Tô Giang

Bồi dưỡng Học sinh giỏi Vật lí Trung học phổ thông

Cơ học 2

(Tái bản lần thứ hai)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Lời nói đầu

Hiện nay, ở hầu hết các tỉnh và thành phố cả nước và ở một vài trường đại học đã có các lớp trung học phổ thông chuyên Vật lí. Một phần số học sinh của các lớp này được bồi dưỡng theo chương trình chuyên của Bộ Giáo dục và Đào tạo, để chọn ra một đội tuyển tham dự kì thi học sinh giỏi Quốc gia. Nội dung dạy học trong các lớp chuyên phải bao gồm những kiến thức quy định trong cả hai chương trình : chuyên và nâng cao.

Trước mắt, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam mời một số tác giả đã quen với cả hai nội dung trên, viết những tài liệu bổ sung dưới dạng chuyên đề để phục vụ cho việc dạy học Vật lí ở các lớp trung học phổ thông chuyên Vật lí. Những sách này gọi là sách ***Bồi dưỡng học sinh giỏi Vật lí trung học phổ thông***. Sách bồi dưỡng trình bày những kiến thức trong chương trình chuyên mà chưa có trong sách giáo khoa, hoặc có mà chưa đủ sâu. Các giáo viên nên sử dụng đồng thời sách giáo khoa và sách bồi dưỡng để soạn giáo án, không nhất thiết phải dạy hết sách giáo khoa rồi mới dạy đến sách bồi dưỡng. Trong sách bồi dưỡng có thể có một vài phần được trình bày cao hơn một chút so với chương trình chuyên, dành cho các học sinh có năng lực trội hơn trong lớp chuyên.

Các tác giả đã thống nhất một số điều chung cho các sách bồi dưỡng như sau : Mỗi quyển sách bồi dưỡng chia ra thành từng phần gọi là chủ đề (hoặc chương) ; mỗi chủ đề bao gồm những kiến thức bổ sung cho một chương, hoặc một số chương của sách giáo khoa. Phần bổ sung để rèn luyện kĩ năng giải bài tập cho học sinh được coi trọng đặc biệt, có nhiều chương của sách giáo khoa không cần phải bổ sung về lí thuyết, nhưng rất cần có thêm những bài tập khó, ngang với trình độ thi học sinh giỏi Quốc gia.

Cuốn ***Cơ học 2*** gồm các chủ đề :

Chủ đề 1. Chuyển động phẳng của vật rắn

Chủ đề 2. Dao động cơ. Dao động của vật rắn

Chủ đề 3. Sóng cơ và sóng âm.

Mỗi chủ đề gồm các phần :

– Phần lí thuyết : được biên soạn trên cơ sở học sinh đã được học chương trình nâng cao.

– Phần bài tập ví dụ : được xem như các dạng bài tập mẫu.

– Phần bài tập tự giải : gồm các bài tập thuộc các dạng cơ bản và nâng cao.

Cuối sách là phần hướng dẫn giải và đáp số các bài tập.

Các tác giả hi vọng các sách bồi dưỡng sẽ giúp các bạn học sinh tự học, nắm vững kiến thức và rèn luyện kĩ năng giải toán vật lí, chuẩn bị tốt cho các kì thi chọn học sinh giỏi cấp tỉnh, thành phố và cấp Quốc gia.

Ngoài ra, cuốn sách cũng là tài liệu tham khảo bổ ích cho các giáo viên Vật lí, các sinh viên khoa Vật lí của các trường đại học Sư phạm...

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam xin giới thiệu bộ sách Bồi dưỡng học sinh giỏi Vật lí trung học phổ thông với bạn đọc. Mọi ý kiến góp ý cho sách xin gửi về :

Ban Vật lí – Công ty cổ phần Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội
187B Giảng Võ – Hà Nội.

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Chủ đề 1

CHUYỂN ĐỘNG PHẲNG CỦA VẬT RẮN

PHẦN LÍ THUYẾT

A - KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG PHẲNG CỦA VẬT RẮN VỀ MẶT ĐỘNG HỌC

I – MỞ ĐẦU

1. Định nghĩa

Chuyển động phẳng của một vật rắn là chuyển động trong đó mọi điểm của vật chuyển động song song với một mặt phẳng cố định cho trước.

Ta quy ước gọi mặt phẳng này là mặt phẳng O, hệ quy chiếu (HQC) gắn với mặt phẳng O là HQC O và người quan sát (NQS) đứng trong HQC O là NQS O.

2. Chuyển động tịnh tiến song song với một mặt phẳng cố định và chuyển động quay quanh một trục cố định là hai dạng chuyển động phẳng cơ bản, độc lập với nhau (đã học trong chương trình trung học phổ thông nâng cao).

3. Vận tốc góc và gia tốc góc

Muốn miêu tả đầy đủ chuyển động quay về mặt động học, ta phải coi vận tốc góc và gia tốc góc là những đại lượng đại số hoặc vectơ.

a) Cách biểu diễn đại số (Hình 1.1a)

Chọn một chiều quay làm chiều dương và gọi φ là *góc quay được*.

- $\omega = \varphi'(t)$

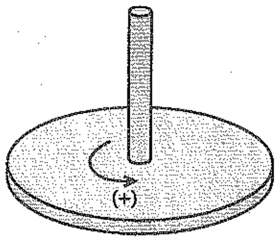
$\omega > 0$ nếu vật quay theo chiều dương.

$\omega < 0$ nếu vật quay ngược chiều dương.

- $\gamma = \omega'(t)$

γ cùng dấu với ω nếu vật quay nhanh dần.

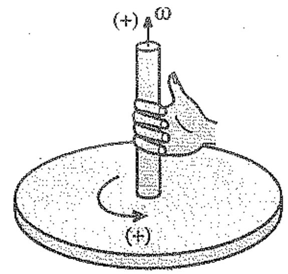
γ trái dấu với ω nếu vật quay chậm dần.



Hình 1.1a

b) Cách biểu diễn vectơ (Hình 1.1b)

Chọn trục quay làm phương của vectơ $\vec{\omega}$. Chiều của vectơ $\vec{\omega}$ được xác định bằng quy tắc nắm tay phải (Hình 1.1b) hay quy tắc cái đinh ốc thuận. Vectơ $\vec{\omega}$ được gọi là *vectơ trục*.



Hình 1.1b

$\vec{\gamma} = \vec{\omega}'(t)$ cũng là vectơ trục.

$\vec{\gamma}$ cùng chiều với $\vec{\omega}$ nếu vật quay nhanh dần.

$\vec{\gamma}$ ngược chiều với $\vec{\omega}$ nếu vật quay chậm dần.

Tuy hai cách biểu diễn là như nhau nhưng ta ưu tiên chọn cách biểu diễn đại số vì sau này ta thường lập và giải hệ phương trình dưới dạng đại số khi làm bài tập.

4. Các công thức (đại số) của chuyển động quay biến đổi đều

a) γ = hằng số

b) $\omega = \omega_0 + \gamma t$ (ω_0 là vận tốc góc ban đầu)

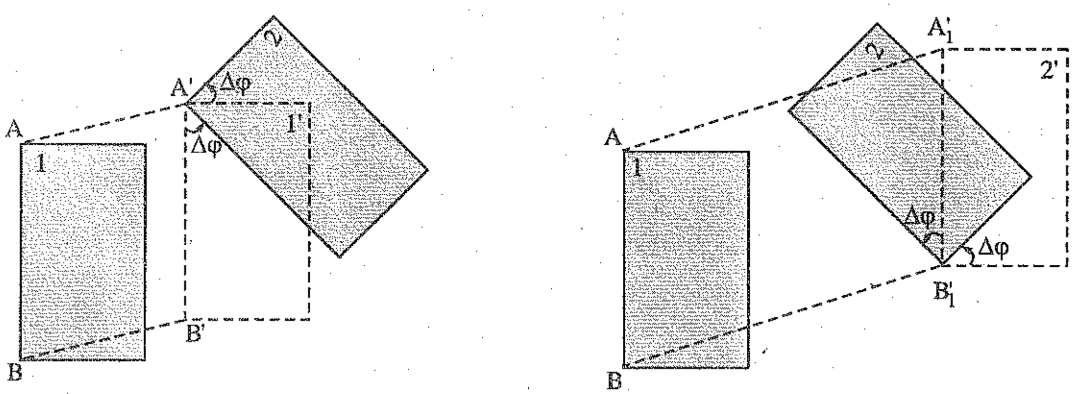
c) $\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$ (φ là góc quay được)

d) $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\gamma\varphi$

Chuyển động quay đều khi $\gamma = 0$ hoặc ω = hằng số.

II – PHÂN TÍCH MỘT CHUYỂN ĐỘNG PHẲNG TỔNG QUÁT

1. Ví dụ



Hình 1.2

Xét một vật mỏng, phẳng (quyển sách mỏng chẳng hạn) đang chuyển động trên mặt bàn (mặt phẳng O). Trong khoảng thời gian rất ngắn Δt tính từ thời điểm t, vật chuyển động từ vị trí 1 đến vị trí 2 (Hình 1.2). Xét một đoạn thẳng AB bất kì trên vật. Ta có thể dịch chuyển vật từ vị trí 1 sang vị trí 2 theo một trong hai cách sau đây :

Cách 1 : Thực hiện chuyển động tịnh tiến với vận tốc $\vec{v}_A$ để chuyển vật từ vị trí 1 đến vị trí 1' (được biểu diễn bằng nét đứt ở Hình 1.2a). Ta có : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \vec{v}_A.\Delta t$. Tiếp theo, giữ A' đứng yên và thực hiện chuyển động quay quanh A' để chuyển vật từ vị trí 1' đến vị trí 2. Người ta gọi điểm A' là *cực*. Theo Hình 1.2a ta có : $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$.

Cách 2 : Thực hiện chuyển động tịnh tiến với vận tốc $\vec{v}_B$ để chuyển vật từ vị trí 1 đến vị trí 2' (được biểu diễn bằng nét đứt ở Hình 1.2b). Ta có $\overrightarrow{BB_1'} = \overrightarrow{AA_1'} = \vec{v}_B.\Delta t$. Tiếp theo, giữ B_1' đứng yên và thực hiện chuyển động quay quanh B_1' để chuyển vật từ vị trí 2' đến vị trí 2. Trong trường hợp này, B_1' được gọi là cực. Theo Hình 1.2b ta cũng có $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ như ở cách 1.

Một chuỗi những chuyển động tịnh tiến và quay kế tiếp nhau như trên miêu tả gần đúng chuyển động thực của vật và càng đúng nếu lấy Δt càng nhỏ. Trong chuyển động thực thì hai chuyển động thành phần, tịnh tiến và quay, diễn ra đồng thời.

Ngoài ra, trong nhiều trường hợp sau này, tác giả sẽ không dùng cách nói đầy đủ là "vật quay quanh một trục vuông góc với mặt phẳng cố định O" mà dùng cách nói gọn là "vật quay quanh một điểm". Khi đó, *phải hiểu điểm này là giao điểm của trục quay với mặt phẳng O.*

2. Kết luận

a) Chuyển động phẳng tổng quát trong HQC O có thể phân tích thành hai chuyển động thành phần trong HQC đó.

– Chuyển động tịnh tiến với vận tốc của một điểm tuỳ ý mà ta chọn làm cực.

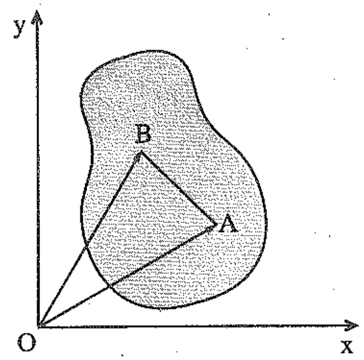
– Chuyển động quay quanh cực đó.

b) Khi phân tích chuyển động phẳng thành chuyển động tịnh tiến và quay thì vận tốc của chuyển động tịnh tiến có thể khác nhau tuỳ thuộc vào việc chọn điểm nào làm cực, nhưng vận tốc góc thì vẫn như nhau.

Tóm lại, *chuyển động phẳng tổng quát có thể xem là chuyển động tổng hợp của hai chuyển động thành phần, tịnh tiến và quay hoặc là chuyển động vừa tịnh tiến vừa quay.*

III – SỰ PHÂN BỐ VẬN TỐC CỦA CÁC ĐIỂM TRONG MỘT VẬT RẮN

1. Xét một vật rắn mỏng, phẳng chuyển động trong HQC O. A và B là hai điểm bất kì của vật. Tại thời điểm xét, điểm A có vận tốc $\vec{v}_A$, điểm B có vận tốc $\vec{v}_B$ và mọi điểm của vật có một vận tốc góc chung $\vec{\omega}$. Ta hãy xét xem $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ và $\vec{\omega}$ liên hệ với nhau như thế nào.



Hình 1.3

Nếu chọn điểm A làm cực (Hình 1.3) thì ta có : $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$.

Lấy đạo hàm theo thời gian ta được :

$$\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

Vì khoảng cách AB không đổi nên $\vec{v}_{BA}$ là vận tốc của điểm B trong chuyển động quay quanh cực A với vận tốc góc ω. Vì thế, $\vec{v}_{BA} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$.

Cuối cùng, ta được :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB} \qquad (1.1)$$

Công thức (1.1) cho thấy, *vận tốc của một điểm bất kì trên vật bằng tổng vectơ vận tốc của một điểm khác nào đó trên vật mà ta chọn làm cực và vận tốc của điểm ấy trong chuyển động quay quanh cực.*

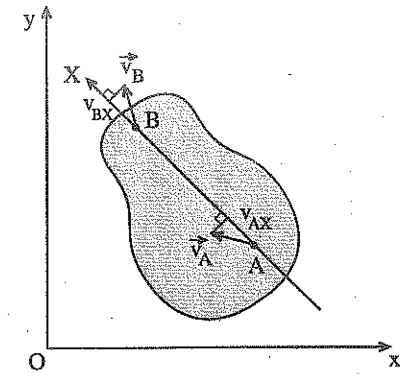
Công thức (1.1) được gọi là *công thức phân bố vận tốc.*

2. Hệ quả

Công thức (1.1) cũng cho thấy, *hình chiếu của vectơ vận tốc của hai điểm lên một trục X đi qua hai điểm ấy luôn bằng nhau* (Hình 1.4) :

$$v_{BX} = v_{AX} \qquad (1.2)$$

Thật vậy, chiếu công thức (1.1) lên trục X thì hình chiếu của vectơ thành phần $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$ bằng 0 vì vectơ $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AB}$ tức là $\perp$ trục X.

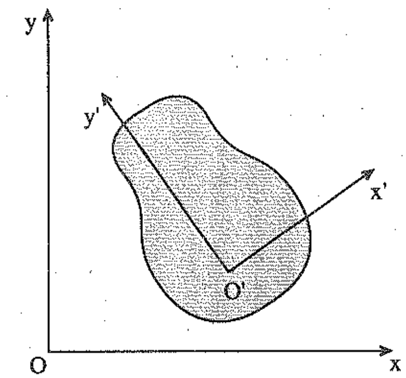


Hình 1.4

IV – CHUYỂN ĐỘNG QUAY THUẦN TUÝ

1. Tâm quay (hay trục quay) tức thời

Ta tưởng tượng có một mặt phẳng O' gắn với vật và cùng chuyển động với vật (Hình 1.5). Tại mỗi thời điểm ta đều có thể tìm thấy một điểm của mặt phẳng O' này có vận tốc bằng 0 (đối với mặt phẳng O), còn các điểm khác có vận tốc khác 0. Tại thời điểm xét, mặt phẳng O' (bao gồm cả vật) quay quanh điểm này. Ta gọi điểm này là *tâm quay tức thời*, còn trục đi qua tâm quay tức thời và vuông góc với mặt phẳng O gọi là *trục quay tức thời*. Tâm quay tức thời có thể nằm trong vật hoặc nằm ngoài vật.



Hình 1.5

Gọi K là điểm cần tìm ($v_K = 0$). Theo công thức (1), ta có :

$$\vec{v}_A = \vec{v}_K + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{KA} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{KA} \qquad (a)$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_K + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{KB} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{KB} \qquad (b)$$

. . . .

Các điểm A, B, C... của vật đều quay quanh K với vận tốc góc ω.

Như vậy, *chuyển động phẳng tổng quát còn có thể xem là chuyển động quay thuần tuý quanh tâm quay tức thời.*

2. Cách xác định tâm quay tức thời

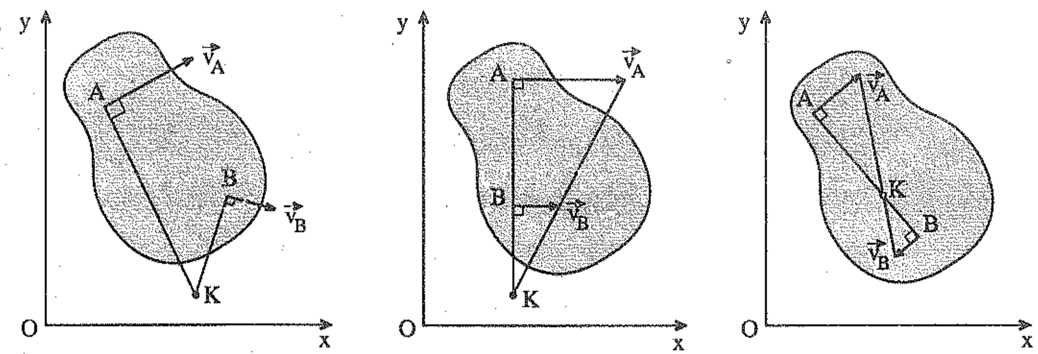
Nếu biết vận tốc của hai điểm của vật, A và B chẳng hạn, thì theo hai công thức (a) và (b), ta suy ra :

$$\overrightarrow{KA} \perp \vec{v}_A,\ \overrightarrow{KB} \perp \vec{v}_B \quad \text{và} \quad \frac{KA}{KB} = \frac{v_A}{v_B}$$

Từ đó, ta có thể xác định được tâm quay tức thời K bằng cách vẽ.

a) *Trường hợp 1 :* Hai vectơ $\vec{v}_A$ và $\vec{v}_B$ khác phương (Hình 1.6a).

b) *Trường hợp 2 :* Hai vectơ $\vec{v}_A$ và $\vec{v}_B$ song song với nhau và vuông góc với đoạn thẳng AB (Hình 1.6b và c).



Hình 1.6

B – KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG PHẲNG VỀ MẶT ĐỘNG LỰC HỌC

I – KHỐI TÂM CỦA VẬT

1. Khi vật chuyển động dưới tác dụng của lực, người ta phát hiện ra rằng vật có một điểm đặc biệt khác hẳn các điểm còn lại. Ta đã biết điểm này là trọng tâm của vật và kí hiệu là G. Sở dĩ có tên gọi này là vì khi xét chuyển động của vật trong trường trọng lực là trường lực đều thì ta không thể bỏ qua vai trò của trọng lực và điểm đặt của nó.

Tuy nhiên, trong một số trường hợp khác thì điểm này mất ý nghĩa là trọng tâm của vật. Ví dụ :

– Vật chuyển động trong "trạng thái không trọng lượng".

– Vật chuyển động trong trường hấp dẫn là trường lực không đều. Trong trường lực này điểm đặc biệt không trùng với trọng tâm của vật.

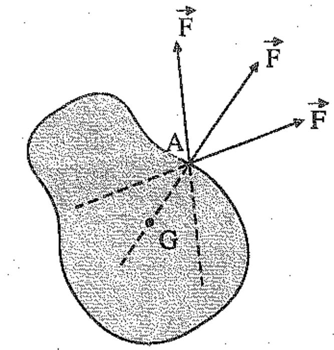
– Vật mỏng, phẳng chuyển động trên mặt phẳng nằm ngang không ma sát dưới tác dụng của những lực nằm ngang. Trong trường hợp này, điểm đặc biệt không mang ý nghĩa là trọng tâm vì trọng lực của từng phần tử của vật đều bị khử

bởi phản lực của mặt bàn nên trọng tâm của vật không có vai trò gì đối với chuyển động của vật.

Ở phần sau ta sẽ biết vị trí của điểm đặc biệt này chỉ phụ thuộc vào sự phân bố khối lượng trong vật, nên từ nay ta sẽ gọi nó là *khối tâm* của vật.

2. Tính chất đặc biệt của khối tâm

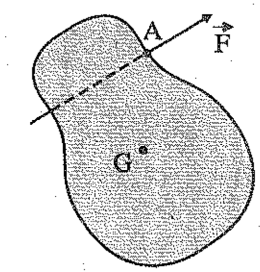
Đặt một vật mỏng, phẳng có khối tâm G đã biết lên một mặt bàn nằm ngang và nhẵn (trong trường hợp này khối tâm trùng với trọng tâm). Buộc sợi chỉ vào một điểm A ở mép vật rồi kéo dây theo các phương khác nhau (Hình 1.7). Thí nghiệm cho thấy, nếu kéo dây theo phương AG thì vật chuyển động tịnh tiến, còn nếu kéo dây theo các phương khác thì vật vừa quay vừa tịnh tiến.



Hình 1.7

3. Ta có thể chứng minh rằng trong thí nghiệm trên, tác dụng của lực $\vec{F}$ có giá không đi qua khối tâm (Hình 1.8) tương đương với một lực đặt tại khối tâm và một ngẫu lực.

Thật vậy, vật sẽ không chịu thêm một tác dụng nào nữa (xét về mặt chuyển động) nếu ta đặt thêm vào khối tâm một cặp lực cân bằng $\vec{F'}$ và $-\vec{F'}$, trong đó lực $\vec{F'}$ song song, cùng chiều và cùng độ lớn với $\vec{F}$. (Hình 1.9). Như vậy, *tác dụng của lực $\vec{F}$ tương đương với một lực $\vec{F'}$ đặt tại khối tâm và một ngẫu lực $(\vec{F}, -\vec{F'})$. Momen của ngẫu lực này bằng momen của lực $\vec{F}$* đối với khối tâm : $M_{(G)} = Fd$.

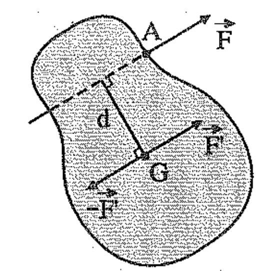


Hình 1.8

4. Vị trí của khối tâm

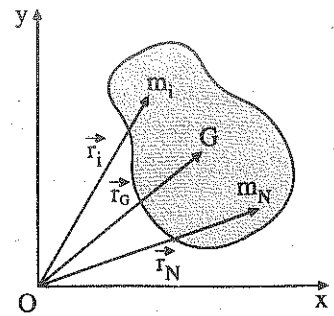
Ta coi vật rắn là một hệ chất điểm $m_1, m_2, ..., m_N$ có vị trí được xác định bằng các vectơ $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N$ (Hình 1.10). Lí thuyết và thực nghiệm cho thấy, vị trí của khối tâm của vật được xác định bằng công thức sau đây :

$$\vec{r}_G = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + ... + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + ... + m_N}$$



Hình 1.9

hay $\quad \vec{r}_G = \dfrac{1}{m}\sum m_i\vec{r}_i \qquad (1.3a)$



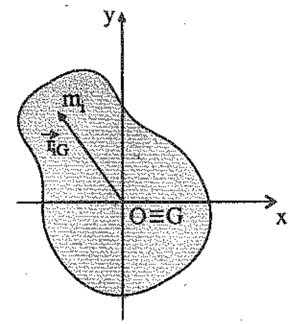
Hình 1.10

trong đó $\vec{r}_G$ là vectơ vị trí của khối tâm, còn $m = \sum m_i$ là khối lượng của vật.

hay : $\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{m}\sum m_i x_i \\ y_G = \dfrac{1}{m}\sum m_i y_i \end{cases} \qquad (1.3b)$

Nếu ta chọn gốc toạ độ trùng với khối tâm (Hình 1.11) thì $\vec{r}_G = \vec{0}$, $\vec{r}_i = \vec{r}_{iG}$ và công thức (1.3a) trở thành :

$$\sum m_i\vec{r}_{iG} = \vec{0} \qquad (1.4)$$



Hình 1.11

II – CÁC PHƯƠNG TRÌNH ĐỘNG LỰC HỌC CỦA CHUYỂN ĐỘNG PHẲNG

1. Giả sử vật chịu một hệ lực phẳng $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$... song song với mặt phẳng cố định O và đặt vào các chất điểm m_1, m_2,... Theo mục I.3 ở trên, tác dụng của hệ lực này tương đương với một lực $\vec{F}'$ đặt tại khối tâm và một ngẫu lực có momen $\vec{M}$.

a) Hợp lực $\vec{F}'$ của các lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$,... đặt tại khối tâm được gọi là *tổng của các lực* $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$... và được kí hiệu là $\Sigma\vec{F}$. Sở dĩ gọi như vậy là vì tổng các lực $\Sigma\vec{F}$ chỉ gây ra gia tốc của chuyển động tịnh tiến giống như toàn bộ khối lượng của vật tập trung tại khối tâm. Vì thế, định luật II Niu-tơn cho chuyển động tịnh tiến được viết như sau :

$$\sum\vec{F} = m\vec{a}_G \qquad (1.5a)$$

hay $\quad \begin{cases} F_x = ma_{Gx} \\ F_y = ma_{Gy} \end{cases} \qquad (1.5b)$

b) Ngẫu lực có momen $\vec{M}$ bằng tổng các momen đối với khối tâm của các lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$,...

Như đã biết, ngẫu lực không làm cho khối tâm chuyển động mà chỉ làm cho vật quay quanh khối tâm với gia tốc góc $\vec{\gamma}$. Vì thế phương trình động lực học của chuyển động quay (hay còn gọi là định luật II Niu-tơn cho chuyển động quay) được viết như sau :

$$\sum\vec{M}_{(G)} = I_G\vec{\gamma} \qquad (1.6a)$$

trong đó I_G là momen quán tính của vật đối với khối tâm.
hay viết dưới dạng đại số :

$$\sum M_{(G)} = I_G\gamma \qquad (1.6b)$$

Biết hệ lực tác dụng vào vật, ta xác định được gia tốc $\vec{a}_G$ của chuyển động tịnh tiến theo khối tâm G và gia tốc $\vec{\gamma}$ của chuyển động quay quanh khối tâm.

Từ (1.5) và (1.6) ta suy ra : *Nếu vật rắn không chịu ngoại lực nào tác dụng hoặc các ngoại lực cân bằng nhau thì khối tâm của vật sẽ đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều, còn các điểm khác quay đều quanh khối tâm.*

Nếu biết thêm điều kiện ban đầu ($\vec{v}_{G0}$, $\vec{\omega}_0$) ta suy ra được $\vec{v}_G$ và $\vec{\omega}$. Biết $\vec{v}_G$ và $\vec{\omega}$ ta suy ra được vận tốc của mọi điểm khác của vật theo công thức (1.1).

c) Ta có thể dùng công thức (1.3a) để suy ra công thức (1.5a).

Thật vậy, lấy đạo hàm theo thời gian của $\vec{r}_G$, ta được :

$$\vec{v}_G = \frac{1}{m}\sum m_i\vec{v}_i$$

Lấy đạo hàm thời gian của $\vec{v}_G$, ta được :

$$\vec{a}_G = \frac{1}{m}\sum m_i\vec{a}_i$$

Theo định luật II Niu-tơn thì $m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i$ là hợp lực tác dụng vào chất điểm m_i, còn $\sum m_i\vec{a}_i = \sum\vec{F}_{\text{ngoại lực}} + \sum\vec{F}_{\text{nội lực}}$. Các nội lực là các lực liên kết giữa các chất điểm tạo nên vật. Chúng xuất hiện từng cặp trực đối nhau nên $\sum\vec{F}_{\text{nội lực}} = \vec{0}$. Cuối cùng ta có :

$$\vec{a}_G = \frac{\sum\vec{F}_{\text{ngoại lực}}}{m}$$

d) Vì chuyển động phẳng tổng quát còn có thể xem là chuyển động quay thuần tuý quanh tâm quay tức thời K, nên ta có thể áp dụng phương trình động lực học cho chuyển động quay quanh K.

$$\sum M_{(K)} = I_K \gamma \qquad (1.7)$$

trong đó I_K là momen quán tính của vật đối với trục quay tức thời K.

2. Định lí về trục song song (còn gọi là định lí Stê-nơ – Huy-ghen)

a) Về lí thuyết, ta có thể tính được momen quán tính của vật rắn đối với một trục qua khối tâm theo công thức đã học $I_G = \sum m_i r_{iG}^2$.

Đối với những vật đồng chất và có dạng hình học đối xứng thì trục đối xứng đi qua khối tâm. Ta đã biết momen quán tính của một số vật này đối với trục của nó (xem SGK nâng cao hay tài liệu tự chọn nâng cao).

Trong khi đó, momen quán tính I_K thường không có giá trị xác định vì vị trí của tâm quay tức thời K luôn luôn thay đổi.

Định lí về trục song song cho phép ta tính được I_K nếu biết I_G. Định lí này được diễn tả bằng công thức sau đây :

$$I_K = I_G + md^2 \qquad (1.8)$$

trong đó d là khoảng cách giữa hai trục quay song song đi qua G và K và vuông góc với mặt phẳng O.

b) Ta có thể chứng minh định lí này như sau :

Giả sử tại thời điểm xét, K trùng với O. Từ Hình 1.12 ta có :

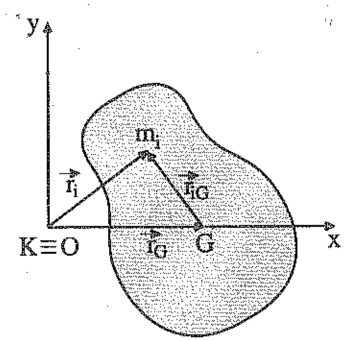
$$\vec{r}_i = \vec{r}_G + \vec{r}_{iG}$$

$$(\vec{r}_i)^2 = (\vec{r}_G)^2 + (\vec{r}_{iG})^2 + 2\vec{r}_G\vec{r}_{iG}$$

$$r_i^2 = d^2 + r_{iG}^2 + 2\vec{r}_G\vec{r}_{iG}$$

$$I_K = \sum m_i r_i^2 = md^2 + \sum m_i r_{iG}^2 + 2\vec{r}_G \sum \vec{m}_i \vec{r}_{iG}$$

$$= md^2 + I_G + 2\vec{r}_G \sum \vec{m}_i \vec{r}_{iG}$$



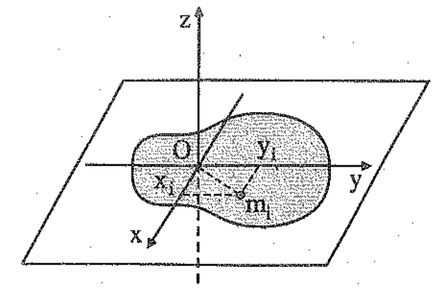
Hình 1.12

Kết hợp với công thức (1.4) ta được :

$$I_K = I_G + md^2$$

3. Định lí về trục vuông góc

a) Xét một vật mỏng, phẳng nằm trong mặt phẳng xy như Hình 1.13. I_x, I_y và I_z là momen quán tính của vật đối với các trục x, y và z. Định lí về trục vuông góc được diễn tả bằng công thức sau :



Hình 1.13

$$I_z = I_x + I_y \qquad (1.9)$$

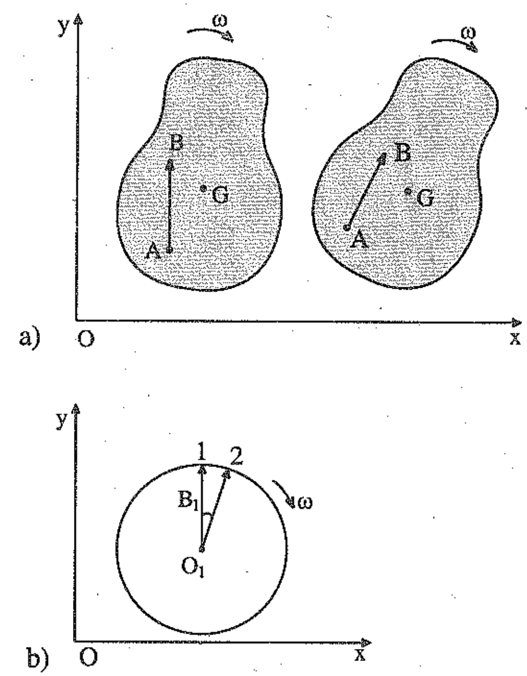
b) Thật vậy, từ Hình 1.13 ta có :

$$I_z = \sum m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) = \sum m_i x_i^2 + \sum m_i y_i^2 = I_x + I_y.$$

III – CHUYỂN ĐỘNG QUAY TƯƠNG ĐỐI

1. Như đã biết, trong HQC O, hai chuyển động thành phần, tịnh tiến và quay, xảy ra đồng thời. Muốn nhận ra chuyển động tịnh tiến, NQS O đánh dấu điểm mà người đó chọn làm cực, như điểm A chẳng hạn, rồi theo dõi sự chuyển động của nó. Muốn nhận ra chuyển động quay, NQS O đánh dấu một điểm khác B nào đó rồi theo dõi chuyển động quay của vectơ $\overrightarrow{AB}$ quanh A. Nhưng việc theo dõi chuyển động này khó hơn vì A luôn chuyển động. Nó chỉ tựa hồ như đứng yên tại mỗi thời điểm mà thôi (Hình 2.14a). Vì thế, NQS phải làm như sau :

Chọn một điểm bất kì O_1 trong HQC O làm tâm quay, rồi vẽ các vectơ $\overrightarrow{O_1B_1}$, song song, cùng chiều và cùng độ lớn với các vectơ $\overrightarrow{AB}$ tại các thời điểm t_1, t_2... (Hình 1.14b).



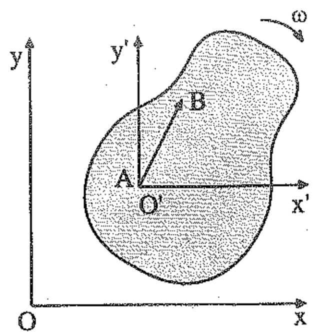
Hình 1.14

Chuyển động quay của vectơ $\overrightarrow{O_1B_1}$ quanh O_1 miêu tả chuyển động thành phần quay của vật quanh A trong HQC O.

2. Chuyển động quay tương đối

Thật là có ích nếu ta tách được chuyển động quay ra khỏi chuyển động tịnh tiến. Muốn thế, ta làm như sau :

Chọn HQC O' có gốc toạ độ O' tại cực A còn các trục toạ độ O'x' và O'y' thì có hướng không đổi. Đối với HQC O thì HQC O' là HQC chuyển động tịnh tiến với vận tốc của cực. Trong HQC O' thì cực đứng yên, tức là chuyển động tịnh tiến bị khử, chỉ còn chuyển động quay của vật quanh cực. Chuyển động quay của vật trong HQC O' là *chuyển động quay tương đối* (Hình 1.15).



Hình 1.15

3. Công thức cộng vận tốc

Xét chuyển động của một điểm B của vật. $\vec{v}_B$ là vận tốc tuyệt đối của B trong HQC O. $\overrightarrow{O'B}$ và $\vec{v}'_B$ là vectơ vị trí và vận tốc tương đối của B trong HQC O'. Áp dụng công thức cộng vận tốc, ta có :

$$\vec{v}_B = \vec{v}'_B + \vec{v}_A = \vec{v}_A + \vec{\omega}' \wedge \overrightarrow{O'B} = \vec{v}_A + \vec{\omega}' \wedge \overrightarrow{AB} \quad (1.10)$$

So sánh công thức (1.10) với công thức (1.1) ta suy ra $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$.

Nói một cách khác, chuyển động quay tương đối của vật trong HQC O' có cùng vận tốc góc $\vec{\omega}$ và do đó cùng gia tốc góc $\vec{\gamma}$ với chuyển động thành phần quay trong HQC O.

4. Phương trình động lực học của chuyển động quay tương đối

Để tìm gia tốc góc $\vec{\gamma}$ của vật trong chuyển động quay tương đối ta áp dụng phương trình :

$$\sum \overrightarrow{M}_A = I_A \vec{\gamma}$$

trong đó I_A là momen quán tính của vật đối với cực A, $\sum M_A$ lấy đối với cực A, trong đó có momen của lực quán tính $\vec{F}_q = -m\vec{a}_A$.

Nếu chọn HQC O' có gốc đặt tại khối tâm, ta được *HQC khối tâm*. Trong HQC này ta bỏ qua momen của lực quán tính vì lực này đặt tại khối tâm. Đó là ưu điểm của HQC khối tâm.

Tóm lại, muốn xác định gia tốc góc $\vec{\gamma}$ của vật ta có thể chọn một trong các cách sau đây :

Cách 1 : Chọn khối tâm làm cực : $\sum M_G = I_G \gamma$

Cách 2 : Chọn tâm quay tức thời K làm cực : $\sum M_K = I_K \gamma$

Cách 3 : Chọn HQC khối tâm : $\sum M_G = I_G \gamma$

IV – CHUYỂN ĐỘNG LĂN KHÔNG TRƯỢT

Một trường hợp quan trọng của chuyển động phẳng là chuyển động lăn không trượt.

1. Định nghĩa

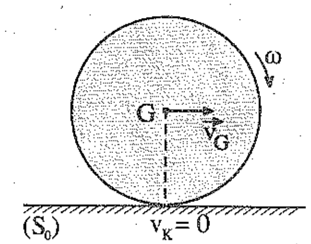
Một vật rắn (hình cầu hoặc hình trụ) lăn không trượt trên bề mặt S một vật rắn khác, nếu tại mỗi thời điểm vận tốc của điểm K (v_K) của vật rắn tiếp xúc với S bằng 0 (xét trong HQC gắn với S).

Nếu $v_K \neq 0$ thì vận tốc này được gọi là *vận tốc trượt*.

Ví dụ : Bánh xe, thùng phuy, quả bóng lăn không trượt trên mặt đường. Các viên bi lăn không trượt trong các ổ bi.

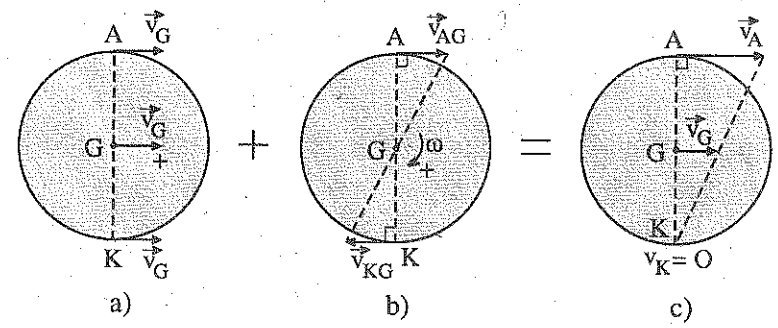
2. Điều kiện lăn không trượt

Ta hãy xét một bánh xe có khối tâm G và bán kính R, lăn không trượt trên mặt đường (Hình 1.16).



Hình 1.16

a) Trước hết, chuyển động của bánh xe có thể xem là chuyển động tổng hợp của chuyển động tịnh tiến với vận tốc $\vec{v}_G$ và chuyển động quay quanh G với vận tốc góc $\vec{\omega}$ (Hình 1.17a, b).



Hình 1.17

Theo công thức (1.1), ta có :

$$\vec{v}_K = \vec{v}_G + \vec{v}_{KG} = \vec{0}$$

$$\vec{v}_K = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GK} = \vec{0}$$

hay viết dưới dạng đại số :

$$v_K = v_G - \omega R = 0$$

$$v_G = \omega R \qquad (1.11)$$

Lấy đạo hàm theo thời gian (1.11), ta được :

$$a_G = \gamma R \qquad (1.12)$$

Các công thức (1.11) và (1.12) được gọi là *điều kiện lăn không trượt.*

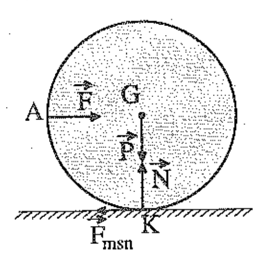
Từ công thức (1.11) và từ Hình 1.17, ta suy ra, *trong chuyển động lăn không trượt, đường đi được của khối tâm bằng đường đi được quanh khối tâm của các điểm tiếp xúc của vật với mặt đường.*

b) Ta có thể tìm ra các công thức trên đây nếu ta coi chuyển động lăn không trượt là *chuyển động quay thuần tuý quanh điểm tiếp xúc K.* Khi đó các điểm khác, kể cả khối tâm, đều *quay quanh K với cùng ω và γ như trong chuyển động thành phần quay quanh G.*

Thật vậy, ta vẫn có $\omega = \dfrac{v_G}{R}$ và $\gamma = \dfrac{a_G}{R}$ (Hình 1.17c).

3. Xét về mặt động lực học, khi vật chuyển động lăn không trượt trên mặt của một vật khác S_0, thì phản lực của bề mặt của S_0 bao gồm *một phản lực vuông góc* $\vec{N}$ *và lực ma sát nghỉ* $\vec{F}_{msn}$. Còn lực ma sát lăn rất nhỏ nên bỏ qua (xem mục E).

Ví dụ : Ta đẩy một thùng phuy cho chuyển động bằng một lực $\vec{F}$ nằm ngang có giá đi qua khối tâm. Lực $\vec{F}$ chỉ có tác dụng làm cho vật chuyển động tịnh tiến nếu như mặt đường nhẵn. Nhưng vì mặt đường nhám nên nó tác dụng vào thùng phuy một lực ma sát nghỉ giữ cho điểm tiếp xúc K đứng yên và thùng phuy quay quanh nó (Hình 1.18).



Hình 1.18

C – CÁC ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN

I – CƠ NĂNG VÀ ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN CƠ NĂNG

1. Thế năng của một vật rắn

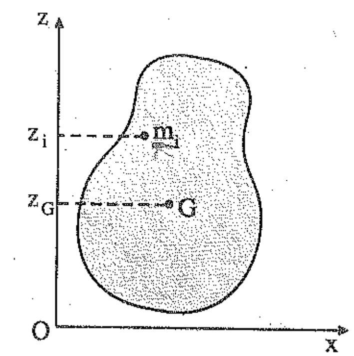
Xét một vật chuyển động phẳng song song với một mặt phẳng O thẳng đứng (Hình 1.19). Chọn mốc thế năng tại z = 0. Thế năng của vật bằng tổng thế năng của các chất điểm tạo nên vật.

$$W_t = \sum m_i g z_i = g \sum m_i z_i$$

Theo công thức (1.3b), ta suy ra :

$$W_t = mgz_G = mgh_G \qquad (1.13)$$

Thế năng của một vật rắn bằng thế năng của toàn bộ khối lượng của vật tập trung tại khối tâm.



Hình 1.19

2. Động năng của một vật rắn chuyển động phẳng tổng quát

a) Động năng của một vật rắn bằng tổng động năng của các chất điểm tạo nên vật.

$$W_d = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum m_i \left(\vec{v}_G + \vec{v}_{iG}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} v_G^2 \sum m_i + \frac{1}{2}\sum m_i v_{iG}^2 + \vec{v}_G \sum m_i \vec{v}_{iG}$$

Đạo hàm công thức (1.4) theo thời gian ta được :

$$\sum m_i \vec{v}_{iG} = 0 \qquad (1.14)$$

Kết quả là : $$W_d = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2}\sum m_i (r_{iG}\omega)^2$$

hay $$W_d = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 \qquad (1.15)$$

Như vậy, *động năng của một vật rắn gồm động năng của chuyển động tịnh tiến với vận tốc của khối tâm và động năng của chuyển động quay quanh khối tâm.*

Mặt khác, nếu ta coi chuyển động của vật là chuyển động quay thuần tuý quanh tâm quay tức thời K thì động năng của vật được tính bằng công thức :

$$W_d = \frac{1}{2} I_K \omega^2 \qquad (1.16)$$

b) Định lí biến thiên động năng

Độ biến thiên động năng của một vật rắn bằng công của các ngoại lực tác dụng lên vật :

$$\Delta W_d = \sum A_{\text{ngoại lực}} \qquad (1.17)$$

3. Cơ năng. Định luật bảo toàn cơ năng

a) Cơ năng của vật

$$W = W_t + W_d$$

$$W = mgh_G + \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$$

hay $$W = mgh_G + \frac{1}{2}I_K\omega^2$$

b) Điều kiện để cơ năng của vật được bảo toàn là

– Không có ma sát và lực cản của môi trường.

– Nếu có ma sát thì phải là ma sát nghỉ.

Khi ấy, cơ năng của vật được bảo toàn. Nó chỉ biến đổi từ thế năng sang động năng và ngược lại.

$$W = W_t + W_d = \text{const} \qquad (1.18a)$$

hay $$\Delta W_d = -\Delta W_t \qquad (1.18b)$$

II – ĐỘNG LƯỢNG. ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN ĐỘNG LƯỢNG

1. Động lượng của một vật rắn bằng tổng động lượng của các chất điểm tạo nên vật.

$$\vec{p} = \sum m_i\vec{v}_i$$

$$p = \sum m_i\left(\vec{v}_G + \vec{v}_{iG}\right) = m\vec{v}_G + \sum m_i\vec{v}_{iG}$$

Số hạng $\sum m_i\vec{v}_{iG}$ là động lượng của chuyển động quay của vật quanh khối tâm. Theo công thức (1.14) thì $\sum m_i\vec{v}_{iG} = \vec{0}$ nên :

$$\vec{p} = m\vec{v}_G \qquad (1.19)$$

Động lượng của một vật rắn chuyển động phẳng bằng động lượng của chuyển động tịnh tiến của nó với vận tốc của khối tâm.

2. Định lí biến thiên động lượng

Từ $\vec{p} = m\vec{v}_G$, ta suy ra :

$$\frac{\overrightarrow{\Delta p}}{\Delta t} = \frac{m\Delta\vec{v}_G}{\Delta t} = m\vec{a}_G = \sum \vec{F}_{\text{ngoại lực}}$$

hay $$\Delta\vec{p} = \sum \vec{F}_{\text{ngoại lực}}.\Delta t \qquad (1.20)$$

Độ biến thiên động lượng của một vật rắn bằng tổng xung lượng của các ngoại lực tác dụng lên vật.

3. Định luật bảo toàn động lượng

Từ công thức (1.20), ta suy ra, *nếu không có ngoại lực tác dụng vào vật rắn hoặc khi tổng các ngoại lực bằng 0 thì động lượng của vật được bảo toàn : $\vec{p} = m\vec{v}_G = const$.*

Khi ấy, khối tâm của vật chuyển động thẳng đều, còn các điểm khác thì quay đều quanh khối tâm.

III – MOMEN ĐỘNG LƯỢNG. ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN MOMEN ĐỘNG LƯỢNG

1. Momen động lượng

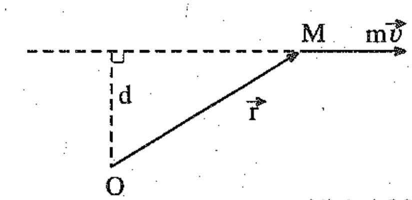
a) Momen động lượng của một chất điểm m đối với một điểm O được xác định bằng biểu thức :

$$\vec{L}_O = \vec{r} \wedge m\vec{v} \qquad (1.21)$$

trong đó $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, với M là vị trí của chất điểm.

Về độ lớn ta có : $L = dmv$

trong đó d là khoảng cách từ điểm O đến giá của vectơ động lượng $\vec{p} = m\vec{v}$ (Hình 1.20).



Hình 1.20

b) Momen động lượng của một vật rắn đối với một trục quay cố định Δ như đã biết là :

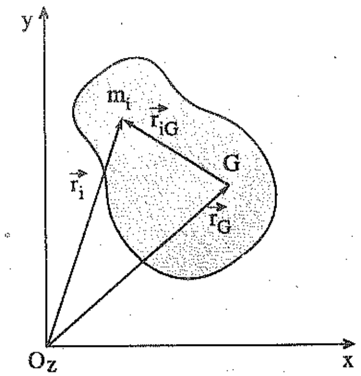
$$\vec{L}_\Delta = I_\Delta\vec{\omega} \qquad (1.22a)$$

hay $$L_\Delta = I_\Delta\omega \text{ (đại số)} \qquad (1.22b)$$

2. Định lí Kơ-níc (Köenig)

Xét một vật chuyển động phẳng trong mặt phẳng O.

Theo định nghĩa, momen động lượng đối với trục Oz và đối với trục G (Hình 1.21) lần lượt là :



Hình 1.21

$$\vec{L}_O = \sum \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{L}_G = \sum \vec{r}_{iG} \wedge m_i \vec{v}_{iG}$$

$$\vec{L}_O = \sum (\vec{r}_G + \vec{r}_{iG}) \wedge m_i (\vec{v}_G + \vec{v}_{iG})$$

$$\vec{L}_O = \vec{r}_G \wedge \left(\sum m_i\right) \vec{v}_G + \vec{r}_G \wedge \sum m_i \vec{v}_{iG} + \left(\sum m_i \vec{r}_{iG}\right) \wedge \vec{v}_G + \vec{L}_G$$

Theo các công thức (1.4) và (1.14) thì $\sum m_i \vec{r}_{iG} = \vec{0}$ và $\sum m_i \vec{v}_{iG} = \vec{0}$, nên ta có :

$$\vec{L}_O = \vec{L}_G + \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{v}_G \qquad (1.23)$$

Công thức (1.23) được gọi là *định lí Kơ-níc*. Nó cho phép tìm momen động lượng đối với một trục bất kì nếu biết momen động lượng đối với trục đi qua khối tâm.

3. Định lí biến thiên momen động lượng

Lấy đạo hàm biểu thức (1.21) theo thời gian, ta được :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{r} \wedge m\vec{v}] = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge m\vec{v}\right) + \left(\vec{r} \wedge \frac{dm\vec{v}}{dt}\right) = (\vec{v} \wedge m\vec{v}) + \vec{r} \wedge \vec{F}$$

Vì $(\vec{v} \wedge m\vec{v}) = \vec{0}$, nên : $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$.

Mở rộng ra cho vật rắn (hệ chất điểm) : $\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{\text{ngoại lực}} \vec{M} + \sum_{\text{nội lực}} \vec{M}$

Vì $\sum_{\text{nội lực}} \vec{M} = \vec{0}$, nên : $\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{\text{ngoại lực}} \vec{M}$

hay
$$\Delta\vec{L} = \sum_{\text{ngoại lực}} (\vec{M}.\Delta t) \qquad (1.24)$$

Độ biến thiên momen động lượng của một vật rắn (hay của hệ chất điểm) bằng tổng các momen xung lượng của các ngoại lực.

4. Định luật bảo toàn momen động lượng

Từ (1.24) ta suy ra, nếu $\sum_{\text{ngoại lực}} \vec{M}.\Delta t = \vec{0}$ thì $\vec{L} = \overrightarrow{\text{const}}$

Nếu không có ngoại lực tác dụng hoặc nếu tổng momen xung lượng của các ngoại lực bằng 0 thì momen động lượng của vật rắn (hay của hệ chất điểm) được bảo toàn.

D – SỰ VA CHẠM GIỮA CÁC VẬT RẮN

I – CƠ CHẾ CỦA SỰ VA CHẠM

Thí nghiệm chứng tỏ rằng khi hai vật va chạm nhau, chúng bị biến dạng nhẹ, bị dẹt đi và lúc đó chúng có cùng vận tốc. Sau đó chúng lấy lại hình dạng ban đầu với mức độ nhiều ít khác nhau và xảy ra sự nhảy lùi ra xa nhau. Như vậy sự va chạm bao gồm hai pha, pha nén và pha dãn.

Thời gian va chạm tuy không bằng 0 nhưng luôn luôn rất nhỏ so với toàn bộ thời gian dùng để phân tích hiện tượng. Do đó có thể coi sự va chạm xảy ra tại một chỗ trong không gian. Ngoài ra, sự biến thiên vận tốc của hai vật thì lớn vì chúng tác dụng vào nhau những lực lớn.

II – CÁC ĐỊNH LÍ BIẾN THIÊN ÁP DỤNG CHO SỰ VA CHẠM CỦA HAI VẬT RẮN

$$\Delta\vec{p} = \sum \vec{F}.\Delta t \qquad (a)$$

$$\Delta\vec{L}_G = \vec{M}_G.\Delta t \qquad (b)$$

Công thức (a) liên quan đến chuyển động tịnh tiến với vận tốc của khối tâm, còn công thức (b) liên quan đến chuyển động quay quanh khối tâm.

III – KHẢO SÁT SỰ VA CHẠM VỀ PHƯƠNG DIỆN NĂNG LƯỢNG

1. Định lí về động năng

$$\Delta W_d = A_{\text{ngoại lực}} + A_{\text{nội lực}}$$

Trong đó công của các ngoại lực thì không đáng kể vì các ngoại lực không lớn, còn công của các lực va chạm là công âm vì ngay cả khi không có ma sát thì hệ chịu một sự biến dạng tại chỗ tiếp xúc, và như vậy hệ tiêu thụ một phần động năng : $\Delta W_d = A \le 0$.

2. Sự va chạm đàn hồi và không đàn hồi

a) Định nghĩa

Sự va chạm là đàn hồi khi động năng toàn phần của hai vật được bảo toàn :

$$\Delta W_d = 0$$

Trong tất cả các trường hợp khác, sự va chạm là không đàn hồi. Phần động năng mất đi cho phép thay đổi tính chất của hai vật bằng cách làm cho chúng biến dạng, làm vỡ chúng thành các mảnh hay làm tăng nhiệt độ của chúng. Trong nhiệt động lực học, người ta nói rằng nội năng của hệ do tương tác đã thay đổi.

b) Hệ số hồi phục năng lượng

Va chạm không đàn hồi được đặc trưng bằng một tỉ số :

$$\varepsilon = \frac{W'_d}{W_d} \quad \text{với } 0 < \varepsilon < 1 \qquad (1.25)$$

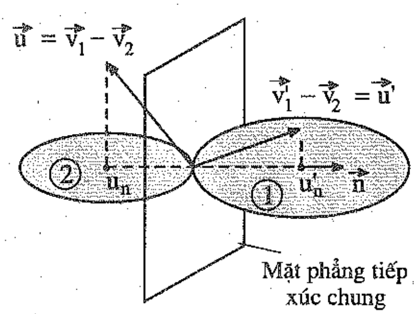
trong đó : W_d và W'_d là động năng của vật trước và sau va chạm.

$\varepsilon = 1$: va chạm đàn hồi.

$\varepsilon = 0$: va chạm hoàn toàn không đàn hồi.

c) Hệ số hồi phục thành phần pháp tuyến của vận tốc tương đối (Hình 1.22)

$$e = -\frac{\left(\vec{v}'_1 - \vec{v}'_2\right)_n}{\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)_n} = -\frac{\vec{u}'_n}{\vec{u}_n} \qquad (1.26)$$



Hình 1.22

d) Cách xác định hệ số hồi phục bằng thực nghiệm

Người ta thả rơi một quả cầu từ độ cao h xuống một tấm nằm ngang được giữ yên và đo chiều cao h' nảy lên :

$$\varepsilon = \frac{v_1'^2}{v_1^2} = \frac{h'}{h}; \quad e = \frac{v'_1}{v_1} = \sqrt{\varepsilon}$$

Ví dụ : • Quả bóng siêu đàn hồi rơi từ độ cao h = 150 cm

$$\varepsilon = 0{,}78 \text{ và } e = \sqrt{\varepsilon} = 0{,}88$$

• Khi rơi từ độ cao 40 cm :

$e = \dfrac{8}{9}$ đối với quả cầu bằng ngà voi.

$e = \dfrac{15}{16}$ đối với quả cầu bằng thuỷ tinh.

$e = 0{,}5$ đối với quả cầu bằng gỗ.

IV – MỘT SỐ KIỂU VA CHẠM

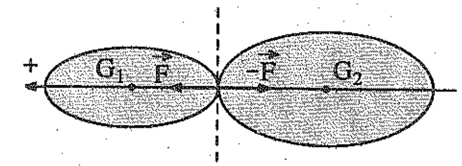
1. Va chạm trực diện

Sự va chạm được gọi là trực diện nếu như :

a) Sự tiếp xúc xảy ra trên đường thẳng nối hai khối tâm G_1 và G_2.

b) Pháp tuyến chung ở chỗ tiếp xúc là đường thẳng nối G_1 và G_2.

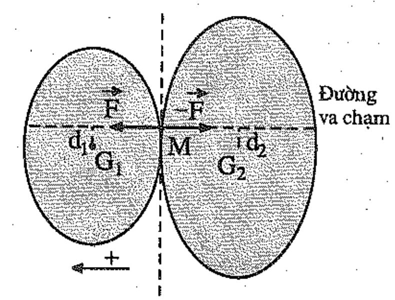
c) Lúc va chạm hai vật chuyển động tịnh tiến song song với đường thẳng này (Hình 1.23).



Hình 1.23

2. Va chạm thẳng nhưng không xuyên tâm

Trong trường hợp này hai vật chuyển động tịnh tiến song song với đường va chạm, nhưng đường này không đi qua hai khối tâm (Hình 1.24).



Hình 1.24

E – PHẦN ĐỌC THÊM

I – MA SÁT LĂN

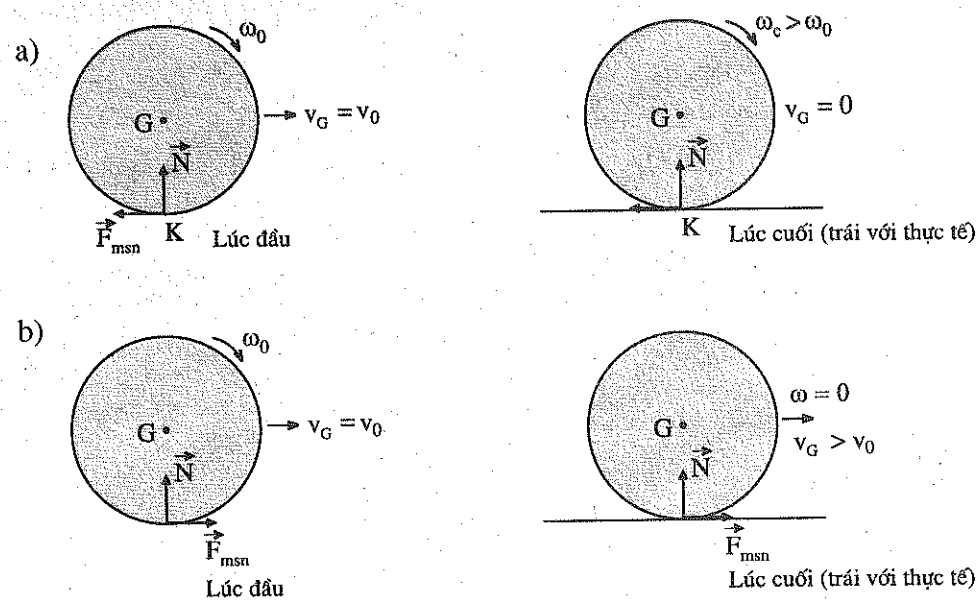
1. Ví dụ

Ta hãy xét một quả cầu lăn không trượt trên mặt sàn nằm ngang. Thực tế cho thấy, khi không chịu một lực chủ động nào theo phương ngang thì quả cầu lăn không trượt chậm dần rồi dừng lại. Vận tốc $\vec{v}_G$ của chuyển động tịnh tiến và vận tốc góc ω của chuyển động quay quanh khối tâm đều giảm dần đến 0 theo đúng hệ thức $v_G = \omega R$.

Ví dụ trên cho thấy, khi một vật lăn không trượt trên mặt sàn, *ma sát lăn xuất hiện cản trở cả hai chuyển động thành phần của vật là chuyển động tịnh tiến với vận tốc của khối tâm và chuyển động quay quanh khối tâm.*

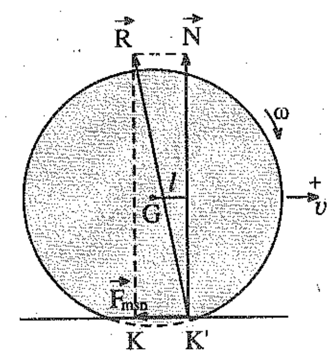
2. Giải thích

a) Ở các phần trước, khi giải các bài toán về chuyển động lăn không trượt, ta đã bỏ qua sự biến dạng của các vật. Còn ở ví dụ trên, nếu ta bỏ qua sự biến dạng này thì sẽ gặp điều nghịch lí. Thật vậy, nếu quả cầu và mặt sàn đều rắn tuyệt đối thì quả cầu chỉ tiếp xúc với mặt sàn ở một điểm. Phản lực $\vec{N}$ và lực ma sát nghỉ $\vec{F}_{msn}$ đều đặt tại điểm tiếp xúc. Khi ấy, lực $\vec{F}_{msn}$ dù ngược chiều hay cùng chiều với $\vec{v}_G$ thì cũng đều dẫn đến kết quả trái với thực tế (Hình 1.25a, b).



Hình 1.25

b) Muốn khắc phục điều nghịch lí trên đây thì ta phải *từ bỏ khái niệm vật rắn tuyệt đối*. Thật vậy, ở chỗ tiếp xúc, quả cầu bị dẹt một ít, mặt sàn bị lõm một ít, hình thành một *diện tích tiếp xúc*. Hơn nữa, trong khi lăn, phần trước của quả cầu ép mạnh vào sàn, còn phần sau do dịch chuyển lên nên ép nhẹ hơn. Do đó điểm đặt của phản lực $\vec{N}$ dịch về phía trước một ít, tạo ra một momen cản chuyển động quay của quả cầu (Hình 1.26).



Hình 1.26

Áp dụng các phương trình động lực học, ta có :

$$Ma_G = -F_{msn} \qquad (a)$$

$$F_{msn}R - M_{\vec{N}} = I_G\gamma = I_G.\frac{a_G}{R} \qquad (b)$$

Từ (a) và (b), suy ra : $M_{\vec{N}} = F_{msn}R\left(1 + \frac{I_G}{MR^2}\right)$

Đối với quả cầu : $I_G = \frac{2}{5}MR^2$. Thay vào ta được :

$$M_{\vec{N}} = \frac{7}{5}M_{\vec{F}_{msn}} \qquad (c)$$

Ta thấy $M_{\vec{N}} > M_{\vec{F}_{msn}}$ nên ω giảm cùng với v_G theo hệ thức $v_G = R\omega$.

Vậy, ma sát lăn của mặt sàn cản trở chuyển động lăn không trượt bao gồm :

– Lực ma sát nghỉ giữ cho điểm tiếp xúc không bị trượt và cản trở chuyển động tịnh tiến của vật. Chính lực ma sát nghỉ này bị hiểu sai là lực ma sát lăn.

– Momen của phản lực $\vec{N}$ đối với khối tâm cản trở chuyển động quay của quả cầu quanh khối tâm (do điểm đặt của phản lực $\vec{N}$ dịch về phía trước một đoạn : KK' = l).

Người ta gọi $M_{msl} = lN$ là *momen ma sát lăn*, trong đó KK' = l được gọi là *hệ số ma sát lăn*. Nó có thứ nguyên của chiều dài.

Thí nghiệm cho thấy hệ số l không phụ thuộc vào bán kính của quả cầu hay con lăn và tăng ít khi phản lực tăng.

Sau đây là một số giá trị của l :

– Con lăn bằng gỗ trên gỗ : 0,5 ÷ 1,5mm.

– Bánh xe lửa trên đường ray : 0,5 ÷ 1mm.

– Bánh xe ô tô, xe đạp trên đường nhựa : 10 ÷ 20mm.

2. Cơ năng và ma sát lăn

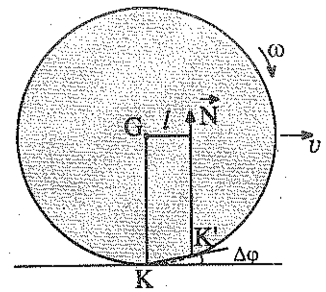
a) Lực nào trong hai lực $\vec{F}_{msn}$ và $\vec{N}$ *thực hiện công âm ?*

Khi quả cầu lăn không trượt, điểm tiếp xúc K đóng vai trò là tâm quay tức thời. Trong chuyển động quay thuần tuý này, điểm đặt của lực ma sát nghỉ không dịch chuyển trong khi đó thì điểm đặt K' của phản lực $\vec{N}$ dịch chuyển xuống dưới.

Do đó, *lực ma sát nghỉ không thực hiện công mà chính phản lực $\vec{N}$ mới thực hiện công âm làm giảm cơ năng của quả cầu* (Hình 1.27).

$$A_{msl} = -\sum N.\Delta s \;=\; -Nl\sum \Delta\varphi$$

$$A_{msl} = -M_{msl}.\varphi \qquad (1.27)$$



Hình 1.27

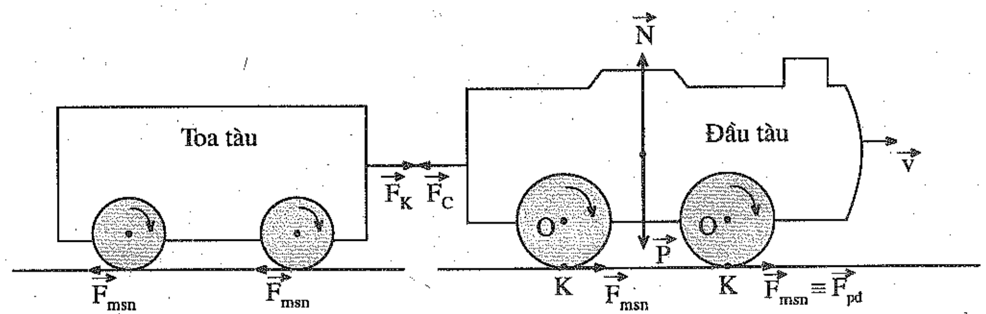
trong đó φ là góc mà vật quay được quanh K (và cũng là góc mà vật quay được quanh G).

b) Trong những trường hợp nào thì bỏ qua ma sát lăn ?

Khi có mặt của các lực khác tác dụng lên vật, gây ra chuyển động lăn không trượt của vật thì *thường thường người ta bỏ qua momen ma sát lăn vì nó quá nhỏ so với momen của các ngoại lực khác.* Ví dụ, khi một quả cầu hoặc một xilanh lăn trên một mặt phẳng nghiêng xuống dưới, thì $M_{msl} = lN$ nhỏ hơn rất nhiều so với M_P của trọng lực. Như thế, trong đa số trường hợp (chứ không phải tất cả), người ta có thể giả thiết rằng quả cầu (hay xilanh) rắn tiếp xúc với mặt sàn rắn tại một điểm và lực ma sát tại đó là lực ma sát nghỉ được tính bằng công thức $F_{msn} \le \mu_n N$.

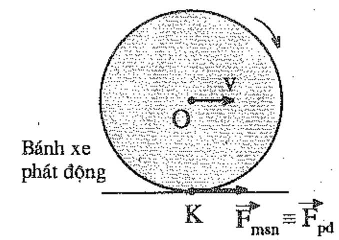
II – BÁNH XE PHÁT ĐỘNG. PHÂN BIỆT LỰC PHÁT ĐỘNG VỚI LỰC KÉO CỦA ĐẦU TÀU

1. Ta hãy xét sự khởi hành của một đoàn tàu trên một đoạn đường nằm ngang. Để cho đoàn tàu chuyển bánh thì cần phải tác dụng vào đoàn tàu một lực nằm ngang. Các ngoại lực tác dụng lên đoàn tàu chỉ là trọng lực của nó và các phản lực từ phía các đường ray. Chính nhờ các phản lực này mà đoàn tàu chuyển bánh được và các phản lực được sử dụng nhờ vào các bánh xe phát động (Hình 1.28).



Hình 1.28

Động cơ đốt trong thông qua cơ chế truyền chuyển động để tác dụng vào bánh xe phát động của đầu tàu những lực có xu hướng làm cho bánh xe quay quanh trục của nó. Nhưng do có lực ma sát tại điểm tiếp xúc K với đường ray mà điểm tiếp xúc K được giữ yên, tạo thành tâm quay tức thời để cho tâm O tiến được về phía trước (Hình 1.29). Chuyển động lăn không trượt chỉ xảy ra khi mà phản lực ma sát của đường ray chống lại được sự trượt của bánh xe gây ra bởi chuyển động quay.



Hình 1.29

Muốn tăng lực ma sát nghỉ này thì ta phải tăng trọng lượng đặt lên các bánh xe phát động. *Lực ma sát nghỉ mà đường ray tác dụng lên các bánh xe phát động của đầu tàu hướng về phía trước gọi là lực phát động.*

2. Bây giờ ta xét riêng đầu tàu và giả sử rằng tất cả bánh xe đều là bánh xe phát động. Gọi P là trọng lượng của nó, *F_K là lực kéo của đầu tàu tác dụng vào toa xe thứ nhất.* Theo định luật III Niu-tơn, đầu tàu chịu một lực cản F_c từ phía toa thứ nhất (Hình 1.28).

Ở giới hạn của cân bằng, lực ma sát nghỉ $\vec{F}_{msn}$ tác dụng tại điểm tiếp xúc K (tức lực phát động) cân bằng với lực cản $\vec{F}_c$.

Cần nhớ rằng, trong trường hợp này ta bỏ qua momen cản của ma sát lăn vì quá nhỏ so với momen khởi động.

Muốn bánh xe không trượt, nói cách khác, muốn có sự khởi hành thì phải có :

$$F_c = F_{msn} \le \mu P$$

Suy ra : $\qquad F_K \le \mu P \quad$ (μ là hệ số ma sát nghỉ)

Momen phát động cực đại tương ứng :

$$M_{pd} = F_{msn}R = \mu_n PR$$

Từ công thức trên, ta suy ra muốn *tăng lực kéo cực đại thì phải tăng trọng lượng của đầu tàu và bán kính của các bánh xe phát động.*

3. Nếu đầu tàu không kéo các toa mà chạy không tải thì sao ? Khi ấy ngoại lực tác dụng vào đầu tàu chỉ là trọng lượng P của nó và phản lực của đường ray.

Khi đầu tàu bắt đầu chuyển bánh thì động cơ đốt trong của đầu máy tác dụng vào bánh xe phát động một ngẫu lực có momen phát động lớn đến mức có thể bỏ qua momen ma sát lăn. Khi ấy, mặt đường bị biến dạng làm xuất hiện một phản lực N tại K' và một lực ma sát nghỉ hướng về phía trước. Các định luật động lực học được áp dụng như sau :

$$F_{msn} = F_{pđ} = ma \ ; \ \ M_{pđ} = F_{pđ}R = I\frac{a}{R}$$

$$(M_{pđ} \gg M_{msl})$$

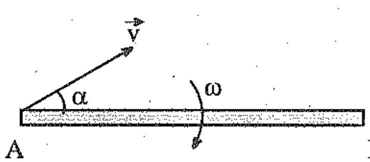
Còn khi đầu tàu chạy đều, thì động cơ đốt trong tác dụng vào bánh xe phát động một ngẫu lực có momen phát động nhỏ, đủ để cân bằng với momen của lực ma sát lăn. Không có lực phát động lẫn lực ma sát lăn. Trong thực tế, sự biến dạng của mặt đường chỉ làm xuất hiện phản lực N tại K' mà thôi. Khi ấy các phương trình động lực học thu về chỉ còn là : $M_{pđ} - M_{msl} = 0$.

4. Xét về phương diện công và năng lượng, thì đầu tàu chạy không tải, động cơ đốt trong thực hiện công để thắng công cản của lực ma sát lăn ở tất cả các bánh xe của đầu tàu. Còn khi kéo các toa thì đầu tàu thực hiện công để thắng công cản của toa thứ nhất. Công của đầu tàu chính là công của lực kéo ($A = F_K s$). Còn công của động cơ bao gồm hai công đó.

PHẦN BÀI TẬP VÍ DỤ

BÀI TẬP VÍ DỤ CHO MỤC A

1.1. Một thanh AB, dài l, chuyển động trong mặt phẳng nằm ngang. Tại một thời điểm nào đó vận tốc của đầu A có độ lớn là v và nghiêng một góc $\alpha = 30^o$ đối với thanh và thanh có vận tốc góc $\omega = \dfrac{v}{l}$ (Hình 1.30). Tìm vận tốc của đầu B.



Hình 1.30

Giải

Cách 1 : Coi chuyển động của thanh AB là chuyển động tổng hợp của hai chuyển động thành phần, tịnh tiến và quay. Khi ấy ta áp dụng công thức phân bố vận tốc để tìm $\vec{v}_B$ (Hình 1.31a).

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

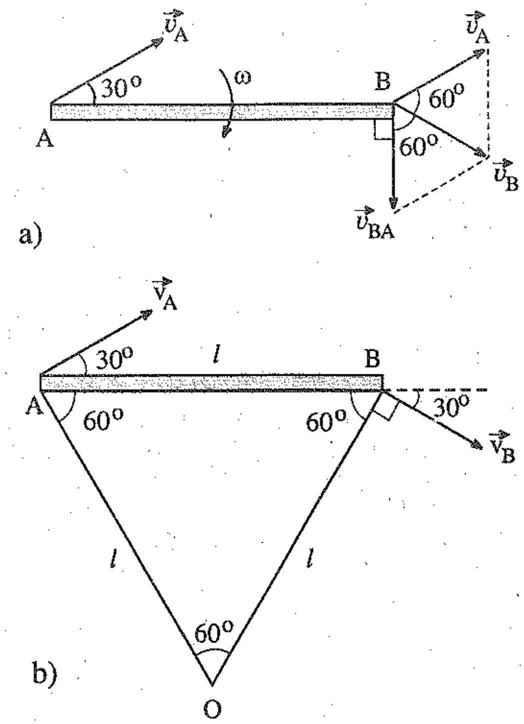
$$v_{BA} = \omega.AB = \omega l = v$$

Từ Hình 1.31a, ta suy ra $v_B = v$ và nghiêng một góc $\beta = 30^o$ so với thanh.

Cách 2 : Coi chuyển động của thanh là chuyển động quay thuần tuý. Khi ấy ta xác định tâm quay tức thời O rồi tìm $\vec{v}_B$ (Hình 1.31b).

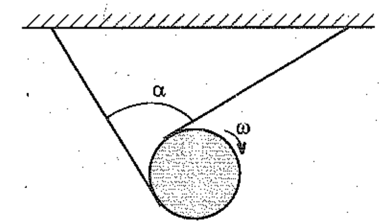
Theo đầu bài thì $v_A = \omega l$. Ta suy ra $\overline{OA} \perp \vec{v}_A$ và có độ lớn $OA = l$, còn tam giác OAB là tam giác đều.

Điểm B quay quanh O với vận tốc $v_B = \omega.OB = \omega l = v$ và nghiêng so với thanh một góc $\beta = 30^o$.



Hình 1.31

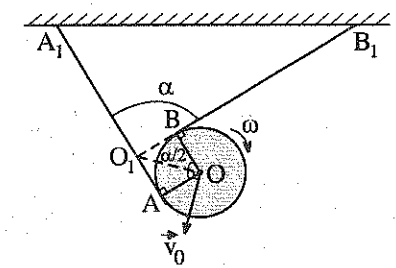
1.2. Một đĩa nặng, bán kính R, được treo vào hai dây không dãn quấn quanh nó. Đầu tự do của hai dây được buộc vào đĩa. Đĩa đang lăn xuống. Tại thời điểm xét, vận tốc góc của đĩa là ω và góc giữa hai dây là α (Hình 1.32). Tìm vận tốc của tâm O đĩa tại thời điểm đó. Cho biết dây luôn luôn căng khi chuyển động.



Hình 1.32

Giải

Vì dây luôn căng nên $\vec{v}_A \perp AA_1$, $\vec{v}_B \perp BB_1$, tức là đều có phương đi qua tâm O của đĩa. Từ đó ta suy ra được tâm quay tức thời O_1 và hướng của $\vec{v}_0$ (Hình 1.33).



Hình 1.33

$$OO_1 = \frac{R}{\cos\frac{\alpha}{2}} \quad ; \quad v_0 = \omega OO_1 = \frac{\omega R}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

BÀI TẬP VÍ DỤ CHO MỤC B

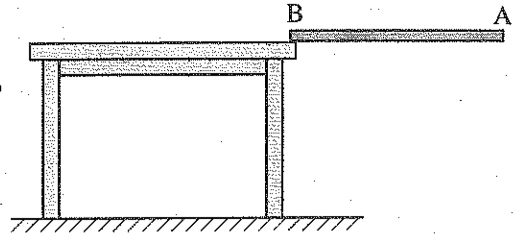
1.3. Một thanh đồng chất, khối lượng m, dài l, được giữ nằm ngang với đầu B nằm ở mép một chiếc bàn và đầu A được giữ bởi tay. Đầu A bất thình lình được thả ra (Hình 1.34). Tại lúc thả tay, hỏi :

a) Momen lực đối với đầu B ?

b) Gia tốc góc của thanh ?

c) Lực thẳng đứng tác dụng lên thanh ?

Chú ý : Mỗi câu trả lời cho biết độ lớn và hướng.

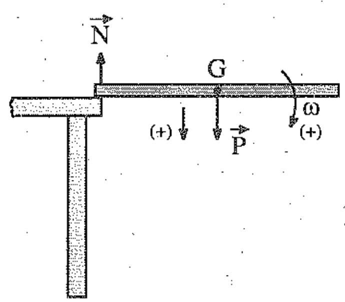


Hình 1.34

Giải

Chọn chiều dương cho chuyển động tịnh tiến và quay như Hình 1.35.

Tại lúc thả tay, $v_G = 0$ và $\omega = 0$. Thanh chịu tác dụng của hai lực là $\vec{P}$ và $\vec{N}$.



Hình 1.35

$$M_B = mg\frac{l}{2} \text{ (làm thanh quay xuống)}$$

$$\gamma = \frac{M_B}{I_B} = \frac{mg\frac{l}{2}}{\frac{1}{3}ml^2} = \frac{3g}{2l}$$

$$a_G = \frac{l}{2}\gamma = \frac{3g}{4} \text{ (hướng thẳng đứng xuống dưới)}$$

$$P - N = ma_G$$

$$N = mg - m\frac{3g}{4} = \frac{mg}{4} \text{ (hướng lên trên)}$$

1.4. Tìm momen quán tính của

a) Một đĩa mỏng tròn có bán kính R và khối lượng m đối với một trục trùng với một đường kính của nó.

b) Một lớp cầu mỏng có bán kính R và khối lượng m đối với một trục đi qua tâm của nó.

Giải

a) Hình 1.36a :

Ta đã biết : $I_z = \frac{1}{2}mR^2$

$$I_z = \sum m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right) = I_x + I_y$$

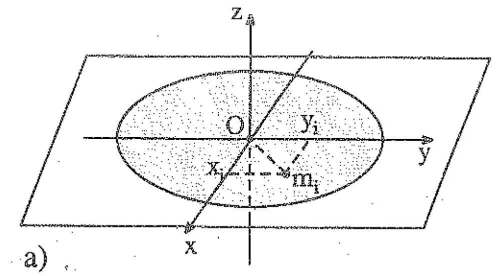
Suy ra : $I_x = I_y = \frac{1}{2}I_z = \frac{1}{4}mR^2$

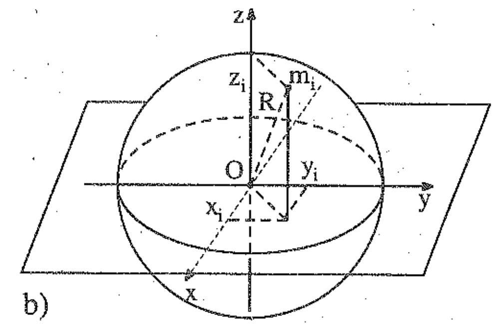
b) Hình 1.36b :

Momen quán tính của lớp cầu mỏng đối với tâm O là :

$$I_O = \sum m_i R^2 = mR^2$$

Gọi (x_i, y_i, z_i) là toạ độ của một chất điểm m_i. Ta có :





Hình 1.36

$$I_O = \sum m_i\left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\right)$$

Vì 3 trục x, y, z tương đương nhau (tính chất đối xứng cầu) nên ta có thể viết :

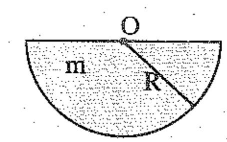
$$I_O = 3\sum m_i x_i^2$$

$$I_z = \sum m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right) = 2\sum m_i x_i^2$$

$$I_z = \frac{2}{3}I_O$$

Suy ra : $I_z = \frac{2}{3}mR^2$

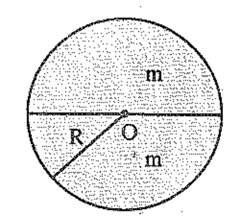
1.5. Một tấm mỏng hình bán trụ có bán kính R, khối lượng m (Hình 1.37). Tìm momen quán tính của nó đối với một trục đi qua tâm O và vuông góc với mặt phẳng của tấm.



Hình 1.37

Giải

Ta ghép hai tấm giống như ở Hình 1.37 thành một đĩa tròn, bán kính R, khối lượng 2m (Hình 1.38). Gọi I_O là momen quán tính của tấm hình bán trụ đối với tâm O, I_1 là momen quán tính của đĩa tròn đối với tâm O. Ta có :

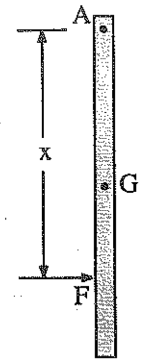


Hình 1.38

$$I_1 = 2I_O = \frac{1}{2}.2mR^2$$

Suy ra : $$I_O = \frac{1}{2}mR^2$$

1.6. Một chiếc thước dẹt hình chữ nhật, dài l, khối lượng m, đặt trên mặt bàn nằm ngang, nhẵn. Đầu A của thước có thể quay không ma sát quanh một trục cố định đi qua A và vuông góc với bàn (Hình 1.39). Tác dụng vào thước một xung lực $\vec{F}$ nằm ngang, theo phương vuông góc với thước, cách đầu A một khoảng là x. Hãy xác định :



Hình 1.39

a) Gia tốc góc của thước.

b) Gia tốc của khối tâm của thước.

c) Khoảng cách x để phản lực $\vec{R}$ của trục quay : bằng 0 ? hướng sang trái ? hướng sang phải ?

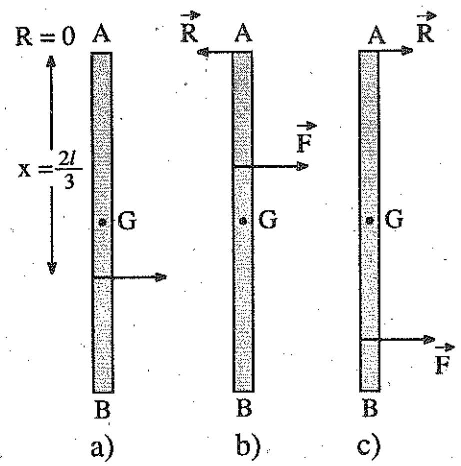
Giải

a) $$\gamma = \frac{M_A}{I_A} = \frac{Fx}{\frac{1}{3}ml^2} = \frac{3Fx}{ml^2}$$

b) $$a_G = \frac{l}{2}\gamma = \frac{3}{2}\frac{Fx}{ml}$$

c) Chọn chiều của lực $\vec{F}$ làm chiều dương. Gọi $\vec{R}$ là phản lực của trục quay tác dụng lên thước.

– Áp dụng định luật II Niu-tơn cho khối tâm :



Hình 1.40

$$F + R = ma_G = m\frac{3Fx}{2ml} = \frac{3Fx}{2l}$$

$$R = F\left(\frac{3x}{2l} - 1\right)$$

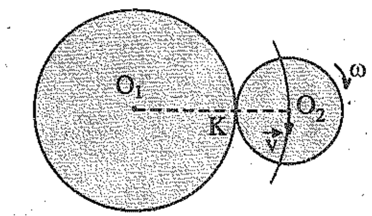
$R = 0$ khi $\frac{3x}{2l} - 1 = 0$ hay $x = \frac{2}{3}l$ (Hình 1.40a)

$R < 0$ khi $x < \frac{2l}{3}$ (Hình 1.40b) ; $R > 0$ khi $x > \frac{2l}{3}$ (Hình 1.40c).

Liên hệ thực tế :

Khi cầm vợt tennis đánh bóng, cầm rìu bổ củi v.v... cần phải điều chỉnh khoảng cách x từ chỗ tay cầm đến điểm va chạm của vợt với bóng, của rìu với củi v.v... để phản lực R vào tay cầm là nhỏ nhất. Nếu để R lớn sẽ bị tê tay.

1.7. Dùng một tấm xốp cắt ra hai đĩa tròn bán kính R và r. Giữ cho đĩa 1, bán kính R nằm yên trên mặt bàn và cho đĩa 2, bán kính r lăn không trượt trên vành ngoài của đĩa 1 (Hình 1.41). Hỏi :



Hình 1.41

a) Khi tâm O_2 của đĩa 2 quay được một góc α quanh tâm O_1 thì các điểm khác của nó quay quanh tâm O_2 được một góc φ bằng bao nhiêu ?

b) Áp dụng bằng số $\alpha = 30^o$ và $R = 2r$. Vẽ hình minh hoạ.

Giải

a) Gọi v là vận tốc của O_2 trong chuyển động tròn quanh O_1 đứng yên. Ta có :

$$v = \omega_1 (R + r) = \alpha' (R + r) \quad (1)$$

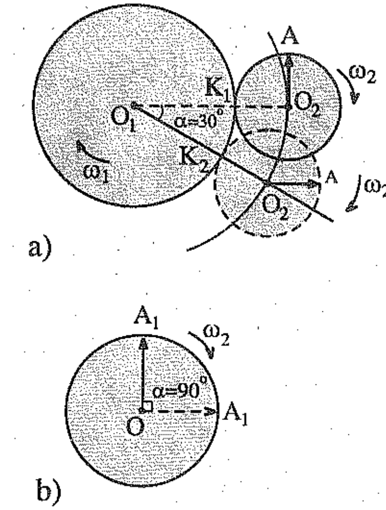
Vì đĩa 2 lăn không trượt quanh đĩa 1 nên điểm tiếp xúc K là tâm quay tức thời và tâm O_2 của đĩa 2 quay quanh K. Ta cũng có :

$$v = \omega_2 r = \varphi' r \quad (2)$$

So sánh (2) với (1) ta được :

$$\varphi' = \alpha'\left(\frac{R + r}{r}\right)$$

hay $$\varphi = \alpha\left(\frac{R + r}{r}\right) \quad (3)$$



Hình 1.42

b) Thay $\alpha = 30^o$, $R = 2r$ vào (3) ta được $\varphi = 90^o$.

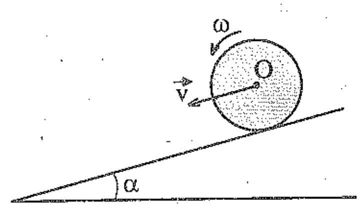
Chú ý :

a) Muốn nhận ra chuyển động quay của đĩa 2 quanh tâm O_2 của nó, ta vạch một vectơ $\overrightarrow{O_2A}$ trên vật và theo dõi sự đổi hướng của vectơ này (Hình 1.42a). Muốn thế, ta chọn một điểm O trên mặt bàn và vẽ vectơ $\overrightarrow{OA_1}$ song song, cùng chiều và cùng độ lớn với vectơ $\overline{O_2A}$ tại những thời điểm khác nhau. Hình 1.42a miêu tả riêng chuyển động quay thành phần của đĩa 2 quanh O_2, còn Hình 1.42b miêu tả chuyển động vừa quay vừa tịnh tiến của đĩa 2 trên mặt bàn.

b) Cần phân biệt hai vận tốc góc ω_1 và ω_2.

$\omega_1 = \alpha'$ là vận tốc góc của chuyển động tròn của tâm O_2 quanh tâm O_1 (tức là vận tốc góc của chuyển động tịnh tiến tròn của đĩa 2 quanh O_1). Còn $\omega_2 = \varphi'$ là vận tốc góc của chuyển động quay của đĩa 2 quanh tâm O_2 của nó (hay quanh tâm quay tức thời K).

1.8. Một viên bi có khối lượng m, bán kính R, lăn không trượt trên một mặt phẳng nghiêng với góc nghiêng α so với phương ngang (Hình 1.43). Hệ số ma sát nghỉ là μ_n. Hệ số ma sát lăn coi như bằng 0. Hỏi góc nghiêng α lớn nhất bằng bao nhiêu để viên bi lăn không trượt ?



Hình 1.43

Giải

Chọn chiều dương cho chuyển động tịnh tiến và quay như Hình 1.44. Các lực tác dụng vào vật là $\vec{P}$, $\vec{N}$ và $\vec{F}_{msn}$.

Định luật II Niu-tơn cho chuyển động tịnh tiến :

$$Ox : ma = mg\sin\alpha - F_{msn} \quad (1)$$

$$Oy : 0 = N - mg\cos\alpha \quad (2)$$

Định luật II Niu-tơn cho chuyển động quay :

$$I_O\gamma = F_{msn}R \quad (3)$$

Điều kiện lăn không trượt :

$$a = R\gamma \quad (4)$$

Giải hệ phương trình :

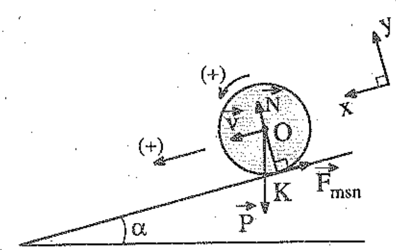
Từ (3) và (4), ta được :

$$\frac{2}{5}mR^2.\frac{a}{R} = F_{msn}R$$

$$ma = \frac{5F_{msn}}{2}$$

Thay vào (1) : $\dfrac{5F_{msn}}{2} = mg\sin\alpha - F_{msn}$

$$F_{msn} = \frac{2}{7}mg\sin\alpha \le \mu_n N$$

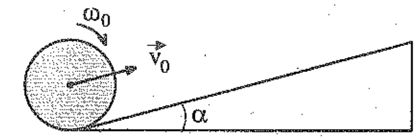


Hình 1.44

Kết hợp với (2) : $\dfrac{2}{7}mg\sin\alpha \le \mu_n mg\cos\alpha$

Suy ra : $\tan\alpha \le 3{,}5\mu_n$.

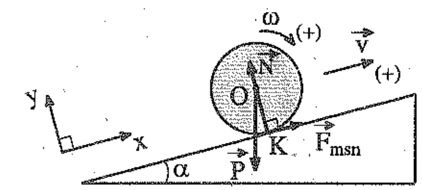
1.9. Một viên bi có khối lượng m, bán kính R, lăn không trượt trên một mặt phẳng nghiêng với góc nghiêng α so với phương ngang. Viên bi đi lên với vận tốc đầu v_0 (Hình 1.45). Hỏi sau bao lâu nó lại về đến điểm xuất phát ?



Hình 1.45

Giải

Khi lăn lên, viên bi chuyển động chậm dần. Không chỉ vận tốc v của tâm O giảm dần đến 0 mà cả vận tốc góc ω cũng giảm dần đến 0 theo đúng điều kiện lăn không trượt $v = \omega R$. Vì thế *lực ma sát nghỉ phải hướng lên.* Như vậy hệ lực tác dụng vào viên bi khi đi lên và đi xuống đều như nhau (Hình 1.46).



Hình 1.46

Chọn trục Ox, Oy và chọn chiều dương cho v và ω như Hình 1.46.

Áp dụng phương trình động lực học cho tâm quay tức thời K, ta được :

$$-mgR\sin\alpha = I_K\gamma \quad (1)$$

Thay $I_K = I_O + mR^2 = \dfrac{7}{5}mR^2$ và $\gamma = \dfrac{a}{R}$ vào (1), ta được :

$$a = -\frac{5g\sin\alpha}{7} \quad (2)$$

Thời gian chuyển động của viên bi được xác định bằng thời gian chuyển động của khối tâm O : $x = v_0t + \dfrac{1}{2}at^2$.

Khi trở lại vị trí xuất phát thì x = 0 : $v_0t + \dfrac{1}{2}at^2 = 0$.

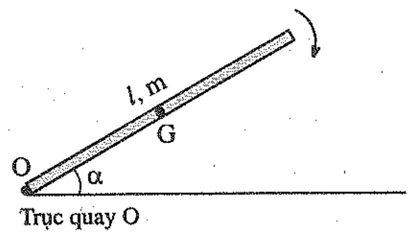
Suy ra : $t = \dfrac{-2v_0}{a} = \dfrac{-2v_0}{-\dfrac{5g\sin\alpha}{7}}$

Cuối cùng : $t = \dfrac{14v_0}{5g\sin\alpha}$.

BÀI TẬP VÍ DỤ CHO CÁC MỤC C.I VÀ B.II

1.10. Một thanh cứng đồng chất, khối lượng m, dài l, có thể quay tự do trong mặt phẳng thẳng đứng, xung quanh trục nằm ngang đi qua một đầu thanh (Hình 1.47). Nhấc thanh lên cao hơn đường nằm ngang một góc $\alpha = 30^o$ rồi thả rơi không vận tốc đầu. Hãy tính lực mà thanh tác dụng vào trục quay vào lúc thanh rơi qua đường nằm ngang.

Giải



Hình 1.47

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng :

$$mg\frac{l}{2}\sin 30^o = \frac{1}{2}I_O\omega^2 \qquad (1)$$

$$I_O = I_G + md^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

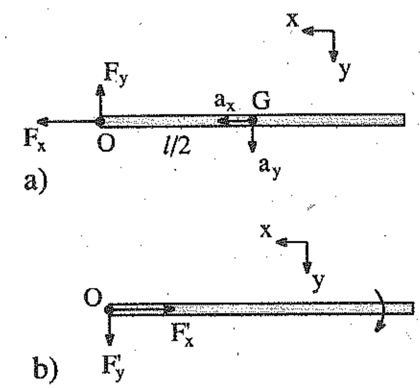
Thay vào (1) ta được :

$$\omega^2 = \frac{3g}{2l} \qquad (2)$$

Áp dụng phương trình động lực học cho chuyển động quay quanh O vào thời điểm xét ($\alpha = 0$) :

$$mg\frac{l}{2} = \frac{1}{3}ml^2\gamma$$

$$\Rightarrow \quad \gamma = \frac{3g}{2l} \qquad (3)$$



Hình 1.48

Gọi F_x và F_y là thành phần của lực $\vec{F}$ mà trục quay tác dụng lên thanh (Hình 1.48a). Áp dụng định luật II Niu-tơn cho chuyển động của khối tâm :

$$F_x = ma_{Gx} = m\omega^2\frac{l}{2} \qquad (4)$$

$$mg + F_y = ma_{Gy} = m\frac{l}{2}\gamma \qquad (5)$$

Thay (2) vào (4) và (3) vào (5), ta được :

$$F_x = \frac{3}{4}mg \text{ và } F_y = -\frac{1}{4}mg$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \frac{\sqrt{10}}{4}mg$$

Theo định luật III Niu-tơn, thanh tác dụng lên trục quay một lực $\vec{F'}$ có :

$$F'_x = -\frac{3mg}{4},\ F'_y = \frac{mg}{4} \text{ và có độ lớn } F' = \frac{\sqrt{10}}{4}mg \text{ (Hình 1.48b)}$$

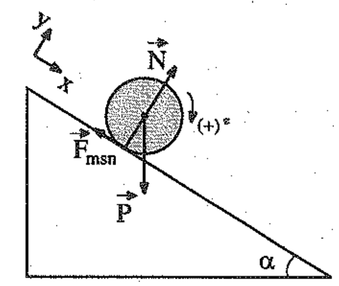
1.11. Một quả cầu lăn không trượt không vận tốc đầu từ đỉnh của một mặt phẳng nghiêng, có góc nghiêng α so với phương ngang và có chiều dài l. Xác định vận tốc của tâm quả cầu tại chân mặt phẳng nghiêng.

a) Bằng phương pháp động lực học.

b) Bằng phương pháp năng lượng.

Giải

a) Hình 1.49.



Hình 1.49

Theo bài tập ví dụ 1.8, ta có hệ phương trình :

$$Ox : ma = mg\sin\alpha - F_{msn} \qquad (1)$$

$$Oy : 0 = N - mg\cos\alpha \qquad (2)$$

$$I_G\gamma = F_{msn}R \qquad (3)$$

$$\gamma = \frac{a}{R} \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra : $\quad F_{msn} = \frac{2}{7}mg\sin\alpha.$

Thay vào (1) ta được : $\quad a = \frac{5}{7}g\sin\alpha.$

Áp dụng công thức $v = \sqrt{2as}$ cho chuyển động của khối tâm, ta được :

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}gl\sin\alpha}$$

b) Vì lực ma sát nghỉ không thực hiện công, còn ma sát lăn thì bỏ qua nên ta áp dụng được định luật bảo toàn cơ năng (BTCN).

Chọn mốc thế năng ở chân dốc, ta có :

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2}I_G\omega^2 \qquad (1)$$

$$\omega = \frac{v}{R} \qquad (2)$$

$$I_G = \frac{2}{5}mR^2 \qquad (3)$$

Thay (2) và (3) vào (1), ta được : $mgh = \frac{7}{10}mv^2$.

Suy ra : $v = \sqrt{\frac{10}{7}gh} = \sqrt{\frac{10}{7}gl\sin\alpha}$.

1.12. Một quả bóng cao su đặc, bán kính 10 cm, lăn không trượt trên mặt bàn nằm ngang với vận tốc $v_0 = 2$ m/s rồi rơi xuống sàn nhà.

a) Mô tả chuyển động của quả bóng khi đang rơi.

b) Tính vận tốc góc và vận tốc của tâm O của quả bóng lúc sắp chạm sàn. Cho biết bàn cao h = 1,2 m. Lấy g = 9,8 m/s^2.

c) Tính số vòng quay được trong thời gian quả bóng rơi.

Giải

a) Quả bóng vừa chuyển động tịnh tiến theo khối tâm, vừa quay quanh khối tâm :

$$m\vec{a} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

$$I_O\vec{\gamma} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\omega} = \text{const}$$

Trong chuyển động này, khối tâm O chuyển động giống như một chất điểm bị ném ngang, còn các điểm khác quay đều quanh khối tâm.

b) Lúc rời khỏi bàn, bóng có vận tốc góc $\omega_0 = \frac{v_0}{R} = 20$ rad/s. Lúc sắp chạm sàn, bóng vẫn có vận tốc góc $\omega = 20$ rad/s.

Theo định luật BTCN, thế năng của quả bóng giảm, chuyển hết thành động năng của chuyển động tịnh tiến (vì động năng quay không đổi).

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

Suy ra : $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = \sqrt{4 + 2.9,8.1,2} = 5,25 \approx 5,3$ m/s.

c) Thời gian rơi của chuyển động ném ngang bằng thời gian rơi tự do :

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2.1,2}{9,8}} = 0,495 \approx 0,50 \text{ s}$$

Số vòng quay được trong thời gian quả bóng rơi :

$$n = \frac{\omega t}{2\pi} = \frac{20.0,495}{2\pi} = 1,576 \approx 1,6 \text{ vòng}$$

BÀI TẬP VÍ DỤ CHO CÁC MỤC C.II VÀ C.III

1.13. Một thanh mỏng, đồng chất, dài l, khối lượng m, đang nằm yên trên một mặt bàn nằm ngang không ma sát. Tác dụng một xung lượng của lực $\vec{J}$ vào một đầu thanh theo hướng vuông góc với thanh (Hình 1.50). Hỏi :

a) Vận tốc v của khối tâm và vận tốc góc của thanh ngay sau khi xung lực ngừng tác dụng ?

b) Đoạn đường mà thanh đi được trong thời gian nó quay được một vòng ?

c) Động năng của thanh ngay sau khi xung lực $\vec{F}$ ngừng tác dụng ?

(*Gợi ý :* – Xung lực $\vec{F}$ là lực tác dụng trong một thời gian rất ngắn Δt.

– Xung lượng của lực là tích $\vec{F}\Delta t = \vec{J}$).

Giải

a) Áp dụng định lí biến thiên động lượng.

Chọn chiều dương theo $\vec{F}$ (Hình 1.50) :

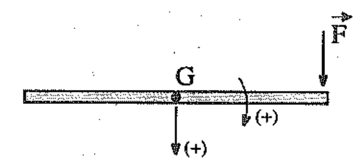
Hình 1.50

$$F\Delta t = \Delta(mv) = m(v_G - 0)$$

$$J = mv_G$$

Suy ra : $v_G = \frac{J}{m}$ (1)

Áp dụng định lí biến thiên momen động lượng. Chọn chiều dương cho ω như Hình 1.51.



Hình 1.51

$$M\Delta t = \Delta L$$

$$\frac{l}{2}F.\Delta t = I_G\omega = \frac{1}{12}ml^2\omega$$

Suy ra : $\omega = \frac{6J}{ml}$ (2)

b) Sau khi lực ngừng tác dụng, khối tâm chuyển động thẳng đều đồng thời thanh quay đều quanh khối tâm.

Thời gian thanh quay được một vòng là : $t = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi ml}{3J}$.

Trong thời gian này khối tâm của thanh đi được một đoạn đường là :

$$s = v_G t = \frac{J}{m}.\frac{\pi ml}{3J} = \frac{\pi l}{3} \quad (3)$$

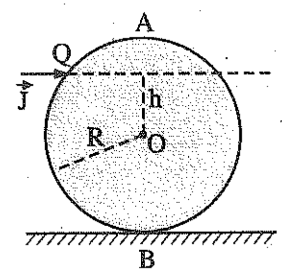
1.14. Một quả cầu đặc, bán kính R, khối lượng m, đang đứng yên trên một mặt bàn nằm ngang không ma sát. Một xung lượng của lực $\vec{J}$ tác dụng theo phương ngang vào quả cầu tại điểm Q. Điểm Q cao hơn tâm O một đoạn là h (Hình 1.52). Kết quả là quả cầu bắt đầu quay quanh O với vận tốc góc ω, đồng thời điểm O bắt đầu chuyển động về bên phải với vận tốc v. Giả thiết rằng quả cầu không kịp chuyển động trong thời gian rất ngắn mà xung lực $\vec{F}$ tác dụng. Hỏi :

a) Vận tốc của tâm O và vận tốc góc ω ngay sau khi xung lực $\vec{F}$ ngừng tác dụng ?

b) Vận tốc của các điểm A và B ngay sau khi xung lực ngừng tác dụng. Với h bằng bao nhiêu thì điểm B đứng yên và quả cầu quay quanh B ?

c) Có những điểm nào mà đối với chúng momen động lượng của quả cầu là như nhau trước và sau khi xung lực tác dụng ?

d) Động năng của quả cầu sau khi lực ngừng tác dụng ?



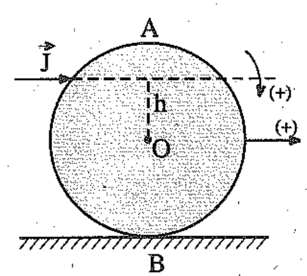
Hình 1.52

Giải

a) Áp dụng định lí biến thiên động lượng. Chọn chiều dương cho chuyển động tịnh tiến như Hình 1.53.

$$F\Delta t = m\Delta v = m(v_0 - 0)$$

$$v_0 = \frac{F\Delta t}{m} = \frac{J}{m} \qquad (1)$$



Hình 1.53

Áp dụng định lí biến thiên momen động lượng. Chọn chiều dương cho chuyển động quay như Hình 1.53.

$$hF\Delta t = I_O\Delta\omega = I_O(\omega - 0)$$

$$\omega = \frac{hJ}{\frac{2}{5}mR^2} = \frac{5Jh}{2mR^2} \qquad (2)$$

b) Áp dụng công thức phân bố vận tốc : $\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}$

hay dưới dạng đại số : $v_A = v_O + \omega R = \dfrac{J}{m} + \dfrac{5Jh}{2mR}$

$$v_A = \frac{J}{m}\left(1 + \frac{5h}{2R}\right) \qquad (3)$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OB}$$

$$v_B = v_O - \omega R = \frac{J}{m} - \frac{5Jh}{2mR}$$

$$v_B = \frac{J}{m}\left(1 - \frac{5h}{2R}\right) \qquad (4)$$

$$v_B = 0 \text{ khi } 1 - \frac{5h}{2R} = 0 \text{ hay } h = 0{,}4R \qquad (5)$$

c) Trước khi xung lực tác dụng thì quả cầu đứng yên, $\vec{L} = \vec{0}$. Ta hãy tìm các điểm mà momen động lượng đối với chúng sau khi chịu tác dụng vẫn bằng 0.

$$\Delta\vec{L} = \vec{M}_F.\Delta t = \vec{r} \wedge \vec{F}\Delta t = \vec{r} \wedge \vec{J} = \vec{0}$$

Các điểm đó nằm trên giá của vectơ $\vec{J}$.

d) $$W_d = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I0\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}m\frac{J^2}{m^2} + \frac{1}{2}.\frac{2}{5}mR^2.\left(\frac{5Jh}{2mR^2}\right)^2$$

$$= \frac{J^2}{2m} + \frac{1}{2}.\frac{5}{2}.\frac{J^2}{m}.\frac{h^2}{R^2}$$

$$W_d = \frac{J^2}{2m}\left(1 + \frac{5h^2}{2R^2}\right) \qquad (6)$$

1.15. Đặt trên một mặt phẳng nằm ngang, nhẵn một vòng đệm nhỏ và một thanh mảnh, đồng chất, dài *l*, có khối lượng lớn hơn khối lượng của vòng đệm n lần. Sau đó truyền cho vòng đệm một vận tốc v_0 theo phương vuông góc với thanh (Hình 1.54). Vòng đệm va chạm đàn hồi với một đầu thanh. Tìm vận tốc của vòng đệm và của thanh. Với giá trị nào của n thì vận tốc của vòng đệm sau va chạm sẽ bằng 0 ? Sẽ đổi chiều ?

Giải

Gọi m và nm là khối lượng của vòng đệm và của thanh. Gọi vận tốc sau va chạm của vòng đệm là v, của thanh là v_G và tốc độ góc là ω. Chọn chiều dương cho v và cho ω như Hình 1.55.

Áp dụng định luật BTĐL :

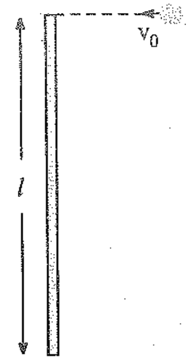
$$mv_0 = mv + nmv_G$$

Áp dụng định luật BTMMĐL đối với G :

$$mv_0\frac{l}{2} = mv\frac{l}{2} + \frac{1}{12}nml^2\omega$$

Áp dụng định luật BTCN :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}nmv_G^2 + \frac{1}{2}.\frac{1}{12}nml^2\omega^2$$



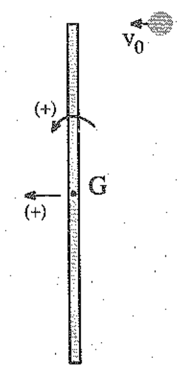
Hình 1.54

Đơn giản các phương trình trên, ta được :

$$v_0 = v + nv_G \qquad (1)$$

$$v_0 = v + \frac{1}{6}nl\omega \qquad (2)$$

$$v_0^2 = v^2 + nv_G^2 + \frac{1}{12}nl^2\omega^2 \qquad (3)$$



Hình 1.55

Giải hệ phương trình (1), (2) và (3), ta được :

$$v_G = \frac{l\omega}{6}\ ;\ \omega = \frac{12v_0}{(4+n)l}$$

$$v = \frac{v_0(4-n)}{4+n}$$

Với n = 4 thì v = 0. Với n < 4 thì v < 0.

BÀI TẬP VÍ DỤ CHO MỤC D

1.16. Một đĩa phẳng, tròn, mép nhẵn, chuyển động trên mặt phẳng nằm ngang không ma sát, tới va chạm vào hai đĩa giống hệt dán dính chồng lên nhau, với vận tốc đầu $\vec{v}$. Cho biết "khoảng cách ngắm" bằng bán kính của đĩa (Hình 1.56). Tìm góc bay ra xa nhau giữa hai đĩa sau va chạm trong hai trường hợp :

a) Va chạm là mềm.

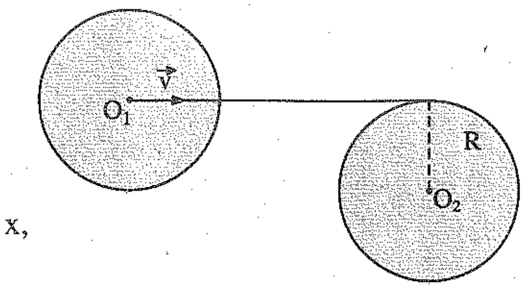
b) Va chạm là đàn hồi.

Giải

Hình 1.57 vẽ đĩa 1 bắt đầu tiếp xúc với đĩa 2. Do mép đĩa không có ma sát nên cặp lực tương tác khi va chạm $\vec{F}_{12}$ và $\vec{F}_{21}$ có phương vuông góc với các mặt tiếp xúc, tức là hướng dọc theo đường nối hai tâm O_1O_2.

Ta phân tích vectơ $\vec{v}$ thành hai thành phần $\vec{v}_{1x}$ và $\vec{v}_{1y}$ (Hình 1.57). Vì không có lực tương tác theo hướng Oy nên thành phần v_{1y} không thay đổi sau va chạm :

$$\begin{cases} v'_{1y} = v_{1y} = v\sin 30^o = \frac{1}{2}v \\ v'_{2y} = v_{2y} \end{cases}$$



Hình 1.56

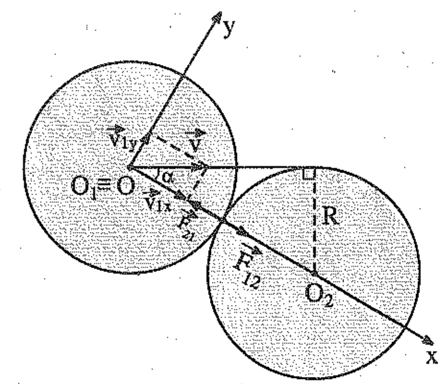
a) Va chạm mềm

Áp dụng định luật BTĐL theo trục x, ta có :

$$mv_{1x} = 3mv'_x$$

$$mv\cos 30^o = 3mv'_x$$

$$v'_x = v'_{1x} = v'_{2x} = \frac{v\sqrt{3}}{6}$$



Hình 1.57

Đĩa 2 chuyển động tịnh tiến theo trục O_1x. Đĩa 1 chuyển động tịnh tiến theo hướng làm với trục x một góc φ. Ta có :

$$\tan\varphi = \frac{v'_{1y}}{v'_{1x}} = \frac{\frac{1}{2}v}{\frac{v\sqrt{3}}{6}} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = 60^o$$

Sau va chạm mềm, góc bay ra xa nhau giữa hai đĩa là 60^o (Hình 1.58).

b) Va chạm đàn hồi

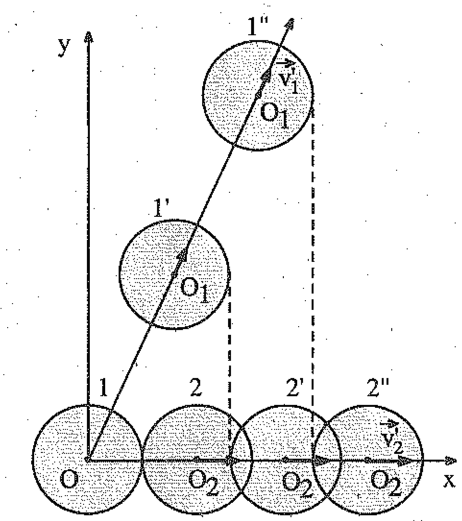
Áp dụng định luật BTĐL theo trục x :

$$mv\frac{\sqrt{3}}{2} = mv'_{1x} + 2mv'_{2x}$$

$$v'_{1x} + 2v'_{2x} = \frac{v\sqrt{3}}{2} \qquad (1)$$

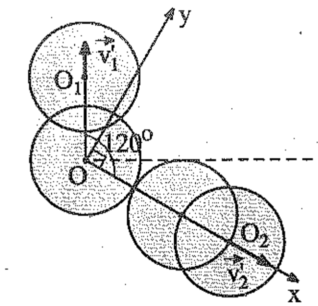
Áp dụng định luật BTCN :

$$\frac{1}{2}mv^2.\frac{3}{4} = \frac{1}{2}.mv'^2_{1x} + \frac{1}{2}.2mv'^2_{2x}$$



Hình 1.58

$$v_{1x}'^2 + v_{2x}'^2 = \frac{3v^2}{4} \quad (2)$$



Hình 1.59

Suy ra : $\begin{cases} v_{2x}' = \dfrac{\sqrt{3}}{3}v; \quad v_{2y}' = 0 \\ v_{1x}' = -\dfrac{v\sqrt{3}}{6}; \; v_{1y}' = v_{1y} = \dfrac{1}{2}v \end{cases}$

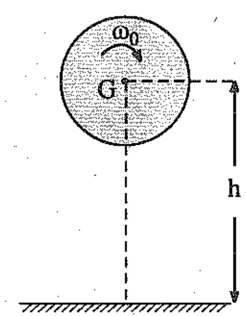
Đĩa 2 chuyển động tịnh tiến theo trục x. Đĩa 1 chuyển động tịnh tiến theo hướng làm với trục x một góc β (Hình 1.59).

Ta có : $\tan\beta = \dfrac{v_{1y}'}{v_{1x}'} = -\sqrt{3} \Rightarrow \beta = 120^o$.

Sau va chạm đàn hồi, góc bay ra xa nhau giữa hai đĩa là 120^o (Hình 1.59).

1.17. Một quả bóng rổ có khối lượng m, bán kính R và momen quán tính I_G đối với khối tâm. Bóng được làm quay tới vận tốc góc ω_0 xung quanh một trục nằm ngang đi qua khối tâm. Khối tâm lúc đầu đứng yên ở độ cao h so với sàn nhà. Thả cho bóng vừa rơi vừa quay và sau đó va chạm với sàn. Bỏ qua sức cản của không khí (Hình 1.60).

a) Gọi $W_{đ_1}$ là động năng của quả bóng ngay trước khi nó va chạm với sàn. Hãy viết $W_{đ_1}$ theo các dữ kiện đã cho.



Hình 1.60

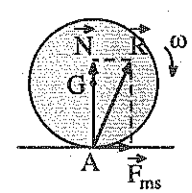
b) Ngay sau lần nảy lên đầu tiên, bóng không quay nữa và động năng của nó bằng $\beta W_{đ_1}$, trong đó β < 1 là một hệ số đã biết. Hỏi thành phần nằm ngang và thẳng đứng của vận tốc của quả bóng ngay sau lần nảy lên đầu tiên ?

Giải

a) Khi bóng rơi, động năng quay của nó không đổi, động năng tịnh tiến của nó tăng do thế năng của nó giảm. Lúc sắp chạm sàn, quả bóng có động năng là :

$$W_{đ_1} = \frac{1}{2}I_G\omega_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}I_G\omega_0^2 + mg(h - R) \quad (1)$$

b) Khi va chạm với sàn, bóng chịu phản lực vuông góc $\vec{N}$ và phản lực tiếp tuyến $\vec{F}_{ms}$ (Hình 1.61). Theo đầu bài, sau khoảng thời gian tiếp xúc Δt rất ngắn, bóng nảy lên nhưng không quay (ω = 0).



Hình 1.61

Chọn chiều dương cho chuyển động quay như Hình 1.61. Ta có nhận xét, momen của các lực tác dụng vào quả bóng đối với điểm tiếp xúc A bằng 0. Do đó ta áp dụng được định luật bảo toàn momen động lượng (BTMMĐL) đối với điểm A.

$$\underset{\text{(ngay sau va chạm)}}{\vec{L}_A'} = \underset{\text{(ngay trước va chạm)}}{\vec{L}_A}$$

$$\vec{L}_A' = \vec{L}_G + \overrightarrow{GA} \wedge m\vec{v}_G$$

Vì $\quad \overrightarrow{GA} \wedge m\vec{v}_G = \vec{0}$, nên : $\vec{L}_A' = \vec{L}_G = I_G\vec{\omega}_0$

hay $\quad Rmv_x = I_G\omega_0$

$$\Rightarrow \quad v_x = \frac{I_G\omega_0}{mR} \quad (2)$$

Theo đầu bài, động năng ngay sau va chạm bằng $\beta W_{đ_1}$:

$$\beta W_{đ_1} = \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right) \quad (3)$$

Thay (1) và (2) vào (3), ta được :

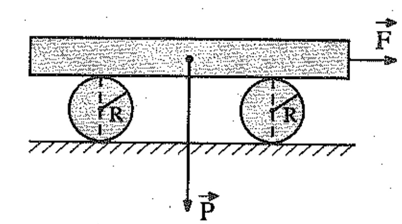
$$v_y = \sqrt{2\beta g(h - R) + \frac{I_G\omega_0^2}{m}\left(\beta - \frac{I_G}{mR^2}\right)}$$

BÀI TẬP VÍ DỤ CHO MỤC E

1.18. Người ta dùng hai con lăn để dịch chuyển một tấm ván có trọng lượng P (Hình 1.62).

a) Tính momen ma sát lăn cản trở chuyển động của hai con lăn.

b) Phải tác dụng vào tấm ván một lực $\vec{F}$ theo phương ngang bằng bao nhiêu để tấm ván dịch chuyển ?



Hình 1.62

Giải

a) Gọi P_1 là trọng lượng của mỗi con lăn. Gọi l và l' là hệ số ma sát lăn giữa các con lăn với mặt đất và giữa các con lăn với tấm ván. Momen cản trở chuyển động lăn không trượt của các con lăn là :

$$\sum M_{msl} = (P + 2P_1)l + l'P$$

Nếu $2P_1 \ll P$ và nếu $l = l'$ thì ta được : $\sum M_{msl} = 2Pl$.

b) Muốn tấm ván dịch chuyển trên hai con lăn về phía trước thì ta phải có momen của lực $\vec{F}$ đối với điểm tiếp xúc với mặt đất của hai con lăn phải cân bằng với momen ma sát lăn nói trên : $F.2R = 2Pl$.

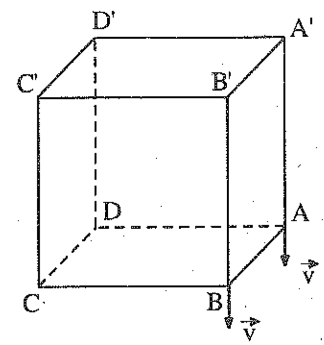
Suy ra : $F = \dfrac{Pl}{R}$.

Ta có nhận xét, dùng con lăn có R lớn thì đẩy dễ dàng hơn.

PHẦN BÀI TẬP TỰ GIẢI

1.1. Hình 1.63 cho biết một khối lập phương đang chuyển động trong không gian. Tại thời điểm xét, ta thấy mặt ABCD nằm ngang, vận tốc của các đỉnh A và B hướng thẳng đứng xuống dưới và có độ lớn bằng v, vận tốc của đỉnh C có độ lớn bằng 2v.

Hỏi cũng tại thời điểm xét vận tốc của các đỉnh còn lại có độ lớn bằng bao nhiêu ?



Hình 1.63

ĐS : Trường hợp 1 : $v_{B'} = v\sqrt{2}$; $v_{C'} = v\sqrt{5}$;

Trường hợp 2 : $v_{B'} = v\sqrt{10}$; $v_{C'} = v\sqrt{13}$.

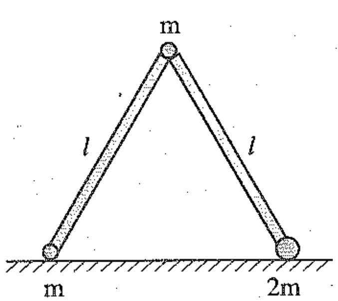
Gợi ý :

Cách 1 : Dùng công thức phân bố vận tốc (công thức 1.1).

Cách 2 : Dùng công thức : $v_{Ax} = v_{Cx}$; $v_{BK} = v_{Cx}$ (công thức 1.2).

Cách 3 : Đổi HQC sao cho trong HQC này A và B đứng yên, đường AB đóng vai trò trục quay tức thời. Sau đó dùng công thức cộng vận tốc.

1.2. Hai thanh cứng, không trọng lượng, dài l, được nối với nhau ở một đầu bằng bản lề không ma sát có khối lượng m. Ở đầu kia của mỗi thanh gắn hai quả cầu khối lượng m và 2m. Hệ thống được đặt thẳng đứng trên sàn nằm ngang không ma sát (Hình 1.64).



Hình 1.64

Do bị đụng nhẹ hai quả cầu trượt ra xa nhau sao cho hai thanh vẫn nằm trong mặt phẳng thẳng đứng. Hãy tìm :

a) Vận tốc của quả cầu 2m tại thời điểm mà góc giữa hai thanh bằng 90^o.

b) Vận tốc của bản lề tại thời điểm bản lề sắp chạm sàn.

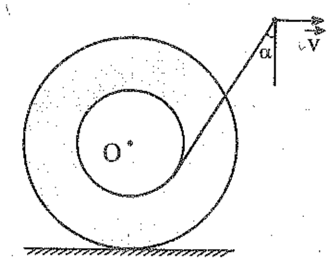
$$ĐS : v_{2m} = \sqrt{\frac{3}{10}gl\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}; \quad v_{bản lề} = \sqrt{2gl}.$$

Gợi ý : Vì thanh cứng nên áp dụng được công thức (1.2) :

$v_{Ax} = v_{Bx}$ theo hai phương của thanh.

1.3. Một sợi dây được quấn vào lõi của một cuộn chỉ. Một đầu dây được vắt qua một cái đinh cố định. Người ta kéo dây với tốc độ v không đổi (Hình 1.65). Hỏi tâm O của lõi chỉ sẽ chuyển động với vận tốc bằng bao nhiêu tại thời điểm khi dây hợp với phương thẳng đứng một góc α ?

Cho biết cuộn chỉ có bán kính ngoài R, bán kính lớp dây quấn r. Dây không trượt trên cuộn chỉ, còn cuộn chỉ lăn không trượt trên mặt phẳng nằm ngang.



Hình 1.65

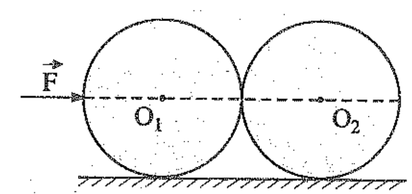
$$ĐS : v_0 = \frac{vR}{R\sin\alpha - r}.$$

Gợi ý :

Cách 1 : Coi chuyển động của cuộn chỉ vừa tịnh tiến vừa quay.

Cách 2 : Coi chuyển động của cuộn chỉ là quay thuần tuý quanh tâm quay tức thời.

1.4. Hai xilanh đặc giống nhau, khối lượng m, được đặt tiếp xúc với nhau trên một mặt phẳng nằm ngang. Một lực $\vec{F}$ nằm ngang đặt vào một xilanh theo hướng đến trục (Hình 1.66). Hệ số ma sát trượt giữa hai xilanh và hệ số ma sát nghỉ giữa hai xilanh với mặt đường đều bằng μ.



Hình 1.66

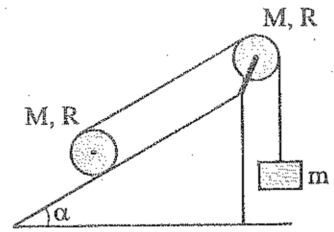
a) Hãy xác định lực F để hai xilanh lăn không trượt trên mặt phẳng với cùng một gia tốc.

b) Nếu tăng lực F dần lên thì xilanh nào trượt trước ?

$$ĐS : \text{a) } F \le \frac{6\mu mg}{1 + 2\mu + 3\mu^2}; \text{ b) Xilanh 1 trượt trước.}$$

Gợi ý : Khi lực ma sát nghỉ cực đại $F_{msn\,(max)} = \mu N$ thì vật bắt đầu trượt.

1.5. Một hệ cơ như Hình 1.67, ròng rọc cố định và con lăn cùng khối lượng M và bán kính R. Sợi dây quấn quanh con lăn rồi vắt qua ròng rọc. Một vật, khối lượng m, được buộc vào đầu tự do của dây. Thả cho con lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng cố định. Tính gia tốc của vật m. Biết rằng dây không trượt trên ròng rọc và trên con lăn.



Hình 1.67

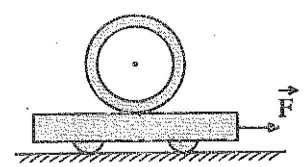
$$ĐS: a = \frac{4g(M\sin\alpha - 2m)}{7M + 8m}$$

Gợi ý :

– So sánh vận tốc của hai vật hay của hai điểm thì phải xét trong cùng một HQC.

– Vì dây không dãn nên vận tốc tại mọi điểm trên dây bằng nhau.

1.6. Trên mặt bàn nằm ngang, nhẵn, có một chiếc xe khối lượng m. Trên sàn xe có đặt đứng một bánh xe có khối lượng M = 3m, phân bố đều trên vành bánh xe. Hệ số ma sát nghỉ giữa bánh xe và sàn xe là μ. Người ta đặt vào xe một lực $\vec{F}$ không đổi theo phương ngang và song song với mặt phẳng của bánh xe (Hình 1.68). Hỏi lực $\vec{F}$ có độ lớn cực đại bằng bao nhiêu để bánh xe có thể lăn không trượt trên sàn xe ?



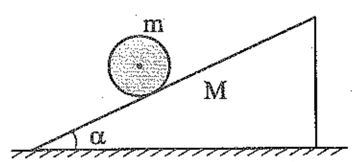
Hình 1.68

$$ĐS: F_{max} = 5\mu mg$$

Gợi ý : – Nên xét chuyển động của bánh xe trong HQC gắn với xe.

– Nên chọn chiều dương phù hợp với chuyển động của bánh xe trong HQC mà ta chọn.

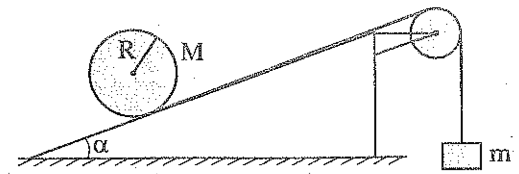
1.7. Trên mặt bàn nằm ngang hoàn toàn nhẵn có đặt một chiếc nêm, khối lượng M, mặt nêm nghiêng một góc α so với mặt bàn. Trên mặt nêm có đặt một quả cầu đồng chất, đặc, khối lượng m. Khi được thả, quả cầu lăn không trượt trên nêm (Hình 1.69). Hãy xác định gia tốc của nêm.



Hình 1.69

$$ĐS: a_{nêm} = \frac{5mg\sin\alpha\cos\alpha}{7(M + m) - 5m\cos^2\alpha}$$

1.8. Một xilanh đặc, bán kính R, khối lượng M, được đặt trên một mặt phẳng nghiêng có góc nghiêng α so với phương ngang. Một sợi dây vắt qua một ròng rọc lí tưởng, một đầu được quấn vào xilanh, còn đầu kia treo một vật, khối lượng m (Hình 1.70).



Hình 1.70

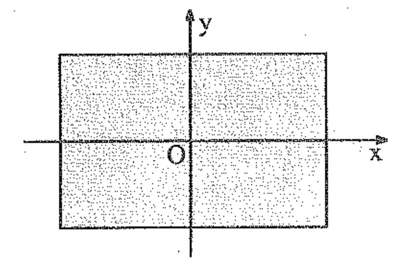
Hỏi hệ số ma sát trượt giữa xilanh và mặt phẳng nghiêng phải có giá trị bằng bao nhiêu để xilanh lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng khi hệ vật được thả tự do ?

$$ĐS: \mu \geq \left|\frac{m}{M\cos\alpha} - \frac{M\tan\alpha}{M + 2m}\right|$$

Gợi ý : – Xilanh không tiếp xúc trực tiếp với mặt phẳng nghiêng mà qua lớp dây quấn. Muốn cho xilanh lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng thì dây phải đứng yên trong khi xilanh nhả dây để lăn xuống. Còn lực ma sát nghỉ của mặt phẳng nghiêng tác dụng vào dây và cũng là tác dụng vào xilanh.

– Ròng rọc không có khối lượng đáng kể nên lực căng dây ở hai phía của ròng rọc bằng nhau.

1.9. Một tấm mỏng, phẳng, đồng chất, hình chữ nhật, có các cạnh là a và b, có khối lượng là m. Tính momen quán tính của tấm đối với ba trục vuông góc đi qua khối tâm O (Hình 1.71) sau đây :



Hình 1.71

a) Trục x song song với cạnh a.

b) Trục y song song với cạnh b.

c) Trục z vuông góc với tấm.

Gợi ý : Có nhiều cách làm :

Cách 1 : Sử dụng kiến thức đã học : momen quán tính của thanh mỏng, dài l, khối lượng m đối với một trục đi qua khối tâm và vuông góc với thanh : $I = \frac{1}{12}ml^2$.

Sử dụng tính chất cộng được của momen quán tính.

Sử dụng định lí về trục vuông góc.

Cách 2 : Sử dụng tính chất đối xứng, định luật về tỉ xích và định lí về trục song song.

$$ĐS: I_x = \frac{1}{12}mb^2\ ;\ I_y = \frac{1}{12}ma^2\ ;\ I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2).$$

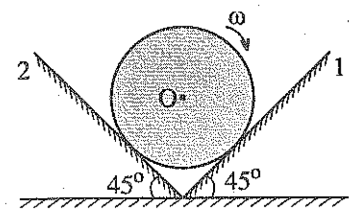
1.10. Có một quả cầu đặc, đồng chất, bán kính R, khối lượng m. Hãy tính :

a) Momen quán tính của quả cầu đối với tâm O.

b) Momen quán tính của quả cầu đối với một trục đi qua tâm.

$$ĐS: \ I_O = \frac{3}{5}mR^2; \ I_z = \frac{2}{5}mR^2.$$

1.11. Một xilanh thành mỏng, khối lượng m, bán kính R, được quay với tốc độ góc ω_0 rồi được đặt nhẹ nhàng vào giữa hai mặt phẳng nghiêng, nhám, có góc nghiêng $\alpha = 45^o$ so với phương ngang (Hình 1.72). Hệ số ma sát trượt giữa xilanh và hai mặt phẳng nghiêng đều bằng μ. Tính số vòng xilanh quay được cho đến khi dừng lại. Biết rằng trục của xilanh đứng yên khi bị hãm.



Hình 1.72

$$ĐS: \ N = \frac{(1+\mu^2)R\omega_0^2}{4\pi\sqrt{2}\mu g}.$$

Gợi ý :

– Khi xilanh đứng yên thì phản lực vuông góc của hai mặt phẳng nghiêng vào hai xilanh mới bằng nhau. Khi xilanh quay, nó có xu hướng ép mạnh vào mặt phẳng nghiêng 1 và giảm sức ép vào mặt phẳng nghiêng 2. Vì thế $N_1 > N_2$.

– Bài này có hai cách làm :

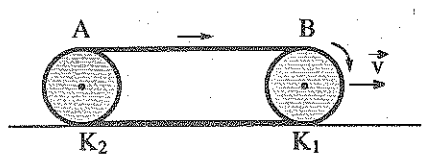
Cách 1 : Dùng phương trình động lực cho chuyển động quay kết hợp với công thức $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\gamma\varphi$.

Cách 2 : Dùng định lí động năng $\sum A = \Delta W_đ$.

1.12. Hãy tìm động năng của một vòng xích sắt của một chiếc xe tăng chuyển động với vận tốc v, nếu khối lượng của vòng xích bằng m (Hình 1.73).

$$ĐS: \ W_đ = mv^2$$

Gợi ý : Khi một mắt xích ở bánh trước chuyển động xuống tiếp xúc với mặt đường và đứng yên thì một mắt xích ở chỗ bánh xe sau tiếp xúc với mặt đường lại rời mặt đường và chuyển động lên.



Hình 1.73

1.13. Một chiếc đĩa phẳng, đồng chất, bán kính R, được làm quay tròn trong không trung quanh trục của nó đến tốc độ ω_0 rồi được đặt nhẹ nhàng trên một mặt phẳng nằm ngang, nhám. Hệ số ma sát trượt giữa đĩa và mặt phẳng là μ. Hỏi đĩa quay trong bao lâu thì ngừng lại ?

$$ĐS: \ t = \frac{3\omega_0 R}{4\mu g}.$$

Gợi ý : Có hai cách giải :

Cách 1 : Dùng phương pháp động lực học : $M_{\vec{F}_{ms}} = I\gamma$.

Cách 2 : Dùng phương pháp năng lượng : $A_{ms} = \Delta W_đ$.

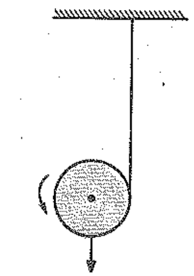
1.14. Một sợi dây có một đầu treo vào giá đỡ, đầu kia được quấn vào ròng rọc. Ròng rọc được thả cho lăn không trượt trên dây (Hình 1.74). Hỏi :

a) Lực căng T của dây.

b) Vận tốc của trục ròng rọc sau khi chuyển động xuống được 1,0 m.

Cho biết : Khối lượng của ròng rọc m = 1,0 kg,

$$I_O = \frac{1}{2}mR^2, \ g = 9{,}8 \ m/s^2.$$

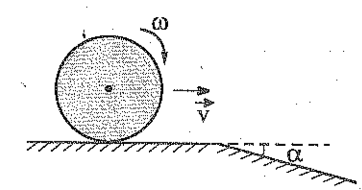

Hình 1.74

$$ĐS: \ T \approx 3{,}3 \ N; \ v = 3{,}6 \ m/s.$$

Gợi ý : Sợi dây treo chỉ dài ra chứ không chuyển động. Điểm đặt của lực căng T tiếp xúc với ròng rọc chỉ thay đổi vị trí trên dây chứ không dịch chuyển. Vì thế, lực căng T không thực hiện công giống như lực ma sát nghỉ tác dụng vào ròng rọc khi nó lăn không trượt trên mặt đường.

Có thể áp dụng định luật bảo toàn cơ năng để tính vận tốc của trục ròng rọc.

1.15. Một xilanh đặc, đồng chất, bán kính R, đang lăn không trượt với vận tốc $\vec{v}$ thì gặp một cái dốc có góc nghiêng α so với phương ngang (Hình 1.75). Hỏi tốc độ v phải có những giá trị nào để khi nó lăn qua đầu dốc thì không bị nảy lên ?

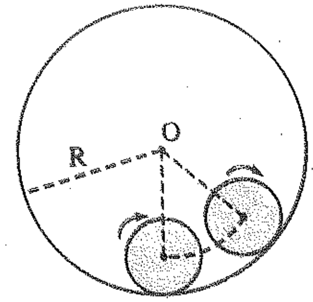


Hình 1.75

$$ĐS: \ v \le \sqrt{\frac{gR}{3}(7\cos\alpha - 4)}.$$

1.16. Một quả cầu, bán kính r nằm trong một vòng tròn thẳng đứng, bán kính R (Hình 1.76). Xét hai trường hợp, trường hợp quả cầu lăn không trượt và trường hợp quả cầu trượt không ma sát, không lăn.

a) Trong mỗi trường hợp, tìm vận tốc tối thiểu v_1 mà quả cầu phải có ở đáy vòng tròn để nó không rơi tại đỉnh của vòng.



Hình 1.76

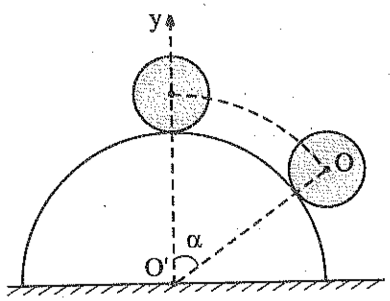
b) Đối với vận tốc nhỏ hơn v_1 10% và trong trường hợp quả cầu trượt không ma sát thì quả cầu sẽ bắt đầu rơi xuống từ vị trí nào ?

ĐS : a) Trường hợp 1 : $v_1 = \sqrt{\frac{27}{7}(R-r)g}$;

Trường hợp 2 : $v_1 = \sqrt{5(R-r)g}$.

b) $\alpha = 133{,}1^\circ$.

1.17. Một quả cầu bán kính a, khối lượng m, đứng yên trên đỉnh của một bán cầu, cố định, nhám, bán kính b (b > a). Do bị đụng nhẹ, quả cầu lăn không trượt xuống (Hình 1.77). Hỏi :



Hình 1.77

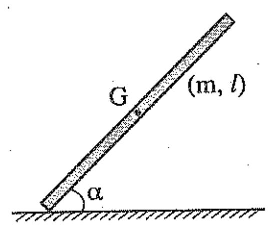
a) Quả cầu rời khỏi bán cầu ở vị trí nào ?

b) Khi rời khỏi bán cầu, nó quay quanh tâm của nó được một góc bằng bao nhiêu ? Áp dụng vào trường hợp b = 3a.

ĐS : a) $\alpha \approx 54^\circ$; b) $\varphi = 216^\circ$.

Gợi ý : Vị trí của quả cầu được xác định bằng toạ độ góc α hợp bởi vectơ $\overrightarrow{O'O}$ với trục O'y (Hình 1.77).

1.18. Một chiếc thước đồng chất, dài l, được đặt thẳng đứng trên một mặt phẳng nằm ngang không ma sát. Do bị đụng nhẹ, thước đổ xuống trong mặt phẳng thẳng đứng, đồng thời đầu dưới trượt trên mặt phẳng nằm ngang. Hãy tìm :



Hình 1.78

a) Vận tốc của khối tâm tại thời điểm nó làm với phương ngang một góc α (Hình 1.78).

b) Vận tốc của khối tâm vào lúc đầu trên của thước sắp chạm mặt phẳng ngang.

$$ĐS: \text{a) } v_G = \sqrt{\frac{3gl(1-\sin\alpha)\cos^2\alpha}{1+3\cos^2\alpha}}\ ;\ \text{b) } v_G = \sqrt{\frac{3gl}{4}}.$$

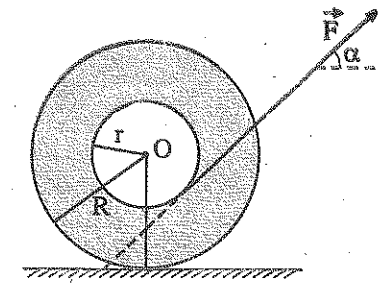
Gợi ý : Bài này có nhiều cách giải :

Cách 1 : Dùng công thức phân bố vận tốc kết hợp với định luật BTCN.

Cách 2 : Dùng tâm quay tức thời kết hợp với định luật BTCN.

Cách 3 : Dùng phương chuẩn làm gốc để xác định góc quay kết hợp với định luật BTCN.

1.19. Một cuộn chỉ có khối lượng m, nằm trên một mặt phẳng nằm ngang và nhám. Momen quán tính của nó đối với trục riêng của cuộn chỉ là $I = \beta mR^2$, trong đó β là một hệ số tỉ lệ, R là bán kính ngoài của cuộn chỉ. Bán kính trong của lớp dây quấn trên lõi là r. Kéo dây bằng một lực $\vec{F}$ không đổi, tạo với phương ngang một góc α (Hình 1.79). Cho biết cuộn chỉ lăn không trượt trên mặt phẳng nằm ngang và dây không trượt trên lõi. Hãy tính :



Hình 1.79

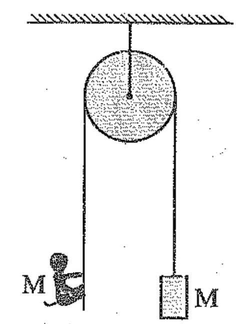
a) Gia tốc chuyển động của cuộn chỉ.

b) Công của lực $\vec{F}$ sau t giây kể từ lúc bắt đầu chuyển động.

$$ĐS: \text{a) } a = \frac{F(R\cos\alpha - r)}{mR(1+\beta)}\ ;\ \text{b) } A = \frac{F^2t^2(R\cos\alpha - r)^2}{2mR^2(1+\beta)}$$

Gợi ý : Công của lực $\vec{F}$ không chỉ làm cho vật chuyển động tịnh tiến một đoạn đường s mà còn làm cho vật quay quanh trục một góc φ.

1.20. Một sợi dây vắt qua một ròng rọc cố định, một đầu dây buộc vào một vật khối lượng M, đầu kia có một con khỉ, khối lượng cũng bằng M, bám vào. Ròng rọc có bán kính R, khối lượng $m = \frac{M}{4}$ và được phân bố đều ở vành ngoài. Con khỉ bắt đầu leo lên dây với vận tốc u so với dây. Hãy tìm vận tốc của vật (Hình 1.80). Biết dây không trượt trên ròng rọc.



Hình 1.80

ĐS : $v = \frac{4}{9}u$.

Gợi ý :

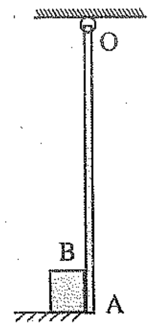
– Hãy xác định các ngoại lực tác dụng vào hệ gồm "vật M, con khỉ, sợi dây và ròng rọc", và tính tổng momen của các ngoại lực này đối với trục O của ròng rọc.

– Các định luật bảo toàn chỉ áp dụng được cho HQC quán tính.

1.21. Một thanh đồng chất OA, dài l, khối lượng M, quay không ma sát xung quanh đầu O cố định của nó. Lúc đầu thanh được giữ nằm ngang, sau được thả rơi không vận tốc đầu. Khi thanh tới vị trí thẳng đứng, đầu A của nó đập vuông góc vào một vật B có kích thước nhỏ và có khối lượng m, đặt trên một giá đỡ (Hình 1.81). Hãy xác định vận tốc của hai vật sau va chạm. Xét hai trường hợp :

a) Va chạm là hoàn toàn mềm.

b) Va chạm là hoàn toàn đàn hồi.



Hình 1.81

ĐS : a) $\omega_2 = \dfrac{M}{M+3m}\sqrt{\dfrac{3g}{l}}$; $v_B = \dfrac{M}{M+3m}\sqrt{3gl}$;

b) $\omega_2 = \dfrac{M-3m}{M+3m}\sqrt{\dfrac{3g}{l}}$; $v_B = \dfrac{2M}{M+3m}\sqrt{3gl}$.

Gợi ý : Va chạm "hoàn toàn mềm" (hay "hoàn toàn đàn hồi") chỉ là cách nói nhấn mạnh của va chạm mềm (hay va chạm đàn hồi).

1.22. Một đứa trẻ đánh đu không cần sự giúp đỡ của ngoại lực. Nó tăng cường các dao động bằng cách ngồi xuống và đứng lên một cách tuần hoàn. Ta coi chuyển động của nó giống như chuyển động của một thanh cứng OA dao động trong một mặt phẳng thẳng đứng xung quanh điểm O. Vị trí của khối tâm G và momen quán tính I đối với trục quay O thay đổi theo vị trí của đứa trẻ. Đứa trẻ thay đổi vị trí trong một khoảng thời gian ngắn đến mức sự dịch chuyển tương ứng của thanh có thể được bỏ qua.

a) Trong mỗi nửa chu kì, đứa trẻ đứng lên và ngồi xuống một lần. Hỏi nó nên thay đổi vị trí vào những lúc nào ?

b) Chứng minh rằng có sự thay đổi đột ngột của vận tốc góc. Tính sự biến thiên động năng của hệ và chỉ rõ nguồn gốc của sự biến thiên này.

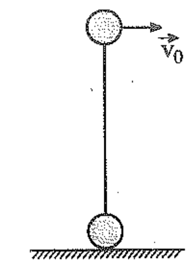
c) Lúc đầu, chiếc đu được kéo lệch khỏi phương thẳng đứng một góc θ_0 nhỏ và tốc độ góc bằng 0. Hỏi sau bao nhiêu lần đi qua vị trí cân bằng thì chiếc đu đạt tới phương ngang ? Hãy biểu thị kết quả theo θ_0 và theo tỉ số $k = \dfrac{I_2 OG_2}{I_1 OG_1}$ (1 chỉ đứa trẻ ngồi xuống, 2 chỉ đứa trẻ đứng lên).

ĐS : $n = \dfrac{ln\left(\dfrac{\theta_0^2}{2}\right)}{lnk}$.

Gợi ý : Áp dụng định luật bảo toàn momen động lượng.

1.23. Một quả tạ đôi được đặt thẳng đứng trên mặt sàn nằm ngang. Tạ đôi gồm hai quả cầu giống nhau gắn vào một thanh có khối lượng không đáng kể, dài l. Tại một thời điểm nào đó, quả cầu trên nhận được một vận tốc đầu $\vec{v}_0$ theo phương ngang (Hình 1.82).

Hỏi v_0 có giá trị tối thiểu bằng bao nhiêu để quả cầu dưới nảy lên ngay khỏi sàn và tạ đôi sẽ chạm vào sàn ở tư thế nằm ngang ?



Hình 1.82

ĐS : $v_0 = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{gl}$

1.24. Một quả bi-a, khối lượng m, đang nằm trên một mặt bàn bi-a có hệ số ma sát trượt μ_t. Tại t = 0, quả bi-a trượt với vận tốc v_0 và không quay. Tuy nhiên ngay sau đó, tức t > 0, lực ma sát trượt với mặt bàn bi-a làm cho nó quay và cuối cùng thì nó lăn không trượt.

a) Viết các phương trình động lực học cho hai chuyển động thành phần, tịnh tiến và quay. Giải hệ phương trình để tìm sự phụ thuộc vào thời gian của vận tốc dài và vận tốc góc của quả bi-a.

b) Khi quả bi-a bắt đầu lăn không trượt thì vận tốc dài của nó bằng bao nhiêu ?

c) Tính momen động lượng ban đầu L_1 (t = 0) của quả bi-a đối với một trục nằm trên mặt bàn bi-a và vuông góc với vận tốc của quả bi-a.

d) Tính momen động lượng cuối L_2 của quả bi-a (khi nó lăn không trượt) đối với trục này.

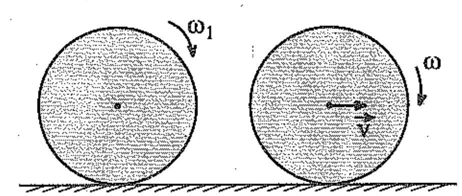
e) Tính công của lực ma sát trượt tác dụng lên quả bi-a.

ĐS : a) $v = v_0 - \mu_t gt$; $\omega = \dfrac{5}{2}\dfrac{\mu_t gt}{R}$;

b) $v = \dfrac{5v_0}{7}$; c) $L_1 = Rmv_0$;

d) $L_2 = Rmv_0$; e) $A_{ms} = -\dfrac{1}{7}mv_0^2$.

1.25. Một xilanh đặc, đồng chất, khối lượng m, bán kính R và có vận tốc góc ω_1. Người ta đặt nó trên mặt đất. Nó vừa trượt về bên phải, vừa tăng tốc độ (Hình 1.83). Sau một thời gian ngắn, nó lăn không trượt với tốc độ góc không đổi ω_2.



Hình 1.83

a) Hãy giải thích tại sao gia tốc a và gia tốc γ lại không đổi trong giai đoạn trượt.

b) Chứng minh rằng $\omega_2 = \frac{1}{3}\omega_1$.

c) Bao nhiêu phần cơ năng ban đầu chuyển thành nhiệt lượng ?

d) Quãng đường mà xilanh trượt có phụ thuộc vào hệ số ma sát trượt hay không ?

ĐS : a) $a = \mu g$ và $\gamma = -\frac{2\mu g}{R}$; c) $Q = \frac{2}{3}W_{d_1}$; d) Có phụ thuộc vào μ_t.

1.26. Một quả cầu đặc, đồng chất, bán kính r, đang quay trên không xung quanh một trục nằm ngang đi qua tâm với vận tốc góc ω_0 thì rơi nhẹ xuống một mặt phẳng nằm ngang, nhám, có hệ số ma sát μ.

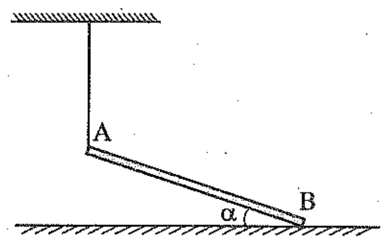
a) Tại sao quả cầu lúc đầu trượt về phía trước rồi mới lăn không trượt ?

b) Tính vận tốc của tâm quả cầu khi nó lăn không trượt ? Vì sao gọi là vận tốc cuối, biết rằng ma sát lăn rất nhỏ, có thể bỏ qua ?

c) Tính quãng đường mà quả cầu đi được cũng như số vòng mà nó quay được quanh tâm của nó cho đến khi có vận tốc cuối ?

d) Lặp lại câu hỏi b) nhưng bây giờ μ lớn đến mức không có sự trượt ban đầu.

1.27. Cho một thanh, khối lượng m, dài $2l$, đặt nghiêng một góc α với sàn. Một đầu thanh treo vào dây, còn đầu kia chạm sàn (Hình 1.84). Hãy xác định phản lực của sàn tác dụng vào thanh ngay sau khi đốt dây. Bỏ qua ma sát với sàn.

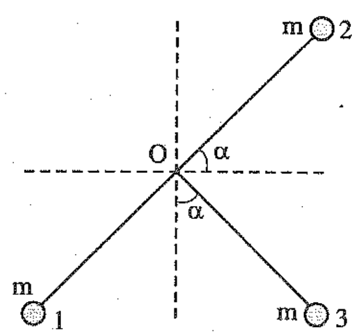


Hình 1.84

$$ĐS : N = \frac{mg}{1 + 3\cos^2\alpha}.$$

Gợi ý : Khi mới đốt dây thì $v_G = 0$, $\omega = 0$ và $a_n = \frac{v^2}{R} = 0$. Chỉ có $a_t = R\gamma \neq 0$.

1.28. Một con lắc hình chữ T được cấu tạo bởi ba thanh cứng dài l như Hình 1.85. Ở đầu tự do của mỗi thanh có gắn một quả cầu, khối lượng m. Con lắc có thể quay trong mặt phẳng thẳng đứng xung quanh một trục nằm ngang đi qua điểm nối các thanh và vuông góc với các thanh. Cho con lắc lệch khỏi vị trí cân bằng một góc $\alpha < 90^o$ rồi thả ra không vận tốc đầu.



Hình 1.85

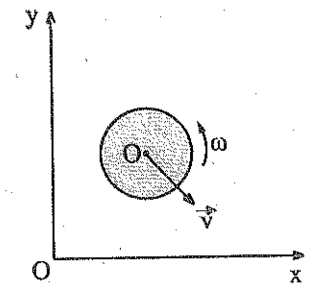
Hãy tìm lực mà thanh tác dụng lên quả cầu 3 ngay sau khi thả.

$$ĐS : F = \frac{mg}{3}\sqrt{4 + 5\cos^2\alpha}.$$

1.29. Một quả bóng siêu đàn hồi, đặc, có khối lượng m và bán kính R. Bóng bay tới va chạm vào mặt sàn nằm ngang với vận tốc $\vec{v}$ và với vận tốc góc $\vec{\omega}$ (Hình 1.86). Chỗ mà quả bóng tiếp xúc với sàn có ma sát giữ cho điểm tiếp xúc không bị trượt. Do có ma sát nên va chạm là không đàn hồi. Tuy nhiên, ta có thể bỏ qua độ biến thiên của độ lớn của thành phần pháp tuyến v_y của vectơ $\vec{v}$ và độ biến thiên động năng của quả bóng.

a) Hãy xác định thành phần tiếp tuyến v'_x của vận tốc $\vec{v}$ và vận tốc góc ω' của quả bóng sau va chạm theo v_x và ω trước va chạm. Cho $I_O = \frac{2}{5}mR^2$.

b) Tính vận tốc của điểm tiếp xúc K của quả bóng với sàn ngay trước và sau va chạm.



Hình 1.86

Chú ý : Quả bóng siêu đàn hồi là quả bóng cao su có bề mặt rất nhám và va chạm với mặt sàn có những đặc điểm sau :

– Theo phương pháp tuyến (phương hướng tâm) va chạm là hoàn toàn đàn hồi.

– Theo phương tiếp tuyến, nó chịu một lực ma sát lớn nên hoàn toàn không trượt ở điểm tiếp xúc. Các phần tử cao su ở chỗ tiếp xúc bị nén đàn hồi theo phương tiếp tuyến rồi lại dãn ra.

$$ĐS : a)\ \vec{v}'_x = \frac{1}{7}(3v_x - 4R\omega)\ ;\ \omega' = -\frac{1}{7}\left(3\omega + 10\frac{v_x}{R}\right)\ ;$$

$$b)\ \vec{v}'_K = -\vec{v}_K.$$

1.30. Một ô tô khối lượng m và có hai bánh sau là các bánh xe phát động. Khối tâm của ô tô ở cách mặt đường một độ cao h và nằm giữa khoảng cách hai trục bánh xe trước và sau, hai trục này cách nhau $2l$. Bánh xe có bán kính R. Hệ số ma sát nghỉ giữa bánh xe và mặt đường là μ.

Ô tô phải chạy trên một đoạn đường thẳng, dốc về phía trên với góc α so với phương ngang.

Hãy tìm các giá trị mà góc α và hệ số ma sát μ phải thoả mãn để ô tô có thể vượt qua được đoạn dốc đó.

$$ĐS : \alpha_{max} = \arctan\frac{\mu l}{2l - \mu h}\ ;\ \mu \geq \frac{l}{h}.$$

Chủ đề 2

DAO ĐỘNG CƠ
DAO ĐỘNG CỦA VẬT RẮN

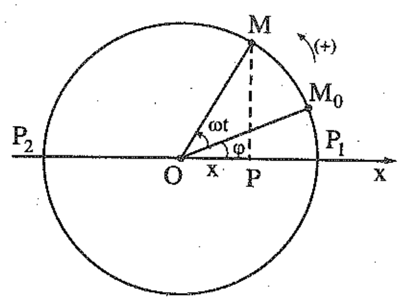
PHẦN LÍ THUYẾT

A - DAO ĐỘNG ĐIỀU HOÀ

I – KHẢO SÁT VỀ MẶT ĐỘNG HỌC

1. Mô hình toán học

Chuyển động của hình chiếu P của một điểm M chuyển động tròn đều lên một đường kính được xem là mô hình toán học của dao động điều hoà (Hình 2.1).



Hình 2.1

Khi lập phương trình của dao động điều hoà ta quy ước như sau :

a) Điểm M chuyển động theo chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ).

b) Trục x trên đó hình chiếu P dao động được chọn làm gốc để xác định toạ độ góc của điểm M và pha ban đầu của điểm P.

2. Phương trình của dao động điều hoà

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad (2.1)$$

hay
$$x'' + \omega^2 x = 0 \qquad (2.2)$$

trong đó : A và ω là những hằng số dương (vì chúng tương ứng với bán kính và tốc độ góc của chuyển động tròn đều của điểm M).

φ là hằng số, có giá trị nằm trong khoảng từ $-\pi$ đến $+\pi$ (rad) vì nó tương ứng với toạ độ góc ban đầu của điểm M.

Phương trình (2.1) là nghiệm của phương trình vi phân (2.2).

II – KHẢO SÁT DAO ĐỘNG CỦA MỘT HỆ BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỘNG LỰC HỌC

1. Chọn đối tượng khảo sát là *vật có khối lượng m*. Xác định các lực tác dụng lên vật.

2. Xác định vị trí cân bằng của vật. Chọn gốc toạ độ của trục x tại VTCB.

3. Tìm hợp lực $\vec{F}$ của các lực tác dụng vào vật tại li độ x.

Nếu hợp lực có dạng đại số là F = –kx (2.3) trong đó k là hệ số tỉ lệ, thì vật m dao động điều hoà.

4. Để tìm tần số góc ω ta áp dụng định luật II Niu-tơn : mx" = –kx.

$$\Rightarrow x'' + \frac{k}{m}x = 0 \;\Rightarrow\; x'' + \omega^2 x = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

III – KHẢO SÁT DAO ĐỘNG CỦA MỘT HỆ BẰNG PHƯƠNG PHÁP NĂNG LƯỢNG

1. Chọn đối tượng khảo sát là *hệ dao động*. Xác định các lực tác dụng lên vật m của hệ.

2. Chọn vị trí cân bằng làm mốc để tính thế năng của hệ. Thế năng của hệ bằng *tổng các thế năng* tương ứng với những lực thế tác dụng vào vật và thực hiện công lên vật. Nói cách khác thế năng của hệ tương ứng với hợp lực của các lực thế tác dụng lên vật.

3. Tìm thế năng của hệ ở li độ x

Ví dụ, để tìm thế năng của hệ tương ứng với hợp lực F = –kx, ta sử dụng mối liên hệ sau đây :

$$dA = Fdx = -dW_t$$

$$W_t = \int_0^x kx\,dx = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (2.3)$$

Như vậy, nếu biểu thức thế năng của hệ có dạng $W_t = \frac{1}{2}kx^2$ trong đó k là một hệ số tỉ lệ thì hệ dao động điều hoà. Khi ấy phương trình cơ năng của hệ là :

$$W = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{const} \qquad (2.4)$$

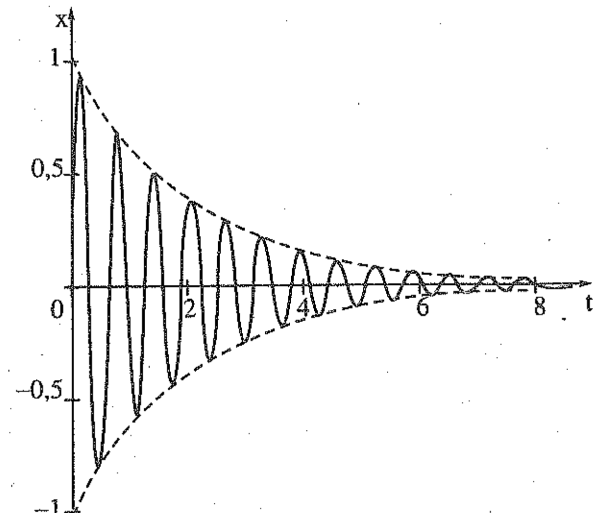
4. Để tìm tần số góc ω, ta lấy đạo hàm bậc hai theo thời gian của phương trình (2.4). Ta lại được phương trình vi phân $x'' + \omega^2 x = 0$ và tìm được $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

B – DAO ĐỘNG TẮT DẦN

I – ĐỊNH NGHĨA

Dao động có biên độ giảm dần theo thời gian gọi là dao động tắt dần.

Hình 2.2 biểu diễn một dao động tắt dần.



Hình 2.2

II – NGUYÊN NHÂN

Nguyên nhân chung là do lực cản của môi trường và ma sát sinh ra ở trong hệ. Năng lượng tiêu hao dưới dạng nhiệt tương ứng với sự giảm dần biên độ dao động.

III – KIỂU DAO ĐỘNG TẮT DẦN DO LỰC MA SÁT KHÔ

1. Phương trình dao động

$$mx'' = -kx \pm F_{ms} \quad (2.5)$$

$F = -kx$: lực kéo về

$F_{ms} = \mu mg$: $v = x' < 0$: mang dấu (+)

$v = x' > 0$: mang dấu (–)

2. Điều kiện để vật dừng lại hẳn

a) Vận tốc bằng không : $v = x' = 0$.

b) Độ lớn của lực kéo về nhỏ hơn lực ma sát nghỉ cực đại : $k|x| \le \mu mg$.

hay $|x| \le a$ với $a = \frac{\mu mg}{k}$ (miền nghỉ $-a \le x \le a$).

3. Chu kì dao động

Chu kì dao động tắt dần do ma sát khô bằng chu kì dao động riêng không ma sát.

4. Sự giảm biên độ

Kí hiệu A_0 là biên độ ban đầu của vật tính từ VTCB.

Li độ cực đại dương sẽ chiếm các giá trị lần lượt là :

$$A_0,\ A_0 - 4a,\ A_0 - 8a, \ldots\ (A_0 - n)4a \text{ (n là số nguyên)}$$

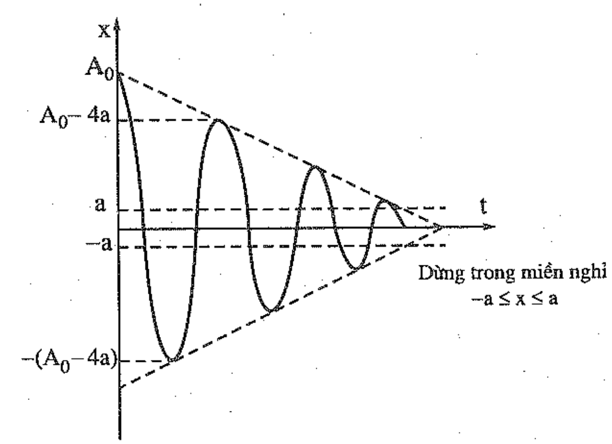
Li độ cực đại âm có giá trị tuyệt đối lần lượt là :

$$A_0 - 2a,\ A_0 - 6a, \ldots, \left[A_0 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\right]4a \text{ (n là số nguyên)}$$

Tóm lại, các biên độ giảm dần theo một cấp số cộng với công sai là :

$$d = 4a = \frac{4\mu mg}{k}$$

5. Đồ thị



Hình 2.3

IV – KIỂU DAO ĐỘNG TẮT DẦN DO CHỊU LỰC MA SÁT NHỚT

1. Trong nhiều trường hợp, lực làm tắt dần có thể xem là tỉ lệ thuận với vận tốc :

$$F = -bv$$

Đối với chất điểm, đầu tự do của con lắc lò xo chịu lực kéo về :

$$F_{lx} = -kx$$

2. Phương trình dao động

$$mx'' = -kx - bx'$$

hay
$$mx'' + bx' + kx = 0 \qquad (2.6)$$

Phương trình (2.6) là phương trình vi phân bậc hai theo thời gian của dao động tắt dần.

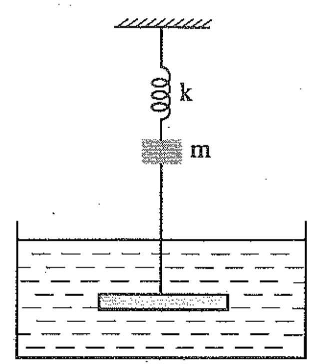
3. Giải phương trình

Giải phương trình bằng cách đoán nghiệm.

Khi b có giá trị nhỏ thì thí nghiệm (Hình 2.4) cho thấy dạng của x như hình 2.2.

Nó giống như một hàm côsin (hay sin) nhân với một thừa số $e^{-\lambda t}$.

Để xác định pha ban đầu φ người ta giả sử $x = A$ tại thời điểm $t = 0 \Rightarrow \varphi = 0$.



Hình 2.4

Khi đó nghiệm của phương trình là :

$$x = Ae^{-\lambda t}\cos\omega t \qquad (2.7)$$

Lấy đạo hàm theo thời gian :

$$x' = -\lambda Ae^{-\lambda t}\cos\omega t - \omega Ae^{-\lambda t}\sin\omega t$$

$$x'' = \lambda^2 Ae^{-\lambda t}\cos\omega t + \lambda\omega Ae^{-\lambda t}\sin\omega t + \lambda\omega Ae^{-\lambda t}\sin\omega t - \omega^2 Ae^{-\lambda t}\cos\omega t$$

Thay vào (2.6), nếu $x = Ae^{-\lambda t}\cos\omega t$ đúng là nghiệm của (2.6) thì nó phải đúng với mọi t.

Chọn $\omega t = 0$ và $\omega t = \dfrac{\pi}{2}$ ta được : $\begin{cases} m\lambda^2 - m\omega^2 - b\lambda + k = 0 \\ 2\lambda\omega m - b\omega = 0 \end{cases}$

Suy ra : $\lambda = \dfrac{b}{2m}$; $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m} - \dfrac{b^2}{4m^2}}$.

Vậy $x = Ae^{-\lambda t}\cos\omega t$ đúng là nghiệm của (2.6).

Ta viết lại (2.6) như sau :

$$x'' + 2\lambda x' + \omega_0^2 x = 0 \qquad (2.8)$$

Vậy khi hệ số tắt dần b có giá trị nhỏ thì li độ của vật là :

$$x = Ae^{-\frac{bt}{2m}}\cos\omega t \qquad (2.9)$$

với
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \qquad (2.10)$$

4. Chu kì

Gọi $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ là tần số góc khi không có tắt dần.

Ta có nhận xét : $\omega < \omega_0 \Rightarrow T > T_0$.

Như vậy *dao động tắt dần do ma sát nhớt có chu kì lớn hơn* (hay tần số nhỏ hơn) *so với dao động điều hoà riêng.*

5. Sự giảm dần của li độ cực đại

Trong trường hợp sự tắt dần không quá quan trọng, $b^2 < 4mk$ (để (2.10) có nghĩa), ta có một chế độ tắt dần theo phương trình :

$$x = Ae^{-\frac{bt}{2m}}\cos\omega t$$

Ở đây, sự giảm dần của biên độ tuân theo quy luật của hàm mũ. Những li độ cực đại dương có giá trị lần lượt là :

$$A_0,\ A_0e^{-\delta},\ A_0e^{-2\delta},\ A_0e^{-3\delta},\ A_0e^{-4\delta},...$$

trong đó $\delta = \dfrac{bT}{2m}$ và T là "giả chu kì" của dao động. Như vậy các biên độ giảm dần theo cấp số nhân với công bội $e^{-\delta}$.

6. Phương diện năng lượng

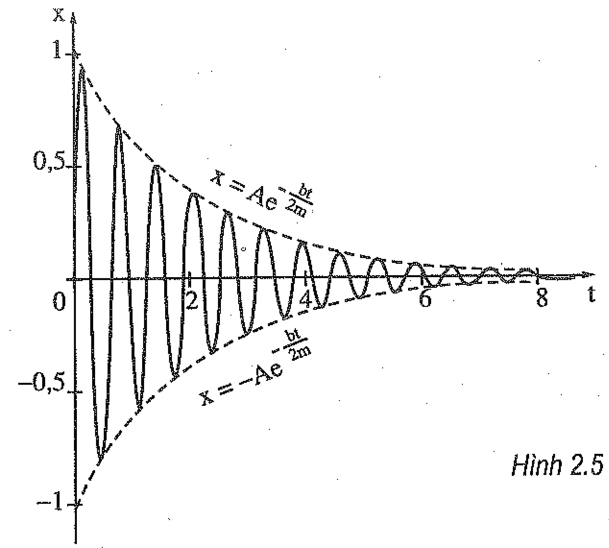
Nhân phương trình (2.6) với vận tốc $v = x'$ ta được : $mx'x'' + kxx' = -bx'^2 = F_c v$

$$d\left(\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}\right) = \mathscr{P}dt \quad (\mathscr{P} \text{ là công suất tức thời của lực ma sát})$$

$$dW = \mathscr{P}dt \quad (W \text{ là cơ năng của vật})$$

Như vậy về phương diện năng lượng, độ giảm cơ năng của vật bằng công do lực ma sát sinh ra.

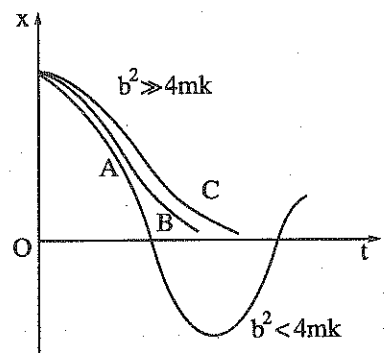
7. Đồ thị (Hình 2.5)



Hình 2.5

V – CHẾ ĐỘ KHÔNG TUẦN HOÀN (HAY KHÔNG DAO ĐỘNG)

Hệ số tắt dần b càng lớn thì sự tắt dần xảy ra càng nhanh. Tuy nhiên, công thức (2.10) sẽ không thoả mãn khi $b^2 > 4mk$. Khi ấy ω là số ảo, hệ không chỉ không dao động mà nó về vị trí cân bằng ngay lập tức. Đồ thị hình 2.6 miêu tả ba trường hợp thường gặp :



Hình 2.6

+ *Đường cong C* biểu diễn tình huống ở đó sự tắt dần quan trọng đến nỗi hệ thống cần nhiều thời gian để trở về VTCB. Người ta gọi đó là *sự tắt dần trên tới hạn hay là chế độ không tuần hoàn.*

+ *Đường cong A* tương ứng với tình huống chi phối bởi (2.10). Hệ thực hiện một số dao động tắt dần trước khi đứng yên.

+ *Đường cong B* tương ứng miêu tả trường hợp tắt dần tới hạn, nghĩa là $b^2 = 4mk$ và hệ về vị trí cân bằng với thời gian ngắn nhất.

Những hệ thống tắt dần như các thiết bị đóng cửa tự động hay giảm xóc ô tô hoạt động với tình huống B. Tuy nhiên, dần dà các thiết bị này bị hao mòn. Khi ấy chúng sinh ra lực tắt dần yếu, thành thử các cánh cửa kêu cót két và các xe ô tô nhảy chồm lên sau khi va vào một chỗ gồ ghề. Các chiếc kim của đồng hồ đo điện như vôn kế, ampe kế dao động tắt dần tới hạn hay dưới một chút. Nếu b quá nhỏ, chúng dao động khá mạnh trước khi chỉ giá trị đúng. Ngược lại, chúng chịu một sự tắt dần quan trọng thì lại cần rất nhiều thời gian để chỉ đúng. Điều đó có hại cho việc ghi biến thiên nhanh.

C – DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC – CỘNG HƯỞNG

I – DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC

1. Hiện tượng

Nếu người ta tác dụng vào quả cầu con lắc lò xo một ngoại lực biến thiên tuần hoàn có tần số góc khác $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (ω_0 được gọi là tần số góc riêng của con lắc) thì quả cầu sẽ dao động với tần số góc ω của ngoại lực.

2. Phương trình dao động (*có tính đến sự tắt dần*)

$$mx'' = -kx - bx' + F_0\cos\omega t$$

hay
$$mx'' + kx + bx' = F_0\cos\omega t \qquad (2.11)$$

Ta có thể chứng minh nghiệm của phương trình (2.11) là :

$$x = A\cos(\omega t - \varphi) \qquad (2.12)$$

Cần xác định A và φ ta có : $x' = -\omega A\sin(\omega t - \varphi) = A\omega\cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$

$$x'' = -\omega^2 x$$

Thay vào (2.11) ta có :

$$(k - m\omega^2)A\cos(\omega t - \varphi) + bA\omega\cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = F_0\cos\omega t \qquad (2.13)$$

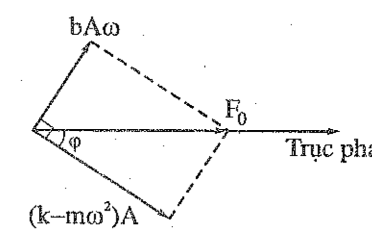
Để tìm A và φ từ (2.13) ta dùng giản đồ Fre-nen.

Từ đó suy ra :

$$F_0^2 = (bA\omega)^2 + (k - m\omega^2)^2A^2$$

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(b\omega)^2 + (k - m\omega^2)^2}} \qquad (2.14)$$

$$\tan\varphi = \frac{b\omega}{(k - m\omega)^2} \qquad (2.15)$$



Hình 2.7

Thay $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ vào (2.14) ta có :

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{\frac{(b\omega)^2}{m^2} + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}} \qquad (2.14b)$$

$$\tan\varphi = \frac{b\omega}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} \qquad (2.15b)$$

Thực ra nghiệm của (2.11) còn một số hạng nữa tương tự như nghiệm của phương trình dao động tắt dần nhưng theo thời gian thì sẽ mất, thành thử (2.12) phù hợp với nhiều trường hợp.

II – HIỆN TƯỢNG CỘNG HƯỞNG

1. Biên độ của dao động cưỡng bức phụ thuộc nhiều vào hiệu $(\omega - \omega_0)$

Thật vậy, từ (2.14b) lấy đạo hàm theo ω và cho triệt tiêu.

Đặt $y = \dfrac{Am}{F_0} = \left[\left(\dfrac{b\omega}{m}\right)^2 + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$.

Đặt $y' = \dfrac{dy}{d\omega} = 2\omega\left[\left(\dfrac{b\omega}{m}\right)^2 + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(\omega_0^2 - \omega^2 - \dfrac{b^2}{2m^2}\right)$

Đặt $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \dfrac{b^2}{2m^2}$.

Ta thấy khi $\omega = \omega_1$ thì $y' = 0$.

$$\Rightarrow A_{max} = \frac{F_0}{m\sqrt{\frac{(b\omega_1)^2}{m^2} + \left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right)^2}} \Rightarrow A_{max} = \frac{F_0}{b\sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}}}$$

Hiện tượng cộng hưởng xảy ra khi tần số ω của dao động cưỡng bức xấp xỉ bằng tần số của dao động riêng ω_0. Tức là khi :

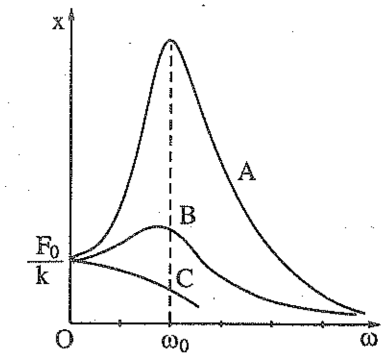
$$\omega = \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}} \approx \omega_0$$

2. Ảnh hưởng của lực cản đối với dao động cưỡng bức

- Khi $\dfrac{b^2}{4m^2} \ll \omega_0^2$ hay $b \ll 2m\omega_0$, tức là khi lực cản nhỏ thì hiện tượng cộng hưởng xảy ra khi $\omega_1 = \omega_0$ hay $f_{cbức} = f_0$. Khi đó $A_{max} = \dfrac{F_0}{b\omega_0}$ rất lớn, ta được hiện tượng *cộng hưởng nhọn.*

- Khi b lớn, $\omega_1 < \omega_0$, ta được hiện tượng *cộng hưởng tù.*

Đồ thị cộng hưởng như hình 2.8.



Hình 2.8

D – DAO ĐỘNG CỦA CON LẮC VẬT LÍ

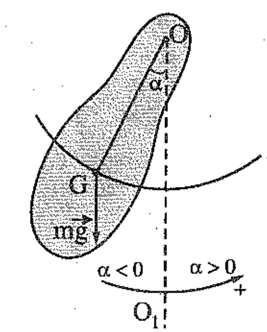
I – ĐỊNH NGHĨA

Con lắc vật lí là một vật rắn dao động quanh một trục cố định không đi qua khối tâm và vuông góc với mặt phẳng trên đó vật dao động.

II – LẬP PHƯƠNG TRÌNH DAO ĐỘNG

1. Lập phương trình dao động bằng phương pháp động lực học

a) Chọn VTCB OO_1 làm gốc để tính li độ góc α, chiều dương từ trái sang phải. Khi con lắc lệch sang trái thì $\alpha < 0$, lệch sang phải thì $\alpha > 0$. Trong cả hai trường hợp thì momen của trọng lực đối với trục quay O đều làm cho vật quay trở về VTCB (Hình 2.9).



Hình 2.9

b) Áp dụng phương trình cơ bản của chuyển động quay, ta viết :

$$M_{\vec{P},O} = I_O\alpha''$$

$$-mgd\sin\alpha = I_O\alpha'' \qquad (2.16)$$

trong đó d là khoảng cách OG.

Khi α nhỏ, $\sin\alpha \approx \alpha$ (rad), phương trình (2.16) trở thành :

$$-mgd\alpha = I_O\alpha''$$

hay
$$\alpha'' + \frac{mgd}{I_O}\alpha = 0$$

Đặt $\omega^2 = \frac{mgd}{I}$, ta được : $\alpha'' + \omega^2\alpha = 0$ (2.17)

Phương trình (2.17) là phương trình vi phân của DĐĐH với tần số góc $\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I_O}}$ hay với chu kì $T = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{mgd}}$.

2. Lập phương trình dao động bằng phương pháp năng lượng

a) Chọn mốc thế năng ở VTCB. Thế năng của vật ở li độ góc α là :

$$W_t = mgd\,(1 - \cos\alpha)$$

b) Động năng của con lắc ở li độ góc α là :

$$W_đ = \frac{1}{2}I_O\omega^2 = \frac{1}{2}I_O(\alpha')^2$$

c) Nếu bỏ qua mọi ma sát thì cơ năng của con lắc được bảo toàn :

$$W = \frac{1}{2}I_O(\alpha')^2 + mgd(1 - \cos\alpha) = \text{const} \qquad (2.18)$$

Nếu góc α nhỏ, phương trình (2.18) trở thành :

$$W = \frac{1}{2}I_O(\alpha')^2 + \frac{1}{2}mgd\alpha^2 = \text{const} \qquad (2.19)$$

Phương trình (2.19) chứng tỏ con lắc DĐĐH. Để tìm ω ta lấy đạo hàm theo thời gian của phương trình (2.19) :

$$\frac{dW}{dt} = I_O\alpha'\alpha'' + mgd\alpha\alpha' = 0$$

$$\alpha'' + \frac{mgd}{I_O}\alpha = 0 \qquad (2.20)$$

Phương trình (2.20) cho ta $\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I_O}}$

Như vậy, khi biên độ góc nhỏ thì dao động của con lắc vật lí là dao động điều hoà.

3. Dao động của vật rắn trong trường hợp tổng quát

Dao động phẳng tổng quát của vật rắn là trường hợp riêng của chuyển động phẳng của vật rắn. Điều đó dẫn đến việc khảo sát hai chuyển động thành phần của nó. Đó là :

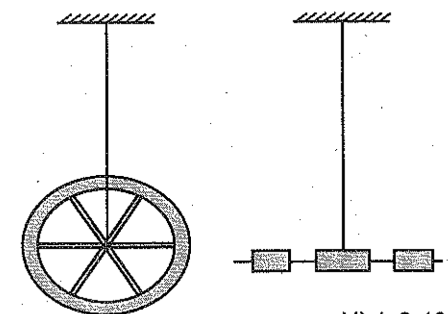
– Khảo sát dao động của khối tâm.

– Khảo sát dao động của vật quanh một trục qua khối tâm.

E – CON LẮC XOẮN DÂY

1. Thế nào là một con lắc xoắn dây ?

Một vật treo vào đầu một sợi dây, đầu kia của dây treo vào một giá đỡ. Nếu ta xoay vật đi một góc θ quanh một trục trùng với dây làm cho dây bị xoắn một góc θ, thì sợi dây sinh ra những lực có momen chống lại sự xoắn, làm cho vật quay về VTCB. Khi ấy ta được một con lắc xoắn dây (Hình 2.10).



Hình 2.10

Thí nghiệm cho thấy *momen xoắn tỉ lệ với góc xoắn θ.*

$$M = -K\theta \qquad (2.21)$$

trong đó hệ số tỉ lệ K gọi là *hằng số xoắn dây.*

2. Lập phương trình dao động

Áp dụng phương trình cơ bản của chuyển động quay ta được :

$$M = I\theta''$$

$$-K\theta = I\theta''$$

$$\theta'' + \frac{K}{I}\theta = 0 \text{ hay } \theta'' + \omega^2\theta = 0 \qquad (2.22)$$

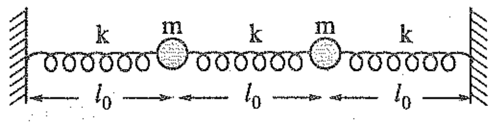
Phương trình (2.22) cho thấy con lắc DĐĐH với tần số góc $\omega = \sqrt{\frac{K}{I}}$ hay với chu kì $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}}$.

G – DAO ĐỘNG CỦA HỆ CÁC CON LẮC LIÊN KẾT

Về mặt lí thuyết ta chỉ giới hạn ở việc khảo sát dao động của hệ hai con lắc liên kết.

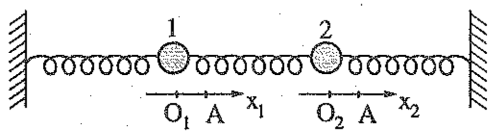
1. Các mode dao động

Ta hãy xét dao động của một hệ gồm hai quả cầu giống nhau, liên kết với nhau và với giá đỡ bằng ba lò xo giống nhau. Ở trạng thái cân bằng, cả ba lò xo đều có chiều dài tự nhiên l_0.



Hình 2.11

a) Giả sử kéo hai quả cầu lệch khỏi VTCB về cùng một phía với cùng một độ lệch rồi thả ra (Hình 1.12). Lò xo ở giữa luôn luôn có chiều dài l_0 nên không tác dụng lực nào lên hai quả cầu. Hai con lắc dao động với cùng tần số $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

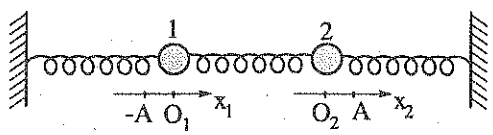


(tại $t = 0$, $x_1 = x_2 = A$)

Hình 2.12

Kiểu các con lắc liên kết dao động với cùng một tần số góc ω như vậy được gọi là mode dao động và ω được gọi là tần số của mode.

b) Hệ hai con lắc liên kết trên đây có bao nhiêu mode ? Có hai mode. Kéo hai quả cầu về hai phía ngược chiều nhau với cùng một độ lệch rồi thả ra (Hình 2.13).



(tại $t = 0$, $x_1 = x_2 = A$)

Hình 2.13

Dao động của hai con lắc có tính đối xứng gương. Trong trường hợp này lực kéo về $F = -3kx$. Cả hai con lắc dao động điều hoà với tần số $\omega' = \sqrt{\dfrac{3k}{m}}$. Đây là mode thứ hai.

2. Sự chồng chập của các mode

Việc đưa vào hai trường hợp đơn giản nhất kể trên có tầm quan trọng ở chỗ là : bất kì chuyển động nào của hệ hai con lắc liên kết, trong đó mỗi con lắc bắt đầu dao động từ trạng thái nghỉ, đều có thể miêu tả như là một tổ hợp bậc nhất của hai mode.

Thật vậy, giả sử tại thời điểm t bất kì, quả cầu 1 có li độ x_1, quả cầu 2 có li độ x_2. Áp dụng định luật II Niu-tơn cho mỗi quả cầu, ta được hệ phương trình :

$$\begin{cases} mx_1'' = -kx_1 + k(x_2 - x_1) = -2kx_1 + kx_2 \\ mx_2'' = -kx_2 - k(x_2 - x_1) = -2kx_2 + kx_1 \end{cases} \qquad (2.23)$$

Giải hệ phương trình (2.23) một cách đồng thời, ta được :

$$\begin{cases} (x_1 + x_2)'' + \dfrac{k}{m}(x_1 + x_2) = 0 \\ (x_1 - x_2)'' + \dfrac{3k}{m}(x_1 - x_2) = 0 \end{cases} \qquad (2.24)$$

Vì hai con lắc bắt đầu dao động từ trạng thái nghỉ, nên nghiệm của hệ phương trình (2.24) có dạng :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = A_1 \cos\omega_1 t, \quad \text{với} \quad \omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ x_1 - x_2 = A_2 \cos\omega_2 t, \quad \text{với} \quad \omega_2 = \sqrt{\dfrac{3k}{m}} \end{cases} \qquad (2.25)$$

Cuối cùng ta được :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}(A_1 \cos\omega_1 t + A_2 \cos\omega_2 t) = A\cos\omega_1 t + B\cos\omega_2 t \\ x_2 = \dfrac{1}{2}(A_1 \cos\omega_1 t - A_2 \cos\omega_2 t) = A\cos\omega_1 t - B\cos\omega_2 t \end{cases} \qquad (2.26)$$

Từ hệ phương trình (2.26) ta thấy :

- Nếu $B = 0$ thì ta được mode 1.
- Nếu $A = 0$ thì ta được mode 2.

Dao động của mỗi con lắc đúng là tổ hợp bậc nhất của hai mode.

3. Phương pháp tìm các tần số của mode

Gọi ω là tần số của mode phải tìm. Khi ấy ta có :

$$x_1'' = -\omega^2 x_1 \quad \text{và} \quad x_2'' = -\omega^2 x_2 \qquad (2.27)$$

Thay (2.27) vào (2.23) ta được :

$$\begin{cases} (2k - m\omega^2)x_1 = kx_2 \\ (2k - m\omega^2)x_2 = kx_1 \end{cases} \qquad (2.28)$$

Từ (2.28) suy ra :

$$(2k - m\omega^2)^2 = k^2 \text{ hay } 2k - m\omega^2 = \pm k$$

Như vậy, ta tìm được hai tần số ứng với hai mode, đó là $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ và $\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$.

4. Mối liên hệ về biên độ dao động của hai con lắc liên kết ở mỗi mode

Thay $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ vào phương trình (2.28) ta được $x_1 = x_2$.

Còn thay $\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}$ vào phương trình (2.28) ta được $x_1 = -x_2$.

Từ kết quả trên ta thấy : muốn hệ dao động theo mode 1 hay theo mode 2 thì ta phải kích thích cho hai con lắc dao động theo cách 1a hay theo cách 1b như đã nêu ở mục 1.

Như vậy, ta được hai nghiệm đặc biệt của hệ phương trình (2.23) ứng với mỗi mode dao động là :

$$\text{mode 1} \begin{cases} x_1 = A\cos\omega_1 t \\ x_2 = A\cos\omega_1 t \end{cases}; \qquad \text{mode 2} \begin{cases} x_1 = B\cos\omega_2 t \\ x_2 = -B\cos\omega_2 t \end{cases}$$

Nghiệm tổng quát của hệ phương trình (2.23) là :

$$\begin{cases} x_1 = A\cos\omega_1 t + B\cos\omega_2 t \\ x_2 = A\cos\omega_1 t - B\cos\omega_2 t \end{cases}$$

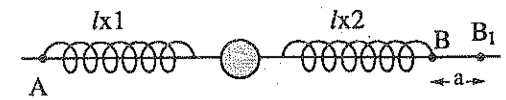
Trong trường hợp có n con lắc liên kết giống như Hình 2.11 nhưng với n rất lớn, thì các con lắc được nối thành một chuỗi. Chuỗi này được dùng làm mô hình để xét các mode dao động của một tinh thể một chiều. Khi ta làm cho chuỗi dao động, thì dao động của chuỗi có thể xem là sự chồng chập của nhiều mode, mỗi mode có một tần số đặc trưng riêng.

Có bao nhiêu mode dao động ? Người ta chứng minh được rằng hệ n con lắc liên kết thì có n mode.

PHẦN BÀI TẬP VÍ DỤ

BÀI TẬP VÍ DỤ CHO MỤC A

2.1. Một quả cầu, khối lượng m, được mắc vào hai đầu của hai lò xo có độ cứng lần lượt là k_1 và k_2, sao cho nó có thể trượt không ma sát dọc theo một thanh kim loại mảnh, nằm ngang, xuyên qua tâm của nó. Đầu A của lò xo 1 được giữ chặt, còn đầu B của lò xo 2 để tự do, nên cả hai lò xo đều chưa bị biến dạng.



Hình 2.14

Người ta giữ yên quả cầu và kéo dãn đầu B của lò xo 2 đến B_1 và giữ chặt ở B_1 (Hình 2.14). Sau đó thả quả cầu cho nó dao động. Biết $BB_1 = a$.

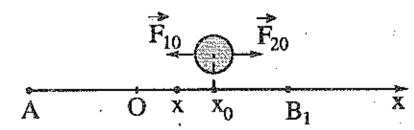
a) Lập phương trình vi phân của dao động của vật.

b) Tìm biên độ và chu kì dao động của vật. Viết phương trình dao động của vật.

c) Tìm động năng cực đại của vật m. Hãy so sánh nó với thế năng mà ta cung cấp cho lò xo 2 và giải thích.

Giải

a) Chọn trục x hướng từ $A \to B_1$, gốc toạ độ O tại vị trí ban đầu của vật m. Khi mới thả tay, quả cầu chỉ chịu lực đàn hồi của lò xo 2 nên chuyển động về bên phải và kéo dãn lò xo 1. Lực $\vec{F_1}$ của lò xo 1 có độ lớn tăng dần, lực $\vec{F_2}$ của lò xo 2 có độ lớn giảm dần, cho đến khi lực $\vec{F_1}$ cân bằng với lực $\vec{F_2}$.



Hình 2.15

Gọi x_0 là toạ độ của VTCB của quả cầu (Hình 2.15). Trước hết ta xác định x_0 :

$$F = -F_{10} + F_{20} = -k_1x_0 + k_2(a - x_0) = 0$$

Suy ra : $$x_0 = \frac{k_2 a}{k_1 + k_2} \qquad (1)$$

Giả sử tại thời điểm t, vật ở toạ độ x. Khi ấy ta có :

$$F = -F_1 + F_2 = -k_1x + k_2(a - x)$$

Thay $k_2a = (k_1 + k_2)x_0$ từ (1) vào phương trình trên, ta được :

$$F = -(k_1 + k_2)(x - x_0) \quad (2)$$

trong đó $k_1 + k_2 = k_{hệ}$, còn $(x - x_0)$ là li độ của vật.

Áp dụng định luật II Niu-tơn vào phương trình (2) và đặt $\omega^2 = \dfrac{k_1 + k_2}{m}$, ta được :

$$(x - x_0)'' + \omega^2(x - x_0) = 0 \quad (3)$$

Như vậy, vật m dao động điều hoà với tần số góc $\omega = \sqrt{\dfrac{k_1 + k_2}{m}}$ hay với chu kì $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1 + k_2}}$.

b) Nghiệm của phương trình (3) là : $x - x_0 = A\cos(\omega t + \varphi)$

Khi $t = 0$ $\begin{cases} x = A\cos\varphi + x_0 = 0 & \Rightarrow \cos\varphi < 0 \\ v = x' = -A\omega\sin\varphi = 0 & \Rightarrow \sin\varphi = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \varphi = \pi \text{ và } A = x_0 = \frac{k_2a}{k_1 + k_2}$$

Vậy phương trình dao động của vật là :

$$x = \frac{k_2a}{k_1 + k_2}\cos(\omega t + \pi) + x_0 \quad (4)$$

c) $v = x' = -A\omega\sin(\omega t + \pi)$

$v_{max} = A\omega$

$$W_{đ_{max}} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{k_1 + k_2}{m}\right)\frac{k_2^2a^2}{(k_1 + k_2)^2}$$

$$W_{đ_{max}} = \frac{1}{2}\frac{k_2^2a^2}{k_1 + k_2} \quad (5)$$

Thế năng ban đầu mà ta cung cấp cho lò xo 2 là $W_0 = \dfrac{1}{2}k_2a^2$. (6)

Để so sánh ta lập hiệu $\left(W_{t_0} - W_{đ_{max}}\right)$:

$$W_0 - W_{đ_{max}} = \frac{1}{2}k_2a^2\left(1 - \frac{k_2}{k_1 + k_2}\right) = \frac{1}{2}\frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}a^2 > 0$$

Suy ra : $W_0 > W_{đ_{max}}$.

Khi viết công thức (6) ta đã chọn mốc thế năng đàn hồi của hệ khi các lò xo không biến dạng. Với mốc này thì thế năng của hệ ở vị trí cân bằng sẽ khác không, cụ thể là :

$$W_t(x_0) = W_{t_1}(x_0) + W_{t_2}(x_0) = \frac{1}{2}k_1x_0^2 + \frac{1}{2}k_2(a - x_0)^2$$

Thay $x_0 = \dfrac{k_2a}{k_1 + k_2}$ vào, ta được :

$$W_t(x_0) = \frac{1}{2}k_2a^2 - \frac{1}{2}\frac{k_2^2a^2}{k_1 + k_2} = W_0 - W_{đ_{max}}$$

Như vậy, thế năng mà ta cung cấp cho lò xo 2 gồm hai phần :

– Một phần là thế năng của hệ khi vật ở VTCB. Phần này không chuyển hoá thành động năng của vật m.

– Một phần là năng lượng dao động của hệ. Phần này chuyển hoá tuần hoàn từ thế năng của hệ sang động năng của quả cầu và ngược lại.

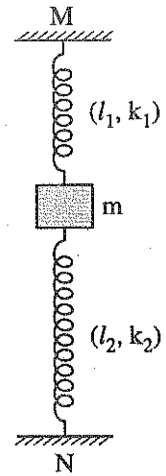
$$W_{dao\ động} = W_0 - W_t(x_0) = \frac{1}{2}k_{hệ}A^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2$$

2.2. a) Một lò xo lí tưởng dài l, có độ cứng k, được cắt ra thành hai lò xo có chiều dài là l_1 và l_2. Chứng minh rằng độ cứng của hai lò xo này tỉ lệ nghịch với chiều dài của chúng : $k_1l_1 = k_2l_2 = kl$.

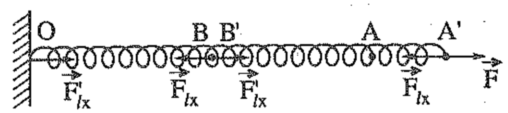
b) Dùng hai lò xo được cắt ra như trên để treo một vật m (coi là chất điểm) vào hai điểm cố định M và N nằm trên đường thẳng đứng, cách nhau là l. Xác định VTCB của vật m (Hình 2.16).

c) Kéo vật theo phương thẳng đứng xuống dưới một đoạn nhỏ rồi buông tay. Chứng minh rằng vật DĐĐH và tìm tần số góc của dao động.

Giải



Hình 2.16



Hình 2.17

a) Ta có một lò xo lí tưởng, dài l, độ cứng k, một đầu được giữ cố định vào điểm O, còn đầu tự do khi chưa bị kéo dãn thì ở điểm A. Ta gọi B là điểm của lò xo cách O một đoạn l_1 và cách A một đoạn l_2.

Dùng một lực F để kéo dãn lò xo làm cho khi cân bằng, điểm A dịch đến điểm A' (AA' = Δl) còn điểm B dịch đến điểm B' (BB' = Δl_1) (Hình 2.17).

Vì lực đàn hồi của lò xo lí tưởng tại mọi điểm đều bằng nhau, nên ta có :

$$F = F_{lx} = F'_{lx} \qquad (1)$$

Dưới tác dụng của lực F lò xo OA dãn ra một đoạn Δl, lò xo OB dãn ra một đoạn Δl_1, lò xo BA dãn ra một đoạn Δl_2. Vì lò xo dãn đều lí tưởng nên ta có :

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{\Delta l_2}{l_2} \qquad (2)$$

Gọi k_1 và k_2 là độ cứng của các đoạn lò xo OA và BA, ta có :

$$F_{lx} = F'_{lx} = k_1\Delta l_1 = k_2\Delta l_2 = k\Delta l \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) ta suy ra : $k_1 l_1 = k_2 l_2 = kl$.

Như vậy, nếu ta cắt lò xo dài thành hai lò xo thì độ cứng của các lò xo này tỉ lệ nghịch với chiều dài của chúng.

b) Chọn trục x có phương thẳng đứng, có chiều dương hướng xuống. Ở VTCB lò xo 1 bị dãn một đoạn bằng a, lò xo 2 bị nén một đoạn cũng bằng a.

$$-(k_1 + k_2)a + mg = 0$$

$$a = \frac{mg}{k_1 + k_2} \qquad (4)$$

c) Chọn gốc toạ độ tại VTCB, hợp lực tác dụng vào vật m ở li độ x là :

$$F_{hl} = -(k_1 + k_2(a + x) + mg$$

Kết hợp với (4) ta được :

$$F_{hl} = -(k_1 + k_2)x \qquad (5)$$

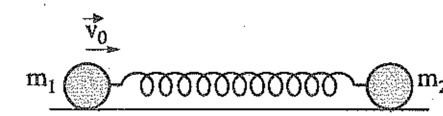
Áp dụng định luật II Niu-tơn $F_{hl} = ma = mx''$ cho (5) ta được :

$$x'' + \frac{k_1 + k_2}{m}x = 0 \qquad (6)$$

Phương trình (6) là phương trình vi phân của DĐĐH. Vậy vật m DĐĐH với tần số góc là $\omega = \sqrt{\dfrac{k_1 + k_2}{m}}$.

2.3. Trên một mặt phẳng nằm ngang, nhẵn, có một hệ gồm hai quả cầu, khối lượng m_1, m_2 được gắn vào hai đầu của một lò xo dài l, độ cứng k (Hình 2.18). Truyền cho quả cầu m_1 một vận tốc đầu v_0 hướng đến quả cầu m_2. Hãy khảo sát chuyển động của hệ.

Giải

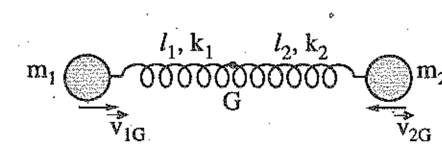


Hình 2.18

Áp dụng định luật BTĐL ta tính được vận tốc của khối tâm G của hệ. Chọn chiều dương là chiều của vectơ $\vec{v}_1$, ta có :

$$m_1v_0 = (m_1 + m_2)v_G$$

$$v_G = \frac{m_1v_0}{m_1 + m_2} \qquad (1)$$



Hình 2.19

Khối tâm của hệ chuyển động thẳng đều với vận tốc này.

Chọn HQC gắn với khối tâm. Trong HQC này G đứng yên, nên ta có thể coi hệ như hai con lắc được "treo" vào điểm cố định G. Gọi l_1 và l_2 là chiều dài của lò xo của mỗi con lắc khi chưa biến dạng ; gọi k_1 và k_2 là độ cứng của các lò xo này (Hình 2.19). Ta có :

$$l_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \;;\quad l_2 = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}\,(2) \;;\quad k_1 l_1 = k_2 l_2 = kl \;(3)$$

Từ (2) và (3) ta suy ra :

$$k_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_2}k \;;\; k_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1}k \qquad (4)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)} \;; \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \sqrt{k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}$$

Gọi $\mu = \dfrac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$ là *khối lượng rút gọn* của hệ thì tần số góc của mỗi con lắc (hay của hệ dao động) là : $\quad \omega = \sqrt{\dfrac{k}{\mu}} \qquad (5)$

Công thức (5) chứng tỏ hệ dao động tương đương với một con lắc gồm một lò xo có độ cứng k và một khối lượng bằng khối lượng rút gọn của hệ.

Bây giờ ta tìm biên độ dao động của mỗi con lắc. Trong HQC khối tâm, tại t = 0 lò xo chưa biến dạng, hai quả cầu ở VTCB và có vận tốc lần lượt là :

$$v_{1G} = v_0 - v_G = v_0 - \frac{m_1v_0}{m_1 + m_2} = \frac{m_2v_0}{m_1 + m_2} > 0$$

$$v_{2G} = 0 - v_G = -\frac{m_1v_0}{m_1 + m_2} < 0$$

Việc v_{1G} và v_{2G} trái dấu nhau chứng tỏ hai quả cầu dao động ngược pha nhau.

Để tìm biên độ dao động của mỗi con lắc, ta áp dụng định luật BTCN :

$$\frac{1}{2}k_1A_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1G}^2 \;\Rightarrow\; A_1 = \frac{m_2v_0}{m_1 + m_2}\sqrt{\frac{\mu}{k}}$$

$$\frac{1}{2}k_2A_2^2 = \frac{1}{2}m_2v_{2G}^2 \;\Rightarrow\; A_2 = \frac{m_1v_0}{m_1 + m_2}\sqrt{\frac{\mu}{k}}$$

Gọi A là độ nén cực đại hay độ dãn cực đại của lò xo, ta có :

$$A = A_1 + A_2 = v_0\sqrt{\frac{\mu}{k}} \qquad (6)$$

Tóm lại, sau khi truyền cho quả cầu m_1 vận tốc v_0 thì :

– Khối tâm của hệ chuyển động thẳng đều với vận tốc $v_G = \dfrac{m_1v_0}{m_1 + m_2}$.

– Hai quả cầu DĐĐH đối với khối tâm với tần số góc $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{\mu}}$, trong đó $\mu = \dfrac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$ gọi là khối lượng rút gọn của hệ.

2.4. Một lò xo, dài l, có khối lượng M được phân bố đều dọc theo các vòng của lò xo.

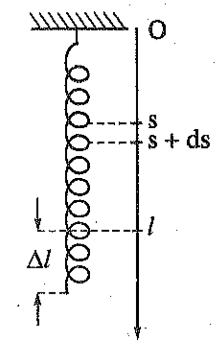
a) Để xác định độ cứng k của lò xo này, người ta đặt nó trên một mặt phẳng nằm ngang, không có ma sát, một đầu được giữ cố định, đầu kia được kéo bởi một lực F nằm ngang. Khi cân bằng, lò xo dãn ra một đoạn Δl. Tính độ cứng k của lò xo.

b) Treo lò xo thẳng đứng, lò xo dãn ra bao nhiêu ? Nếu móc vào đầu dưới của lò xo một vật, khối lượng m, thì khi cân bằng lò xo dãn ra bao nhiêu ?

c) Cho con lắc dao động theo phương thẳng đứng. Hãy xác định chu kì dao động của con lắc.

Giải

a) $k = \dfrac{F}{\Delta l}$.



Hình 2.20

b) Tính độ dãn gây ra bởi trọng lượng của lò xo (Hình 2.20). Xét một phần tử của lò xo nằm trong khoảng s và s + ds ($0 \le s \le l$). Phần tử này coi như là một lò xo có độ dài ds, có độ cứng là k_s. Lò xo nhỏ này bị kéo dãn bởi trọng lượng của phần lò xo nằm ở dưới nó. Gọi dl là độ dãn của phần tử này, ta có :

$$k_s dl = \frac{M}{l}(l - s)g \qquad (1)$$

Mặt khác, độ cứng của các phần của một lò xo tỉ lệ nghịch với chiều dài của phần đó :

$$k_s ds = kl \;\Rightarrow\; k_s = \frac{kl}{ds}$$

Thay vào (1) ta được : $\quad dl = \dfrac{Mg}{kl^2}(l - s)ds \qquad (2)$

Tích phân phương trình (2) theo s, ta được độ dãn của lò xo gây ra bởi trọng lượng của nó :

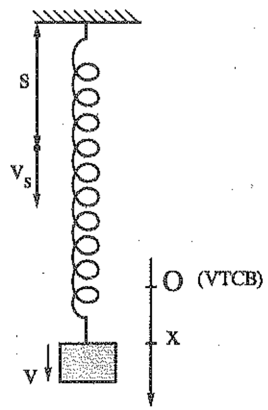
$$\Delta l_0 = \int_0^{\Delta l_0} dl = \frac{Mg}{kl^2}\int_0^l (l-s)ds$$

$$\Delta l_0 = \frac{Mg}{2k} \qquad (3)$$

Nếu móc vào đầu dưới của lò xo một vật có khối lượng m, thì khi cân bằng lò xo dãn ra một đoạn bằng :

$$\Delta l = \Delta l_0 + \frac{mg}{k} = \frac{\left(\frac{M}{2}+m\right)g}{k} \qquad (4)$$

c) Chọn gốc toạ độ của trục x tại VTCB. Giả sử, tại thời điểm t, vật m ở li độ x và có vận tốc là v (Hình 2.21). Sau thời gian dt, đầu dưới của lò xo dịch chuyển được một đoạn dx = vdt. Nếu độ biến dạng Δl của lò xo rất nhỏ so với độ dài l của nó, tức là nếu $\frac{\Delta l}{l} \ll 1$, thì phần tử của lò xo ở cách điểm treo một đoạn s sẽ dịch chuyển một đoạn là $\frac{sdx}{l}$. Suy ra ở thời điểm t, phần tử này có vận tốc $v_s = \frac{s}{l}v$. Động năng của phần tử lò xo này là :



Hình 2.21

$$dW = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{l}ds\right)\left(\frac{s}{l}v\right)^2$$

Động năng của lò xo là :

$$W_{\text{lò xo}} = \int dW = \frac{1}{2}\frac{M}{l^3}v^2\int_0^l s^2 ds = \frac{1}{6}Mv^2 \qquad (5)$$

Áp dụng định luật BTCN cho toàn thể con lắc ta được :

$$W = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{6}Mv^2 = \text{const}$$

$$W = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}\left(m+\frac{M}{3}\right)v^2 = \text{const} \qquad (6)$$

Phương trình (6) chứng tỏ con lắc DĐĐH với tần số góc :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m+\frac{M}{3}}} \qquad (7)$$

Cần lưu ý rằng trong cách giải ở câu c, chúng ta đã thừa nhận độ dãn tỉ lệ với khoảng cách đến điểm treo. Nhưng điều này chỉ đúng nếu lực kéo dãn là như nhau tại mọi điểm dọc theo lò xo, tức là chỉ đúng khi lò xo đứng yên. Còn khi các phần tử của lò xo có khối lượng và đang chuyển động có gia tốc thì ta không thể áp dụng điều kiện dãn tĩnh được. Vì thế công thức (7) chỉ là gần đúng. Tuy nhiên, nếu M $\ll$ m để cho lực kéo dọc theo lò xo gần như không đổi, thì công thức (7) được kiểm chứng là đúng.

2.5. Trong một thang máy đứng yên có treo một con lắc lò xo và một con lắc đơn. Con lắc lò xo gồm một vật, khối lượng m = 250 g và một lò xo có độ cứng k = 12 N/m. Con lắc đơn có biên độ góc là 8^o. Chu kì dao động của hai con lắc bằng nhau.

1. Tính chu kì dao động của hai con lắc và chiều dài của con lắc đơn. Lấy $g = 9,8\ m/s^2$.

2. Thang máy chuyển động nhanh dần đều lên trên với gia tốc $a = \frac{1}{10}g$. Hỏi chu kì, VTCB và biên độ dao động của hai con lắc thay đổi như thế nào ?

Giải

1. $$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,25}{12}} = 0,906 \approx 0,91\ s$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow l = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{9,8(0,906)^2}{4.9,86} = 0,2095 \approx 0,21\ m$$

2. Trong HQC gắn với thang máy, vật m chịu thêm lực quán tính $\vec{F}_{qt} = -m\vec{a}$. Do gia tốc $\vec{a}$ của thang máy hướng lên, nên lực quán tính cùng hướng với trọng lực. Hợp lực của trọng lực và lực quán tính gọi là *trọng lực hiệu dụng* của vật :

$$\vec{P}_{hd} = \vec{P} + \vec{F}_{qt}$$

Nói cách khác, các vật ở trong *trọng trường hiệu dụng* của thang máy, có gia tốc trọng trường hiệu dụng là : $\vec{g}_{hd} = \vec{g} - \vec{a}$

Trong trường hợp này g_{hd} có độ lớn bằng : $g_{hd} = g + a = \frac{11}{10}g$

a) Xét con lắc đơn : $\frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{g}{g_{hd}}} = \sqrt{\frac{10}{11}} = 0,953.$

– Chu kì của con lắc đơn giảm đi, chỉ còn bằng $0{,}953T \approx 0{,}85$ s.

– VTCB của con lắc đơn không thay đổi.

– Biên độ dao động. Xét hai trường hợp :

+ Khi con lắc ở vị trí biên ($v = 0$) thì thang máy bắt đầu đi lên. Con lắc coi như được thả từ biên độ góc $\alpha = 8^o$ và dao động trong trọng trường hiệu dụng của thang máy. Thế năng cực đại tăng lên, động năng cực đại tăng lên. Nhưng biên độ góc thì không đổi : $W_t = mg_{hd}l\,(1 - \cos\alpha) = \frac{1}{2}mv_m^2$.

+ Khi con lắc qua VTCB thì thang máy bắt đầu đi lên. Theo định luật BTCN ta viết : $W = mgl\,(1 - \cos\alpha) = \frac{1}{2}mv_m^2 = mg_{hd}l(1 - \cos\alpha_1)$.

$$g(1 - \cos\alpha) = \frac{11}{10}g(1 - \cos\alpha_1)$$

$$\frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{11}{10}.\frac{1}{2}\alpha_1^2 \Rightarrow \quad \frac{\alpha_1}{\alpha} = \sqrt{\frac{10}{11}} = 0{,}953$$

Biên độ góc giảm chỉ còn bằng $0{,}953\alpha \approx 7^o40'$

b) Xét con lắc lò xo

– Chu kì $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, không phụ thuộc g, nên không đổi.

– Ở VTCB, độ dãn của lò xo tăng lên :

$$\Delta l_1 = \frac{mg_{hd}}{k} = \frac{11}{10}\frac{mg}{k} = \frac{11}{10}\Delta l = 0{,}224 \text{ m}$$

Như vậy, VTCB của con lắc thay đổi, ở thấp hơn so với trước một đoạn bằng :

$$\Delta l_1 - \Delta l = \frac{1}{10}\Delta l \approx 2 \text{ cm}$$

– Biên độ dao động. Xét ba trường hợp :

+ Khi con lắc ở vị trí biên trên thì thang máy đi lên : Vị trí này cách VTCB mới một đoạn lớn hơn trước 2 cm. Biên độ dao động thăng thêm 2 cm : $A_1 = A + 2$ cm.

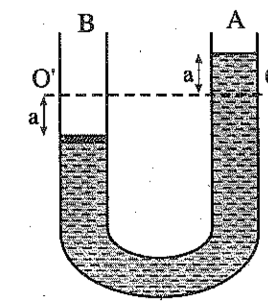
+ Khi con lắc ở vị trí biên dưới thì thang máy đi lên. Biên độ dao động giảm đi 2 cm : $A_1 = A - 2$ cm.

+ Khi con lắc qua VTCB thì thang máy đi lên. Theo định luật bảo toàn cơ năng, ta có : $\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_m^2$ (gốc toạ độ tại VTCB cũ).

$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv_m^2 = \frac{1}{2}kA_1^2$ (gốc toạ độ tại VTCB mới) với $|x| = 2$ cm $= 0{,}02$ m.

Suy ra biên độ dao động mới lớn hơn : $A_1 > A$.

2.6. Một bình thông nhau có tiết diện đều S. Bình đựng một chất lỏng không chịu nén, có khối lượng riêng ρ ; cột chất lỏng ở trong bình dài l. Trên mặt cột chất lỏng ở nhánh B có một pittông mỏng, khối lượng không đáng kể (Hình 2.22). Người ta ấn pittông xuống dưới mức cân bằng ban đầu một đoạn bằng a rồi buông tay. Bỏ qua mọi ma sát.



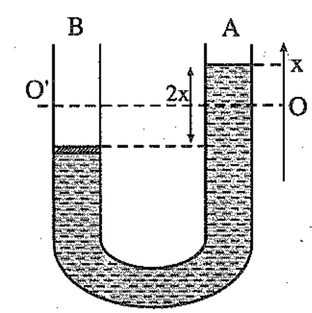
Hình 2.22

a) Tại sao khối chất lỏng lại dao động ?

b) Chứng minh rằng khối chất lỏng DĐĐH và xác định chu kì dao động.

c) Tính tốc độ cực đại của khối chất lỏng.

Giải



Hình 2.23

a) Gọi O, O' là mực chất lỏng ở hai nhánh khi chất lỏng đứng yên (Hình 2.23). Khi mực chất lỏng ở nhánh B tụt xuống dưới mức cân bằng một đoạn a, thì mực chất lỏng ở nhánh A dâng lên trên mức cân bằng một đoạn cũng bằng a. Sự chênh lệch mực chất lỏng ở hai nhánh làm xuất hiện một lực có tác dụng kéo toàn bộ khối chất lỏng chuyển động nhanh dần về VTCB.

Lực này có độ lớn bằng trọng lượng của phần chất lỏng chênh lệch. Khi chất lỏng về đến mức OO' thì lực này mất. Nhưng vì có quán tính nên khối chất lỏng tiếp tục chuyển động vượt qua mức cân bằng. Sự chênh lệch mực chất lỏng lần này làm xuất hiện một lực ngược chiều với trước làm khối chất lỏng chuyển động chậm dần rồi dừng lại. Một quá trình mới diễn ra giống như quá trình trước nhưng theo chiều ngược lại. Kết quả là khối chất lỏng dao động.

b) Ta hãy khảo sát sự chuyển động của mực chất lỏng ở nhánh A. Chọn trục x hướng thẳng đứng lên trên, gốc ở O. Giả sử sau t giây kể từ lúc buông tay, mực chất lỏng bên A có li độ x. Khi ấy lực gây ra dao động có độ lớn bằng $P = 2\rho gS|x|$ và có hướng về VTCB O. Do đó biểu thức của lực này là :

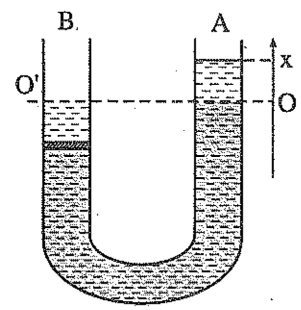
$$F = -2\rho gSx$$

Vì biểu thức của lực có dạng $F = -kx$, ta suy ra khối chất lỏng DĐĐH với tần số góc $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{2\rho gS}{\rho Sl}} = \sqrt{\dfrac{2g}{l}}$, hay với chu kì : $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{2g}}$.

c) $v_{max} = A\omega = a\omega = a\sqrt{\dfrac{2g}{l}}$.

Chú ý : Ta có thể giải câu b và c của bài toán bằng phương pháp năng lượng như sau :

Chọn mốc thế năng của khối chất lỏng khi mực chất lỏng của cả hai nhánh ở mực OO'. Khi mực chất lỏng ở nhánh A ở li độ x thì thế năng của khối chất lỏng tăng lên, vì ta có thể coi như cột chất lỏng có độ dài x ở nhánh bên trái được đưa lên cao một đoạn là x và được đặt lên đỉnh của cột chất lỏng ở bên phải (Hình 2.24). Thế năng của khối chất lỏng là : $W_t = \rho gSx^2$.



Hình 2.24

Vì biểu thức của thế năng có dạng $W_t = \dfrac{1}{2}kx^2$ với $k = 2\rho gS$, ta suy ra khối chất lỏng DĐĐH với tần số góc là $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{2g}{l}}$ hay với chu kì là $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{2g}}$.

$$W_{đ_{max}} = W_{t_{max}} = \rho gSa^2$$

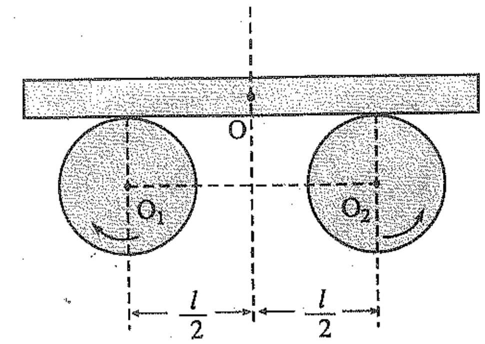
$$v_{max} = \sqrt{\frac{2W_{đ_{max}}}{m}} = \sqrt{\frac{2\rho gSa^2}{\rho Sl}} = a\sqrt{\frac{2g}{l}}.$$

2.7. Một thanh đồng chất, tiết diện đều, được đặt nằm ngang trên hai xilanh giống nhau đang quay với vận tốc góc bằng nhau nhưng ngược chiều (Hình 2.25). Khoảng cách giữa hai trục quay O_1, O_2 là l. Hệ số ma sát trượt giữa thanh và xilanh là μ. Lúc đầu thanh ở VTCB.

a) Chứng tỏ rằng nếu thanh bị lệch một chút khỏi VTCB theo phương ngang thì nó sẽ dao động điều hoà.

b) Tìm tần số góc của dao động. Áp dụng bằng số $l = 30$cm, $\mu = 0{,}2$.

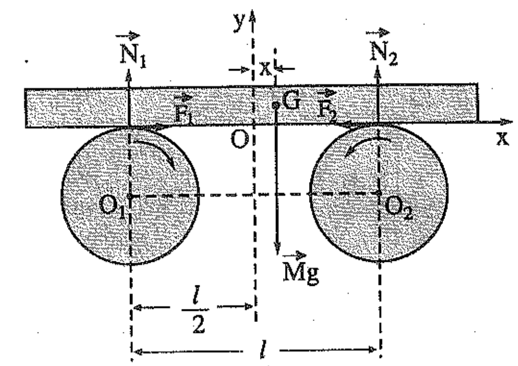
c) Kết quả sẽ như thế nào nếu đổi chiều quay của cả hai xilanh và nếu độ lệch của thanh như cũ ?



Hình 2.25

Giải

a) VTCB của thanh là vị trí khi trọng tâm G nằm trên trục Oy. Hình 2.26 chỉ các lực tác dụng vào thanh khi thanh bị lệch đi một đoạn là x. Ở vị trí này hai lực pháp tuyến N_1 và N_2 không bằng nhau, do đó hai lực ma sát cũng không bằng nhau. Ta có hệ phương trình :



Hình 2.26

$$\Sigma F_x = F_1 - F_2 = \mu(N_1 - N_2) \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 - mg = 0 \qquad (2)$$

$$\sum M_{(O)} = 0 \Rightarrow N_1\left(\frac{l}{2} + x\right) - N_2\left(\frac{l}{2} - x\right) = 0 \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) : $N_1 = \dfrac{mg(l - 2x)}{2l}$; $N_2 = \dfrac{mg(l + 2x)}{2l}$.

Thay vào (1) ta được : $F_{hl} = -\dfrac{2\mu mg}{l}x$ (4)

Vì hợp lực theo phương ngang có dạng $F_{hl} = -kx$ nên thanh DĐĐH theo phương ngang.

b) Tần số góc được tìm thấy từ phương trình chuyển động của thanh :

$$ma = -\frac{2\mu mg}{l}x \text{ hay } x'' + \frac{2\mu g}{l}x = 0$$

Suy ra : $\omega = \sqrt{\dfrac{2\mu g}{l}}$.

c) Nếu đổi chiều quay của cả hai xilanh thì $\vec{F}_{hl}$ cũng đổi chiều và đẩy thanh theo hướng dịch chuyển. Thanh chuyển động thẳng nhanh dần.

$$a = \frac{F_{hl}}{m} = \frac{2\mu mgx}{ml} = \frac{2\mu g}{l}x$$

Chú ý : Tuy hợp lực của hai lực ma sát trượt có dạng $F_{hl} = -kx$ nhưng không phải là lực thế. Lực ma sát trượt thực hiện công làm giảm cơ năng của hệ. Ở đây ta phải kể đến vai trò của động cơ làm quay hai xilanh. Động cơ thực hiện công để bù vào phần cơ năng mất đi vì chuyển thành nhiệt năng.

BÀI TẬP VÍ DỤ CHO MỤC B

2.8. Bộ phận giảm xóc của một ô tô ở trạng thái tồi có thể được mô hình hoá như sau : một khối lượng m (m = 300 kg) được nối với một lò xo, thực hiện dao động tắt dần (bộ phận giảm xóc còn tốt thì dao động tắt dần không tuần hoàn).

Người ta quan sát thấy sau ba dao động toàn phần với giả chu kì T = 2 s, thì biên độ dao động giảm đi 10 lần. Hãy tính :

a) Lượng giảm loga của hệ dao động.

b) Độ cứng k của lò xo.

c) Năng lượng mất đi trong lần dao động đầu tiên. Biết $A_0 = 10$ cm.

Giải

a) $x = A_0e^{-\lambda t}\cos\omega t$

Sau n chu kì : $A = A_0e^{-\lambda nT}$

$$\ln\frac{A}{A_0} = -\lambda nT = -n\delta \Rightarrow \ln\frac{1}{10} = -3\delta \Rightarrow \delta = \frac{\ln 10}{3} = 0,767$$

(Biên độ giảm dần theo một cấp số nhân với công bội $e^{-\delta} = 0,464$).

b) Gọi $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ là tần số góc của dao động không tắt, ω là tần số góc của dao động tắt dần.

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2 \Rightarrow \omega_0^2 = \omega^2 + \lambda^2$$

T = 2 s : $\lambda = \frac{\delta}{T} = \frac{0,767}{2} = 0,384\ s^{-1}$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi\ s^{-1}$$

$$\omega_0^2 = \pi^2 + (0,384)^2 = 10,255 \Rightarrow \omega_0 = 3,202\ s^{-1}$$

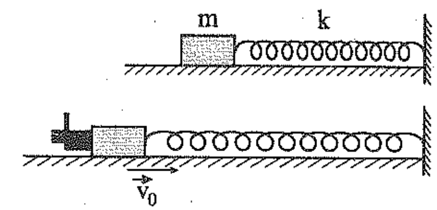
Suy ra : $k = m\omega^2 = 3076 \approx 3100$ N/m.

c) $\Delta W = W_0 - W_1 = \frac{1}{2}k\left(A_0^2 - A_1^2\right) = \frac{1}{2}kA_0^2\left(1 - e^{-2\delta}\right)$

$$\frac{\Delta W}{W_0} = 1 - e^{-2\delta} = 0,784\ ;\ W_0 = \frac{1}{2}kA_0^2 = 15,38\ J$$

$\Rightarrow$ $\Delta W = 15,38.0,784 \approx 12$ J

2.9. Một con lắc lò xo, có khối lượng m và độ cứng k, có thể dao động trên một mặt phẳng nằm ngang có ma sát (Hình 2.27). Để đo miền nghỉ của vật (tức là miền ở đó vật có thể nằm cân bằng dưới tác dụng của lực đàn hồi và lực ma sát nghỉ), người ta xê dịch vật sang phải rồi sang trái. Người ta thấy miền nghỉ có bề rộng là 2a.



Hình 2.27

Sau đó người ta kéo vật ra khỏi miền nghỉ một khoảng lớn hơn 2a rất nhiều và quan sát dao động của nó. Cho rằng lực ma sát trượt bằng lực ma sát nghỉ cực đại.

a) Lập phương trình dao động và xác định chu kì.

b) Biên độ dao động thay đổi theo quy luật nào ? Vẽ đồ thị dao động.

c) Để duy trì dao động của vật thì cứ mỗi lần vật ở vị trí biên trái người ta lại dùng búa gõ vào vật và vận tốc lại bằng v_0. Hỏi biên độ dao động của vật bằng bao nhiêu ?

d) Giả sử biên độ dao động duy trì của vật rất lớn so với 2a. Hãy xác định xem chu kì dao động này khác với chu kì dao động tắt dần bao nhiêu ?

Giải

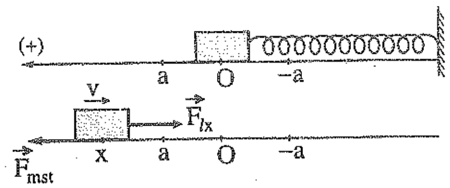
$$F_{mst} = F_{msn(max)} = ka$$

a) Chọn gốc toạ độ tại vị trí của vật khi lò xo chưa biến dạng. Chọn chiều dương là chiều dãn của lò xo (Hình 2.28).

– Ở lượt đi vật chuyển động theo chiều âm. Tại toạ độ x ta có :

$$F_{hl} = -kx + ka = mx''$$

hay $$(x-a)'' + \frac{k}{m}(x-a) = 0$$



Hình 2.28

Suy ra : $$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi) + a \\ \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}},\ T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \\ \text{VTCB ở } O_1 \text{ có toạ độ } x = a \end{cases}$$

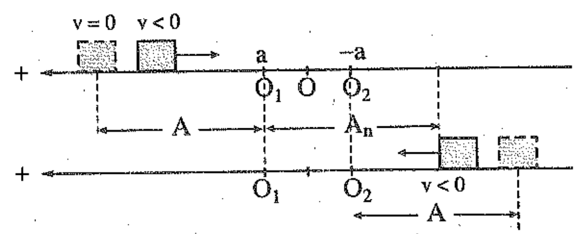
– Ở lượt về vật chuyển động theo chiều dương. Tại toạ độ x ta có :

$$F_{hl} = -kx - ka = mx''$$

hay $$(x+a)'' + \frac{k}{m}(x+a) = 0$$

Suy ra : $$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi) - a \\ \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}},\quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \\ \text{VTCB ở } O_2 \text{ có toạ độ } x = -a \end{cases}$$

b) Ta thấy cứ sau $\frac{1}{2}T$, vật lại đổi VTCB, mà hai VTCB này cách nhau 2a, nên sau $\frac{1}{2}T$ biên độ dao động giảm đi 2a, tức là giảm theo cấp số cộng lùi :



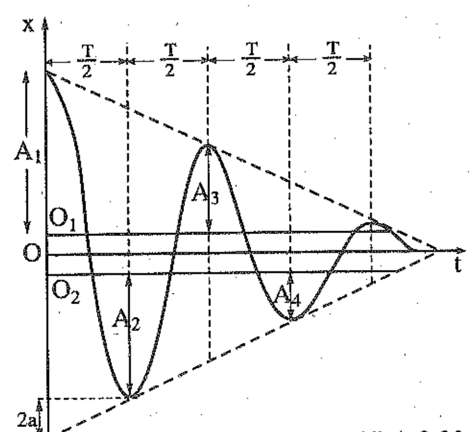
Hình 2.29

$A_2 = A_1 - 2a$; $A_3 = A_1 - 4a$, v.v... (Hình 2.29).

Vật sẽ dừng lại hẳn ở vị trí biên nằm trong miền nghỉ.

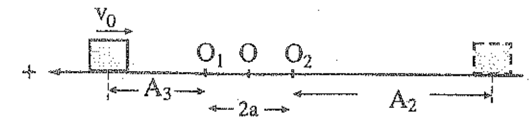
Hình 2.30 là đồ thị dao động của vật.

c) Giả sử lúc đầu ta thả vật ở vị trí biên trái cách O_1 một đoạn là A_1. Sau $\frac{1}{2}T$, vật sang đến vị trí biên phải cách O_2 một đoạn $A_2 = A_1 - 2a$. Sau một chu kì vật ở vị trí biên trái cách O_1 một đoạn $A_3 = A_1 - 4a$. Muốn duy trì dao động, ta truyền cho vật một động năng sao cho nó tới được vị trí biên phải cách O_2 một đoạn vẫn là A_2 như trước.



Hình 2.30

Bằng cách như vậy ta được một dao động duy trì có hai biên độ không đổi là A_2 và A_3.



Hình 2.31

Công của lực ma sát trượt ở lượt đi và lượt về (Hình 2.31) bằng độ biến thiên cơ năng.

Lượt đi : $$-F_{mst}(A_3 + A_2) = \frac{1}{2}kA_2^2 - \left(\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kA_3^2\right)$$

Lượt về : $$-F_{mst}(A_2 + A_3) = \frac{1}{2}kA_3^2 - \frac{1}{2}kA_2^2$$

Suy ra : $$\frac{1}{2}kA_2^2 - \left(\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kA_3^2\right) = \frac{1}{2}kA_3^2 - \frac{1}{2}kA_2^2$$

hay $$(A_2 - A_3)(A_2 + A_3) = \frac{mv_0^2}{2k}$$

Thay : $A_2 - A_3 = 2a$ vào ta được :

$$\begin{cases} A_2 + A_3 = \dfrac{mv_0^2}{4ka} \\ A_2 - A_3 = 2a \end{cases}$$

Cuối cùng ta được : $A_2 = \dfrac{mv_0^2}{8ka} + a$; $A_3 = \dfrac{mv_0^2}{8ka} - a$.

d) Khi kéo vật đến vị trí có biên độ dao động là A_1 rồi buông tay, thì sau $\frac{1}{2}T$ vật sẽ sang được vị trí biên trái có biên độ dao động là A_2. Từ đó ta suy ra khi vật đến vị trí có biên độ A_3 thì nó có vận tốc là v_0. Gọi τ là thời gian để đi đoạn đường đó, ta có :

$$x = A_3 = A_1\cos\omega\tau$$

$$v = -v_0 = -A_1\omega\sin\omega\tau$$

Suy ra : $\tan\omega\tau = \dfrac{v_0}{\omega A_3}$. Vì $\tau \ll T$ và $a \ll A_3$

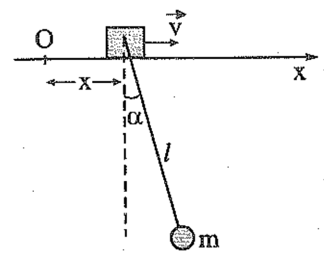
nên $$\omega\tau \approx \frac{v_0 8ka}{\omega m v_0^2} \quad \text{hay} \quad \tau \approx \frac{8a}{v_0}.$$

Như vậy chu kì của dao động duy trì nhỏ hơn chu kì dao động tắt dần một lượng bằng $\tau \approx \frac{8a}{v_0}$.

2.10. Một con lắc đơn được treo vào một giá đỡ, giá đỡ này dao động theo phương ngang nhờ ngoại lực theo phương trình x = Acosωt (Hình 2.32).

a) Hãy lập phương trình chuyển động của con lắc khi góc lệch α nhỏ.

b) Hãy tìm nghiệm của phương trình khi con lắc đã dao động ổn định.



Hình 2.32

Giải

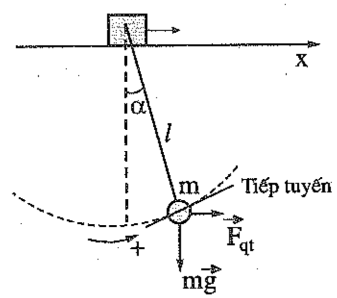
a) $x = A\cos\omega t$

$a = x'' = -\omega^2 A\cos\omega t$

Xét chuyển động của con lắc trong HQC gắn với giá đỡ. Con lắc chịu thêm lực quán tính :

$F_{qt} = -mx'' \Rightarrow F_{qt} = -m\omega^2 A\cos\omega t$

Lực quán tính là ngoại lực cưỡng bức biến thiên tuần hoàn. Do đó dao động của con lắc là dao động cưỡng bức (Hình 2.33).



Hình 2.33

Xét theo phương tiếp tuyến ta có :

$$ma_t = -mg\sin\alpha + ma\cos\alpha$$

$$ml\alpha'' = -mg\alpha + m\omega^2 A\cos\omega t$$

$$\alpha'' + \omega_0^2\alpha = \frac{A\omega^2}{l}\cos\omega t \quad \left(\text{với } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}\right) \qquad (1)$$

b) Nghiệm tổng quát của phương trình (1) gồm 2 nghiệm :

– Nghiệm tổng quát của phương trình không có vế phải :

$$\alpha'' + \omega_0^2\alpha = 0$$

Nghiệm này là $\alpha_1 = B\cos(\omega_0 t + \varphi)$

– Nghiệm đặc biệt của phương trình (1) có dạng $\alpha_2 = C\cos\omega t$. Thay nghiệm này vào phương trình (1) ta được :

$$-\omega^2 C\cos\omega t + \omega_0^2 C\cos\omega t = \frac{A\omega^2}{l}\cos\omega t$$

Suy ra : $$C = \frac{A\omega^2}{l(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (1) là :

$$\alpha = \frac{A\omega^2}{l(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos\omega t + B\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Hiện tượng cộng hưởng xảy ra nếu $\omega \approx \omega_0$. Còn nếu $\omega \neq \omega_0$ thì chuyển động của con lắc là ổn định.

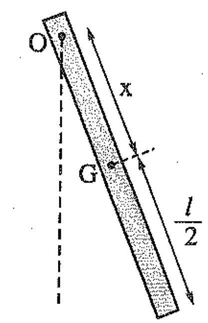
BÀI TẬP VÍ DỤ CHO MỤC D

2.11. Một cái thước có chiều dài l, dao động nhỏ quanh một trục đi qua O, cách trọng tâm G một đoạn x (Hình 2.34).

a) Tìm chu kì dao động của thước theo l và x.

b) Với giá trị nào của $\frac{x}{l}$ thì chu kì là cực tiểu ?

c) Nếu l = 1,00 m và g = 9,8 m/s^2 thì chu kì có giá trị cực tiểu bằng bao nhiêu ?



Hình 2.34

Giải

a) $$I_O = I_G + mx^2 = \frac{1}{12}ml^2 + mx^2$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{mgx}} = 2\pi\sqrt{\frac{l^2 + 12x^2}{12gx}}$$

b) T_{min} khi $\left(\frac{l^2 + 12x^2}{x}\right)$min

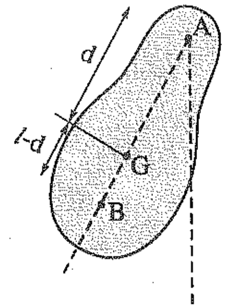
$$\frac{l^2 + 12x^2}{x} = \frac{l^2}{x} + 12x \geq 2\sqrt{12l^2}$$

$$T_{min} \text{ khi } \frac{l^2}{x} = 12x \text{ hay } \frac{x}{l} = \frac{1}{\sqrt{12}} \approx 0{,}289$$

c) $$T_{min} = 2\pi\sqrt{\frac{2l^2\sqrt{12}}{12gl}} = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{g\sqrt{12}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2.1{,}00}{9{,}8.\sqrt{12}}} \approx 1{,}53 \text{ s.}$$

2.12. Một con lắc vật lí khi treo tại A có chu kì dao động nhỏ là T. Lộn ngược con lắc lại và treo nó vào điểm B nằm trên đường thẳng nối điểm A với trọng tâm G (Hình 2.35). Dịch chuyển điểm B cho đến khi con lắc lại có chu kì là T. Khi ấy khoảng cách AB = l. Chứng minh rằng gia tốc rơi tự do được cho bởi công thức $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$.

Giải



Hình 2.35

$$I_A = I_G + md^2$$

$$I_B = I_G + m(l-d)^2$$

Suy ra $$I_B = I_A + ml(l-2d)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_A}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_B}{mg(l-d)}}$$

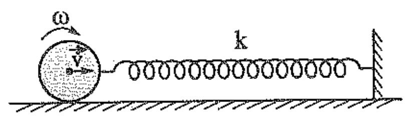
$$\frac{I_A}{mgd} = \frac{I_A + ml(l-2d)}{mg(l-d)} = \frac{ml(l-2d)}{mg(l-2d)}$$

$$\frac{I_A}{mgd} = \frac{l}{g} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Cuối cùng, ta có $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$

Chú ý : Có thể đo g bằng cách này mà không cần biết đến momen quán tính của vật rắn dùng làm con lắc.

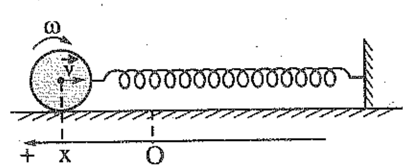
2.13. Một xilanh đặc, khối lượng m, được gắn vào đầu tự do của một lò xo có độ cứng k. Xilanh có thể lăn không trượt trên một mặt phẳng nằm ngang (Hình 2.36). Kéo xilanh cho lò xo dãn ra một đoạn là a rồi thả không vận tốc đầu.



Hình 2.36

a) Chứng minh rằng xilanh DĐĐH và tìm tần số góc của dao động.

b) Viết phương trình dao động của xilanh.



Hình 2.37

Giải

a) Chọn gốc toạ độ tại VTCB là vị trí mà lò xo không biến dạng. Chọn chiều dương là chiều dãn của lò xo (Hình 2.37).

Gọi v là vận tốc của khối tâm và ω là vận tốc góc của xilanh khi nó ở li độ x. Vì lực ma sát nghỉ không sinh công, nên cơ năng của hệ được bảo toàn :

$$W = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = const$$

Thay $I = \frac{1}{2}mR^2$ và $\omega = \frac{v}{R}$ vào, ta được :

$$W = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{3}{4}mv^2 = const \qquad (1)$$

Phương trình (1) là phương trình cơ năng của một hệ DĐĐH.

$$\frac{dW}{dt} = kxx' + \frac{3}{2}mvv' = 0$$

Thay v = x' và v' = x" vào, ta được :

$$kx + \frac{3}{2}mx'' = 0 \quad hay \quad x'' + \frac{2k}{3m}x = 0 \qquad (2)$$

Từ phương trình (2) ta suy ra tần số góc của dao động điều hoà $\omega = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$.

b) Nghiệm của phương trình vi phân (2) là :

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

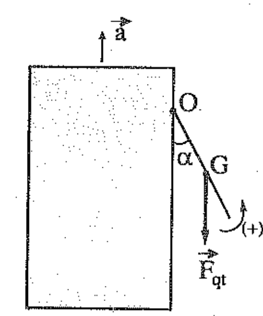
tại t = 0 $$\begin{cases} x = A\cos\varphi = a & \Rightarrow \cos\varphi > 0 \\ v = -A\omega\sin\varphi = 0 & \Rightarrow \sin\varphi = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = 0 \text{ và } A = a\,; \; x = a\cos\omega t$$

2.14. Một xe chở khách khởi hành với gia tốc a. Lúc đầu cánh cửa hé mở. Hỏi khi cánh cửa tự động đóng sập lại thì xe chạy được bao xa ? Cho biết bề rộng của cánh cửa bằng l.

Giải

Trong HQC gắn với xe, cánh cửa chịu thêm lực quán tính. Lực này gây ra một momen quay làm cánh cửa đóng lại (Hình 2.38).



Hình 2.38

$$M_{\vec{F},O} = I_O\gamma$$

$$-ma\frac{l}{2}\sin\alpha = \frac{1}{3}ml^2\alpha''$$

Vì cánh cửa hé mở, $\sin\alpha \approx \alpha$ (rad) nên ta có :

$$-ma\frac{l}{2}\alpha = \frac{1}{3}ml^2\alpha''$$

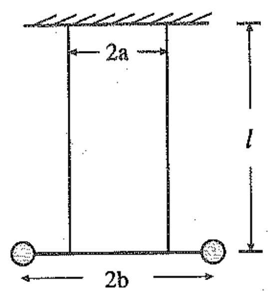
hay $$\alpha'' + \frac{3a}{2l}\alpha = 0 \qquad (1)$$

Phương trình (1) cho thấy thời gian chuyển động của cánh cửa là thời gian con lắc vật lí khi đi từ vị trí biên về vị trí cân bằng. Với tần số góc là $\omega = \sqrt{\frac{3a}{2l}}$ thì thời gian này là $\tau = \frac{1}{4}T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2l}{3a}}$.

Trong thời gian này xe khách đi được một đoạn đường là :

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a.\frac{\pi^2}{4}.\frac{2l}{3a} = \frac{\pi^2 l}{12}$$

2.15. Một quả tạ đôi gồm hai quả cầu, khối lượng m, được gắn vào hai đầu một thanh nhẹ, dài 2b. Thanh được treo ở vị trí nằm ngang trên hai dây không dãn, mỗi dây dài l. Khoảng cách giữa hai dây là 2a (Hình 2.39). Hãy tìm chu kì dao động của tạ đôi.



Hình 2.39

Giải

Tạ đôi dao động quanh trục OO' (Hình 2.40).

Giả sử tạ đôi ở li độ góc φ. Từ hình vẽ ta có :

$$l\alpha = a\varphi \Rightarrow \alpha = \frac{a}{l}\varphi \qquad (1)$$

$$2T\cos\alpha = 2mg \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos\alpha} \qquad (2)$$

Xét chuyển động quay quanh OO' :

$$M_{\vec{T},O} = I_O\gamma$$

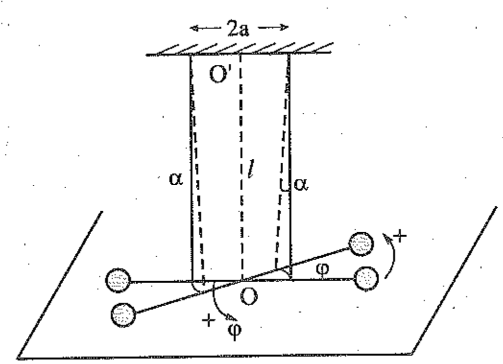
$$-2T\sin\alpha.a = 2mb^2\varphi''$$

Thay (2) vào ta được :

$$-2mga\tan\alpha = 2mb^2\varphi''$$

$$-ga\alpha = b^2\varphi''$$

Thay (1) vào, ta được : $-\frac{ga^2}{l}\varphi = b^2\varphi''$



Hình 2.40

hay $$\varphi'' + \frac{a^2}{b^2}.\frac{g}{l}\varphi = 0$$

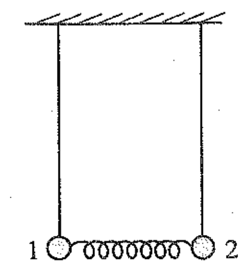
Vậy $\omega = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{g}{l}}$ và $T = \frac{2\pi b}{a}\sqrt{\frac{l}{g}}$

BÀI TẬP VÍ DỤ CHO MỤC G

2.16. Hai con lắc đơn giống nhau, liên kết với nhau bằng một lò xo nằm ngang. Ở trạng thái cân bằng, hai dây thẳng đứng (Hình 2.41). Tìm :

a) Các mode dao động và tần số của mode.

b) Phương trình dao động của mỗi quả cầu trong mỗi mode.



Hình 2.41

Giải

a) Giả sử tại thời điểm t, quả cầu 1 có li độ x_1, quả cầu 2 có li độ x_2 (Hình 2.42).

Vì dao động nhỏ nên ta có :

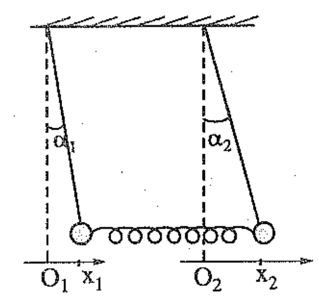
$$T_1\cos\alpha_1 = mg \Rightarrow T_1 \approx mg$$

$$T_2\cos\alpha_2 = mg \Rightarrow T_2 \approx mg$$

Áp dụng định luật II Niu-tơn cho mỗi quả cầu :

$$mx_1'' = -T_1\sin\alpha_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$mx_1'' = -mg\frac{x_1}{l} + k(x_2 - x_1) \qquad (1a)$$



Hình 2.42

Tương tự : $$mx_2'' = -\frac{mg}{l}x_2 - k(x_2 - x_1) \qquad (1b)$$

Gọi ω là tần số của mode ta có : $x_1'' = -\omega^2 x_1$ và $x_2'' = -\omega^2 x_2$

Thay vào hệ phương trình (1) ta được :

$$\begin{cases} \left(\frac{mg}{l} + k - m\omega^2\right)x_1 = kx_2 & (a) \\ \left(\frac{mg}{l} + k - m\omega^2\right)x_2 = kx_1 & (b) \end{cases} \qquad (2)$$

Từ (2) suy ra : $\left(\frac{mg}{l} + k - m\omega^2\right)^2 = k^2$ hay $\frac{mg}{l} + k - m\omega^2 = \pm k$

Ta được hai nghiệm : $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ và $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}$.

b) Thay $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ vào phương trình (2a) ta được $x_1 = x_2 = A\cos\omega_1 t$.

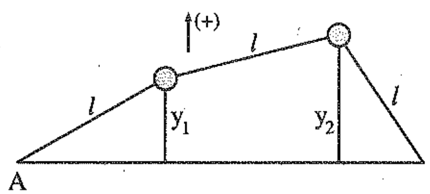
Thay $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}$ vào phương trình (2a) ta được : $x_1 = -x_2 = B\cos\omega_2 t$.

2.17. Hai quả cầu, khối lượng $m_1 = m_2 = m$, nằm trên mặt bàn nằm ngang không ma sát, được nối với nhau và nối với hai điểm cố định A và B trên mặt bàn bằng các sợi dây đàn hồi có sức căng T không đổi và có chiều dài l (Hình 2.43). Cho hai quả cầu dịch ra khỏi VTCB một li độ là y_1 và y_2 rồi buông tay (Hình 2.43).

a) Lập phương trình vi phân của chuyển động của mỗi con lắc khi dao động nhỏ.

b) Tìm phương trình dao động tổng quát của mỗi con lắc.

c) Tìm các tần số của mode và tỉ số các biên độ ở mỗi mode. Vẽ hình minh hoạ.



Hình 2.43

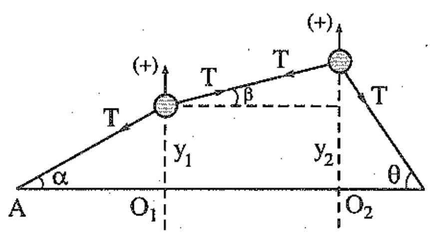
Giải

a) Theo định luật II Niu-tơn ta viết :

Vật 1 : $my_1'' = -T\sin\alpha + T\sin\beta$

$$my_1'' = -\frac{Ty_1}{l} + \frac{T(y_2 - y_1)}{l}$$

$$y_1'' = \frac{T}{ml}(y_2 - 2y_1) \qquad (1)$$



Hình 2.44

Vật 2 : Tương tự như trên :

$$y_2'' = \frac{T}{ml}(y_1 - 2y_2) \qquad (2)$$

b) $(y_1 - y_2)'' = -\frac{T}{ml}(y_1 + y_2)$; $(y_1 - y_2)'' = \frac{-3T}{ml}(y_1 - y_2)$

Đặt $\omega_1 = \sqrt{\frac{T}{ml}}$ và $\omega_2 = \sqrt{\frac{3T}{ml}}$

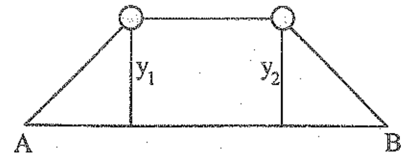
$$y_1 + y_2 = A_1\cos\omega_1 t$$

$$y_1 - y_2 = B_1\cos\omega_2 t$$

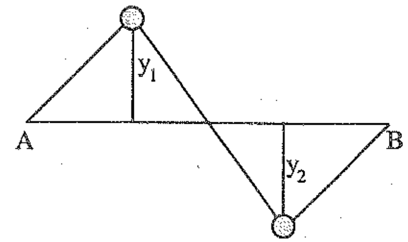
Suy ra : $y_1 = A\cos\omega_1 t + B\cos\omega_2 t$

$y_2 = A\cos\omega_1 t - B\cos\omega_2 t$

c) Khi B = 0, hai con lắc dao động cùng pha với tần số ω_1 và với tỉ số hai biên độ bằng 1 (Hình 2.45). Khi A = 0, hai con lắc dao động ngược pha với tần số ω_2 và với tỉ số hai biên độ là –1 (dấu "–" chỉ ngược pha) (Hình 2.46).



Hình 2.45



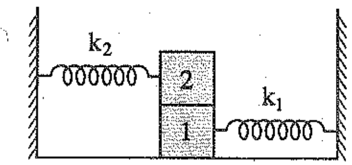
Hình 2.46

PHẦN BÀI TẬP TỰ GIẢI

2.1. Một hệ dao động gồm hai vật chồng lên nhau, mỗi vật gắn với một lò xo, đầu kia của lò xo gắn vào giá đỡ (Hình 2.47). Lò xo 1 có độ cứng k_1 = 10 N/m, lò xo 2 có độ cứng k_2 = 20 N/m. Mỗi vật có khối lượng m = 100 g. Hệ số ma sát nghỉ giữa vật 1 và sàn bằng không, giữa hai vật bằng 0,5. Ở VTCB, lò xo 1 dãn ra một đoạn bằng 2 cm.

Hãy xác định tần số và biên độ dao động cực đại để hai vật dao động giống như một vật.

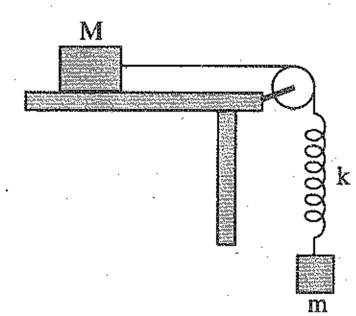
ĐS : 1,9 Hz và 6 cm.



Hình 2.47

2.2. Một vật, khối lượng M, nằm yên trên mặt bàn nằm ngang và một con lắc lò xo được nối với nhau bằng một sợi dây nhẹ, không dãn, vắt qua một ròng rọc lí tưởng, cố định (Hình 2.48). Hệ số ma sát nghỉ giữa vật M và mặt bàn là $\mu = 0,3$. Tỉ số $\frac{M}{m} = 8$. Vật m thực hiện dao động điều hoà theo phương thẳng đứng với chu kì T = 0,5 s. Hỏi biên độ dao động có thể lớn nhất bằng bao nhiêu ?

ĐS : 6,3 cm.

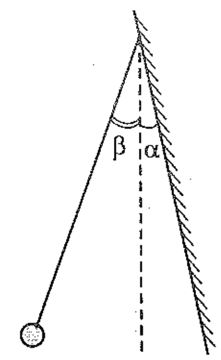


Hình 2.48

2.3. Một bức tường nghiêng một góc nhỏ α so với phương thẳng đứng. Người ta treo vào đó một con lắc đơn dài l (Hình 2.49). Con lắc được kéo lệch trong mặt phẳng vuông góc với tường một góc nhỏ β so với phương thẳng đứng rồi được thả ra.

Hãy tìm chu kì dao động của con lắc. Biết rằng $\alpha < \beta$ và va chạm với tường là tuyệt đối đàn hồi.

$$ĐS: 2\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\pi - \arccos\frac{\alpha}{\beta}\right).$$



Hình 2.49

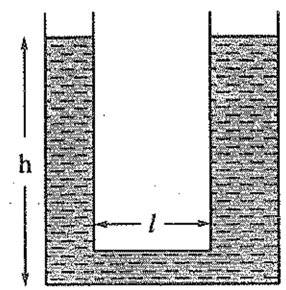
2.4. Một vật trượt không vận tốc đầu từ đỉnh của một mặt phẳng nghiêng, có góc nghiêng α so với phương ngang. Hệ số ma sát trượt giữa vật và mặt phẳng nghiêng tăng tỉ lệ với khoảng cách tính đến đỉnh của mặt phẳng nghiêng : $\mu = bx$. Hãy tìm thời gian kể từ lúc vật bắt đầu trượt cho đến lúc dừng lại.

$$ĐS: t = \frac{\pi}{\sqrt{bg\cos\alpha}}.$$

2.5. Một chất lỏng, khối lượng riêng ρ, chứa trong một ống hình chữ U có phần ống nằm ngang dài l.

Tiết diện của các phần của ống là S_1, S_2 và S_3 (Hình 2.50). Khi cân bằng, mực chất lỏng có độ cao là h. Cho chất lỏng dao động tự do. Chứng minh rằng chất lỏng dao động điều hoà và tìm tần số của dao động. Bỏ qua tác dụng của sức căng mặt ngoài và độ nhớt của chất lỏng. Bỏ qua phần nước ở hai góc khi xét chuyển động.

$$ĐS: \omega = \sqrt{\frac{g}{h + \frac{lS_1S_2}{S_3(S_1 + S_2)}}}$$



Hình 2.50

2.6. Một quả cầu đặc, đồng chất, bán kính R, có khối lượng riêng ρ_0, có thể nổi trong một chất lỏng, có khối lượng riêng ρ_L. Người ta gọi X là phần của đường kính thẳng đứng chìm trong chất lỏng và $\alpha = \frac{\rho_0}{\rho_L}$.

a) Với giá trị nào của α thì quả cầu chìm hoàn toàn hoặc chìm một nửa ?

b) Chứng minh rằng sự cân bằng của quả cầu được diễn tả bằng một hệ thức có dạng $b - X = \frac{c}{X^2}$. Hãy cho biết sự phụ thuộc của b và c vào R và α.

c) Quả cầu cân bằng với $0 < X < 2R$. Người ta ấn nhẹ quả cầu xuống rồi thả ra. Xác định chuyển động của quả cầu.

ĐS : a) $\alpha \geq 1$ (chìm hoàn toàn) ; $\alpha = 0,5$ (chìm một nửa).

b) $b = 3R$ và $c = 4\alpha R^3$.

c) $\omega = \sqrt{\frac{3gX(2R - X)}{4\alpha R^3}}$.

2.7. Một vật đứng yên trên một mặt phẳng nghiêng, có góc nghiêng $\alpha = 0,10$ rad so với phương ngang. Hệ số ma sát nghỉ giữa vật và mặt phẳng nghiêng là μ. Cho mặt phẳng nghiêng dao động điều hoà với biên độ A = 4,9 cm theo một phương nằm trong mặt phẳng nghiêng. Hỏi cần phải rung mặt phẳng nghiêng theo phương nào và với tần số f tối thiểu là bao nhiêu để vật bắt đầu trượt trên mặt phẳng nghiêng ?

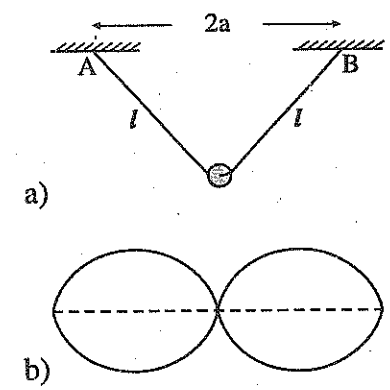
$$ĐS: f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{A}(\mu - \alpha)}.$$

2.8. Một sợi dây nhẹ, không dãn, dài $2l$, được buộc vào hai điểm A và B nằm trên đường nằm ngang, cách nhau 2a. Một hạt cườm nhỏ, nặng, trượt không ma sát dọc theo dây (Hình 2.51a).

a) Tìm tần số dao động nhỏ ω_1 của hạt cườm trong mặt phẳng vuông góc với đoạn thẳng AB.

b) Tìm tần số dao động nhỏ ω_2 của hạt cườm trong mặt phẳng thẳng đứng đi qua hai điểm A, B.

c) Với tỉ số $\frac{l}{a}$ bằng bao nhiêu thì quỹ đạo của hình chiếu của hạt cườm lên mặt phẳng sẽ có dạng được chỉ trên hình 2.51b.



Hình 2.51

$$ĐS: a)\ \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{\sqrt{l^2 - a^2}}}\ ;\ b)\ \omega_2 = \sqrt{\frac{g\sqrt{l^2 - a^2}}{l^2}}\ ;\ c)\ \frac{l}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

2.9. Một người nhảy mạo hiểm có khối lượng 70,0 kg. Người ấy dùng một dây đàn hồi có chiều dài khi chưa dãn là 25 m. Sàn nhảy cách mặt đất 50 m. Người ấy nhảy và dừng lại cách mặt đất đúng 1 m. Lấy $g = 9,8$ m/s^2.

a) Tính độ cứng k của dây.

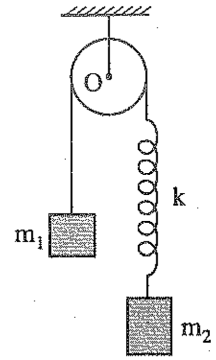
b) Tính chu kì dao động trong khi người treo vào dây (tức là thời gian của một lần nhảy).

ĐS : a) 117 N/m ; b) 7,4 s.

2.10. Một hệ cơ học như Hình 2.52. Khối lượng của ròng rọc không đáng kể. Bỏ qua ma sát ở trục O. $m_2 > m_1$. Tại thời điểm thả cho hệ tự do thì lò xo không biến dạng.

a) Chứng minh rằng hệ dao động điều hoà.

b) Tìm biên độ dao động.



Hình 2.52

$$ĐS : b)\ A = \frac{2m_1m_2g}{k(m_1 + m_2)}.$$

2.11. Một vật khối lượng m = 500 g, được treo vào đầu một lò xo có độ cứng k, dao động theo phương thẳng đứng, chịu một lực ma sát nhớt của chất lỏng. Người ta quan sát thấy vật dao động với "chu kì" T = 2 s và với biên độ cứ sau 20 dao động toàn phần thì giảm đi 10 lần. Hãy xác định hệ số ma sát nhớt b và chu kì T_0 của các dao động không tắt dần. T_0 có khác T nhiều không ? Hãy xác định độ cứng k của lò xo.

ĐS : $b = 5{,}76.10^{-2}$ N.s/m ; $T_0 \approx T$; 4,93 N/m.

2.12. (Nguyên tắc của máy ghi địa chấn).

Một vật có khối lượng m, được treo vào đầu của một lò xo không khối lượng, có độ cứng k, đầu kia của lò xo móc vào một giá đỡ. Vật dao động tắt dần do chịu một lực ma sát nhớt với hệ số ma sát là b. Khi xảy ra một cơn địa chấn, sóng địa chấn làm cho giá đỡ dao động điều hoà theo phương thẳng đứng phương trình $x_1 = a_1\cos\omega t$.

a) Lập phương trình vi phân của chuyển động tương đối của khối lượng m đối với giá đỡ S, được đánh dấu bằng li độ x.

b) Trong chế độ ổn định, hãy lập phương trình dao động x(t) của vật m.

c) Chứng minh rằng đối với tần số riêng ω_0 nhỏ của con lắc lò xo, thiết bị này có thể dùng để đo biên độ của sóng địa chấn.

ĐS : a) $x'' + \frac{b}{m}x' + \frac{k}{m}x = \omega^2 a_1\cos\omega t$;

b) $x = A\cos(\omega t + \varphi)$;

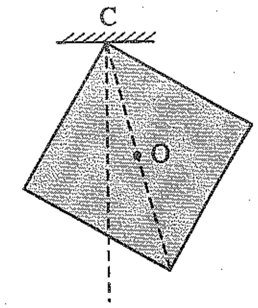
c) Vật m dao động giống như giá đỡ.

2.13. Một khối lập phương có cạnh a, khối lượng m, được treo thẳng đứng tại một trong các cạnh của nó (Hình 2.53). Hãy tìm :

a) Momen quán tính của nó đối với trục quay C.

b) Phương trình vi phân của dao động nhỏ của khối và chu kì dao động.

c) Chiều dài của con lắc đơn đồng bộ (tức là có cùng chu kì với con lắc vật lí).



Hình 2.53

ĐS : a) $I_C = \frac{2}{3}ma^2$; b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{2\sqrt{2}a}{3g}}$;

c) $l = \frac{2\sqrt{2}a}{3}$.

2.14. Một hệ S được tạo thành từ hai đĩa đồng chất D và D', cùng khối lượng riêng, cùng độ dày, cùng trục và gắn chặt với nhau. Đĩa D có khối lượng m = 200 g và bán kính r = 10 cm, đĩa D' có bán kính $r' = \frac{r}{2}$ (Hình 2.54a).

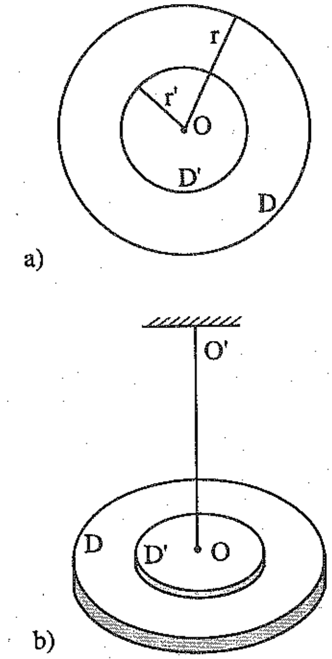
Người ta dùng hệ S làm con lắc xoắn, dây treo OO' trùng với trục đối xứng của hệ (Hình 2.54b). Biết chu kì của con lắc là 6,5 s và biên độ góc $\theta_m = 1{,}3$ rad, hãy tính :

a) Hằng số xoắn của dây OO'.

b) Tốc độ góc cực đại của con lắc.

c) Động năng cực đại của hệ S.

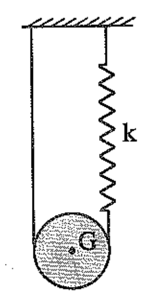
ĐS : a) $0{,}993.10^{-3}$ N.m ; b) 1,26 rad/s ; c) $0{,}84.10^{-3}$ J.



Hình 2.54

2.15. Một sợi dây đỡ một đĩa có bán kính R và khối lượng m. Một đầu dây buộc vào giá đỡ, còn đầu kia nối với một lò xo có độ cứng k (Hình 2.55). Kích thích cho đĩa dao động trong mặt phẳng của đĩa. Chứng minh rằng đĩa DĐĐH và tìm chu kì dao động của đĩa. Biết rằng đĩa không trượt trên dây.

$$ĐS : T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{8k}}.$$



Hình 2.55

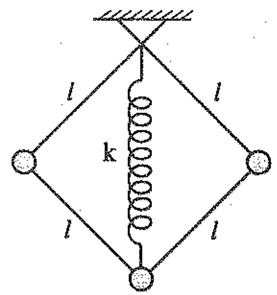
2.16. Một cơ hệ gồm ba quả cầu nhỏ giống nhau, mỗi quả có khối lượng m, được nối với nhau bằng các thanh cứng nhẹ, dài l nhờ các bản lề. Tại VTCB cơ hệ có dạng một hình vuông nhờ được giữ bởi một lò xo thẳng đứng, có độ cứng k (Hình 2.56).

a) Tìm chiều dài tự nhiên l_0 của lò xo.

b) Dịch chuyển quả cầu dưới khỏi VTCB một đoạn nhỏ x theo phương thẳng đứng (lên hoặc xuống). Hãy xác định độ biến thiên thế năng của hệ.

c) Giả sử tại VTCB người ta truyền cho quả cầu dưới một vận tốc v theo phương thẳng đứng. Hãy xác định động năng của hệ.

d) Hãy xác định chu kì dao động nhỏ của quả cầu dưới theo phương thẳng đứng.



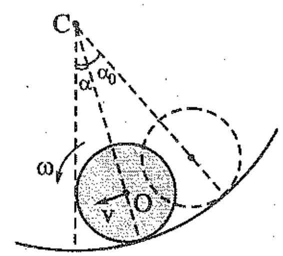
Hình 2.56

ĐS : a) $l_0 = l\sqrt{2} - \dfrac{2mg}{k}$; b) $\Delta W_t = \dfrac{1}{2}kx^2$;

c) $W_đ = mv^2$; d) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2m}{k}}$.

2.17. Một quả cầu đặc, bán kính r, lăn không trượt trong một vành đai nhám, bán kính R (R > r). Quả cầu được thả từ li độ góc α_0 (Hình 2.57). Hãy tính :

a) Áp lực của quả cầu lên vành đai tại li độ góc α bất kì.



Hình 2.57

b) Chu kì dao động của quả cầu nếu góc α_0 nhỏ.

c) Chu kì dao động của quả cầu nếu góc α_0 nhỏ và không có ma sát giữa vành đai và quả cầu.

ĐS : a) $N = \dfrac{mg}{7}(17\cos\alpha - 10\cos\alpha_0)$;

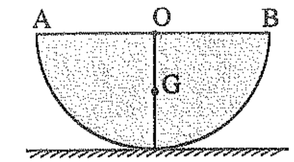
b) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{7(R-r)}{5g}}$; c) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R-r}{g}}$.

2.18. Vật rắn là một nửa hình trụ đồng chất, bán kính R, khối lượng m (Hình 2.58).

a) Chứng minh rằng momen quán tính của vật đối với trục O là $I_O = \dfrac{1}{2}mR^2$.

b) Tìm vị trí của khối tâm G của vật.

c) Vật được đặt trên một mặt phẳng nằm ngang, nhám. Ấn nhẹ một đầu cho mặt phẳng AB nghiêng đi một góc nhỏ rồi thả cho vật dao động. Tìm chu kì dao động của vật.



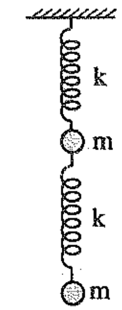
Hình 2.58

ĐS : b) $OG = \dfrac{4R}{3\pi}$; c) $T = \pi\sqrt{\dfrac{R}{g}(4,5\pi - 8)}$.

2.19. Một hệ dao động như Hình 2.59. Xét dao động theo phương thẳng đứng. Tìm :

a) Tần số của các mode dao động.

b) Tìm tỉ số các biên độ trong mỗi mode.

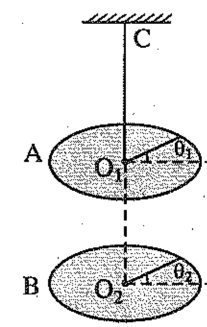


Hình 2.59

ĐS : a) $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\dfrac{k}{m}}$; $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\dfrac{k}{m}}$;

b) $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ (đồng pha) ; $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ (ngược pha).

2.20. Hai đĩa tròn A và B đồng chất, giống nhau. Mỗi đĩa có momen quán tính I đối với trục quay đi qua tâm của đĩa và vuông góc với mặt phẳng của đĩa. Đĩa A nằm ngang, tâm của đĩa gắn vào đầu dưới của một sợi dây mảnh thẳng đứng có hằng số xoắn K, đầu trên của dây gắn vào một điểm cố định C. Đĩa B cũng nằm ngang và tâm đĩa gắn vào đầu dưới của một sợi dây mảnh khác có hằng số xoắn K, đầu trên dây này gắn vào tâm của mặt dưới của đĩa A (Hình 2.60).



Hình 2.60

Ở VTCB, hai dây treo có phương thẳng đứng và không bị xoắn. Người ta quay hai đĩa trong mặt phẳng của chúng đi một li độ góc θ_1, θ_2 cho hai sợi dây xoắn lại rồi buông tay cho hệ dao động.

a) Viết phương trình vi phân của chuyển động của mỗi đĩa.

b) Tìm tần số của các mode dao động.

c) Tìm tỉ số các biên độ góc trong mỗi mode.

$$ĐS: \text{ b) } \omega_1 = \sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\frac{K}{I}}\ ;\ \omega_2 = \sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\frac{K}{I}}\ ;$$

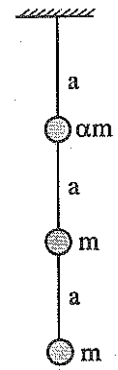
c) 0,618 (ngược pha) ; 1,618 (đồng pha).

2.21. Có ba con lắc liên kết, khối lượng lần lượt là αm, m và m, được treo như Hình 2.61. Các đoạn dây dài bằng nhau và bằng a.

a) Tìm α để một trong những tần số của mode bằng tần số của con lắc đơn có chiều dài là $\frac{a}{2}$.

b) Muốn có mode dao động như trên thì phải để ba quả cầu ở vị trí nào trước khi buông tay ? Vẽ hình minh hoạ.

ĐS : a) $\alpha = 2$.

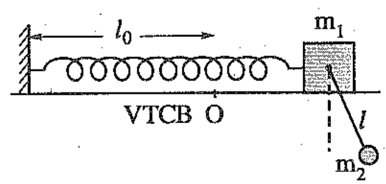


Hình 2.61

2.22. Một vật, có khối lượng m_1, nằm trên một mặt phẳng nằm ngang, không ma sát và được nối với giá đỡ bằng một lò xo có độ cứng k. Một vật khác, có khối lượng m_2, được treo vào m_1 bằng một dây dài l (Hình 2.62).

a) Lập phương trình vi phân của chuyển động của mỗi vật khi dao động nhỏ.

b) Tìm các tần số của các mode dao động khi $m_1 = m_2 = m$.



Hình 2.62

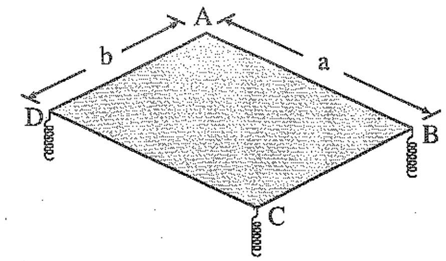
c) Các mode dao động sẽ như thế nào nếu $m_1 = m_2 = m$ và $\frac{g}{l} \gg \frac{k}{m}$.

$$ĐS: \text{ b) } \omega_{1,2} = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{2m} \pm \sqrt{\frac{g^2}{l^2} + \frac{k^2}{4m^2}}}\ ;$$

$$\text{c) } \omega_1 = \sqrt{\frac{2g}{l}}\ ;\ \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{2m}}\ .$$

2.23. Một mặt phẳng hình chữ nhật, khối lượng m, dài a, rộng b, được đỡ tại mỗi góc bởi một lò xo có độ cứng k (Hình 2.63). Các lò xo chỉ dao động theo phương thẳng đứng. Ở VTCB mặt phẳng ABCD nằm ngang. Chỉ xét dao động nhỏ.

Hãy tìm các mode dao động và tần số của mode.

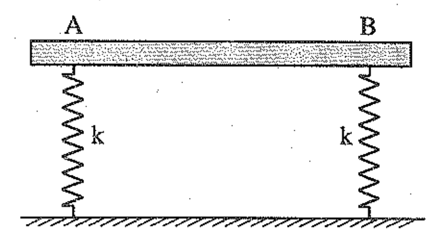


Hình 2.63

$$ĐS: \text{ mode 1 : } \omega_1 = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\ ;\ \text{mode 2 : } \omega_2 = 2\sqrt{\frac{3k}{m}}\ ;\ \text{mode 3 : } \omega_3 = \omega_2.$$

2.24. Một thanh đồng chất dài l, khối lượng m, được đỡ ở hai đầu bằng hai lò xo giống nhau, có độ cứng k (Hình 2.64). Ấn một đầu thanh xuống một đoạn nhỏ rồi thả ra. Hãy xác định chuyển động của thanh và tìm các mode dao động.

ĐS : Hai tần số của mode là $\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ và $\omega_2 = \sqrt{\frac{6k}{m}}$.



Hình 2.64

Chủ đề 3

SÓNG CƠ VÀ SÓNG ÂM

PHẦN LÍ THUYẾT

A - SÓNG CƠ. GIAO THOA SÓNG. SÓNG DỪNG

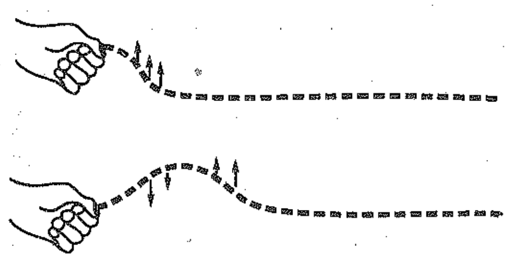
I – KHÁI NIỆM VỀ SÓNG CƠ

1. Ví dụ : Dùng một sợi dây mềm, dài, căng ngang, một đầu được gắn vào tường, đầu kia dùng tay giữ. Ta truyền cho đầu dây một xung lượng của lực $F\Delta t$ bằng cách dùng bàn tay đưa nhanh đầu dây từ thấp lên cao rồi từ cao xuống thấp. Ta thấy xuất hiện biến dạng ở đầu dây và biến dạng này lan truyền trên dây về phía đầu kia (Hình 3.1).

2. Định nghĩa

Sóng cơ là biến dạng cơ lan truyền trong một môi trường.

3. Giải thích sự tạo thành sóng



Hình 3.1

Lúc đầu, đầu dây được kéo lên cao. Đầu dây này liên kết với các phần tử liền kề nên các phần tử này cũng được kéo lên cao bằng một lực hướng lên. Chừng nào mà các điểm kế tiếp của dây còn kéo điểm kề sau nó lên cao thì biến dạng còn dịch chuyển dọc theo dây về phía đầu kia.

Cũng trong thời gian đó thì bàn tay trở về vị trí ban đầu, mỗi phần tử của dây cũng bị kéo về phía dưới sau khi đã đạt tới điểm cao nhất.

Bàn tay dao động là *nguồn của sóng* và *lực liên kết* giữa các phần tử liền kề đã truyền xung lượng của lực dọc theo dây.

Các sóng cơ khác (sóng trên mặt nước, sóng trên lò xo dài...) được tạo ra và lan truyền trong môi trường theo một cách tương tự như vậy.

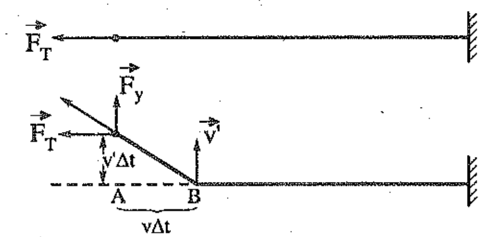
4. Các đặc điểm của chuyển động sóng

Sự lan truyền của biến dạng trong một môi trường gọi là *chuyển động sóng*. Chuyển động sóng có đặc điểm sau đây :

a) Các phần tử của môi trường chỉ chuyển động trong một phạm vi không gian rất hẹp, trong khi sóng thì truyền đi rất xa.

b) Tốc độ của chuyển động sóng chỉ phụ thuộc vào tính chất của môi trường, chứ không phụ thuộc vào tốc độ chuyển động của nguồn hay của các phần tử của môi trường có sóng truyền qua.

Ví dụ như, tốc độ của sóng trên dây phụ thuộc vào sức căng F_T của dây và khối lượng của một đơn vị chiều dài dây ρ. Sức căng F_T càng tăng thì tốc độ truyền sóng càng tăng vì mỗi phần tử của dây liên kết chặt chẽ hơn với phần tử bên cạnh. Khối lượng riêng ρ càng lớn thì quán tính của mỗi phần tử càng lớn và tốc độ truyền càng giảm.



Hình 3.2

Ta hãy thành lập công thức tính tốc độ truyền sóng trên dây. Khi lực F_y kéo dây lên cao với tốc độ v' thì trong khoảng thời gian Δt, tất cả các điểm ở bên trái điểm B chuyển động lên trên với tốc độ v' còn các điểm ở bên phải điểm B vẫn đứng yên (Hình 3.2).

Tốc độ v của sóng là tốc độ truyền biến dạng từ điểm A đến điểm B. Theo các tam giác đồng dạng, ta được hệ thức gần đúng :

$$\frac{F_T}{F_y} = \frac{v\Delta t}{v'\Delta t} = \frac{v}{v'}$$

Hệ thức trên chỉ đúng với các độ dịch chuyển nhỏ ($v'\Delta t \ll v\Delta t$) để F_T thay đổi không đáng kể.

Xung lượng của lực truyền cho dây bằng độ biến thiên động lượng của đoạn dây AB.

$$F_y\Delta t = \Delta p = (\rho v\Delta t)v'$$

$$F_T\frac{v'}{v}\Delta t = \rho v\Delta t v'$$

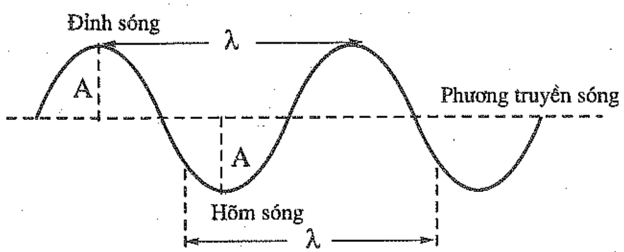
Suy ra : $$\frac{F_T}{v} = \rho v \quad \text{hay} \quad v = \sqrt{\frac{F_T}{\rho}} \qquad (3.1)$$

II – SÓNG HÌNH SIN

Việc nghiên cứu sóng hình sin có tầm quan trọng đặc biệt, không chỉ vì chúng tương đối đơn giản mà còn là vì chúng tạo thành cơ sở cho các sóng phức tạp hơn, chẳng hạn như một sóng xung là sự chồng chất của nhiều sóng hình sin.

1. Những đặc trưng của một sóng hình sin

Quan sát những ảnh chụp một sóng hình sin tại những thời điểm khác nhau (Hình 3.3) ta rút ra được những đặc trưng của sóng này.



Hình 3.3

a) *Biên độ của sóng* : Biên độ A của sóng là độ cao của một ngọn sóng hay độ sâu của một hõm sóng đối với mức cân bằng.

b) *Bước sóng* : Bước sóng λ là khoảng cách giữa hai ngọn sóng liên tiếp. Những phần tử trên sóng cách nhau một bước sóng thì dao động đồng pha với nhau.

c) *Chu kì của sóng* : Chu kì T của sóng là khoảng thời gian để hai ngọn sóng liên tiếp đi qua một điểm đã cho.

d) *Tần số của sóng* : Tần số f của sóng là số các ngọn sóng đi qua một điểm đã cho trong một đơn vị thời gian.

e) *Tốc độ truyền sóng* : Tốc độ truyền sóng v là tốc độ chuyển động của các ngọn sóng (hay của một phần bất kì của dạng sóng).

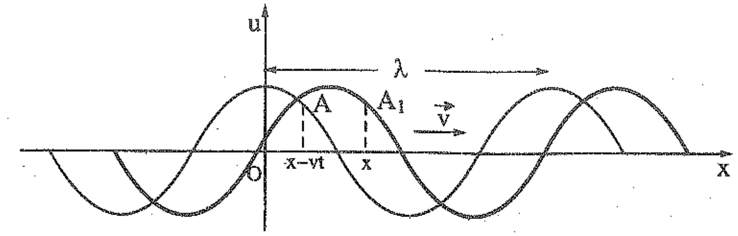
Ta có hệ thức : $$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \qquad (3.2)$$

2. Phương trình sóng

Ta hãy lập phương trình của một sóng hình sin chạy trên một dây dài.

Giả sử tại thời điểm bắt đầu quan sát (t = 0) sợi dây có dạng hình sin được miêu tả trên đồ thị ở Hình 3.4, trong đó x là toạ độ của một phần tử của dây còn u là li độ của phần tử đó. Ta thấy li độ u biến thiên điều hoà theo toạ độ x giống như li độ x của con lắc biến thiên điều hoà theo thời gian t và bước sóng λ có vai trò giống như chu kì T của con lắc. Dựa vào sự tương tự đó ta viết phương trình biểu diễn dạng sóng hình sin ở thời điểm t = 0 như sau :

$$u = A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x \qquad (3.3)$$



Hình 3.4

Sau t giây, dạng của sợi dây dịch chuyển sang phải (theo chiều dương của trục x) được một đoạn là x = vt. Từ hình 3.4 ta thấy, li độ của phần tử A_1 có toạ độ x tại thời điểm t bằng li độ của phần tử A có toạ độ x – vt tại thời điểm t = 0. Như vậy, dạng sợi dây ở thời điểm t được miêu tả bằng phương trình giống như phương trình (3) trong đó thay x bằng (x – vt).

$$u = A\cos\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) \qquad (3.4)$$

Phương trình (3.4) gọi là *phương trình sóng*. Nó cho biết li độ của một phần tử trong sóng có toạ độ x tại thời điểm t. Còn $\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)$ gọi là *pha của sóng*.

Thay $v = \frac{\lambda}{T}$ vào phương trình (3.4) ta được :

$$u = A\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) \qquad (3.5)$$

Từ phương trình (3.5) ta thấy, tại một thời điểm cho trước li độ của các phần tử cách nhau λ, 2λ,... thì có cùng một giá trị và tại một toạ độ cho trước, li độ của một phần tử sau những khoảng thời gian T, 2T... thì có cùng một giá trị.

Nếu ta đưa vào hai đại lượng là *số sóng* $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ và tần số góc $\omega = \frac{2\pi}{T}$, thì phương trình (3.5) sẽ có dạng cô đọng hơn :

$$u = A\cos(kx - \omega t) \qquad (3.6a)$$

Đối với sóng chạy sang trái (theo chiều âm của trục x), ta có :

$$u = A\cos(kx + \omega t) \qquad (3.6b)$$

Giữa tốc độ truyền sóng, tần số góc và số sóng có mối liên hệ :

$$v = \frac{\omega}{k} \qquad (3.7)$$

III – SÓNG ÂM

1. Sóng âm trong không khí là một ví dụ quan trọng của *sóng dọc*. Chẳng hạn như màng loa dao động, nén dãn không khí một cách tuần hoàn và phát ra một sóng dọc truyền trong không khí. Cũng như trong trường hợp sóng ngang, mỗi phần tử không khí trong đó có sóng dọc truyền qua chỉ dao động trên một khoảng cách nhỏ, trong khi đó chính sóng lại truyền đi những khoảng cách lớn. Các khái niệm như bước sóng, tần số và tốc độ sóng cũng được dùng để đặc trưng cho một sóng dọc. Cụ thể là :

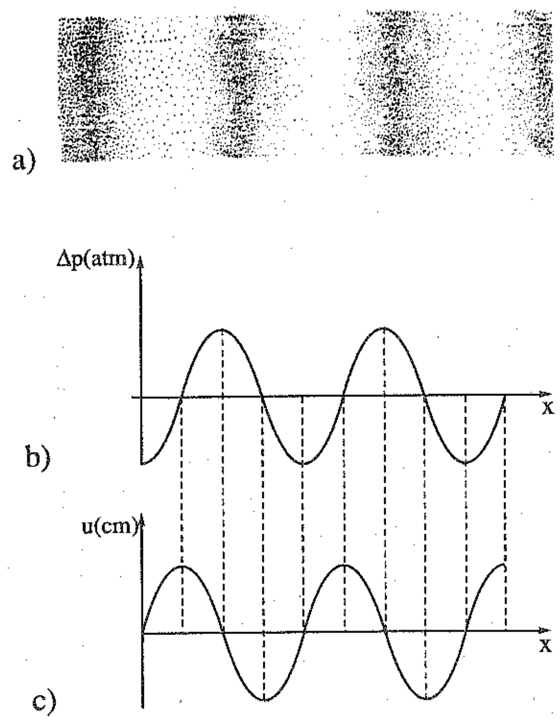
- Bước sóng là khoảng cách giữa hai chỗ nén liên tiếp hay hai chỗ dãn liên tiếp.
- Tần số là số lần chỗ nén đi qua một điểm đã cho trong 1 giây.
- Tốc độ của sóng là tốc độ truyền những chỗ nén.

2. Nhưng sóng âm cũng có thể được nhìn từ quan điểm áp suất. Thật vậy, ở chỗ nén các phần tử không khí ở gần nhau nhất, nên áp suất ở đó cao hơn so với mức bình thường khi chưa có sóng âm đi qua. Còn ở chỗ dãn các phần tử không khí ở xa nhau, nên áp suất ở đó thấp hơn mức bình thường.

Thêm nữa, việc đo *độ biến thiên áp suất* bằng thực nghiệm dễ hơn là đo li độ của các phần tử không khí. Vì thế sóng âm còn được gọi là *sóng áp suất*.

3. Hình 3.5 là những đồ thị biểu diễn một sóng âm truyền theo trục x tại một thời điểm đã cho theo quan niệm sóng âm là sóng áp suất (Hình 3.5b) hay là sóng li độ (Hình 3.5c), trong mối liên hệ với các chỗ nén, dãn (Hình 3.5a).

Cần lưu ý rằng *sóng li độ vuông pha với sóng áp suất*. Ở nơi nào áp suất cực đại hoặc cực tiểu thì ở nơi đó li độ bằng không. Còn ở nơi nào biến thiên áp suất bằng không thì ở nơi đó li độ cực đại hoặc cực tiểu (xét về giá trị đại số).



Hình 3.5

IV – KHẢO SÁT SÓNG VỀ PHƯƠNG DIỆN NĂNG LƯỢNG

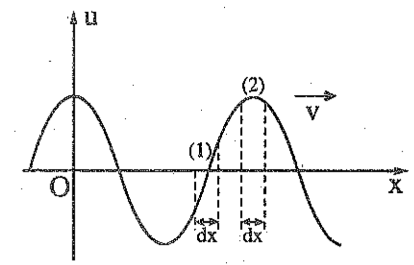
Các sóng truyền năng lượng từ phần tử này cho phần tử khác của môi trường là do có lực liên kết giữa các phần tử liền kề. Mỗi phần tử khi thực hiện công để làm phần tử đứng sau nó dịch chuyển, đã truyền cho phần tử này một năng lượng.

Để miêu tả sự phân bố năng lượng theo không gian tại một thời điểm cho trước, người ta dùng một đại lượng gọi là *mật độ năng lượng* $\frac{dW}{dx}$. Để miêu tả sự truyền năng lượng theo thời gian qua một điểm cho trước, người ta dùng một đại lượng gọi là *công suất truyền* $\frac{dW}{dt}$.

1. Trước hết, ta xét sóng một chiều, ví dụ sóng hình sin chạy trên một dây dài.

a) Mật độ năng lượng $\frac{dW}{dx}$

Mỗi phần tử của dây khi có sóng truyền qua thì nhận được năng lượng và dao động điều hoà theo phương vuông góc với dây (Hình 3.6). Tại thời điểm đã cho, phần tử (1) có động năng và thế năng đều cực đại vì nó ở VTCB và bị kéo căng nhiều nhất. Còn phần tử (2) có động năng và thế năng đều bằng 0 vì nó ở vị trí biên và không bị kéo căng. Như vậy, động năng và thế năng của mỗi phần tử của dây biến thiên đồng pha. Đây là sự khác biệt giữa hệ mở (phần tử của dây) với hệ kín, con lắc lò xo).



Hình 3.6

Gọi ρ là khối lượng của một đơn vị độ dài, dx là độ dài của một phần tử. Mỗi phần tử có năng lượng là :

$$dW = dW_d + dW_t = 2dW_d = 2.\frac{1}{2}(dm)\left(\frac{du}{dt}\right)^2$$

Thay dm = ρdx ; u = Acos(kx − ωt) vào, ta được :

$$dW = (\rho dx)\omega^2A^2\sin^2(kx - \omega t)$$

$$\frac{dW}{dx} = \rho\omega^2A^2\sin^2(kx - \omega t) \qquad (3.8)$$

Như vậy, tại một thời điểm cho trước, mật độ năng lượng phân bố dọc theo dây theo quy luật của hàm $\sin^2 kx$.

b) Công suất truyền : Công suất truyền là năng lượng truyền qua một điểm của dây trong một giây.

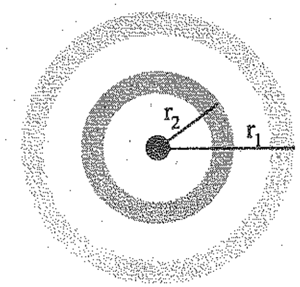
$$\mathscr{P} = \frac{d\overline{W}}{dt} = \rho\left(\frac{dx}{dt}\right)\omega^2 A^2 \sin^2(kx - \omega t) = \rho v\omega^2 A^2 \sin^2(kx - \omega t)$$

Công suất truyền *trung bình* :

$$\overline{\mathscr{P}} = \frac{d\overline{W}}{dt} = \rho v\omega^2 A^2 \overline{\sin^2(kx - \omega t)}$$

$$\overline{\mathscr{P}} = \frac{1}{2}\rho v\omega^2 A^2$$

2. Đối với sóng ba chiều, ví dụ sóng phát ra từ một nguồn âm. Khi môi trường đồng tính và đẳng hướng, thì *mặt đầu sóng*, tức là mặt chứa các điểm dao động đồng pha, là các mặt cầu có tâm tại nguồn (Hình 3.7). Trong trường hợp này thì công suất truyền trung bình là năng lượng trung bình truyền qua diện tích S của mặt cầu trong một đơn vị thời gian.



Hình 3.7

Lập luận tương tự như trên, ta có :

$$\overline{\mathscr{P}} = \frac{d\overline{W}}{dt} = \left(\rho\frac{dV}{dt}\right)\omega^2 A^2 \overline{\sin^2(kr - \omega t)} \qquad (3.11)$$

Thay $dV = Sdr$ và $\frac{dr}{dt} = v$ vào ta được :

$$\overline{\mathscr{P}} = \frac{d\overline{W}}{dt} = \frac{1}{2}\rho S v\omega^2 A^2 \qquad (3.12)$$

Cuối cùng, cường độ sóng I là công suất truyền qua một đơn vị diện tích mặt cầu

$$I = \frac{\overline{\mathscr{P}}}{S} = \frac{1}{2}\rho v\omega^2 A^2 \qquad (3.13)$$

3. Đối với sóng một chiều như sóng ngang truyền trên dây hay sóng xung dọc truyền trong một thanh kim loại dài, đồng chất, có tiết diện ngang không đổi, thì biên độ sóng cũng như cường độ sóng không giảm theo khoảng cách đến nguồn. Còn đối với sóng cầu thì càng ở xa nguồn, biên độ dao động của các phần tử cũng như cường độ sóng càng giảm.

Thật vậy, ta hãy xét hai mặt cầu S_1, S_2 ở cách nguồn r_1, r_2. Theo định luật bảo toàn năng lượng, công suất truyền qua hai mặt cầu bằng nhau. Ta có :

$$\mathscr{P} = \frac{1}{2}\rho S_1 v\omega^2 A_1^2 = \frac{1}{2}\rho S_2 v\omega^2 A_2^2$$

$$S_1 A_1^2 = S_2 A_2^2 \Rightarrow 4\pi r_1^2 A_1^2 = 4\pi r_2^2 A_2^2$$

hay

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1} \qquad (3.14)$$

Biên độ sóng giảm, tỉ lệ nghịch với khoảng cách đến nguồn.

Mặt khác, từ $\mathscr{P} = I_1 S_1 = I_2 S_2$ ta suy ra :

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \qquad (3.15)$$

Cường độ sóng giảm tỉ lệ nghịch với bình phương của khoảng cách đến nguồn.

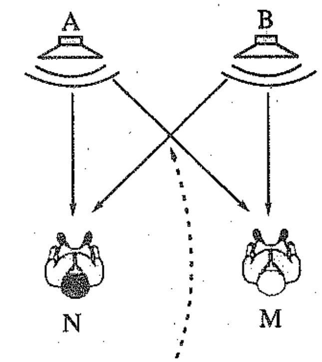
Trong thực tế, do có ma sát nên một phần năng lượng dao động chuyển thành nhiệt năng. Vì thế, biên độ và cường độ của sóng một chiều giảm theo khoảng cách đến nguồn còn đối với sóng 3 chiều thì sự giảm này còn rõ rệt hơn.

V – GIAO THOA SÓNG

1. Nguyên lí chồng chập

Chuyển động sóng còn có một đặc điểm nữa và là đặc điểm quan trọng nhất, đó là các sóng có thể đi qua nhau mà không ảnh hưởng đến nhau, không tương tác với nhau.

Ví dụ : Có hai loa của một dàn âm thanh nổi đặt ở A và B và hai người nghe nhạc đứng ở M và N (Hình 3.8). Sóng âm truyền từ A đến M phải đi qua sóng âm truyền từ B đến N. Thế nhưng cả hai người đều nghe thấy nhạc phát ra rất tốt, không hề có sự méo tiếng hoặc mất tiếng.



Hình 3.8

Nhiều thí nghiệm chứng tỏ rằng chuyển động sóng tuân theo *nguyên lí chồng chập* sau đây :

Khi hai hay nhiều sóng đồng thời có mặt tại một điểm của môi trường, thì li độ của phần tử tại điểm đó bằng tổng đại số các li độ gây ra bởi từng sóng truyền riêng rẽ :

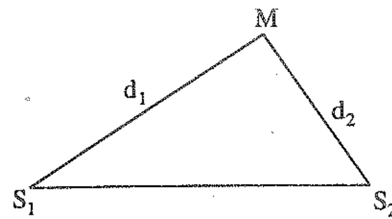
$$u = u_1 + u_2 + \ldots = \Sigma u_i \qquad (3.16)$$

Nguyên lí chồng chập giúp ta giải thích được các hiện tượng như giao thoa và sóng dừng.

2. Sự giao thoa của hai sóng

a) Hai nguồn sóng S_1, S_2 trong thí nghiệm ở SGK là hai nguồn sóng giống hệt nhau.

b) Xét tại một điểm M trên mặt nước tại đó có hai sóng gặp nhau, điểm này cách S_1 một đoạn d_1, cách S_2 một đoạn d_2 (Hình 3.9). Gọi u_{1M} và u_{2M} là li độ của phần tử nước tại M gây ra bởi từng sóng truyền riêng rẽ. Ta có :



Hình 3.9

$$u_{1M} = a\cos(kd_1 - \omega t)$$

$$u_{2M} = a\cos(kd_2 - \omega t)$$

c) Theo nguyên lí chồng chập thì li độ của điểm M trong sóng tổng hợp bằng :

$$u_M = u_{1M} + u_{2M} = a\cos(kd_1 - \omega t) + a\cos(kd_2 - \omega t)$$

hay
$$u_M = 2a\cos k\frac{d_1 - d_2}{2}\cos\left[k\left(\frac{d_1 + d_2}{2}\right) - \omega t\right]$$

d) Vị trí của các điểm dao động với biên độ cực đại :

$$\left|\cos k\frac{d_1 - d_2}{2}\right| = 1 \Rightarrow d_1 - d_2 = n\lambda \qquad (3.17)$$

Vị trí của những điểm không dao động :

$$\cos k\frac{d_1 - d_2}{2} = 0 \Rightarrow d_1 - d_2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda \qquad (3.18)$$

với $n = 0, \pm 1, \pm 2...$

e) Điều kiện để có hiện tượng giao thoa là hai sóng phải xuất phát từ hai nguồn kết hợp.

VI – SÓNG DỪNG

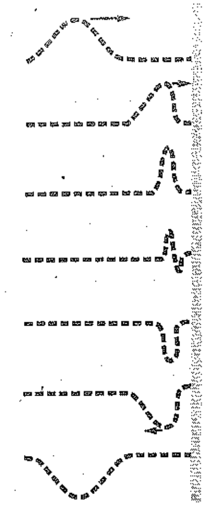
1. Sự phản xạ của các sóng

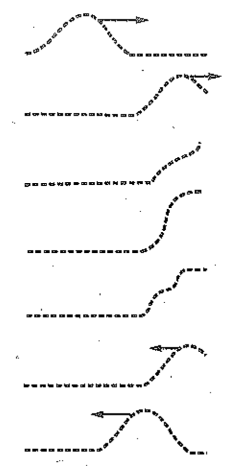
Khi sóng gặp một vật chướng ngại hay truyền tới điểm cuối của môi trường trong đó có sóng truyền thì ít nhất cũng có một phần phản xạ lại. Sóng nước phản xạ từ tảng đá hay từ bờ ao, bờ sông. Ta thường nghe thấy tiếng vang, đó là sóng âm phản xạ lại.

Ta hãy xét sự phản xạ của một sóng xung truyền trên dây (Hình 3.10).

Nếu điểm cuối dây được giữ cố định vào giá đỡ thì khi sóng truyền đến, nó tác dụng vào giá đỡ một lực hướng lên. Giá đỡ tác dụng trở lại một phản lực hướng xuống vào điểm cuối dây. Phản lực này làm phát sinh một sóng xung phản xạ ngược pha với sóng tới (Hình 3.10).

Nếu điểm cuối dây để tự do thì nó không chịu lực kéo lại của giá đỡ hay của phần dây sau nó, nên nó dịch chuyển vượt quá biên độ bình thường của sóng. Điểm cuối dây kéo dây lên phía trên và lực kéo này làm phát sinh một sóng xung phản xạ đồng pha với sóng tới (Hình 3.11).

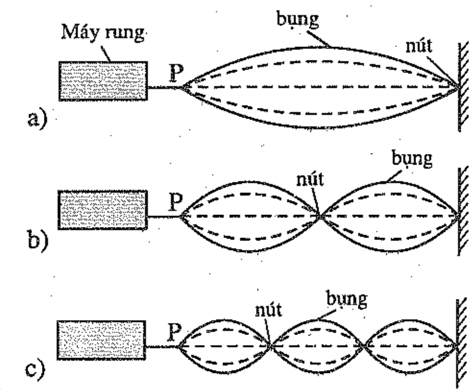

Hình 3.10


Hình 3.11

2. Sóng dừng

a) Thế nào là sóng dừng ?

Nếu dùng một máy rung điều khiển một đầu dây còn đầu kia của dây được buộc vào giá đỡ, thì có một sóng sinh ra, lan truyền đến đầu cố định và phản xạ trở lại. Nếu máy tiếp tục rung thì trên dây sẽ xuất hiện các sóng lan truyền theo hai chiều ngược nhau. Các sóng này giao thoa với nhau và thường tạo ra một trạng thái lộn xộn. Tuy nhiên, nếu máy rung sợi dây với một tần số thích hợp nào đó thì sự giao thoa của các sóng ngược chiều nhau trên dây sẽ tạo ra một *sóng dừng* với biên độ lớn (Hình 3.12).

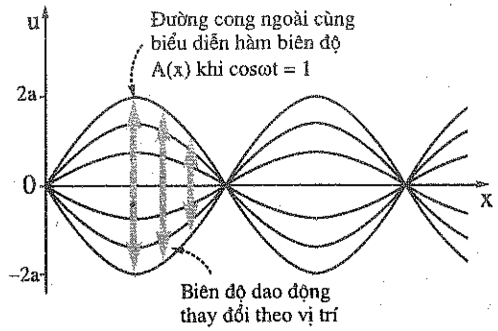


Hình 3.12

Thuật ngữ "sóng dừng chỉ rằng sóng tổng hợp hình như đứng yên. Những điểm trên dây, tại đó các sóng triệt tiêu nhau thì không dao động và được gọi là *nút*. Những điểm tại đó các sóng đồng pha với nhau thì dao động với biên độ cực đại và được gọi là *bụng*.

b) Phương trình của sóng dừng

Để đơn giản, ta xét một sóng dừng sinh ra do sự giao thoa của một sóng tới và một sóng phản xạ. Vì li độ u của sóng tổng hợp luôn luôn bằng không tại điểm cuối dây nên theo nguyên lí chồng chập, ta có :



Hình 3.13

$u = a\cos(kx - \omega t) - a\cos(kx + \omega t)$

$u = 2a\sin kx \sin\omega t$ (3.19)

hay $u = A(x)\sin\omega t$

trong đó $A(x) = 2a\sin kx$ (3.20)

Hình 3.13 là đồ thị biểu diễn phương trình (3.19) tại những thời điểm khác nhau.

c) Những đặc điểm của sóng dừng

• Phương trình (3.19) cho thấy li độ u không phải là một hàm của (x – vt) hay (x + vt), như vậy *sóng tổng hợp không phải là một sóng chạy*. Việc tách ra một thừa số $\sin\omega t$ không phụ thuộc x cho thấy *không có sự truyền pha từ điểm này sang điểm khác*.

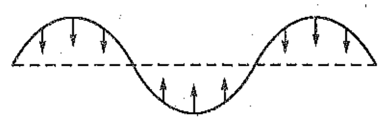
• Hàm $A(x) = 2a\sin kx$ xác định biên độ dao động của mỗi phần tử tại vị trí x. Các nút của sóng dừng là những điểm có biên độ bằng không.

$$A(x) = 2a\sin kx = 2a\sin\frac{2\pi}{\lambda}x = 0$$

$$\Rightarrow \quad kx_n = \frac{2\pi}{\lambda}x_n = n\pi \quad (n = 0, 1, 2, 3,...)$$

Như vậy nút thứ n có toạ độ :

$$x_n = n\frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, 3,...) \qquad (3.21)$$



Hình 3.14

ta thấy các nút cạnh nhau cách nhau $\frac{\lambda}{2}$.

Việc tồn tại những nút là đặc điểm quan trọng nhất của sóng dừng.

Các phần tử nằm trong khoảng giữa hai nút liên tiếp thì dao động đồng pha với nhau vì tại đó hàm A(x) không đổi dấu (hoặc dương hoặc âm). Các phần tử nằm ở hai phía của một nút thì dao động ngược pha vì hàm A(x) đổi dấu khi qua một nút (Hình 3.14).

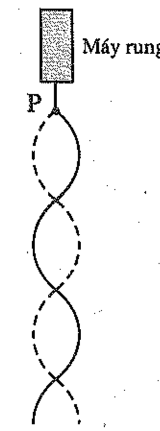
d) Điều kiện để có sóng dừng. Các tần số cộng hưởng

Đối với một dây có hai đầu cố định thì khi có sóng dừng, hai đầu dây phải là nút, tức là biên độ A = 0 tại x = 0 và tại $x = l$.

Tại x = 0 thì A = 0.

Tại $x = l$ thì $\sin kl = 0$ khi $kl = n\pi$ (n = 1, 2, 3,...) hay $\frac{2\pi}{\lambda}l = n\pi$. Suy ra điều kiện để có sóng dừng là :

$$\left.\begin{aligned} & l = n\frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, 3,...) && (a) \\ \text{hoặc} \quad & \lambda = \frac{2l}{n} && (b) \\ \text{hoặc} \quad & f = \frac{nv}{2l} && (c) \end{aligned}\right\} (3.22)$$



Hình 3.15

Tại sao các tần số có giá trị cho bởi công thức (3.22c) lại được gọi là tần số cộng hưởng ?

Từ thí nghiệm Hình 3.15, ta thấy biên độ dao động của các bụng lớn gấp nhiều lần biên độ dao động của nguồn và đầu P có thể coi là một nút. Như vậy, hiện tượng sóng dừng giống như hiện tượng cộng hưởng của con lắc lò xo và ta có thể xem một dây khi có sóng dừng là một ví dụ về một vật dao động ở tần số cộng hưởng.

Tần số cộng hưởng thấp nhất $f_1 = \frac{v}{2l}$ gọi là *tần số cơ bản của dây*. Các sóng dừng ở tần số cao hơn gọi là *hoạ ba* (ba là từ Hán – Việt, có nghĩa là sóng). Sóng dừng ở tần số $f_2 = 2f_1$ gọi là hoạ ba bậc hai, sóng dừng ở tần số $f_3 = 3f_1$ gọi là hoạ ba bậc ba...

Đối với một dây có một đầu cố định, một đầu tự do thì đầu tự do luôn luôn là một bụng sóng (Hình 3.15). Khi ấy điều kiện để có sóng dừng là :

$$l = n\frac{\lambda}{4} \quad (n = 1, 3, 5,...)$$

$$\text{hoặc} \quad \lambda = \frac{4l}{n} \qquad (3.23)$$

$$\text{hoặc} \quad f = n\frac{v}{4l} = nf_1$$

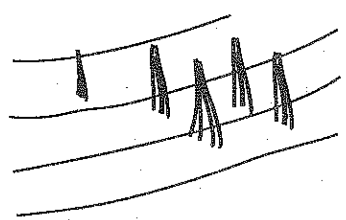
e) Xét về mặt năng lượng thì thuật ngữ "sóng dừng" cũng có ý nghĩa. Vì các điểm nút luôn luôn đứng yên nên không có năng lượng truyền qua các điểm này. Vì thế năng lượng không truyền đi dọc theo dây mà "dừng" tại chỗ trong dây. Xét từng đoạn dây hay xét cả dây, năng lượng chỉ biến đổi từ dạng thế năng (năng lượng của biến dạng) sang động năng và ngược lại. Tuy nhiên, trong thực tế do có ma sát của dây với không khí nên biên độ của bụng sóng đạt tới một giá trị không đổi khi tốc độ tiêu hao năng lượng của dây do ma sát bằng tốc độ cung cấp năng lượng của nguồn cho dây. Khi ấy nút không thật sự đứng yên mà hơi dao động, vì có năng lượng truyền qua.

VII – SỰ NHIỄU XẠ

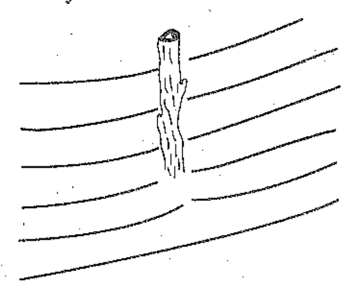
1. Hiện tượng nhiễu xạ

Khi gặp chướng ngại vật, sóng uốn cong nhẹ quanh nó và đi vào miền ở đằng sau vật. *Hiện tượng này gọi là sự nhiễu xạ.* Nhờ có sự nhiễu xạ mà ta có thể nghe được tiếng nói của một người đứng sau một bức tường vì sóng âm đã đi vòng quanh tường.

Tầm quan trọng của hiện tượng nhiễu xạ phụ thuộc vào bước sóng và kích thước của chướng ngại vật. Nếu bước sóng lớn hơn vật rất nhiều thì sóng uốn cong xung quanh vật như thể không có vật (Hình 3.16a). Nếu vật lớn hơn (Hình 3.16b) thì xuất hiện một miền "tối" sau vật. Chú ý rằng ở Hình 3.17 thì hai chướng ngại vật giống nhau nhưng ở Hình 3.17b, bước sóng lớn hơn nên xuất hiện sự khúc xạ vào miền "tối". Một cách tổng quát, chỉ khi bước sóng nhỏ hơn kích thước của chướng ngại vật rất nhiều thì mới xuất hiện một miền "tối" rõ rệt.

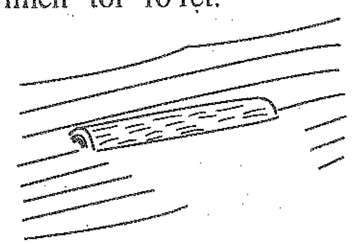


a) Sóng mặt nước truyền qua các cây lúa

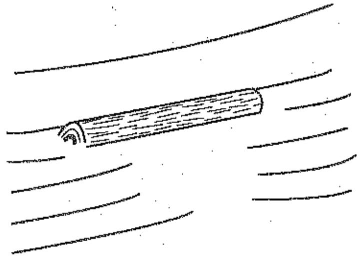


b) Sóng mặt nước truyền qua một cọc gỗ

Hình 3.16



a) Sóng có bước sóng ngắn truyền qua một khúc gỗ



b) Sóng có bước sóng dài truyền qua khúc gỗ

Hình 3.17

2. Định nghĩa

Hiện tượng sóng đổi phương truyền đồng thời đổi dạng sóng khi gặp chướng ngại vật gọi là sự nhiễu xạ.

3. Cách thức mà sóng mang năng lượng đằng sau các chướng ngại vật bằng cách uốn xung quanh các vật này hoàn toàn trái ngược với cách thức mà các hạt vật chất mang năng lượng. Sau đây là một ví dụ : Nếu ta nấp sau một bức tường sẽ không bị ném trúng bởi một quả bóng từ phía bên kia tường, nhưng ta có thể nghe được tiếng nói từ hướng đó do có sự nhiễu xạ của sóng âm trên các bờ mép tường.

B – HIỆN TƯỢNG PHÁCH VÀ HIỆU ỨNG ĐỐP-PLE

I – HIỆN TƯỢNG PHÁCH

1. Ví dụ

Nếu chúng ta nghe cách nhau vài phút hai âm có tần số lần lượt là 552 Hz và 564 Hz thì hầu như chúng ta không phân biệt được hai âm đó. Nhưng nếu hai âm đó đến tai ta một cách đồng thời thì âm mà chúng ta nghe thấy lại là âm có tần số 558 Hz, ngoài ra chúng ta còn nghe thấy sự biến thiên mạnh của cường độ âm. Nó mạnh lên và yếu đi một cách tuần hoàn với tần số 12 Hz.

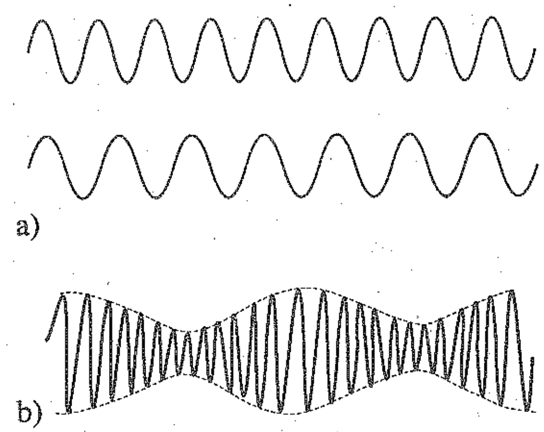
2. Định nghĩa

Những sự thay đổi cường độ âm một cách tuần hoàn gọi là phách.

3. Lập phương trình dao động tổng hợp (tức của phách)

Để đơn giản, ta giả sử hai sóng âm đến tai ta có cùng biên độ (Hình 3.18) :

$u_1 = a\sin\omega_1 t$; $u_2 = a\sin\omega_2 t$



Hình 3.18

Theo nguyên lí chồng chập, ta có :

$$u = u_1 + u_2 = a(\sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t)$$

$$u = 2a\cos\left(2\pi\frac{(f_1 - f_2)}{2}t\right)\sin\left(2\pi\frac{(f_1 + f_2)}{2}t\right)$$

$$\Rightarrow \quad u = 2a\cos 2\pi f't \sin 2\pi ft$$

Âm mà ta nghe được có tần số $f = \frac{(f_1 + f_2)}{2}$ và biên độ của âm này biến thiên tuần hoàn theo thời gian với tần số $f' = \frac{(f_1 - f_2)}{2}$ (Hình 3.18b).

4. Nếu $f_1 \approx f_2$ thì $f' \ll f$. Khi ấy biên độ của âm nghe được thay đổi rất chậm theo thời gian.

5. Mỗi phách xảy ra khi $\cos 2\pi f't = \pm 1$. *Nó xảy ra hai lần trong một chu kì*, do đó tần số của phách là :

$$f_{phách} = f_1 - f_2$$

6. Ứng dụng

Hiện tượng phách có thể xảy ra với bất kì loại sóng nào và được dùng như một phương pháp để so sánh tần số. Các nhạc sĩ sử dụng hiện tượng phách để lên dây đàn. Nếu một nhạc cụ phát ra âm ở cạnh một âm có tần số chuẩn và lên dây đàn cho tới khi hiện tượng phách biến mất thì nhạc cụ đó đã được lên dây ở tần số chuẩn (tần số đúng).

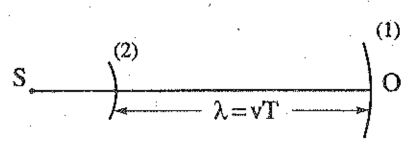
II – HIỆU ỨNG ĐỐP-PLE

1. Ví dụ

Một xe cảnh sát đang chạy trên đường phát ra tiếng còi có tần số 1000 Hz. Nếu bạn đỗ xe ở lề đường, bạn sẽ nghe thấy một âm có tần số khác. *Những sự thay đổi tần số của âm liên quan đến chuyển động gọi là hiệu ứng Đốp-ple.*

2. Thành lập công thức

Giả sử không khí đứng yên trong HQC của chúng ta. Tại t = 0, nguồn âm S đứng yên phát ra một ngọn sóng (1). Sau thời gian bằng một chu kì T, tức là tại thời điểm t = t, thì nguồn lại phát ra ngọn sóng (2). Trong thời gian đó ngọn sóng (1) đã đi được đoạn đường bằng một bước sóng λ (Hình 3.19) :



Hình 3.19

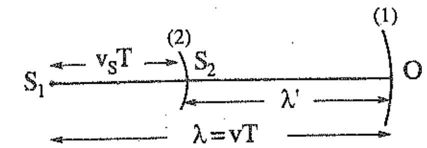
$$\lambda = vT$$

Một người quan sát O sẽ nhận được 2 ngọn sóng liên tiếp cách nhau λ sau một khoảng thời gian là một chu kì T.

a) Người quan sát O đứng yên, nguồn S chuyển động theo phương đi qua người quan sát.

• Nguồn S chuyển động lại gần người quan sát với vận tốc v_S :

Khi ngọn sóng (1) trong một chu kì đi được đoạn đường $\lambda = vT$ (v là tốc độ của âm) thì nguồn âm đi được đoạn đường $S_1S_2 = v_ST$ và ở vị trí S_2 nó phát ra ngọn sóng thứ (2) (Hình 3.20). Do đó khoảng cách giữa hai ngọn sóng liên tiếp mà người quan sát ở O nhận được là :



Hình 3.20

$$\lambda' = vT - v_ST = T(v - v_S) \Rightarrow \lambda' = (v - v_S)\frac{\lambda}{v}$$

$$\lambda' = \left(1 - \frac{v_S}{v}\right)\lambda \text{ hay } f' = \frac{vf}{v - v_S} \quad \left(S \xrightarrow{v_S} \underset{\text{đứng yên}}{O}\right) \quad (3.24)$$

• Nguồn chuyển động ra xa người quan sát :

Lập luận tương tự ta được :

$$\lambda' = \left(1 + \frac{v_S}{v}\right)\lambda \text{ hay } f' = \frac{vf}{v + v_S} \quad \left(\xleftarrow{v_S} S \quad O\right) \quad (3.25)$$

Kết luận : Khi nguồn âm chuyển động lại gần người quan sát đứng yên, theo phương đi qua người quan sát thì người quan sát nghe thấy âm cao lên, còn nếu chuyển động ra xa thì âm trầm xuống.

b) Nguồn đứng yên và người quan sát chuyển động theo phương đi qua nguồn :

Trong trường hợp này, khoảng cách giữa hai ngọn sóng (tức bước sóng) không thay đổi nhưng vận tốc của ngọn sóng đối với người quan sát thay đổi.

+ Khi người quan sát lại gần nguồn :

$$v' = v + v_0$$

$$f' = \frac{v'}{\lambda} = \frac{(v + v_0)f}{v}$$

$$\left(S \xleftarrow{v_0} O\right) \quad f' = \frac{v + v_0}{v}f \quad (3.26)$$

Tương tự, khi người quan sát chuyển động ra xa nguồn :

$$f' = \frac{v - v_0}{v} f \qquad \left(S \quad O \xrightarrow{v_S}\right) \qquad (3.27)$$

c) Cả nguồn và người quan sát đều chuyển động theo phương qua chúng

$$f' = f\left(\frac{v \pm v_0}{v \mp v_s}\right) \qquad \begin{cases} + : \text{lại gần} \ ; \ - \text{ra xa.} \\ + : \text{ra xa} \ ; \quad - \text{lại gần.} \end{cases}$$

Ta có thể chọn một *chiều dương là chiều từ S đến O*, khi ấy ta có công thức đại số :

$$f' = f\left(\frac{v - v_0}{v - v_s}\right) \qquad \begin{cases} v_0 > 0, v_S > 0 : \text{cùng chiều dương ;} \\ v_0, v_S < 0 : \text{ngược chiều dương.} \end{cases}$$

3. Hiệu ứng Đốp-ple còn xảy ra đối với sóng điện từ (sóng vô tuyến, sóng ánh sáng)

Hiệu ứng Đốp-ple đối với sóng ánh sáng nhìn thấy đã cho phép các nhà thiên văn xác định sự chuyển động của các ngôi sao, thiên hà đối với Trái Đất. Sự dịch chuyển về phía đỏ, tức là về phía bước sóng dài, tần số lớn, chứng tỏ các thiên hà đang chuyển động ra xa Trái Đất và càng ra xa chúng chuyển động càng nhanh.

Đối với sóng ánh sáng $v = c = 3.10^8$ m/s ta phải áp dụng công thức Đốp-ple tương đối tính :

$$f' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad \text{với} \quad \beta = \frac{u}{c} \qquad \begin{cases} u > 0 : \text{lại gần} \\ u < 0 : \text{ra xa.} \end{cases}$$

hay gần đúng : $f' = f_0\left(1 + \frac{u}{c}\right)$, u là vận tốc tương đối của nguồn đối với người quan sát.

PHẦN BÀI TẬP VÍ DỤ

3.1. Một sợi dây có khối lượng riêng tính theo chiều dài ρ = 525 g/m, được căng với một lực căng $F_T = 45$ N. Một sóng truyền theo dây có tần số f = 120 Hz và có biên độ A = 8,5 mm. Tìm :

a) Tần số góc ω và tốc độ v của sóng.

b) Công suất truyền năng lượng theo dây.

Giải

a) $\omega = 2\pi f = 2\pi.120 = 754$ rad/s

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\rho}} = \sqrt{\frac{45}{0,525}} = 9,26 \text{ m/s}$$

b) $\mathscr{P} = \frac{1}{2}\rho v\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}(0,525).(9,26).(754)^2.(0,0085)^2 \approx 100$ W.

3.2. Phương trình của một sóng ngang truyền trên một sợi dây dài được cho bởi hàm u(x, t) là : u = 2,0cos(20x + 600t) (mm). Tìm :

a) Biên độ, tần số, tốc độ và bước sóng của sóng.

b) Tốc độ cực đại của một phần tử của dây.

c) Chiều truyền của sóng.

Giải

a) Theo phương trình sóng u = Acos(kx + ωt) ta suy ra : A = 2,0 mm.

$$\omega = 2\pi f = 600 \text{ s}^{-1} \Rightarrow f = \frac{600}{2\pi} = 95,5 \text{ Hz}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 20 \text{ m}^{-1} \Rightarrow \lambda = \frac{\pi}{10} = 0,314 \text{ m}$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{600}{20} \text{ m/s} \Rightarrow v = 30 \text{ m/s}$$

b) $$v(x) = \frac{du}{dt} = -A\sin(kx + \omega t).\omega = -A\omega\sin(kx + \omega t)$$

$$v_{max} = A\omega = 2,0.600 = 1\,200 \text{ mm/s} = 1,20 \text{ m/s}$$

c) Sóng truyền theo chiều âm của trục x.

3.3. Một sóng có tần số 500 Hz, có tốc độ 350 m/s.

a) Hai điểm trên phương truyền sóng phải cách nhau bao nhiêu để hai phần tử tại đó khác nhau về pha là $\frac{\pi}{3}$ rad ?

b) Hiệu số pha của một phần tử tại một điểm nào đó, cách nhau 1,00 ms về thời gian, là bao nhiêu ?

Giải

a) Giả sử sóng truyền từ điểm M đến điểm N theo chiều dương. Tại một thời điểm t, ta có :

$$u_M = A\cos(kx_M - \omega t)$$
$$u_N = A\cos(kx_N - \omega t)$$

Hiệu số pha là : $(kx_M - \omega t) - (kx_N - \omega t) = k(x_M - x_N)$

$$k(x_M - x_N) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}d = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \quad d = \frac{\lambda}{6} = \frac{v}{6f} = \frac{350}{6.500} = 0{,}1166 \text{ m} \approx 11{,}7 \text{ cm}$$

b) Xét dao động của một phần tử tại hai thời điểm khác nhau :

$$u(x, t_1) = A\cos(kx - \omega t_1)$$

$$u(x, t_2) = A\cos(kx - \omega t_2)$$

Hiệu số pha là : $\omega(t_2 - t_1) = 2\pi f\Delta t = 2\pi.500.1{,}00.10^{-3} = \pi$ rad.

3.4. Phương trình của một sóng ngang trên một sợi dây là :

$u = 2{,}0\sin(20x - 600t)$ (mm). Sức căng của dây là 15 N. Hỏi :

a) Tốc độ của sóng.

b) Khối lượng của một mét dây.

Giải

$$u = A\sin(kx - \omega t)$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{600}{20} = 30 \text{ m/s}$$

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\rho}} \Rightarrow \rho = \frac{F_T}{v^2} = \frac{15}{900} \text{ kg/m} \approx 16{,}7 \text{ g/m}$$

3.5. Phương trình của một sóng chạy trên dây là $u(x,t) = 0{,}05\cos(3\pi x - 40\pi t)$. Hãy xác định công suất truyền tại một vị trí cho trước như một hàm của thời gian. Biết khối lượng tính trên một đơn vị độ dài $\rho = 1{,}5.10^{-3}$kg/m.

Giải

$$\mathscr{P} = \frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dx}.\frac{dx}{dt} = v\frac{dW}{dx} = v\rho\omega^2A^2\sin^2(kx - \omega t)$$

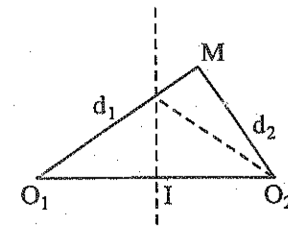
trong đó $k = 3\pi \text{ m}^{-1}$; $\omega = 40\pi \text{ s}^{-1}$ $\Rightarrow$ $v = \frac{\omega}{k} = \frac{40\pi}{3\pi} = 13{,}3$ m/s

$$\mathscr{P} = 13{,}3.1{,}5.10^{-3}.(40\pi)^2.(0{,}05)^2\sin^2(3\pi x - 40\pi t)$$
$$= 0{,}79\sin^2(3\pi x - 40\pi t) \text{ J/s}$$

3.6. Trên bề mặt một chất lỏng có hai nguồn sóng O_1 và O_2 giống hệt nhau dao động theo phương vuông góc với mặt chất lỏng. Coi biên độ của sóng do từng nguồn phát ra là không đổi và bằng biên độ của nguồn. Cho biết nguồn có biên độ a = 2 mm và tần số f = 125 Hz và có pha ban đầu bằng 0.

a) Lập phương trình của điểm M trên mặt chất lỏng lần lượt cách O_1 và O_2 những đoạn d_1 và d_2 (Hình 3.21). Xác định các điểm có biên độ dao động và các điểm không dao động.

b) Chỉ xét các đường mà tại đó các phần tử chất lỏng không dao động và ở cùng một phía so với đường trung trực của đoạn O_1O_2. Nếu coi đường thứ nhất là đường đi qua điểm M_1 có hiệu đường đi $d_2 - d_1 = 1{,}07$ cm, thì đường thứ 12 là đường đi qua điểm M_2 có hiệu $d_2 - d_1 = 3{,}67$ cm. Tìm bước sóng và tốc độ truyền sóng.



Hình 3.21

c) Tìm biên độ và pha ban đầu tại điểm M_3 cách hai nguồn O_1 và O_2 lần lượt là $d_1 = 2{,}45$ cm và $d_2 = 2{,}61$ cm.

Giải

a) $$u_M = u_1 + u_2 = a\cos(kd_1 - \omega t) + a\cos(kd_2 - \omega t)$$

$$u_M = 2a\cos k\frac{d_1 - d_2}{2}\cos\left[k\left(\frac{d_1 + d_2}{2}\right) - \omega t\right] \qquad (1)$$

Vị trí các điểm có biên độ dao động cực đại :

$$d_1 - d_2 = n\lambda \quad (n = 0, \pm1, \pm2,...)$$

Vị trí các điểm không dao động :

$$d_1 - d_2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda \qquad (n = 0, \pm1, \pm2,...)$$

b) Tại M_1 : $d_1 - d_2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda = 1{,}07$ cm

Tại M_2 : $d_1 - d_2 = \left[(n + 11) + \frac{1}{2}\right]\lambda = 3{,}67$ cm

Suy ra : $11\lambda = 3{,}67 - 1{,}07 = 2{,}60$ cm

$$\lambda = \frac{2{,}60}{11} = 0{,}236 \approx 0{,}24 \text{ cm}$$

$$v = \lambda f = 0{,}236.125 = 29{,}5 \approx 30 \text{ cm/s}$$

c) Theo (1) thì biên độ dao động A của M_3 là :

$$A = 2a\left|\cos k\frac{(d_1 - d_2)}{2}\right| = 2a\left|\cos\frac{\pi}{\lambda}(d_1 - d_2)\right|$$

$$= 4\left|\cos\frac{\pi}{0{,}236}(2{,}61 - 2{,}45)\right| \approx 4\left|\cos\frac{2\pi}{3}\right| \approx 2\text{ mm}$$

Pha ban đầu tại M_3 được tính từ (1) :

$$-k\frac{(d_1 + d_2)}{2} = -\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{d_1 + d_2}{2}\right) = -21{,}08\pi$$

$$= -1{,}08\pi - 20\pi = 0{,}92\pi - 22\pi$$

Vậy pha ban đầu $\varphi = 0{,}92\pi$.

3.7. Trên mặt hồ nước yên lặng, tại hai điểm A và B cách nhau 3,0 m có hai nguồn đồng bộ giống nhau, dao động theo phương vuông góc với mặt nước với chu kì là 1,00 s. Các sóng sinh ra truyền trên mặt nước với tốc độ 1,2 m/s. O là trung điểm của đoạn AB.

a) Hãy vẽ một giản đồ các mặt đầu sóng sau 4,00 s.

b) Nêu điều kiện để có cực đại giao thoa và cực tiểu giao thoa tại một điểm cách A một khoảng d_1 và cách B một khoảng d_2.

c) P là một điểm ở rất xa so với khoảng cách l = AB và tại góc $\theta = \widehat{POB}$. Nêu điều kiện để có cực đại giao thoa và cực tiểu giao thoa tại P.

Giải

a) Xem Hình 3.22.

b) Cực đại giao thoa :

$d_1 - d_2 = n\lambda$

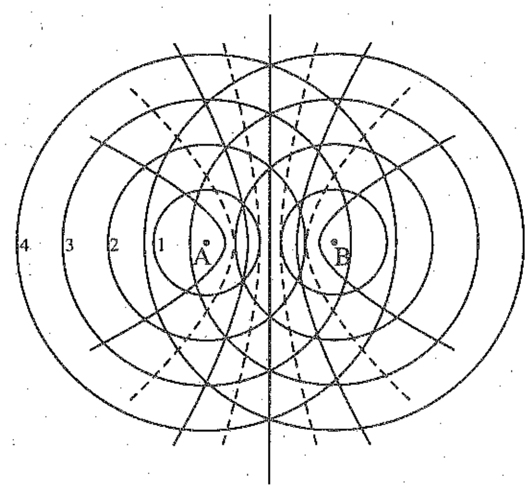
Cực tiểu giao thoa :

$$d_1 - d_2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

trong đó n = 0, ±1, ±2.

c) P ở rất xa nguồn nên mặt đầu sóng coi như phẳng và PA, PB coi như song song với PO. Theo Hình 3.23, ta có :

$$d_1 - d_2 = l\sin\theta$$

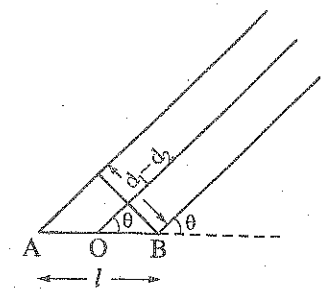


Hình 3.22

Suy ra :

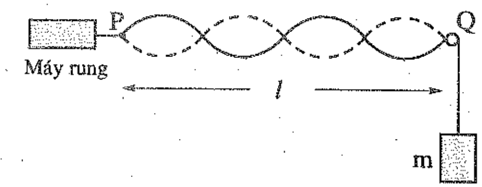
$l\sin\theta = n\lambda$ (cực đại giao thoa)

$l\sin\theta = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$ (cực tiểu giao thoa)



Hình 3.23

3.8. Một sợi dây buộc vào một máy rung tại P và vắt qua giá đỡ ở Q. Dây được căng bằng một vật có khối lượng m (Hình 3.24). Khoảng cách l giữa P và Q là 1,2 m. Khối lượng riêng tính theo chiều dài của dây ρ = 1,6 g/m, tần số của máy rung f = 120 Hz. Biên độ dao động của P đủ nhỏ để có thể coi đó là một nút. Đầu Q cũng là nút.



Hình 3.24

a) Muốn tạo được hoạ ba bậc bốn trên dây thì khối lượng m phải bằng bao nhiêu ? Lấy g = 9,8 m/s^2.

b) Nếu m = 1,00 kg thì mode sóng dừng nào xuất hiện ?

Giải

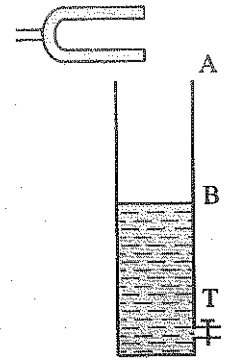
a) $$f = nf_1 = n\frac{v}{2l} \Rightarrow v = \frac{2lf}{n}$$

Mặt khác : $$v = \sqrt{\frac{F_T}{\rho}} = \sqrt{\frac{mg}{\rho}} = \frac{2lf}{n}$$

Suy ra : $$m = \frac{4l^2f^2\rho}{n^2g} = \frac{4.1{,}2^2.120^2.1{,}6.10^{-3}}{4^2.9{,}8} = 0{,}846\text{ kg} \approx 0{,}85\text{ kg}.$$

b) Thay m = 1,00 kg vào công thức $m = \dfrac{4l^2f^2\rho}{n^2g}$ để tìm n, ta được n = 3,7, tức là không phải là một số nguyên. Máy rung không tạo ra được sóng dừng trên dây và bất kì dao động nào của dây cũng nhỏ.

3.9. Một âm thoa đặt trên miệng của một ống hình trụ AB (đầu B kín vì là mặt nước, còn đầu A hở). Chiều dài l của ống có thể thay đổi được nhờ dịch chuyển mực nước ở đầu B (Hình 3.25). Khi âm thoa dao động, nó phát ra một âm cơ bản. Cho biết tốc độ truyền âm v = 340 m/s.



Hình 3.25

a) Khi chiều dài ống thích hợp ngắn nhất $l_0 = 13$ cm thì ta nghe thấy âm phát ra là to nhất. Hãy giải thích hiện tượng và tìm tần số của âm thoa.

b) Khi hạ thấp mực nước ở đầu B cho chiều dài ống AB là $l = 60$ cm thì ta lại nghe thấy âm to nhất. Hãy giải thích hiện tượng và tìm số bụng sóng ở phần giữa hai đầu A, B của ống.

c) Vẽ đồ thị li độ ứng với hai trường hợp.

Giải

a) Sóng âm truyền dọc theo cột không khí trong ống, tới mặt nước B (đầu kín) thì phản xạ trở lại A (đầu hở). Các sóng tới và sóng phản xạ giao thoa với nhau. Sóng dừng hình thành và cột không khí AB dao động ở tần số cộng hưởng. Khi ấy ta nghe được âm to nhất. Điều kiện cộng hưởng đối với cột không khí có một đầu hở (bụng sóng) và một đầu kín (nút sóng) là :

$$f = n\frac{v}{4l} \text{ hay } l = n\frac{v}{4f} \text{ (với n = 1, 3, 5,...).}$$

Theo đầu bài thì $l_{min} = 13$ cm ứng với n = 1. Ta có :

$$l_{min} = \frac{v}{4f_1} = 13 \text{ cm} = 0{,}13 \text{ m.}$$

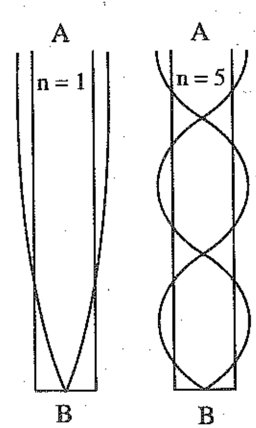
Suy ra : $$f_1 = \frac{v}{4l_{min}} = \frac{340}{4.0{,}13} = 653{,}85 \approx 654 \text{ Hz.}$$

b) $$\lambda = \frac{v}{f_1} = \frac{340}{653{,}85} = 0{,}52 \text{ m}$$

$$l = \frac{n\lambda}{4} \Rightarrow n = \frac{4l}{\lambda} = \frac{4.0{,}65}{0{,}52} = 5$$

Suy ra có 2 bụng sóng nằm trong khoảng AB (không kể đầu A).

c) Xem Hình 3.26.



Hình 3.26

PHẦN BÀI TẬP TỰ GIẢI

3.1. Một sóng ngang chạy trên dây có phương trình :

$$u(x, t) = 0{,}10\sin\left(\frac{3\pi x}{7} + 36\pi t\right) \text{ (m)}$$

a) Xác định biên độ, bước sóng, chu kì và tần số của sóng.

b) Xác định tốc độ truyền sóng và chiều truyền.

c) Tìm sự phụ thuộc của gia tốc vào thời gian của một phần tử tại điểm x.

ĐS : a) A = 0,10 m ; λ = 4,7 m ; T = 0,055 s ;

b) f = 18Hz ; v = 85 m/s (theo chiều âm) ;

c) $a(x, t) = -(36\pi)^2u(x, t)$ m/s^2.

3.2. Một dây đồng chất, dài l, treo thẳng đứng. Một xung lượng của lực được truyền cho đầu dưới của dây, tạo ra một sóng xung truyền lên trên. Hãy xác định tốc độ truyền sóng như một hàm của vị trí của các điểm trên dây.

ĐS : $v(x) = \sqrt{gx}$.

3.3. Một sợi dây được kéo căng có khối lượng trên một đơn vị độ dài là 4,0 g/cm. Một sóng ngang truyền trên dây theo chiều x giảm với tốc độ 40 cm/s. Li độ của phần tử tại x = 10 cm biến thiên theo thời gian theo phương trình u = 5,0cos(4,6t + 1,0) (cm). Hỏi :

a) Biên độ, tần số và bước sóng của sóng.

b) Phương trình sóng.

c) Sức căng của dây.

ĐS : a) 5,0 cm ; 0,73 Hz ; 55 cm ;

b) u = 5,0cos(11,5x + 4,6t – 0,15) (cm) ;

c) $6{,}4.10^{-2}$ N.

3.4. Phương trình của một sóng ngang truyền theo một sợi dây được cho bởi u = 0,15sin(0,79x – 13t), trong đó x và u được tính ra mét và t ra giây.

a) Li độ u tại x = 2,3 m và t = 0,16 s là bao nhiêu ?

b) Viết phương trình của một sóng sao cho khi chồng chập với sóng đã cho, sẽ tạo nên sóng dừng trên dây.

c) Li độ của sóng dừng tại x = 2,3 m và t = 0,16 m là bao nhiêu ?

ĐS : a) –0,039 m ;

b) $u = 0,15\sin(0,79x + 13t)$;

c) –0,14 m

3.5. Một dây thép, có khối lượng m = 4,0 g và dài 1,25 m, được căng đến sức căng $F_T = 1020$ N.

a) Tìm bước sóng và tần số của âm cơ bản và của hoạ âm bậc 3 của sóng âm dừng trên dây này.

b) Viết phương trình của sóng dừng đối với hoạ âm bậc ba.

ĐS : a) 2,5 m ; 226 Hz ;

0,83 m ; 678 Hz ;

b) $u = 2a\sin(7,5x)\sin(4270t)$.

3.6. Một dây chỉ được giữ cố định ở một đầu.

a) Chỉ ra các tần số cộng hưởng của dây.

b) Nếu ba hoạ âm liên tiếp có tần số là 360 Hz, 600 Hz và 840 Hz thì tần số của âm cơ bản là bao nhiêu ?

c) Những hoạ âm nào có tần số đã cho ở câu b ?

d) Dây dài bao nhiêu ? Biết tốc độ truyền âm là 672 m/s.

ĐS : a) $f_n = n\dfrac{v}{4l}$ (n = 1, 3, 5, 7,...) ; b) $f_1 = 120$ Hz ;

c) Các hoạ âm bậc 3, bậc 5 và bậc 7 ; d) $l = 1,4$ m.

3.7. Một tàu hoả chạy thẳng vào trong một hẻm núi với tốc độ 35 km/h. Người lái tầu kéo còi, âm phát ra có tần số 440 Hz. Hỏi người ấy nghe tiếng còi vọng lại từ vách núi có tần số bao nhiêu ? Biết tốc độ truyền âm là 332 m/s.

ĐS : 466 Hz.

3.8. Một nguồn âm có tần số 1 800 Hz chuyển động đều trên một đường thẳng, cách một người quan sát đứng yên một khoảng $l = 250$ m. Tốc độ của nguồn bằng 0,80 lần tốc độ của âm. Hãy tìm :

a) Tần số của âm mà người quan sát nghe được tại thời điểm mà nguồn đi qua trước mặt người đó.

b) Khoảng cách giữa nguồn và người quan sát tại thời điểm mà người đó nghe được âm có tần số bằng tần số của nguồn âm.

ĐS : 5000 Hz ; 320 m.

HƯỚNG DẪN GIẢI

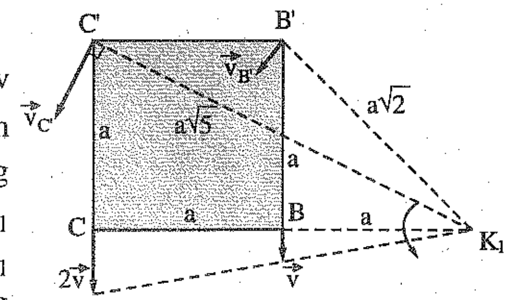
CHỦ ĐỀ 1

1.1. Ta chỉ cần xét chuyển động của mặt trước của khối BCC'B' và tìm vận tốc của các đỉnh C, C', B'. Theo công thức cộng vận tốc, ta có :

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB}$$

Theo đầu bài $v_B = v$ và $v_C = 2v$ nên xảy ra hai trường hợp :

Trường hợp 1 :

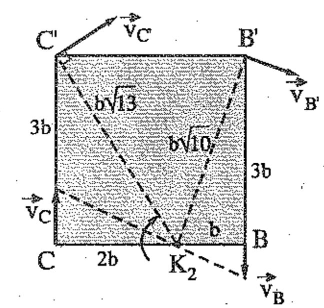


Hình 1.1G

$\vec{v}_{CB} = \vec{v}_B \Rightarrow \vec{v}_C = 2\vec{v}_B$ và $v_C = 2v$ theo đầu bài. Biết $\vec{v}_B$ và $\vec{v}_C$ ta xác định được trục quay tức thời. Đó là đường thẳng vuông góc với mặt BCC'B' và đi qua điểm K_1 (Hình 1.1G). Mặt BCC'B' quay quanh K_1 ngược chiều kim đồng hồ. Biết K_1 ta dễ dàng tìm được $v_{B'} = v\sqrt{2}$ và $v_{C'} = v\sqrt{5}$.

Làm tương tự, ta được $v_{A'} = v\sqrt{2}$ và $v_{D'} = v\sqrt{5}$.

Trường hợp 2 :



Hình 1.2G

$\vec{v}_{CB} = -3\vec{v}_B \Rightarrow \vec{v}_C = -2\vec{v}_B$ và $v_C = 2v$ theo đầu bài.

Biết $\vec{v}_B$ và $\vec{v}_C$ ta xác định được trục quay tức thời K_2 (Hình 1.2G).

Làm tương tự ta được : $v_{B'} = v\sqrt{10}$ và $v_{C'} = v\sqrt{13}$.

1.2. Hình 1.3G.

a) Bảo toàn động lượng theo phương x :

$$2mv_3 = mv_{1x} + mv_2 \qquad (1)$$

Bảo toàn cơ năng :

$$mgl\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{m}{2}\left(v_{1x}^2+v_{1y}^2\right)+\frac{m}{2}v_2^2+\frac{2m}{2}v_3^2$$

$$2gl\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=v_{1x}^2+v_{1y}^2+v_2^2+2v_3^2 \qquad (2)$$

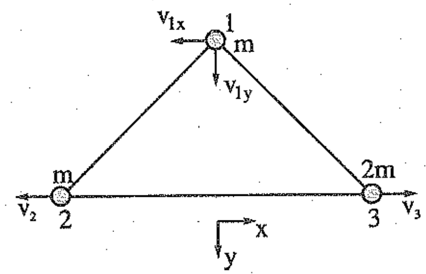
Do tính chất của thanh cứng nên chiếu các vectơ vận tốc của hai đầu mỗi thanh lên phương của thanh, ta được :

$$v_{1x}\cos45^o+v_{1y}\cos45^o=v_2\cos45^o$$

$$v_{1x}+v_{1y}=v_2 \qquad (3)$$

$$-v_{1x}\cos45^o+v_{1y}\cos45^o=v_3\cos45^o$$

$$v_{1y}-v_{1x}=v_3 \qquad (4)$$

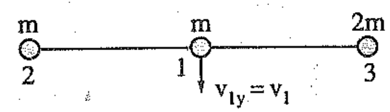


Hình 1.3G

Giải hệ phương trình, ta được :

$$v_3=\sqrt{\frac{3}{10}gl\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

b) Hình 1.4G.



Hình 1.4G

Do tính chất của thanh cứng, nên áp dụng công thức (1.2), ta suy ra :

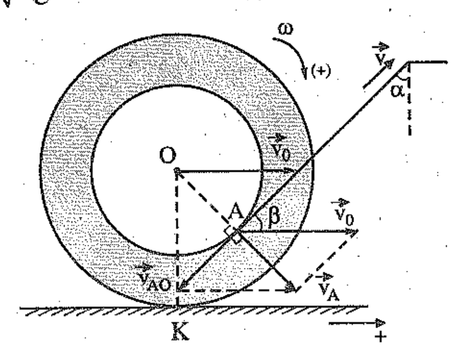
$$v_{1x}=v_2=v_3=0$$

$$v_{1y}=v_1$$

Lúc sắp chạm sàn vận tốc của bản lề có phương thẳng đứng.

Bảo toàn cơ năng : $\frac{1}{2}mv_1^2=mgl\Rightarrow v_1=\sqrt{2gl}$.

1.3. Hình 1.5G.



Hình 1.5G

A là một điểm của cuộn chỉ tiếp xúc với dây.

Theo công thức phân bố vận tốc :

$$\vec{v}_A=\vec{v}_0+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OA} \qquad (1)$$

Vì dây không trượt trên ròng rọc nên hình chiếu của $\vec{v}_A$ lên phương dây phải bằng v.

Chiếu (1) lên phương dây, ta được :

$$v_0\sin\alpha-\omega r=v \qquad (2)$$

Kết hợp với điều kiện lăn không trượt $\omega=\frac{v_0}{R}$, ta được : $v_0\sin\alpha-\frac{v_0 r}{R}=v$.

Suy ra : $v_0=\dfrac{vR}{R\sin\alpha-r}$

$$\begin{cases} v_0>0 \text{ nếu } \sin\alpha<\dfrac{r}{R} \\ v_0<0 \text{ nếu } \sin\alpha<\dfrac{r}{R} \\ v_0=0 \text{ nếu } \sin\alpha=\dfrac{r}{R} \end{cases}$$

(dây có phương đi qua K và K không còn là tâm quay tức thời).

1.4. Hình 1.6G.

$$N_{12}=N_{21}=N\,;\quad F_1\le\mu N_1$$

$$F_{12}=F_{21}=\mu N\,;\quad F_2\le\mu N_2$$

Chọn chiều chuyển động làm chiều dương.

a) Coi hai xilanh chuyển động tịnh tiến như một vật :

$$F-F_1-F_2=2ma \qquad (1)$$

Xét riêng xilanh 2 :

$$N_{12}-F_2=ma$$

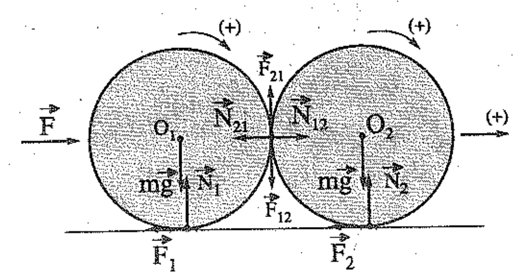
$$N-\mu N=ma \qquad (2)$$

Các xilanh quay quanh khối tâm :

$$\frac{1}{2}mR^2\gamma=F_1R-F_{21}R$$

$$\frac{1}{2}mR^2\gamma=R(F_1-\mu N) \qquad (3)$$

$$\frac{1}{2}mR^2\gamma=F_2R-F_{12}R$$



Hình 1.6G

$$\frac{1}{2}mR^2\gamma = R(F_2 - \mu N) \qquad (4)$$

$$a = R\gamma \qquad (5)$$

Giải hệ phương trình, ta được : $F_1 = F_2 = F_{msn}$

$$N = \frac{F}{2}$$

$$F = \frac{1}{3}F\left(\frac{1}{2} + \mu\right) \begin{cases} \le \mu N_1 \text{ với } N_1 = mg - \mu\dfrac{F}{2} \text{ (xilanh 1)} \\ \le \mu N_2 \text{ với } N_2 = mg + \mu\dfrac{F}{2} \text{ (xilanh 2)} \end{cases}$$

Cuối cùng : $F \le \dfrac{6\mu mg}{1 + 2\mu + 3\mu^2}$.

b) Vì $N_1 < N_2$ nên xilanh 1 trượt trước.

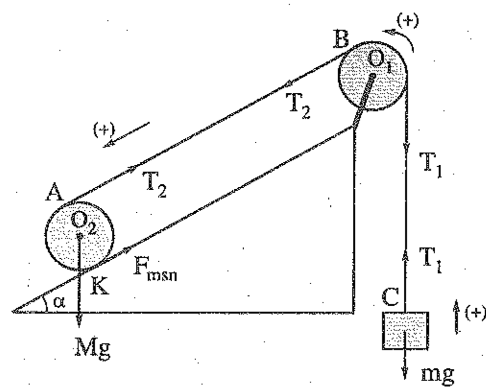
1.5. Chọn chiều (+) như Hình 1.7G

$$v_{A/K} = v_{B/O_1} = v_C = v$$

(O_1 đứng yên, K đứng yên tức thời)

$$\omega_2.2R = \omega_1 R = v_C$$

$$2\gamma_2 R = \gamma_1 R = a_C = a \quad (1)$$



Hình 1.7G

Xét vật m : $T_1 - mg = ma \qquad (2)$

Xét ròng rọc : $(T_2 - T_1)R = \dfrac{MR^2}{2}\gamma_1 \qquad (3)$

Xét con lăn (coi K là tâm quay tức thời) :

$$MgR\sin\alpha - T_2.2R = \frac{3MR^2}{2}\gamma_2 \qquad (4)$$

Giải hệ phương trình ta được : $a = \dfrac{4g(M\sin\alpha - 2m)}{7M + 8m}$.

Biện luận :

Khi $\sin\alpha > \dfrac{2m}{M}$ thì $a > 0$: vật m đi lên, con lăn lăn xuống và quấn dây.

Khi $\sin\alpha < \dfrac{2m}{M}$ thì $a < 0$: vật m đi xuống, con lăn lăn lên và nhả dây.

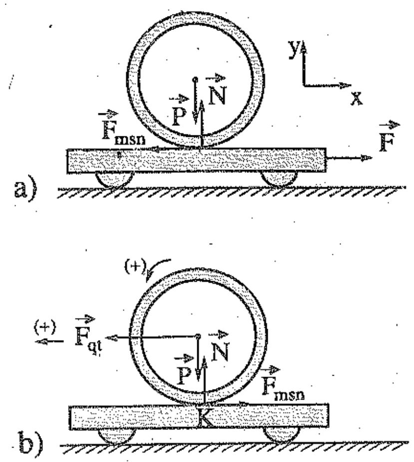
Khi $\sin\alpha = \dfrac{2m}{M}$ thì $a = 0$: hệ đứng yên.

1.6. Gọi xe là vật 1, bánh xe là vật 2.

Trước hết, xét chuyển động của xe. Bánh xe tác dụng vào xe một lực ma sát nghỉ cản trở chuyển động của xe (Hình 1.8Ga).

$$Ox : F - F_{msn} = ma_1 \qquad (1)$$

$$Oy : N - 3mg = 0 \qquad (2)$$



Hình 1.8G

Xét chuyển động của bánh xe trong HQC gắn với sàn xe. Trong HQC này, xe đứng yên còn bánh xe chịu thêm lực quán tính $\vec{F}_{qt} = -3m\vec{a}_1$ (Hình 1.8Gb).

Coi chuyển động của bánh xe là chuyển động quay thuần tuý quanh tâm quay tức thời K. Chọn chiều dương cho chuyển động này như hình vẽ.

$$F_{qt}R = I_K\gamma = 6mR^2\gamma$$

$$3ma_1R = 6mR^2\frac{a_{12}}{R} \qquad (3)$$

(Ở đây điều kiện lăn không trượt là $a_{12} = R\gamma$)

Xét chuyển động (thành phần) tịnh tiến của bánh xe trên xe đứng yên.

$$F_{qt} - F_{msn} = 3ma_{12}$$

$$3ma_1 - F_{msn} = 3ma_{12} \qquad (4)$$

Giải hệ phương trình, ta được :

$$F_{msn} = \frac{3F}{5} \le \mu.3mg$$

hay $\quad F \le 5\mu mg.$

1.7. Gọi nêm là vật 1, quả cầu là vật 2.

Xét chuyển động của nêm trong HQC mặt đất (Hình 1.9Ga).

$$Ma_1 = N_{21}\sin\alpha - F'_{msn}\cos\alpha \qquad (1)$$

Xét chuyển động của quả cầu trong HQC gắn với nêm (Hình 1.9Gb). Chọn các chiều (+) như hình vẽ.

$$ma_{21} = F_{qt}\cos\alpha + mg\sin\alpha - F_{msn} \qquad (2)$$

$$N_{12} - mg\cos\alpha + ma_1\sin\alpha = 0 \qquad (3)$$

$$F_{msn}R = \frac{2}{5}mR^2\gamma = \frac{2}{5}mR^2\frac{a_{21}}{R}$$

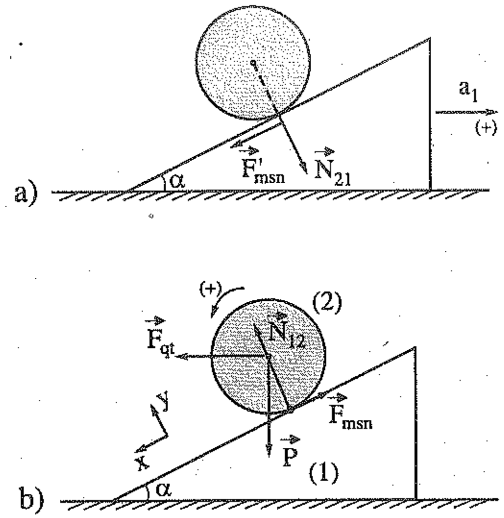
$$ma_{21} = \frac{5}{2}F_{msn} \qquad (4)$$

$$F_{qt} = ma_1 \qquad (5)$$

$$N_{12} = N_{21} = N\ ;\ F_{msn} = F'_{msn} \qquad (6)$$

Giải hệ phương trình, ta được :

$$a_1 = \frac{5mg\sin\alpha\cos\alpha}{7(M+m) - 5m\cos^2\alpha}$$



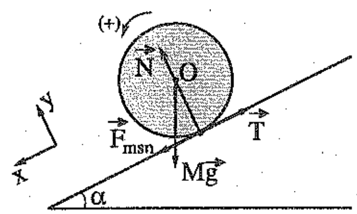
Hình 1.9G

1.8. Hình 1.10G.

Vì xilanh lăn không trượt nên điểm tiếp xúc của xilanh với mặt phẳng nghiêng đứng yên (tại thời điểm xét). Do đó khối lượng m đứng yên.

$$T = mg \qquad (1)$$

(Xem Hình 1.70 ở đầu bài).



Hình 1.10G

Xilanh chịu tác dụng của các lực $M\vec{g}$, $\vec{N}$, $\vec{T}$ và $\vec{F}_{msn}$ (chưa rõ chiều và độ lớn vì có mặt của lực căng $\vec{T}$).

$$Ox : Mg\sin\alpha - T + F_{msn} = ma \qquad (2)$$

$$Oy : N - Mg\cos\alpha = 0 \qquad (3)$$

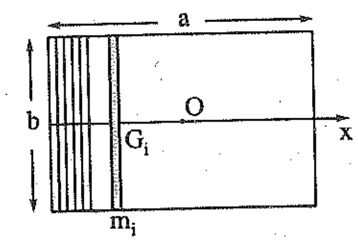
$$(T - F_{msn})R = \frac{1}{2}MR^2\gamma = \frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R} \qquad (4)$$

$$F_{msn} \le \mu_n N \qquad (5)$$

Giải hệ phương trình, ta được : $\mu_n \ge \left|\dfrac{m}{M\cos\alpha} - \dfrac{M\tan\alpha}{M+2m}\right|$

1.9. *Cách 1* (Hình 1.11G).

Coi tấm phẳng gồm nhiều thanh mỏng ghép lại. Ta đã biết momen quán tính của thanh mỏng, chiều dài b, có khối lượng là m_i là $I_{ix} = \frac{1}{12}m_ib^2$.



Hình 1.11G

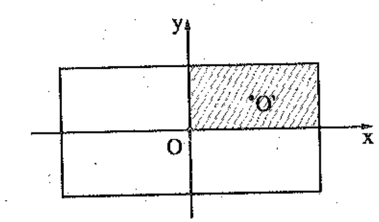
Momen quán tính của tấm đối với trục x là :

$$I_x = \sum I_{ix} = \frac{1}{12}b^2\sum m_i = \frac{1}{2}mb^2$$

Tương tự : $\quad I_y = \frac{1}{2}ma^2.$

Áp dụng định lí về trục vuông góc : $I_z = I_x + I_y$, ta được :

$$I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$$



Hình 1.12G

Cách 2 (Hình 1.2G).

Gọi $I_{z'}$ là momen quán tính của một phần tư của tấm (phần gạch gạch) đối với trục z' đi qua khối tâm O' và vuông góc với tấm.

Theo định luật về tỉ xích và tính đối xứng, ta có :

$$I_{z'} = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)I_z = \frac{1}{16}I_z$$

Mặt khác, theo tính chất cộng được của momen quán tính thì momen quán tính của $\frac{1}{4}$ tấm (phần gạch gạch) đối với trục z là $\frac{1}{4}I_z$.

Áp dụng định lí về trục song song cho hai trục z và z' ta được :

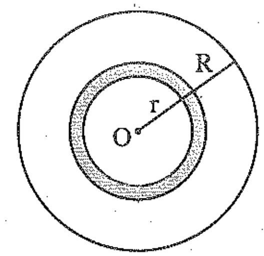
$$\frac{1}{4}I_z = I_{z'} + \frac{m}{4}\left(\frac{a^2+b^2}{16}\right) = \frac{1}{16}I_z + \frac{m}{4}\left(\frac{a^2+b^2}{16}\right)$$

$$\frac{3I_z}{16} = \frac{m(a^2+b^2)}{4.16} \Rightarrow I_z = \frac{m}{12}(a^2+b^2)$$

1.10. (Hình 1.13G).

a) Xét một lớp cầu mỏng có bán kính r ($0 < r \le R$) và bề dày dr. Momen quán tính của lớp cầu này đối với tâm O là :

$$dI_O = \frac{m}{V}\int (dV)r^2 = \frac{m}{4\pi\frac{R^3}{3}}\int_0^R (4\pi r^2 dr)r^2$$



Hình 1.13G

$$I_O = \frac{3m}{4\pi R^3}.4\pi\int_0^R r^4 dr = \frac{3mR^5}{5R^3}$$

$$I_O = \frac{3}{5}mR^2$$

b) $$I_O = \sum m_i r_i^2 = \sum m_i\left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\right)$$

Vì ba trục x, y, z tương đương, nên ta có thể viết :

$$I_O = 3\sum m_i x_i^2$$

$$I_z = I_x + I_y = \sum m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right) = 2\sum m_i x_i^2$$

$$I_z = \frac{2}{3}I_O = \frac{2}{5}mR^2$$

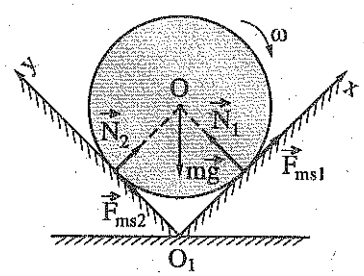
1.11. (Hình 1.14G).

Vì trục của xilanh đứng yên nên ta có :

$$O_1x : F_{ms1} - mg\frac{\sqrt{2}}{2} + N_2 = 0 \qquad (1)$$

$$O_1y : -F_{ms2} + N_1 - mg\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad (2)$$

$$\begin{cases} F_{ms1} = \mu N_1 \\ F_{ms2} = \mu N_2 \end{cases} \qquad (3)$$



Hình 1.14G

Từ hệ phương trình suy ra : $N_1 = \frac{mg\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1+\mu}{1+\mu^2}\right)$; $N_2 = \frac{mg\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1-\mu}{1+\mu^2}\right)$.

Gọi n là số vòng quay của xilanh cho đến khi dừng lại, thì công của hai lực ma sát trượt là :

$$\sum A = -\left(F_{ms1} + F_{ms2}\right)s = -\mu\left(N_1 + N_2\right)2\pi nR = -\frac{\mu mg\sqrt{2}}{1+\mu^2}.2\pi nR$$

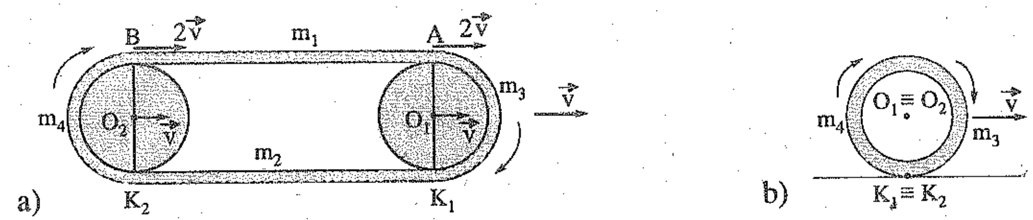
Áp dụng định lí biến thiên động năng $\sum A = \Delta W_đ$ ta được :

$$-\frac{\mu mg\sqrt{2}}{1+\mu^2}.2\pi nR = 0 - \frac{1}{2}mR^2\omega_0^2$$

Suy ra : $$n = \frac{(1+\mu^2)R\omega_0^2}{4\sqrt{2}\pi\mu g}.$$

1.12. Ta chia vòng xích của chiếc xe tăng thành 4 đoạn có khối lượng là m_1, m_2, m_3 và m_4 (Hình 1.15Ga).

Vì bánh xe chuyển động lăn không trượt nên K_1, K_2 là tâm quay tức thời. Đoạn xích K_1K_2 tiếp xúc với mặt đường thì đứng yên $W_{đ_2} = 0$, đoạn xích AB chuyển động tịnh tiến với vận tốc $v_A = v_B = 2v_{O_1} = 2v \Rightarrow W_{đ_1} = 2m_1v^2$.



Hình 1.15G

Còn hai đoạn xích m_3 và m_4 nếu ghép lại thì thành một bánh xe chuyển động lăn không trượt với vận tốc v (Hình 1.15Gb).

$$W_{đ_3} + W_{đ_4} = \frac{1}{2}(m_3 + m_4)v^2 + \frac{1}{2}I_O\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}(m_3 + m_4)v^2 + \frac{1}{2}(m_3 + m_4)R^2.\frac{v^2}{R^2} = (m_3 + m_4)v^2$$

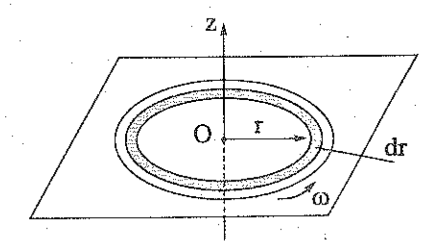
Tóm lại : $W_đ = (2m_1 + m_3 + m_4)v^2 = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)v^2 = mv^2$.

1.13. (Hình 1.16G).

Gọi dS là diện tích của một dải mảnh hình vành khăn, cách trục quay z một đoạn r ($0 \le r \le R$) :

$$dS = 2\pi r dr$$

Gọi dF_{ms} là lực ma sát tác dụng vào dải này để cản trở chuyển động quay của dải :



Hình 1.16G

$$dF_{ms} = \mu(dm)g = \mu g\left(\frac{m}{\pi R^2}.2\pi r\,dr\right)$$

$$M_{ms} = -\int dF_{ms}\,r = -\mu g\frac{m}{\pi R^2}.2\pi\int_0^R r^2dr = -\frac{2}{3}\mu gmR$$

$$\gamma = \frac{M}{I} = \frac{-\frac{2}{3}\mu gmR}{\frac{1}{2}mR^2} = -\frac{4}{3}\frac{\mu g}{R}\ ;\ \omega = \omega_0 + \gamma t$$

$$0 = \omega_0 - \frac{4}{3}\frac{\mu g}{R}t \ \Rightarrow t = \frac{3}{4}\frac{\omega_0 R}{\mu g}$$

1.14. (Hình 1.17G).

$$P - T = ma \qquad (1)$$

$$T.R = I_0\gamma = \frac{1}{2}mR^2.\frac{a}{R}$$

$$T = \frac{1}{2}ma \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được : $P - T = 2T$

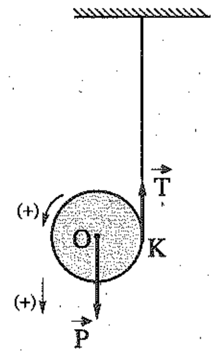
hay $T = \frac{mg}{3} = \frac{1.9,8}{3} = 3,26 \approx 3,3$ N ; $a = 6,53$ m/s^2 ;

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2.6,53.1,0} = 3,61 \approx 3,6 \text{ m/s}$$

Chú ý : Ta có thể áp dụng định luật BTCN để tìm v :

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_O\omega^2$$

Thay $I_O = \frac{1}{2}mR^2$ và $\omega = \frac{v}{R}$, ta được kết quả trên đây.

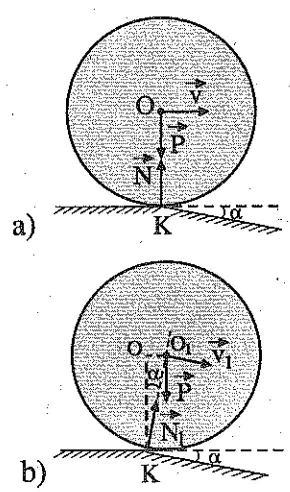


Hình 1.17G

1.15. (Hình 1.18Ga, b).

Điểm ranh giới K vừa thuộc về mặt phẳng ngang, vừa thuộc về mặt phẳng nghiêng (Hình 1.18Ga).

Khi chuyển động qua ranh giới K, tâm của xilanh vạch một cung tròn $\overset{\frown}{OO_1}$ quanh điểm tiếp xúc K, đồng thời tốc độ của tâm O tăng từ v đến v_1.



Hình 1.18G

Theo Hình 1.18Gb ta có :

$$mg\cos\alpha - N_1 = \frac{mv_1^2}{R} \qquad (1)$$

hay $$N_1 = m\left(g\cos\alpha - \frac{v_1^2}{R}\right)$$

Muốn xilanh không nảy lên thì $N_1 \geq 0$.

Suy ra : $$v_1^2 \leq gR\cos\alpha \qquad (2)$$

Mặt khác, theo định luật BTCN, ta có :

$$mgR + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_O\omega^2 = mgR\cos\alpha + \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I_{O_1}\omega_1^2 \qquad (3)$$

Thay $\omega = \frac{v}{R}$, $\omega_1 = \frac{v_1}{R}$ và thay $I_O = I_{O_1} = \frac{1}{2}mR^2$ vào phương trình (3), ta được :

$$v_1^2 = v^2 + \frac{4}{3}gR(1 - \cos\alpha) \qquad (4)$$

Thay (4) vào (2), ta được : $v \leq \sqrt{\frac{gR}{3}(7\cos\alpha - 4)}$.

1.16. (Hình 1.19G).

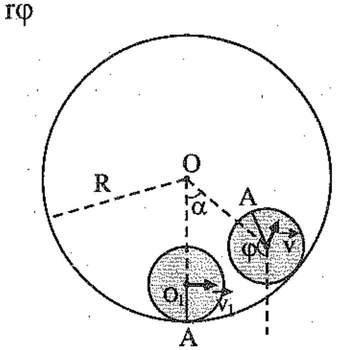
a) *Trường hợp 1 :* Khi quả cầu lăn không trượt thì đường đi của O_1 quanh O bằng đường đi của điểm A quanh O_1, ta có : $(R - r)\alpha = r\varphi$

$$\omega = \varphi' = \left(\frac{R - r}{r}\right)\alpha' = \frac{v}{r} \qquad (1)$$

Tại đỉnh : $$mg + N = \frac{mv^2}{R - r}$$

$$N = \frac{mv^2}{R - r} - mg \geq 0$$

Suy ra : $$v^2 \geq (R - r)g \qquad (2)$$



Hình 1.19G

Định luật BTCN :

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I_{O_1}\omega_1^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_{O_1}\omega^2 + mg.2(R - r) \quad (3)$$

Kết hợp (1), (2), (3) ta được :

$$\frac{7}{10}mv_1^2 = \frac{7}{10}mv^2 + mg.2(R - r) \ \Rightarrow\ v_1 = \sqrt{\frac{27}{7}(R - r)g}$$

Trường hợp 2 : Theo (2), tại đỉnh : $v^2 \ge (R - r)g$.

Định luật BTCN :

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mg.2(R - r) \qquad (4)$$

$$v_1 = \sqrt{5(R - r)g}$$

b) Giả sử vật rơi từ góc α

Trường hợp 2 : $\frac{1}{2}m(0{,}9v_1)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mg(R - r)(1 - \cos\theta)$

$$N - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R}$$

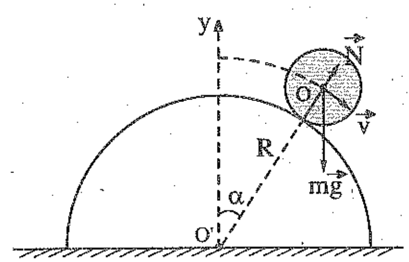
Với N = 0, ta được :

$$3(R - r)g\cos\alpha = 2(R - r)g - 0{,}81v_1^2 = -2{,}05(R - r)g$$

$$\cos\alpha = -0{,}683 \Rightarrow \alpha = 133{,}1^o$$

1.17. (Hình 1.20G).

a) Xét tại thời điểm khi quả cầu ở vị trí được xác định bằng toạ độ góc α. Vì khối tâm O chuyển động tròn quanh tâm O' của bán cầu, nên áp dụng định luật II Niu-tơn ta được :



Hình 1.20G

$$F_{ht} = mg\cos\alpha - N = \frac{mv^2}{a + b} \qquad (1)$$

Tại vị trí $\alpha = \alpha_0$ thì quả cầu rời khỏi bán cầu :

$$N = 0 \Rightarrow mg\cos\alpha_0 = \frac{mv^2}{a + b} \qquad (2)$$

Áp dụng định luật BTCN :

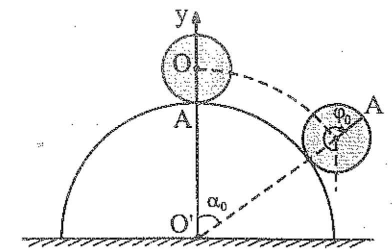
$$mg(a + b)(1 - \cos\alpha_0) = \frac{1}{2}I_K\omega^2 \qquad (3)$$

Thay $I_K = \frac{7}{5}ma^2$ và $\omega = \frac{v}{a}$ vào (3), ta được :

$$mg(a + b)(1 - \cos\alpha_0) = \frac{7mv^2}{10} \qquad (4)$$

Kết hợp (2) với (4), ta được :

$$\cos\alpha_0 = \frac{10}{17} \text{ hay } \alpha_0 \approx 54^o$$



Hình 1.21G

b) Vì tâm O chuyển động tròn quanh O', nên ta có :

$$v = (a + b)\alpha' \qquad (5)$$

Vì K là tâm quay tức thời của chuyển động quay của quả cầu, nên ta có :

$$v = a\omega = a\varphi' \qquad (6)$$

(φ là góc mà quả cầu quay được quanh K hoặc quanh O).

(5) = (6) cho ta : $\varphi = \frac{a + b}{a}\alpha$

Nếu b = 3a thì $\varphi = 4\alpha = 216^o$ (Hình 1.21G)

1.18. a) Trước hết ta xét các lực tác dụng vào thanh trong khi rơi. Thanh chịu tác dụng của hai lực $\vec{P}$ và $\vec{N}$ đều có phương thẳng đứng (Hình 1.22Ga). Suy ra khối tâm "rơi" theo phương thẳng đứng.

Có thể xác định mối liên hệ giữa v_G, ω và góc α theo một trong ba cách sau đây :

Cách 1 : Dùng công thức phân bố vận tốc.

$$\vec{v}_A = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GA}$$

Từ Hình 1.22Gb, ta được :

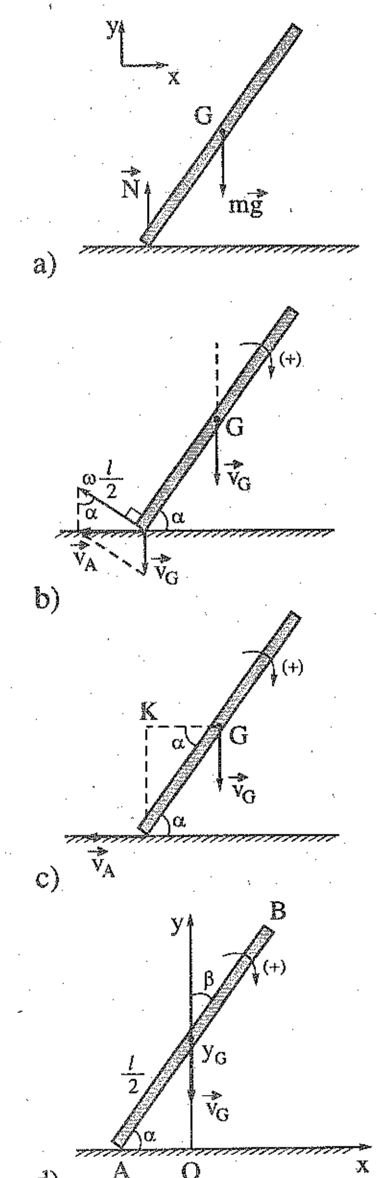
$$v_G = \omega\frac{l}{2}\cos\alpha \text{ (độ lớn)} \qquad (1)$$

Cách 2 : Dùng tâm quay tức thời (Hình 1.22Gc).

$$v_G = \omega(KG) = \omega\frac{l}{2}\cos\alpha \text{ (độ lớn)} \quad (1)$$

Cách 3 : Chọn trục Oy làm trục gốc để xác định ω và γ của chuyển động quay của thanh quanh G : $\omega = \beta' = -\alpha'$ (Hình 1.22Gd).

$$y_G = \frac{l}{2}\sin\alpha$$



Hình 1.22G

$$v_G = y'_G = \frac{l}{2}\cos\alpha.\alpha' = -\frac{l}{2}\cos\alpha.\omega \text{ (đại số)} \qquad (2)$$

Áp dụng định luật BTCN :

$$mg\frac{l}{2} = mg\frac{l}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_O\omega^2 \qquad (3)$$

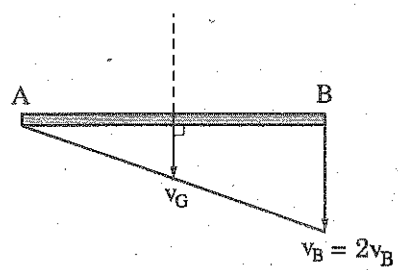
Thay ω từ phương trình (2) vào (3), ta được :

$$v_G = \sqrt{\frac{3gl(1-\sin\alpha)\cos^2\alpha}{1+3\cos^2\alpha}}$$

b) Khi sắp chạm mặt phẳng ngang thì $\alpha = 0$:

$$v_G = \sqrt{\frac{3}{4}gl}$$

Ta có nhận xét, khi thanh AB sắp chạm vào mặt phẳng ngang thì $v_A = 0$, A đóng vai trò tâm quay tức thời và $\vec{v}_G$ vuông góc với thanh AB (Hình 1.23G).



Hình 1.23G

1.19. (Hình 1.24G).

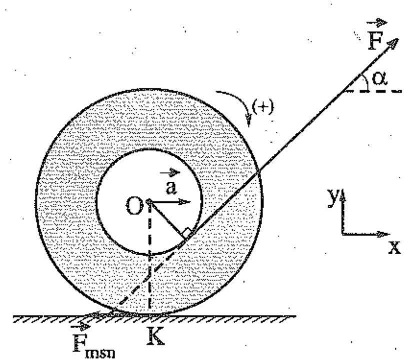
a) Ox : $F\cos\alpha - F_{msn} = ma \qquad (1)$

$$F_{msn}R - Fr = I_O\gamma = \beta mR^2\frac{a}{R} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra :

$$a = \frac{F(R\cos\alpha - r)}{mR(1+\beta)} \qquad (3)$$

$$F_{msn} = \frac{F(\beta R\cos\alpha + r)}{R(1+\beta)} > 0 \qquad (4)$$



Hình 1.24G

Theo (4) và (1) thì lực $\vec{F}_{msn}$ luôn luôn hướng về bên trái.

Theo (3) thì :

– Khi $\cos\alpha > \frac{r}{R}$, $a > 0$: cuộn chỉ chuyển động sang phải.

– Khi $\cos\alpha < \frac{r}{R}$, $a < 0$: cuộn chỉ chuyển động sang trái.

– Khi $\cos\alpha = \frac{r}{R}$, $a = 0$: lực $\vec{F}$ có giá đi qua điểm tiếp xúc K. Do đó không gây ra momen đối với K : $\gamma = 0$. Cuộn chỉ đứng cân bằng.

b) $$A_F = \Delta W_đ = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_O\omega^2 \qquad (5)$$

Thay $v = at$ và $\omega = \frac{v}{R} = \frac{at}{R}$ vào (5) ta được : $A_F = \frac{F^2t^2(R\cos\alpha - r)^2}{2mR^2(1+\beta)}$.

Có thể làm theo cách khác :

$$A_F = Fs\cos\alpha - M_F\varphi = F\frac{at^2}{2}\cos\alpha - Fr\frac{\gamma t^2}{2}$$

$$= \frac{Ft^2}{2}.\frac{a(R\cos\alpha - r)}{R} = \frac{Ft^2}{2}.\frac{F(R\cos\alpha - r)}{m(1+\beta)}.\frac{(R\cos\alpha - r)}{R}$$

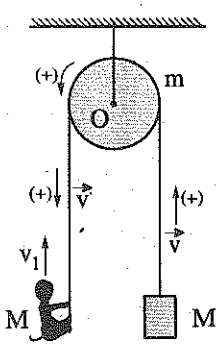
$$A_F = \frac{F^2t^2(R\cos\alpha - r)^2}{2mR^2(1+\beta)}$$

1.20. (Hình 1.25G).

Các ngoại lực tác dụng vào hệ "vật M, con khỉ, dây treo, và ròng rọc" là trọng lực của vật, trọng lực của con khỉ, trọng lực của ròng rọc và lực của giá đỡ tác dụng vào trục O của ròng rọc.

Tổng momen của các ngoại lực này đối với trục quay O của ròng rọc bằng 0 : $\Sigma\vec{M}_{(O)} = \vec{0}$.

Do đó, momen động lượng của hệ đối với trục O được bảo toàn. Xét trong HQC gắn với mặt đất, ta viết :



Hình 1.25G

$$\underset{\text{(lúc sau)}}{\vec{L}_{hệ}} = \underset{\text{(lúc đầu)}}{\vec{L}_{hệ}}$$

Vì con khỉ leo lên, nên dây ở nhánh trái đi xuống với vận tốc v so với mặt đất, còn dây ở nhánh phải và vật M đi lên với vận tốc là v. Gọi vận tốc của khỉ đối với đất là $\vec{v}_1$.

Chọn chiều dương cho các vật như Hình 1.25G, ta viết :

$$-RMv_1 + RMv + I\omega = 0 \qquad (1)$$

$$-R.4mv_1 + R.4mv + mR^2.\frac{v}{R} = 0$$

$$-4v_1 + 5v = 0 \qquad (2)$$

Áp dụng công thức cộng vận tốc cho con khỉ và nhánh dây bên trái, ta viết :

$$-v_1 = -u + v_{dây}$$

$$v_1 = u - v \qquad (3)$$

Thay (3) vào (2), ta được : $-4(u - v) + 5v = 0$

$$9v - 4u = 0 \Rightarrow v = \frac{4}{9}u$$

1.21. Giai đoạn thanh rơi xuống : $Mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2}I_O\omega_1^2 = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}Ml^2\omega_1^2$

Suy ra : $\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{l}}$ (1)

Giai đoạn đầu A của thanh va chạm vào vật B. Tổng momen của các ngoại lực tác dụng vào hệ đối với O bằng 0. Do đó, áp dụng được định luật BTMMĐL cho hệ :

$$\underset{\text{(ngay trước va chạm)}}{I_O\omega_1} = \underset{\text{(ngay sau va chạm)}}{I_O\omega_2 + mv_Bl}$$

hay : $\omega_1 = \omega_2 + \frac{3m}{M}\frac{v_B}{l}$ (2)

a) Nếu va chạm mềm thì sau va chạm $v_B = v_A$:

$$v_B = \omega_2 l \qquad (3)$$

Giải hệ phương trình (1), (2), (3), ta được :

$$\omega_2 = \frac{M}{M + 3m}\sqrt{\frac{3g}{l}}$$

$$v_B = \frac{M}{(M + 3m)}\sqrt{3gl}$$

b) Nếu va chạm đàn hồi thì động năng của hệ được bảo toàn :

$$\underset{\text{(ngay trước va chạm)}}{\frac{1}{2}I_O\omega_1^2} = \underset{\text{(ngay sau va chạm)}}{\frac{1}{2}I_O\omega_2^2 + \frac{1}{2}mv_B^2}$$

$$\omega_1^2 = \omega_2^2 + \frac{3m}{M}.\frac{v_B^2}{l^2} \qquad (4)$$

Giải hệ phương trình (1), (2) và (4), ta được :

$$v_B = \frac{2M}{M + 3m}\sqrt{3gl} \;;\; \omega_2 = \frac{M - 3m}{M + 3m}\sqrt{\frac{3g}{l}}$$

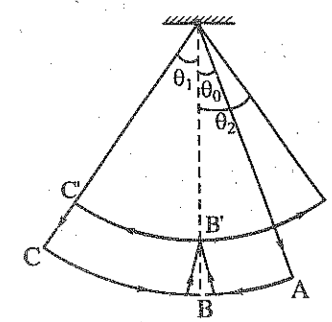
Biện luận :

– Nếu $M > 3m$ thì $\omega_2 > 0$, thanh tiếp tục đi sang trái.

– Nếu $M = 3m$, thanh đứng yên.

– Nếu $M < 3m$ thì $\omega_2 < 0$, thanh bật trở lại.

1.22. (Hình 1.26G).



Hình 1.26G

a) Đứa trẻ ngồi xuống ở vị trí biên và đứng lên khi qua VTCB.

b) Khi qua vị trí cân bằng, đứa trẻ đứng lên đột ngột, thanh chưa kịp thay đổi vị trí. Tổng momen các ngoại lực đối với trục quay bằng 0, nên momen động lượng được bảo toàn :

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \qquad (1)$$

Vì $I_1 > I_2$ nên $\omega_2 > \omega_1$.

$$\Delta W_đ = \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 - \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right) > 0$$

Động năng của hệ tăng lên. Sự tăng động năng này có liên quan đến công của các nội lực (tức là công thực hiện bởi lực của cơ bắp chân).

c) Từ sơ đồ Hình 1.26G, ta thấy :

$$\left.\begin{array}{l} W_{đ_B} = W_{t_A} = mgl_1(1 - \cos\theta_0) \\ W_{đ_{B'}} = W_{t_{C'}} = mgl_2(1 - \cos\theta_1) \end{array}\right\} \qquad (2)$$

$$\frac{W_{đ_{B'}}}{W_{đ_B}} = \frac{I_2\omega_2^2}{I_1\omega_1^2}$$

Thay (1) và (2) vào, ta được : $\frac{l_2(1 - \cos\theta_1)}{l_1(1 - \cos\theta_0)} = \frac{I_1}{I_2}$.

hay $$\frac{1-\cos\theta_1}{1-\cos\theta_0} = \frac{l_1 I_1}{l_2 I_2} = \frac{1}{k} \quad ; \quad \left(\frac{\sin\frac{\theta_1}{2}}{\sin\frac{\theta_0}{2}}\right)^2 = \frac{1}{k}$$

Tương tự : $$\left(\frac{\sin\frac{\theta_2}{2}}{\sin\frac{\theta_1}{2}}\right)^2 = \frac{1}{k^2} \quad ; \quad \left(\frac{\sin\frac{\theta_n}{2}}{\sin\frac{\theta_0}{2}}\right)^2 = \frac{1}{k^n}$$

Thay $\theta_n = \frac{\pi}{2}$ và $\sin\frac{\theta_0}{2} = \frac{\theta_0}{2}$ vào, ta được : $k^n = \frac{\theta_0^2}{2}$.

$$\Rightarrow n\,l\mathrm{n}k = l\mathrm{n}\frac{\theta_0^2}{2} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{l\mathrm{n}\frac{\theta_0^2}{2}}{l\mathrm{n}k}$$

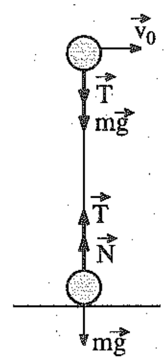
1.23. (Hình 1.27G). Trước hết, ta xét điều kiện để quả cầu dưới không nảy lên :

$$T + N = mg$$
$$N = mg - T \geq 0$$
$$T \leq mg$$

Khi ấy, quả cầu trên quay quanh quả cầu dưới :

$$F_{ht} = T + mg = \frac{mv_0^2}{l}$$

$$T = \frac{mv_0^2}{l} - mg \leq mg$$



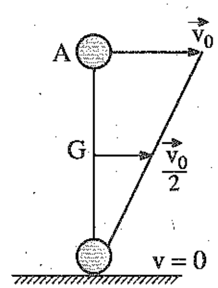
Hình 1.27G

Suy ra : $v_0^2 \leq 2gl$.

Vậy điều kiện để quả cầu dưới nảy lên ngay là :

$$v_0^2 \geq 2gl \qquad (1)$$

Khi quả cầu dưới đã nảy lên thì quả tạ đôi chuyển động vừa tịnh tiến vừa quay quanh khối tâm. Tại thời điểm quả cầu trên nhận được vận tốc $\vec{v}_0$ thì khối tâm nhận được vận tốc $\frac{\vec{v}_0}{2}$ và chuyển động giống như một vật bị ném ngang (Hình 1.28G). Thời gian để khối tâm rơi đến sàn là :



Hình 1.28G

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Tạ đôi quay với vận tốc góc ω không đổi quanh khối tâm vì $M_{(M,\vec{P})} = 0$.

Muốn cho tạ đôi chạm sàn ở tư thế nằm ngang thì trong thời gian $t = \sqrt{\frac{l}{g}}$, tạ đôi phải quay được một góc bằng $\frac{\pi}{2} + k\pi$, tức là tối thiểu bằng $\frac{\pi}{2}$.

Từ $\varphi = \omega t$, suy ra $\omega = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}$.

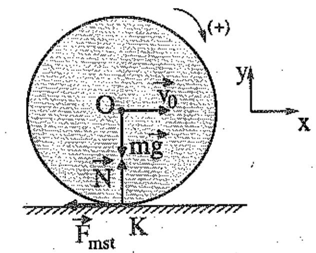
Mặt khác, $v_{AG} = \omega\frac{l}{2} = \frac{v_0}{2}$ nên cuối cùng ta được : $v_{0(min)} = \frac{\pi}{2}\sqrt{gl}$.

1.24. Chọn chiều dương cho chuyển động tịnh tiến và cho chuyển động quay như Hình 1.29G.

a) $Ox : -F_{ms} = ma \qquad (1)$

$Oy : N - mg = 0 \qquad (2)$

$\Sigma M_{(O)} = F_{mst}R = I_O\gamma \qquad (3)$



Hình 1.29G

Giải hệ phương trình, ta được :

$$a = -\mu_t g \Rightarrow v = v_0 - \mu_t g t \qquad (4)$$

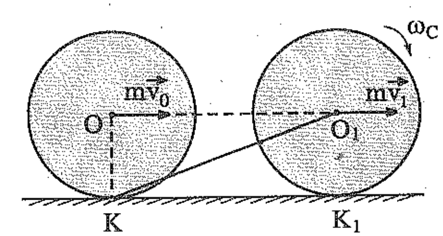
$$\gamma = \frac{R\mu_t g}{\frac{2}{5}mR^2} = \frac{5}{2}\frac{\mu_t g}{R} \Rightarrow \omega = \frac{5}{2}\frac{\mu_t g}{R}t \qquad (5)$$

b) Điều kiện lăn không trượt :

$$v = \omega R$$

$$v_0 - \mu_t g t = \frac{5}{2}\mu_t g t$$

$$t = \frac{2}{7}\frac{v_0}{\mu_t g}$$



Hình 1.30G

Thay vào (4) ta được : $v = \frac{5}{7}v_0 = \text{const} \qquad (6)$

c) Để tính $\vec{L}$ ban đầu đối với trục K, ta áp dụng định lí Kơ-níc :

$$\vec{L}_K = \vec{L}_O + \overrightarrow{KO} \wedge m\vec{v}_G$$

$$L_1 = 0 + Rmv_0 \Rightarrow L_1 = Rmv_0 \qquad (7)$$

d) Momen của các lực đối với trục K luôn luôn bằng 0 nên momen động lượng đối với trục này được bảo toàn :

$$L_2 = Rmv_0 \qquad (8)$$

(Ta có thể kiểm tra lại kết quả bằng cách tính khác. Giả sử tại vị trí K_1 quả bi-a bắt đầu lăn không trượt với $v = \frac{5v_0}{7}$ và với $\omega = \frac{5v_0}{7R}$ (Hình 1.30G).

$$\vec{L}_K = \vec{L}_{O_1} + \overrightarrow{K_1O_1} \wedge m\vec{v}_1$$

$$L_2 = \frac{2}{5}mR^2.\frac{5v_0}{7R} + OK.m\frac{5v_0}{7} \Rightarrow L_2 = mRv_0$$

e) $A_{mst} = \Delta W_d = \left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_{O_1}\omega^2\right) - \frac{1}{2}mv_0^2$

$$= \frac{1}{2}m.\frac{25}{49}v_0^2 + \frac{1}{2}.\frac{2}{5}mR^2.\frac{25}{49}\frac{v_0^2}{R^2} - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{1}{7}mv_0^2$$

1.25. (Hình 1.31G).

a) Khi đặt xilanh đang quay xuống đất thì ở chỗ tiếp xúc K của xilanh với đất có $v_K \neq 0$ và hướng về phía bên trái. Lực ma sát trượt xuất hiện tác dụng vào xilanh hướng sang phải. Lực ma sát có tác dụng làm tăng vận tốc của khối tâm của xilanh và làm giảm vận tốc góc của xilanh quanh khối tâm.

Khi v_0 còn nhỏ hơn ωR thì xilanh còn trượt về bên phải.

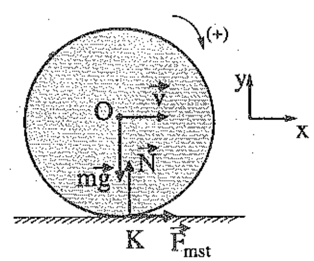
$$Oy : N - mg = 0 \qquad (1)$$

$$Ox : F_{mst} = ma \qquad (2)$$

Suy ra : $a = \frac{F_{mst}}{m} = \frac{\mu N}{m} = \mu g = \text{const}$

$$M = -F_{mst}R = \frac{1}{2}mR^2\gamma \qquad (3)$$

Suy ra : $\gamma = \frac{-2\mu g}{R} = \text{const}$



Hình 1.31G

b) $v = at = \mu gt \qquad (4)$

$$\omega = \omega_1 - \frac{2\mu g}{R}t \qquad (5)$$

Từ điều kiện lăn không trượt $v = R\omega$, suy ra :

$$\mu gt_1 = \left(\omega_1 - \frac{2\mu g}{R}t_1\right)R$$

$$3\mu gt_1 = \omega_1 R \Rightarrow t_1 = \frac{\omega_1 R}{3\mu g}$$

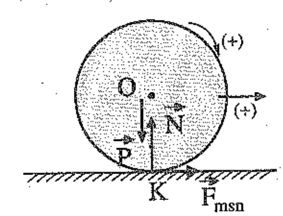
Thay vào (5) : $\omega_2 = \omega_1 - \frac{2\mu g}{R}.\frac{\omega_1 R}{3\mu g} \Rightarrow \omega_2 = \frac{1}{3}\omega_1 \qquad (6)$

c) $Q = \frac{1}{2}I\omega_1^2 - \left(\frac{1}{2}I\omega_2^2 + \frac{1}{2}mv_1^2\right) \Rightarrow Q = \frac{2}{3}W_{d_1}$

d) $s = \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{1}{2}\mu g\left(\frac{\omega_1 R}{3\mu g}\right)^2 = \frac{R^2\omega_1^2}{18\mu g}$ (phụ thuộc vào μ_t).

1.26. a) Vì trong giai đoạn đầu $v_0 < \omega R$, nên $v_K = v_0 - \omega R < 0$. Lực ma sát trượt xuất hiện hướng về phía trước. Lực này có tác dụng làm tăng v_0 và làm giảm ω cho đến khi $v_0 = \omega R$ thì quả cầu lăn không trượt.

b) Chọn chiều dương cho chuyển động tịnh tiến theo khối tâm và chuyển động quay như Hình 1.32G, ta có hệ phương trình :



Hình 1.32G

$$ma = \mu mg \qquad (1)$$

$$I_O\gamma = -\mu mgR \qquad (2)$$

$$a = R\gamma \qquad (3)$$

Giải hệ phương trình : Gọi t_1 là khoảng thời gian kể từ lúc quả cầu tiếp xúc với mặt phẳng cho đến lúc nó bắt đầu lăn không trượt.

Từ (1) ta được : $v_1 = \mu gt_1 \qquad (4)$

Từ (2) ta được : $\omega_1 = \omega_0 - \frac{5\mu g}{2R}t_1 \qquad (5)$

Từ (4) và (5) suy ra : $t_1 = \frac{2R\omega_0}{7\mu g}$; $v_1 = \frac{2R\omega_0}{7} = \text{const}$

c) $$s = \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{2R^2\omega_0^2}{49\mu g}$$

$$\varphi = \omega_0 t_1 + \frac{1}{2}\gamma t_1^2 = \omega_0\left(\frac{2R\omega_0}{7\mu g}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{5\mu g}{2R}\right)\left(\frac{2\omega_0 R}{7\mu g}\right)^2$$

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{9\omega_0^2 R}{49\mu g}$$

d) Vì μ rất lớn nên quả cầu không trượt mà quay quanh điểm tiếp xúc K. Mặt khác, vì ΣM của các lực đối với K = 0, nên momen động lượng của quả cầu được bảo toàn.

Lúc sắp chạm sàn : $\vec{L}_K = \vec{L}_O + \overrightarrow{KO} \wedge m\vec{v}_0^2 \Rightarrow L_K = \frac{2}{5}mR^2\omega_0 + 0.$

Lúc chạm sàn : $L_K = I_K\omega_1 = \frac{7}{5}mR^2\omega_1$

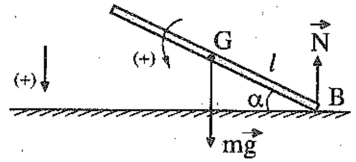
$$\frac{7}{5}mR^2\omega_1 = \frac{2}{5}mR^2\omega_0 \Rightarrow \omega_1 = \frac{2\omega_0}{7} \text{ và } v_1 = \frac{2R\omega_0}{7}.$$

1.27. *Cách 1 :* Chuyển động (thành phần) quay quanh G với gia tốc góc γ (tại t = 0) (Hình 1.33G).

$$\Sigma M_{(G)} = I_G\gamma$$

$$Nl\cos\alpha = \frac{1}{12}m(2l)^2\gamma$$

$$N\cos\alpha = \frac{1}{3}ml\gamma \qquad (1)$$

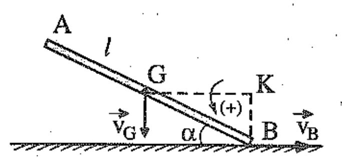


Hình 1.33G

+ Chuyển động quay thuần tuý quanh tâm quay tức thời K với gia tốc góc γ (tại t = 0) (Hình 1.34G).

$$mgl\cos\alpha = I_K\gamma = \left[I_G + m(KG)^2\right]\gamma$$

$$g\cos\alpha = l\gamma\left(\frac{1}{3} + \cos^2\alpha\right) \qquad (2)$$



Hình 1.34G

Kết hợp (1) và (2), ta được : $N = \dfrac{mg}{1 + 3\cos^2\alpha}.$

Cách 2 : Chọn trục Oy làm trục gốc để xác định ω và γ của chuyển động quay. Theo Hình 1.35G ta có : $\omega = \beta' = -\alpha'$ và $\gamma = \beta'' = -\alpha'$.

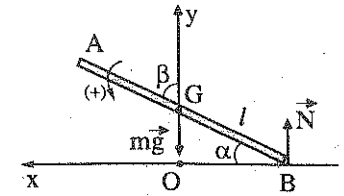
+ Chuyển động của khối tâm :

$$mg - N = ma_G \qquad (3)$$

$$y_G = l\sin\alpha$$

$$y'_G = l\cos\alpha.\alpha' = -l\cos\alpha.\omega$$

$$y''_G = -l\sin\alpha.\omega^2 - l\cos\alpha.\gamma$$



Hình 1.35G

tại lúc thả tay $\omega = 0$ nên $a_G = y''_G = -l\gamma\cos\alpha$ (đại số) (4)

Thay (4) vào (3), ta được :

$$-mg + N = -ml\cos\alpha.\gamma$$

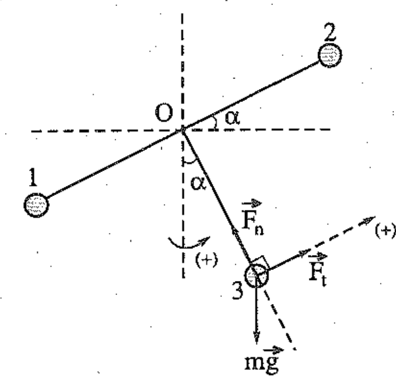
+ Chuyển động quay quanh khối tâm :

$$Nl\cos\alpha = \frac{1}{3}ml^2\gamma \qquad (5)$$

Kết hợp (5) với (4), ta được : $N = \dfrac{mg}{1 + 3\cos^2\alpha}.$

1.28. Ta phân tích lực $\vec{F}$ mà thanh tác dụng lên quả cầu 3 thành hai lực thành phần $\vec{F}_n$ và $\vec{F}_t$ như Hình 1.36G.

Quả cầu 3 chuyển động tròn quanh tâm O. Tại thời điểm bắt đầu thả tay thì v = 0, $\omega = 0$, $a_n = \dfrac{v^2}{l} = 0$, $a_t = l\gamma$.



Hình 1.36G

+ Theo phương hướng tâm :

$$F_{ht} = F_n - mg\cos\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_n = mg\cos\alpha \qquad (1)$$

Theo phương tiếp tuyến : $F_t - mg\sin\alpha = ma_t = ml\gamma$ (2)

Để tìm γ ta xét chuyển động quay của con lắc quanh trục O :

$$\sum M_{(O)} = I_O\gamma$$

$$-mgl\sin\alpha = 3ml^2\gamma \;\Rightarrow\; \gamma = \frac{-g\sin\alpha}{3l} \qquad (3)$$

Thay (3) vào (2), ta được : $F_t = \frac{2}{3}mg\sin\alpha$ (4)

Vậy lực mà thanh tác dụng lên quả cầu 3 là :

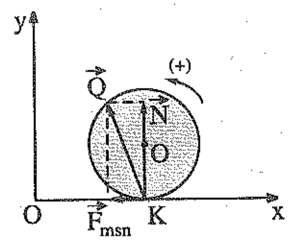
$$F = \sqrt{F_n^2 + F_t^2} = \frac{mg}{3}\sqrt{4 + 5\cos^2\alpha}$$

1.29. (Hình 1.37G).

a) Định lí biến thiên động lượng :

Ox : $m(v'_x - v_x) = -F_{ms}\Delta t$ (1)

Oy : $m(v'_y - v_y) = N\Delta t$ (2)



Hình 1.37G

Định lí biến thiên momen động lượng :

$$\frac{2}{5}mR^2(\omega' - \omega) = -F_{ms}R\Delta t \qquad (3)$$

Theo đầu bài : $|v'_y| = |v_y|$ và $\Delta W_d = 0$, ta có :

$$v'_y = -v_y \qquad (4)$$

$$\frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2\omega^2 = \frac{1}{2}m\left(v_x'^2 + v_y'^2\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2\omega'^2$$

hay $$\left(v'_x - v_x\right)\left(v'_x + v_x\right) = \frac{-2R^2}{5}(\omega' - \omega)(\omega' + \omega) \qquad (5)$$

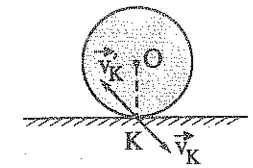
Giải hệ phương trình, ta được :

$$v'_x = \frac{1}{7}\left(3v_x - 4R\omega\right) \;;\; \omega' = -\frac{1}{7}\left(3\omega + \frac{10v_x}{R}\right).$$

Biện luận :

- $\omega' < 0$. Sau va chạm, bóng quay theo chiều ngược lại với trước va chạm.
- $v'_x > 0$ khi $\omega < \frac{3v_x}{4R}$.
- $v'_x = 0$ khi $\omega = \frac{3v_x}{4R}$.
- $v'_x < 0$ khi $\omega > \frac{3v_x}{4R}$.

b) Áp dụng công thức phân bố vận tốc để tìm $\vec{v}_K$ và $\vec{v}'_K$



Hình 1.38G

$$\vec{v}_K = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OK} \;;\; v_{Kx} = v_x + \omega R \;;\; v_{Ky} = v_y$$

$$\vec{v}'_K = \vec{v}'_O + \vec{\omega}' \wedge \overrightarrow{OK}$$

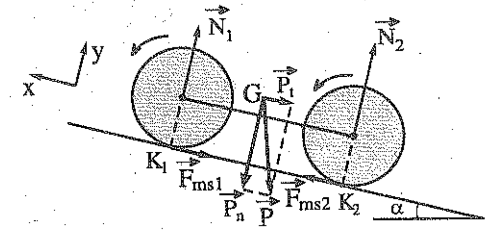
$$v'_{Kx} = v'_x + \omega' R = \left(\frac{3v_x}{7} - \frac{4R\omega}{7}\right) - \left(\frac{3\omega R}{7} + \frac{10}{7}v_x\right)$$

$$v'_{Kx} = -\left(v_x + \omega R\right) = -v_{Kx} \;;\; v'_{Ky} = -v_{Ky}$$

Suy ra : $\vec{v}'_K = -\vec{v}_K$ (Hình 1.38G).

1.30. (Hình 1.39G)

Để thân xe không bị quay thì tổng momen của các ngoại lực tác dụng lên xe đối với mọi điểm đều bằng 0.



Hình 1.39G

Đối với điểm K_1 :

$$P\cos\alpha.l + P\sin\alpha.h = N_2.2l$$

$$\Rightarrow \quad N_2 = \frac{P}{2}\left(\cos\alpha + \sin\alpha.\frac{h}{l}\right)$$

Đối với điểm K_2 : $P\cos\alpha.l = N_1.2l + P\sin\alpha.h$

$$\Rightarrow \quad N_1 = \frac{P}{2}\left(\cos\alpha - \sin\alpha.\frac{h}{l}\right) \geq 0 \Rightarrow \tan\alpha \leq \frac{l}{h}.$$

Khi góc α cực đại mà xe vẫn đi lên được thì : $\tan\alpha_{max} = \frac{l}{h}$ (1)

$$N_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} F_{ms1} = 0 \\ F_{ms2} = P\sin\alpha \end{cases}$$

Điều kiện để bánh sau không bị trượt là : $F_{ms2} \leq \mu N_2$.

$$\Rightarrow \quad P\sin\alpha \leq \mu\frac{P}{2}\left(\cos\alpha + \frac{h}{l}\sin\alpha\right)$$

Suy ra : $$\tan\alpha \leq \frac{\mu l}{2l - \mu h}. \qquad (2)$$

Công thức (2) đúng với mọi $\alpha \Rightarrow$ đúng cho α_{max}.

Kết hợp với (1) ta được : $\mu \geq \dfrac{l}{h}$.

CHỦ ĐỀ 2

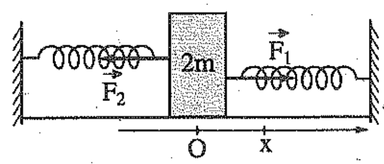
2.1. Hệ xem như một vật có khối lượng 2m mắc với hai lò xo (Hình 2.1G).

Tại VTCB : $F_1 = F_2 \Rightarrow k_1\Delta l_1 = k_2\Delta l_2$

Tại li độ x :

$$F = F_1 + F_2 = k_1(\Delta l_1 - x) - k_2(\Delta l_2 + x)$$

$$= \underbrace{k_1\Delta l_1 - k_2\Delta l_2}_{=0} - (k_1 + k_2)x$$



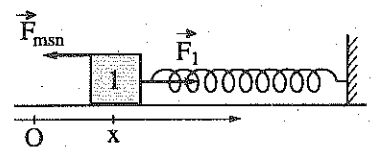
Hình 2.1G

$$\Rightarrow F = -(k_1 + k_2)x = 2mx''$$

$$x'' + \omega^2 x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{2m}}$$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{10 + 20}{0,2}} = 1,95 \approx 1,9 \text{ Hz}$$



Hình 2.2G

Xét riêng vật 1 ở li độ x (Hình 2.2G) :

$$mx'' = k_1(\Delta l_1 - x) - F_{msn}$$

Thay $x'' = -\omega^2 x$ vào ta được : $-m\omega^2 x = k_1(\Delta l_1 - x) - F_{msn}$.

$$F_{msn} = k_1\Delta l_1 - k_1 x + m\left(\frac{k_1 + k_2}{2m}\right)x \Rightarrow F_{msn} = k_1\Delta l_1 + \frac{1}{2}(k_2 - k_1)x$$

Suy ra : $$\left|k_1\Delta l_1 + \frac{1}{2}(k_2 - k_1)x\right| \leq \mu mg$$

Cuối cùng ta được : $|x| \leq 0,06$ m hay A = 6 cm.

2.2. Biên độ dao động lớn nhất đạt được khi không có sự mất mát năng lượng, tức là khi vật M không trượt trên bàn. Do vật M đứng yên nên VTCB của vật m ứng với $\Delta l_0 = \dfrac{mg}{k}$.

Khi vật m ở vị trí biên dưới thì vật M vẫn đứng yên nên ta có :

$$T = k(\Delta l_0 + A_1) \leq \mu Mg \qquad (1)$$

Thay $k\Delta l_0 = mg$ và $k = m\omega^2 = m.\dfrac{4\pi^2}{T^2}$ vào (1) ta được :

$$m\left(g + \frac{4\pi^2}{T^2}A_1\right) \leq \mu Mg = \mu 8mg$$

$$g + \frac{4\pi^2}{T^2}A_1 \leq 8\mu g$$

$$A_1 \leq \frac{T^2}{4\pi^2}.1,4g = 0,0886 \text{ m} \Rightarrow A_1 \leq 8,86 \text{ cm}$$

Khi vật m ở vị trí biên trên thì dây vẫn căng. Ta có :

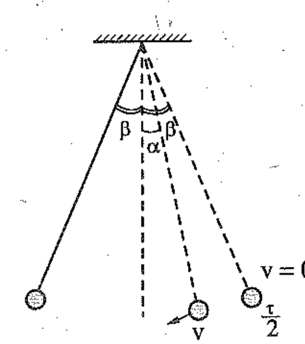
$$T \geq 0 \Rightarrow k(\Delta l_0 - A_2) \geq 0$$

$$A_2 \leq \Delta l_0 = \frac{mg}{k} = \frac{mg}{m}.\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

$$A_2 \leq \frac{1}{16} = 0,063 \text{ m} \Rightarrow A_2 \leq 6,3 \text{ cm}$$

Từ $A_1 \leq 8,86$ cm và $A_2 \leq 6,3$ cm, suy ra $A_{max} = 6,3$ cm.

2.3. Nếu không có bức tường, con lắc dao động với chu kì $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$. Khi va chạm đàn hồi thì vận tốc chỉ đổi hướng chứ không đổi độ lớn. Do đó chu kì giảm đi một lượng là τ. Từ Hình 2.3G, ta có :



Hình 2.3G

$$\varphi = \beta\cos\omega t \text{ với } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Tại $t = 0 : \varphi = \beta$;

$t = t_1 : \varphi = \alpha = \beta\cos\omega t_1$

$$\Rightarrow \quad \cos\omega t_1 = \frac{\alpha}{\beta} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{1}{\omega}\arccos\frac{\alpha}{\beta}$$

$$\tau = 2t_1 = \frac{2}{\omega}\arccos\frac{\alpha}{\beta} = \frac{T_0}{\pi}\arccos\frac{\alpha}{\beta}$$

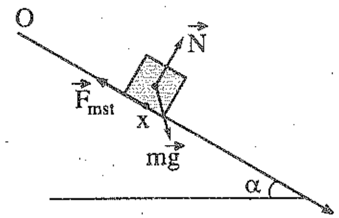
Vậy chu kì $T = T_0 - \tau = T_0\left(1 - \frac{1}{\pi}\arccos\frac{\alpha}{\beta}\right) \Rightarrow T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\pi - \arccos\frac{\alpha}{\beta}\right)$

2.4. Chọn trục Ox có gốc tại đỉnh của mặt phẳng nghiêng (Hình 2.4G). Tại toạ độ x ta có :

$$mx'' = mg\sin\alpha - F_{mst} = mg\sin\alpha - mg\cos\alpha.bx$$

$$x'' = -gb\cos\alpha\left(x - \frac{\tan\alpha}{b}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(x - \frac{\tan\alpha}{b}\right)'' = -gb\cos\alpha\left(x - \frac{\tan\alpha}{b}\right)$$



Hình 2.4G

Đặt $X = x - \frac{\tan\alpha}{b}$, ta được :

$$X'' + \omega^2 X = 0 \text{ với } \omega^2 = gb\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{gb\cos\alpha}}$$

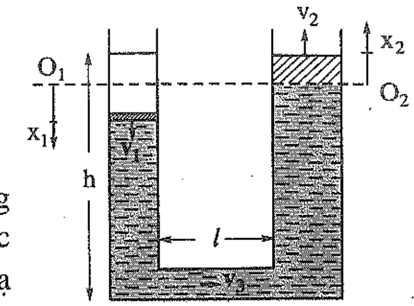
Chuyển động của vật từ đỉnh mặt phẳng nghiêng xuống cho đến lúc dừng lại giống như chuyển động của một con lắc lò xo từ vị trí biên này sang vị trí biên kia, tức là "giả dao động điều hoà" trong một khoảng thời gian là $\frac{1}{2}T$.

Vậy $t = \frac{1}{2}T = \frac{\pi}{\sqrt{gb\cos\alpha}}$.

Chú ý : – VTCB của vật là $x_0 = \frac{\tan\alpha}{b}$.

– Thế năng của vật giảm đúng bằng công của lực ma sát trượt.

2.5. (Hình 2.5G).



Hình 2.5G

Phương trình liên tục : $S_1x_1 = S_2x_2$

$$S_1v_1 = S_2v_2 = S_3v_3$$

Chọn mốc thế năng tại mực chất lỏng khi đứng yên. Khi đó khối chất lỏng Δm coi như được chuyển từ toạ độ x_1 ở dưới mực cân bằng đến toạ độ x_2 ở trên mực cân bằng :

$$W_t = \Delta m.g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \rho g S_1 x_1\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \rho g \frac{x_1^2}{2}\frac{S_1}{S_2}(S_1 + S_2)$$

Gọi m_1, m_2, m_3 là khối lượng của chất lỏng trong mỗi nhánh, ta có :

$$m_1 = \rho S_1 h \ ; m_2 = \rho S_2 h \ ; m_3 \approx \rho S_3 l$$

$$W_d = \frac{1}{2}\left(m_1v_1^2 + m_2v_2^2 + m_3v_3^2\right) = \frac{1}{2}\rho\left[h\left(S_1v_1^2 + S_2v_2^2\right) + lS_3v_3^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\rho v_1^2\left[h\frac{S_1}{S_2}(S_1 + S_2) + l\frac{S_1^2}{S_3}\right]$$

$$W = W_t + W_d = \text{const}$$

$$= \frac{1}{2}\rho g\frac{S_1}{S_2}(S_1 + S_2)x_1^2 + \frac{1}{2}\rho\left[h\frac{S_1}{S_2}(S_1 + S_2) + l\frac{S_1^2}{S_3}\right]v_1^2 = \text{const}$$

$$\frac{dW}{dt} = \rho g\frac{S_1}{S_2}(S_1 + S_2)x_1x_1' + \rho\left[h\frac{S_1}{S_2}(S_1 + S_2) + l\frac{S_1^2}{S_3}\right]v_1v_1' = 0$$

Thay $v_1 = x_1'$ và $v_1' = x_1''$ vào, ta được :

$$g(S_1 + S_2)x_1 + \left[h(S_1 + S_2) + l\frac{S_1S_2}{S_3}\right]x_1'' = 0$$

hay
$$x_1'' + \frac{g(S_1 + S_2)}{h(S_1 + S_2) + l\frac{S_1S_2}{S_3}}x_1 = 0$$

Suy ra :
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{h + l\frac{S_1S_2}{(S_1 + S_2)S_3}}}$$

2.6. a) Điều kiện để vật chìm hoàn toàn là :

$$\rho_0\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) \ge \rho_L\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) \Rightarrow \alpha = \frac{\rho_0}{\rho_L} \ge 1$$

Điều kiện để vật chìm một nửa là :

$$\rho_0\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = \rho_L\left(\frac{2}{3}\pi R^3\right) \Rightarrow \alpha = 0,5$$

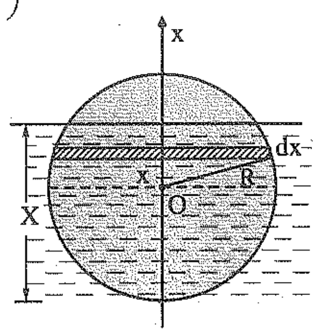
b) Gọi V_c là thể tích phần chìm (Hình 2.6G).

$$dV = \pi(R^2 - x^2)dx$$

$$V_c = \frac{2}{3}\pi R^3 + \int_0^{X-R} \pi(R^2 - x^2)dx \Rightarrow V_c = \pi X^2\left(R - \frac{X}{3}\right)$$

Điều kiện cân bằng là : $\rho_0\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = \rho_L \pi X^2\left(R - \frac{X}{3}\right)$

$$\Rightarrow \quad 3R - X = \frac{4\alpha R^3}{X^2} \Rightarrow b = 3R \text{ và } c = 4\alpha R^3$$



Hình 2.6G

c) Khi ấn chìm nhẹ thì lực kéo về là :

$$F = -\rho_L \Delta V_c g$$

$$\Delta V_c = \Delta\left[\pi X^2\left(R - \frac{X}{3}\right)\right] = \pi(2RX - X^2)\Delta X$$

$$= \pi X(2R - X)x \qquad (\text{đặt } \Delta X = x = \text{li độ})$$

$$F = -\rho_L g\pi X(2R - X)x$$

$$mx'' = -\rho_L g\pi X(2R - X)x$$

$$\rho_0\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)x'' = -\rho_L g\pi X(2R - X)x \Rightarrow x'' + \frac{3gX(2R - X)}{4\alpha R^3}x = 0$$

$\Rightarrow$ Vật dao động điều hoà với $\omega = \sqrt{\dfrac{3gX(2R - X)}{4\alpha R^3}}$.

2.7. Chọn HQC gắn với mặt phẳng nghiêng. Khi ấy vật chịu 4 lực là $\vec{P}$, $\vec{N}$, $\vec{F}_{ms}$, $\vec{F}_{qt}$. Chỉ xét các lực (hoặc thành phần lực) nằm trên mặt phẳng nghiêng thì có :

– Lực thành phần $\vec{P}_1$ hướng theo đường dốc chính và có độ lớn $P_1 = mg\sin\alpha$.

– Lực quán tính hướng ra xa VTCB và có độ lớn $F_{qt} = m\omega^2|x|$.

– Lực ma sát nghỉ cân bằng với hai lực trên và có độ lớn : $F_{ms} \le \mu mg\cos\alpha$. (Hình 2.7G).

Điều kiện để vật bắt đầu trượt là :

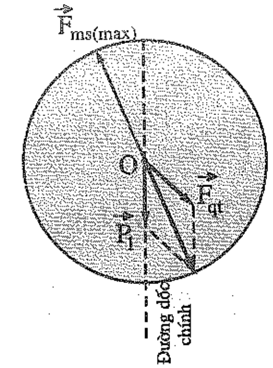
$$\vec{P}_1 + \vec{F}_{qt} + \vec{F}_{ms(max)} = \vec{0}$$

Vì $F_{ms(max)} = \mu mg\cos\alpha = \text{const}$, nên $F_{qt(min)}$ khi phương dao động trùng với đường dốc chính (Hình 2.8G). Khi ấy ta có :

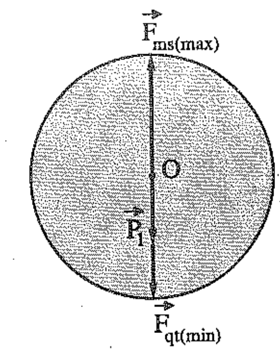
$$mg\sin\alpha + F_{qt(min)} = \mu mg\cos\alpha$$

$$\Rightarrow m\omega^2|x| = mg(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)$$

$$= mg(\mu - \alpha)$$



Hình 2.7G



Hình 2.8G

$$\omega^2_{(min)} = \frac{g}{A}(\mu - \alpha) \; ; \; f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g(\mu - \alpha)}{A}}$$

2.8. a) Hạt cườm dao động theo chu kì của một con lắc đơn có chiều dài $\sqrt{l^2 - a^2}$, tức là với $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{g}{\sqrt{l^2 - a^2}}}$.

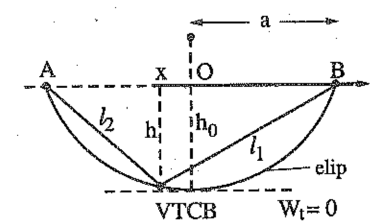
b) Hình 2.9G. Chọn mốc thế năng tại VTCB : $h_0 = \sqrt{l^2 - a^2}$.

$$h = \sqrt{l_1^2 - (a + x)^2} = \sqrt{l_2^2 - (a - x)^2}$$

$$\Rightarrow \quad (l_1 - l_2)(l_1 + l_2) = 4ax$$

$$(l_1 - l_2)2l = 4ax$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l_1 - l_2 = \dfrac{2ax}{l} \\ l_1 + l_2 = 2l \end{cases} \Rightarrow l_1 = \frac{ax}{l} + l$$



Hình 2.9G

$$\Delta h = h_0 - h = \sqrt{l^2 - a^2} - \sqrt{\left(\frac{ax}{l} + l\right)^2 - (a + x)^2}$$

$$= \sqrt{l^2 - a^2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}\right) = \sqrt{l^2 - a^2}\left(1 - 1 + \frac{1}{2}\frac{x^2}{l^2}\right)$$

$$\Delta h = \frac{1}{2}\left(\sqrt{l^2 - a^2}\right)\frac{x^2}{l^2}$$

Bảo toàn cơ năng : $W = mg\Delta h + \frac{1}{2}mv^2 = const$

$$mg.\frac{1}{2}\left(\sqrt{l^2 - a^2}\right)\frac{x^2}{l^2} + \frac{1}{2}mx^2 = const$$

$$\frac{dW}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{g}{l^2}\sqrt{l^2 - a^2}.x + x'' = 0$$

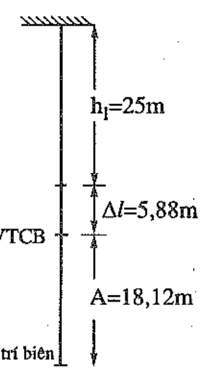
Hạt cườm dao động điều hoà với $\omega_2 = \sqrt{\frac{g\sqrt{l^2 - a^2}}{l^2}}$.

c) Quỹ đạo của hạt cườm có dạng như ở hình ở đầu bài khi $T_2 = 2T_1$ hay $\omega_2 = \frac{\omega_1}{2}$. Từ đó suy ra : $\frac{l}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

2.9. a) Bảo toàn cơ năng : $\frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = mgh$,

$$\Rightarrow \quad k = \frac{2mgh}{(\Delta l)^2} = \frac{2.70,0.9,8.49}{24^2} = 116,7 \approx 117 \text{ N/m}$$

b) Chuyển động nhảy xuống gồm hai giai đoạn, giai đoạn rơi tự do và giai đoạn dao động điều hoà (Hình 2.10G).



Hình 2.10G

Thời gian rơi tự do :

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = \sqrt{\frac{2.25,0}{9,8}} = 2,258 \text{ s.}$$

Tần số góc của dao động :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{116,7}{70,0}} = 1,29 \text{ rad/s.}$$

Chu kì dao động :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6,28}{1,29} = 4,868 \approx 4,87 \text{ s.}$$

Vị trí cân bằng của dao động điều hoà :

$$k\Delta l = mg \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k} = \frac{70,0.9,8}{116,7} = 5,878 \approx 5,88 \text{ m}$$

Biên độ dao động : $A = 49 - (25 + 5,878) = 18,12$ m.

Dựa vào tính chất tuần hoàn của hàm điều hoà, thời gian chuyển động từ vị trí có li độ x = –5,88 m đến VTCB bằng thời gian chuyển động từ VTCB đến vị trí có li độ x = 5,88 cm :

$$x = a\sin\omega t \Rightarrow 5,88 = 18,12\sin\omega t_2$$

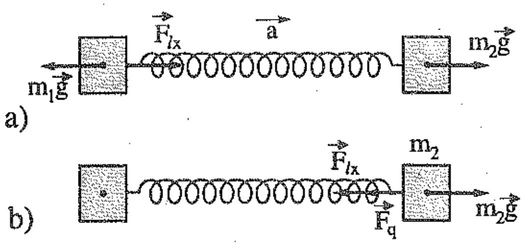
$$\Rightarrow \quad t_2 = \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{5,88}{18,12}\right) = 0,25 \text{ s}$$

Thời gian chuyển động từ VTCB đến vị trí biên là : $t_3 = \frac{1}{4}T = 1,22$ s.

Chu kì của sự nhảy là : $\tau = 2(t_1 + t_2 + t_3) = 2(2,258 + 0,25 + 1,22)$

$\tau = 7,45 \approx 7,4$ s

2.10. a) Vì chỉ xét chuyển động của hệ theo phương của dây nối nên ta có thể bỏ qua ròng rọc (Hình 2.11G).



Hình 2.11G

Trước hết tìm gia tốc của vật 1 trong HQC mặt đất (Hình 2.11Ga).

$$a_1 = \frac{F_{lx} - m_1 g}{m_1} = \frac{F_{lx}}{m_1} - g \qquad (1)$$

Chọn HQC gắn với m_1 để xét chuyển động của m_2 (Hình 2.11Gb).

$$m_2 a_{21} = m_2 g - F_q - F_{lx}$$

$$m_2 a_{21} = m_2 g - m_2\left(\frac{F_{lx}}{m_1} - g\right) - F_{lx}$$

$$m_2 a_{21} = -\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)k\left(\Delta l_0 + x\right) + 2m_2 g \qquad (2)$$

Tại VTCB, lò xo dãn Δl_0, x = 0 và $a_{21} = 0$.

Khi ấy phương trình (2) trở thành :

$$-\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)k\Delta l_0 + 2m_2 g = 0 \qquad (3)$$

Từ (2) và (3), ta có : $-\frac{(m_1 + m_2)kx}{m_1} = m_2 x''$,

hay $x'' + \frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}x = 0 \Rightarrow x'' + \frac{k}{\mu}x = 0$ (μ là khối lượng rút gọn hệ)

Suy ra hệ dao động điều hoà với $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{\mu}}$.

b) Tại t = 0, lò xo không dãn và vật ở vị trí biên vì $v_{21} = 0$. Suy ra $A = \Delta l_0$.

Theo phương trình (3) ta được : $A = \Delta l_0 = \dfrac{2m_1m_2g}{k(m_1 + m_2)}$.

2.11. Vật dao động tắt dần theo phương trình : $x = Ae^{-\lambda t}\cos\omega t$,

với $\lambda = \dfrac{b}{2m}$ và $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \dfrac{b^2}{4m^2}}$, trong đó $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

Ở thời điểm t_1 : $\cos\omega t_1 = 1$ và x_1 cực đại.

Sau 20 dao động toàn phần, tức là sau 20T, $\cos\omega(t_1 + 20T) = 1$ và x_2 lại cực đại.

Theo đầu bài ta có : $\dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{1}{10} \Rightarrow \dfrac{e^{-\lambda(t_1+20T)}}{e^{-\lambda t_1}} = \dfrac{1}{10} \Rightarrow e^{-40\lambda} = \dfrac{1}{10}$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{\ln 10}{40} = 5{,}76.10^{-2}\ s^{-1}$$

$$b = 2m\lambda = 2.0{,}500.5{,}76.10^{-2} = 5{,}76.10^{-2}\ \text{N.s/m}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi\ \text{rad/s}\ ;\ \omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2 \Rightarrow \frac{\omega_0}{\omega} = \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\omega^2}} = 1{,}0002 \approx 1$$

$$\Rightarrow T_0 \approx T\ ;\ k = m\omega_0^2 = m\omega^2 = 4{,}93\ \text{N/m}.$$

2.12. a) Khi giá đỡ và vật m đứng yên (Hình 2.12Ga) :

$$mg = k\Delta l$$

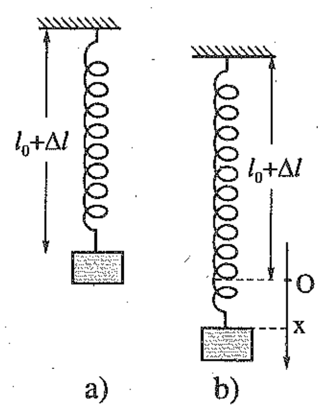
Khi giá đỡ dao động :

$$x_1 = a_1\cos\omega t \Rightarrow x_1'' = -\omega^2 a_1\cos\omega t$$

Chọn HQC gắn với giá đỡ. Trong HQC này giá đỡ đứng yên, còn vật m chịu thêm lực quán tính $F_{qt} = -mx_1''$ (Hình 2.12G).

Chọn gốc toạ độ tại vị trí cách giá đỡ một đoạn bằng $l_0 + \Delta l$ và xét vật ở li độ x. Ta có phương trình :

$$mx'' = mg - k(\Delta l + x) - bx' + m\omega^2 a_1\cos\omega t$$



Hình 2.12G

Kết hợp với (1), ta được : $x'' + \dfrac{b}{m}x' + \dfrac{k}{m}x = \omega^2 a_1\cos\omega t$ (2)

b) Trong chế độ ổn định, vật m dao động điều hoà theo phương trình :

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

với : $$A = \frac{m\omega a_1}{\sqrt{\left(\dfrac{k}{\omega} - m\omega\right)^2 + b^2}} \quad (3)$$

$$\tan\varphi = \frac{b}{m\omega - \dfrac{k}{\omega}} \quad (4)$$

c) $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \ll \omega \Rightarrow \dfrac{k}{m} \ll \omega^2 \Rightarrow \dfrac{k}{\omega} \ll m\omega$.

Mặt khác, b lại rất bé nên (3), (4) trở thành $A = a_1$ và $\tan\varphi = 0$.

Vật m dao động theo phương trình : $x = a_1\text{con}\omega t$.

Suy ra biên độ và tần số dao động của vật m bằng biên độ và tần số của sóng địa chấn.

2.13. a) Gọi I_1 là momen quán tính của $\dfrac{1}{4}$ khối lập phương (phần sẫm màu ở Hình 2.13G).

Theo tính chất cộng momen quán tính ta có :

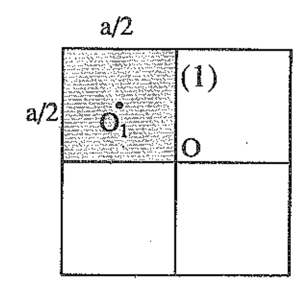
$$I_{1/O} = \frac{1}{4}I_O$$

Dựa vào công thức $I = \Sigma m_i r_i^2$ và theo tỉ xích ta có :

$$I_{1/O_1} = \frac{1}{16}I_O \quad (2)$$

Theo định lí Stê-nơ – Huy-ghen, ta có :

$$I_{1/O} = I_{1/O_1} + \frac{m}{4}\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 \quad (3)$$



Hình 2.13G

Từ (1), (2) và (3) suy ra : $I_O = \dfrac{1}{6}ma^2$.

Cuối cùng ta được : $I_C = I_O + m\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{2}{3}ma^2$.

b) $M_C = I_C\gamma \Rightarrow -mg\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta = I\theta''$

Đối với dao động nhỏ : $-mg\frac{a}{\sqrt{2}}\theta = \frac{2}{3}ma^2\theta''$

hay $\theta'' + \frac{3g}{2\sqrt{2}a}\theta = 0$

Suy ra : $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2\sqrt{2}a}}$ và $T = 2\pi\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{a}{g}}$

c) $T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{a}{g}}$

Suy ra : $l = \frac{2\sqrt{2}}{3}a$..

2.14. a) $I_O = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{4}\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{17}{32}mr^2 = 1{,}065.10^{-3}\ \text{kg.m}^2$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{K}} \Rightarrow K = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 I_O \approx 0{,}993.10^{-3}\ \text{N.m}$

b) $\theta(t) = \theta_m\cos(\omega t + \varphi)$

$\theta'(t) = -\omega\theta_m\sin(\omega t + \varphi)$

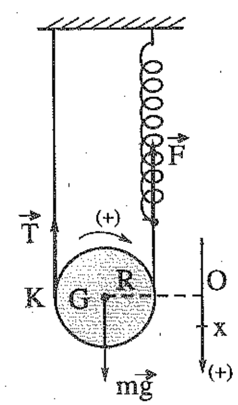
$\theta'(t)_{\text{cực đại}} = \omega\theta_m = \sqrt{\frac{K}{I_O}}\theta_m = 1{,}257 \approx 1{,}26\ \text{rad/s}$

c) $W_d = \frac{1}{2}I_O\theta'^2 = 0{,}839.10^{-3} \approx 0{,}84.10^{-3}\ \text{J}$

2.15. *Cách 1 :* (Phương pháp động lực học). Chọn chiều dương cho chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay như ở Hình 2.14G.

Tại VTCB $\begin{cases} mg - T - F = 0 \\ (T - F)R = 0 \\ F = k\Delta l \end{cases} \Rightarrow mg = 2k\Delta l \qquad (1)$

Tại li độ x, lò xo dãn thêm 2x.



Hình 2.14G

$\sum\vec{F} = m\vec{a}_G \Rightarrow mg - T_1 - k(\Delta l + 2x) = mx'' \qquad (2)$

$\sum\vec{M} = I\vec{\gamma} \Rightarrow (T_1 - F_1)R = \frac{1}{2}mR^2\frac{a_G}{R}$

$\Rightarrow T_1 - k(\Delta l + 2x) = \frac{1}{2}mx'' \qquad (3)$

Từ (1), (2), (3) suy ra : $x'' + \frac{8k}{m}x = 0 \qquad (4)$

Từ $a_G = R\gamma$ hay $x'' = R\varphi'' \Rightarrow \varphi'' + \frac{8k}{3m}\varphi = 0 \qquad (5)$

Các phương trình (4) và (5) chứng tỏ cả chuyển động tịnh tiến lẫn chuyển động quay của đĩa đều là DĐĐH với $\omega = \sqrt{\frac{8k}{3m}}$ hay với $T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{8k}}$.

Cách 2 : (Phương pháp năng lượng). Chọn mốc thế năng tại VTCB O. Khi khối tâm G ở li độ x, lò xo dãn thêm 2x.

Vì K là tâm quay tức thời nên có thể viết :

$W = \frac{1}{2}I_K\omega^2 + \frac{1}{2}k(2x)^2 = \text{const} \qquad (6)$

Thay $I_K = \frac{3}{2}mR^2$ và $\omega = \frac{v}{R} = \frac{x'}{R}$ vào (6), ta được :

$\frac{3m}{4}x'^2 + 2kx^2 = \text{const} \qquad (7)$

Lấy đạo hàm (7) theo thời gian, ta được :

$\frac{3m}{4}x'' + 2kx = 0$ hay $x'' + \frac{8k}{3m}x = 0$

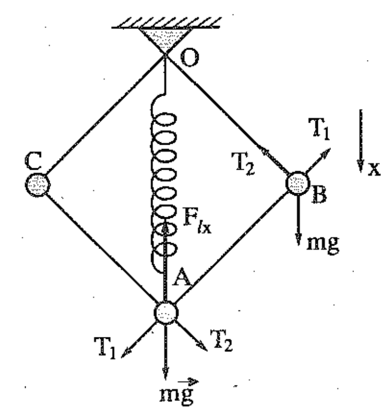
2.16. Xét sự cân bằng của thanh cứng AB theo hướng AB (Hình 2.15G).

$\sum F = 0 \Rightarrow (F_{lx} - 2mg)\cos45^\circ = 0 \Rightarrow F_{lx} = 2mg$

$\Delta l = \frac{2mg}{k} \qquad (1)$

$\Rightarrow l\sqrt{2} - l_0 = \frac{2mg}{k}$

Cuối cùng $l_0 = l\sqrt{2} - \frac{2mg}{k}$



Hình 2.15G

b) Chọn mốc thế năng trọng trường của các quả cầu và thế năng đàn hồi của lò xo tại VTCB của hệ.

Khi quả cầu dưới ở li độ x thì hai quả cầu trên ở li độ $\frac{x}{2}$ còn lò xo thì dãn thêm x.

Độ biến thiên thế năng trọng trường là :

$$\Delta W_{t_1} = -mgx - 2mg\frac{x}{2} = -2mgx$$

Độ biến thiên thế năng đàn hồi là :

$$\Delta W_{t_2} = \frac{1}{2}k(\Delta l + x)^2 - \frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{1}{2}kx^2 + k\Delta l.x$$

Thay (1) vào ta được : $\Delta W_{t_2} = \frac{1}{2}kx^2 + 2mgx$

$$\Delta W_t = \Delta W_{t_1} + \Delta W_{t_2} = \frac{1}{2}kx^2$$

Vậy, so với VTCB thì ở li độ x thế năng của hệ tăng thêm $\frac{1}{2}kx^2$.

c) Vì B quay quanh O nên $\vec{v}_B \perp OB$, tức là hướng dọc theo thanh AB. Theo tính chất của thanh cứng, ta có :

$$v_B = v_A\cos 45^o = \frac{v}{\sqrt{2}} = v_C$$

$$W_đ = \frac{1}{2}mv^2 + 2.\frac{1}{2}m\frac{v^2}{2} = mv^2$$

d) Vì dao động nhỏ nên hình hợp bởi 4 thanh chỉ biến dạng nhỏ so với hình vuông. Vì thế ở li độ x, một cách gần đúng ta có :

$$W = mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{const}$$

$$\frac{dW}{dt} = 0 \Rightarrow x'' + \frac{k}{2m}x = 0$$

Ta được $\omega = \sqrt{\frac{k}{2m}}$ và $T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$.

2.17. Các lực tác dụng vào quả cầu là $\vec{P}$, $\vec{N}$, và $\vec{F}_{msn}$ (Hình 2.16G). Khối tâm O của quả cầu chuyển động tròn quanh tâm C. Theo hướng OC ta có :

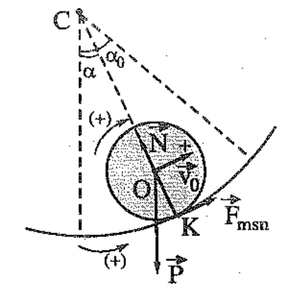
$$N - mg\cos\alpha = \frac{mv_0^2}{R - r} \qquad (1)$$

Áp dụng luật BTCN ta có :

$$mgl(\cos\alpha - \cos\alpha_0) = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I_O\omega^2 \qquad (2)$$

Thay $\omega = \frac{v_0}{r}$ và $I_O = \frac{2}{5}mr^2$ vào (2) ta được :

$$v_0^2 = \frac{10g}{7}(R - r)(\cos\alpha - \cos\alpha_0) \qquad (3)$$



Hình 2.16G

Thay (3) vào (1) ta được : $N = \frac{mg}{7}(17\cos\alpha - 10\cos\alpha_0)$

b) $$M_{\vec{P},K} = I_K\gamma$$

Chọn chiều dương cho chuyển động tịnh tiến và cho chuyển động quay như ở Hình 2.16G. Chọn tâm quay tức thời K để viết phương trình của chuyển động quay, ta có :

$$-mg\sin\alpha.r = \frac{7}{5}mr^2\frac{a_0}{r} \qquad (4)$$

Vì O chuyển động tròn quanh C, ta có :

$$v_0 = (R - r)\alpha' \Rightarrow a_0 = (R - r)\alpha'' \qquad (5)$$

Thay (5) và thay sinα = α (rad) vào (4) ta được :

$$g\alpha = -\frac{7}{5}(R - r)\alpha'' \text{ hay } \alpha'' + \frac{5g}{7(R - r)}\alpha = 0$$

Quả cầu DĐĐH với tần số $\omega = \sqrt{\frac{5g}{7(R - r)}}$ hay với chu kì $T = 2\pi\sqrt{\frac{7(R - r)}{5g}}$.

c) Nếu không có lực ma sát thì không có chuyển động quay, quả cầu chuyển động tịnh tiến giống như toàn bộ khối lượng tập trung tại O.

$$-mg\sin\alpha = ma_t = m(R - r)\alpha''$$

$$-g\alpha = (R - r)\alpha'' \text{ hay } \alpha'' + \frac{g}{R - r}\alpha = 0$$

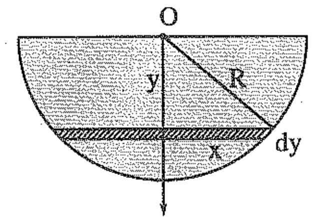
Quả cầu dao động với tần số $\omega = \sqrt{\frac{g}{R - r}}$ hay với chu kì $T = 2\pi\sqrt{\frac{R - r}{g}}$, giống như một con lắc đơn có chiều dài $l = R - r$.

Chú ý : Có thể làm câu b bằng phương pháp năng lượng với phương trình năng lượng là : $mgl(1 - \cos\alpha) + \frac{1}{2}I_K\omega^2 = \text{const}$.

2.18. a) Ghép hai nửa hình trụ lại ta được một hình trụ, bán kính R, khối lượng 2m. Momen quán tính của hình trụ đối với trục O là : $I_O = \frac{1}{2}2mr^2$.

Theo tính chất cộng của momen quán tính thì momen quán tính của một nửa hình trụ, khối lượng m sẽ là $I_O = \frac{1}{2}mr^2$.

b) Gọi dm là khối lượng của một tấm mỏng (sẫm màu) (Hình 2.17G) có bề dày dy, bề rộng 2x và nằm cách O một khoảng là y.



Hình 2.17G

$$dm = \frac{m}{\pi\frac{R^2}{2}}.2xdy$$

Gọi y_G là toạ độ của khối tâm của nửa hình trụ. Theo công thức xác định toạ độ của khối tâm, ta viết :

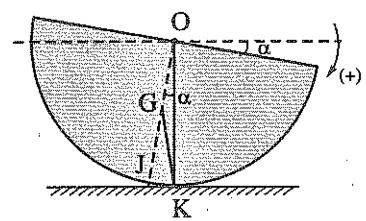
$$y_G = \frac{1}{m}\int_0^R ydm = \frac{4}{\pi R^2}\int_0^R \sqrt{R^2 - y^2}ydy$$

Đặt $y^2 = t$; $2ydy = dt$

$$y_G = \frac{2}{\pi R}\int_0^{R^2}(R^2 - t)^{\frac{1}{2}}dt = \frac{2}{\pi R}\left(-\frac{2}{3}\right)(R^2 - t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{R^2}$$

Suy ra : $y_G = OG = a = \frac{4R}{3\pi}$.

c) Hình 2.18G



Hình 2.18G

$$-\begin{cases} I_K = I_G + m\overline{GK}^2 \\ I_O = I_G + m\overline{OG}^2 \end{cases}$$

$$I_K - I_O = m(\overline{GK}^2 - a^2)$$

Vì dao động nhỏ nên $KG \approx JG = R - a$.

Thay vào ta được :

$$I_K = \frac{1}{2}mR^2 + m\left[(R-a)^2 - a^2\right] = mR^2\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\right)$$

$$M_{\vec{P},K} = I_K\gamma \Rightarrow -mg.OG\sin\alpha = I_K\alpha''$$

$$\Rightarrow -mg\frac{4R}{3\pi}\alpha = mR^2\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\right)\alpha''$$

Cuối cùng ta được : $\alpha'' + \frac{4g}{R(4,5\pi - 8)}\alpha = 0$

Vật dao động điều hoà với $\omega = \sqrt{\frac{4g}{R(4,5\pi - 8)}}$ hay với $T = 2\pi\sqrt{\frac{R(4,5\pi - 8)}{4g}}$.

2.19. a) Tại VTCB :

Quả cầu 2 (ở dưới) :
Quả cầu 1 (ở trên) :
$$\begin{cases} k\Delta l_2 = mg \\ k\Delta l_1 = mg + k\Delta l_2 \end{cases} \quad (1)$$

Tại li độ x_1, x_2 (chọn chiều dương hướng xuống) :

$$mx_1'' = -k(\Delta l_1 + x_1) + k(\Delta l_2 + x_2 - x_1) + mg$$

$$mx_2'' = -k(\Delta l_2 + x_2 - x_1) + mg$$

Kết hợp với (1) ta được :

$$\begin{cases} mx_1'' = -2kx_1 + kx_2 \\ mx_2'' = -kx_2 + kx_1 \end{cases} \quad (2)$$

Giả sử hai quả cầu dao động với cùng tần số ω :

$$x_1'' = -\omega^2 x_1 \text{ và } x_2'' = -\omega^2 x_2$$

Thay vào (2) ta được : $\begin{cases} (2k - m\omega^2)x_1 = kx_2 \ \text{(a)} \\ (k - m\omega^2)x_2 = kx_1 \ \text{(b)} \end{cases}$ (3)

Suy ra : $(2k - m\omega^2)(k - m\omega^2) = k^2$

Đặt : $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, ta được : $\omega^4 - 3\omega_0^2\omega^2 + \omega_0^4 = 0$

$$\sqrt{\Delta} = \omega_0^2\sqrt{5} \Rightarrow \omega^2 = \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)\omega_0^2$$

Hai tần số của mode là : $\omega_1 = \sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\frac{k}{m}}$; $\omega_2 = \sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\frac{k}{m}}$.

b) Thế ω_1^2 vào (3a) ta được :

$$-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)x_1 = x_2 \;\Rightarrow\; -\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)A\cos\omega_1 t = B\cos\omega_1 t\,.$$

Vậy, nếu kéo con lắc lệch về hai phía với tỉ số biên độ $\frac{B}{A} = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$ thì ta được hai con lắc dao động ngược pha với ω_1 (mode 1).

Thế ω_2^2 vào (3a) ta được : $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x_1 = x_2 \;\Rightarrow\; \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)A = B$.

Vậy, nếu kéo con lắc lệch về cùng một phía với tỉ số biên độ $\frac{B}{A} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ thì hai con lắc dao động cùng pha với cùng ω_2 (mode 2).

2.20. a)
$$\begin{cases} I\theta_1'' = -K\theta_1 + K(\theta_2 - \theta_1) \\ I\theta_2'' = -K(\theta_2 - \theta_1) \end{cases} \qquad (1)$$

b) Gọi ω là tần số của mode : $\theta_1'' = -\omega^2\theta_1$ và $\theta_2'' = -\omega^2\theta_2$

Thay vào (1) ta được :

$$\begin{cases} (-I\omega^2 + 2K)\theta_1 = K\theta_2 & \text{(a)} \\ (-I\omega^2 + K)\theta_2 = K\theta_1 & \text{(b)} \end{cases} \qquad (2)$$

Suy ra : $\quad (-I\omega^2 + 2K)(-I\omega^2 + K) = K^2$

hay $\quad I^2\omega^4 - 3KI\omega^2 + K^2 = 0$

Hai nghiệm là : $\omega_1 = \sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\frac{K}{I}}$ và $\omega_2 = \sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\frac{K}{I}}$.

c) Thay ω_1^2 vào (2a) ta được :

$$-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\theta_1 = \theta_2 \;\Rightarrow\; -\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\theta_{01}\cos\omega_1 t = \theta_{02}\cos\omega_1 t$$

$\Rightarrow$ hai con lắc dao động ngược pha với tỉ số biên độ là : $\frac{\theta_{02}}{\theta_{01}} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = 0{,}618$

Thay ω_2^2 vào (2a) ta được :

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\theta_1 = \theta_2 \;\Rightarrow\; \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\theta_{01}\cos\omega_2 t = \theta_{02}\cos\omega_2 t$$

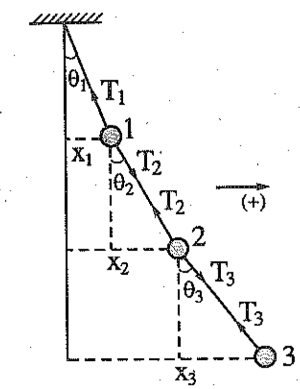
$\Rightarrow$ hai con lắc dao động cùng pha với tỉ số biên độ là : $\frac{\theta_{02}}{\theta_{01}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}618.$

2.21. Hình 2.19G.

a) Vì dao động nhỏ nên :

$$T_3 \approx mg\,;\; T_2 \approx 2mg\,;\; T_1 \approx (2+\alpha)mg$$

$$\begin{cases} mx_3'' = -mg\sin\theta_3 = -mg\left(\frac{x_3 - x_2}{a}\right) \\ mx_2'' = mg\left(\frac{x_3 - x_2}{a}\right) - 2mg\left(\frac{x_2 - x_1}{a}\right) \\ \alpha m x_1'' = 2mg\left(\frac{x_2 - x_1}{a}\right) - (2+\alpha)mg\frac{x_1}{a} \end{cases} \qquad (1)$$



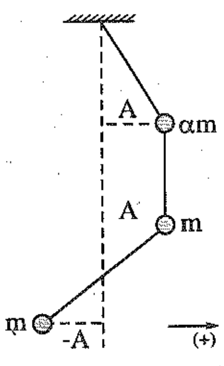
Hình 2.19G

Vì hệ dao động với $\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{a}}$ nên :

$$x_1'' = -\omega_0^2 x_1 \;;\; x_2'' = -\omega_0^2 x_2 \text{ và } x_3'' = -\omega_0^2 x_3$$

Thay vào (1) và rút gọn, ta được :

$$\begin{cases} x_3 = \frac{1}{2}(x_3 - x_2) & \text{(a)} \\ x_2 = (x_2 - x_1) - \frac{1}{2}(x_3 - x_2) & \text{(b)} \\ \alpha x_1 = \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)x_1 - (x_2 - x_1) & \text{(c)} \end{cases} \qquad (2)$$



Hình 2.20G

Lấy (2a) – (2b) ta được : $\quad x_2 = x_1 \qquad (3)$

Thay (3) vào (2b) ta được : $\quad x_3 = -x_2 \qquad (4)$

Thay (3) và (4) vào (2c) ta được : $\alpha = 2$.

b) Kéo ba quả cầu lệch khỏi VTCB đến vị trí như ở Hình 2.20G rồi buông tay, thì cả ba quả cầu sẽ dao động với cùng tần số $\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{a}}$.

2.22. Hình 2.21G.

a) Do dao động nhỏ, $T \approx m_2 g$ và $\sin\theta \approx \dfrac{x_2 - x_1}{l}$.

$$\begin{cases} m_1 x_1'' = -kx_1 + T\sin\theta = -kx_1 + \dfrac{m_2 g}{l}(x_2 - x_1) \\ m_2 x_2'' = -T\sin\theta = -\dfrac{m_2 g}{l}(x_2 - x_1) \end{cases} \qquad (1)$$

b) $m_1 = m_2 = m$. Đặt $\omega_{01}^2 = \dfrac{g}{l}$ và $\omega_{02}^2 = \dfrac{k}{m}$.

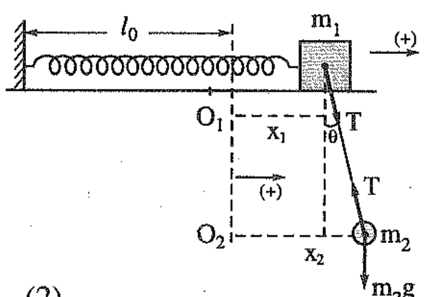
Gọi ω là tần số của một mode, ta có :

$$x_1'' = -\omega^2 x_1 \text{ và } x_2'' = -\omega^2 x_2$$

Thay vào hệ phương trình (1) ta được :

$$\begin{cases} -\omega^2 x_1 = -\omega_{02}^2 x_1 + \omega_{01}^2(x_2 - x_1) \\ -\omega^2 x_2 = -\omega_{01}^2(x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 - \omega^2\right)x_1 = \omega_{01}^2 x_2 \\ \left(\omega_{01}^2 - \omega^2\right)x_2 = \omega_{01}^2 x_1 \end{cases} \qquad (2)$$



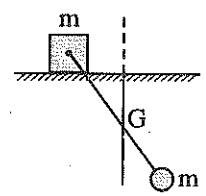
Hình 2.21G

Từ (2) suy ra : $\left(\omega_{01}^2 - \omega^2\right)\left(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 - \omega^2\right) = \omega_{01}^4$

hay $\omega^4 - \left(2\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2\right)\omega^2 + \omega_{01}^2\omega_{02}^2 = 0 \qquad (3)$

Nghiệm của phương trình (3) là :

$$\omega^2 = \omega_{01}^2 + \frac{1}{2}\omega_{02}^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\omega_1^4 + \omega_{02}^4}$$



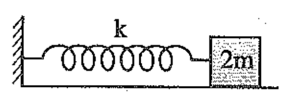
Hình 2.22G

Hai tần số của mode là :

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{2m} \pm \sqrt{\frac{g^2}{l^2} + \frac{k^2}{4m^2}}}$$

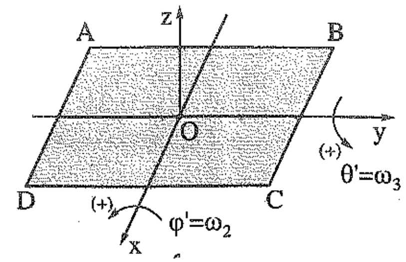
c) Với $\dfrac{g}{l} \gg \dfrac{k}{m}$ ta được $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{2g}{l}}$ và $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{k}{2m}}$.

Tần số ω_1 ứng với hệ dao động quanh khối tâm G đứng yên (Hình 2.22G). Tần số ω_2 ứng với $l \approx 0$ (Hình 2.23G).



Hình 2.23G

2.23. (Hình 2.24G).



Hình 2.24G

Mode 1 : Mặt phẳng ABCD luôn luôn nằm ngang và dao động theo phương thẳng đứng với tần số $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{4k}{m}}$.

Mode 2 : Mặt phẳng ABCD dao động quanh trục x.

Chọn gốc toạ độ của trục z tại VTCB của mặt phẳng ABCD.

Tại li độ góc φ ta có li độ của các điểm A, B, C, D lần lượt là :

$$z_A = -\frac{a}{2}\varphi \; ; \; z_D = -\frac{a}{2}\varphi \; ; \; z_C = \frac{a}{2}\varphi \quad \text{và} \quad z_B = \frac{a}{2}\varphi$$

Các lực kéo về tác dụng vào các điểm A, B, C, D lần lượt là :

$$F_A = -k\left(-\frac{a}{2}\varphi\right) = \frac{k}{2}(a\varphi) \; ; \; F_D = \frac{k}{2}(a\varphi)$$

$$F_C = -\frac{k}{2}(a\varphi) \; ; \; F_B = -\frac{k}{2}(a\varphi)$$

Tổng momen đối với trục x của các lực tác dụng vào mặt phẳng là :

$$\Sigma M = -(F_A + F_D)\frac{a}{2} + (F_C + F_D)\frac{a}{2} = -ka^2\varphi$$

$$\Sigma M = I\varphi''$$

$$-ka^2\varphi = \frac{1}{12}ma^2\varphi''$$

$$\Rightarrow \quad \varphi'' + \frac{12k}{m}\varphi = 0 \qquad (1)$$

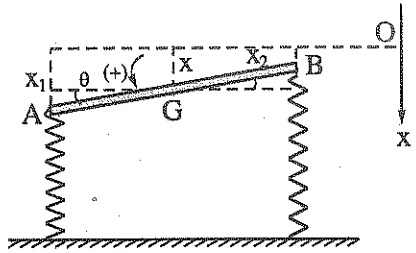
Suy ra : $\omega_2 = 2\sqrt{\dfrac{3k}{m}}$.

Mode 3 : Vì phương trình vi phân (1) không phụ thuộc a nên làm tương tự như trên ta được :

$$\theta'' + \frac{12k}{m}\theta = 0 \;\Rightarrow\; \omega_3 = \omega_2$$

Vậy có 3 mode dao động với $\omega_1 = 2\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ và $\omega_2 = \omega_3 = 2\sqrt{\dfrac{3k}{m}}$.

2.24. Chọn trục x hướng xuống, gốc toạ độ tại VTCB. Gọi x_1, x_2 và x là li độ của đầu A, đầu B và khối tâm G tại thời điểm t (Hình 2.25G).



Hình 2.25G

Áp dụng định luật II Niu-tơn cho chuyển động của khối tâm ta được :

$$mx'' = -kx_1 - kx_2 = -k(x_1 + x_2) \quad (1)$$

Vì $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, nên phương trình (1) trở thành :

$$x'' = \frac{-2k}{m}x \text{ hay } x'' + \frac{2k}{m}x = 0 \qquad (2)$$

Khối tâm của thanh dao động điều hoà với $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}$.

Xét chuyển động quay quanh khối tâm. Áp dụng định luật cơ bản của chuyển động quay ta được :

$$I_G\theta'' = -kx_1\frac{l}{2} + kx_2\frac{l}{2} = -\frac{kl}{2}(x_1 - x_2)$$

$$\frac{1}{12}ml^2\theta'' = -\frac{kl}{2}l\theta$$

$$\theta'' = -\frac{6k}{m}\theta \text{ hay } \theta'' + \frac{6k}{m}\theta = 0 \qquad (3)$$

Chuyển động quay quanh khối tâm là dao động điều hoà với $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{6k}{m}}$.

Như vậy ta được hai mode dao động. Đó là :

Mode 1 là chuyển động tịnh tiến của thanh với tần số ω_1 và mode 2 là chuyển động quay của thanh quanh khối tâm với tần số ω_2.

Chuyển động của thanh là sự chồng chập hai mode nêu trên.

CHỦ ĐỀ 3

3.1. Nếu chọn gốc toạ độ và gốc thời gian thích hợp thì phương trình sóng có dạng là : $u(x, t) = A\sin(kx \mp \omega t)$

Dấu "–" : sóng chạy theo chiều dương.

Dấu "+" : sóng chạy theo chiều âm.

a) Đối với phương trình sóng cho ở đầu bài ta được : A = 0,10 m

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{3\pi}{7} \Rightarrow \lambda = \frac{14}{3} = 4{,}7 \text{ m}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 36\pi \Rightarrow T = \frac{1}{18} = 0{,}055 \text{ s}$$

b) Dấu "+" chứng tỏ sóng chạy theo chiều âm của trục x.

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{4{,}7}{0{,}055} = 85 \text{ m/s}$$

c) $$\frac{du(x,t)}{dt} = 0{,}10.36\pi.\cos\left(\frac{3\pi x}{7} + 36\pi t\right)$$

$$a(x,t) = \frac{d^2u(x,t)}{dt^2} = -0{,}10(36\pi)^2\sin\left(\frac{3\pi x}{7} + 36\pi t\right)$$

$$a(x,t) = -(36\pi)^2 u(x,t)$$

3.2. Chọn trục x hướng thẳng đứng lên trên, gốc toạ độ tại đầu dưới của dây. Lực căng của dây tại điểm có toạ độ x là : $F_T(x) = \rho gx$ (ρ là khối lượng riêng tính theo chiều dài).

Tốc độ của sóng xung là : $v(x) = \sqrt{\dfrac{F_T}{\rho}} = \sqrt{gx}$.

3.3. a) A = 5,0 cm

$$\omega = 4{,}6 \text{ rad/s} \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4{,}6}{6{,}28} = 0{,}732 \approx 0{,}73 \text{ Hz}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{40}{0{,}73} = 54{,}6 \approx 55 \text{ cm}$$

b) $u = A\cos(kx + \omega t + \delta)$;

trong đó δ là pha ban đầu của sóng : $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = 11{,}5 \text{ m}^{-1}$

Tại x = 10 cm = 0,1m thì u = Acos(1,15 + 4,6t + δ)

Mặt khác, theo đầu bài thì : u = 5,0cos(4,6t + 1,0) (cm)

Suy ra : 1,15 + δ = 1,0 $\Rightarrow \delta = -0,15$ rad.

Vậy phương trình của sóng này là : u = 5,0 cos(11,5x + 4,6t – 0,15) (cm)

c) $$v = \sqrt{\frac{F_T}{\rho}} \Rightarrow F_T = \rho v^2 = 4,0.10^{-1}.40^2.10^{-4} = 6,410^{-2}\ \text{N}.$$

3.4. a) $u_1 = 0,15\sin(0,79.2,3 - 13.0,16) = 0,15\sin(-0,263\ \text{rad}) = -0,039$ m

b) $$u_2 = 0,15\sin(0,79x + 13t)$$

$$u = u_1 + u_2 = 0,3\ \sin 0,79x.\cos 13t\ (\text{m})$$

$$u = 0,3\ \sin(0,79.2,3).\cos(13.0,16)$$

$$= 0,3\ \sin(1,817\ \text{rad}).\cos(2,08\ \text{rad}) = -0,14\ \text{m}$$

3.5. a) $$\rho = \frac{m}{l} = \frac{4,0.10^{-3}}{1,25} = 3,2.10^{-3}\ \text{kg/m}$$

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\rho}} = \sqrt{\frac{1020}{3,2.10^{-3}}} = 565\ \text{m/s}$$

Đối với âm cơ bản : $\lambda_1 = 2l = 2.1,25 = 2,5$ m ; $f_1 = \frac{v}{\lambda} = \frac{565}{2,5} = 226$ Hz.

Đối với hoạ âm bậc ba : $\lambda_3 = \frac{\lambda_1}{3} = 0,83\,\text{m}$; $f_3 = 3f_1 = 680$ Hz.

b) $u(x, t) = 2a\ \sin kx.\sin\omega t = 2a\sin\frac{2\pi}{0,833}x\sin 2\pi.680 = 2a\sin 7,5x.\sin 4270t.$

3.6. a) Khi có sóng dừng trên dây, thì một đầu là nút, một đầu là bụng nên điều kiện để có sóng dừng trên dây là :

$l = n\frac{\lambda}{4}$, với n = 1, 3 , 5, 7,... hay $l = n\frac{v}{4f} \Rightarrow f = \frac{nv}{4l}$ (n = 1, 3, 5, 7,...)

b) Âm cơ bản ứng với n = 1 có $f_1 = \frac{v}{4l}$.

Hoạ âm bậc n có tần số $f_n = nf_1$.

Theo đầu bài, nếu $nf_1 = 360$ Hz thì $(n + 2)f_1 = 600$ $f_1 \Rightarrow f_1 = 120$ Hz.

c) $n = \frac{360}{120} = 3 \Rightarrow$ Hoạ âm bậc 3 có $f_3 = 360$ Hz.

$n = \frac{600}{120} = 5 \Rightarrow$ Hoạ âm bậc 5 có $f_5 = 600$ Hz.

$n = \frac{840}{120} = 7 \Rightarrow$ Hoạ âm bậc 7 có $f_7 = 840$ Hz.

d) $l = \frac{v}{4f_1} = \frac{672}{4.120} = 1,4$ m.

3.7. Coi vách núi là "người quan sát" đứng yên và còi là nguồn âm chuyển động lại gần.

Vách núi nhận được âm có tần số là : $f' = f\left(\frac{v}{v - v_S}\right)$.

Thay v = 332 m/s và v_S = 35 km/h = 9,7 m/s vào, ta có :

$$f' = 440.\frac{332}{332 - 9,7} = 453,2\ \text{Hz}$$

Coi vách núi là nguồn phát âm phản xạ tần số f' = 467,8 Hz. Người lái tàu lại gần nên nghe được âm phản xạ có tần số f" là :

$$f'' = f'\left(\frac{v + v_0}{v}\right) = 453,2\left(\frac{332 + 9,7}{332}\right) = 466,44 \approx 466\ \text{Hz}$$

3.8. a) (Hình 3.1Ga).

$$t = \frac{AH}{v_S} = \frac{AO}{v} \Rightarrow \frac{v_S}{v} = \cos\alpha = 0,8$$

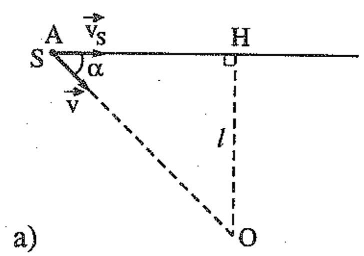
$$f' = \frac{vf}{v - v_S\cos\alpha} = \frac{f}{1 - \frac{v_S\cos\alpha}{v}}$$

$$= \frac{1800}{1 - 0,8^2} = 5000\ \text{Hz}$$

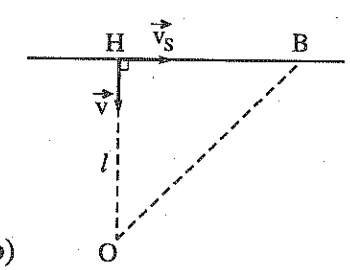
b) Người quan sát nghe được âm có tần số bằng tần số của nguồn khi nguồn qua điểm H (Hình 3.1Gb). Khi âm truyền đến O thì nguồn đi đến B.

$$t = \frac{OH}{v} = \frac{HB}{v_S} \Rightarrow \frac{v_S}{v} = \frac{HB}{OH} = 0,8$$

$$OB = \sqrt{l^2 + (0,8l)^2} = l\sqrt{1 + 0,8^2} = 320\ \text{m}.$$



a)



b)

Hình 3.1G

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. *Cơ sở vật lí* (tập 1 và 2), David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker, Mĩ, bản dịch tiếng Việt, NXB Giáo dục.
2. *Physics*, Douglas Giancoli, Mĩ, 1995.
3. *Theory and problems of theoretical mechanics*, Murray R.Spiegel, 1967.
4. *Exercices de mécanique*, Jacques Renault, Pháp, 1985.
5. *Physique générale*, Georges Bruhat, Pháp, 1965.
6. *Complément de mécanique*, P. Dellus, Pháp.
7. *Mécanique*, J.Ph. Pérez, Pháp, 1992.
8. *Cours de physique*, Dévoré – J. Rivaud, Pháp, 1965.
9. *Giáo trình Vật lí đại cương* (bản tiếng Nga), N.V.Alexandrốp – Iaskin, 1978.
10. *Giáo trình Cơ vật rắn* (bản tiếng Nga), Alexkiêvic – Đêdencô – Karavaép, Khoa Vật lí Trường Đại học Tổng hợp Lômônôxốp, Mátxcơva, 1997.
11. *Ohanian's Physics*, Van E.Neie và Peter Riley, Mĩ, 1985.
12. *Vibrations and Waves*, A.P. French, Mĩ, 1971.
13. *Oscillation*, Philip Chen, Mĩ, 1994.
14. *Physics*, Randall D. Knight, Mĩ, 2004.
15. Tuyển tập các bài tập Vật lí đại cương, I.E. Irôđốp, I.V. Xavêliep, O.I. Damsa, Nga, bản dịch tiếng Việt, NXB Giáo dục, 1980.
16. Tạp chí *Kvant*, Nga.
17. Tạp chí *Kömal*, Hungari, bản tiếng Anh.
18. Một số đề thi học sinh giỏi của một số nước (Nga, Mĩ, Ấn Độ, Canada, Singapo, Úc, Ba Lan, Rumani, Anh,...).

MỤC LỤC