 1, không đổi, nên tích của chúng là cực đại khi chúng bằng nhau.

$\frac{\sin\alpha}{2} = 1 - \sin\alpha$, $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $\alpha = 41,8^o$. Thay vào (3) ta được $v_B = \sqrt{\frac{8gl}{27}}$.

4.21. Áp dụng định luật II Niu-tơn cho chuyển động tịnh tiến của khối tâm G của quả cầu và chiếu phương trình lên phương ngang :

$$ma = F_{ms} = -\mu mg \Rightarrow a = -\mu g$$

Vận tốc tức thời G : $v_G = v_0 + at = v_0 - \mu gt$ (1)

Lực ma sát gây ra chuyển động quay của quả cầu quanh trục đi qua khối tâm với gia tốc góc γ theo phương trình :

$$M = I\gamma \Rightarrow \mu mgR = \frac{2}{5}mR^2.\gamma \Rightarrow \gamma = \frac{5\mu g}{2R} = \text{hằng số}$$

Suy ra vận tốc góc : $\omega = \gamma t = \frac{5\mu g}{2R}t$ (2)

Điểm tiếp xúc giữa quả cầu và mặt bàn có vận tốc đối với mặt bàn bằng :

$$v = v_G - R\omega \qquad (3)$$

Ban đầu ω còn nhỏ, v_G còn lớn nên v > 0 : quả cầu vừa trượt vừa lăn. Đến khi $v_G = R\omega$ thì v = 0 nghĩa là quả cầu lăn không trượt. Điều đó xảy ra ở thời điểm t_1, được xác định bởi :

$$v_G(t_1) = R\omega(t_1) \Rightarrow v_0 - \mu gt_1 = \frac{5}{2}\mu gt_1$$

Suy ra $$t_1 = \frac{2v_0}{7\mu g} \quad (4)$$

Lúc đó vận tốc dài của quả cầu, tức là vận tốc của G có giá trị :

$$v_G(t_1) = v_{G1} = \frac{5}{7}v_0 = 1{,}25 \text{ m/s}$$

Và kể từ lúc đầu, quả cầu đã đi được quãng đường s, xác định theo công thức :

$$v_{G1}^2 - v_0^2 = 2as$$

Suy ra : $s = \frac{12v_0^2}{49\mu g} = 37{,}5$ cm.

4.22. Áp dụng định lí động năng :

$$W_d - W_{d0} = \Sigma A \quad (1) \quad \text{với } W_{d0} = 0$$

$$W_d = W_{dOA} + W_{d1}$$

Trong đó :

$$W_{dOA} = \frac{1}{2}I\omega^2 \text{ với } I = \frac{ml^2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad W_{dOA} = \frac{m(R_1 + R_2)^2.\omega^2}{6}$$

$$W_{d1} = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}I_A\omega_1^2 \text{ với } I_A = \frac{1}{2}m_1R_1^2$$

$$\Rightarrow \quad W_{d1} = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{m_1R_1^2\omega_1^2}{4}$$

Vậy động năng của hệ là :

$$W_d = \frac{m(R_1 + R_2)^2}{3}\frac{\omega^2}{2} + \frac{m_1R_1^2}{2}\frac{\omega_1^2}{2} + \frac{m_1v_A^2}{2}$$

• Tính ω_1 và v_A theo ω :

$$\omega_1 = \frac{R_1 + R_2}{R_1}\omega \; ; \; v_A = (R_1 + R_2)\omega$$

Thay ω_1 và v_A vào biểu thức W_d, ta được :

$$W_d = \frac{1}{6}(2m + 3m_1)(R_1 + R_2)^2 \frac{\omega^2}{2} \quad (2)$$

• Tính ΣA theo ω :

$$\Sigma A = M_1\varphi_1 - M_2\varphi_2 = \left(M_1 - M_2\frac{R_1 + R_2}{R_1}\right)\varphi_1.$$

Đặt : $\left(M_1 - M_2\frac{R_1 + R_2}{R_1}\right) = M$ ta được : $\Sigma A = M\varphi_1$ (3)

Thay (2), (3) vào (1) ta có : $\frac{1}{6}(2m + 3m_1)(R_1 + R_2)^2\frac{\omega^2}{2} = M\varphi_1.$

Suy ra : $\omega = \frac{2}{R_1 + R_2}\sqrt{\frac{3M}{2m + 3m_1}\varphi_1}$.

Tay quay nhanh dần đều với gia tốc góc :

$$\varepsilon = \frac{6M}{(2m + 3m_1)(R_1 + R_2)^2}.$$

4.23. a) Động năng của hệ thùng xe và hai bánh xe :

$$W_d = \frac{1}{2}Mv^2 + 2\left(\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2\right)$$

Với : $\omega = \frac{v}{R}$ và $I = m\delta^2$ nên :

$$W_d = \frac{1}{2}\left[M + 2m\left(\frac{\delta^2}{R^2} + 1\right)\right]v^2 \quad (1)$$

Công nguyên tố của lực bằng : $dA = Fds = Fv.dt$ (2)

Áp dụng định lí động năng : $\frac{dW_d}{dt} = \frac{dA}{dt}$.

Ta có : $\frac{dW_d}{dt} = \left[M + 2m\left(\frac{\delta^2}{R^2} + 1\right)\right]va = Fv$.

Thùng xe chuyển động nhanh dần đều với gia tốc không đổi là :

$$a = \frac{F}{M + 2m\left(\frac{\delta^2}{R^2} + 1\right)} = \text{const}$$

b) Vận tốc thùng xe theo quãng đường đi được s :

Áp dụng : $2as = v^2 (v_0 = 0)$ ta được :

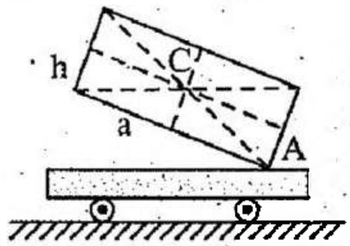
$$v = \sqrt{\frac{2Fs}{M + 2m\left(\frac{\delta^2}{R^2} + 1\right)}}$$

4.24. (Hình 4.13G)

a) Do sự va chạm tác dụng vào khối hộp ngay tại A, do đó momen động lượng đối với mấu A được bảo toàn.

$$\vec{r}_A x(m\vec{v}) = I_A\vec{\omega}_1$$

$$\Rightarrow mvh = \frac{13}{12}m(a^2 + h^2)\omega_1 \qquad (1)$$



Hình 4.13G

Do đó khối hộp quay quanh A với vận tốc góc ω_1 :

$$\omega_1 = \frac{12hv}{13(a^2 + h^2)}$$

b) Sau va chạm khối hộp quay chậm dần do tác dụng của trọng lực.

Khối hộp sẽ lật nhào khi trọng tâm C của nó đã lên vị trí cao nhất mà vận tốc góc của nó vẫn còn khác 0.

Áp dụng định lí động năng cho khối hộp ngay sau va chạm cho đến khi khối tâm C ở vị trí cao nhất :

$$I_A(\omega_1^2 - \omega^2) = 2mg(H - h) \text{ với } H^2 = a^2 + h^2$$

$$\Rightarrow I_A\omega_1^2 = 2mg(H - h) \geq 0 \text{ (lật nhào)}$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 \geq \frac{2mg\left(\sqrt{a^2 + h^2} - h\right)}{I_A} = \frac{2mg\left(\sqrt{a^2 + h^2} - h\right)}{\frac{13}{12}m(a^2 + b^2)} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$v \geq \sqrt{\frac{13(a^2 + h^2)}{6h^2}g\left(\sqrt{a^2 + h^2} - h\right)}$$

$$v_{min} = \sqrt{\frac{13(a^2 + h^2)}{6h^2}g\left(\sqrt{a^2 + h^2} - h\right)}$$

Để khối hộp không bị lật nhào thì cần : $v < v_{min}$.

4.25. a) Ta đặt vấn đề ngược lại. Tìm độ cao ban đầu tối thiểu Δl của lò xo để khối B không bị nâng lên khi đốt dây. Khi đó chỉ có A chuyển động lên xuống (dao động) quanh một vị trí cân bằng xác định. Tìm độ co của lò xo khi A ở vị trí cân bằng, tại đó trọng lực của A cân bằng với lực đàn hồi của lò xo :

$$P = F_{dh} \Rightarrow mg = k\Delta l_0 \Rightarrow \Delta l_0 = \frac{mg}{k} \qquad (1)$$

Lực đàn hồi của lò xo kéo B lên đạt giá trị cực đại khi A ở vị trí cao nhất khả dĩ, cách vị trí cân bằng của nó một khoảng a. Khi đó ta có :

$$k(a - \Delta l_0) = mg, \text{ suy ra } a = \frac{mg}{k} + \Delta l_0 = \frac{2mg}{k} \qquad (2)$$

Vậy độ co cực đại của lò xo ứng với A ở vị trí thấp nhất là :

$$\Delta l = \Delta l_0 + a = \frac{3mg}{k}$$

Như vậy là nếu $\Delta l < \frac{3mg}{k}$ thì B không bị nâng lên. Ngược lại muốn nâng được B lên khỏi mặt đất thì độ co ban đầu của lò xo phải bằng $\Delta l \geq \frac{3mg}{k}$ (3).

b) Độ co ban đầu của lò xo $\Delta l = \frac{7mg}{k} > \frac{3mg}{k}$, nghĩa là B được nâng khỏi mặt đất khi đốt dây nối. Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng để tìm vận tốc v_0 của A khi B bắt đầu rời khỏi sàn :

$$\frac{k}{2}\left(\frac{7mg}{k}\right)^2 = \frac{k}{2}\left(\frac{3mg}{k}\right)^2 + \frac{mv_0^2}{2} + mgh \qquad (4)$$

trong đó h là độ cao của A so với lúc đầu và bằng :

$$h = \frac{7mg}{k} - \frac{3mg}{k} = \frac{4mg}{k} \qquad (5)$$

Từ đó suy ra : $v_0^2 = \frac{32mg^2}{k}$.

Kí hiệu v_G là vận tốc của khối tâm G của hệ khi B bắt đầu rời khỏi sàn nhà ta có :

$$v_G = \frac{mv_0}{m+m} = \frac{v_0}{2}$$

Vì lực đàn hồi là nội lực nên không ảnh hưởng đến chuyển động của G, và G chuyển động sau đó như một vật được ném thẳng đứng lên cao với vận tốc v_G. Nhờ đó khối tâm G được nâng thêm một độ cao bằng :

$$h_G = \frac{v_G^2}{2g} = \frac{v_0^2}{8g} = \frac{4mg}{k}$$

Vì khi B bắt đầu rời khỏi sàn, A đã được nâng lên một đoạn h, nên khi đó khối tâm G cũng được nâng lên một đoạn $\frac{h}{2}$.

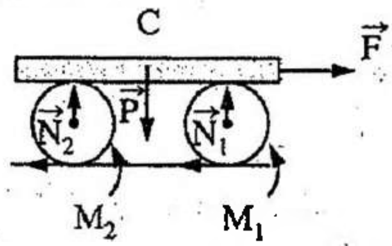
Như vậy độ cao tổng cộng được nâng lên của khối tâm G (so với khi chưa đốt dây nối) bằng :

$$H = \frac{4mg}{k} + \frac{2mg}{k} = \frac{6mg}{k}$$

4.26. (Hình 4.14G)

Áp dụng định lí biến thiên động năng dạng vi phân : $dW_đ = \Sigma dA$ (1)

Động năng của hệ : $W_đ = \frac{1}{2}mv^2 + 2\left(\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}I\omega^2\right)$



Hình 4.14G

v là vận tốc tấm nặng, v_1 là vận tốc của trục con lăn :

$$v_1 = \frac{v}{2};\ \omega = \frac{v_1}{r} = \frac{v}{2r};\ I = \frac{1}{2}m_1r^2$$

Suy ra : $W_đ = \frac{4m + 3m_1}{4}\frac{v^2}{2} \Rightarrow dT = \frac{4m + 3m_1}{4}vdv$ (2)

Công suất của các lực sinh công : lực $\vec{F}$, các ngẫu lực ma sát lăn có các momen là $M_1 = \mu N_1 r$; $M_2 = \mu N_2 r$

$$\Sigma dA = Fds - \mu(m + 2m_1)grd\varphi$$

Với $d\varphi = \frac{ds}{r}$; $ds = vdt$

$$\Sigma dA = \left[F - \mu(m + 2m_1)g\right]vdt \qquad (3)$$

Gia tốc tấm nặng : $a = \frac{dv}{dt}$ (4)

Từ (2), (3) và (4) suy ra gia tốc chuyển động của lăng trụ là :

$$a = 4\frac{F - \mu(m + 2m_1)g}{4m + 3m_1}$$

Phương trình chuyển động của khối tâm hệ :

$$ma + 2m_1a_1 = F - \Sigma F_{ms} \text{ với } a_1 = \frac{a}{2} \Rightarrow \Sigma F_{ms} = F - (m + m_1)a \qquad (5)$$

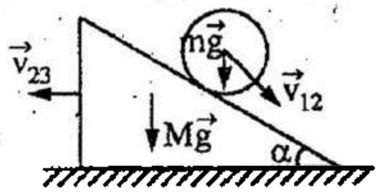
Thay (4) vào (5) ta có lực ma sát tổng cộng là :

$$\Sigma F_{ms} = \frac{3m + 2m_1}{4m + 3m_1}F - \frac{m + m_1}{4m + 3m_1}\mu(m + 2m_1)g$$

4.27. (Hình 4.15G)

Áp dụng định lí biến thiên động năng dạng đạo hàm :

$$\frac{dW_đ}{dt} = N_{(m\vec{g})}$$



Hình 4.15G

Động năng của hệ :

$$W_đ = \frac{1}{2}Mv_{23}^2 + \frac{1}{2}m(\vec{v}_{12} + \vec{v}_{23})^2 + \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Với : $(\vec{v}_{12} + \vec{v}_{23})^2 = (v_{12}.\cos\alpha - v_{23})^2 + (v_{12}.\sin\alpha)^2$

$$= v_{12}^2 + v_{23}^2 - 2v_{12}v_{23}.\cos\alpha$$

$$I = \frac{1}{2}mr^2 \; ; \; \omega = \frac{v_{12}}{r}$$

Ta có : $W_đ = \frac{1}{2}(M + m)v_{23}^2 + \frac{3}{4}mv_{12}^2 - mv_{12}v_{23}.\cos\alpha$

$$\Rightarrow \frac{dW_đ}{dt} = (M + m)v_{23}a_{23} + \frac{3}{2}mv_{12}a_{12} - mv_{23}a_{12}.\cos\alpha - mv_{12}a_{23}.\cos\alpha \quad (2)$$

Công suất của trọng lực : $N_{(m\vec{g})} = mg\frac{dh}{dt} = mgv_{12}.\sin\alpha$ (3)

Thay (2), (3) vào (1) ta được :

$$(M + m)v_{23}a_{23} + \frac{3}{2}mv_{12}a_{12} - (mv_{23}a_{12} + mv_{12}a_{23})\cos\alpha = mgv_{12}.\sin\alpha \quad (4)$$

Định lí chuyển động của khối tâm hệ :

$\Sigma F_x = 0$ nên vị trí khối tâm không đổi và vì $v_0 = 0$ nên :

$$-M.a_{23} + m(a_{12}.\cos\alpha - a_{23}) = 0 \quad (5)$$

$$\Rightarrow v_{23} = \frac{m.\cos\alpha}{M + m}v_{12} \quad (6)$$

Thay (6) vào (4) và giải ra được :

$$a_{12} = \frac{2(M+m)g.\sin\alpha}{3(M+m) - 2m.\cos^2\alpha}$$

$$a_{23} = \frac{mg.\sin 2\alpha}{3(M+m) - 2m.\cos^2\alpha}$$

4.28. Không có ngoại lực nào nên momen động lượng của hệ được bảo toàn.

$$(I_0 + I)\omega_0 = \text{const} \quad (1)$$

Nếu cho động cơ chạy làm bánh đà quay theo chiều của ω_0 nhưng nhanh hơn, tới vận tốc góc mới $\omega' > \omega_0$ thì con tàu phải giảm vận tốc góc, có $\omega'_0 < \omega_0$ để bảo đảm.

$$I_0\omega'_0 + I\omega' = (I_0 + I)\omega_0 \quad (2)$$

Con tàu dừng quay tức là $\omega'_0 = 0$ thì theo (2) : $\omega' = \frac{I_0 + I}{I}\omega_0$ (3)

Vậy cần làm cho vận tốc góc của bánh đà tăng một lượng :

$$\omega' - \omega_0 = \left(\frac{I_0 + I}{I} - 1\right)\omega_0 = \frac{I_0}{I}\omega_0$$

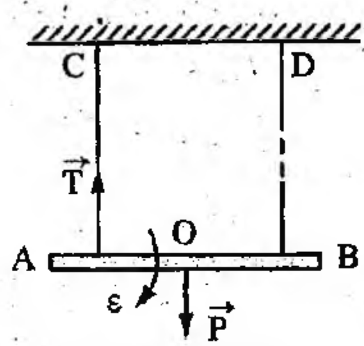
Công của động cơ bằng hiệu các động năng :

$$A = W'_d - W_d = \frac{I}{2}\omega^2 - \frac{I + I_0}{2}\omega_0^2$$

Thay (3) vào ta được :

$$A = \frac{I}{2}\left(\frac{I_0 + I}{I}\right)^2 \omega_0^2 - \frac{I + I_0}{2}\omega_0^2 = \frac{I_0(I_0 + I)}{2I}\omega_0^2.$$

4.29. Sau khi một dây đứt, giả thiết dây kia vẫn căng. Khi ấy thanh AB chuyển động song phẳng, còn đầu mút A chuyển động theo đường tròn (Hình 4.16G). Phương trình chuyển động của thanh ngay khi dây BD đứt :



Hình 4.16G

$$\begin{cases} m x''_0 = P_x + T_x = 0 & (1) \\ m y''_0 = P - T & (2) \\ I_0 \varepsilon = T.a & (3) \end{cases}$$

O là trọng tâm thanh AB.

Gia tốc khối tâm O đối với hệ quy chiếu gắn với mặt đất : $\vec{a}_0 = \vec{a}_A + \vec{a}_{0A}$.

Điểm A bắt đầu chuyển động tròn, vậy : $\vec{a}_A = \vec{a}_A^t + \vec{a}_A^n$.

Trong đó : • $\vec{a}_A^n = \dfrac{v_A^2}{OA} = 0$ vì $v_A = 0$

• $\vec{a}_A^t = \dfrac{dv_a}{dt} \neq 0$

Suy ra : $\vec{a}_A = \vec{a}_A^t$: hướng theo AB.

• $\vec{a}_{OA} = \vec{a}_{OA}^t + \vec{a}_{OA}^n$

Trong đó : $a_{OA}^n = \dfrac{v_{CA}^2}{OA} = OA.\omega_{AB}^2 = 0$ vì $\omega_{AB} = 0$

$a_{OA}^t = OA.\varepsilon_{AB} \neq 0$

Suy ra : $\vec{a}_{OA} = \vec{a}^t_{OA}$ hướng theo trục Ay.

Vậy (2) và (3) viết thành :

$$\begin{cases} ma\varepsilon_{AB} = P - T \quad (4) \quad \text{vì } y'' = a^t_{OA} = a\varepsilon_{AB} \\ \dfrac{ma^2}{3}\varepsilon_{AB} = Ta \quad (5) \quad \text{vì } I_0 = \dfrac{ma^2}{3} \end{cases}$$

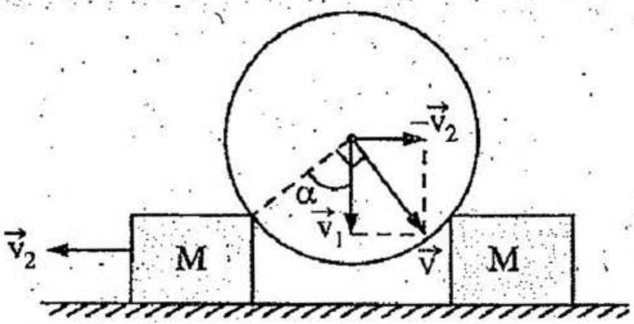
Giải hệ (4) và (5) ta được : $T = \dfrac{P}{4} = \dfrac{mg}{4}$.

4.30. (Hình 4.17G)

– Xét thời điểm quả cầu rơi xuống khối lập phương, ta cần xác định góc α.

Liên hệ vận tốc :

$$v_1\cos\alpha = v_2\sin\alpha \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \tan\alpha$$



Hình 4.17G

– Bảo toàn năng lượng :

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + 2\frac{1}{2}mv_2^2 = mgR(1 - \cos\alpha)$$

$$v_1^2\left(1 + 2\frac{1}{\tan^2\alpha}\right) = 2gR(1 - \cos\alpha)$$

$$\Rightarrow v_1^2 = \frac{2gR(1 - \cos\alpha)\tan^2\alpha}{2 + \tan^2\alpha}$$

Để tìm góc O ở thời điểm rời nhau, có thể dùng hai cách :

– *Cách 1 :* Tìm $\vec{v}_2$ rồi xác định cực đại $\vec{v}_2$.

$$\Rightarrow v_2^2 = \frac{v_1^2}{\tan^2\alpha} = \frac{2gR(1 - \cos\alpha)}{2 + \tan^2\alpha} = 2gR\frac{(1 - \cos\alpha)\cos^2\alpha}{1 + \cos^2\alpha}$$

Lấy đạo hàm theo $\cos\alpha$ và cho đạo hàm bằng 0 ta nhận được phương trình :

$$\cos^3\alpha + 3\cos\alpha - 2 = 0.$$

– *Cách 2 :* Trong HQC chuyển động với vận tốc v_2 thì quả cầu chuyển động tròn quanh điểm tiếp xúc, tại thời điểm rời nhau thì hệ quy chiếu (HQC) trở thành HQC quán tính, lúc này phần trọng lực đóng vai trò lực hướng tâm :

$$\frac{mv^2}{R} = mg\cos\alpha$$

$$v = \frac{v_1}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{mv_1^2}{R\sin^2\alpha} = mg\cos\alpha \ (*)$$

Thay v_1 bằng biểu thức ở trên vào (*) được phương trình :

$$v_1^2 = \frac{2gR(1-\cos\alpha)\tan^2\alpha}{2+\tan^2\alpha} = gR\cos\alpha.\sin^2\alpha$$

$\Leftrightarrow \cos^3\alpha + 3\cos\alpha - 2 = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0{,}596$

Thay vào (*) : $v_1^2 = gR\cos\alpha.\sin^2\alpha = gR\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)$.

Còn quả cầu cách mặt đất : $h = H - R(1-\cos\alpha)$.

• Biện luận :

– Nếu $H < R(1-\cos\alpha) \approx 0{,}404\,R$ thì quả cầu chạm đất trước khi rời các hình lập phương, lúc chạm đất thì góc U thoả mãn :

$$H = R(1-\cos\alpha) \Rightarrow 1-\cos\varphi = \frac{H}{R}.$$

Vận tốc ngay trước chạm đất xác định theo định luật bảo toàn năng lượng và liên hệ vận tốc :

$$v_1^2 = 2gR\frac{1+\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha}(1-\cos\alpha) = 2gR\frac{1+\cos^2\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{2g\frac{2R^2+H^2-2RH}{(2R-H)H^2}}$$

– Nếu $H > R(1-\cos\alpha) \approx 0{,}404R$ thì sau khi rơi, quả cầu chuyển động rơi tự do :

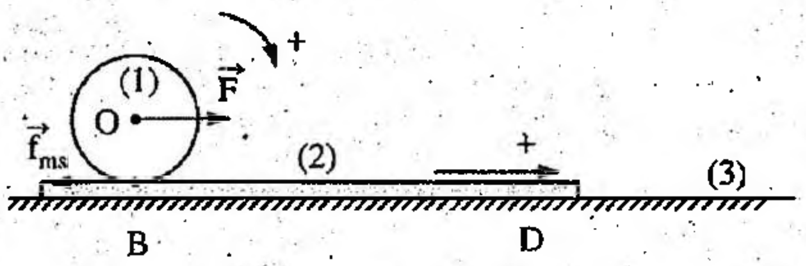
$$v_f = \sqrt{v_1^2+2gH} = \sqrt{2gH\left(1-0{,}212\frac{R}{H}\right)}.$$

4.31. a) Khối lượng của vật : $\int_0^R \rho dV = m$.

Momen quán tính : $I_0 = \int_0^R \frac{2}{3}r^2 dM = \frac{2}{3}\int_0^R r^2 \rho dV = \frac{44}{105}mR^2$.

b) Kí hiệu vật là 1, tấm gỗ là 2, mặt bàn là 3 (Hình 4.18G).

Hình 4.18G



Xét hệ quy chiếu gắn với tấm gỗ. Vật chịu tác dụng của lực quán tính hướng về phía D : $\vec{F} = -m\vec{a}$ và có độ lớn F = ma. Xét trục quay tức thời đi qua B. Chọn các chiều chuyển động là dương.

$I_B = I_0 + mR^2 = \frac{149}{105}mR^2$, $FR = I_B\gamma$, $maR = \frac{149}{105}mR^2\gamma$, $\gamma = \frac{105a}{149R}$

$\Rightarrow a_{12} = \gamma R = \frac{105a}{149}$

(γR là gia tốc tiếp tuyến đối với tâm quay B, a_{12} là gia tốc tâm O của vật đối với tấm gỗ).

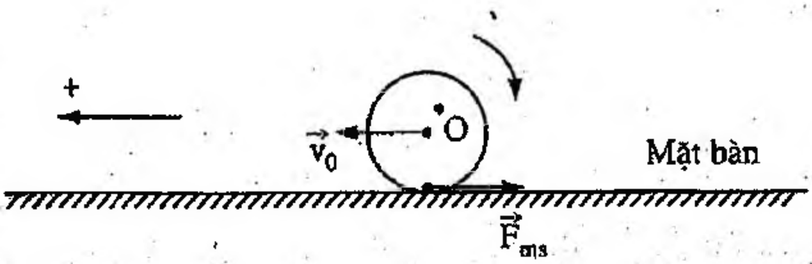
Thời gian để vật chuyển động trên tấm gỗ cho đến lúc rời xe :

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a_{12}}} = \sqrt{\frac{298l}{105a}} \approx 1{,}68\sqrt{\frac{l}{a}}$$

Xét hệ quy chiếu gắn với mặt bàn. Chọn chiều chuyển động của tấm gỗ là dương. Gia tốc của vật đối với mặt bàn là $\vec{a}_{13}$, gia tốc của vật đối với tấm gỗ là $\vec{a}_{12}$, gia tốc của tấm gỗ đối với mặt bàn là $\vec{a}_{23}$: $\vec{a}_{13} = \vec{a}_{12} + \vec{a}_{23}$,

$$a_{13} = -a_{12} + a_{23} = a - a_{12} = \frac{44a}{149} > 0$$

Trong lúc vật lăn về phía sau của tấm gỗ, vật vẫn bị "kéo" về phía trước so với mặt bàn với gia tốc : $a_{13} = \frac{44a}{149} \approx 0{,}3a$ (Hình 4.19G).



Hình 4.19G

Vận tốc theo phương ngang của vật khi chạm mặt bàn bằng vận tốc theo phương ngang của nó khi rời khỏi tấm gỗ :

$$v_0 = v_{13} = a_{13}t = \frac{44}{149}\sqrt{\frac{298al}{105}} \approx 0,5\sqrt{al}$$

c) Vận tốc của vật theo phương ngang đối với tấm gỗ được tính bằng công thức :

$$v_{12} = a_{12}t = \frac{105a}{149}\sqrt{\frac{298l}{105a}} = \frac{105}{44}v_0$$

Vận tốc góc của vật có độ lớn : $\omega_0 = \dfrac{v_{12}}{R} = \dfrac{105}{149R}\sqrt{\dfrac{298al}{105}} = \dfrac{105}{44}.\dfrac{v_0}{R}$.

d) Chọn thời điểm vật chạm mặt bàn là thời điểm ban đầu.

Các chiều dương như hình vẽ. Chúng ta có nhận xét là ngay từ thời điểm này vật đã lăn có trượt, vì $v_0 \neq R\omega_0$. Giả sử đến thời điểm τ nào đó vật chuyển động tịnh tiến với vận tốc v' và quay với vận tốc góc ω'.

– Sử dụng các định lí biến thiên động lượng và momen động lượng :

$$\int_0^\tau F_{ms}dt = m(v' - v_0)$$

$$\int_0^\tau F_{ms}Rdt = I_0(\omega' - \omega_0) \Rightarrow I_0(\omega' - \omega_0) = mR(v' - v_0) \ (*)$$

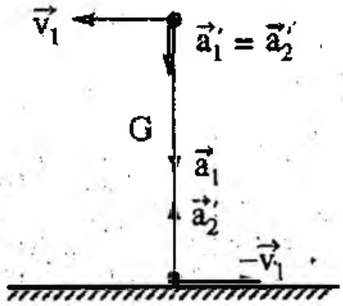
Thay biểu thức của I_0 và ω_0 vào (*), ta thu được :

$$v' = \frac{44}{105}R\omega' \Rightarrow \begin{cases} v' \neq R\omega' \text{ khi } v' \neq 0, \omega' \neq 0 \\ v' = R\omega' \text{ khi } v' = 0, \omega' = 0 \end{cases}$$

Lúc vật dừng lại, đồng thời cũng là lúc vật không quay nữa. Vậy vật lăn có trượt trên suốt quá trình chuyển động trên mặt bàn.

e) Sử dụng định lí biến thiên động năng : $s = \dfrac{v_0^2}{2\mu g} = \dfrac{1936a}{154645\mu g}l.$

4.32. (Hình 4.20G).



Hình 4.20G

Chuyển động của hệ gồm chuyển động của khối tâm G và chuyển động của viên bi quanh G.

– Khối tâm G chuyển động thẳng đứng (tức là vận tốc đầu thẳng đứng).

– Viên bi dưới chuyển động thẳng trên mặt phẳng nằm ngang, viên bi trên chuyển động theo đường cong.

• Ở vị trí thẳng đứng của sợi chỉ, gia tốc viên bi trên $\vec{a}_1$ và sức căng dây là $\vec{T}$

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}_1 \Rightarrow T = ma_1 - mg \qquad (1)$$

• Ở vị trí càng cao, sức căng càng nhỏ. Để sợi chỉ luôn luôn căng thì $T > 0$.

• Để viên bi dưới không rời mặt phẳng thì $T < mg$.

$$0 < T < mg \qquad (2)$$

Tính a_1 : $\vec{a}_m = \vec{a}_G + \vec{a}_{\frac{m}{G}}$

– Với bi trên : $\vec{a}_1 = \vec{a}_0 + \vec{a}_1' \Rightarrow a_1 = a_0 + a_1'$

– Với bi dưới : $\vec{a}_2 = \vec{a}_0 + \vec{a}_2' \Rightarrow \vec{a}_0 + \vec{a}_2' = \vec{0} \Rightarrow a_0 = a_2'$

(lực theo phương ngang bằng hệ)

$\Rightarrow a_1 = a_1' + a_2' = 2a_1' = \dfrac{4mv_1^2}{l}$. Mặt khác ta có : $\dfrac{mv_0^2}{2} - 2\dfrac{mv_1^2}{2} = mgl$

Từ đó $v_1^2 = \dfrac{v_0^2}{2} - gl \Rightarrow a_1 = \dfrac{2v_0^2}{l} - 4g \qquad (3)$

Từ (1), (2) và (3) suy ra điều kiện của vận tốc v_0 : $2{,}5gl < v_0^2 < 3gl$.

4.33. – Momen quán tính của thanh đối với trục O : $I_0 = \dfrac{1}{3}Ml^2$.

– Theo định luật bảo toàn cơ năng ta có : $\dfrac{1}{2}I_0\omega^2 = Mg\dfrac{l}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}.(\frac{1}{3}Ml^2)\omega^2 = Mg\frac{l}{2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

– Áp dụng định luật bảo toàn momen động lượng cho hệ khi va chạm, ta có :

$$I_0\omega = I_0\omega' + mv_1'l$$

(ω' là tốc độ góc của thanh sau khi va chạm, v_1' là vận tốc của đầu B sau va chạm)

$$\frac{1}{3}Ml^2\omega = \frac{1}{3}Ml^2\omega' + mv_1'l \Rightarrow \omega = \omega' + \frac{3m}{M}.\frac{v_1'}{l} \qquad (1)$$

a) Nếu va chạm giữa vật là hoàn toàn đàn hồi, động năng được bảo toàn :

$$\frac{1}{2}I_0\omega^2 = \frac{1}{2}I_0\omega'^2 + \frac{1}{2}mv_1'^2 \Rightarrow \omega^2 = \omega'^2 + \frac{3m}{M}.\frac{v_1'^2}{l} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $v_1' = \dfrac{2\omega l}{1+3\dfrac{m}{M}}$ (a)

$$\omega' = \frac{\omega(M-3m)}{M+3m} \qquad (b)$$

Biện luận :

Từ (b) : Khi M = 3m thì : $\omega' = 0$, $v_1' = \omega l = \sqrt{3gl}$, sau va chạm thanh đứng yên.

Vật B chuyển động như một chất điểm được ném ngang với vận tốc v_1'.

b) Nếu va chạm mềm : Khi đó : $v_1' = \omega' l$.

Thay vào (1) : $\dfrac{v_1'}{l} = \omega' = \dfrac{\omega}{1+3\dfrac{m}{M}} = \dfrac{\sqrt{3\dfrac{g}{l}}}{1+3\dfrac{m}{M}}$

Nhận xét : Sau va chạm, v_1' bằng nửa giá trị của v_1' ở trường hợp trên.

4.34. Chuyển động của thanh gồm hai giai đoạn :

– Giai đoạn 1 : Thanh từ vị trí thẳng đứng được truyền vận tốc góc ω_0 quay quanh trục cố định qua A và kết thúc khi thanh ở vị trí nằm ngang và liên kết tại A bị mất.

– Giai đoạn 2 : Liên kết tại A bị mất và thanh chuyển động song phẳng.

Lưu ý : Điều kiện của cuối giai đoạn đầu chính là điều kiện đầu của giai đoạn sau.

Áp dụng định lí động năng : $\frac{1}{2}I_A\omega_1^2 - \frac{1}{2}I_A\omega_0^2 = -Pa$ (1)

với $I_A = \frac{4}{3}ma^2$

Từ (1) $\Rightarrow \omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{3g}{2a}$ (2)

Trong giai đoạn 2 : Thanh chuyển động song phẳng nên phương trình chuyển động có dạng : $ma_{Gx} = 0$; $ma_{Gy} = -mg$; $I_G\theta'' = 0$ (3)

với điều kiện đầu : $x_G^0 = 0$; $y_G^0 = 0$; $y_G^{0'} = a\omega_1$; $\theta^o = 0$; $\theta^o = \omega_1$.

Lấy tích phân của (3) ta nhận được :

$$x_G = a \; ; \; y_G = -\frac{1}{2}gt^2 + a\omega_1 t \; ; \; \theta = \omega_1 t \quad (4)$$

Thanh chạm sàn ở vị trí thẳng đứng nếu các điều kiện sau được thoả mãn :

$$\begin{cases} y_G = a \\ \theta = (2k+1)\frac{\pi}{2}; k = 0, 1, 2, 3... \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}gt^2 + a\omega_1 t = a \\ (2k+1)\frac{\pi}{2} = \omega_1 t \end{cases} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{g}{4a}\left[6 + \frac{\pi^2(2k+1)^2}{(2k+1)\pi + 2}\right].$$

Biện luận :

Giả sử thanh chạm sàn ở vị trí thẳng đứng khi :

– Quay được một vòng (kể từ vị trí thẳng đứng lúc đầu) k = 1 :

$$\omega_0^2 = \frac{g}{4a}\left[6 + \frac{9\pi^2}{3\pi + 2}\right]$$

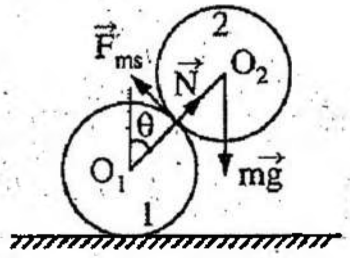
– Từ vị trí nằm ngang thang rơi xuống ngay và trở lại vị trí đầu : k = 0

$$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{g}{4a}\left[6 + \frac{\pi^2}{\pi + 2}\right].$$

4.35. Áp dụng định luật II Niu-tơn cho sự trượt của quả cầu 2 trên quả cầu 1, và cho sự quay của quả cầu 2 quanh trục O_2 (Hình 4.21G), ta có :

$$\frac{m(2r\dot{\theta})^2}{2r} = mg\cos\theta - N \qquad (1)$$

$$\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\ddot{\theta} = F_{ms}.r \qquad (2)$$



Hình 4.21G

với m là khối lượng quả cầu ;

$\dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$; $\ddot{\theta} = \dfrac{d\dot{\theta}}{dt}$; $F_{ms} = \mu N$, với N là phản lực pháp tuyến tác dụng lên quả cầu 2.

Từ (1) và (2), ta có : $N = mg\cos\theta - 2mr\dot{\theta}^2$ (3)

$$F_{ms} = \frac{2}{5}mr\ddot{\theta} = \mu N \qquad (4)$$

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng :

$$mg(1-\cos\theta).2r = \frac{m}{2}(2r\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\dot{\theta}^2 + A_{ms} \qquad (5)$$

Với A_{ms} là công của lực ma sát.

Theo (4), ta có : $A_{ms} = \int \vec{F}_{ms}.d\vec{s} = \int_0^\theta F_{ms}.rd\theta = \int_0^\theta \left(\frac{2}{5}mr\ddot{\theta}\right)rd\theta$

$$\Rightarrow A_{ms} = \frac{1}{5}mr^2\dot{\theta} \qquad (6)$$

Thay (6) vào (5), sau đó lấy đạo hàm hai vế theo t, ta suy ra :

$$\frac{5}{12}g\sin\theta = r\ddot{\theta} \qquad (7)$$

Từ (3), (4), (5) và (7), suy ra :

$$F_{ms} = \frac{2}{5}mr\ddot{\theta} = \frac{1}{6}mg\sin\theta = \mu N = \mu(mg\cos\theta - 2mr\dot{\theta}^2)$$

$$\Rightarrow F_{ms} = \mu mg[\cos\theta - 2\frac{5}{6}(1-\cos\theta)] = \frac{\mu mg}{6}(16\cos\theta - 10)$$

Như vậy : $F_{ms} = \frac{1}{6}mg\sin\theta = \frac{\mu mg}{6}(16\cos\theta - 10) \Rightarrow \sin\theta = \mu(16\cos\theta - 10)$

$\Rightarrow$ Điều phải chứng minh.

4.36. a) Ta có : $R_A - R_B = 2r$ và $R_A = 2R_B$ nên $R_A = 4r$ và $R_B = 2r$.

Gọi v là vận tốc khối tâm của khối trụ :

$$v = \omega_C(R_B + r) = 3\omega_C r$$

$$v_P = v + \omega r = (3\omega_C + \omega)r$$

$$v_{P'} = \omega_A R_A = 4\omega_A r$$

$$v_Q = v - \omega r = (3\omega_C - \omega)r$$

$$v_{Q'} = \omega_B R_B = 2\omega_B r.$$

Trong đó :

P là điểm tiếp xúc của ống trụ ngoài A với điểm P′ của khối trụ.

Q′ là điểm tiếp xúc của ống trụ trong B với điểm Q của khối trụ.

Vì $v_P = v_{P'}$ và $v_Q = v_{Q'}$ (khối trụ lăn không trượt)

Nên : $(3\omega_C + \omega)r = 4\omega_A r$

$(3\omega_C - \omega)r = 2\omega_B r$

Suy ra : $\omega = 2\omega_A - \omega_B$.

$$\omega_C = \frac{1}{3}(\omega_A + \omega_B) \quad (1)$$

b) Chu kì quay của khối trụ : $T = \frac{2\pi}{\omega_C}$.

Nếu A được giữ đứng yên thì từ (1), ta có : $\omega_C = \frac{\omega_B}{3} \Rightarrow T = 1$ s.

c) Nếu khối trụ không tự quay quanh nó thì $\omega = 0$.

$$\omega_B = 2\omega_A ; \omega_C = \frac{2\omega_B}{3} ; v = 3\omega_C r = 2\omega_B r = 75{,}4 \text{ cm/s}$$

d) Nếu khối trụ chỉ chuyển động quanh khối tâm, $\omega_C = 0$. Từ (1)

$$\omega_A = -\frac{\omega_B}{2} = -9{,}42 \text{ rad/s} ; \omega = -2\omega_B = -37{,}7 \text{ rad/s}$$

e) Cơ năng của hệ : $W = \frac{1}{2}I_B\omega_B^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}I_A\omega_A^2$

trong đó I_A, I_B là momen quán tính của A và B đối với O.

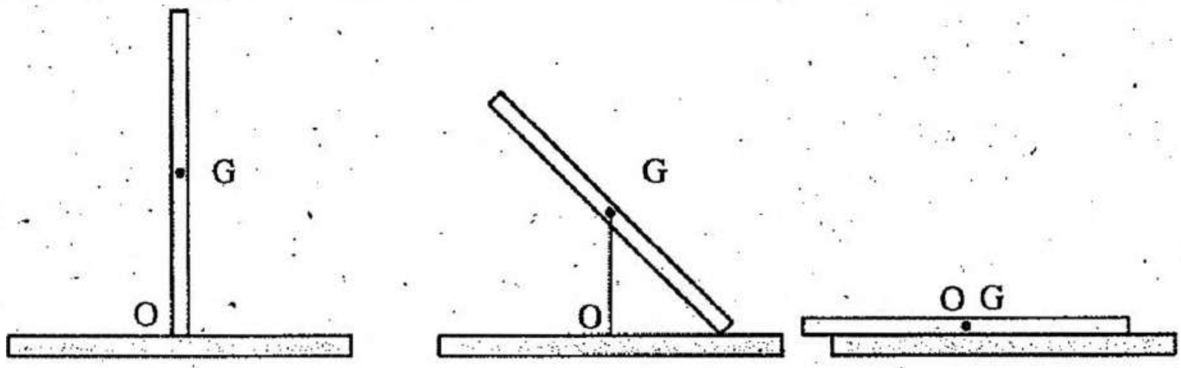
I là momen quán tính của khối trụ đối với khối tâm.

(Với khối trụ thì $I = \frac{1}{2}ma^2$ của hai ống trụ thì $I = ma^2$)

Ta có : $W = \frac{1}{2}M_BR_B^2\omega_B^2 + \frac{1}{4}m_0r^2\omega^2 + \frac{1}{2}M_AR_A^2\omega_A^2$

$W = \frac{17}{4}m_0r^2\omega^2 = 96{,}6$ J

4.37. 1. Vì không có lực ma sát, không có thành phần nằm ngang làm thay đổi vị trí trọng tâm của thanh theo phương ngang, do đó khi chạm đất, trọng tâm của thanh trùng với điểm O (Hình 4.40G).



Hình 4.22G

2. a) Gia tốc tiếp tuyến : $a_T = \frac{\gamma L}{2}$ và gia tốc pháp tuyến : $a_N = \omega^2\frac{L}{2}$

Momen của trọng lực P đối với O : $M_P = Mg\frac{L}{2}\cos\theta$

Dựa vào phương trình động lực học : $Mg\frac{L}{2}\cos\theta = I\gamma$ và $I = \frac{ML^2}{3}$

Suy ra : $a_T = \frac{3}{4}g\cos\theta$.

Để tìm biểu thức gia tốc hướng tâm ta sử dụng định luật bảo toàn năng lượng : độ giảm thế năng bằng độ tăng động năng của thanh :

$$Mg\frac{L}{2}(1-\sin\theta)=\frac{1}{2}I\omega^2$$

Suy ra : $a_N=\frac{3}{2}g(1-\sin\theta)$.

b) Thành phần nằm ngang của các lực mà thanh tác dụng lên điểm O trong quá trình chuyển động : $F=F_T\sin\theta-F_N\cos\theta=Ma_T\sin\theta-Ma_N\cos\theta$

$$F=\left[\frac{3}{4}g\cos\theta\sin\theta-\frac{3}{2}g(1-\sin\theta)\cos\theta\right]=\frac{3}{4}Mg\cos\theta(3\sin\theta-2)$$

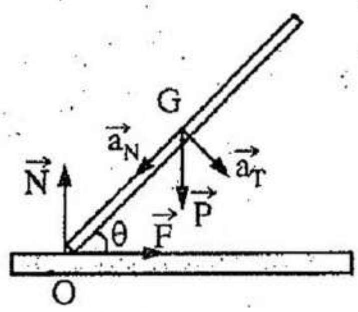
Thanh mất tiếp xúc với tường khi F = 0, từ đó $\sin\theta=\frac{2}{3}$ và $\theta=41,8^o$.

Khi đó tốc độ góc và vận tốc dài của trọng tâm là :

$$\omega^2=\frac{2}{L}\left[\frac{3}{2}g(1-\sin\theta)\right]=\frac{3}{2}g(1-\sin\theta)=\frac{3}{2}g\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{g}{L}$$

$$\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{g}{L}}\text{ và }v=\frac{1}{2}\sqrt{gL}$$

3. Khi có ma sát, khác với câu 1, sẽ xuất hiện lực ma sát $\vec{F}$ có phương nằm ngang. Khi thanh chưa trượt là lực ma sát nghỉ, khi thanh trượt là lực ma sát trượt. Lực ma sát tỉ lệ với thành phần thẳng đứng của lực $\vec{N}$ mà thanh tác dụng lên mặt nằm ngang.



Hình 4.23G

Theo phương thẳng đứng (Hình 4.23G) :

$$Mg-N=Ma_T\cos\theta+Ma_N\sin\theta=\frac{3}{4}Mg\cos^2\theta+\frac{3}{2}Mg(1-\sin\theta)\sin\theta$$

Biến đổi : $N=Mg(1-\frac{3}{4}\cos^2\theta-\frac{3}{2}\sin\theta+\frac{3}{2}\sin^2\theta)$

$$=\frac{Mg}{4}(9\sin^2\theta+6\sin\theta+1)=\frac{Mg}{4}(3\sin\theta-1)^2$$

N = 0 khi : $\sin\theta=\frac{1}{3}\Rightarrow\theta=19,5^o$

4.38. a) Vận dụng định luật bảo toàn cơ năng : độ tăng động năng bằng độ giảm thế năng :

$$mg\left(\frac{2}{3}L\cos\theta\right)+\frac{1}{2}m\omega^2\left(\frac{2}{3}L\right)^2-mg\left(\frac{1}{3}L\cos\theta\right)+\frac{1}{2}m\omega^2\left(\frac{1}{3}L\right)^2=\frac{2}{3}Lmg-\frac{1}{3}Lmg$$

Từ đó : $\omega=\sqrt{\frac{6g}{5L}(1-\cos\theta)}$.

b) Gọi $\vec{F}$ là lực mà thanh tác dụng lên quả cầu phía trên. Theo định luật II Niu-tơn : $\vec{P}+\vec{F}=m\vec{a}$.

$$mg\cos\theta + F_n = ma_n \qquad (1)$$

$$mg\sin\theta + F_t = ma_t \qquad (2)$$

Với : $a_n=\omega^2\left(\frac{2}{3}L\right)=\frac{6g}{5L}(1-\cos\theta)\frac{2}{3}L=\frac{4}{5}g(1-\cos\theta)$, thay vào (2) ta được :

$$F_n=ma_n-mg\cos\theta=m\left[\frac{4}{5}g(1-\cos\theta)-g\cos\theta\right]=\frac{mg}{5}(4-9\cos\theta)$$

Mặt khác, momen quán tính của hệ đối với trục quay :

$$I=m\left(\frac{1}{3}L\right)^2+m\left(\frac{2}{3}L\right)^2=\frac{5}{9}mL^2 \qquad (3)$$

và khoảng cách từ khối tâm của hệ đến trục quay là :

$$d=\frac{m\left(\frac{2}{3}L\right)-m\left(\frac{1}{3}L\right)}{2m}=\frac{1}{6}L \qquad (4)$$

Phương trình chuyển động quay của hệ : $2mgd\sin\theta = I\gamma$.

Suy ra : $\gamma=\frac{3g}{5L}\sin\theta$.

Gia tốc tiếp tuyến : $a_t=\gamma\left(\frac{2}{3}L\right)=\frac{2}{5}g\sin\theta$.

Lực tiếp tuyến : $F_t=ma_t-mg\sin\theta=-\frac{3}{5}mg\sin\theta$.

c) Độ lớn của lực mà thanh nén lên quả cầu :

$$F = \sqrt{F_n^2 + F_t^2} = \frac{1}{5} mg\sqrt{72\cos^2\theta - 72\cos\theta + 25}$$

Quả cầu tách khỏi thanh khi : $\frac{1}{5} mg\sqrt{72\cos^2\theta - 72\cos\theta + 25} = 1{,}8mg.$

Từ đó : $9\cos^2\theta - 9\cos\theta - 7 = 0 \Rightarrow \theta_d = 121^o$

d) Khi quả cầu bị tách, quả cầu 2 đang có vận tốc :

$$v_2 = \omega\frac{1}{3}L = \sqrt{\frac{6g}{5L}(1-\cos\theta_d)}\;\frac{L}{3} = \sqrt{\frac{2}{15}Lg(1-\cos\theta_d)}$$

Lên đến độ cao ứng với góc θ_I cực đại, theo định luật bảo toàn năng lượng :

$$-mg\frac{L}{3}\cos\theta_d + \frac{1}{2}mv_2^2 = -mg\frac{L}{3}\cos\theta_I$$

Từ đó : $\cos\theta_I = -0{,}817 \Rightarrow \theta_I = 145^o$

4.39. Thời gian rơi : $t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}2$ s (1)

Và vận tốc vành khi chạm bàn là : $v = gt_0 = 2$ m/s (2)

Vành đã quay được góc : $\varphi_0 = \omega_0 t_0 = 4{,}2$ rad (3)

Khi rơi, lực xuất hiện giữa vành và mặt bàn là $\frac{mv}{\Delta t}$, lực ma sát là $\frac{\mu mv}{\Delta t}$, momen lực $\frac{\mu mrv}{\Delta t}$.

Do thời gian va chạm là rất ngắn, có thể bỏ qua trọng lực so với lực ma sát.

Momen quán tính của vành $I = mr^2$.

Vì vậy, gia tốc góc là : $\gamma = \frac{\mu rmv}{I\Delta t} = \frac{\mu v}{r\Delta t}$ (4)

Trong thời gian va chạm Δt, tốc độ góc đã giảm đi một lượng :

$$\Delta\omega = \gamma\Delta t = \frac{\mu v}{r} = 6\ s^{-1} \qquad (5)$$

Ngay sau khi va chạm, tốc độ góc là : $\omega_1 = \omega_0 - \frac{\mu v}{r} = 15\ s^{-1}$ (6)

Vành tròn chuyển động chậm dần do lực ma sát μmg.

Gia tốc góc là : $\gamma_1 = \frac{\mu mgr}{I} = \frac{\mu g}{r} = 30\ s^{-2}$ (7)

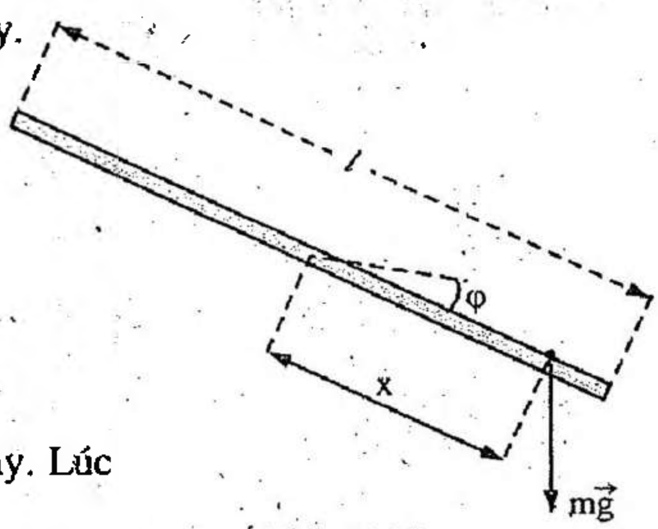
Vành tròn ngừng quay sau thời gian : $t_1 = \frac{\omega_1}{\gamma_1} = 0,5$ s (8)

Tổng góc quay trong thời gian này là : $\frac{\gamma_1 t_1^2}{2} = 3,75$ rad.

Như vậy, góc quay tổng cộng từ khi bắt đầu rơi đến lúc dừng lại là :

$\varphi = 4,2 + 3,75 = 7,95$ rad

Tương ứng với $\frac{7,95}{2\pi} = 1,265$ vòng quay.



Hình 4.24G

4.40. Gọi khối lượng của nhện và thanh là m, tốc độ góc của thanh là ω. Momen quán tính của hệ :

$$I = \frac{1}{12}ml^2 + mx^2$$

x là khoảng cách từ nhện đến tâm quay. Lúc đầu, t = 0, $x = \frac{l}{4}$. (Hình 4.24G)

Theo định luật bảo toàn momen động lượng, trước và sau khi nhện rơi :

$$L = mv_0x = I\omega = \left(\frac{1}{12}ml^2 + mx^2\right)\omega$$

Từ phương trình này, tìm được : $\omega = \frac{12v_0}{7l}$.

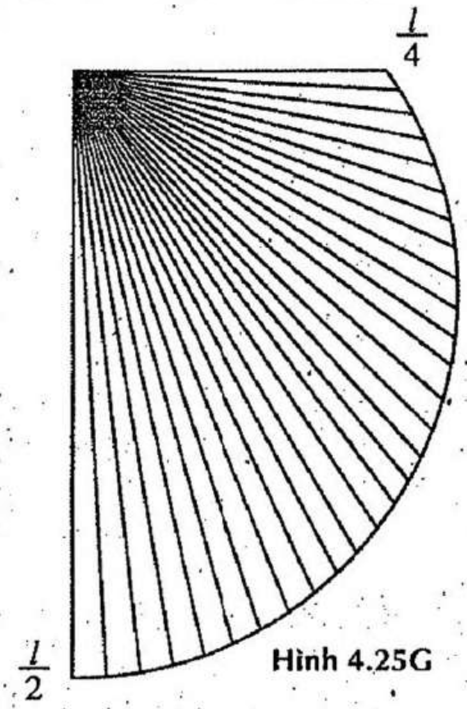
Phương trình của chuyển động quay : $M = \frac{d(I\omega)}{dt} = \frac{dI}{dt}\omega$ (1)

Từ hình vẽ : $M = mgx\cos\varphi$ với $\varphi = \omega t$

Cân bằng hai vế của (1) : $mgx\cos(\omega t) = 2mx\frac{dx}{dt}\omega$.

Giải phương trình trên, tìm được nghiệm :

$$x = \frac{49l^2}{288.v_0^2}\sin\left(\frac{12v_0t}{7l}\right) + C.$$



Hình 4.25G

Từ điều kiện ban đầu $t = 0$, $x = \frac{l}{4}$, ta rút ra :

$$C = \frac{l}{4}.$$

Nhện rơi khi : $x = \frac{l}{2}$ và $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (Hình 4.27G).

Khi đó : $v_0 = \frac{7}{6}\sqrt{\frac{gl}{2}}$.

Đường đi của nhện dưới dạng tham số : $\begin{cases} \varphi = \sqrt{\frac{2g}{l}}t \\ x = \frac{l}{4}(\sin\varphi + 1) \end{cases}$

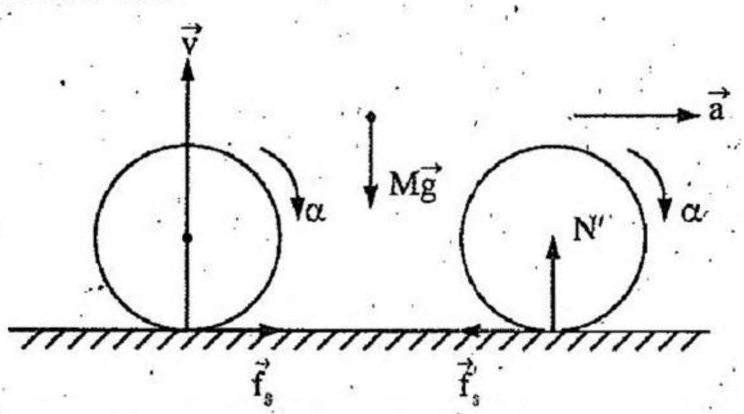
4.41. a) Phân tích các lực như hình 4.26G. Ta có :

$f_s = f_{s'} = Ma$

$T - f_sR = I\alpha$

$f_sR = I\alpha$ với $I = mR^2$, tìm được :

$$a = \frac{\frac{T}{R}}{M+2m}$$



Hình 4.26G

b) Vì $Mg = N + N'$ và $T_{ng} = \frac{dL}{dt}$ (T_{ng} là momen của ngoại lực), ta phải xác định momen ngoại lực và tổng momen động lượng đối với khối tâm.

Hệ có các phần : bánh trước, người, bánh sau và sườn xe.

Momen động lượng của ba phần này bằng momen động lượng khối tâm (vì chúng chuyển động tịnh tiến).

$$L = m_1\vec{r}_1 \times \vec{v} + m_2\vec{r}_2 \times \vec{v} + m_3\vec{r}_3 \times \vec{v} = (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3) \times \vec{v} = M\vec{R}_G \times \vec{v}$$

($\vec{R}_G$ là toạ độ khối tâm)

Trong hệ toạ độ khối tâm, tổng momen động lượng bằng 0, vì vậy ta chỉ cần tính momen động lượng của từng vật trong hệ đối với khối tâm. Chọn chiều chuyển động của xe là chiều dương, ta có :

$$L = I\omega = \frac{2mR^2v}{R} = 2mRv$$

$T_{ng} = Nl - f_0h - N'l + f'_0h$

Và : $(N - N')l + (f'_s - f_s)h = \frac{dL}{dt} = 2mRa$

Từ câu a : $f_0 - f'_0 = Ma$.

$$\begin{cases} N - N' = \frac{h}{l}Ma + \frac{2R}{l}ma = \frac{hM + 2Rm}{l}a = \frac{hM + 2Rm}{l}\cdot\frac{\frac{r}{R}}{M + 2m} \\ N + N' = Mg \end{cases}$$

Từ đó : $N = \frac{1}{2}\left(Mg + \frac{hM + 2Rm}{M + 2m}\cdot\frac{T}{lR}\right)$

$$N' = \frac{1}{2}\left(Mg - \frac{hM + 2Rm}{M + 2m}\cdot\frac{T}{lR}\right)$$

Từ câu a, ta có : $f'_s = ma = \frac{m}{M + 2m}\cdot\frac{T}{R}$

và : $f_s = f'_s + Ma = (m + M)a = \frac{M + m}{M + 2m}\cdot\frac{T}{R}$

Xe không trượt nếu : $f'_s \leq \mu N'$ và $f_s \leq \mu N$

Nghĩa là : $\frac{M + m}{M + 2m}\cdot\frac{T}{R} \leq \frac{1}{2}\mu\left(Mg + \frac{hM + 2Rm}{M + 2m}\cdot\frac{T}{lR}\right)$

$$\Leftrightarrow T \leq MgR\frac{\mu(M + 2m)}{\left(2 - \mu\frac{h}{l}\right) + \left(2 - 2\mu\frac{R}{l}\right)m}\mu = T_{1m}$$

Mặt khác : $\frac{m}{M + 2m}\cdot\frac{T}{R} < \frac{1}{2}\mu\left(Mg - \frac{hM + 2Rm}{M + 2m}\cdot\frac{T}{lR}\right)$

$$\Leftrightarrow T \le MgR\frac{\mu(M+2m)}{\mu\frac{h}{l}M+\left(2+2\mu\frac{R}{l}\right)m} = T_{2m}$$

– Nếu $T < T_{1m}$ và T_{2m}, bánh trước có thể bị trượt, vì vậy T phải nhỏ hơn một trong hai giá trị T_{1m} hoặc T_{2m}.

– Nếu $T_{2m} \le T_{1m}$, lúc đầu bánh trước bị trượt, khi đó :

$$\left(2+2\mu\frac{R}{l}\right)m + \mu\frac{h}{l}M \ge \left(2-\mu\frac{h}{l}\right)M + \left(2-2\mu\frac{R}{l}\right)m$$

hay : $\mu > \dfrac{Ml}{2Rm+hM}$. Ngược lại thì bánh sau sẽ trượt.

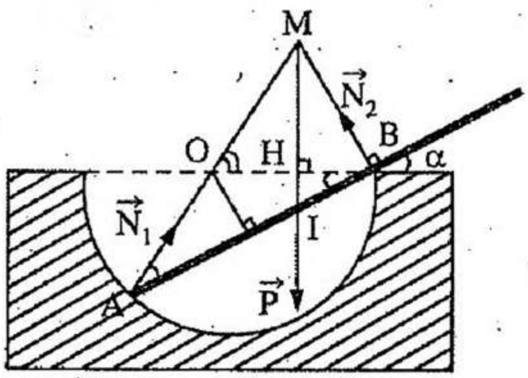
c) Nếu lực ma sát lớn đến mức T không làm bánh xe trượt thì không thể tăng mãi T được, vì khi tăng T, N′ tiến đến O và toàn bộ trọng lượng xe dồn vào bánh sau. Khi đó có thể xảy ra trường hợp xe bị giật, phần trước của xe chồng lên và quay ngược về sau. Xe quay quanh khối tâm.

Ta phải có : $N' > \dfrac{1}{2}\left(Mg - \dfrac{hM+2Rm}{M+2m}.\dfrac{T}{lR}\right) > 0 \Rightarrow T \le MgR\dfrac{(M+2m)l}{hM+2RM}$.

Chủ đề 5

5.1. (Hình 5.1G).

a) Khi cân bằng, thanh chịu tác dụng của các lực : trọng lực $\vec{P}$ và hai phản lực $\vec{N}_1, \vec{N}_2$. I là trung điểm của thanh. Ta có : $AB = 2R\cos\alpha$



Hình 5.1G

$$IB = AB - \frac{a}{2} = 2R\cos\alpha - \frac{a}{2}$$

$$HB = IB\cos\alpha = 2R\cos^2\alpha - \frac{a}{2}\cos\alpha$$

$$OH = R\cos2\alpha = 2R\cos^2\alpha - R.$$

$$\text{Mà : } R = OH + HB = 2R\cos^2\alpha - R + 2R\cos^2\alpha - \frac{a}{2}\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow 8R\cos^2\alpha - a\cos\alpha - 4R = 0$$

Từ đó suy ra : $\cos\alpha = \dfrac{a+\sqrt{a^2+128R^2}}{16R}$ (1)

α là góc hợp bởi thanh và mặt phẳng ngang khi có cân bằng.

b) Điều kiện để có cân bằng :

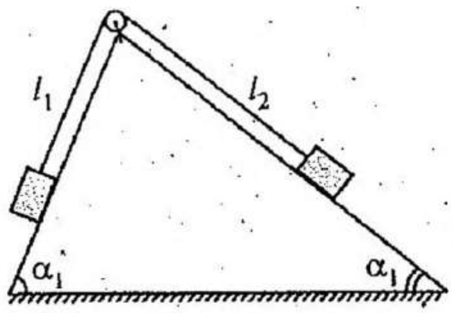
Que chỉ có thể cân bằng nếu khối tâm I (trung điểm) của thanh luôn nằm trong khoảng AB, hay : $AI = \dfrac{a}{2} \leq AB = 2R\cos\alpha$

$$(1) \Rightarrow \frac{a}{2} \leq 2R\frac{a+\sqrt{a^2+128R^2}}{16R} = \frac{a+\sqrt{a^2+128R^2}}{8} \Leftrightarrow a \leq 4R$$

* Trường hợp $2R \leq a \leq 4R$ cân bằng là bền.

* Trường hợp $a < 2R$ thanh nằm ngang trong lòng cối và có cân bằng bền.

5.2. a) Hệ cân bằng nếu các thành phần của trọng lượng dọc theo các mặt phẳng nghiêng bằng nhau (Hình 5.2G).



Hình 5.2G

$m_1g\sin\alpha_1 = m_2g\sin\alpha_2$

Vậy điều kiện cân bằng là : $\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \dfrac{m_2}{m_1}$ (1)

Cân bằng này là phiếm định vì nếu m_1, m_2 dịch chuyển thì các thành phần trọng lượng không đổi.

b) Gọi l_1, l_2 là chiều dài các đoạn dây : $l_1 + l_2 = l$ (const)

Lấy mốc độ cao là độ cao của đỉnh nêm, thế năng trọng trường của hệ là :

$U = -(m_1gl_1\sin\alpha_1 + m_2gl_2\sin\alpha_2)$

Đặt : $l_1 = x$, ta có : $U = -g[m_1x\sin\alpha_1 + m_2(l - x)\sin\alpha_2]$

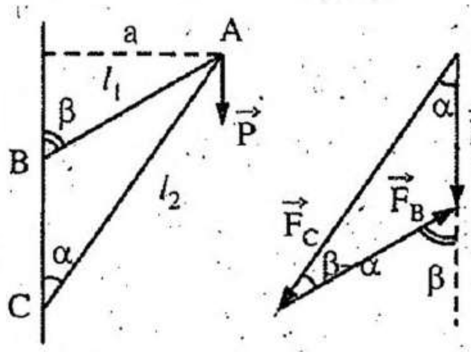
$$\frac{dU}{dx} = -g(m_1\sin\alpha_1 - m_2\sin\alpha_2)$$

Cân bằng ứng với : $\dfrac{dU}{dx} = 0$ nghĩa là $m_1\sin\alpha_1 = m_2\sin\alpha_2$.

Ta thấy lại (1) : $\dfrac{d^2U}{dx^2}$ luôn luôn bằng 0, cân bằng là phiếm định.

5.3. Chốt A cân bằng dưới tác dụng của trọng lượng P = 450 N và các phản lực của các chốt $\vec{F}_B$ có phương AB và $\vec{F}_C$ có phương AC.

Ta vẽ tam giác lực (Hình 5.3G) và thấy ngay là thanh AB bị kéo, thanh AC bị nén. Gọi α và β là các góc mà các thanh AC và AB hợp với tường. Các góc của tam giác hợp lực được ghi trong hình, ta có :



Hình 5.3G

$$\frac{P}{\sin(\beta-\alpha)}=\frac{F_B}{\sin\alpha}=\frac{F_C}{\sin\beta}$$

Vậy : $F_B = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}F_C$

Gọi a là khoảng cách từ A đến tường thì : $\sin\alpha = \dfrac{a}{l_2}$; $\sin\beta = \dfrac{a}{l_1}$.

Vậy : $F_B = \dfrac{l_1}{l_2}F_C = \dfrac{5}{7}F_C$ (1)

Hệ thức lượng trong tam giác ABC cho ta : $l_1^2 = l_2^2 + d - 2l_2 d\cos\alpha$

Suy ra $\cos\alpha = 0,785$, $\alpha = 38^o$.

$$l_2^2 = l_1^2 + d^2 + 2l_1 d\cos\beta \text{ ; } \cos\beta = 0,5 \text{ ; } \beta = 60^o$$

Ta có liên hệ thứ hai giữa F_B và F_C nếu chiếu đẳng thức vectơ : $\vec{P} + \vec{F}_B + \vec{F}_C = \vec{0}$ xuống trục thẳng đứng.

$$P + F_B\cos\beta = F_C\cos\alpha \quad (2)$$

Thay (1) và các giá trị của P, cosβ, cosα, ta có : $450 + 0,5\dfrac{5}{7}F_C = 0,785F_C$

Tính được $F_C = 1051$ N và $F_B = 751$ N.

5.4. Vật chịu tác dụng của trọng lực $\vec{P}$ đặt tại trọng tâm G ; phản lực vuông góc $\vec{N}_1$ và lực ma sát $\vec{F}_1$ của sàn tác dụng ; phản lực vuông góc $\vec{N}_2$ và lực ma sát $\vec{F}_2$ của giá đỡ tác dụng.

Chiếu phương trình cân bằng lực lên trục Oy thẳng đứng và trục Ox nằm ngang :

$$N_1 + N_2\cos30^o + F_2\sin30^o - P = 0 \qquad (1)$$

với $F_2 = \mu N_2$

$$N_2\sin30^o - F_2\cos30^o - F_1 = 0 \qquad (2)$$

với $F_1 = \mu N_1$

Phương trình cân bằng momen đối với trục qua B : $N_2.BE - P.GH = 0$

với $GH = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ (3)

Từ (3), thay số rút ra : $N_2 = 43,3$ N.

Thay giá trị của N_2 vào (1) và (2) rút ra phương trình :

$$21,65\mu^2 - 100\mu + 21,65 = 0$$

Với điều kiện $\mu < 1$, ta tìm được $\mu = 0,22$. Từ đó :

$$N_1 = \frac{21,65}{\mu} - 35,49 = 57,75 \text{ N}.$$

5.5. a) Vì $BD = \dfrac{AD}{2}$ và $\alpha = 30^o$ nên tam giác BDC vuông tại D, nghĩa là BD vuông góc với AB và CD. Khi CD còn tiếp xúc với sàn thì đường thẳng đứng qua trọng tâm G của khối hộp còn rơi vào trong mặt chân đế, khối hộp còn ở trong trạng thái cân bằng, khi đó phản lực vuông góc $\vec{N}$ của sàn cân bằng với trọng lực $\vec{P}$ của khối hộp. Lúc này khối hộp còn đứng vững mà không cần tới giá đỡ. Lực ép của khối hộp lên giá đỡ bằng 0.

b). Khi tác dụng lực $\vec{F}$ để nâng khối hộp, kể từ lúc mặt CD bắt đầu tách khỏi sàn thì phản lực $\vec{N}$ của sàn không còn. Khi đó các lực tác dụng lên khối hộp gồm :

Trọng lực $\vec{P}$; phản lực vuông góc $\vec{Q}$ của giá đỡ ;

Lực ma sát $\vec{F}_{ms}$ của giá đỡ (chống lại sự trượt của khối hộp đối với giá đỡ) ;

Lực tác dụng $\vec{F}$.

Chiếu phương trình cân bằng lực lên phương thẳng đứng và lên phương ngang :

$$Q\sin60^o + F_{ms}\sin30^o - F - P = 0 \quad (1)$$

$$Q\cos60^o - F_{ms}\cos30^o = 0 \quad (2)$$

Khi bị tách khỏi sàn khối hộp quay quanh trục đi qua M.

Phương trình cân bằng momen đối với trục qua M : $Fd_1 - Pd_2 = 0$ (3)

với d_1 và d_2 là các cánh tay đòn của $\vec{F}$ và $\vec{P}$.

Vì MA = MD $\Rightarrow d_1 = d_2 \Rightarrow F = P = 200$ N.

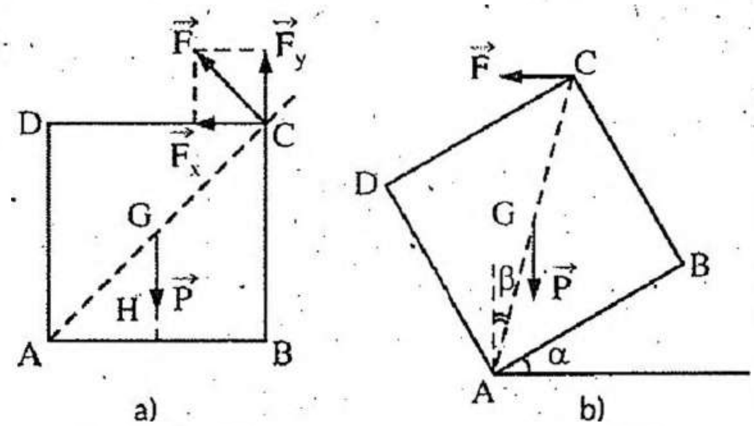
Thay $F = \mu Q$ vào (2), suy ra : $\mu = \dfrac{\cos60^o}{\cos30^o} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,58$.

Thay vào (1) ta được : Q = 346 N.

Và lực ma sát giữ cho khối hộp không trượt đối với giá đỡ là : $F_{ms} = \mu Q = 200$ N.

5.6. a) Lực tác dụng $\vec{F}$ tạo ra momen cực đại (mặc dù có cường độ nhỏ nhất), vì vậy $\vec{F}$ phải có phương vuông góc với AC (Hình 5.4Ga) và F.AC = P.AH.

Suy ra : $F = \dfrac{mg}{2\sqrt{2}} = 354$ N.



Hình 5.5G

b) Áp lực $\vec{Q}$ ở A là tổng hợp của $\vec{P}$ và $\vec{F}_y$ ($\vec{Q}$ có phương vuông góc với mặt đất nằm ngang).

$$Q = P - F\cos45^o = 750 \text{ N}$$

Lực ma sát ở A là : $F_{ms} = \mu Q = 225$ N

Mặt khác : $F_x = P\sin45^o \Rightarrow F_x = 250 \text{ N} > F_{ms}$, nên khối gỗ sẽ trượt sang trái.

c) Nếu $\alpha < 45^o$ ta có $\beta = 45^o - \alpha$ (Hình 5.4Gb).

Khối gỗ được lật rất chậm nên có thể có : momen $\vec{F}$ = momen $\vec{P}$, suy ra biểu thức của lực $\vec{F}$ là :

$$F = \frac{mg}{2}\tan(45^o - \alpha) = 500\tan(45^o - \alpha)$$

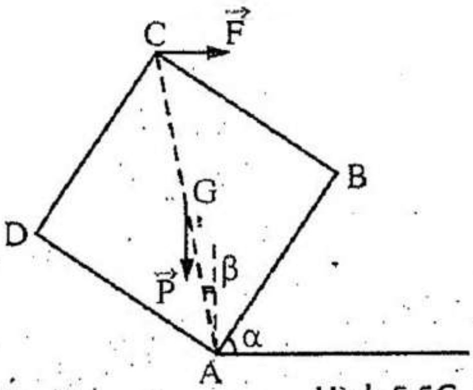
Nếu $\alpha > 45^o$ thì phải đổi chiều lực $\vec{F}$ và khi đó $\beta' = \alpha - 45^o$.

Vậy $F' = 500\tan(\alpha - 45^o)$ (Hình 5.5G).

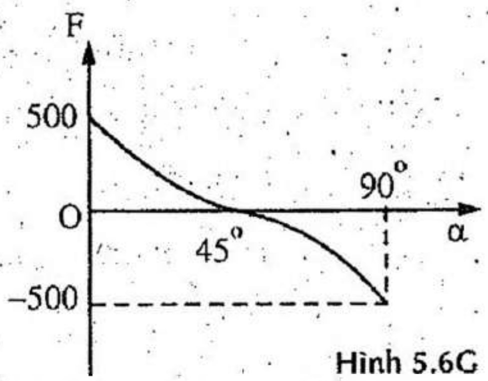
Lấy chiều dương của F (đại số) hướng sang trái, ta có thể gộp cả hai trường hợp lại và viết :

$$F = 500\tan(45^o - \alpha)$$

Trên hình 5.6G là đồ thị biểu diễn F theo α.



Hình 5.5G



Hình 5.6G

5.7. a) Khi đường thẳng đứng qua trọng tâm G của vật còn nằm trong chân đế thì vật còn đứng vững trên mặt nêm :

$$\alpha_0 = \beta \Rightarrow \tan\beta = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \beta = 30^o, \alpha_0 = 30^o.$$

Vậy vật chưa bị lật khi mặt nêm MN nghiêng góc cực đại $\alpha_0 = 30^o$.

Khối hộp không bị trượt khi $F_{ms} = P\sin\alpha_0$, với $F_{ms} = \mu N = \mu mg\cos\alpha_0$

Suy ra : $\mu_0 = \tan\alpha_0 = \tan30^o = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy khi góc nghiêng $\alpha = \alpha_0$, muốn vật không bị trượt thì hệ số ma sát phải lớn hơn hoặc bằng $\mu_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 0,577$.

b) Khi $\alpha = \alpha_0 = 30^o$ mà $k = 0,2 < k_0$ thì vật sẽ bị trượt trên mặt MN.

Nếu nêm chuyển động sang phải với gia tốc a thì phản lực $\vec{N}$ do mặt nêm tác dụng lên vật sẽ phụ thuộc vào a, và áp lực $\vec{Q}$ do vật tác dụng lên mặt nêm cũng phụ thuộc vào a (còn thành phần pháp tuyến của trọng lực $mg\cos\alpha$ thì không phụ thuộc vào a).

Phương trình động lực học của vật chiếu trên trục Oy thẳng đứng và trục Ox nằm ngang, khi vật không trượt trên mặt MN, có dạng :

$$N\sin30^{o} - \mu N\cos30^{o} = ma \qquad (1)$$

$$N\cos30^{o} + \mu N\sin30^{o} = mg \qquad (2)$$

Từ đó suy ra : $N = \dfrac{2ma}{1-\mu\sqrt{3}} = \dfrac{2mg}{\sqrt{3}+\mu}$ (3)

$$\Rightarrow a = g\frac{1-\mu\sqrt{3}}{\mu+\sqrt{3}} = 3{,}4 \text{ m/s}^2$$

Như vậy muốn vật không trượt trên mặt nêm phải cho nêm chuyển động sang phải với gia tốc $a = 3{,}4 \text{ m/s}^2$.

Mặt khác, theo (3) phản lực $\overline{N}$ của mặt nêm sẽ tăng theo a. Nếu phản lực $N > mg\cos\alpha$ thì vật sẽ bị nâng lên, A sẽ rời khỏi mặt nêm ; khi đó phản lực $\overline{N}$ sẽ có giá đi qua B, và trọng lực $\overline{P}$ sẽ gây ra một momen làm vật bị lật qua trục quay B. Điều đó xảy ra khi $N \geq mg\cos\alpha$

$$\Rightarrow \frac{2ma}{1-\mu\sqrt{3}} \geq mg\cos30^{o} \Rightarrow a \geq \frac{\sqrt{3}(1-\mu\sqrt{3})}{4}g = 2{,}8 \text{ m/s}^2$$

Như vậy với góc nghiêng $\alpha = 30^{o}$, $k = 0{,}2$ thì vật sẽ trượt trên mặt nêm.

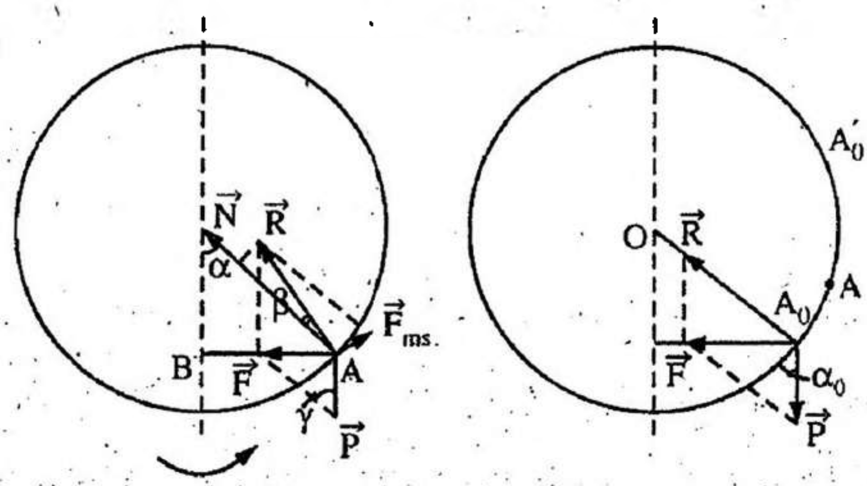
Nếu cho nêm chuyển động sang phải với gia tốc $\vec{a}$ tăng dần thì vật sẽ trượt trên mặt nêm khi nêm chuyển động. Khi gia tốc $\vec{a}$ đạt tới giá trị $2{,}8 \text{ m/s}^2$ thì vật bị lật.

Như vậy vật sẽ bị lật trước khi nêm đạt được gia tốc $3{,}4 \text{ m/s}^2$ đủ để giữ vật dừng lại trên mặt nêm.

5.8. a) Vật m chịu tác dụng của : Trọng lực $\overline{P} = m\vec{g}$; Phản lực $\overline{R}$ của hình cầu mà thành phần tiếp tuyến là lực ma sát $\overline{F}_{ms}$, có thể hướng lên trên, hoặc xuống dưới ; $|F_{ms}| \leq \mu N$, $\overline{N}$ là thành phần pháp tuyến (phản lực vuông góc), μ là hệ số ma sát.

Hợp lực $\overline{F} = \overline{P} + \overline{R}$ chính là lực hướng tâm trong chuyển động tròn với bán kính $r = AB = R\sin\alpha$.

Ta có : $F = m\omega^2 r$. Giá trị cực tiểu của μ là (Hình 5.7Ga) : $\dfrac{|F_{ms}|}{N} = \tan\beta$.



Hình 5.7G a) b)

Trong đó $\tan\beta = \tan(\alpha - \gamma) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\gamma}{1 + \tan\alpha\tan\gamma}$, với $\tan\gamma = \dfrac{F}{P} = \dfrac{\omega^2 r}{g}$ và $\alpha = 60^\circ$,

$\tan\alpha = \sqrt{3}$; $\omega = 5$ rad/s ; $r = R\sin\alpha = 0{,}5\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ m ; $g = 10$ m/s^2

Từ đó $\tan\beta = 0{,}2259 \approx 0{,}23$. Vì $|F_{ms}| \leq kN$ nên suy ra $k \geq 0{,}23$.

b) Với $\omega = 8$ rad/s, tính toán như ở câu a, ta có :

$\tan\beta = -\dfrac{3\sqrt{3}}{29}$ nghĩa là $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{3}\cos\alpha$, hướng xuống dưới, $\gamma > \alpha$, $\mu \geq 0{,}18$.

c) – Xét trường hợp b :

+ Với $\omega = 5$ rad/s : khi ω tăng thì $\vec{F}$ tăng, β giảm, vẫn có cân bằng. Còn khi ω giảm thì góc β phải tăng mới có cân bằng, nhưng không thể được vì $\tan\beta \leq 0{,}23$, như vậy vật phải tụt xuống vị trí cân bằng mới.

+ Với $\omega = 8$ rad/s thì ngược lại.

– Xét trường hợp a :

+ Với $\omega = 5$ rad/s thì vị trí cân bằng A_0 khi không có ma sát ứng với (Hình 5.7Gb) :

$$\cot\alpha_0 = \frac{P}{F} = \frac{g}{\omega^2 R\sin\alpha_0} \text{ nghĩa là : } \cos\alpha_0 = \frac{g}{\omega^2 R} = 0{,}8 \Rightarrow \alpha_0 = 37^\circ$$

Vị trí này thấp hơn vị trí khi có ma sát A.

Vậy nếu vật từ A tụt xuống thì nó vẫn cân bằng ở vị trí mới (nó đứng cân bằng trên cả đoạn AA_0). Nếu vật dịch từ A_0 lên trên thì nó tụt trở về A.

+ Với ω = 8 rad/s thì tương tự như trên, tính ra ta có $\alpha'_0 = 72^o$, A'_0 ở trên A, vật có thể đứng cân bằng trên đoạn AA'_0.

5.9. a) $F_{ms} = k(P + R\cos\alpha) = 200 + 0,32R$ (1)

Điều kiện cân bằng giới hạn đối với sự quay quanh A : $F_{max} = 2F_{ms}$ (2)

Cột không chuyển động tịnh tiến : $F_{max} = F_{ms} + 0,6R$ (3)

Ba phương trình cho ta ba ẩn : F_{max} ; F_{ms} và R.

Giải hệ : $F_{max} = 857$ N ; $F_{ms} = 428$ N ; R = 714 N.

b) Ta có các phương trình (1) và $F_{max} = nF_{ms}$ (2') và (3).

$F_{max} = n(200 + 0,32R) = 200n + 0,32nR$

$$R = \frac{200(n-1)}{0,92 - 0,32n} \quad (4)$$

$$F_{max} = \frac{120n}{0,92 - 0,32n} \quad (5)$$

$n = \frac{0,92}{0,32} = 2,875$ thì giới hạn của F làm B trượt là ∞, nghĩa là B không trượt dù F lớn đến mấy, BC ≈ 0,65 m.

c) n = 3 > 2,875. Không dùng được (4), vì R > 0. Bây giờ thanh không quay quanh B : $F\frac{2}{3}AB = R.AB\sin\alpha$.

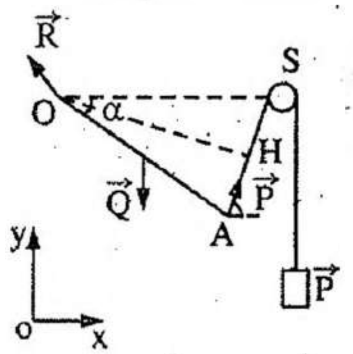
$2F = 3.0,6R \Rightarrow R = 1000$ N.

5.10. a) Gọi $\overline{R}$ là phản lực của chốt O. Chiếu lên hai trục của hệ toạ độ Oxy (có phương trên hình 5.8G), ta được :

$$R_x = -P\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$R_y = Q - P\cos\frac{\alpha}{2}$$

(lưu ý rằng góc ở A = $90^o - \frac{\alpha}{2}$)



Hình 5.8G

Xét các momen lực đối với O (OH = $l\cos\frac{\alpha}{2}$, l là chiều dài thanh OA), ta được phương trình momen khi có cân bằng (lưu ý rằng lực căng của đoạn dây AS bằng $\vec{P}$).

$$Pl\cos\frac{\alpha}{2} - Q\frac{l}{2}\cos\alpha = 0$$

hay $$P\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{Q}{2}\cos\alpha \qquad (1)$$

Đặt $\cos\frac{\alpha}{2} = x$, ta được : $P_x = \frac{Q}{2}(2x^2 - 1)$ (2)

Thay P = 1 N, Q = $2\sqrt{3}$ N vào (2), ta có phương trình : $4\sqrt{3}x^2 - 2x - 2\sqrt{3} = 0$.

Phương trình này có nghiệm : $\frac{1 \pm 5}{4\sqrt{3}}$.

Ta chỉ lấy nghiệm dương (vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), ta có :

$x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 60^{\circ}$: AOS là tam giác đều.

Từ đó : $R_x = -P\sin\frac{\alpha}{2} = -0,5$ N

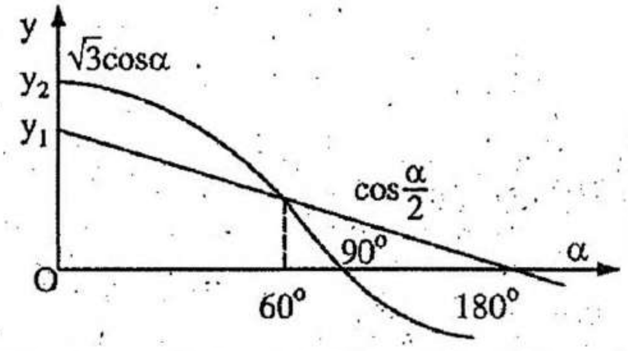
$R_y = Q - P\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ N và $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{7}$ N

b) Cân bằng phụ thuộc vào phương trình về các momen lực (1) :

$P\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{Q}{2}\cos\alpha$ hay $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{3}\cos\alpha$

Ta biểu diễn đồ thị hai hàm số $y_1 = \cos\frac{\alpha}{2}$ và $y_2 = \sqrt{3}\cos\alpha$ trên cùng một hình 5.9G ta thấy cân bằng xảy ra khi $\alpha = 60^{\circ}$ (giao điểm của hai đồ thị $y_1 = y_2$) và nếu α tăng thì $y_1 = \cos\frac{\alpha}{2}$ giảm chậm hơn $y_2 = \sqrt{3}\cos\alpha$. Ta có y_1 tương ứng với momen lực căng dây SA, còn y_2 tương ứng với momen trọng lực của thanh.

Như vậy nếu α tăng thì lực căng dây thắng trọng lực của thanh và kéo thanh trở về vị trí cân bằng. Do đó cân bằng của thanh là cân bằng bền.



Hình 5.9G

5.11. Vật A chịu tác dụng : trọng lực $\vec{P_1}$ (đặt tại G_1) ; phản lực vuông góc $\vec{N_1}$.

Lực ma sát $\vec{F_1}$ của tường ($\vec{F_1}$ hướng lên trên).

Phản lực vuông góc $\vec{Q_1}$ (vì bỏ qua ma sát) của vật B. Ta có :

$$\vec{P_1} + \vec{N_1} + \vec{F_1} + \vec{Q_1} = \vec{0} \qquad (1)$$

Vật B chịu tác dụng : trọng lực $\vec{P_2}$ (đặt tại G_2) ; phản lực vuông góc $\vec{N_2}$ và lực ma sát $\vec{F_2}$ của sàn ($\vec{F_1}$ hướng sang phải).

Phản lực vuông góc $\vec{Q_2}$ của vật A ($Q_2 = Q_1$). Ta có :

$$\vec{P_2} + \vec{N_2} + \vec{F_2} + \vec{Q_2} = \vec{0} \qquad (2)$$

Chiếu các phương trình vectơ (1) và (2) lên trục Oy thẳng đứng và trục Ox nằm ngang, suy ra : $P_1 = F_1 + Q_1\cos30^o$

với $\qquad F_1 = \mu N_1 \qquad (3)$

$\qquad N_1 = Q_1\sin30^o \qquad (4)$

$\qquad P_2 = N_2 - Q_2\cos30^o$

với $\qquad Q_2 = Q_1 \qquad (5)$

$\Rightarrow \qquad Q_2\sin30^o = F_2 = \mu N_2 \qquad (6)$

Từ các phương trình trên thay số ta rút ra : $\mu^2 + 3,464\mu - 1 = 0$

Ta lấy nghiệm dương : $\mu = 0,267$.

Từ đó : $N_2 = 1{,}869Q_2 = 1{,}869Q_1$; $Q_1 = P_1 = 50$ N.

$$N_1 = \frac{Q_1}{2} = 25 \text{ N và } N_2 = 93{,}5 \text{ N}.$$

5.12. 1. Nếu không có ma sát thì các phản lực ở A và B đều vuông góc với sàn và tường và có hợp lực ở D, do đó chúng không thể cân bằng với trọng lực $\vec{P}$ của thanh đặt tại C và có phương trình thẳng đứng xuống dưới.

2. Kí hiệu $\vec{N}_1, \vec{F}_1$ và $\vec{N}_2, \vec{F}_2$ tương ứng là phản lực vuông góc và lực ma sát của sàn và tường tác dụng vào đầu A và đầu B của thang.

Áp dụng điều kiện cân bằng về lực và momen (đối với O), chiếu phương trình lực lên trục Ox nằm ngang và trục Oy thẳng đứng ta có :

$$N_2 = F_1 \quad (1)$$

$$P = N_1 + F_2 \quad (2)$$

với $F_1 = \mu N_1$; $F_2 = \mu N_2$; $P\frac{2l}{3}\cos\alpha + N_2 l\sin\alpha - N_1 l\cos\alpha = 0$ (3)

Từ các phương trình trên rút ra phương trình tính k : $2\mu^2 + 3\mu\tan\alpha - 1 = 0$ (4)

Với $\alpha = 60^o$, $\tan\alpha = \sqrt{3}$, ta có : $2\mu^2 + 3\mu\sqrt{3} - 1 = 0$

Ta chỉ lấy nghiệm dương : $\mu = \frac{1}{4}(\sqrt{35} - 3\sqrt{3}) \approx 0{,}18$.

Đó là giá trị tối thiểu μ_{min} của μ để có cân bằng, bởi vì nếu $\mu > \mu_{min}$ thì lực ma sát điều chỉnh để các hệ thức $F_1 = \mu N_1$, $F_2 = \mu N_2$ vẫn thoả mãn. Còn nếu $\mu < \mu_{min}$ thì các đẳng thức (1) và (2) không còn được thoả mãn nữa.

3. a) Cân bằng trên đây (giá trị của μ) không phụ thuộc vào độ lớn của $\vec{P}$, nên nếu có người đứng ở trọng tâm C của thang, thì tương đương với trọng lượng P của thang tăng, và thang vẫn cân bằng.

b) Nếu người đó đứng ở D thì tương đương với thang chịu lực có độ lớn $P + P = 2P$ đặt ở trung điểm I của thang (vì IC = ID nên hợp lực đặt tại I). Khi đó ta có các phương trình tương tự như (1), (2) và (3), chỉ cần thay P = 2P và chú ý đến điểm đặt của lực 2P tại I : $N_2 = F_1$ (4)

$$2P = N_1 + F_2 \quad (5)$$

với $F_1 = \mu_1 N_1$; $F_2 = \mu_1 N_2$

$$2P\frac{l}{2}\cos\alpha + N_2 l\sin\alpha - N_1 l\cos\alpha = 0 \qquad (6)$$

Từ các phương trình trên ta tìm được phương trình cho μ_{1min} trong trường hợp này : $\mu_1^2 + 2\sqrt{3}\mu_1 - 1 = 0$

Ta chỉ lấy nghiệm dương : $\mu_1 = 0{,}27$

Ta thấy lúc này $\mu_{1min} = 0{,}27$. Do đó với $\mu_{min} = 0{,}18$ thì thang bị trượt.

4. Xét trường hợp thang không có người và xét sự phụ thuộc của μ vào góc α. Muốn vậy ta xét phương trình (4) ; giải ra ta được :

$$\mu_{min} = \frac{1}{4}(\sqrt{9\tan^2\alpha + 8} - 3\tan\alpha)$$

Đặt $x = \tan\alpha$, và xét hàm $y = \sqrt{9x^2 + 8} - 3x$.

Lấy đạo hàm của y ta có : $y' = \dfrac{3(3x - \sqrt{9x^2+8})}{\sqrt{9x^2+8}} < 0$

Suy ra : μ_{min} giảm khi x tăng, nghĩa là μ_{min} càng lớn khi góc α càng nhỏ.

Muốn thang không trượt thì ma sát càng phải lớn nếu góc α càng nhỏ.

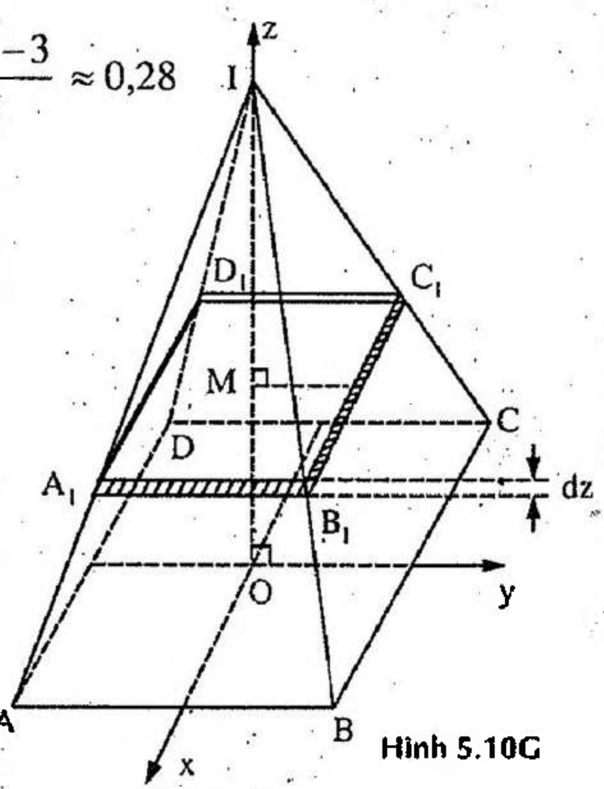
Với $\alpha = 45^{o}$, ta có $\tan\alpha = 1$ và $\mu_{min} = \dfrac{\sqrt{17} - 3}{4} \approx 0{,}28$

5.13. Chọn hệ trục Oxyz, có Oz là trục đối xứng của kim tự tháp, Oxy nằm trên mặt phẳng ngang như hình 5.10G. Khi đó vị trí khối tâm của kim tự tháp là :

$$x_G = 0 \; ; \; y_G = 0 \; ; \; z_G = h_G$$

– Xét một điểm M trên trục Oz có toạ độ $z_M = z$, ta hãy tính thể tích dv của hình hộp đáy $A_1B_1C_1D_1$ chiều cao dz (rất bé).

$$dv = (A_1B_1)^2 dz \qquad (1)$$



Hình 5.10G

với : $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{IM}{IO} = \frac{(H-z)}{H} \Rightarrow A_1B_1 = \frac{(H-z)}{H}L$ thay vào (1)

$$\Rightarrow dv = \frac{L}{H^2}(H-z)^2dz \quad .$$

Khối lượng hình hộp nhỏ này là (với ρ là khối lượng riêng) :

$$dm = \rho dv = \rho\frac{L^2}{H^2}(H-z)^2dz$$

Theo định nghĩa : $z_G = \frac{\sum z_M dm_M}{\sum dm_M} = \frac{\sum z_M dm_M}{m}$.

Chuyển tổng các phần tử rời rạc sang tích phân ta được :

$$z_G = \frac{1}{m}\int_0^H z dm = \frac{1}{m}\int_0^H z\frac{\rho L^2}{H^2}(H-z)^2dz$$

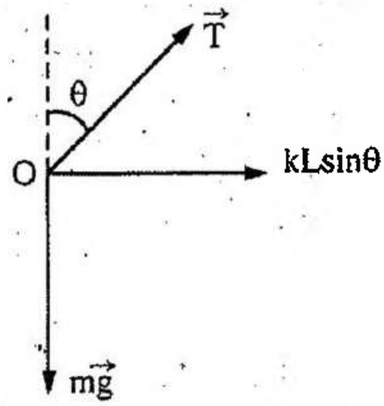
với $m = \Sigma dm_M$ là tổng khối lượng cả hình chóp của kim tự tháp.

$$\Leftrightarrow z_G = \frac{1}{m}\cdot\frac{\rho L^2}{H^2}\int_0^H(zH^2 - 2Hz^2 + z^3)\,dz = \frac{\rho L^2}{\rho VH^2}\left[\frac{z^2}{2}H^2 - 2H\frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4}\right]\Bigg|_0^H$$

$$\text{với } V = \frac{1}{3}L^2H \Rightarrow z_G = \frac{\rho L^2}{\rho\frac{1}{3}L^2.H.H^2}\left[\frac{H^2}{2} - \frac{2H^4}{3} + \frac{H^4}{4}\right] = \frac{H}{4}.$$

Chương III. DAO ĐỘNG CƠ

Chủ đề 6



Hình 6.1G

6.1. Giả sử lúc đầu, thanh là dài nên momen quán tính của vật đối với trục quay là ML^2. Ngoài ra ta cũng giả thiết độ dài lò xo là đáng kể để khi dao động, lò xo luôn ở vị trí nằm ngang (Hình 6.1G).

Phương trình chuyển động của vật đối với trục quay :

$$-(mg\sin\theta + kL\sin\theta\cos\theta)L = ML^2\theta''$$

Nếu góc θ là nhỏ : $\theta'' + \left(\frac{g}{L} + \frac{k}{m}\right)\theta = 0$.

Chu kì dao động : $T = 2\pi\sqrt{\frac{mL}{mg + kL}}$.

6.2. Do chu kì dao động riêng của quả cầu bằng 0,5 s, là rất lớn so với thời gian tác dụng của ngoại lực, nên có thể xem rằng độ dịch chuyển của quả cầu trong thời gian tác dụng của lực là không đáng kể. Vì vậy, sau thời gian bắt đầu dao động với vận tốc ban đầu v, biên độ dao động của quả cầu được xác định từ điều kiện :

$$\frac{kA^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow A = \frac{F\Delta t}{m\omega} ;$$

với $\omega = 2\pi f = 4\pi$ rad/s ; m = 0,1 kg ; F = 20 N ; $\Delta t = 3.10^{-3}$ s

Thay số, ta tính được : A = 4,8 cm.

6.3. Khi đầu B của thanh đã đi vào vùng có ma sát, áp dụng định luật II Niu-tơn ta có : $ma = -\frac{\mu mg}{l}x \Rightarrow x'' + \frac{\mu gx}{l} = 0$

với x là khoảng cách từ đầu B đến đầu mép vùng có ma sát.

Phương trình chuyển động của thanh là : $x = A\sin\omega t$, với $\omega = \sqrt{\frac{\mu g}{l}}$.

Chọn gốc thời gian t = 0 là lúc B vừa chạm vào mép (t = 0 thì x = 0), ta có :

$v_B = x'_B = \omega A\cos\omega t$

Theo đề bài : $v_{Bmax} = v_0$, nên ta có : $A = \frac{v_0}{\omega} = v_0\sqrt{\frac{l}{\mu g}}$.

Ta xét các trường hợp sau :

a) Trường hợp $v_0 \geq \sqrt{\mu g l}$. Khi đó $A \geq l$.

Lúc $x_B = l$ (thanh bắt đầu lọt hoàn toàn vào vùng có ma sát), ta có :

$$l = A\sin\omega t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{l}{A}\right) = \sqrt{\frac{l}{\mu g}}\arcsin\left(\frac{l}{A}\right)$$

t_1 là khoảng thời gian kể từ lúc đầu B bắt đầu chạm vào mép vùng có ma sát cho đến khi đầu A bắt đầu chạm vào mép đó.

+ Nếu $v_0 = \sqrt{\mu g l}$ thì $A = l$; $t_1 = \sqrt{\frac{l}{\mu g}} \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{\mu g}}$

và khi đó $v_B = x'_B = \omega A\cos\omega t_1 = \omega A\cos\frac{\pi}{2} = 0$: thanh dừng lại.

Như vậy, nếu $v_0 = \sqrt{\mu g l}$, thì khoảng thời gian kể từ lúc đầu B bắt đầu chạm vào mép vùng có ma sát cho đến khi thanh dừng lại bằng $t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{\mu g}}$ và khi đó đầu A ở ngang mép vùng có ma sát ($x_A = 0$).

+ Nếu $v_0 > \sqrt{\mu g l}$ thì $A > l$.

Trong trường hợp đó, lúc thanh dừng lại đầu A sẽ ở cách mép (ở bên trái A) một khoảng $x_A \neq 0$.

Để tính x_A ta áp dụng định luật bảo toàn năng lượng :

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{\mu m g}{2l} l^2 + \mu m g x_A \Rightarrow x_A = \frac{v_0^2}{2\mu g} - \frac{l}{2}$$

Khoảng thời gian kể từ lúc A bắt đầu chạm vào mép cho đến khi thanh dừng lại là t_2 :

$$x_A = \frac{1}{2}\mu g t_2^2 \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2x_A}{\mu g}} = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\mu g}\right)^2 - \frac{l}{\mu g}}$$

Như vậy, khoảng thời gian cần tìm là : $t = t_1 + t_2$.

b) Trường hợp $v_0 < \mu g l$: trong trường hợp này khi thanh dừng lại chỉ có một phần thanh nằm trong miền có ma sát.

Khi thanh dừng lại, ta có : $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{\mu m g}{2l} x_B^2$

với x_B là khoảng cách từ đầu B tới mép vùng có ma sát.

Từ đó : $x_B = \sqrt{\frac{l}{\mu g}}.v_0$.

Đầu A cách mép (về bên phải) : $x_A = l - x_B = l - \sqrt{\frac{l}{\mu g}}.v_0$.

Thời gian cần tìm : $x_B = A\sin\omega t_3$.

$$\sqrt{\frac{l}{\mu g}}.v_0 = v_0\sqrt{\frac{l}{\mu g}}\sin\sqrt{\frac{\mu g}{l}}t_3 \Rightarrow t_3 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{\mu g}}.$$

6.4. *Phần A.*

a) Chu kì dao động : $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} \Rightarrow k = \frac{4\pi^2.0,2}{2^2} = 2\ N/m$$

b) Vận tốc trong dao động điều hoà là : $v = \omega\sqrt{x_0^2 - x^2}$

với $x_0 = OC = 0,10$ m và $x = OD = 0,05$ m ; $\omega = \pi\ (s^{-1})$

$$v = \pi\sqrt{0,10^2 - 0,05^2} = 0,27\ m/s$$

c) Thời gian t_1 để vật đi từ O đến D là : $x = x_0\sin\omega t$

$$0,05 = 0,10\sin\pi t$$

$$\sin\pi t = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{6}\ s$$

Thời gian vật đi từ O đến C là $\frac{1}{4}$ chu kì tức là $\frac{1}{2}$ s.

Vậy thời gian vật đi từ D đến C : $t_x = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ s.

d) Động năng cực đại : $W_{dmax} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 = 0,01$ J.

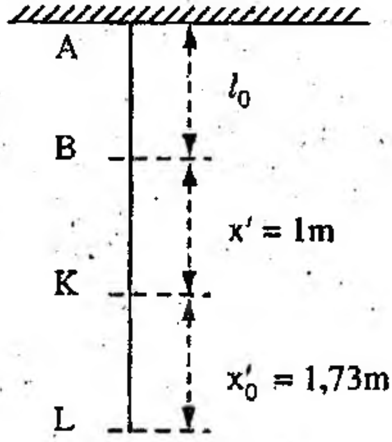
Phần B. (Hình 6.2G)

a) Khi vật lên đến điểm A rồi rơi xuống, gọi L là vị trí thấp nhất mà vật đi xuống được, K là vị trí cân bằng (tĩnh).

Đặt : $BK = x'$; $KL = x'_0$

• Tính x' :

$$mg = kx' \Rightarrow x' = \frac{mg}{k} = \frac{0,2.10}{2} = 1\ m$$



Hình 6.2G

• Tính x'_0

Theo định luật bảo toàn năng lượng, thế năng tại A = thế năng đàn hồi tại L :

$$mg(l_0 + x' + x_0) = \frac{1}{2}k(x' + x'_0)^2 \Rightarrow x'_0 = \sqrt{3}\ \text{m}$$

Thời gian vật quay lại A là : $t = 2(t_{AB} + t_{BK} + t_{KL})$.

Trong đó : t_{AB} là thời gian rơi tự do : $t_{AB} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2l_0}{g}} = 0{,}447$ s,

t_{AB} là thời gian vật dao động điều hoà đi từ B đến K : $x' = x'_0 \sin\omega t$

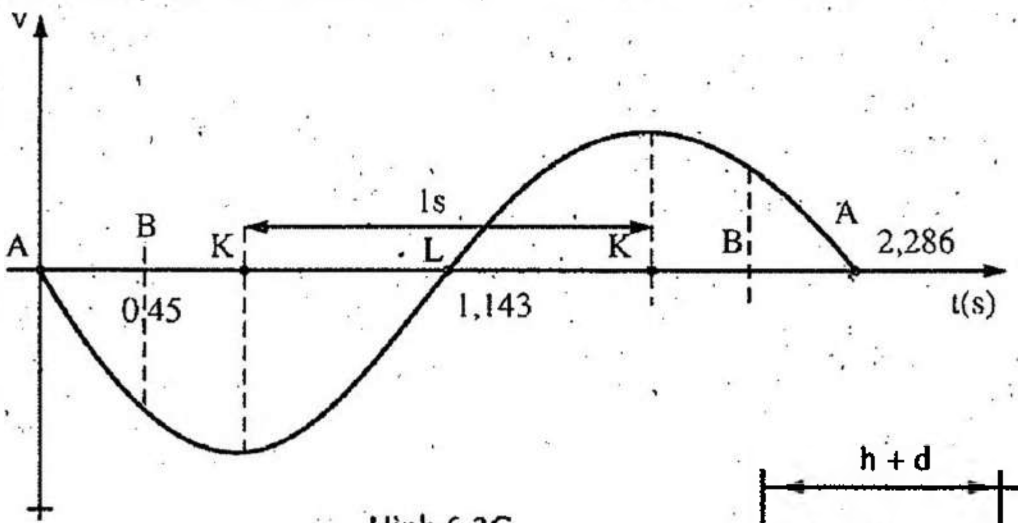
$1 = 1{,}73\sin\omega t$

$\sin\pi t = \frac{1}{1{,}73} \Rightarrow t_{BK} = 0{,}196$ s và $t_{KL} = \frac{T}{4} = 0{,}5$ s

Vậy : Thời gian vật quay lại A là :

$$t = 2(t_{AB} + t_{BK} + t_{KL}) = 2(0{,}447 + 0{,}196 + 0{,}5) = 2{,}286\ \text{s}$$

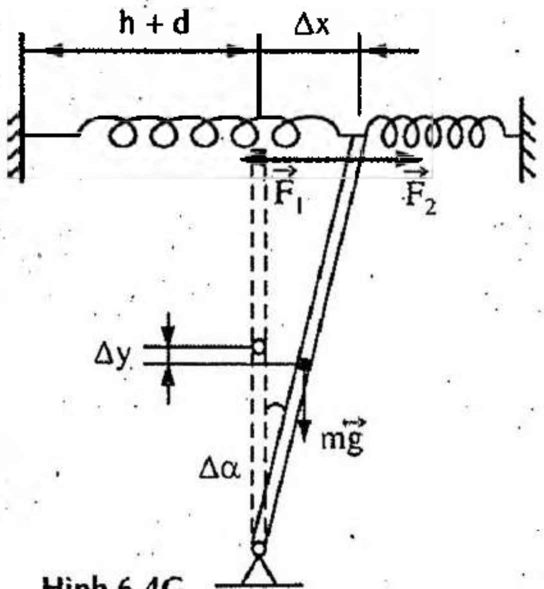
b) Đồ thị vận tốc (Hình 6.3G)



Hình 6.3G

6.5. Ban đầu thanh ở trạng thái cân bằng, nếu bị đẩy nhẹ ra khỏi vị trí cân bằng thì xuất hiện lực kéo về đưa thanh trở về vị trí cũ.

Gọi h là chiều dài lò xo, d là độ dãn (nếu lò xo bị nén thì d < 0). Cho thanh lệch khỏi vị trí cân bằng góc $\Delta\alpha$ (Hình 6.4G).



Hình 6.4G

Nếu $\Delta\alpha$ rất nhỏ, lò xo vẫn nằm ngang. Độ dãn lò xo thay đổi một lượng Δx, các lực tác dụng lên thanh :

$$F_1 = k(d + \Delta x) \tag{1}$$

$$F_2 = k(d - \Delta x) \tag{2}$$

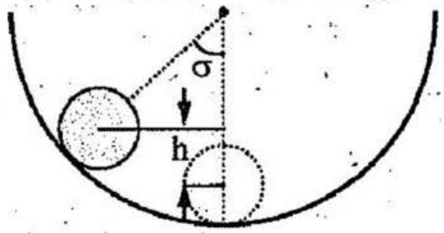
Các lực tác dụng lên thanh gồm trọng lực và lực của giá đỡ.

Thanh trở về vị trí cân bằng nếu tổng momen các lực này thoả mãn :

$$k(d + \Delta x)L - k(d - \Delta x)L - \frac{mg\Delta x}{2} > 0 \tag{3}$$

Từ phương trình này ta suy ra : $k > \dfrac{mg}{4L}$.

6.6. a) Gọi θ là góc hợp bởi bán kính quay của quả cầu với phương thẳng đứng và φ là góc quay của quả cầu quanh nó.



Hình 6.5G

Từ hình 6.5G :

$(R - r)\theta = r\varphi \Rightarrow (R - r)\ddot{\theta} = r\ddot{\varphi}$

Động năng của quả cầu :

$$W_d = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}m(R - r)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\left(\frac{R - r}{r}\dot{\theta}\right)^2$$

Hay $W_d = \dfrac{7}{10}m(R - r)^2\dot{\theta}^2$

Nếu chọn thế năng quả cầu bằng 0 khi $\theta = 0$, ta có :

$$W_t = mgh = mg(R - r)(l - \cos\theta)$$

Cơ năng quả cầu : $W = W_d + W_t = mg(R - r)(l - \cos\theta) + \dfrac{7}{10}m(R - r)^2\dot{\theta}^2$.

$$\frac{dW}{dt} = 0 \Rightarrow mg(R - r)\dot{\theta}\sin\theta + \frac{7}{10}m(R - r)^2 2\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0$$

hay $g\sin\theta + \dfrac{7}{5}(R - r)\ddot{\theta} = 0$.

Khi dao động với biên độ nhỏ, $\sin\theta \approx \theta$: $\ddot{\theta} + \dfrac{5}{7}\dfrac{g}{R - r}\theta = 0$.

Quả cầu dao động điều hoà với tần số góc : $\omega = \sqrt{\dfrac{5g}{7(R-r)}}$

và chu kì : $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{7(R-r)}{5g}}$.

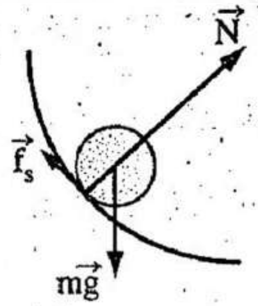
b) Lực ma sát là lực tạo ra momen lực làm quả cầu quay quanh khối tâm (Hình 6.6G)

$f_{ms}r = I|\ddot{\varphi}|$

$f_{ms}r = \dfrac{2}{5}mr^2\dfrac{R-r}{r}|\ddot{\theta}|$

$f_{ms} = \dfrac{2}{5}m(R-r)\ddot{\theta} = \dfrac{2}{5}m(R-r)\dfrac{5}{7}\dfrac{g}{R-r}|\theta|$

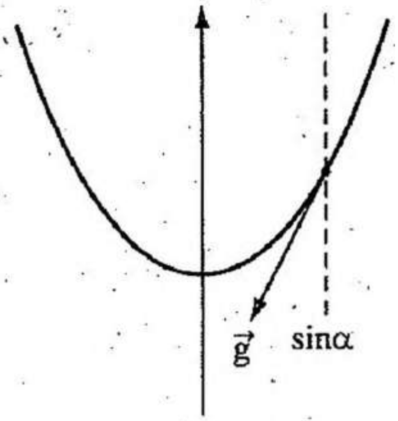
$f_{ms} = \dfrac{2}{7}mg|\theta|$



Hình 6.6G

Nếu $\theta = \theta_{max}$ thì : $f_{msmax} = \dfrac{2}{7}mg|\theta_{max}|$

6.7. (Hình 6.7G)



Hình 6.7G

Đặt $\tan\alpha = \dfrac{dt}{dx}$

– Lực tác dụng lên hạt ngọc trai, có phương tiếp tuyến với dây và độ lớn $mg\sin\alpha$.

– Gia tốc dài của hạt ngọc trai là $g\sin\alpha$.

– Thành phần của gia tốc này theo trục y là $-g\sin^2\alpha$. Đó chính là $\dfrac{d^2y}{dt^2}$.

Vì : $\sin\alpha = \dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$, $dy = b\sin\theta d\theta$, $dx = b(1+\cos\theta)d\theta$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ và $\cos\theta = 1 - \dfrac{y}{b}$, thay vào : $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -g\sin^2\alpha$

Ta được : $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{g}{2b}y = 0$

Đó là phương trình dao động điều hoà tần số : $f = 2\pi\sqrt{\frac{2b}{g}}$.

6.8. a) Chuyển động của quả cầu gồm chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay. Vào thời điểm ban đầu, góc quay bằng 0 vì lực đi qua tâm quả cầu. Như vậy lực ma sát tạo ra chuyển động quanh tâm.

Momen của lực ma sát là : $M_s = \mu MgR$ (1)

Gia tốc của quả cầu : $\omega_c = \frac{M_s}{I} = \frac{5}{2}\mu\frac{g}{R}$ (2)

(I là momen quán tính của quả cầu đối với tâm)

Vận tốc góc quả cầu : $\omega_c = \frac{5}{2}\mu\frac{g}{R}t$ (3)

Phương trình chuyển động tịnh tiến : $Ma = -\mu Mg$ (4)

Vận tốc và quãng đường đi trong chuyển động này :

$v_s = v_0 - \mu gt$; $s = v_0t - \frac{\mu}{2}gt^2$ (5)

Nếu điều kiện : $v_s = \omega_0 R$ (6)

được thoả mãn thì chuyển động trở thành chuyển động lăn.

Từ (3), (6) và (5) ta tìm được : $t = \frac{2\,v_0}{7\,\mu g}$.

Khoảng cách mà từ đó, quả cầu bắt đầu lăn : $s = \frac{12\,v_0^2}{49\,\mu g}$.

b) Gọi khoảng cách từ điểm đặt của lực đến bàn là R + h.

Nếu lực đặt ở vị trí này, quả cầu lăn ngay từ lúc đầu.

Momen lực tạo ra momen động lượng : $L = Mv_0h = I\omega$ (7)

Vận tốc góc quả cầu : $\omega = \frac{5}{2}\frac{v_0h}{R^2}$ (8)

Từ (7) và (8) $\Rightarrow h = \frac{2}{5}R$

Như vậy, điểm đặt của lực nằm trên trọng tâm quả cầu đoạn $h = \frac{2}{5}R$.

6.9. a) Độ cứng của lò xo : $k = \dfrac{F}{d} = \dfrac{mg}{d} = 6{,}5$ N/m.

Chu kì dao động của vật : $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 1{,}1$ s.

b) Đồ thị (Hình 6.8G) và phương trình chuyển động trong trường hợp này là :

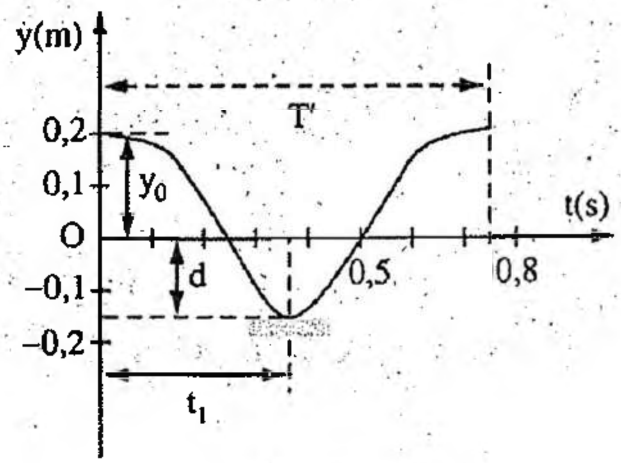
$y(t_1) = y_0\cos(\omega t)$

Thời điểm t_1 mà vật va chạm với bàn là :

$y(t_1) = -b = y_0\cos(\omega t_1)$

$\Rightarrow t_1 = \dfrac{1}{\omega}\arccos\left(\dfrac{b}{y_0}\right)$

$= \sqrt{\dfrac{m}{k}}\arccos\left(-\dfrac{b}{y_0}\right) = 0{,}423$ s.



Hình 6.8G

Chu kì dao động $T = 2t_1 = 0{,}85$ s.

6.10. a) Phương trình dao động $x(t) = A\sin(2\pi ft)$.

Phương trình vận tốc $v(t) = 2\pi f.A\cos(2\pi t)$.

Từ đó ta tính được thời gian để vật đi từ vị trí cân bằng đến nơi có li độ 1 cm là :

$$x_1 = x(t_1) = A\sin(2\pi ft_1) \Rightarrow t_1 = 0{,}417 \text{ s}$$

Vận tốc tại vị trí này có giá trị :

$$v_1 = v(t_1) = (2\pi.2).0{,}02\cos(2\pi.2.0{,}0417) = 0{,}218 \text{ m/s}$$

b) Lực ma sát nghỉ cực đại $F_{max} = \mu mg$.

Đó là lực duy nhất tạo gia tốc cho khối trụ :

$$F_{max} = ma_{max} \text{ với } a_{max} = (2\pi f_{max})^2 A.$$

Giá trị cực đại của tần số dao động để vật còn có thể dao động điều hoà trên mặt phẳng là :

$$\mu mg = ma_{max} = m(2\pi f_{max})^2 A \Rightarrow f_{max} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu g}{A}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{0{,}6.9{,}8}{0{,}02}} = 2{,}8 \text{ Hz}$$

c) Khi hệ dao động theo phương thẳng đứng, gia tốc của hệ không được lớn hơn g. Vì thế, tần số cực đại của hệ là :

$$g = a_{max} = (2\pi f_{max})^2 A \Rightarrow f_{max} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{A}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9{,}8}{0{,}02}} = 3{,}6 \text{ Hz}.$$

6.11. 1. Chọn gốc toạ độ là trung điểm O của thanh CD. Gọi $\overline{R}_C$ và $\overline{R}_D$ là hai lực của các trụ tác dụng lên thanh, x là toạ độ trọng tâm của thanh so với đường trung trực của CD, M_P và M_D là momen của trọng lực và của $\overline{R}_D$ đối với C.

Khi thanh nằm cân bằng thì : $M_P = M_D$

$$\left(\frac{l}{4} + x\right)mg = R_D\frac{l}{2} \text{ và } R_D + R_P = mg$$

Với $x = \frac{l}{5}$, tính được : $R_D = \frac{9}{10}mg$; $R_C = \frac{1}{10}mg$.

2. Ở vị trí này thì $x = -\frac{l}{4}$, $R_D = 0$, $R_C = mg$ do đó lực của thanh tác dụng lên nêm là : $F_C = \mu R_C = \mu mg$.

3. Lấy nêm ra

a) Các lực tác dụng lên thanh là : $F_C = \mu R_C = \mu\frac{l - 4x}{2l}mg$

$$F_D = \mu R_D = -\mu\frac{l + 4x}{2l}mg$$

Hợp lực tác dụng lên thanh là : $F(x) = -\mu\frac{4x}{l}mg$.

Đây là một dao động điều hoà có dạng $F = -kx$ với $k = \frac{4\mu mg}{l}$

Chu kì của dao động : $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{4\mu g}} = \pi\sqrt{\frac{l}{\mu g}}$

b) Vận tốc cực đại của thanh : $v_{max} = \frac{2\pi}{T}\frac{l}{4} = \frac{l\pi}{2T}$.

Để thanh không trượt trên trụ thì : $v_{max} < \omega r \Rightarrow \omega > \frac{l\pi}{2Tr}$.

Từ đó : $\omega > \frac{\sqrt{\mu l g}}{2r}$.

c) Công suất của các lực R_C và R_D là : $\mathscr{P}_C = \mu R_C\omega r$

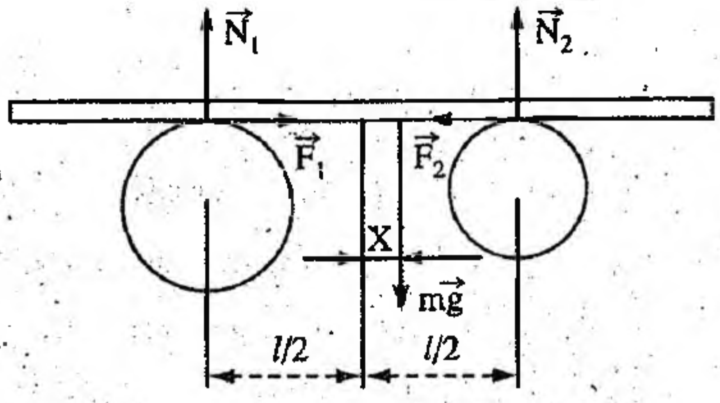
$$\mathscr{P}_D = \mu R_D\omega r$$

Suy ra công suất toàn bộ : $\mathscr{P} = \mathscr{P}_C + \mathscr{P}_D = \mu\omega r(R_C + R_D)$

$$\mathscr{P} = \mu mg\omega r$$

6.12. Gốc toạ độ (x = 0) được chọn sao cho nó trùng với khối tâm của tấm ván khi nó nằm chính giữa các trục của hai hình trụ. Kí hiệu x là toạ độ khối tâm của tấm ván theo trục nằm ngang.

Các hình trụ tác dụng lên tấm ván các phản lực $\vec{N}_1$ và $\vec{N}_2$ và các lực ma sát $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ (Hình 6.9G).



Hình 6.9G

Tổng hình chiếu các lực trên phương thẳng đứng bằng 0 : $N_1 + N_2 - mg = 0$

Trong đó m là khối lượng tấm ván. Vì tấm ván không quay trong mặt phẳng thẳng đứng, nên :

$$mg\left(\frac{l}{2} + x\right) - N_2 l = 0$$

Từ hai phương trình trên ta tìm được :

$$N_1 = mg\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{l}\right) \; ; N_2 = mg\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{l}\right) \qquad (1)$$

Đầu tiên tấm ván trượt đối với các hình trụ và do đó $F_1 = \mu N_1$ và $F_2 = \mu N_2$

Phương trình chuyển động của tấm ván :

$$ma = F_1 - F_2 = \mu(N_1 - N_2) = -2\mu mg\frac{x}{1} \qquad (2)$$

Từ phương trình này suy ra rằng, đầu tiên tấm ván dao động điều hoà $x = x_0\cos\Omega t$ với tần số : $\Omega = \sqrt{\frac{2\mu g}{I}} = 0{,}5\ s^{-1}$ và biên độ $x_0 = \frac{1}{2} = 2$ m

Tuy nhiên tấm ván sẽ chuyển động như thế cho tới thời điểm t_1, khi giá trị tuyệt đối của hình chiếu vận tốc của tấm ván : $v_1 = \omega r$. Sau đó tấm ván sẽ ngừng trượt trên hình trụ đó, lực ma sát nghỉ cân bằng với lực $\vec{F}_1$, còn tấm ván sẽ chuyển động đều với vận tốc $v = v_1 = 0{,}5$ m/s.

6.13. Chọn trục toạ độ có gốc toạ độ ứng với vị trí của đầu lò xo khi chưa có tải, chiều dương hướng lên trên.

a) Độ dãn của lò xo : $(M + m)g = -ky_0 \Rightarrow y_0 = -0,108$ m.

b) Gọi $\overline{F}$ là lực mà đĩa tác dụng lên vành :

$$ma = F - mg\ ;\ Ma = -F - ky - Mg \Rightarrow F = -\frac{kym}{(M + m)}.$$

c) Để đĩa còn tác dụng trên vành thì $F \geq 0$

$$-\frac{kym}{(M + m)} \geq 0 \Rightarrow y \leq 0$$

Vậy ở các vị trí có toạ độ $y > 0$ thì đĩa và vành tách nhau ra. Chúng bắt đầu tách nhau khi hệ đĩa-vành đi qua vị trí $y = 0$.

d) Tại vị trí $y_1 = -0,3$ m, hệ có cơ năng : $W_1 = \frac{1}{2}ky_1^2 + (M + m)gy_1$.

Tại vị trí $y = 0$, vành bắt đầu tách khỏi đĩa : $W_0 = \frac{1}{2}(M + m)v^2$.

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng : $\frac{1}{2}(M + m)v^2 = \frac{1}{2}ky_1^2 + (M + m)gy_1$.

Suy ra vận tốc của hệ : $v = 1,52$ m/s.

e) Theo định luật bảo toàn năng lượng :

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}ky_{max}^2 + Mgy_{max} \Rightarrow y_{max} = 8,24 \text{ cm}$$

f) Vành sẽ chuyển động chậm dần theo phương trình : $y_a = vt - \frac{1}{2}gt^2$

Đĩa sẽ dao động với chu kì $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 0,628$ s quanh vị trí cân bằng có toạ độ $y_{PO} = -\frac{Mg}{k}$.

Biên độ dao động : $A = y_{max} - y_{PO} = 0,181$ m.

Phương trình dao động của đĩa : $y_P = A\sin(\omega t + \varphi) - \frac{Mg}{k}$.

g) Khi t = 0, y = 0, vận tốc có giá trị dương nên $\varphi = \arcsin\dfrac{Mg}{ka} = 0,573$.

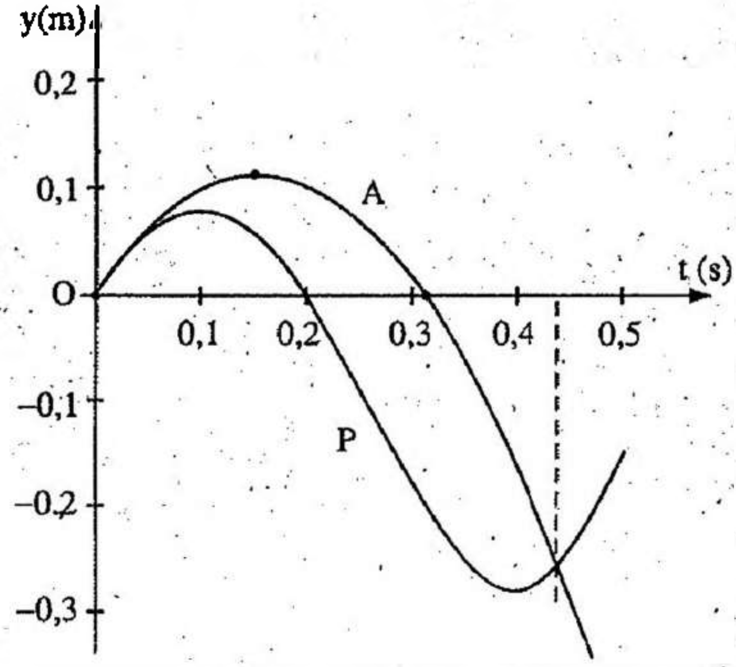
Vậy : $y_P = 0,181\sin(10t + 0,573) - 0,0981$ (m).

Để xác định thời gian vật rơi lại vào đĩa, ta giải hệ phương trình :

$y_a = 1,52t - 4,91t^2$

$y_P = 0,181\sin(10t + 0,573) - 0,0981$

Dùng phương pháp đồ thị, sẽ tìm được thời điểm khi $y_a = y_P$ thì t = 0,438 s (Hình 6.11G).



Hình 6.11G

6.14. a) Theo định luật bảo toàn năng lượng : $mg.2R = \frac{1}{2}Mv^2 + MgR(1 + \cos\theta)$

$v = \sqrt{2gR(1 + \cos\theta)}$

$$T - Mg\cos\theta = M\frac{v^2}{R} = 2Mg(1 + \cos\theta) \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{T}{Mg} = 2 + 3\cos\theta$$

$$\frac{7}{2} = 2 + 3\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

b) Theo định luật bảo toàn năng lượng thì quả cầu có thể lên đến điểm C và vận tốc bằng 0. Tuy nhiên khi vượt qua vị trí nằm ngang một góc nào đó thì dây bị chùng. Vì vậy, quả cầu sẽ không lên đến được điểm C.

c) Lực căng $\overline{T}$ và trọng lượng $\overline{P}$ tạo ra gia tốc hướng tâm có giá trị $a_n = \dfrac{v^2}{R}$.

Từ (1) ⇒ khi T = 0 thì : $2 + 3\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = 132^\circ$.

Từ đây, quả cầu chuyển động như một vật được ném đi với vận tốc ban đầu nào đó và không bị ràng buộc bởi dây nữa.

$$\omega r = x_0\cos\Omega t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{\Omega}\arcsin\left(\frac{\omega r}{\Omega x_0}\right) = \frac{\pi}{3}\ s$$

Toạ độ x_1 của khối tâm của tấm ván tại thời điểm đó bằng :

$x_1 = x_0\cos\Omega t_1 = \sqrt{3}$ m

Khi khối tâm của tấm ván tới gần gốc toạ độ, lực $\vec{F_1}$ tăng lên; lực $\vec{N_2}$ giảm đi và $\vec{F_2} \leq \mu N_2$ nên sẽ tới thời điểm mà lực $\vec{F_2}$ đạt tới giá trị cực đại của nó và sau đó sẽ không thể cân bằng với lực $\vec{F_1}$. Khi đó : $F_{2max} = \mu N_2$; $N_1 = N_2$

Từ (1), ta thấy rằng điều này xảy ra với x = 0, tức là sau thời gian :

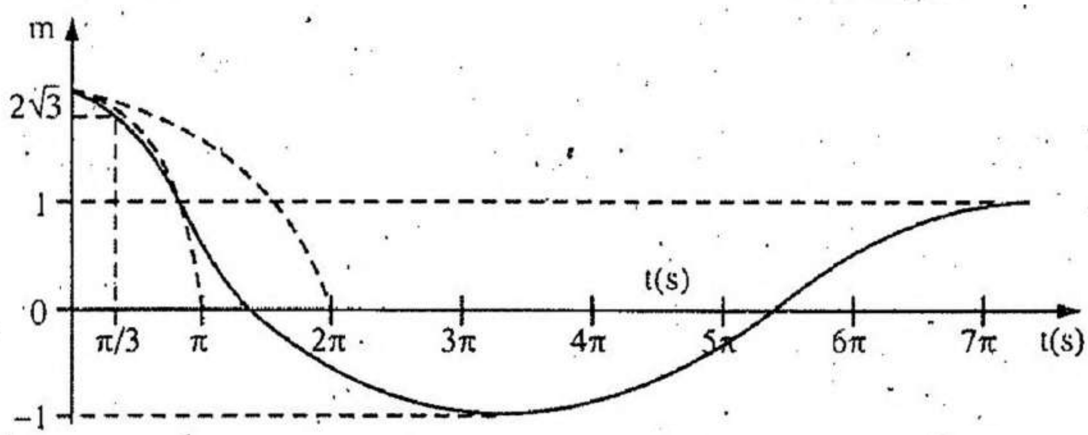
$$t_2 = t_1 + \frac{x_1}{v_1} = \left(\frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3}\right) \approx 4{,}4\ s$$

Sau khi tấm ván bắt đầu chuyển động, bắt đầu từ thời điểm $t = t_2$ tấm ván sẽ trượt đối với các hình trụ và chuyển động của tấm ván sẽ lại diễn ra ứng với phương trình (2). Tấm ván sẽ lại dao động điều hoà với tần số Ω. Biên độ dao động với x'_0 của tấm ván có thể tìm được khi biết vận tốc cực đại của tấm ván bằng v_1.

Vì : $v_1 = x'_0\Omega$ nên : $x_0 = \dfrac{v_1}{\Omega} = 1$ m.

Vận tốc tấm ván sẽ luôn luôn nhỏ hơn vận tốc dài của hình trụ lớn. Do đó tấm ván sẽ luôn luôn trượt đối với hình trụ này. Sau đó nó cũng sẽ trượt cả đối với hình trụ nhỏ vì rằng vận tốc của tấm ván sẽ chỉ đạt tới giá trị v_1 lúc khối tâm của nó đi qua vị trí cân bằng (x = 0). Do đó từ thời điểm t_2, tấm ván sẽ thực hiện dao động điều hoà với tần số Ω và biên độ $x'_0 = 1$ m.

Đồ thị phụ thuộc của toạ độ khối tâm của tấm ván vào thời gian (Hình 6.10G).



Hình 6.10G

d) Quả cầu được ném lên với vận tốc ban đầu v_0 ứng với $\theta_0 = 132^o$.

$$v = v_0 = \sqrt{2Rg(1 - \cos\theta_0)} = \sqrt{\frac{2Rg}{3}}$$

Phương trình chuyển động của quả cầu (chọn C là gốc toạ độ) : $x(t) = x_0 + v_{0x}t$

$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}t^2$ trong đó $v_{0x} = v_0\cos\theta_0$ và $v_{0y} = v_0\sin\theta_0$

Khi cắt đường PC thì $x = 0$: $t = -\frac{x_0}{v_{0x}} = -\sqrt{\frac{3R}{2g}\frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0}}$.

Thay vào y : $y = -R(1 + \cos\theta_0) - R\frac{\sin^2\theta_0}{\cos\theta_0} - \frac{1}{2}g\frac{3R^2\sin^2\theta_0}{2Rg\cos^2\theta_0} = -\frac{7}{16}R$

Giao điểm của quả cầu và đường PC cách điểm C về phía dưới một đoạn $\frac{7}{16}R$.

e) Theo định luật bảo toàn năng lượng : $\frac{7}{16}MgR = \frac{1}{2}Mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{7Rg}{8}}$.

6.15. a) Khi được thả từ vị trí góc α, lực căng dây lúc thả vật là $mg\cos\alpha$, thành phần lực căng dây khi ấy theo phương thẳng đứng là : $T = mg\cos^2\alpha$ (đạt giá trị cực tiểu là $F_1 = 0,1$ N)

Khi qua vị trí cân bằng, lực căng dây đạt giá trị cực đại : $T' = mg + \frac{mv^2}{l}$.

(giá trị cực đại khi qua vị trí cân bằng lần đầu là $F_2 = 1,6$ N).

b) Chu kì con lắc vào khoảng 2,0 – 2,1 s.

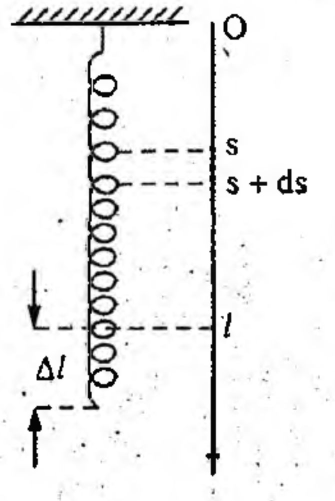
c) $h = l(1 - \cos\alpha)$

Từ định luật bảo toàn năng lượng, ta suy ra : $T' = mg(3 - 2\cos\alpha)$.

Kết quả : $\frac{T'}{T} = \frac{3 - 2\cos\alpha}{\cos^2\alpha} \approx 16 \Rightarrow 16\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 3 = 0$.

Từ đó $\alpha \approx 120^o \Rightarrow m = \frac{T'_{max}}{g(3 - 2\cos\alpha)} = 73$ g.

6.17. (Hình 6.12G)



Hình 6.12G

a) $k = \dfrac{F}{\Delta l}$

b) Tính độ dãn gây ra bởi trọng lượng của lò xo (Hình 6.12.G). Xét một phần tử của lò xo nằm trong khoảng s và s + ds ($0 \le s \le l$). Phần tử này coi như là một lò xo có độ dài ds, có độ cứng là k_s. Lò xo nhỏ này bị kéo dãn bởi trọng lượng của phần lò xo nằm ở dưới nó. Gọi dl là độ dãn của phần tử này, ta có :

$$k_s dl = \frac{M}{l}(l - s)g \qquad (1)$$

Mặt khác, độ cứng của các phần của một lò xo tỉ lệ nghịch với chiều dài của phần đó : $k_s ds = kl \Rightarrow k_s = \dfrac{kl}{ds}$.

Thay vào (1) ta được : $dl = \dfrac{Mg}{kl^2}(l - s)ds \qquad (2)$

Tích phân phương trình (2) theo s, ta được độ dãn của lò xo gây ra bởi trọng lượng của nó :

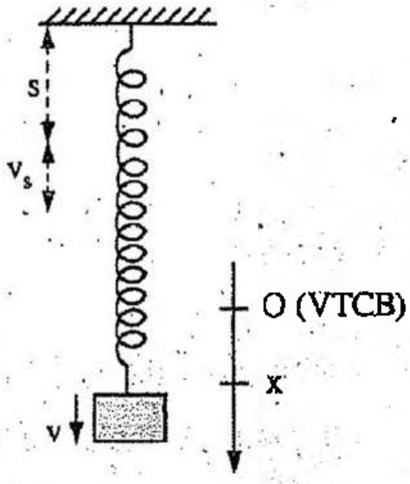
$$\Delta l_0 = \int_0^{\Delta l_0} dl = \frac{Mg}{kl^2}\int_0^l (l - s)ds$$

$$\Delta l_0 = \frac{Mg}{2k} \qquad (3)$$

Nếu móc vào đầu dưới của lò xo một vật có khối lượng m, thì khi cân bằng lò xo dãn ra một đoạn bằng :

$$\Delta l = \Delta l_0 + \frac{mg}{k} = \frac{\left(\dfrac{M}{2} + m\right)g}{k} \qquad (4)$$

c) Chọn gốc toạ độ của trục x tại vị trí cân bằng. Giả sử, tại thời điểm t, vật m ở li độ x và có vận tốc là v (Hình 6.13.G). Sau thời gian dt, đầu dưới của lò xo dịch chuyển được một đoạn dx = vdt. Nếu độ biến dạng Δl của lò xo rất nhỏ so với độ dài l của nó, tức là nếu $\dfrac{\Delta l}{l} \ll 1$, thì phần tử của lò xo ở cách điểm treo một đoạn s sẽ dịch chuyển một đoạn là $\frac{sdx}{l}$. Suy ra ở thời điểm t, phần tử này có vận tốc $v_s = \frac{s}{l}v$. Động năng của phần tử lò xo này là :



Hình 6.13G

$$dW = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{l}ds\right)\left(\frac{s}{l}v\right)^2$$

Động năng của lò xo là :

$$W_{\text{lò xo}} = \int dW = \frac{1}{2}\frac{M}{l^3}v^2\int_0^l s^2 ds = \frac{1}{6}Mv^2 \qquad (5)$$

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng cho toàn thể con lắc ta được :

$$W = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{6}Mv^2 = \text{const}$$

$$W = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{3}\right)v^2 = \text{const} \qquad (6)$$

Phương trình (6) chứng tỏ con lắc dao động điều hoà với tần số góc :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{M}{3}}} \qquad (7)$$

Cần lưu ý rằng trong cách giải ở câu c, chúng ta đã thừa nhận độ dãn tỉ lệ với khoảng cách đến điểm treo. Nhưng điều này chỉ đúng nếu lực kéo dãn là như nhau tại mọi điểm dọc theo lò xo, tức là chỉ đúng khi lò xo đứng yên. Còn khi các phần tử của lò xo có khối lượng và đang chuyển động có gia tốc thì ta không thể áp dụng điều kiện dãn tĩnh được. Vì thế công thức (7) chỉ là gần đúng. Tuy nhiên, nếu $M \ll m$ để cho lực kéo dọc theo lò xo gần như không đổi, thì công thức (7) được kiểm chứng là đúng.

6.17. a) Gọi vận tốc của quả cầu 1 ngay sau khi va chạm là v_1 và của quả cầu 3 là v'_0. Định luật bảo toàn động lượng cho ta : $\frac{m}{2}v_0 = mv_1 + \frac{m}{2}v'_0$, và định luật bảo toàn cơ năng (động năng) cho ta :

$$\frac{m}{2}.\frac{v'_0}{2} = m\frac{v_1^2}{2} + \frac{m}{2}v_0'^2$$

Rút gọn các phương trình đó ta được : $v'_0 = v_0 - 2v_1$ hay $v_0^2 = 2v_1^2 + v_0'^2$.

Cuối cùng ta có phương trình : $v_1(3v_1 - 2v_0) = 0$ vì $v_1 \neq 0$, nên ta được các nghiệm là :

$$v_1 = \frac{2}{3}v_0 \text{ và } v'_0 = -\frac{v_0}{3}.$$

Như vậy quả cầu 3 bật được trở lại.

b) Sau va chạm hệ các quả cầu 1 và 2 là kín ; động lượng của hệ được bảo toàn.

Gọi v_G là vận tốc của G thì : $m\frac{2}{3}v_0 = 2mv_G$ = động lượng của hệ.

Vậy G chuyển động thẳng đều với vận tốc $v_G = \frac{v_0}{3}$.

c) Lấy hệ quy chiếu gắn với G. Xét trong hệ này thì

– quả cầu 1 có vận tốc : $v_{\frac{1}{G}} = \frac{2}{3}v_0 - \frac{v_0}{3} = \frac{v_0}{3}$.

– quả cầu 2 có vận tốc : $v_{\frac{2}{G}} = 0 - \frac{v_0}{3} = -\frac{v_0}{3}$.

Hai quả cầu ở hai đầu lò xo được truyền những vận tốc bằng và ngược chiều, mỗi cầu coi như gắn vào một lò xo có đầu G cố định, có chiều dài $\frac{l}{2}$, nghĩa là có độ cứng k. Vậy hai quả cầu dao động ngược pha quanh các vị trí cân bằng cách G một khoảng $\frac{l}{2}$.

Tần số góc dao động : $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$.

d) Trong dao động điều hoà có các phương trình độ dời : $x = A\sin\omega t$ và vận tốc chuyển động : $v = A\omega\cos\omega t$.

Lúc $t = 0$ thì $v = A\omega = \frac{v_0}{3}$ vậy : $A = \frac{v_0}{3\omega} = \frac{v_0}{3}\sqrt{\frac{m}{2k}}$.

Vậy khoảng cách max là $d = l + 2A = l + \frac{v_0}{3}\sqrt{\frac{m}{2k}}$.

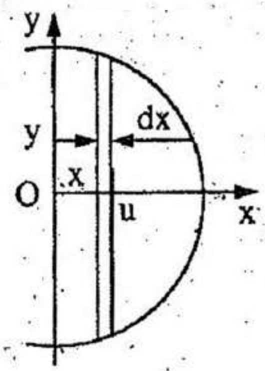
e) $v_0 = 3$ m/s $\Rightarrow v_{\frac{1}{G}} = 1$ m/s ; $\omega = \sqrt{\dfrac{2.5}{0,1}} = 10$ rad/s ; A = 0,1 m $\Rightarrow$ d = 0,5 m.

6.18. a) Xác định vị trí khối tâm.

Xét một dải song song với đường kính chia đôi các đĩa, ở cách tâm đường tròn O một khoảng x (Hình 6.14G).

Gọi l là độ dày của đĩa, 2y là độ dài của dải, ρ là khối lượng riêng của đĩa, dx là độ rộng của dải, khối lượng dm của dải là :

$$dm = 2\rho.y.l.dx = 2\rho\sqrt{R^2 - x^2}dx$$



Hình 6.14G

Hoành độ x_G của khối tâm là :

$$x_G = \frac{\int_0^R x\,dm}{\int_0^R dm} = \frac{\int_0^R 2\rho l\sqrt{R^2 - x^2}x\,dx}{M}$$

Đặt $x^2 = u \Rightarrow 2xdx = du$

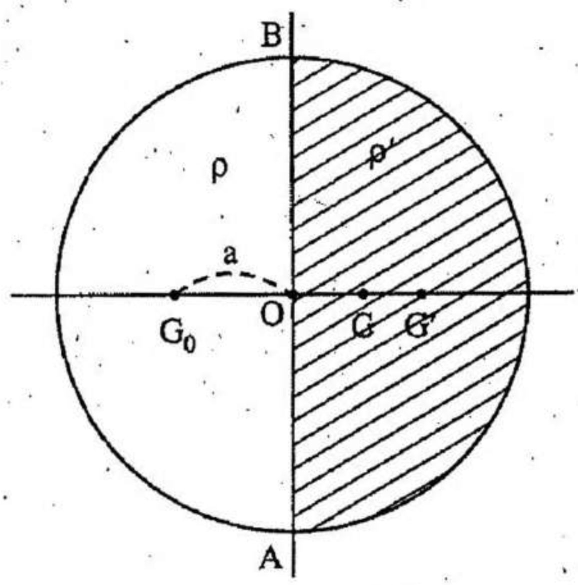
với $M = \frac{1}{2}\pi R 2 l\rho$, ta được : $\dfrac{\rho l\int_0^R \sqrt{R^2 - u.du}}{\frac{1}{2}\pi R^2.l\rho} = \dfrac{2}{\pi R^2}.\int_0^R (R^2 - u)^{\frac{1}{2}}du$

$$x_G = -\frac{2}{\pi R^2}.\frac{1}{3}(R^2 - u)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^R = \frac{4R^3}{3\pi R^2}$$

$$x_G = \frac{4}{3\pi}R \approx 0,42\,R.$$

b) Tính góc φ

Gọi V là mỗi nửa thể tích hình trụ, và a là khoảng cách từ O đến hai trọng tâm G′, G_0 của hai nửa hình trụ, x_G là hoành độ khối tâm G của hệ, ta có (Hình 6.15G) :



Hình 6.15G

$$(V\rho + V\rho')x_G = V\rho' a - V\rho.a$$

$$x_G(\rho + \rho') = (\rho' - \rho)a$$

với : $a = \frac{4}{3\pi}R \approx 0,42R$

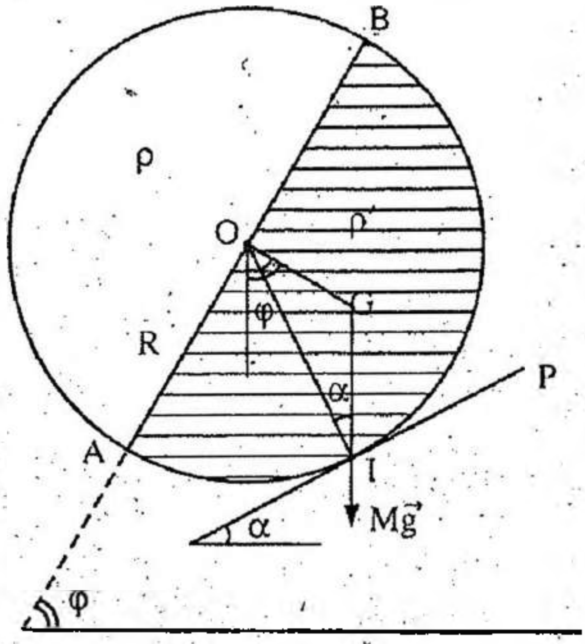
$$x_G = \frac{\rho' - \rho}{\rho' + \rho} \cdot \frac{4}{3\pi}R$$

Hình trụ cân bằng nên mặt phẳng nghiêng P, thì đường thẳng đứng qua trọng tâm G phải đi qua điểm I (Hình 6.16G). Do đó :

$$\widehat{OIG} = \alpha \text{ và : } \widehat{OGI} = \pi - \varphi$$

Trong tam giác OGI, ta có :

$$\frac{OG}{\sin\alpha} = \frac{OI}{\sin\widehat{OGI}} = \frac{OI}{\sin(\pi - \varphi)} = \frac{R}{\sin\varphi}$$



Hình 6.16G

Từ đó, suy ra : $\sin\varphi = \frac{R}{OG}.\sin\alpha = \frac{3(\rho' + \rho)}{4(\rho' - \rho)}\pi.\sin\alpha$

c) Để cân bằng của hình trụ là bền, góc φ phải nhỏ hơn $\frac{\pi}{2}$.

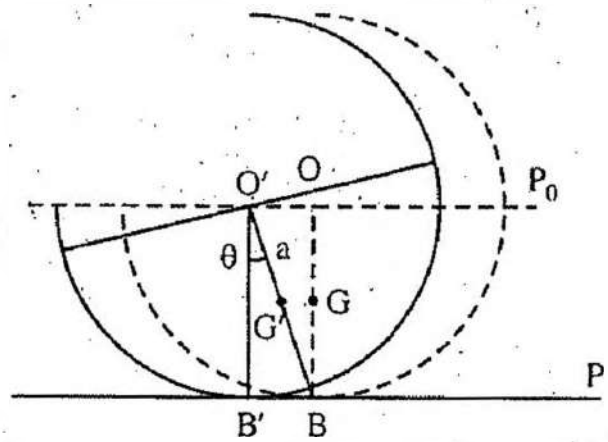
Hình trụ bắt đầu lăn xuống khi $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Vậy giá trị giới hạn của α ứng với $\sin\varphi = 1$, tức là $\sin\alpha = \frac{4}{3\pi}\frac{(\rho' - \rho)}{(\rho' + \rho)}$.

d) Khi hình trụ lăn thì trục O có độ cao không đổi R. Khối tâm G của hình trụ cách trụ O một khoảng : $a = \frac{4}{3\pi}\frac{(\rho' - \rho)}{(\rho' + \rho)}R$.

Ban đầu G ở cách mặt phẳng nằm ngang P_0 đi qua O một khoảng a. Khi hình trụ đã làm một góc θ thì G cách mặt phẳng đó khoảng $a' = a\cos\theta$, và cách mặt phẳng nằm ngang P một khoảng $R - a\cos\theta$ (Hình 6.17G). Thế năng của hình trụ tính từ P là :

$$W_t = Mg(R - a\cos\theta).$$



Hình 6.17G

W_t qua min khi $\theta = 0$ chứng tỏ đó là vị trí cân bằng bền. Ta tính động năng W_d của hình trụ. Nó gồm hai số hạng :

– Động năng tịnh tiến của khối tâm G.

Chỉ xét những dao động nhỏ thì có thể coi như G quay quanh điểm tiếp xúc B với vận tốc góc $\omega = \theta'$.

$$W_{dtt} = \frac{1}{2}Mv_G^2 = \frac{1}{2}M(B_G.\omega)^2 = \frac{1}{2}M(R - a)2\omega^2$$

– Động năng quay của hình trụ quanh trục đi qua G song song với trục O của hình trụ.

$W_{dq} = \frac{1}{2}I_G\omega^2$, I_G là momen quán tính đối với trục G.

Gọi I_0 là momen quán tính đối với trục O thì : $I_G = I_O - Ma^2$.

Nếu m và m' là khối lượng hai nửa hình trụ thì :

$$I_O = \frac{1}{2}\frac{2mR^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{2m'R^2}{2} = \frac{1}{2}R^2(m + m') = \frac{1}{2}MR^2$$

$$\Rightarrow I_G = \frac{1}{2}MR^2 - Ma^2 = \frac{M}{2}(R^2 - 2a^2)$$

$$W_{dq} = \frac{M}{4}(R^2 - 2a^2)\omega^2$$

Động năng W_d của hình trụ :

$$W_d = W_{dtt} + W_{dq} = \frac{M\omega^2}{4}[2(R^2 + a^2 - 2Ra) + R^2 - 2a^2]$$

$$W_d = \frac{M\omega^2}{4}(3R^2 - 4Ra) = A\theta^2 \text{ với } A = \frac{M}{4}(3R^2 - 4Ra)$$

Cơ năng của hình trụ được bảo toàn : $A\theta^2 + Mg(R - a\cos\theta) = \text{const}$.

Lấy đạo hàm đối với thời gian : $2A\dot{\theta}\ddot{\theta} + Mga\sin\theta.\dot{\theta} = 0$.

Đơn giản $\dot{\theta}$ và thay $\sin\theta \approx \theta$ ta có : $2A\ddot{\theta} + Mga\theta = 0$.

Biểu thức trên chứng tỏ hình trụ dao động điều hoà với tần số góc :

$$\omega = \sqrt{\frac{Mga}{2A}} = \sqrt{\frac{2ga}{R(3R - 4a)}}$$

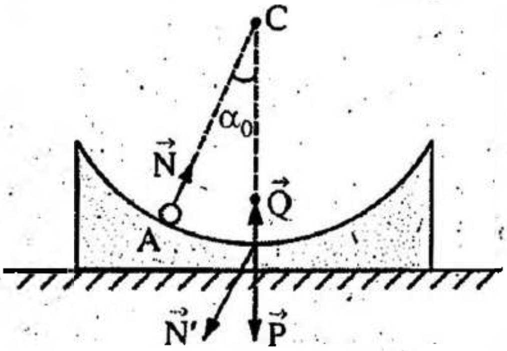
6.19. (Hình 6.18G).

1. a) Khi bán kính CA lệch góc α : $\overrightarrow{N} + m\overrightarrow{g} = m\overrightarrow{a}$ (1)

Chiếu (1) trên trục Ox : $-mg\dfrac{x}{R} = mx''$

$x'' + \omega^2 x = 0$

với $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{R}}.A$



Hình 6.18G

Vật dao động điều hoà với chu kì $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$.

b) Chiếu (1) trên phương của bán kính và phương vuông góc với bán kính :

$N = mg\cos\alpha + \dfrac{mv^2}{R}$

$\dfrac{mv^2}{2} = mgR(\cos\alpha - \cos\alpha_0) \Rightarrow N = 3mg\cos\alpha - 2mg\cos\alpha$.

c) Áp lực của M lên sàn là : $N_x = N\sin\alpha = 1{,}5mg\sin\alpha - 2mg\cos\alpha_0\sin\alpha$.

$Q = Mg + N\cos\alpha = Mg + 3mg\cos^2\alpha - 2mg\cos\alpha.\cos\alpha$.

Điều kiện để B đứng yên là : $N_x \leq \mu Q$ với mọi $\beta \leq \alpha_0$.

Với α nhỏ : $N_x \approx (3mg - 2mg\cos\alpha_0)\alpha$ tỉ lệ với α nên có giá trị cực đại khi $\alpha = \alpha_0$.

$N_{max} = (3mg\cos\alpha - 2mg\cos\alpha_0)\sin\alpha_0 = mg\cos\alpha_0\sin\alpha_0$

$\dfrac{dQ}{mgd\alpha}$ $2(\cos\alpha_0 - 3\cos\alpha)\sin\alpha < 0$ luôn có giá trị âm nên Q nghịch biến với α.

Vậy : $Q_{min} = Mg + mg\cos^2\alpha_0$ khi $\alpha = \alpha_0$

$$\mu > \frac{N_x}{Q} \Rightarrow \mu > \frac{N_{xmax}}{Q}$$

$$\mu_{min} = \frac{m\cos\alpha_0\sin\alpha_0}{M + m\cos^2\alpha}$$

Nếu thay $\cos\alpha_0 = 1 - \dfrac{\alpha_0^2}{2}$ thì $\mu_{min} = \dfrac{m\alpha_0}{M + m\left(1 - \dfrac{\alpha_0^2}{2}\right)}$.

2. Khi bỏ qua ma sát :

a) Theo phương ngang, động lượng bảo toàn.

Vì α nhỏ nên có thể coi vận tốc của m có phương nằm ngang.

$mv + MV = 0$

Bảo toàn cơ năng cho ta : $\dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{MV^2}{2} = mgR(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$

Với $\alpha' R = (v - V) = v(1 + \dfrac{m}{M})$

$$\frac{mR^2\alpha'^2}{2\left(1 + \dfrac{m}{M}\right)^2} + \frac{Mm^2R^2\alpha'^2}{2M^2\left(1 + \dfrac{m}{M}\right)^2} = \frac{1}{2}mgR(\alpha_0^2 - \alpha^2);$$

$$R\frac{\alpha^2}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\right) - \frac{1}{2}g(\alpha_0^2 - \alpha^2)$$

Đạo hàm hai vế theo t : $\alpha'' = -\dfrac{g\left(1 + \dfrac{m}{M}\right)}{R}\alpha$.

Phương trình này chứng tỏ hệ dao động với tần số góc : $\omega = \sqrt{\dfrac{g\left(1 + \dfrac{m}{M}\right)}{R}}$,

hay chu kì : $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g\left(1 + \dfrac{m}{M}\right)}}$.

b) Đối với m : $\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$. Gọi x_1, x_2 là li độ dao động của m và M.

Chiếu hai vế phương trình trên lên Ox :

$$N = mg\cos\alpha + \frac{m(v - V)^2}{R}.$$

$$mv + MV = 0$$

Bảo toàn cơ năng : $\frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2} = mgR(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$.

$$v = \sqrt{\left(\frac{M}{m+M}\right)2gR(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}\,;\ \ v - V\left(1 + \frac{m}{M}\right) \text{ nên khi } \alpha = 0.$$

$\cos\alpha$ và $(v - V)$ cực đại nên N cực đại :

$$N_{max} = mg\frac{m(v-V)^2}{R} = mg + 2mg\left(1 + \frac{m}{M}\right)(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$$

$$N_{max} = 3mg + 2mg\frac{m}{M} - 2mg\left(1 + \frac{m}{M}\right)\cos\alpha_0.$$

6.20. (Hình 6.19G)

1. Khi không có ma sát

a) Ở vị trí cân bằng :

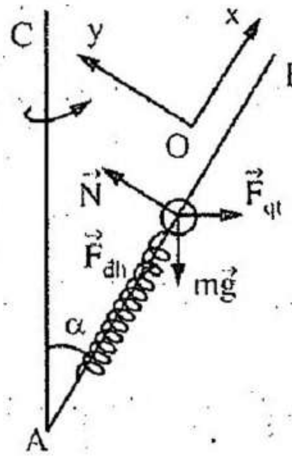
$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{dh} + \vec{F}_{qt} = \vec{0} \qquad (1)$$

Chiếu (1) theo phương Ox với chú ý :

$F_{dh} = k(l - l_0)$, $F_{qt} = m^2 l\sin^2\alpha$, ta có :

$$-mg\cos\alpha - k(l - l_0) + m^2 l\sin^2\alpha = 0 \qquad (2)$$

$$\Rightarrow l = \frac{kl_0 - mg\cos\alpha}{k - m\omega^2\sin^2\alpha} \qquad (3)$$



Hình 6.19G

Biện luận :

– Tồn tại vị trí cân bằng khi $l > 0$, tức là tử và mẫu của (3) phải cùng dấu.

– Nếu tử và mẫu của (3) khác dấu thì không tồn tại vị trí cân bằng, trừ điểm A.

Khi lệch khỏi vị trí cân bằng, hợp lực tác dụng lên bi trong hệ quy chiếu gắn với thanh : $\vec{F} = \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{dh} + \vec{F}_{qt}$

Chiếu theo phương Ox : $F_x = (m\omega^2\sin^2\alpha - k)l + kl_0 - mg\cos\alpha$ (4)

$dF_x = (m\omega^2\sin^2\alpha - k)dl$ (5)

– Nếu dF_x trái dấu với dl, thì cân bằng là bền (Khi vật dịch chuyển dọc theo Ox ra xa vị trí cân bằng : $dl > 0$ thì $dF < 0$, hợp lực kéo vật về vị trí cân bằng).

– Nếu dF_x cùng dấu với dl, thì cân bằng là không bền.

Nhìn vào (5) ta thấy đồng thời :

(*) $\begin{cases} m\omega^2\sin^2\alpha - k < 0 \\ kl_0 - mg\cos\alpha > 0 \end{cases}$ thì cân bằng là bền ; hoặc đồng thời

(**) $\begin{cases} m\omega^2\sin^2\alpha - k > 0 \\ kl_0 - mg\cos\alpha < 0 \end{cases}$ thì cân bằng là không bền.

b) Nếu điều kiện (**) được thoả mãn thì khi vật chịu tác dụng của một ngoại lực nhỏ sẽ lệch ngày càng xa vị trí cân bằng.

Phương trình (3) cho thấy nếu thêm vào g một lượng a > 0 thì l giảm. Vật sẽ chuyển động về phía A.

Nếu điều kiện (*) thoả mãn thì vật sẽ dao động quanh vị trí cân bằng.

Khi thanh chưa chuyển động lên trên thì vị trí cân bằng cách A là l_1, với :

$$l_1 = \frac{kl_0 - mg\cos\alpha}{k - m\omega^2\sin^2\alpha}$$

đó cũng là vị trí ban đầu của vật.

Khi thanh chuyển động lên trên, vị trí cân bằng cách A là :

$$l_2 = \frac{kl_0 - m(g + a)\cos\alpha}{k - m\omega^2\sin^2\alpha}$$

Biên độ dao động là $l_1 - l_2 = \dfrac{ma\cos\alpha}{k - m\omega^2\sin^2\alpha}$.

Phương trình : $dF_x = -(k - m\omega^2\sin^2\alpha)dl$ cho :

$$x'' = -\left(\frac{k - m\omega^2\sin^2\alpha}{m}\right)x \qquad \text{(coi } dl = x\text{)}$$

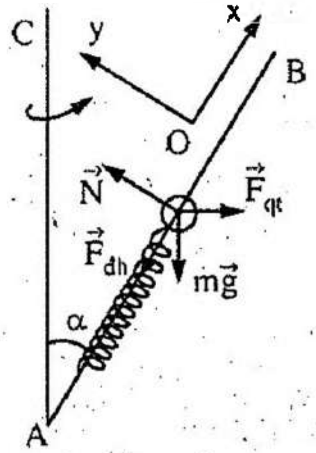
Tần số góc của dao động là :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2\sin^2\alpha}, \text{ (điều kiện (*) : } \frac{k}{m} - \omega^2\sin^2\alpha > 0\text{)}$$

Chu kì dao động là : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_1} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{k}{m} - \omega^2\sin^2\alpha}}$

2. Nếu có ma sát (Hình 6.20G)

Khi hòn bi ở vị trí thấp nhất, nó có xu hướng trượt lên, do đó lực ma sát hướng xuống :



Hình 6.20G

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{dh} + \vec{F}_{qt} = \vec{0} \quad (1)$$

Chiếu (1) theo hai phương Ox, Oy với chú ý :

$F_{ms} = N$, $F_{dh} = k(l_m - l_0)$.

$F_{qt} = m^2 l\sin$

Ta có : $N - mg\sin\alpha - m^2 l\sin\alpha\cos\alpha = 0 \quad (2)$

$-mg\cos\alpha - N - k(l_m - l_0) + m^2 l\sin^2\alpha = 0 \quad (3)$

$$l_{min} = \frac{kl_0 - mg\cos\alpha - \mu mg\sin\alpha}{k - m\omega^2\sin^2\alpha + \mu mg\omega^2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$l_{max} = \frac{kl_0 - mg\cos\alpha + \mu mg\sin\alpha}{k - m\omega^2\sin^2\alpha - \mu mg\omega^2\sin\alpha\cos\alpha} \text{ (coi như } \mu \text{ đổi dấu)} \quad (4)$$

$l_{min} \le l \le l_{max}$

Bài toán có nghiệm như trên khi :

$$l_{min} = \frac{kl_0 - mg\cos\alpha - \mu mg\sin\alpha}{k - m\omega^2\sin^2\alpha + \mu mg\omega^2\sin\alpha\cos\alpha} > 0$$

Nếu : $$l_{max} = \frac{kl_0 - mg\cos\alpha + \mu mg\sin\alpha}{k - m\omega^2\sin^2\alpha - \mu mg\omega^2\sin\alpha\cos\alpha} < 0$$

Bài toán vô nghiệm, không tồn tại vị trí cân bằng (trừ điểm A)

Nếu $l_{min} < 0$, $l_{max} > 0$ thì $0 \le l \le l_{max}$.

6.21. a) Momen quán tính của con lắc : $I = \frac{ml^2}{3} + Ml^2 = l^2\left(M + \frac{m}{3}\right)$.

Momen lực : $M = mg\frac{l}{2}\sin\theta + Mgl\sin\theta - c\theta \approx \theta\left[gl\left(M + \frac{m}{2}\right) - c\right]$

Phương trình : $I\theta'' = M$.

$$l^2\left(M + \frac{m}{3}\right)\theta'' = \theta\left[gl\left(M + \frac{m}{2}\right) - c\right]$$

Hay $\theta'' + \dfrac{c - gl\left(M + \dfrac{m}{2}\right)}{l^2\left(M + \dfrac{m}{3}\right)}\theta = 0$

Với điều kiện : $c > gl\left(M + \dfrac{m}{2}\right)$, con lắc có dao động nhỏ với chu kì :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l^2\left(M + \dfrac{m}{3}\right)}{c - gl\left(M + \dfrac{m}{2}\right)}} \qquad (1)$$

b) Điều kiện $c > gl\left(M + \dfrac{m}{2}\right)$, với $g_{max} = 9{,}9\ m/s^2$

cho : c = 9,9.0,2.0,105 hay c > 0,2079

c) Đặt $a = l^2\left(M + \dfrac{m}{3}\right) = 0{,}004132$;

$b = l\left(M + \dfrac{m}{2}\right) = 0{,}021$ (đơn vị SI)

$$(1) \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{c - bg}} \qquad (2)$$

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{a}{c - bg}$$

Với T = 10 s tính được $g = 9{,}83\ m/s^2$

d) Lấy ln hai vế của (2)

$\ln T = \ln 2\pi + \dfrac{1}{2}\ln a - \dfrac{1}{2}\ln(c - bg)$

Lấy đạo hàm đối với g, với T là hàm của g : $\dfrac{1}{T}\dfrac{dT}{dg} = \dfrac{b}{2(c - bg)}$

$\Rightarrow$ độ nhạy : $\dfrac{dT}{dg} = \dfrac{bT}{2(c - bg)}$ (3)

Với b = 0,021, c = 0,208 ; g ≈ 9,8 m/s^2 và T ≈ 10 s, ta có : $\frac{dT}{dg} \approx 48$.

Như vậy, khi g tăng 0,01 m/s^2 thì T tăng 0,48 s, có thể đo được dễ dàng.

e) Với con lắc đơn $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, làm tương tự : $\ln T = \ln 2\pi + \frac{1}{2}\ln l - \frac{1}{2}\ln g$.

Lấy đạo hàm đối với g : $\frac{1}{T}\frac{dT}{dg} = -\frac{1}{2g} \Rightarrow \frac{dT}{dg} = -\frac{T}{2g}$.

Con lắc đơn có l = 1 m thì T ≈ 2 s.

Với g ≈ 9,8 m/s^2 thì $\frac{dT}{dg} \approx -0,1$ g tăng 0,01 m/s^2 thì giảm 0,001 s, không đo được. Vậy con lắc rung nhạy hơn con lắc đơn.

6.22. a) Momen của thanh đối với trục quay đi qua A là : $I_A = \frac{1}{3}Ml^2$.

Sau khi va chạm mềm, momen quán tính của hệ là $I = \frac{1}{3}Ml^2 + ml^2$

Phương trình dao động của thanh : M = Iγ

$$\frac{1}{2}Mgl\sin\theta + mgl\sin\theta \approx gl\left(\frac{M}{2} + m\right)\theta = -\left(\frac{Ml^2}{3} + ml^2\right)\theta''$$

(vì θ nhỏ nên sinθ ≈ θ) $\Rightarrow \theta'' + \omega^2\theta = 0$ với $\omega = \sqrt{\frac{3g(M + 2m)}{2l(M + 3m)}}$

Phương trình dao động điều hoà : $\theta = \theta_0\sin(\omega t + \varphi)$.

Chọn gốc thời gian ngay sau va chạm ($t_0 = 0$) suy ra φ = 0

$\theta'_0 = \omega\theta_0 = \frac{d\theta}{dt}$ (vận tốc góc ngay sau va chạm)

Định luật bảo toàn momen động lượng : $mv_0l = I\theta'_0 = \left(\frac{Ml^2}{3} + ml^2\right)\theta'_0$.

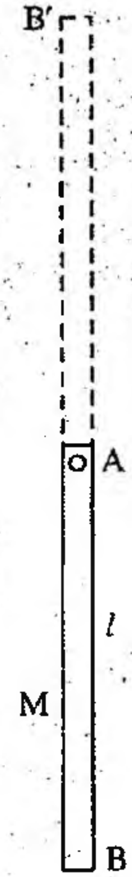
$$\theta_0 = \frac{3mv_0}{(M + 3m)l\omega} \text{ vì } \left(\theta_0 = \frac{\theta'_0}{\omega}\right)$$

Vậy phương trình dao động điều hoà là : $\theta = \dfrac{3mv_0}{(M+3m)l\omega}\sin\omega t$

Với $\omega = \sqrt{\dfrac{3g(M+2m)}{2l(M+3m)}}$; $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2l(M+3m)}{3g(M+2m)}}$

Góc lệch cực đại : $\theta_{max} = \theta_0 = \dfrac{3mv_0}{(M+3m)l\omega}$

$$\theta_0 = \frac{3mv_0}{(M+3m)l}\sqrt{\frac{2l(M+3m)}{3g(M+2m)}} = \frac{\sqrt{6}mv_0}{\sqrt{(M+3m)(M+2m)gl}}$$



Hình 6.21G

b) Không có ma sát nên cơ năng được bảo toàn

Chọn gốc thế năng tại B (Hình 6.21G)

Cơ năng tại B là : $W_B = W_{tB} + W_{dB} = Mg\dfrac{l}{2} + \dfrac{1}{2}I\theta_0'^2$

Với : $I = \dfrac{1}{3}Il^2 + ml^2 \Rightarrow \dfrac{1}{2}I\theta_0' = \dfrac{3m^2v_0^2}{2(M+3m)}$

$$\Rightarrow W_B = Mg\frac{l}{2} + \frac{3m^2v_0^2}{2(M+3m)}$$

Tại B : chỉ cần $W'_{dB} = 0$ thì hệ có thể quay tới B'

$W_{dB} = W'_{dB}$

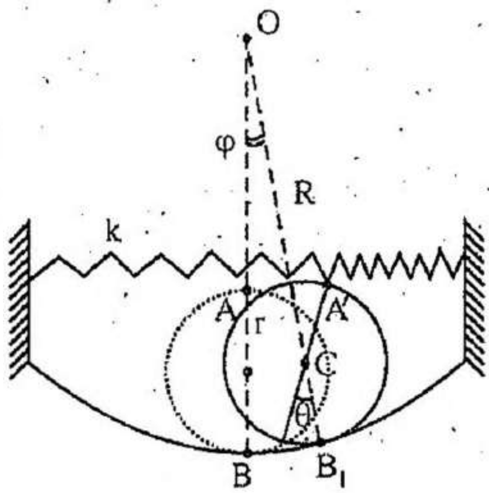
$$\Rightarrow Mg\frac{l}{2} + \frac{3m^2l^2}{2(M+3)} = \frac{(3M+4m)gl}{2}$$

$$\Rightarrow v_0^2 \geq \frac{2(M+2m)(M+3m)gl}{3m^2}$$

6.23. Gọi θ là góc quay quanh trục C của trụ, ω_1 là vận tốc góc của chuyển động quay quanh trục và v là vận tốc tịnh tiến của trục (Hình 6.22G) : $\omega_1 = \theta' = \dfrac{v}{r}$

Mặt khác, ta có : $v = \varphi'(R - r)$

$\Rightarrow \omega_1 r = \varphi'(R - r) \Rightarrow r\theta = (R - r)\varphi \neq R\varphi$



Hình 6.22G

Động năng : $W_d = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2}I\omega_1^2 = \frac{3}{4}m(R-r)^2(\varphi')^2$ với $I = \frac{1}{2}mR^2$.

Thế năng : $W_t = \frac{2kx^2}{2} + \frac{1}{2}mg(R-r)\varphi^2$.

Chú ý là : $x = r\theta + (R-r)\varphi = 2(R-r)\varphi$.

Do đó : $W_t = k.4(R-r)^2\varphi^2 + \frac{1}{2}mg(R-r)\varphi^2 = \left[4k + \frac{mg}{2(R-r)}\right](R-r)^2\varphi^2$.

Cơ năng : $W = W_d + W_t = \text{const}$. Lấy đạo hàm hai vế :

$$\frac{3}{4}m(\varphi')^2 + \left[4k + \frac{mg}{2(R-r)}\right]\varphi^2 = 0 \Rightarrow \omega = \frac{4k + \frac{mg}{2(R-r)}}{\frac{3}{4}m} = \frac{16k}{3m} + \frac{2g}{3(R-r)}$$

Vậy chu kì dao động là : $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{R-r} + \frac{16}{3}\frac{k}{m}}}$.

Trường hợp riêng : Khi $k = 0$ thì $\omega = \frac{2g}{3(R-r)}$.

Khi $R \to \infty$ thì : $\omega = \frac{16k}{3m}$.

6.24. a) Đĩa và thanh tạo thành một vật rắn có momen quán tính đối với trục quay Oz tính theo định lí Huy-gen :

$$I_0 = \left(mR^2 + \frac{1}{3}mR^2\right) + \left\{m(2R)^2 + \frac{1}{2}mR^2\right\} = \frac{35}{6}mR^2$$

Áp dụng định lí momen động lượng (định luật II Niu-tơn cho chuyển động quay).

$$\varphi'' = \frac{-mgR\sin\varphi - 2mgR\sin\varphi}{I_0} = -3mgR\varphi \ (\varphi \ \square\ ) \Rightarrow T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{35R}{18g}}$$

b) Đối với đĩa : Phản lực thanh OA và trọng lực qua trục quay A nên vận tốc góc của đĩa đối với trục quay qua A là không đổi và có giá trị $\omega_0 = \text{const}$ nào đó

– Momen động lượng của đĩa và thanh đối với trục Oz là :

$$L_{Oz} = (L_{Oz})_{thanh} + (L_{Oz})_{đĩa}$$

+ Thanh : $(L_{Oz})_{thanh} = \left(mR^2 + \frac{1}{3}mR^2\right)\varphi' = \frac{4}{3}mR^2\varphi'$.

+ Đĩa : $(L_{Oz})_{đĩa} = m(2R)^2\varphi' + I_1\omega_0 = 4mR^2\varphi' + \frac{1}{2}mR^2\omega_0$.

Suy ra : $L_{Oz} = \frac{4}{3}mR^2\varphi' + 4mR^2\varphi' + \frac{1}{2}mR^2\omega_0$ (1)

– Áp dụng định lí momen động lượng :

$$\frac{dL_{Oz}}{dt} = (-mgR\sin\varphi - 2mgR\sin\varphi) = -3mgR\varphi \quad (\varphi \square)$$

$$\Leftrightarrow \frac{16}{3}mR^2\varphi'' = -3mgR\varphi \Rightarrow \varphi'' + \frac{9}{16}\frac{g\varphi}{R} = 0$$

Đặt $\Omega^2 = \frac{9}{16}\frac{g}{R}$ nên $\varphi'' + \Omega^2\varphi = 0$

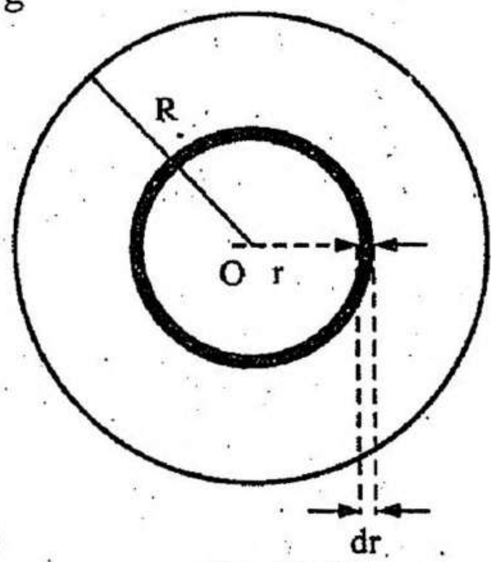
Vậy vật dao động điều hoà với chu kì $T_2 = \frac{8}{3}\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$.

6.25. (Hình 6.23G)

a) Đầu tiên ta xét một đĩa bán kính R có bề dày b và khối lượng riêng ρ. Momen quán tính của đĩa này đối với trục quay đi qua tâm O và vuông góc mặt đĩa là :

$$I_0 = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dv = b\rho\int r^2 ds$$

$$I_0 = b\rho\int_0^R r^2 2\pi r dr = \pi\rho b\frac{R^2}{2} = \left(\frac{mR^2}{2}\right) \quad (*)$$



Hình 6.23G

* Momen của đĩa này đối với trục Δ đi qua mép đĩa và vuông góc với mép đĩa là I_Δ.

Theo định lí Ste-nơ :

$$I_\Delta = I_0 + md^2 = \frac{\pi\rho bR^4}{2} + (\pi\rho bR^2)R^2 = \frac{3\pi\rho bR^4}{2} \quad (2)$$

* Ta quay lại đĩa đặc chưa khoét, bề dày b, bán kính R, khối lượng riêng ρ thì momen quán tính của nó đối với trục qua O là :

Theo biểu thức (1) : $I_0 = \frac{\pi\rho bR^4}{2}$ (3)

– Momen quán tính của một đĩa tâm O_1 bán kính $r_1 = \frac{R}{2}$ đối với trục quay O là :

$$I_2 = I_1 = \frac{3\pi\rho b}{2}r_1^4 = \frac{3}{32}\pi\rho bR^4 \qquad (4)$$

– Ta coi đĩa tròn tâm O bán kính R bị khoét 2 lỗ nói trên là sự lắp ghép 3 đĩa :

+ Đĩa tâm O bán kính R đặc chưa bị khoét.

+ Đĩa tâm O_1 bán kính $r_1 = \frac{R}{2}$ đặc có khối lượng âm và momen quán tính $I'_1 = -I_1$.

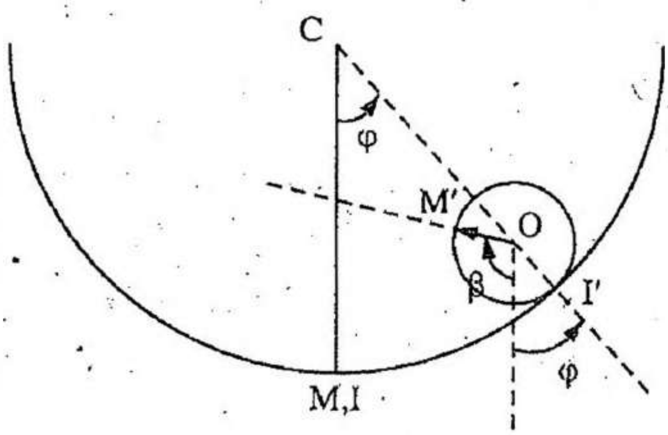
+ Đĩa tâm O_2 bán kính $r_2 = \frac{R}{2}$ đặc có khối lượng âm và momen quán tính $I'_2 = -I_2$.

Vì momen quán tính có tính chất cộng, do đó momen quán tính của đĩa bị khoét 2 lỗ là : $I = I_0 + I'_1 + I'_2 = I_0 - 2I_1 = \frac{5}{16}\pi\rho bR^4$

b) Lưu ý độ dài cung $I'I$ = độ dài cung $I'M'$, nên ta có

$\varphi.3R = (\beta + \varphi)R \Rightarrow \beta = 2\varphi$ (1)

(Hình 6.24G)



Hình 6.24G

Lực ma sát nghỉ có tác dụng biến động năng chuyển động quay thành động năng chuyển động tịnh tiến chứ không làm thay đổi cơ năng của hệ. Chỉ có trọng lực sinh công làm thay đổi động năng vật và là lực thế nên cơ năng vật bảo toàn.

$\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0 = \text{const.}$ (2)

Trong đó $\begin{cases} \omega = \beta' \\ v_0 = CO.\varphi' = 2R.\dfrac{\beta'}{2} \\ h_0 = CO(1 - \cos\varphi) = ... = 2R\dfrac{\varphi^2}{2} = R\dfrac{\beta^2}{4} \end{cases}$ (3)

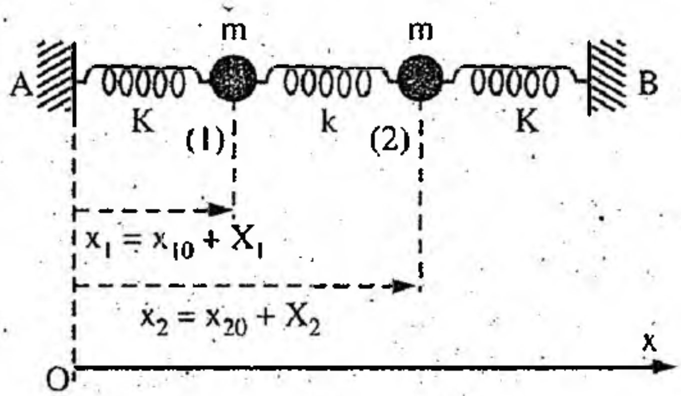
Thay hệ (3) vào biểu thức (2) và tiến hành đạo hàm hai vế theo thời gian, kết quả biến đổi được : $\beta'' + \dfrac{mgR}{2(I + mR^2)}\beta = 0$ (4)

Đặt $\Omega^2 = \dfrac{mgR}{2(I + mR^2)} \Rightarrow \beta'' + \Omega^2\beta = 0.$

Vậy vật dao động điều hoà với chu kì $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2(I + mR^2)}{mgR}}$.

Chủ đề 7.

7.1. a) Ta chọn gốc toạ độ O như hình 7.1G. Trục toạ độ có phương trùng với AB, mỗi quả cầu đều chịu lực tác dụng của hai lò xo gắn với nó.



Hình 7.1G

Quả cầu (1) chịu tác dụng của lực :

$$F_1 = -K(x_1 - a_0)$$

Và $f_1 = k[(x_2 - x_1) - b_0]$

(Giả sử khi các quả cầu nằm cân bằng, các lò xo có độ dài bằng độ dài tự nhiên tương ứng là a_0, b_0 và a_0).

Quả cầu thứ hai chịu tác dụng của các lực :

$$f_2 = -f_1 \text{ và } F_2 = K[(L - x_2) - a_0], \text{ với } L = AB$$

Áp dụng định luật II Niu-tơn ta có :

$$mx_1'' = -K(x_1 - a_0) + k(x_2 - x_1 - b_0) \quad (1)$$

$$mx_2'' = -k(x_2 - x_1 - b_0) + K(L - x_2 - a_0) \quad (2)$$

Kí hiệu $X_1 = x_1 - x_{10}$ và $X_2 = x_2 - x_{20}$ là li độ của hai quả cầu so với vị trí cân bằng, có hoành độ tương ứng là x_{10} và x_{20}. Các phương trình (1) và (2) trở thành :

$$mX_1'' = -KX_1 - k(X_1 - X_2) \quad (3)$$

$$mX_2'' = -k(X_1 - X_2) - KX_2 \quad (4)$$

* Đặt $u = X_1 + X_2$, $v = X_1 - X_2$, từ (3) và (4) ta rút ra hệ phương trình :

$$mu'' = -Ku \quad (5)$$

$$mv'' = -(K + 2k)v \quad (6)$$

Nghiệm của các phương trình này có dạng :

$$u(t) = u_m\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \text{ hay } u = A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t \quad (7)$$

$$v(t) = v_m\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \text{ hay } v = A\cos\omega_2 t + B\sin\omega_2 t \quad (8)$$

Chúng biểu thị các dao động điều hoà với các tần số góc :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \text{và } \omega_2 = \sqrt{\frac{K + 2k}{m}} \quad (9)$$

Từ đó tìm được phương trình dao động của quả cầu :

$$X_1 = \frac{u_m}{2}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{v_m}{2}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (10)$$

$$X_2 = \frac{u_m}{2}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \frac{v_m}{2}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (10')$$

Khi cho biết vị trí ban đầu và vận tốc ban đầu của mỗi quả cầu (X_{10}, X'_{10}, X_{20}, X'_{20}) ta sẽ tìm được u_m, v_m và φ_1, φ_2.

* Giả sử ở thời điểm ban đầu các quả cầu ở vị trí $X_{10} = X_0$, $X_{20} = 0$ và không có vận tốc ban đầu, ta có :

$$X_{10} = X_0 = \frac{u_m}{2}\cos(\varphi_1) + \frac{u_m}{2}\cos(\varphi_2)$$

$$X_{20} = X_0 = \frac{u_m}{2}\cos(\varphi_1) - \frac{u_m}{2}\cos(\varphi_2)$$

$$X'_{10} = 0 \Rightarrow \frac{u_m}{2}\omega_1\cos(\varphi_1) + \frac{u_m}{2}\omega_2\cos(\varphi_2) = 0$$

$$X'_{20} = 0 \Rightarrow \frac{u_m}{2}\omega_1\cos(\varphi_1) - \frac{u_m}{2}\omega_2\cos(\varphi_2) = 0$$

Từ đó ta tìm được : $u_m = v_m = X_0$ và $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.

Do đó ta có :

$$X_1 = \frac{X_0}{2}[\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t] = X_0\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$$

$$X_2 = \frac{X_0}{2}[\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t] = X_0\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$$

* Ta xét hai trường hợp riêng :

+ Trường hợp liên kết yếu ($k \ll K$)

Các tần số $\Omega = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ và $\omega = \dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ sẽ rất khác nhau.

$\Omega \approx \omega_1 \approx \omega_2 \gg \omega$

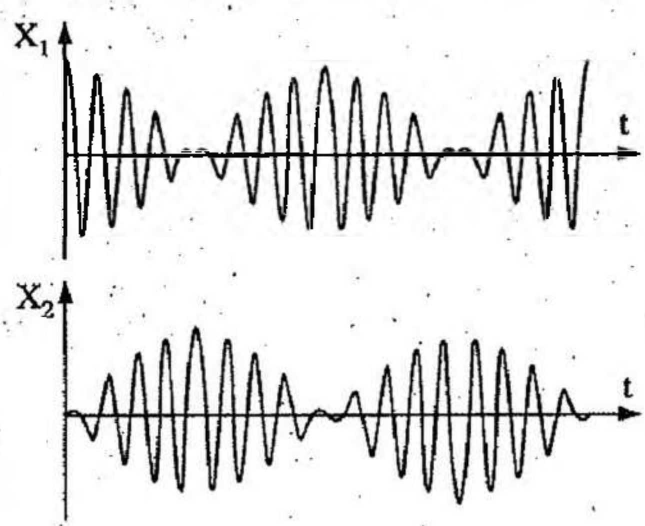
Các nghiệm trở thành :

$X_1 = X_0\cos(\Omega t)\cos(\omega t)$

và $X_2 = X_0\sin(\Omega t)\sin(\omega t)$

Khi đó các quả cầu sẽ dao động "nhanh" với tần số Ω và biên độ của chúng biến thiên (dao động) "chậm" với chu kì bằng :

$$T_p = \frac{\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$$



Hình 7.2G

Đó chính là hiện tượng phách. Đồ thị dao động được vẽ trên hình 7.2G

+ Trường hợp liên kết mạnh ($k = K$)

Khi đó ta có : $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{K}{m}}; \omega_2 = \sqrt{\dfrac{3K}{m}} = \omega_1\sqrt{3}$

và các phương trình dao động của hai quả cầu là :

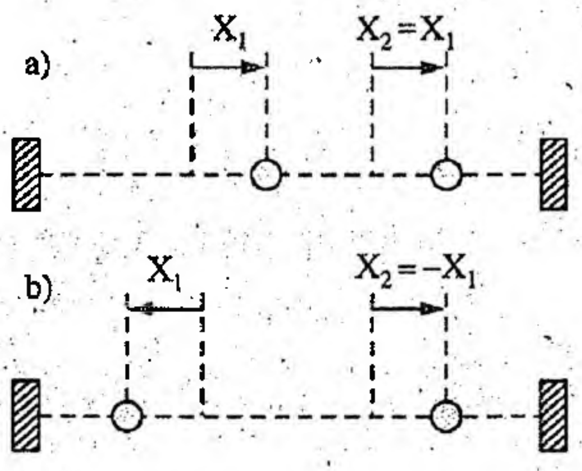
$$X_1 = X_0\cos\left[\frac{(\sqrt{3}+1)}{2}\omega t\right]\cos\left[\frac{(\sqrt{3}-1)}{2}\omega t\right]$$

$$X_2 = X_0\sin\left[\frac{(\sqrt{3}+1)}{2}\omega t\right]\sin\left[\frac{(\sqrt{3}-1)}{2}\omega t\right].$$

b) Các tần số góc ω_1 và ω_2 ở trên được gọi là tần số góc riêng của hệ dao động liên kết. Hệ có thể thực hiện dao động với chỉ một trong hai tần số riêng đó. Cụ thể như sau :

• Hệ có thể chỉ dao động với tần số góc ω_1 nếu $v(t) = 0$, tức là khi $X_1(t) = X_2(t)$. Trong trường hợp này ta có một kiểu dao động riêng với tần số góc ω_1. Ứng với kiểu dao động này là những độ dịch chuyển như nhau của hai quả cầu (Hình 7.3Ga). Đây là một kiểu dao động đối xứng.

• Hệ cũng có thể chỉ dao động với tần số góc ω_2 nếu $u(t) = 0$, tức là khi $X_1(t) = -X_2(t)$. Khi đó ta có kiểu dao động riêng với tần số góc ω_2. Đó là một kiểu dao động phản đối xứng (Hình 7.3Gb).



Hình 7.3G

7.2. a) Khi các phao chuyển động, mực nước trong bình thay đổi. Chọn trục Ox hướng thẳng đứng lên trên (gốc O ứng với mực nước khi phao nằm yên (Hình 7.2)). Kí hiệu x là độ dịch chuyển đại số của mực nước đó. Bởi vì thể tích của khối nước không thay đổi nên các li độ x_1, x_2 của hai phao liên hệ với x theo phương trình :

$$(x_1 + x_2)s = -x(S - 2s) \qquad (1)$$

(Nếu x_1 và x_2 là dương như trên hình 7.2 thì x là âm).

Mỗi phao đều chịu tác dụng của trọng lực và lực đẩy Ác-si-mét. Kí hiệu m là khối lượng của mỗi phao, ρ là khối lượng riêng của nước và V_0 là phần chìm của mỗi phao ở vị trí cân bằng, ta có :

$$m = \rho V_0 \qquad (2)$$

Áp dụng định luật II Niu-tơn cho 2 phao, ta có :

$$mx_1'' = -mg + \rho g[V_0 - (x_1 - x)s] \qquad (3)$$

$$mx_2'' = -mg + \rho g[V_0 - (x_2 - x)s] \qquad (4)$$

Khử x trong các phương trình (3) và (4), chú ý đến (1) và (2) ta rút ra :

$$x_1'' = -\omega_1^2 x_1 - \omega_2^2 x_2 \quad (5)$$

$$x_2'' = -\omega_2^2 x_1 - \omega_1^2 x_2 \quad (6)$$

trong đó : $\omega_1^2 = \dfrac{\rho g}{m}\dfrac{s(S-s)}{(S-2s)}$ và $\omega_2^2 = \dfrac{\rho g}{m}\dfrac{s^2}{(S-2s)}$.

Ta nhận thấy $\omega_1 > \omega_2$.

b) Từ (5) và (6) ta được : $x_1'' + x_2'' = -\Omega_1^2(x_1 + x_2)$ (8)

$$x_1'' - x_2'' = -\Omega_2^2(x_1 - x_2) \quad (9)$$

Trong đó $\Omega_1^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 \Rightarrow \Omega_1 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$

và $\Omega_2^2 = \omega_1^2 - \omega_2^2 \Rightarrow \Omega_2 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$ (10)

hay (chú ý đến (7))

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{\rho g}{m}\frac{sS}{(S-2s)}} \text{ và } \Omega_2 = \sqrt{\frac{\rho gs}{m}} \quad (11)$$

Theo đề bài, lúc t = 0 : $x_{10} = x_{20} = 0$; $x'_{10} = 2v_0$; $x'_{20} = v_0$ (12)

Từ đó ta tìm được : $x_1 + x_2 = \dfrac{3v_0}{\Omega_1}\sin\Omega_1 t$

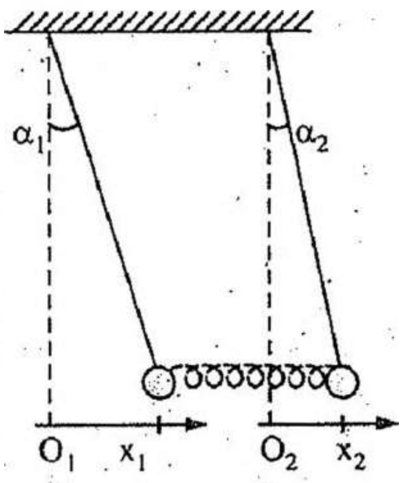
7.3. a) Giả sử tại thời điểm t, quả cầu 1 có li độ x_1, quả cầu 2 có li độ x_2 (Hình 7.4G)

Vì dao động nhỏ nên ta có :

$$T_1\cos\alpha_1 = mg \Rightarrow T_1 \approx mg$$

$$T_2\cos\alpha_2 = mg \Rightarrow T_2 \approx mg$$

Áp dụng định luật II Niu-tơn cho mỗi quả cầu :



Hình 7.4G

$$mx_1'' = -T_1\sin\alpha_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$mx_1'' = -mg\frac{x_1}{l} + k(x_2 - x_1) \quad (1a)$$

Tương tự : $mx_2'' = -\frac{mg}{l}x_2 - k(x_2 - x_1)$ (1b)

Gọi ω là tần số của mode ta có : $x_1'' = -\omega^2 x_1$ và $x_2'' = -\omega^2 x_2$

Thay vào hệ phương trình (1) ta được :

$$\begin{cases}\left(\frac{mg}{l} + k - m\omega^2\right)x_1 = kx_2 \ (a) \\ \left(\frac{mg}{l} + k - m\omega^2\right)x_2 = kx_1 \ (b)\end{cases} \quad (2)$$

Từ (2) suy ra : $\left(\frac{mg}{l} + k - m\omega^2\right)^2 = k^2$ hay $\frac{mg}{l} + k - m\omega^2 = \pm k$

Ta được hai nghiệm : $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ và $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}$.

b) Thay $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ vào phương trình (2a) ta được $x_1 = x_2 = A\cos\omega_1 t$.

Thay $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}$ vào phương trình (2a) ta được $x_1 = -x_2 = B\cos\omega_2 t$.

7.4. 1. a) Phương trình động lực học cho M :

$$m_1\ddot{x} = -(k_1 + k_2)x + k_2 y \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{k_1 + k_2}{m_1}x + \frac{k_2}{m_1}y \quad (1)$$

và cho N : $m_2\ddot{y} = -(k_1 + k_2)y + k_2 x \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{k_1 + k_2}{m_2}y + \frac{k_2}{m_2}x$ (2)

b) Đặt $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ và $y = B\cos(\omega t + \varphi)$ thì (1) và (2) cho :

$$\left(-\omega^2 + \frac{k_1 + k_2}{m_1}\right)x - \frac{k_2}{m_1}y = 0$$

$$\frac{k_2}{m_2}x + \left(\omega^2 - \frac{k_1 + k_2}{m_2}\right)y = 0$$

Để hệ có nghiệm khác 0 thì :

$$\left(\omega^2 - \frac{k_1 + k_2}{m_1}\right)\left(\omega^2 - \frac{k_1 + k_2}{m_2}\right) - \frac{k_2^2}{m_1 m_2} = 0$$

hay $\omega^4 - (k_1 + k_2)\left(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}\right)\omega^2 + \dfrac{(k_1 + k_2)^2}{m_1 m_2} - \dfrac{k_2^2}{m_1 m_2} = 0.$

Phương trình trùng phương trên có :

$$\Delta = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 m_2}\right)^2 (k_1 + k_2)^2 + \frac{4k_2^2}{m_1 m_2} > 0$$

và $\sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 m_2}\right)^2 (k_1 + k_2)^2 + \dfrac{4k_2^2}{m_1 m_2}}$ (3)

Suy ra nghiệm của phương trình : $(\omega^2)_{1,2} = \dfrac{m_1 + m_2}{2m_1 m_2}(k_1 + k_2) \pm \sqrt{\Delta}.$

Dễ dàng chứng minh được $\dfrac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}(k_1 + k_2) > \sqrt{\Delta}.$

Vì vậy tồn tại hai giá trị ω : $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{m_1 + m_2}{2m_1 m_2}(k_1 + k_2) - \dfrac{1}{2}\sqrt{\Delta}}$ (4)

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{2m_1 m_2}(k_1 + k_2) + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}} \qquad (5)$$

c) Hệ phương trình (1) và (2) là tuyến tính, chồng chất hai nghiệm riêng là một nghiệm của hệ, vì vậy có thể viết nghiệm của hệ dưới dạng :

$$x(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi) + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi) \qquad (6)$$

$$y(t) = B_1\cos(\omega_1 t + \varphi) + B_2\cos(\omega_2 t + \varphi) \qquad (7)$$

A_1, A_2, B_1, B_2 và φ được xác định từ điều kiện ban đầu và chiều dài PQ.

2. a) Từ (3), (4) và (5) ta suy ra : $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k_1}{m}}; \omega_2 = \sqrt{\dfrac{k_1 + 2k_2}{m}}$ (8)

$\Rightarrow k_1 = m\omega_1^2$; $k_2 = \dfrac{m}{2}\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right) \Rightarrow k_1 + k_2 = \dfrac{m}{2}\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right)$ (9)

Phương trình động lực học : $m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x - k_2 y = 0$ (10)

$$m\ddot{y} + (k_1 + k_2)y - k_2 x = \frac{F_0}{m}\cos\Omega t \qquad (11)$$

Thay (9) vào (10) và (11) ta được :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}x + \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2}y = 0 \qquad (12)$$

$$\ddot{y} + \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}y + \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2}x = \frac{F_0}{m}\cos\Omega t \qquad (13)$$

Đặt : $\omega_A = \sqrt{\dfrac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}}$; $x = C\cos\Omega t$; $y = D\cos\Omega t \Rightarrow \ddot{x} = -\Omega^2 x$; $\ddot{y} = -\Omega^2 y$

Ta thu được hệ phương trình để tìm C và D :

$$\left[\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} - \Omega^2\right]C + \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2}D = 0 \qquad (14)$$

$$\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2}C + \left[\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} - \Omega^2\right]D = \frac{F_0}{m} \qquad (15)$$

Từ đó rút ra các biên độ của M và N là :

$$C = \frac{F_0}{2N}\left|\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\left(\omega_1^2 - \Omega^2\right)\left(\omega_2^2 - \Omega^2\right)}\right| \qquad (16)$$

$$D = \frac{F_0}{M}\left|\frac{\omega_A^2 - \Omega^2}{\left(\omega_1^2 - \Omega^2\right)\left(\omega_2^2 - \Omega^2\right)}\right| \qquad (17)$$

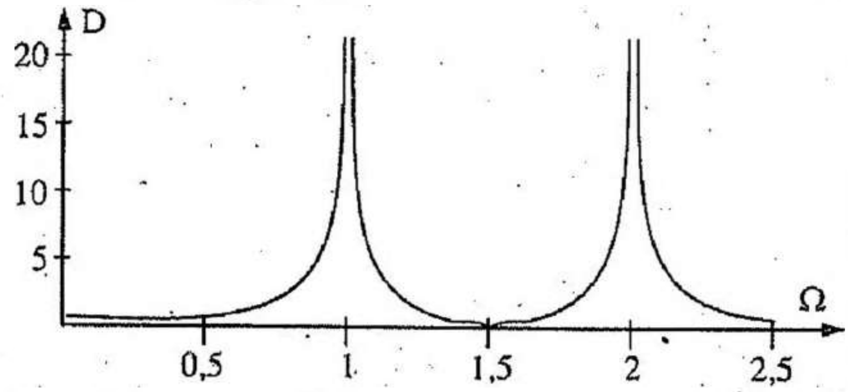
Với $\omega_A = \sqrt{\dfrac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}}$.

Như vậy, biên độ D của quả nặng N có giá trị lớn tại các tần số cộng hưởng ω_1 và ω_2. Biên độ này bằng 0 tại tần số cộng hưởng ω_A.

b) Phác hoạ sự phụ thuộc của D vào Ω (Hình 7.5G).

Lấy $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$

$\Rightarrow \omega_A = \sqrt{\dfrac{5}{2}}$.



Hình 7.5G

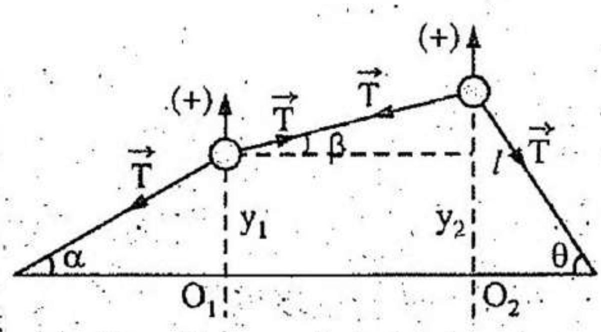
7.5. (Hình 7.6G)

a) Theo định luật Niu-tơn ta viết :

Vật 1 : $my_1'' = -T\sin\alpha + T\sin\beta$

$$my_1'' = -\frac{Ty_1}{l} + \frac{T(y_2 - y_2)}{l}$$

$$y_1'' = \frac{T}{ml}(y_2 - 2y_1) \qquad (1)$$



Hình 7.6G

Vật 2 : Tương tự như trên :

$$y_2'' = \frac{T}{ml}(y_1 - 2y_2) \qquad (2)$$

b) $(y_1 - y_2)'' = -\frac{T}{ml}(y_1 + y_2)$; $(y_1 - y_2)'' = \frac{-3T}{ml}(y_1 - y_2)$

Đặt $\omega_1 = \sqrt{\frac{T}{ml}}$ và $\omega_2 = \sqrt{\frac{3T}{ml}}$

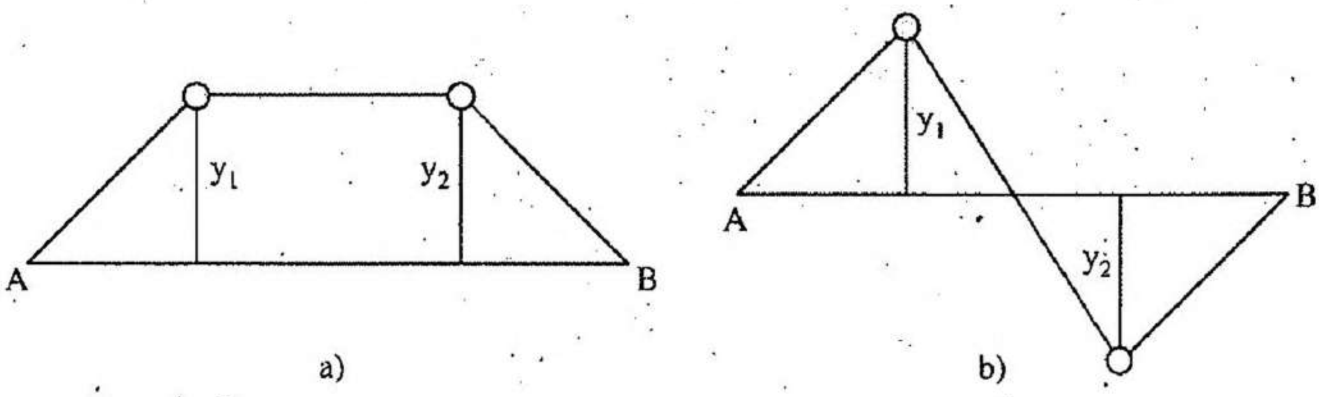
$$y_1 + y_2 = A_1\cos\omega_1 t$$

$$y_1 - y_2 = B_1\cos\omega_2 t$$

Suy ra $y_1 = A\cos\omega_1 t + B\cos\omega_2 t$

$y_2 = A\cos\omega_1 t - B\cos\omega_2 t$

c) Khi B = 0, hai con lắc dao động cùng pha với tần số ω_1 và với tỉ số hai biên độ bằng 1 (Hình 7.7Ga). Khi A = 0, hai con lắc dao động ngược pha với tần số ω_2 và với tỉ số hai biên độ là –1 (dấu "–" chỉ ngược pha) (Hình 7.7Gb).



Hình 7.7G

7.6. Kí hiệu các li độ của các quả cầu so với vị trí cân bằng của chúng là X_1, X_2 và X_3, ta viết được phương trình :

$$mX_1'' = -KX_1 - K(X_1 - X_2)$$

$$mX_2'' = K(X_1 - X_2) - K(X_2 - X_3)$$

$$mX_3'' = K(X_2 - X_3) - KX_3$$

Theo phương pháp số phức, ta tìm được các phương trình dao động của ba quả cầu dưới dạng :

$$X_1 = X_{10}e^{i\omega t} \text{ ; } X_2 = X_{20}e^{i\omega t} \text{ ; } X_3 = X_{30}e^{i\omega t}$$

Thay vào các phương trình trên ta được hệ phương trình tuyến tính :

$$(-\omega^2 + 2\omega_0^2)X_{10} - \omega_0^2 X_{20} = 0$$

$$-\omega_0^2 X^{10} + (-\omega^2 + 2\omega_0^2)X_{20} - \omega_0^2 X_{30} = 0$$

$$-\omega_0^2 X_{20} + (-\omega^2 + 2\omega_0^2)X_{30} = 0$$

Theo toán học, hệ phương trình này chỉ có các nghiệm khác 0 ($X_1 \neq 0$; $X_2 \neq 0$; $X_3 \neq 0$) nếu thỏa mãn điều kiện :

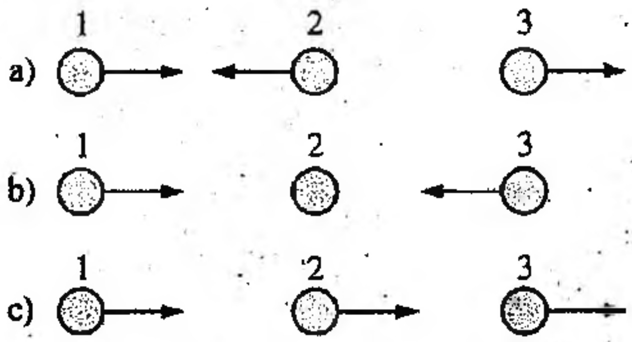
$$(-\omega^2 + 2\omega_0^2)[-\omega^2 + (2 + \sqrt{2}\omega_0^2)][(-\omega^2 + (2 - \sqrt{2}\omega_0^2)] = 0$$

Từ đó ta tìm được ba tần số riêng của hệ :

$$\omega_1 = \omega_0\sqrt{2-\sqrt{2}} \text{ ; } \omega_2 = \omega_0\sqrt{2} \text{ ; } \omega_0\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

* Đối với kiểu dao động 1 : $\omega = \omega_1$

Do đó : $\sqrt{2}X_1 = -X_2 = \sqrt{2}X_3$: Các quả cầu 1 và 3 dao động cùng pha với cùng một biên độ, trong khi quả cầu 2 ở giữa ngược pha với hai quả cầu bên cạnh (biên độ của nó lớn hơn $\sqrt{2}$ lần) (Hình 7.8Ga).



Hình 7.8G

* Đối với kiểu dao động 2 : $\omega = \omega_2$,

Do đó : $X_2 = 0$ và $X_1 = -X_3$: Quả cầu 2 đứng yên còn các quả cầu 1 và 3 dao động cùng biên độ nhưng ngược pha với nhau (Hình 7.8Gb).

* Đối với kiểu dao động 3 : $\omega = \omega_3$,

Do đó $\sqrt{2}\,X_1 = X_2 = \sqrt{2}\,X_3$: Cả 3 quả cầu dao động cùng pha, quả cầu 2 có biên độ lớn gấp $\sqrt{2}$ lần các quả cầu 1 và 3 (Hình 7.8Gc).

7.7. Tiến hành lập luận và tính toán tương tự như bài 7.1, ta thu được các phương trình vi phân sau đây :

$$mX_1'' = -4KX_1 - K(X_1 - X_2) - \mu X_1' = -5KX_1 + KX_2 - \mu X_1'$$

$$mX_2'' = -4KX_2 - K(X_2 - X_1) - \mu X_2' = -5KX_2 + KX_1 - \mu X_2'$$

Đặt : $u = X_1 + X_2$, $v = X_1 - X_2$, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{K}{m}}$ và $\beta = \dfrac{\mu}{2m}$.

Cộng và trừ từng vế của các phương trình trên, ta được :

$$\begin{cases} u'' + 2\beta u' + 4\omega_0^2 u = 0 \\ v'' + 2\beta v' + 6\omega_0^2 v = 0 \end{cases}$$

Chú ý đến các điều kiện ban đầu cho trong đề bài và vận dụng kết quả của bài toán về dao động tắt dần ta tìm được các nghiệm sau :

$$u(t) = X_0\left[\cos\omega_1 t + \beta\frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1}\right]e^{-\beta t}$$

$$v(t) = X_0\left[\cos\omega_2 t + \beta\frac{\sin\omega_2 t}{\omega_2}\right]e^{-\beta t}$$

Với : $\omega_1 = \sqrt{4\omega_0^2 - \beta^2}$; $\omega_2 = \sqrt{6\omega_0^2 - \beta^2}$.

(Dĩ nhiên chỉ có dao động tắt dần khi $4\omega_0^2 > \beta^2$ hay $\mu < 4\sqrt{mK}$)

Từ đó ta rút ra được :

$$X_1(t) = \frac{X_0}{2}\left[\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t + \beta\left(\frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1} + \frac{\sin\omega_2 t}{\omega_2}\right)\right]e^{-\beta t}$$

$$X_2(t) = \frac{X_0}{2}\left[\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t + \beta\left(\frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1} - \frac{\sin\omega_2 t}{\omega_2}\right)\right]e^{-\beta t}$$

7.8. a) Áp dụng định lí momen động lượng cho hai con lắc và giả thiết dao động nhỏ ($\sin\theta \approx 0$), ta được hệ phương trình :

$$ML^2\theta_1'' = -MgL\theta_1 + C(\theta_2 - \theta_1)$$

$$ML^2\theta_2'' = -MgL\theta_2 + C(\theta_1 - \theta_2).$$

Đặt : $u = \theta_1 + \theta_2$, $v = \theta_1 - \theta_2$, $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$ và $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{MgL + 2C}{ML^2}}$ ta được phương trình vi phân :

$$u'' + \omega_1^2 u = 0$$

$$v'' + \omega_2^2 v = 0$$

Chú ý đến các điều kiện ban đầu, ta được :

$$u(t) = (\theta_{10} + \theta_{20})\cos\omega_1 t + \left(\frac{\theta_1'(0) + \theta_2'(0)}{\omega_1}\right)\sin\omega_1 t$$

$$v(t) = (\theta_{10} - \theta_{20})\cos\omega_2 t + \left(\frac{\theta_1'(0) - \theta_2'(0)}{\omega_2}\right)\sin\omega_2 t$$

Từ đó, ta có : $\theta_1(t) = \dfrac{1}{2}[(\theta_{10} + \theta_{20})\cos\omega_1 t + (\theta_{10} - \theta_{20})\cos\omega_2 t$

$$+ \left(\frac{\theta_1'(0) + \theta_2'(0)}{\omega_1}\right)\sin\omega_1 t + \left(\frac{\theta_1'(0) - \theta_2'(0)}{\omega_2}\right)\sin\omega_2 t]$$

$\theta_2(t) = \dfrac{1}{2}[(\theta_{10} + \theta_{20})\cos\omega_1 t - (\theta_{10} - \theta_{20})\cos\omega_2 t$

$$+ \left(\frac{\theta_1'(0) + \theta_2'(0)}{\omega_1}\right)\sin\omega_1 t - \left(\frac{\theta_1'(0) - \theta_2'(0)}{\omega_2}\right)\sin\omega_2 t]$$

b) Trong trường hợp liên kết yếu (C □ MgL), các tần số ω_1 và ω_2 xấp xỉ bằng nhau. Với điều kiện ban đầu cho trong đề bài, ta tìm được :

$$\theta_1(t) = \frac{\theta_0}{2}(\cos\omega_1 + \cos\omega_2 t)$$

$$\theta_2(t) = \frac{\theta_0}{2}(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t)$$

Khi đó ta lại có hiện tượng phách.

7.9. 1. Nếu thanh 1 quay góc α_1, thanh 2 không quay, thì thanh 1 chịu tác dụng của momen xoắn $C\alpha_1 + C'\alpha_1$. Nếu thêm thanh 2 quay góc α_2 thì thanh 1 chịu tác dụng momen lực $C\alpha_1 + C'(\alpha_1 - \alpha_2)$; còn thanh 2 chịu tác dụng của momen $C\alpha_2$ do đoạn dây 3 và chịu momen $-C'(\alpha_1 - \alpha_2)$ do đoạn dây 2, như vậy thanh 2 chịu tác dụng momen $(C + C')\alpha_2 - C'\alpha_1$. Áp dụng phương trình chuyển động quay của vật rắn ta thu được các biểu thức sau :

$$I\alpha_1'' + (C + C')\alpha_1 - C'\alpha_2 = 0$$

$$I\alpha_2'' + (C + C')\alpha_2 - C'\alpha_1 = 0$$

Cộng và trừ hai biểu thức này theo từng vế, ta thu được hai phương trình cho $\varphi = \alpha_1 + \alpha_2$ và $\theta = \alpha_1 - \alpha_2$:

$$\varphi'' + \frac{C}{I} = 0$$

$$\theta'' + \frac{C + 2C'}{I}\theta = 0$$

Nghiệm của hai phương trình đó là :

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 = a\cos(\omega t + \varphi_1), \text{ với } \omega = \sqrt{\frac{C}{I}}$$

và : $\theta = \alpha_1 - \alpha_2 = b\cos(\omega' t + \varphi_2)$, với $\omega' = \sqrt{\dfrac{C + 2C'}{I}}$

Suy ra biểu thức tổng quát của α_1 và α_2 :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}[a\cos(\omega t + \varphi_1) + b\cos(\omega' t + \varphi_2) \quad (1)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}[a\cos(\omega t + \varphi_1) - b\cos(\omega' t + \varphi_2) \quad (2)$$

2. a) Theo đề bài, điều kiện ban đầu : $\alpha_{10} = A$; $\alpha'_{10} = 0$; $\alpha_{20} = 0$; $\alpha'_{20} = 0$.

Từ (1) và (2) suy ra : $a = b = A$; $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.

Vậy ta có biểu thức của α_1 và α_2 :

$$\alpha_1 = \frac{A}{2}\cos\omega t + \cos\omega' t \quad (3)$$

$$\alpha_2 = \frac{A}{2}\cos\omega t - \cos\omega' t \quad (4)$$

b) Các trường hợp đơn giản nhất là :

+ $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{A}{2}\cos\omega' t$, từ đó $\theta = \alpha_1 + \alpha_2 = A\cos\omega t$: hai thanh dao động cùng pha (luôn cùng chiều) với tần số góc $\omega = \sqrt{\frac{C}{I}}$.

+ $\alpha_1 = -\alpha_2 = \frac{A}{2}\cos\omega t$, từ đó $\theta = \alpha_1 - \alpha_2 = A\cos\omega t$: hai thanh dao động ngược pha (trái chiều) với tần số góc $\omega' = \sqrt{\frac{C+2C'}{I}}$.

c) Biến đổi và viết lại (1) và (2) ta có :

$$\alpha_1 = A\cos\left(\frac{\omega+\omega'}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega-\omega'}{2}t\right)$$

$$\alpha_2 = A\sin\left(\frac{\omega+\omega'}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega-\omega'}{2}t\right)$$

Nếu C'□ C thì $\omega \approx \omega'$ và $\frac{\omega-\omega'}{2} = \Omega$,

với Ω □ ω; ω'. Có thể xem $A\cos\Omega t = A_1$ và $A\sin\Omega t = A_2$ là biên độ biến đổi thì ta có :

$$\alpha_1 = A_1\cos\left(\frac{\omega+\omega'}{2}t\right)$$

$$\alpha_2 = A_2\cos\left(\frac{\omega+\omega'}{2}t\right)$$

chứng tỏ có hiện tượng phách với tần số phách : $\Omega = \frac{\omega'-\omega}{2}$.

d) Theo đề bài : $\omega + \omega' = \frac{\pi}{2}$, $\omega' - \omega = \frac{\pi}{6}$

Do đó ta có : $\alpha_1 = A\cos\frac{\pi}{4}t.\cos\frac{\pi}{12}t$

$$\alpha_2 = A\sin\frac{\pi}{4}t.\cos\frac{\pi}{12}t$$

+ Xét thừa số có chứa biến $\frac{\pi}{12}t$ ta thấy :

– Ở thời điểm $t = n_1T_1$, với $T_1 = 6$ s và n_1 là số nguyên lẻ thì ta có $\alpha_1 = 0$ và $\alpha_2(max) = -A$.

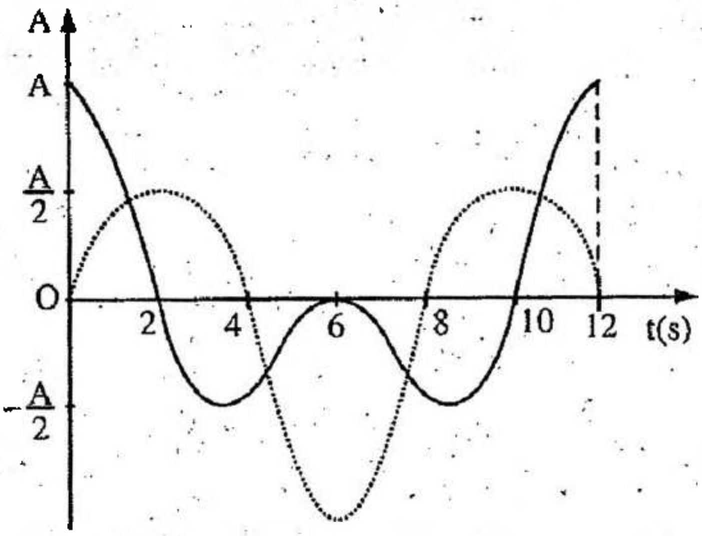
– Ở các thời điểm $t = n_2T_1$, với n_2 là số nguyên chẵn thì ta có $\alpha_2 = 0$ và $\alpha_1(max) = +A$.

+ Xét thừa số có chứa biến số $\frac{\pi}{4}t$ ta thấy :

– Ở thời điểm $t = n_2T_2$, với $T_2 = 2$ s và $n_2 = 1, 3, 5...$ thì $\alpha_1 = 0$ và $\alpha_2(max) = \frac{A}{2}, -A$.

– Ở các thời điểm $t = n_2T_2$, với $n_2 = 0, 2, 4, 6...$ thì $\alpha_2 = 0$ và $\alpha_2(max) = A, -\frac{A}{2}$.

Như vậy, có sự luân chuyển năng lượng với chu kì T = 20 s. Đồ thị biểu diễn α_1 và α_2 theo t (với $0 < t < 12$ s) như trên hình 7.9G.



Hình 7.9G

7.10. a) Ta có các phương trình :

$$I\theta_1 = -K\theta_1 + K(\theta_2 - \theta_1) \quad (1)$$

$$\ddot{\theta}_2 = -K(\theta_2 - \theta_1) \quad (2)$$

b) Theo đề bài : $\theta_1 = A\cos\omega t$, $\theta_2 = B\cos\omega t$

do đó : $\ddot{\theta}_1 = -\omega^2 A\cos\omega t = -\omega^2\theta_1 \quad (3)$

$$\ddot{\theta}_2 = -\omega^2 B\cos\omega t = -\omega^2\theta_2 \quad (4)$$

Thay (3), (4) vào (1) và (2), chia hai vế cho $\cos\omega t$, ta được :

$(-I\omega^2 + 2K)A - KB = 0$

$$KA + (I\omega^2 - K)B = 0 \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{-I\omega^2 + K}{K} = \frac{K}{-I\omega^2 + 2K}$$

Muốn cho hệ hai phương trình được nghiệm đúng đồng thời ta phải có :

$$(I\omega^2 + K)(-I\omega^2 + 2K) = K^2 \Rightarrow I^2\omega^4 - 3KI\omega^2 + K^2 = 0$$

Nghiệm của phương trình là : $\omega^2 = \dfrac{3KI \pm \sqrt{5}KI}{2I^2} = \dfrac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})\dfrac{K}{I}$.

Như vậy, với một trong hai giá trị sau đây của ω thì hai phương trình (1) và (2) đều thỏa mãn :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})}{2}}\sqrt{\frac{K}{I}} \ ; \ \omega_2 = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})}{2}}\sqrt{\frac{K}{I}}$$

Nếu $\omega = \omega_1$ thì $\dfrac{A}{B} = 1 - \dfrac{I}{K}\omega_1^2 = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Nếu $\omega = \omega_2$ thì $\dfrac{A}{B} = 1 - \dfrac{I}{K}\omega_2^2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

c) Nếu $\theta_1(0) = \theta_0$ thì $\theta_2(0) = \dfrac{A}{B}\theta_1(0) = \dfrac{B}{A}\theta_0$.

Theo kết quả câu b) thì :

– Nếu $\dfrac{B}{A} = -\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}$ hai đĩa sẽ dao động với cùng tần số góc :

$$\omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\sqrt{\frac{K}{I}} \approx 1{,}933\sqrt{\frac{K}{I}}$$

và $\theta_2(0) = -\dfrac{2\theta_0}{1+\sqrt{5}} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\theta_0 \approx -0{,}118\theta_0$

– Nếu $\dfrac{B}{A} = \dfrac{2}{-1+\sqrt{5}}$ hai đĩa sẽ dao động với cùng tần số góc :

$$\omega = \omega_2 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\sqrt{\frac{K}{I}} \approx 0{,}618\sqrt{\frac{K}{I}}$$

và $\theta_2(0) = \dfrac{2\theta_0}{-1+\sqrt{5}} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\theta_0 \approx 1{,}618\theta_0$

Tóm lại, nếu ban đầu đĩa A có vận tốc bằng 0 và có toạ độ góc θ_0 thì hai đĩa A và B sẽ dao động với cùng tần số góc nếu ở thời điểm ban đầu này :

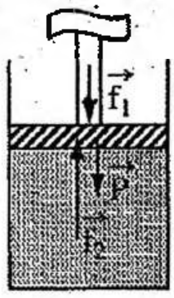
* Đĩa B có vận tốc bằng 0, có toạ độ góc $\theta_2(0) \approx -0{,}118\theta_0$. Hai đĩa luôn chuyển động quay ngược chiều.

* Đĩa B có vận tốc bằng 0, có toạ độ góc $\theta_2(0) \approx 1{,}618\theta_0$. Hai đĩa luôn chuyển động quay cùng chiều.

Chương IV. NHIỆT HỌC

Chủ đề 8

8.1. + Xét pittông khi ở trạng thái cân bằng nó chịu tác dụng của ba lực đó là : Trọng lực $\vec{P}$, áp lực của khí quyển $\vec{f}_1$ và áp lực của không khí trong xilanh $\vec{f}_2$ (Hình 8.1G).



Hình 8.1G

$\Rightarrow \vec{P} + \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \vec{0}$

$$\Rightarrow P + f_1 = f_2 \Leftrightarrow mg + p_0S = pS \Rightarrow p = p_0 + \frac{mg}{S} \qquad (1)$$

Do nhiệt độ không thay đổi nên áp dụng định luật Bôi-lơ – Ma-ri-ốt :

$$pV = p'V' \qquad (2)$$

p', V' là áp suất và thể tích của khí xilanh chuyển động. Giả sử xilanh chuyển động nhanh dần lên trên, khi đó pittông chịu thêm lực quán tính F_q.

Phương trình cân bằng lực lúc này là : $\vec{P} + \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{F}_q = \vec{0}$

$\Rightarrow P + f_1 + F_q = f_2 \Leftrightarrow m(g + a) + p_0S = p'S$

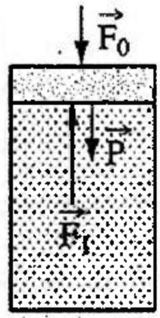
$$\Rightarrow p' = P_0 + \frac{m(g+a)}{S} \qquad (3)$$

Thay (1) và (3) vào phương trình (2)

$$\Rightarrow (p_0 + \frac{mg}{S})V = \left(p_0 + \frac{m(g+a)}{S}\right)V' \Leftrightarrow V' = \frac{mg + p_0S}{m(g+a) + p_0S}V$$

+ Nếu xilanh chuyển động nhanh dần đều đi xuống thì lực quán tính có chiều ngược lại, khi đó : $V' = \dfrac{mg + p_0S}{m(g-a) + p_0S}V$.

8.2. Lực tác dụng lên nắp bình gồm có áp lực của không khí $\vec{F}_1$ trong bình, trọng lực $\vec{P}$, áp lực của khí quyển $\vec{F}_0$ (Hình 8.2G). Để nắp bình không bị bật ra thì ta có điều kiện sau :



Hình 8.2G

$$P + F_0 \geq F_1 \Leftrightarrow mg + p_0S \geq p_1S \Leftrightarrow \frac{mg}{S} + p_0 \geq p_1 \qquad (1)$$

Khi nung bình thể tích không thay đổi, áp dụng định luật Sác-lơ :

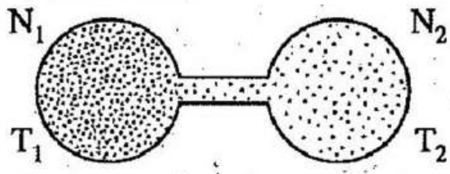
$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_0}{T_0} \Rightarrow p_1 = \frac{T_1}{T_0}p_0 \qquad (2)$$

Thay (2) vào phương trình (1), ta được :

$$\frac{T_1}{T_0}p_0 \leq \frac{mg}{S} + p_0 \Leftrightarrow T_1 \leq \left(\frac{mg}{S} + p_0\right).\frac{T_0}{p_0} \Rightarrow T_{1MAX} = \left(\frac{mg}{S} + p_0\right).\frac{T_0}{p_0}$$

Thay số, ta tính được : $T_{1MAX} = 329{,}6$ K $\Rightarrow t_1 = 54{,}6^oC$.

8.3. Ta phải xét hai trường hợp (Hình 8.3G)



Hình 8.3G

+ Áp suất thấp

+ Áp suất không thấp

a) Khi áp suất thấp :

Trạng thái cân bằng được thiết lập khi trong một đơn vị thời gian số phân tử z_1 từ trái sang phải bằng số phân tử z_2 từ phải sang trái.

Từ $z_1 = z_2 = n_1\overline{v_1} = n_2\overline{v_2}$ (1')

trong đó n_1, n_2 là mật độ phân tử khí trong bình bên trái và trong bình bên phải. Vì $\overline{v_1} \sim \sqrt{T_1}$, $\overline{v_2} \sim \sqrt{T_2}$ và $N_1 = n_1V$ và $N_2 = n_2V$, nên từ phương trình (1) ta có :

$$N_1\sqrt{T_1} = N_2\sqrt{T_2} \Leftrightarrow \frac{N_1}{\sqrt{T_2}} = \frac{N_2}{\sqrt{T_1}} = \frac{N_1 + N_2}{\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}}$$

Từ đó, suy ra : $N_1 = N\dfrac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}}$; $N_2 = N\dfrac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}}$.

b) Khi áp suất không thấp

Trạng thái cân bằng được thiết lập khi có cân bằng áp suất giữa hai bình :

$p_1 = p_2$, mà $p_1 = n_1kT_1$ và $p_2 = n_2kT_2 \Rightarrow n_1kT_1 = n_2kT_2 \Leftrightarrow n_1T_1 = n_2T_2$

$$\Rightarrow \frac{N_1}{T_2} = \frac{N_2}{T_1} = \frac{N_1 + N_2}{T_1 + T_2} = \frac{N}{T_1 + T_2}$$

Từ đó, ta suy ra : $N_1 = N\frac{T_2}{T_1 + T_2}$; $N_2 = N\frac{T_1}{T_1 + T_2}$.

8.4. a) Gọi m là khối lượng khí trong xilanh (thể tích v, áp suất p_K) μ : khối lượng mol của không khí. Ta có phương trình trạng thái cho không khí trong xilanh (T là nhiệt độ không khí)

$$p_K v = \frac{m}{\mu}RT \tag{1}$$

Tại một thời điểm nào đó, nếu M là khối lượng không khí trong bình (thể tích V, áp suất p), thì ta có phương trình trạng thái cho không khí trong bình :

$$pV = \frac{M}{\mu}RT \tag{2}$$

Mỗi lần ấn pittông, ta đưa vào bình một khối lượng không khí nhất định, bằng m, tức khối lượng khí trong bình từ M thành (M + m) và áp suất tăng thêm Δp. Vậy ta có phương trình trạng thái sau lần ấn pittông :

$$(p + \Delta p)V = \frac{M + m}{\mu}RT \tag{3}$$

Đặt (1), (2) vào vế phải của (3), ta có :

$$(p + \Delta p)V = pV + p_K v \Rightarrow \Delta pV = p_K v \Rightarrow \Delta p = \frac{p_K v}{V} \tag{4}$$

Tức là sau mỗi lần ấn pittông, áp suất tăng thêm $\Delta p = \frac{p_K v}{V}$. Suy ra số lần cần ấn pittông để áp suất trong bình từ p_0 thành p_c bằng :

$$n = \frac{p_c - p_0}{\Delta p} = \frac{(p_c - p_0)V}{p_K v} \tag{5}$$

b) Gọi p là áp suất trong bình trước khi kéo pittông, M là khối lượng không khí trong đó. Ta có : $pV = \frac{M}{\mu}RT$ (6)

Khi kéo, thể tích V thành V + v, áp suất thành p', khối lượng không khí vẫn là M. Vậy ta có : $p'(V + v) = \frac{M}{\mu}RT$ (7)

Đặt (6) vào vế phải của (7), ta có : $p'(V + v) = pV \Rightarrow \frac{p'}{p} = \frac{V}{(V+v)}$ (8)

Tức sau mỗi lần kéo pittông thì áp suất lại giảm theo tỉ số $\left(\frac{V}{V+v}\right)$. Nếu p_n là áp suất sau khi kéo n lần thì : $\frac{p_n}{p_0} = \frac{p_n}{p_{n-1}} \cdot \frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} \cdots \frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{V}{V+v}\right)^n$ (9)

Nếu : $p_n = p_C = \frac{p_0}{r} \Rightarrow \frac{\frac{p_0}{r}}{p_0} = \left(\frac{V}{V+v}\right)^n$

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{V}{V+v}\right)^n \Rightarrow r = \left(\frac{V+v}{V}\right)^n$$

$$\log r = n\log\left(\frac{V+v}{V}\right) \Rightarrow n = \frac{\log r}{\log\left(\frac{V+v}{V}\right)} \qquad (10)$$

Áp dụng bằng số : $n = \frac{\log 100}{\log\left(\frac{10v+v}{10v}\right)} = \frac{\log 100}{\log 1{,}1} = \frac{2}{0{,}041} \approx 48$ lần.

8.5. Gọi p_1 và p_2 là các áp suất ở nhiệt độ T, còn p_1' và p_2' là các áp suất ở nhiệt độ T' tương ứng với phần trên và dưới của xilanh. Thể tích các phần là V_1, V_2 và V_1', V_2'.

Ta có : $p_2 - p_1 = p_2' - p_1' \equiv$ áp suất do pittông gây ra (1)

và : $V_1 + V_2 = V_1' + V_2' \equiv$ thể tích xilanh (2)

Phương trình trạng thái ở nhiệt độ T :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Phần 1: } p_1V_1 = RT \\ \text{Phần 2: } p_2V_2 = RT\end{array}\right\} p_1V_1 = p_2V_2 = RT \qquad (3)$$

Phương trình trạng thái ở nhiệt độ T' :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Phần 1: } p_1'V_1' = RT \\ \text{Phần 2: } p_2'V_2' = RT\end{array}\right\} p_1'V_1' = p_2'V_2' = RT' \qquad (4)$$

Từ (3) $\Rightarrow \dfrac{p_2}{p_1} = \dfrac{V_1}{V_2} = n$ (5)

Từ (4) $\Rightarrow \dfrac{p'_2}{p'_1} = \dfrac{V'_1}{V'_2} = x$ (6)

Thế (5), (6) vào (1), (2) $\Rightarrow p_1(n-1) = p'_1(x-1)$ (7)

$$V_1\left(1+\frac{1}{n}\right) = V'_1\left(1+\frac{1}{x}\right) \quad (8)$$

Nhân (7) và (8) vế với vế : $p_1V_1(n-1)\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = p'_1V'_1(x-1)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ (9)

Thế (3), (4) vào (9) : $RT(n-1)\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = RT'(x-1)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{T}{T'}(n-1)\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = (x-1)\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \Rightarrow \dfrac{T}{T'}\left(n-\dfrac{1}{n}\right) = \left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

Đặt : $a = \dfrac{T}{T'}\left(n-\dfrac{1}{n}\right) \Rightarrow x^2 - ax - 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2+4}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+4}\right) \\ x = \dfrac{1}{2}\left(a-\sqrt{a^2+4}\right) < 0 \text{(loại)} \end{cases}$$

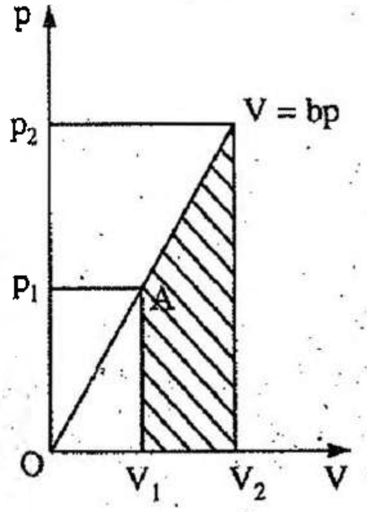
$$x = \frac{1}{2}\left[\frac{T}{T'}\left(n-\frac{1}{n}\right) + \sqrt{\frac{T^2}{T'^2}\left(n-\frac{1}{n}\right)^2 + 4}\right]$$

Áp dụng số : n = 2, T' = 2T $\Rightarrow a = \dfrac{T}{2T}\left(2-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{4}$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\frac{9}{16}+4} = \sqrt{\frac{73}{16}}$$

$$x' = \frac{3+\sqrt{73}}{8} \approx 1{,}44$$

8.6. a) Theo nguyên lí I của NĐLH : $\Delta U = Q - A$. (1)



Hình 8.4G

Quy luật dãn nở của khí cho ta : Công sinh ra là diện tích hình thang (phần gạch chéo hình 8.4G) :

$A_i = p_i \Delta V_i$

$A = \Sigma A_i = \Sigma$ diện tích hình thang

$$A = \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1) = \frac{b(p_1 + p_2)}{2}(p_2 - p_1)$$

$$= \frac{b}{2}(p_2^2 - p_1^2) \qquad (2)$$

Mặt khác ta có phương trình trạng thái : $pV = RT \Rightarrow bp^2 = RT$

$$\Delta(RT) = (T_2 - T)R = b(p_2^2 - p_1^2) \Rightarrow \Delta T = \frac{b}{R}(p_2^2 = p_1^2)$$

Quá trình đẳng tích : $\Delta U = Q = C_V \Delta T$

$$C_V = \frac{\Delta U}{\Delta T} = \frac{Q - \frac{b}{2}(p_2^2 - p_1^2)}{\frac{b}{R}(p_2^2 - p_1^2)} = \frac{RQ - \frac{bR}{2}(p_2^2 - p_1^2)}{b(p_2^2 - p_1^2)}$$

$$\Rightarrow b = \frac{RQ}{\left[C_V(p_2^2 - p_1^2) + \frac{R}{2}(p_2^2 - p_1^2)\right]} = \frac{2RQ}{(2C_V + R)(p_2^2 - p_1^2)}$$

8.7. a) Khi ống nằm ngang thì chiều dài mỗi cột khí là : $l_0 = \dfrac{L - l}{2} = 5{,}00$ cm

Gọi p_0 và $V_0 = Sl_0$ là áp suất và thể tích khi ống nằm ở vị trí này thì khi đặt thẳng đứng :

$$p_1 S(l_0 - \Delta l) = p_0 S l_0$$

$$p_2 S l_0 + \Delta l) = p_0 S l_0$$

$$p_1 S = p_2 S + \rho g l S$$

Giải hệ phương trình trên ta có : $p_0 = \dfrac{gl\rho}{2}\left(\dfrac{l_0}{\Delta l} - \dfrac{\Delta l}{l_0}\right) = 4{,}71.10^3$ Pa.

b) Theo nguyên lí I Nhiệt động lực học : $Q + A = \Delta U$

Do chỉ cung cấp công nên $Q = 0$. Công bằng sự biến thiên nội năng của các khối khí :

$$A = \Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = \frac{p_0V_0}{\gamma-1}\left[\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma-1} - 1\right] + \frac{p_0V_0}{\gamma-1}\left[\left(\frac{V_0}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1\right]$$

Do : $\frac{V_0}{V_1} = 2$ và $\frac{V_0}{V_2} = \frac{2}{3}$ và $p_0V_0 = 1,88$ J, $\gamma = \frac{7}{5}$ nên : $A = 0,80$ J.

c) Vì : $\frac{p_1}{p_0} = 2^\gamma$ và $\frac{p_2}{p_0} = \left(\frac{2}{3}\right)^\gamma$ nên : $a = \frac{F}{m} = \frac{(p_1 - p_2)A}{\rho A l} = 15,2\ \text{m/s}^2$.

8.8. Hiệu suất của chu trình : $\eta = \frac{A}{Q}$

A là công mà khối khí thực hiện.

Q là nhiệt lượng khối khí nhận được.

Trên đồ thị p - V, công có trị số tính bằng phần diện tích giới hạn trong đường cong chu trình : $A = p_AV_A(k - 1)$.

Gọi T_A là nhiệt độ tại A thì $T_B = 2T_A$, $T_C = 2kT_A$, $T_D = kT_A$.

Nhiệt lượng thu vào : $Q = nC_VT_A + nC_p2T_A(k - 1)$ (n : là số mol khí).

Chú ý là : $p_AV_A = nRT_A$ thì : $\eta = \frac{R(k-1)}{\left[C_V + 2C_p(k-1)\right]}$.

Vì chất khí là đơn nguyên tử nên $C_V = \frac{3R}{2}$ và $C_p = \frac{5R}{2}$: $k = 1 + \frac{3\eta}{(2 - 10\eta)}$.

Nếu hiệu suất $\eta = 0,15$ thì $k = 1,9$.

8.9. a) Phương trình trạng thái của khí lí tưởng ở hai buồng :

$p'Sx = n_1RT_1 \qquad p''(l - x) = n_2RT_2$

Khi pittông nằm cân bằng : $p' = p''$

Từ đó $n_2 = 1,2$ mol.

b) Gọi T là nhiệt độ cuối cùng của hệ :

$$n_1C_V(T - T_1) + n_2C_V(T - T_2) + cm(T - T_0) = 0$$

Với $C_V = \frac{3R}{2}$ là nhiệt dung riêng đẳng tích. Với $n_0 = \frac{cm}{C_v} = 4,1$ mol.

$$T = \frac{n_1C_VT_1 + n_2C_VT_2 + cmT_0}{n_1C_V + n_2C_V + cm} = \frac{n_1T_1 + n_2T_2 + n_0T_0}{n_1 + n_2 + n_0} = 307\text{ K} = 34^\circ C$$

c) Khi pittông nằm ở vị trí cân bằng mới : $p'Sx' = n_1RT$; $p'S(l - x') = n_2RT$.

Từ đó : $x' = 0,66$ m.

Vậy pittông đã dịch chuyển về phía phải một đoạn $\Delta x = x' - x = 0,13$ m.

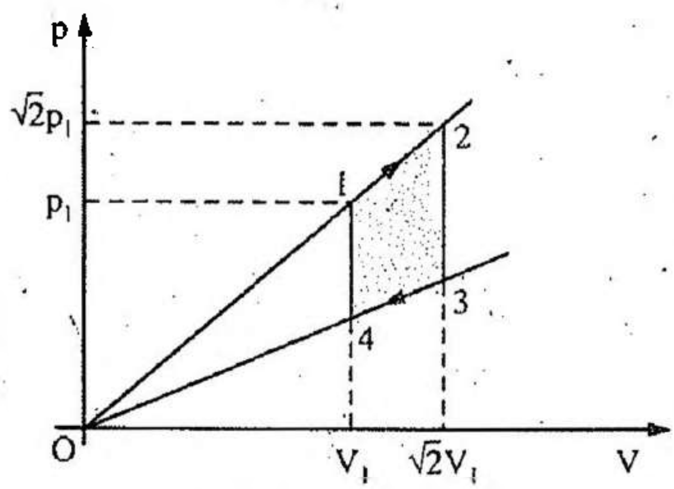
8.10. Trên đoạn $1 \to 2$, $\frac{V^2}{T} = \text{const}$, từ đó $V_2 = \sqrt{2}V_1$ và $p_2 = \sqrt{2}p_1$.

Trên đoạn $2 \to 3$, $T_3 = \frac{1}{2}T_2 = T_1$ nên $p_3 = \frac{1}{2}p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}p_1$.

Ta lập bảng có các thông số trạng thái như sau :

Trạng thái	Áp suất	Thể tích	Nhiệt độ
1	p_1	V_1	T_1
2	$\sqrt{2}\,p_1$	$\sqrt{2}V_1$	$2T_1$
3	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)p_1$	$\sqrt{2}V_1$	T_1
4	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)p_1$	V_1	$\left(\frac{1}{2}\right)T_1$

Ta vẽ lại chu trình trên theo sơ đồ p - V như hình 8.5G.



Hình 8.5G

Công của chu trình :

$$W = \frac{1}{2}(p_2 + p_1)(V_2 - V_1) - \frac{1}{2}(p_3 + p_4)(V_3 - V_4) = \frac{1}{2}nRT_1$$

Khối khí nhận nhiệt lượng trong quá trình $1 \to 2$ và $4 \to 1$. Do đây là khí lưỡng nguyên tử nên $C_V = \frac{5}{2}R$, vì vậy :

$$Q = Q_{12} + Q_{41}$$

$$= \frac{5}{2}nR(T_2 - T_1) + \frac{1}{2}(p_2 + p_1)(V_2 - V_1) + \frac{5}{2}nR(T_1 - T_4)$$

$$= \frac{17}{4}nRT_1$$

Hiệu suất : $\eta = \frac{W}{Q} \Rightarrow$ Với W = 623 J thì $\eta = \frac{1}{17} = 0{,}059$.

8.11. a) Gọi dF_{Hg} là áp suất của lớp thủy ngân có độ cao dh tác dụng lên thành :

$$dF_{Hg} = (p_{atm} + \rho gh)adh = \frac{1}{2}p_{atm}a^2 + \frac{1}{8}\rho ga^3$$

Áp suất trung bình của khối thủy ngân tác dụng lên vách ngăn :

$$\bar{p} = \frac{F_{Hg}}{S} = \frac{p_{atm}\frac{a^2}{2} + \rho g\frac{a^3}{8}}{\frac{a^2}{2}} = p_{atm} + \frac{1}{4}\rho gh \text{ (định luật Stevino)}$$

Áp lực của khí quyển tác dụng lên một nửa còn lại của vách ngăn :

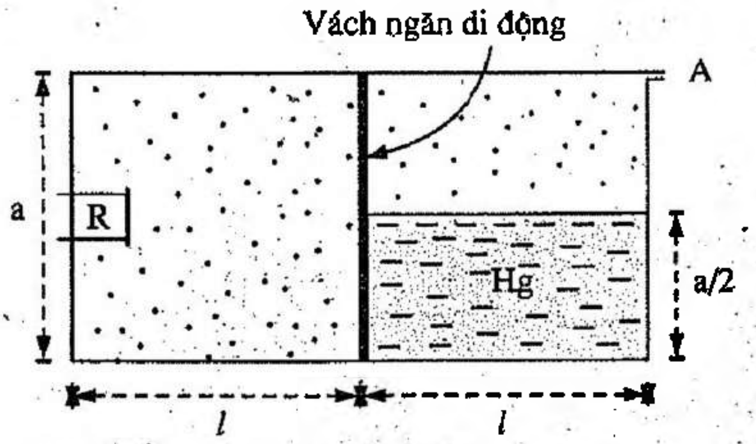
$$F_a = \frac{1}{2}p_{atm}a^2$$

Áp lực toàn phần tác dụng lên phía phải của vách ngăn :

$$F = F_a + F_{Hg} = p_{atm}a^2 + \frac{1}{8}\rho ga^3$$

Áp lực này cân bằng với áp lực của khối khí tác dụng lên bên trái của vách ngăn, vì vậy áp suất khối khí là : $p_0 = \frac{F}{a^2} = p_{atm} + \frac{1}{8}\rho ga = 102$ kPa.

b) Khi vách ngăn di chuyển đoạn x sao cho $0 \le x \le l$ thì thủy ngân dâng lên có độ cao b.



Hình 8.6G

Thể tích khối khí bây giờ :

$$V = a^2(l + x) \Rightarrow x = \frac{V}{a^2} - l$$

Nếu $x < \frac{l}{2}$, thủy ngân chưa tràn ra ngoài lỗ A :

$$\frac{la^2}{2} = (l - x)ab \Rightarrow b = \frac{la}{(l - x^2)} = \frac{l}{2 - \frac{V}{V_0}} \cdot \frac{a}{2}$$ trong đó $V_0 = a^2 l$

Từ đó $p(V) = p_{atm} + \frac{1}{8}\rho ga\left(\frac{l}{2 - \frac{V}{V_0}}\right)^2$.

Nếu $x > \frac{l}{2}$ tức $V > \frac{3}{2}V_0$ thì thủy ngân tràn ra ngoài $p(V) = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho ga$.

Tóm lại, nếu : $V_0 \le V \le \frac{3}{2}V_0$ thì $p(V) = p_{atm} + \frac{1}{8}\rho ga\left(\frac{l}{2 - \frac{V}{V_0}}\right)^2$

$\frac{3}{2}V_0 \le V \le 2V_0$ thì $p(V) = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho ga$

c) $\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_1 V_1}{T_1}$

$$\Rightarrow T_1 = T_0 \frac{p_1 V_1}{p_0 V_0} = T_0 \frac{(p_{atm} + \frac{1}{2}\rho ga)}{(p_{atm} + \frac{1}{8}\rho ga)} \cdot \frac{2V_0}{V_0} = 612\text{ K} = 339^oC$$

d) Công mà khối khí dùng để :

– Đẩy lượng không khí bên vách phải ra ngoài : $A_1 = p_{atm}\Delta V = p_{atm}V_0$.

– Cung cấp thế năng cho khối thủy ngân để đưa toàn bộ khối thủy ngân đi qua lỗ A :

$$A_2 = mg\Delta h = \rho\frac{la^2}{2}g(a - \frac{a}{4}) = \frac{3}{8}\rho gaV_0$$

Δh là độ cao tính từ khối tâm khối thủy ngân đến khe A.

Vậy công mà khối khí thực hiện được : $A = A_1 + A_2 = 8,26$ J.

e) Khối khí là khí lí tưởng đơn phân tử nên $C_V = \frac{3R}{2}$. Độ tăng nội năng khối khí :

$$\Delta U = nC_V\Delta T = \frac{3}{2}p_1V_1 - \frac{3}{2}p_0V_0 = \frac{3}{2}V_0(p_{atm} + \frac{7}{8}\rho ga) = 12,7 \text{ J}$$

Nhiệt lượng đã cung cấp cho khối khí : $Q = \Delta U + A = 21$ J.

8.12. a) Khối lượng không khí có trong khinh khí cầu khi chưa bay là :

$$n = \frac{p_0V_0}{RT_1} = \frac{1,013.10^5.10}{8,31.300} = 4,01.10^4 \text{ mol} \Rightarrow m_A = 1,16.10^3 \text{ kg}.$$

Tổng khối lượng khinh khí cầu là :

$$m_B = m_n + m_A = 240 + 1,16.10^3 = 1,40.10^3 \text{ kg}.$$

b) Gọi : $p_1 = p_0$; $V_1 = V_0 = 1000$ m^3 ; $T_1 = 300$ K lần lượt là áp suất, thể tích, nhiệt độ khối khí chứa trong khinh khí cầu sau khi bơm và $p_2 = p_0$, V_2 và T_2 là các giá trị tương ứng khi khinh khí cầu bắt đầu bay. Lúc ấy lực đẩy Ác-si-mét F_A lớn hơn trọng lượng của khinh khí cầu :

$F_A = F_G$ hay $\rho_0V_2g = m_Bg$

Áp dụng phương trình trạng thái khí lí tưởng : $p_0V_0 = n_0RT_0 \Rightarrow \frac{n_0}{V_0} = \frac{p_0}{RT_0}$.

Ta có : $\rho_0 = \frac{p_0M_A}{RT_0} = \frac{1,013.10^5.29}{8,31.290} = 1,25$ kg/m^3.

$$\Rightarrow V_2 = \frac{m_B}{\rho_0} = \frac{1,40.10^3}{1,25} = 1,12.10^3 \text{ m}^3.$$

c) Áp dụng phương trình trạng thái khí lí tưởng : $p_1V_1 = n_1RT_1$ và $p_2V_2 = n_2RT_2$.

Với áp suất không đổi ($p_1 = p_2 = p_0$) và số mol như nhau ($n_2 = n_1 = n$) ta có :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_1} = 1,12 \Rightarrow T_2 = 336\text{ K}$$

Nhiệt lượng cần thiết : $\Delta Q = nC_p\Delta T = n\frac{7}{2}R\Delta T = 4,2.10^7\text{ J} = 42\text{ MJ}$.

8.13. a) $T_1 = T_0\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma-1} = 323.8^{0,3} = 603\text{ K}$

b) $p_1 = p_0\frac{V_0T_1}{V_1T_0} = 14,9\text{ bar}$

c) $$A = p_0V_0^{\gamma}\left(\frac{V_1^{\gamma-1} - V_0^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right) + p_2V_1^{\gamma}\left(\frac{V_0^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right)$$

$A = -289 + 791 = 502$ J.

d) Với động cơ bốn thì, mỗi chu trình tương ứng với hai vòng quay của động cơ. Trong một giờ động cơ thực hiện một công :

$$W = 4.60.\frac{3500}{2}.502 = 2,11.10^8\text{ J}.$$

Lượng xăng cần dùng trong 100 km đường đi :

$$m = \frac{2,11.10^8}{0,33.4,3.10^7} = 14,9\text{ kg}.$$

8.14. Phương trình của khí lí tưởng và phương trình trong quá trình đoạn nhiệt cho :

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2} \text{ hay } p_1V_1^{\gamma} = p_2V_2^{\gamma}\ ;\ p_2 = p(h) = p_1.e^{\frac{h}{8300m}}$$

Hai phương trình trên cho tỉ số các thể tích :

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}.\frac{T_2}{T_1} \text{ hay } \frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Cuối cùng :

$$T_2 = T_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_1\left(\frac{p_2}{p_2 e^{-\frac{100m}{8300m}}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_1 . e^{\frac{1}{83}\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 10,976^oC$$

Vậy nhiệt độ tăng một lượng là : 0,98 K.

8.15. Nếu không có ngoại lực tác dụng lên hai quả cầu thì nhiệt độ cuối cùng của chúng sẽ như nhau. Tuy nhiên do có trọng lực, khi quả cầu nở ra thì trọng tâm của chúng thay đổi vị trí. Trọng tâm của khối cầu nằm trên bàn sẽ tăng lên, vì vậy một phần nhiệt lượng chuyển thành thế năng của vật, vì vậy quả cầu nằm trên bàn sẽ có nhiệt độ thấp hơn quả cầu treo.

Giả sử khối lượng mỗi quả cầu là 100 g, nhiệt độ ban đầu là T_1, khối lượng riêng của nhôm là $2,7.10^3$ kg/m^3; mỗi quả cầu nhận một nhiệt lượng 25 kJ.

Gọi Δr_A, ΔT_A là độ biến thiên của bán kính và nhiệt độ của quả cầu nằm trên bàn.

Δr_B, ΔT_B là độ biến thiên của bán kính và nhiệt độ của quả cầu trên.

Bán kính ban đầu của mỗi quả : $m = \left(\frac{4}{3}\pi r_i^3\right)p \Rightarrow r_i = 0,0207$ m

Độ biến thiên của bán kính :

$$\Delta r_A = [2,31 \times 10^{-5}\Delta T_A]r_i = 4,777.10^{-7}\Delta T_A$$

$$\Delta r_B = [2,31 \times 10^{-5}\Delta T_A]r_i = 4,777.10^{-7}\Delta T_B$$

Từ đó :
$$\Delta r_A = \frac{1}{2,31.10^{-5}}\frac{\Delta r_A}{r_i}$$

$$\Delta r_B = \frac{1}{2,31.10^{-5}}\frac{\Delta r_B}{r_i}$$

Nhiệt dung của 100 g nhôm : $C = 22,4\frac{T}{kmol}\left(\frac{27}{27g/mol}\right)(100g) = 90,3704\frac{J}{K}$

Khối tâm của quả cầu A sẽ đi lên đoạn Δr_A, còn của quả cầu B đi xuống đoạn Δr_B. Nhiệt lượng cung cấp dùng để làm thay đổi thế năng và nhiệt độ quả cầu.

Đối với quả cầu A :

$$250000 = mg\Delta r_A + C\Delta T_A = \frac{9,81}{10}(4,777.10^{-7})\Delta T_A + 90,3704\Delta T_A$$

Vì thế : $250000 = [4,777.10^{-7})\Delta T_A + 90,3704]\Delta T_A$

Tương tự với quả cầu B : $250.000 = [-4,777.10^{-7} + 90,3704]\Delta T_B$

Hiệu nhiệt độ cuối cùng của hai quả cầu :

$$\Delta T = \Delta T_B - \Delta T_A = 250000\left[\frac{1}{90,3704 - 4,777.10^{-7}} - \frac{1}{90,3704 + 4,777.10^{-7}}\right]$$

$$\approx 250000[1,170.17^{-10}] \approx 2,952.10^{-5} \text{ K.}$$

8.16. a) Có 4.6 = 24 mặt bao quanh ngọn đèn. Vì vậy một mặt của khối lập phương hấp thụ $\frac{1}{4}$ năng lượng của ngọn đèn phát ra.

$$\frac{1}{24}Qt = mc\Delta t^o \Rightarrow t = \frac{24mc}{Q} \text{ (s)}$$

b) Một đơn vị diện tích của một vật đen ở nhiệt độ T sẽ bức xạ công suất σT^4 (W); vì vậy khối lập phương bức xạ $6L^2\sigma T^4$ (J/s).

Phương trình cân bằng : $-6L^2\sigma T^4 t + \frac{1}{24}Qt = mc\Delta t^o$ với $\Delta t^o = 1$ K

$$t = \frac{mc}{-6L^2\sigma T^4}$$

c) Khi cân bằng nhiệt, năng lượng hấp thụ bằng năng lượng bức xạ trong một đơn vị thời gian : $-6L^2\sigma T^4 = \frac{1}{24}Q \Rightarrow T = \left(\frac{Q}{144\sigma L^2}\right)^{\frac{1}{4}}$

8.17. a) Coi bọt xà phòng gồm hai bán cầu có cùng bán kính r. Chúng đẩy nhau bởi lực $F = \Delta p.S = \Delta p.\pi r^2$.

S là tiết diện ngang của bán cầu, còn $\Delta p = p_0 - p$ là độ chênh lệch giữa áp suất bên trong và ngoài.

Hai bán cầu này bị kéo bởi lực căng bề mặt. Như vậy lực căng tổng cộng có giá trị : $F = 2(2\pi r\sigma)$ (σ : là suất căng bề mặt).

Từ đó : $\Delta p.\pi r^2 = 4\pi r\sigma$

$$(p_0 - p)\pi r^2 = 4\pi r\sigma$$

$$p = p_0 + \frac{4\sigma}{r}.$$

b) Áp suất tỉ lệ nghịch với bán kính, vì vậy bọt nhỏ sẽ có áp suất lớn, đẩy màng ngăn cách về phía bọt lớn.

c) Nếu màng ngăn cách bị vỡ, hai bọt hoặc bị vỡ theo, hoặc nhập chung thành bọt lớn hơn.

Áp dụng định luật Bôi-lơ – Ma-ri-ốt : $pV = p_1V_1 + p_2V_2$

$$\left(\frac{4\sigma}{r} + p_0\right)r^3 = \left(\frac{4\sigma}{r_1} + p_0\right)r_1^3 + \left(\frac{4\sigma}{r_2} + p_0\right)r_2^3.$$

Về lí thuyết có thể giải phương trình này để tìm r.

d) Hệ không cân bằng. Bọt nhỏ có áp suất lớn hơn sẽ đẩy không khí về phía bọt lớn. Cuối cùng ta sẽ có một bọt lớn ở một đầu ống hút, còn bọt nhỏ co lại thành màng ở đầu còn lại.

8.18. a) $T_2 - T_1 = \Delta T > 0$.

Khi đốt nóng : $L_1 = L(1 + \lambda\Delta T)$.

Khi làm lạnh trở lại đến nhiệt độ T_1 : $L_2 = [L(1 + \lambda\Delta T)][1 - \lambda\Delta T] = L(1 - \lambda^2\Delta T^2)$.

b) Cứ mỗi lần tăng và hạ nhiệt độ, chiều dài của thanh được nhân với $(1 - \lambda^2\Delta T^2)$.

Sau n lần như thế : $L_{2n} = L(1 - \lambda^2\Delta T^2)^n$.

$\lambda\Delta T$ nhỏ hơn 1, vì vậy : $\lim\limits_{x \to \infty} (L_{2n}) = 0$.

Điều này không đúng vì định luật bảo toàn khối lượng bị vi phạm.

Lí do là số hạng vi phân $dL = L\lambda dT$ chỉ có giá trị với các ΔL và ΔT vô cùng nhỏ. Vì vậy, các số hạng $(\Delta T^2, \Delta L^2, \ldots)$ có thể bỏ đi. Vì thế $1 - \lambda^2\Delta T^2 \approx 1$ nghĩa là chiều dài của thanh trở về giá trị lúc đầu.

Nếu λ là hằng số : $\dfrac{dL}{dT} = L\lambda \Rightarrow dL = \lambda dT \Rightarrow \int\dfrac{dL}{L} = \int\lambda dT$

$$L = L_0e^{\lambda\Delta T} \approx L_0(1 + \lambda\Delta T + (\lambda\Delta T)^2 + \ldots)$$

Bỏ qua các số hạng nhỏ bậc hai : $L \approx L_0(1 + \lambda\Delta T)$.

8.19. a) Trong quá trình đoạn nhiệt thì : $pV^{\gamma} = \text{const}$.

$$p_0 = \frac{nRT_0}{V_0} = \frac{nRT_0}{Sh_0}$$

$$p_1 = p_0 + \frac{Mg}{S}$$ (S : là tiết diện đáy bình).

$$p_1V_1^{\gamma} = p_0V_0^{\gamma} \Rightarrow p_1h_1^{\gamma} = p_0h_0^{\gamma} \Rightarrow h_1 = h_0\left[\frac{p_0}{p_1}\right]^{\frac{1}{\gamma}} = h_0\left[\frac{p_0S}{p_0S+Mg}\right]^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$h_1 = \frac{nRT_0}{p_0S}\left[\frac{p_0S}{p_0S+Mg}\right]$$

b) Giống câu a.

$$h_2 = \frac{nRT_0}{p_0S}\left[\frac{p_0S}{p_0S+(M+m)g}\right]^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$p_2 = p_0 + \frac{(M+m)g}{S}.$$

c) Lực kéo về của hệ dao động quả cầu – lò xo là $-k\Delta x$. Khi pit-tông lệch khỏi vị trí cân bằng một đoạn x thì lực hồi phục là : $F = p_0S - pS + (m + m)g$.

Do : $p(h_2 + x)^{\gamma} = p_2V_2^{\gamma} = p_2V_1^{\gamma} = p_0V_0^{\gamma}$

$$p = p_2\frac{h_2^{\gamma}}{(h_2+x)^{\gamma}}$$

Nếu : x □ h_2 :

$$p = p_2\left[1+\frac{x}{h_2}\right]^{-\gamma} \approx p_2\left[1-\frac{\gamma x}{h_2}\right] \Rightarrow F = p_0S + (M + m)g - p_2A\left[1-\frac{\gamma x}{h_2}\right]$$

$$\Rightarrow F = \gamma p_2\frac{S}{h_2}x = kx.$$

Pit-tông được xem như vật có khối lượng (M + m) gắn vào lò xo có độ cứng $k = \gamma p_2\frac{S}{h_2}$. Tần số dao động của pit-tông là : $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\gamma p_2S}{h_2(M+m)}}$.

d) Độ cao cực đại của pittông trong quá trình dao động : $h_2 - h_1$.

Độ cao cực tiểu của pittông trong quá trình dao động : $h_{min} = h_1 - (h_2 - h_1) = 2h_1$.

8.20. a) Vận tốc của các phân tử có giá trị lớn nhất tương ứng với đỉnh của đường cong phân bố (Hình 8.7G).

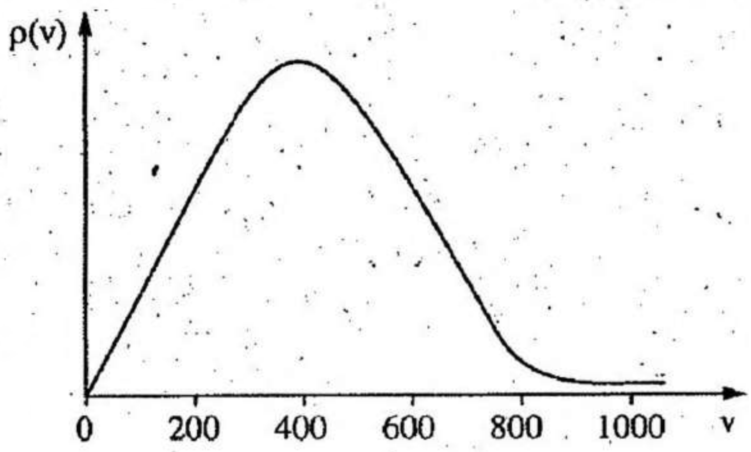
Lấy đạo hàm của hàm số phân bố Mắc-xoen :

$$\frac{d\rho(v)}{dv} = 0 \Rightarrow v = \left(\frac{2RT}{M}\right)^{\frac{1}{2}}$$

với T = 300 K, M = 0,0320 kg/mol.

Ta tính được : v = 395 m/s.

b) Đồ thị hàm phân bố Mắc-xoen như hình 8.7G.



Hình 8.7G

8.21. Khi xảy ra sự cân bằng nhiệt tức nhiệt độ cuối cùng của hệ là T_B, đường kính vành sắt hoặc quả cầu thay đổi một lượng : $\Delta D = (T_f - T_i)D\alpha$.

α là hệ số nở dài.

Khi đó, quả cầu lọt qua vành đồng, nghĩa là đường kính quả cầu bằng đường kính trong của vành.

$D_{Cu} = D_{Al}$.

$$D^0_{Cu} + \Delta D_{Cu} = D^0_{Al} + \Delta D_{Al}$$

(D^0_{Cu} và D^0_{Al} là đường kính lúc đầu).

Từ phương trình trên ta tìm được nhiệt độ cuối cùng là : $T_f = 50,38^oC$.

Nếu không có sự mất mát nhiệt : $C_{Cu}.M_{Cu}(\Delta T_{Cu}) = C_{Al}M_{Al}(\Delta T_{Al})$.

Giải phương trình này sẽ tìm được khối lượng quả cầu nhôm : $M_{Al} = 8,71.10^{-3}$ kg.

8.22. Sự thay đổi chiều dài theo nhiệt độ : $\Delta x = \alpha x_0 \Delta t$.

tức là : $x = x_0 + \Delta x = x_0[1 + \alpha(T - T_0)]$ (1)

Vì thể tích : $V = x^3$ (2)

Suy ra công thức cho sự dãn nở khối : $V = x^3 = x_0^3\,[1 + \alpha(T - T_0)]^3$ (3)

$$V = [1 + \alpha(T - T_0)]^3$$

Từ phương trình trạng thái cho khí lí tưởng : $p = \dfrac{nRT}{V}$ (4)

Suy ra áp suất khối khí trong bình : $p = \dfrac{nRT}{V_0\left[1+\alpha(T-T_0)\right]^3}$ (5)

Để tìm nhiệt độ mà áp suất là cực đại, lấy đạo hàm p theo T và cho bằng 0 :

$$\frac{dp}{dT} = \frac{nR}{V_0[1+\alpha(T-T_0)]^3} - \frac{3n\alpha RT}{V_0[1+\alpha(T-T_0)]^4} = \frac{nR[1-\alpha(2T+T_0)]}{V_0[1+\alpha(T-T_0)]^4} = 0$$

Từ đó : $T = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\alpha} - T_0\right) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{1{,}1.10^{-5}} - 300\right] = 4{,}53.10^4$ K (6)

Số mol chứa trong bình :

$$n = \frac{p_0V_0}{RT_0} = \frac{(101325).(1{,}00.10^{-3})}{(8{,}31451).(300)} = 0{,}0406 \text{ mol.}$$

Thay các giá trị tìm được vào biểu thức tính áp suất, áp cực đại là :

$$p = \frac{nRT}{V_0\left[1+\alpha(T-T_0)\right]^3} = \frac{(0{,}0406).(8{,}31451).(4{,}53.10^4)}{(1{,}00.10^{-3})\left[1+(1{,}1.10^{-15}).(4{,}53.10^4 - 300)\right]^3}$$

$p = 4{,}58.10^6$ Pa = 45,2 atm.

Thể tích ứng với áp suất cực đại : $V = V_0[1 + \alpha(T - T_0)]^3$.

8.23. Công do khí thực hiện trong quá trình đẳng áp 1-2 bằng :

$A = p_1(V_2 - V_1)$

Vì $p_1V_1 = nRT_1$ và $p_2V_2 = nRT_2 = 4nRT_1$ nên $A = 3nRT_1$. Suy ra : $T_1 = \dfrac{A}{3nR}$.

Công mà khí thực hiện trong cả chu trình được tìm bằng cách tính diện tích tam giác 123 và bằng : $A_{ct} = \dfrac{1}{2}(p_1 - p_3)(V_2 - V_1)$.

Từ các phương trình trạng thái ở trên ta tìm được :

$$V_1 = \frac{nRT_1}{p_1} = \frac{A}{3p_1} \text{ và } V_2 = \frac{4nRT_1}{p_1} = \frac{4A}{3p_1}.$$

Do đó : $A_{ct} = \frac{A}{2}\left(1 - \frac{p_3}{p_1}\right)$.

Vì các điểm 2 và 3 nằm trên đường thẳng đi qua gốc toạ độ nên : $\frac{p_3}{p_1} = \frac{V_3}{V_2}$.

Mặt khác, cũng từ phương trình trạng thái ta có :

$$V_3 = \frac{nRT_1}{p_3} = \frac{A}{3p_3} \text{ và } V_2 = \frac{4A}{3p_1}$$

Từ đó suy ra : $\frac{p_3}{p_1} = \frac{p_1}{4p_3}$ hay $\frac{p_3}{p_1} = \frac{1}{2}$.

Công khối khí thực hiện trong chu trình : $A_{ct} = \frac{A}{4}$.

8.24. Theo đề bài, 1, 2, 3 nằm trên đường thẳng đi qua gốc toạ độ, ta có :

$$p_1 = p_5 = \alpha V_1 \quad (1) ; p_2 = p_4 = \alpha V_2 \quad (2) ; p_3 = \alpha V_3 \quad (3)$$

với α là một hằng số. Mặt khác, theo phương trình trạng thái khí lí tưởng và ba phương trình trên ta được :

$$p_1V_1 = RT_1 \Rightarrow \alpha V_1V_2 = \alpha V_1^2 = RT_1. \text{ Suy ra : } T_1 = \frac{\alpha}{R}V_1^2 \quad (4)$$

Tương tự : $T_2 = \frac{\alpha}{R}V_2^2$ (5) và $T_3 = \frac{\alpha}{R}V_3^2$ (6)

Vì $V_1 < V_2 < V_3$, từ (3), (4), (5) suy ra $T_1 < T_2 < T_3$.

Vì quá trình 3 – 4 là đẳng áp, nên : $\frac{T_3}{T_4} = \frac{p_3}{p_4} = \frac{p_3}{p_2} = \frac{V_3}{V_4} > 1 \Rightarrow T_4 < T_3$.

Vì quá trình 4 – 2 là đẳng tích, nên : $\frac{T_4}{T_2} = \frac{V_4}{V_2} = \frac{V_3}{V_2} > 1 \Rightarrow T_4 > T_2$, như vậy :

$T_1 < T_5 < T_2$.

Tương tự, từ các quá trình đẳng tích 2 – 5 và đẳng áp 5 – 1, ta được : $T_1 < T_5 < T_2$.

Suy ra : $T_1 < T_5 < T_2 < T_4 < T_3$.

Nghĩa là T_3 là nhiệt độ lớn nhất và T_1 là nhiệt độ nhỏ nhất của khí trong chu trình nên theo đề bài $T_3 = nT_1$. Thay (6) và (4) vào phương trình vừa nhận được, ta có :

$$\frac{\alpha}{R}V_1^2 = n\frac{\alpha}{R}V_3^2 \Rightarrow V_3^2 = nV_1^2 \Rightarrow V_3 = \sqrt{n}\,V_1 \qquad (7)$$

Vì 2 là điểm giữa của đoạn 1 – 3, ta có :

$$V_2 - V_1 = V_3 - V_2 \Rightarrow V_2 = \frac{1}{2}(V_2 + V_1)$$

Thay (7) vào ta được : $V_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{n}+1)\,V_1$ (8)

Như đã biết, công A thực hiện trong một chu trình có giá trị bằng diện tích của chu trình đó, ở đây đó là diện tích hai tam giác bằng nhau 1 – 2 – 5 và 2 – 3 – 4. Từ hình vẽ và dùng (1) và (2), ta có :

$$A = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = \alpha(V_2 - V_1)^2$$

Thay (8) vào ta được :

$$A = \alpha\left(\frac{\sqrt{n}+1}{2}V_1 - V_2\right)^2 = \alpha V_1^2\left(\frac{\sqrt{n}-1}{2}\right)^2$$

Dễ thấy rằng các quá trình đẳng tích 3 – 4, 2 – 5 và đẳng áp 4 – 2 ; 5 – 1 đều tỏa nhiệt, nên nhiệt lượng Q máy nhiệt nhận được chỉ trong các quá trình 1 – 2 – 3, áp dụng nguyên lí I Nhiệt động lực học, ta có :

$$Q = \frac{3}{2}R(T_3 - T_1) + \frac{1}{2}(p_1 + p_3)(V_3 - V_1)$$

Thay (1), (3), (6) và (7) vào ta được :

$$Q = \frac{3}{2}R\left(\frac{\alpha}{R}V_3^2 - \frac{\alpha}{R}V_2^1\right) + \frac{1}{2}(\alpha V_1 + \alpha V_3)(V_3 - V_1)$$

$$= \frac{3\alpha}{2}(nV_1^2 - V_1^2) + \frac{1}{2}\alpha(nV_1^2 - V_1^2) = 2\alpha(n-1)\,V_1^2$$

Vậy hiệu suất của máy nhiệt đã cho bằng :

$$H = \frac{A}{Q} = \frac{\alpha V_1^2(\sqrt{n}-1)^2}{8\alpha(n-1)V_1^2} = \frac{1}{8}\cdot\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$$

Với n = 4, thay vào công thức trên ta được : $H = \dfrac{1}{24}$.

8.25. Trong quá trình đoạn nhiệt 1 – 2, T_1 là nhiệt độ cực đại, T_2 là nhiệt độ cực tiểu, bởi vậy có thể viết : $T_1 - T_2 = \Delta T$.

Trong quá trình đẳng áp 2 – 3, áp dụng nguyên lí I nhiệt động lực học, ta có :

$$-Q = C_V(T_3 - T_2) + p_2(V_3 - V_2) \qquad (1)$$

với $C_V = \dfrac{3R}{2}$. Từ (1) và các phương trình trạng thái của các trạng thái 2 và 3, ta có : $T_2 - T_3 = \dfrac{Q}{C_V + R} = \dfrac{2Q}{5R}$.

Trên đoạn đẳng tích 3 – 1, khí không thực hiện công, còn độ tăng nội năng của khí là do nhiệt lượng mà khí nhận được :

$$Q_{3-1} = C_V(T_1 - T_3) = C_V[(T_1 - T_2) + (T_2 - T_3)] = C_V\left(\Delta T + \frac{2Q}{5R}\right)$$

Vậy công mà khối khí thực hiện sau một chu trình là :

$$A = Q_{3-1} - Q = \frac{3}{2}R\Delta T - \frac{2}{5}Q.$$

8.26. Trong quá trình đẳng áp 1 – 2, công do khối khí thực hiện là :

$$A_{1-2} = p_1(V_2 - V_1) = nR(T_2 - T_1) \qquad (1)$$

Trong quá trình 2 – 3, công do chất khí nhận vào có trị số bằng :

$$A_{2-3} = \frac{p_2 + p_3}{2}(V_2 - V_3) = \frac{p_2V_2 + p_3V_2 - p_2V_3 - p_3V_3}{2}$$

Vì trên giản đồ p–V hai điểm 2 và 3 nằm trên đường thẳng đi qua gốc toạ độ, nên ta có :

$$\frac{p_2}{p_3} = \frac{V_2}{V_3} \text{ hay } p_3V_2 - p_2V_3 = 0$$

Do đó : $A_{2-3} = \dfrac{p_2V_2 - p_3V_3}{2} = \dfrac{nR(T_2 - T_3)}{2}$ (2)

Trong quá trình đoạn nhiệt 3 – 1, độ tăng nội năng của khối khí bằng công mà khối khí nhận được : $A_{3-1} = \dfrac{3}{2}nR(T_1 - T_3)$ (3)

Từ (1) và (2), suy ra : $T_1 - T_3 = \dfrac{2A_{2-3} - A_{1-2}}{nR}$

Thay biểu thức trên vào (3), ta được :

$$A_{3-1} = \frac{3}{2}nR(T_1 - T_3) = \frac{3}{2}(2A_{2-3} - A_{1-2}).$$

8.27. Xét chu trình 1–2–4–1. Trong quá trình 1–2, khí nhận một nhiệt lượng mà ta kí hiệu là Q_1. Trong quá trình 2–4, khí tỏa một nhiệt lượng là Q_2. Trong quá trình đẳng tích 4–1, khí nhận một nhiệt lượng là Q_3. Công do khí thực hiện trong cả chu trình là A_1. Theo định nghĩa hiệu suất : $\eta_1 = \dfrac{A_1}{Q_1 + Q_3}$.

Mặt khác, $\eta_1 = 1 - \dfrac{Q_2}{Q_1 + Q_3}$, suy ra : $Q_2 = (1 - \eta_1)(Q_1 + Q_3)$.

Xét chu trình 2–3–4–2, trong các quá trình 2–3 và 3–4, khí đều tỏa nhiệt. Khí chỉ nhận nhiệt trong quá trình 4–2 và lượng nhiệt nhận vào này hiển nhiên bằng Q_2. Vậy hiệu suất của chu trình này bằng : $\eta_2 = \dfrac{A_2}{Q_2}$ trong đó A_2 là công do khí thực hiện trong chu trình này. Dùng biểu thức của Q_2 nhận được ở trên ta có thể viết : $\eta_2 = \dfrac{A_2}{(1 - \eta_1)(Q_1 + Q_3)}$.

Hiệu suất của chu trình 1–2–3–4–1 bằng : $\eta_3 = \dfrac{A_1 + A_2}{Q_1 + Q_3}$.

Rút A_1 và A_2 từ các biểu thức của η_1 và η_2, rồi thay vào biểu thức trên, ta được : $\eta_3 = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1\eta_2$.

8.28. – Vì C – D là quá trình đẳng tích nên $V_C = V_D$ và $A_{CD} = 0$.

– Vì quá trình A – B là đoạn nhiệt, do đó :

$$T_A.V_A^{\gamma} = T_B.V_B^{\gamma-1} \Leftrightarrow \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_A}{T_B} = \alpha \Leftrightarrow \frac{V_B}{V_A} = \alpha^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Nên $\ln\frac{V_C}{V_B} + \ln\frac{V_A}{V_C} = \ln\frac{V_A.V_C}{V_B.V_D} = \ln\frac{V_A}{V_B} = \frac{1}{1-\gamma}\ln\alpha$ (1)

Vì các quá trình BC và DA là đẳng nhiệt do đó $A_{BC} = nRT_B.\ln\frac{V_C}{V_B}$ (n là số mol khí : n = 1)

$$A_{AD} = nRT_D.\ln\frac{V_A}{V_D} = nRT_B.\alpha.\ln\frac{V_A}{V_C}$$

Xét quá trình đoạn nhiệt AB ta có :

$$A_{AB} = -\Delta U = \frac{nR(T_B - T_A)}{1-\gamma} = \frac{nRT_B(1-\alpha)}{1-\gamma}$$

Để công mà khí nhận được trong cả chu trình bằng 0 thì :

$\Sigma A = A_{AB} + A_{BC} + A_{CD} + A_{DA} = 0 \Leftrightarrow \ln\frac{V_C}{V_B} + \alpha.\ln\frac{V_A}{V_C} = \frac{\alpha-1}{1-\gamma}$ (2)

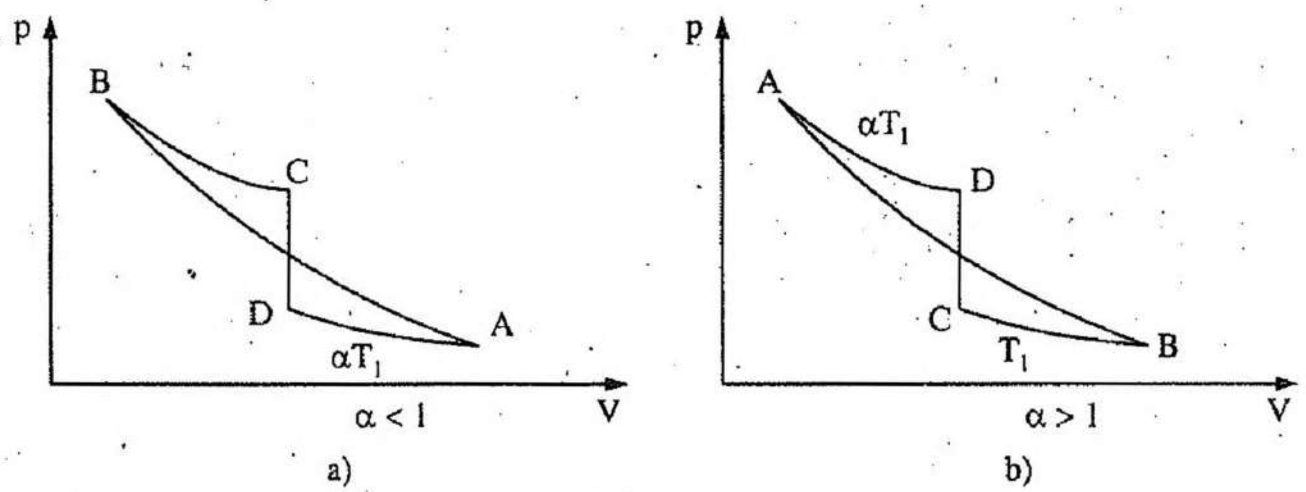
Giải hệ phương trình (1) và (2) ta có :

$$\ln\frac{V_C}{V_B} = \frac{\alpha(\ln\alpha - 1) + 1}{(1-\gamma)(\alpha-1)} \ ; \ \ln\frac{V_A}{V_C} = \frac{\alpha - 1 - \ln\alpha}{(1-\gamma)(\alpha-1)}$$

* Biện luận :

+ Nếu $\alpha < 1 \Rightarrow \frac{V_C}{V_B} > 1$ và $\frac{V_A}{V_C} > 1$. Ta có đồ thị hình 8.8Ga.

+ Nếu $\alpha > 1 \Rightarrow \frac{V_C}{V_B} < 1$ và $\frac{V_A}{V_C} < 1$. Ta có đồ thị hình 8.8Gb.



Hình 8.8G

8.29. Pittông và các lò xo có khối lượng nhỏ, không đáng kể. Gọi k_1, k_2, k_3 lần lượt là độ cứng của các lò xo dùng thực hiện quá trình 1–2 ; 2–3 ; 3–1 ; Δl_1 ; $\Delta l'_1$; Δl_2 ; $\Delta l'_2$; Δl_3 ; $\Delta l'_3$ lần lượt là độ biến dạng của lò xo k_1 ; k_2 ; k_3 ban đầu và cuối các quá trình 1–2 ; 2–3 ; 3–1.

Các lò xo luôn ở trạng thái bị nén, các phương trình cân bằng lực.

$$p_1S = k_1\Delta l_1 = k_3\Delta l'_3 \quad (1)$$

$$p_2S = k_1\Delta l'_1 = k_2\Delta l_2 \quad (2)$$

$$p_3S = k_2\Delta l'_2 = k_3\Delta l_3 \quad (3)$$

Từ (1), (2) ta có : $(p_1 - p_2)S = k_1(\Delta l_1 - \Delta l'_1)$

mà : $\Delta l_1 - \Delta l'_1 = \frac{1}{S}(V_1 - V_2) \Rightarrow k_1 = \frac{(p_2 - p_1)S^2}{V_2 - V_1}$

Thay vào (1), (2) ta có : $\Delta l_1 = \frac{p_1(V_2 - V_1)}{(p_2 - p_1)S}$, $\Delta l'_1 = \frac{p_2(V_2 - V_2)}{(p_2 - p_2)S}$.

Tương tự ta cũng có :

$$k_2 = \frac{(p_3 - p_2)S^2}{V_3 - V_2},\ \Delta l_2 = \frac{p_2(V_3 - V_2)}{(p_3 - p_2)S}\ ;\ \Delta l'_2 = \frac{p_3(V_3 - V_2)}{(p_3 - p_2)S}$$

$$k_3 = \frac{(p_3 - p_1)S^2}{V_3 - V_1},\ \Delta l_3 = \frac{p_3(V_3 - V_1)}{(p_3 - p_1)S},\ \Delta l'_3 = \frac{p_1(V_3 - V_1)}{(p_3 - p_1)S}.$$

8.30. * Quá trình 1–2 : $T = \alpha V^2$

mà $pV = nRT = \alpha nRV^2 \Rightarrow p = \alpha nRV$

Theo Nguyên lí I Nhiệt động lực học, ta có :

$$Q_n = A + \Delta U \Leftrightarrow Q_n = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV + \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1)$$

$$= \int_{V_1}^{V_2} \alpha nRV\,dV + \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1) = \frac{1}{2}nR(T_2^2 - T_1^2) + \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1)$$

$$= 2nR(T_2 - T_1)$$

$$\Rightarrow nR = \frac{Q_n}{2(T_2 - T_1)} = \frac{2200}{2(360-250)} = 10$$

* Quá trình 1–3 : V = const $\Rightarrow A_{13} = 0$

Mặt khác, $\Delta U_{13} = \frac{3}{2}nR(T_3 - T_1) \Rightarrow Q_{13} = \frac{3}{2}nR(T_3 - T_1) \Rightarrow Q_{13} > 0.$

* Quá trình 3–2 : Trong hệ toạ độ T – V quá trình này là một đường thẳng qua gốc toạ độ nên : $T = \beta V \Rightarrow pV = nRT = \beta nRV \Rightarrow p = \beta nR = const,$

$$\Rightarrow A_{32} = p_2(V_2 - V_3) = p_2V_2\left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right) = nRT_2\left(1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}\right) = nRT_2\left(1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}\right)$$

Mặt khác, $\Delta U_{32} = \frac{3}{2}nR(T_2 - T_3)$

$$\Rightarrow Q_{32} = A_{32} + \Delta U_{32} = \frac{3}{2}nR(T_2 - T_3) + nRT_2\left(1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}\right) \Rightarrow Q_{32} > 0$$

Vậy $Q_{123} = \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1) + nRT_2\left(1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}\right) = 2250$ J.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Vũ Thanh Khiết (Chủ biên). *Tuyển tập đề thi Olimpic Vật lí các nước*, tập 1 và tập 2, NXB Giáo dục, 2006.
2. Vũ Thanh Khiết, Vũ Đình Tuý, *Các đề thi học sinh giỏi Vật lí*, NXB Giáo dục, 2008.
3. *Tạp chí Kvant* (của Liên Xô cũ và của Nga hiện nay).
4. Dương Trọng Bái, Đàm Trung Đồn, *Bài thi Vật lí quốc tế*, tập hai, NXB Giáo dục, 2004.
5. Các đề thi học sinh giỏi của Liên Xô cũ và của Nga hiện nay.
6. Các đề thi Olimpic các nước.

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch Hội đồng Thành viên NGUYỄN ĐỨC THÁI
Tổng Giám đốc HOÀNG LÊ BÁCH
Chịu trách nhiệm nội dung :
Tổng biên tập PHAN XUÂN THÀNH

Tổ chức và chịu trách nhiệm bản thảo:
Phó Tổng biên tập NGUYỄN HIỀN TRANG
Giám đốc CTCP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội PHẠM THỊ HỒNG

Biên tập lần đầu và tái bản :
VŨ THỊ THANH MAI
Biên tập kĩ thuật :
NGUYỄN KIM TOÀN - HỒNG NHUNG
Trình bày bìa :
TẠ THANH TÙNG
Sửa bản in :
VŨ THỊ THANH MAI
Chế bản :
CÔNG TY CỔ PHẦN DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI

BỒI DƯỠNG HS GIỎI VẬT LÍ TRUNG HỌC PHỔ THÔNG -
BÀI TẬP : CƠ HỌC - NHIỆT HỌC

Mã số : C3L19h9 - CPD
In 1.000 bản (QĐ in 28-STK), khổ 17x24cm.
In tại Công ty CP In và Dịch vụ Thừa Thiên Huế, 57 Bà Triệu - TP. Huế.
Số ĐKXB : 797-2019/CXBIPH/22-289/GD
Số QĐXB : 918/QĐ-GD-ĐN ngày 24 tháng 07 năm 2019
In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2019
Mã số ISBN : 978-604-0-16929-7