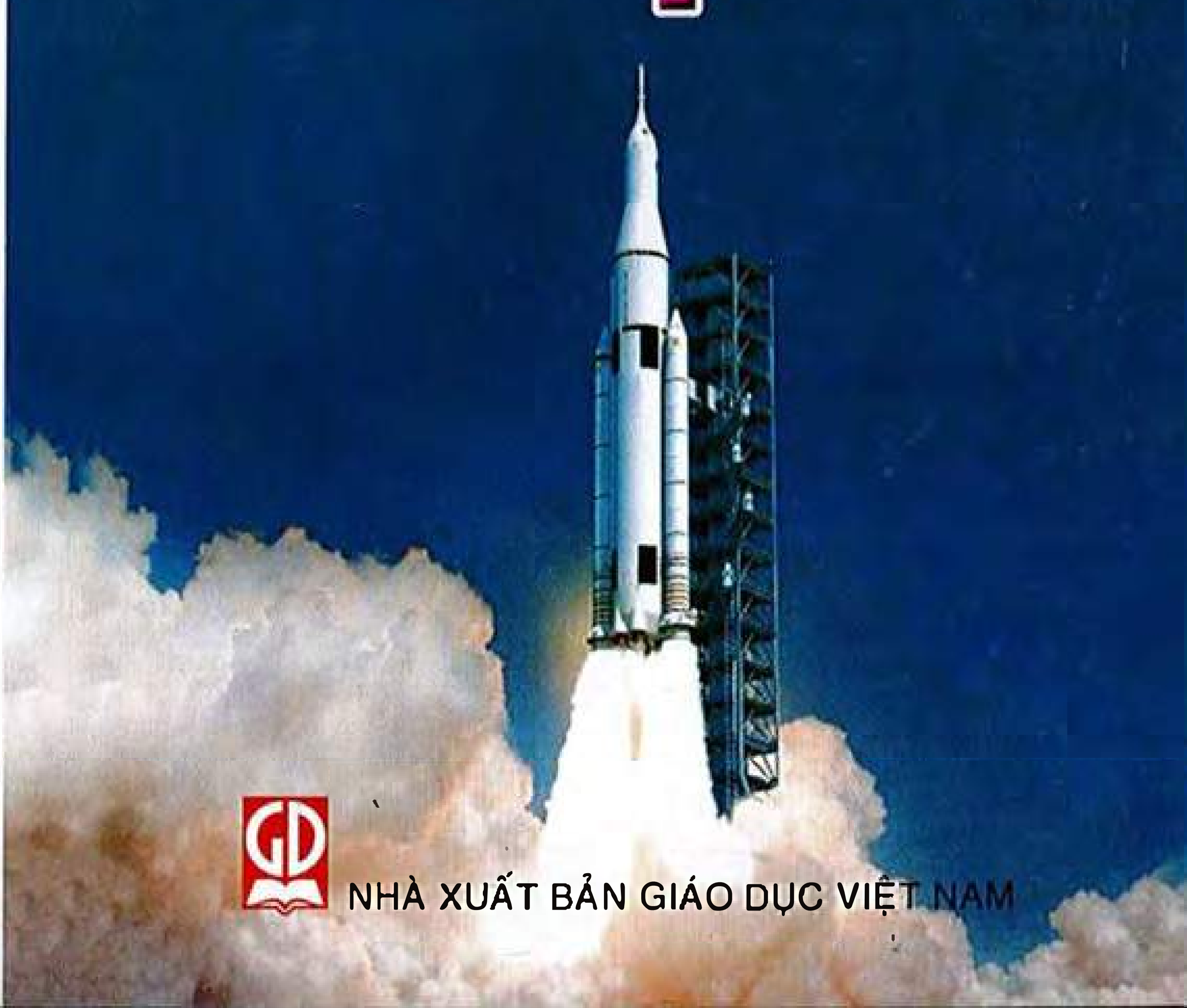
Tô Giang

Bồi dưỡng học sinh giỏi Vật lí Trung học phổ thông

Cơ học 3



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Tô giang

Bồi dưỡng
Học sinh giỏi Vật lí
Trung học phổ thông

Cơ học 3

(Tái bản lần thứ hai)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Lời nói đầu

Sau khi cho ra đời hai cuốn sách *Cơ học 1* và *Cơ học 2* trong bộ sách *Bồi dưỡng học sinh giỏi Vật lí Trung học phổ thông*, tác giả nhận thấy cần thiết phải ra thêm cuốn sách *Cơ học 3* nhằm bổ sung về lí thuyết và bài tập cho sát với các nội dung thi học sinh giỏi cấp Quốc gia và Quốc tế trong những năm gần đây về phần Cơ học. Cuốn sách gồm các chủ đề sau đây :

1. Thành lập công thức tính vận tốc và gia tốc tương đối của một chất điểm trong hệ quy chiếu vừa tịnh tiến vừa quay. Lực li tâm và lực Cô-ri-ô-lít

2. Hệ toạ độ cực và các bài toán Kê-ple

3. Chuyển động phẳng của vật rắn

4. Tĩnh học. Phương pháp công ảo

5. Chuyển động của vật rắn có một điểm cố định. Công thức cộng vận tốc góc. Con quay

6. Dao động cơ

7. Không gian pha. Quỹ đạo pha. Các bất biến đoạn nhiệt

8. Sóng cơ

9. Thuyết tương đối hẹp

Tác giả hi vọng cuốn sách *Cơ học 3* sẽ đáp ứng được nguyện vọng của những học sinh học giỏi môn Vật lí trong toàn quốc, giúp các em chuẩn bị tốt cho các kì thi học sinh giỏi cấp Quốc gia và Quốc tế.

Ngoài ra, tác giả cũng hi vọng cuốn sách này sẽ là tài liệu bổ ích cho các giáo viên dạy đội tuyển học sinh giỏi Vật lí của các tỉnh và của các trường đại học, cũng như cho các sinh viên lớp cử nhân tài năng của các trường đại học Sư phạm.

Nhà xuất bản Giáo dục xin giới thiệu cuốn sách *Cơ học 3* với bạn đọc. Mọi ý kiến góp ý cho cuốn sách xin gửi về Ban Vật lí - Công ty cổ phần Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội - Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, tầng 4, tòa nhà Diamond Flower, số 48 Lê Văn Lương, Hà Nội.

Tác giả

Chủ đề 1

THÀNH LẬP CÔNG THỨC TÍNH VẬN TỐC VÀ GIA TỐC TƯƠNG ĐỐI CỦA MỘT CHẤT ĐIỂM TRONG HỆ QUY CHIẾU VỪA TỊNH TIẾN VỪA QUAY. LỰC LI TÂM VÀ LỰC CÔ-RI-Ô-LÍT

I – THÀNH LẬP CÔNG THỨC TÍNH VẬN TỐC TƯƠNG ĐỐI

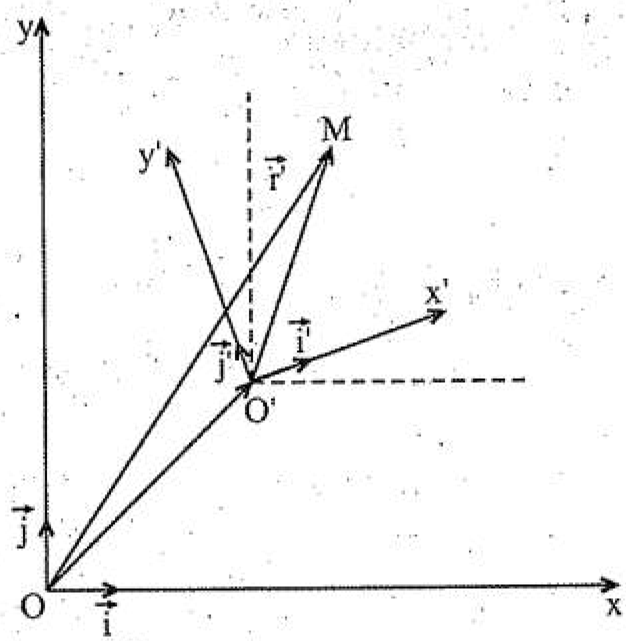
1. Vận tốc tuyệt đối

• Gọi $\vec{i}$ và $\vec{j}$ là các vectơ đơn vị trên các trục toạ độ của hệ quy chiếu (HQC) đứng yên O. Vị trí của chất điểm (hay hạt) M trong HQC O được xác định bằng :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad \text{(Hình 1.1)}$$

• Gọi $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$, vận tốc tuyệt đối của chất điểm là :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} \qquad \text{(a)}$$



Hình 1.1

2. Vận tốc tương đối

• Gọi $\vec{i}'$ và $\vec{j}'$ là các vectơ đơn vị trên các trục toạ độ của HQC chuyển động O'. Tương tự như trên, vị trí của chất điểm M trong HQC O' được xác định bằng :

$$\overrightarrow{O'M} = \vec{r}\,' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}'$$

• Gọi $\vec{v}\,' = \dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$ là vận tốc tương đối của chất điểm M đối với HQC O'.

Trong HQC O' thì các vectơ đơn vị $\vec{i}'$ và $\vec{j}'$ là các vectơ không đổi, nên ta có :

$$\vec{v}\,' = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' \qquad \text{(b)}$$

3. Mối liên hệ giữa vận tốc tương đối và vận tốc tuyệt đối

Trong trường hợp tổng quát, HQC O' vừa chuyển động tịnh tiến vừa quay quanh O', nên các vectơ đơn vị $\vec{i}'$ và $\vec{j}'$ cũng thay đổi về hướng đối với HQC O. Vì thế đối với HQC O ta có :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO}' + \overrightarrow{O'M}$$

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM}) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OO}') + \frac{d}{dt}(x'\vec{i}' + y'\vec{j}')$$

$$= \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OO}') + (\dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}') + (x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt}) \quad \text{(c)}$$

Vì các vectơ đơn vị $\vec{i}'$ và $\vec{j}'$ là các vectơ quay, ta có :

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}' \; ; \; \frac{d\vec{j}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}'$$

Thay vào (c), ta được :

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OO}') + \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge (x'\vec{i}' + y'\vec{j}')$$

Cuối cùng ta được công thức liên hệ giữa vận tốc tương đối và vận tốc tuyệt đối :

$$\vec{v} = \vec{v}' + \left[\frac{d(\overrightarrow{OO}')}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'\right] \quad (1.1a)$$

hay

$$\vec{v}' = \vec{v} - \left[\frac{d(\overrightarrow{OO}')}{dt} + (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')\right] \quad (1.1b)$$

4. Vận tốc kéo theo

Số hạng thứ hai trong công thức (1.1a) và (1.1b) được gọi là vận tốc kéo theo (kí hiệu là $\vec{v}_{kt}$).

$$\vec{v}_{kt} = \frac{d(\overrightarrow{OO}')}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}' \quad (1.2)$$

Vận tốc kéo theo bao gồm vận tốc tịnh tiến của HQC O' và vận tốc dài tại điểm của HQC O' mà chất điểm M đang có mặt do có chuyển động quay của HQC O'.

II – THÀNH LẬP CÔNG THỨC TÍNH GIA TỐC TƯƠNG ĐỐI

1. Gia tốc tuyệt đối và gia tốc tương đối

Gia tốc của chất điểm xét trong HQC O là gia tốc tuyệt đối.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Gia tốc của chất điểm xét trong HQC O' là gia tốc tương đối.

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}')$$

Trong HQC O' thì các vectơ đơn vị $\vec{i}'$ và $\vec{j}'$ không đổi hướng, do đó ta có :

$$\vec{a}' = \ddot{x}'\vec{i}' + \ddot{y}'\vec{j}' \qquad \text{(d)}$$

2. Mối liên hệ giữa gia tốc tuyệt đối và gia tốc tương đối

Trong HQC O thì các vectơ đơn vị $\vec{i}'$ và $\vec{j}'$ là các vectơ thay đổi về hướng, do đó ta viết lại (1.1a) như sau :

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}') + \frac{d^2(\overrightarrow{OO'})}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left[\vec{\omega} \wedge (x'\vec{i}' + y'\vec{j}')\right] \qquad \text{(e)}$$

trong đó :

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}') = (\ddot{x}'\vec{i}' + \ddot{y}'\vec{j}') + \vec{\omega} \wedge (\dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}') = \vec{a}' + (\vec{\omega} \wedge \vec{v}')$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{\omega} \wedge (x'\vec{i}' + y'\vec{j}')] = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}'\right) + \vec{\omega} \wedge [(\dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}') + \vec{\omega} \wedge \vec{r}']$$

$$= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')$$

Thay vào (e) ta được :

$$\vec{a} = \vec{a}' + \frac{d^2}{dt^2}(\overrightarrow{OO'}) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') + \vec{\gamma} \wedge \vec{r}' + 2(\vec{\omega} \wedge \vec{v}') \qquad (1.3)$$

3. Gia tốc kéo theo

Gia tốc kéo theo $\vec{a}_{kt}$ bao gồm gia tốc tịnh tiến, gia tốc hướng tâm và gia tốc tiếp tuyến tại điểm của HQC O' mà chất điểm có mặt.

$$\vec{a}_{kt} = \frac{d^2}{dt^2}(\overrightarrow{OO}') + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}\,') + \vec{\gamma} \wedge \vec{r}\,' \qquad (1.4)$$

4. Gia tốc Cô-ri-ô-lít

Gia tốc Cô-ri-ô-lít ($\vec{a}_c$) xuất hiện khi chất điểm có vận tốc tương đối $\vec{v}\,'$ đối với HQC quay O'.

$$\vec{a}_c = 2(\vec{\omega} \wedge \vec{v}\,') \qquad (1.5)$$

III – LỰC QUÁN TÍNH KÉO THEO VÀ LỰC QUÁN TÍNH CÔ-RI-Ô-LÍT

1. Ta viết lại công thức (1.3) thành :

$$\vec{a}\,'_{\text{tương đối}} = \vec{a}_{\text{tuyệt đối}} - \vec{a}_{kt} - \vec{a}_c$$

2. Định luật II Niu-tơn áp dụng cho HQC chuyển động O' được viết như sau :

$$m\vec{a}\,' = m\vec{a} - m\vec{a}_{kt} - m\vec{a}_c$$

$$m\vec{a}\,' = \Sigma\vec{F}_{\text{thực}} + \vec{F}_{\text{qt kéo theo}} + \vec{F}_c \qquad (1.6)$$

3. Lực quán tính kéo theo :

$$\vec{F}_{\text{qt kéo theo}} = -m\left[\frac{d^2\overrightarrow{OO}'}{dt^2} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}\,') + \vec{\gamma} \wedge \vec{r}\,'\right]$$

4. Lực quán tính Cô-ri-ô-lít (gọi tắt là lực Cô-ri-ô-lít) :

$$\vec{F}_c = -2m(\vec{\omega} \wedge \vec{v}\,')$$

IV – CÁC TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT

1. Chất điểm chuyển động trong HQC O' chuyển động tịnh tiến có gia tốc.

$$m\vec{a}\,' = \Sigma\vec{F}_{\text{thực}} - m\vec{a}_{\text{HQC O'}}$$

2. Chất điểm đứng yên trong HQC quay đều quanh một trục cố định.

$$\sum \vec{F}_{\text{thực}} + \vec{F}_{\text{li tâm}} = \vec{0}$$

3. Chất điểm chuyển động trong HQC quay đều.

$$m\vec{a}\,' = \sum \vec{F}_{\text{thực}} + \vec{F}_{\text{li tâm}} + \vec{F}_c$$

V – BÀI TẬP

1.1. Một đứa trẻ ngồi ở mặt đất, cạnh một sàn quay của trò chơi ngựa gỗ chạy vòng. Đối với HQC gắn với sàn quay thì :

a) Chuyển động của đứa trẻ là gì ?

b) Gia tốc của nó là gì ?

c) Các lực nào tham gia gây ra gia tốc ấy ? Vẽ giản đồ vectơ lực tác dụng vào đứa trẻ.

ĐS : c) Lực li tâm và lực Cô-ri-ô-lít.

1.2. Một con sông chảy về phía nam, giữa hai bờ có bề rộng là L, ở vĩ độ bắc λ.

a) Mực nước ở bờ nào cao hơn ?

b) Lập công thức tính độ chênh lệch về chiều cao mực nước giữa hai bờ.

c) Áp dụng bằng số : vận tốc dòng chảy $v = 8$ km/h, $\lambda = 30^o$, $L = 3{,}2$ km, $g = 9{,}8$ m/s^2.

ĐS : b) $h = \dfrac{2L\omega v\sin\alpha}{g}$; c) $h = 5{,}3$ cm.

1.3. a) Hãy giải thích tại sao khi rơi tự do, một vật lại bị lệch đi về phía đông (so với phương dây rọi).

b) Lập công thức tính độ lệch về phía đông của một vật rơi tự do từ độ cao h ở vĩ độ λ.

c) Áp dụng bằng số : $h = 68$ m, $\lambda = 48^o51'$.

ĐS : b) Độ lệch $x \approx \left(\dfrac{8h^3}{9g}\right)^{\frac{1}{2}} \omega\cos\lambda$; c) $x \approx 8$ mm.

1.4. Một máy bay bay qua cực Bắc của Trái Đất và tiếp tục bay về phía nam dọc theo một đường kinh tuyến với tốc độ không đổi v = 900 km/h. Hãy tính góc hợp bởi một dây rọi treo tự do trong máy bay và bán kính vectơ tính từ tâm Trái Đất tới máy bay :

a) Tại Bắc Cực.

b) Tại xích đạo.

c) Tại vĩ độ 45^o bắc.

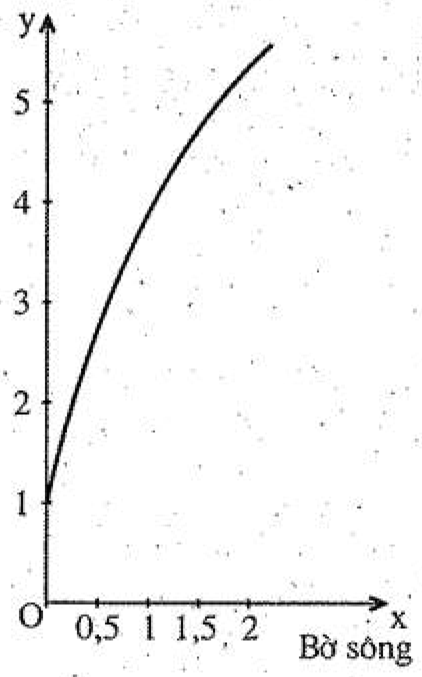
ĐS : a) $0,21^o$; b) 0^o ; c) $0,18^o$.

1.5. Người ta đẩy một chiếc bè ra khỏi bờ sông bằng cách truyền cho nó một vận tốc có độ lớn bằng 0,3 m/s so với bờ. Đoạn đầu của quỹ đạo được chỉ trên Hình 1.2.

Hỏi đến cuối đường thì bè ở cách bờ bao xa ?

Cho biết lực cản tỉ lệ với vận tốc tương đối của bè so với dòng nước và vận tốc của dòng nước là 0,3 m/s.

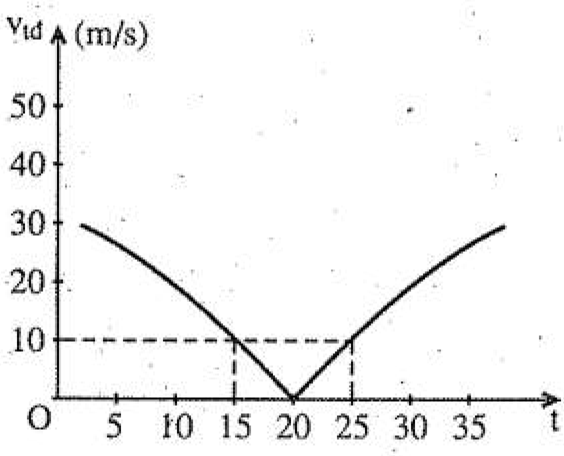
ĐS : ≈ 11,2 m.



Hình 1.2

1.6. Một ô tô chuyển động đều trên một đoạn đường thẳng. Một ô tô khác chuyển động đều trên một cung tròn, bán kính R = 200 m. Đồ thị (Hình 1.3) biểu diễn sự phụ thuộc của độ lớn của vận tốc tương đối giữa hai xe vào thời gian. Hãy tính vận tốc của mỗi ô tô và cho biết dạng của đường cong trên đồ thị.

ĐS : $v_1 = v_2 = 20$ m/s. Đường hình sin.



Hình 1.3

Chủ đề 2

HỆ TOẠ ĐỘ CỰC VÀ CÁC BÀI TOÁN KÊ-PLE

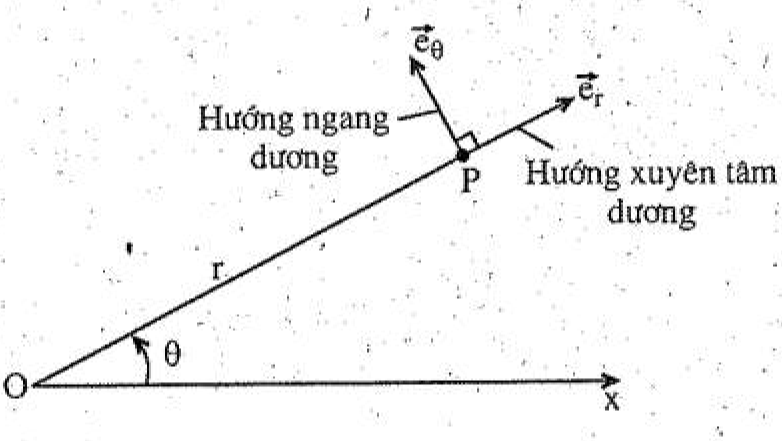
I – HỆ TOẠ ĐỘ CỰC

1. Vị trí của hạt P (Hình 2.1)

a) P (θ, r)

b) Các vectơ đơn vị là $\vec{e}_r$ và $\vec{e}_\theta$ liên kết với các hướng chuyển động *xuyên tâm* và *ngang* của hạt P.

c) $\overrightarrow{OP} = \vec{r} = r\vec{e}_r$ (2.1)



Hình 2.1

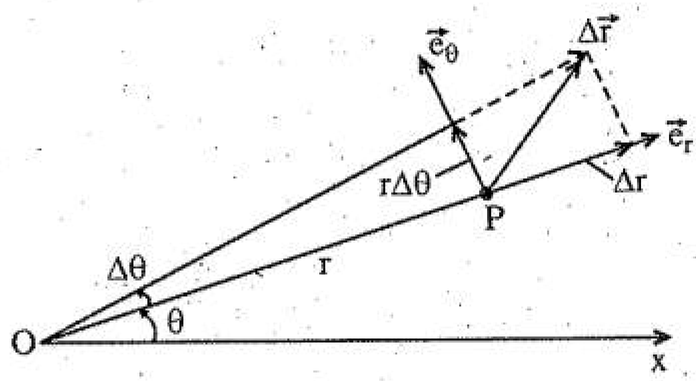
2. Vận tốc của hạt P (Hình 2.2)

a) $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

$$d\vec{r} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta$$

Gọi $\dot{r} = \dfrac{dr}{dt}$; $\ddot{r} = \dfrac{d^2r}{dt^2}$;

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \; ; \; \ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$



Hình 2.2

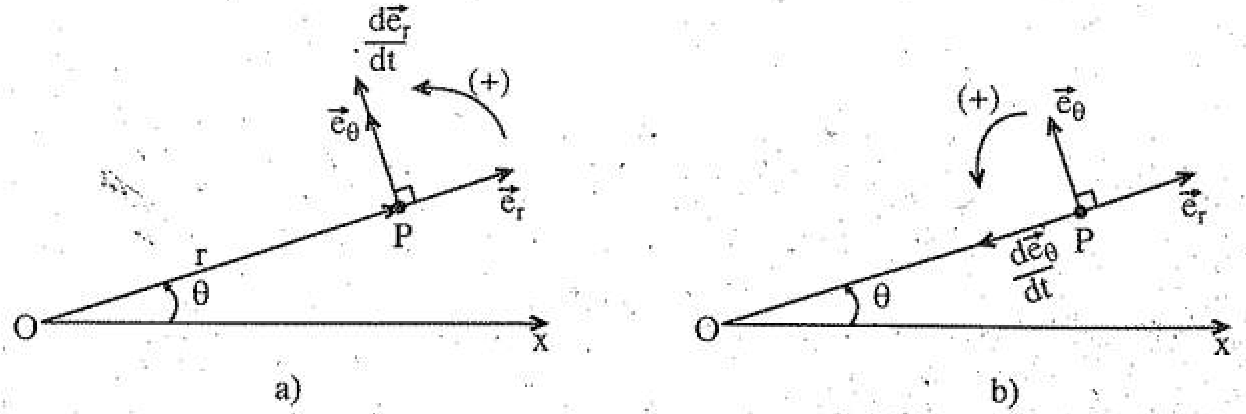
Ta được : $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ (2.2)

b) Từ (2.1) suy ra :

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = \dot{r}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

So sánh với (2.2) ta suy ra :

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \text{(a)}$$



Hình 2.3

Từ (a) ta suy ra :

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r \tag{b}$$

(Xem Hình 2.3a và 2.3b)

3. Gia tốc của hạt P

a) $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\vec{e}_r) + \frac{d}{dt}(r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)$

$$= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$$

Kết hợp với (a) và (b) ta được :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta \tag{2.3}$$

b) Trong trường lực xuyên tâm không có thành phần gia tốc theo hướng ngang :

$$\begin{cases} \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

II – BÀI TOÁN KÊ-PLE

Các bài toán Kê-ple xét chuyển động của một hạt có khối lượng m trong trường lực xuyên tâm của một hạt khác và lực xuyên tâm có thể là lực hút hoặc lực đẩy như trường hợp lực Cu-lông. Trong phạm vi bài này ta chỉ xét lực xuyên tâm là lực hấp dẫn gây ra bởi một vật có khối lượng M >> m.

1. Lực hấp dẫn

a) $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{e}_r = -\frac{K}{r^2}\vec{e}_r$ (2.5a)

với : K = GMm

b) Định luật II Niu-tơn áp dụng cho lực xuyên tâm được viết trong hệ toạ độ cực như sau :

$$\begin{cases} F_{hd} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

2. Định luật bảo toàn momen động lượng. Định luật II Kê-ple

$$\vec{M}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L}_O = \vec{r} \wedge m\vec{v} = C^{te}$$

$$\vec{L}_O = r\vec{e}_r \wedge m(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = C^{te}$$

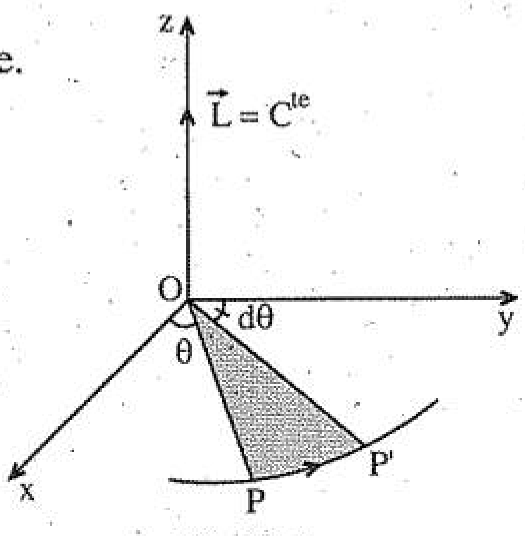
$$\vec{L}_O = mr^2\dot{\theta}(\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z = C^{te}$$

$$L_O = L_z = mr^2\dot{\theta} = C^{te} \quad (2.7)$$

Gọi $\frac{dS}{dt}$ là tốc độ quét diện tích của vectơ tia $\vec{r}$ (Hình 2.4) :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2m} = C^{te}$$

Đây là biểu thức toán học của định luật II Kê-ple.



Hình 2.4

3. Định luật bảo toàn cơ năng

a) Thế năng của hạt

Gọi E là cơ năng của hạt, E_t là thế năng của hạt.

Ta đã biết :

$$dA = \vec{F}.d\vec{r} = -dE_t$$

$$\vec{F}.d\vec{r} = -\frac{K}{r^2}dr = d\left(\frac{K}{r}\right)$$

$$d\left(\frac{K}{r}\right) = -dE_t$$

Suy ra : $E_t = -\frac{K}{r}$ (với $E_t(\infty) = 0$)

b) Vì $\vec{F}$ là lực thế nên cơ năng của hạt được bảo toàn :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{K}{r} = C^{te} \qquad (2.8a)$$

Trong hệ toạ độ cực, cơ năng được viết như sau :

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{K}{r} = C^{te} \qquad (2.8b)$$

4. Phương trình quỹ đạo. Công thức Bi-nê (Binet). Định luật I Kê-ple

Để lập phương trình của quỹ đạo, cách tốt nhất là dùng biến số mới là : $u = \frac{1}{r}$

a) Công thức Bi-nê

Công thức Bi-nê cho các biểu thức của vận tốc và gia tốc của hạt P theo các biến số là u và θ. Cách thành lập công thức này như sau :

- Từ $L = mr^2\dot{\theta} = C^{te}$ ta suy ra :

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} = \frac{L}{m}u^2 \text{ và } r\dot{\theta} = \frac{L}{m}u \qquad (a)$$

$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt}$. Kết hợp với (a) ta được :

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}.\frac{L}{m}u^2$$

- Mặt khác : $\frac{dr}{d\theta} = \frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{d\theta} = -\frac{1}{u^2}.\frac{du}{d\theta}$

Thay vào ta được :

$$\dot{r} = -\frac{L}{m}.\frac{du}{d\theta} \qquad \text{(b)}$$

Thay (a) và (b) vào công thức (2.2) ta được :

$$\vec{v} = \frac{L}{m}\left(-\frac{du}{d\theta}\vec{e}_r + u\vec{e}_\theta\right) \qquad (2.9)$$

• $\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta}\dot{\theta}$. Kết hợp với (a) và (b) ta được :

$$\ddot{r} = \frac{d}{d\theta}\left(-\frac{L}{m}.\frac{du}{d\theta}\right)\frac{L}{m}u^2 = -\frac{L^2}{m^2}u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} \qquad \text{(c)}$$

• Từ (a) suy ra : $r\dot{\theta}^2 = \frac{L^2}{m^2}u^3$ (d)

Thay (c) và (d) vào công thức (2.4) ta được :

$$\vec{a} = -\frac{L^2u^2}{m^2}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)\vec{e}_r \qquad (2.10)$$

Các công thức (2.9) và (2.10) được gọi là công thức Bi-nê.

Dựa vào công thức Bi-nê ta tìm biểu thức của cơ năng theo u và θ.

$$E = \frac{L^2}{2m}\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] - Ku \qquad (2.11)$$

b) Lập phương trình quỹ đạo

Áp dụng công thức Bi-nê vào định luật II Niu-tơn ta viết :

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -Ku^2 = -\frac{L^2u^2}{m}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)$$

Suy ra : $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u - \frac{mK}{L^2} = 0$

Hay : $\frac{d^2}{d\theta^2}\left(u - \frac{mK}{L^2}\right) + \left(u - \frac{mK}{L^2}\right) = 0$

Nghiệm của phương trình này là :

$$u - \frac{mK}{L^2} = A\cos(\theta - \theta_0) \text{ (với } \omega = 1)$$

Đặt : $p = \dfrac{L^2}{mK}$ và $e = pA$, ta có :

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{p} = A\cos(\theta - \theta_0)$$

Suy ra : $r = \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$ (2.12)

Phương trình (2.12) là phương trình quỹ đạo của hạt trong hệ toạ độ cực. Nó cho biết quỹ đạo là một *đường cônic* mà gốc O là một tiêu điểm, p là *thông số* của quỹ đạo và e là *tâm sai* của quỹ đạo. Đại lượng p có đơn vị của độ dài, còn e không có đơn vị. Thông số p phụ thuộc vào L còn tâm sai e thì phụ thuộc cả vào L và E.

Thật vậy, từ phương trình (2.12) ta suy ra biểu thức của u và $\dfrac{du}{d\theta}$:

$$u = \frac{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}{p} \; ; \; \frac{du}{d\theta} = \frac{-e\sin(\theta - \theta_0)}{p}$$

Thay vào (2.11) ta được :

$$E = \frac{L^2}{2mp^2}[1 + e^2 + 2\cos(\theta - \theta_0)] - \frac{K}{p}(1 + e\cos(\theta - \theta_0) = \frac{K}{2p}(e^2 - 1)$$

Suy ra : $e = \sqrt{1 + \dfrac{2pE}{K}}$ (2.13)

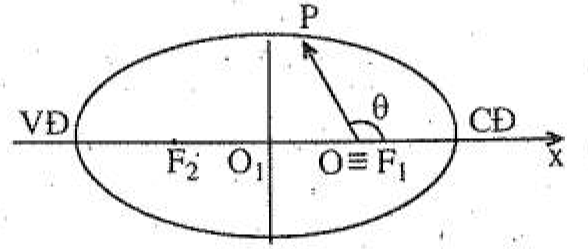
- Nếu $e < 1$ hay $E < 0$ thì quỹ đạo là elip.
- Nếu $e = 1$ hay $E = 0$ thì quỹ đạo là parabol.
- Nếu $e > 1$ hay $E > 0$ thì quỹ đạo là hypebol

Định luật I Kê-ple rơi vào trường hợp $E = -\dfrac{GMm}{2a} < 0$ hay $e < 1$

c) Quỹ đạo elip.

Theo (2.12) ta có :

$$r_{min} = \frac{p}{1+e} \text{ và } r_{max} = \frac{p}{1-e}$$

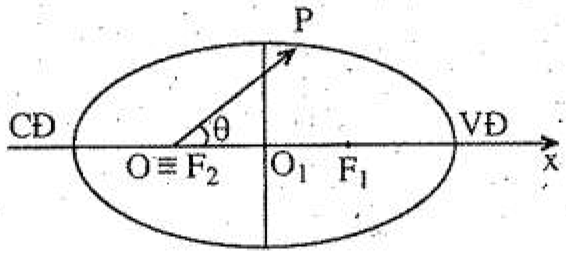


Hình 2.5

• Nếu chọn trục Ox hướng về cận điểm (CĐ) thì tại cận điểm ta có $\theta = 0$ và $r = r_{min}$ (Hình 2.5).

Theo phương trình (2.12) ta suy ra $\theta_0 = 0$ và phương trình (2.12) được viết thành :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

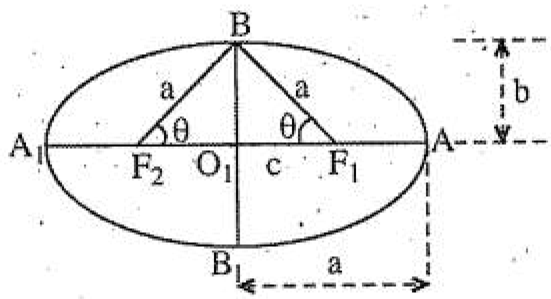


Hình 2.6

• Nếu chọn trục Ox hướng về viễn điểm thì tại viễn điểm ta có $\theta = 0$ và $r = r_{max}$ (Hình 2.6).

Theo phương trình (2.12) ta suy ra $\theta_0 = \pi$ và phương trình (2.12) được viết thành :

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\theta}$$



Hình 2.7

• Xét về phương diện hình học, mỗi elip được đặc trưng bằng ba đại lượng : a là bán trục lớn, b là bán trục nhỏ, $c = O_1F_1 = O_1F_2$ (Hình 2.7). Ta hãy tìm mối liên hệ giữa a, b, c với p và e.

$$2a = r_{min} + r_{max} = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e}$$

Suy ra : $\quad p = a(1 - e^2)$

Nếu tâm của lực đặt tại F_2 và xét điểm P tại đỉnh của bán trục nhỏ, ta có :

$$BF_1 + BF_2 = 2a \Rightarrow BF_1 = BF_2 = a$$

$$\text{và } r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e\cos\theta} = a$$

Suy ra : $\cos\theta = e$ hay $c = ea$ và $b = a\sqrt{1 - e^2}$

d) Định luật III Kê-ple

Từ công thức tính tốc độ quét diện tích $\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m}$ ta suy ra :

$$\int_0^S dS = \frac{L}{2m}\int_0^T dt$$

trong đó T là chu kì chuyển động của hạt m còn S là diện tích của elip.

Vì $S = \pi ab$ nên ta có :

$$\pi ab = \frac{L}{2m}T$$

$$\pi a^2\sqrt{1-e^2} = \frac{L}{2m}T$$

$$\pi^2 a^4(1-e^2) = \frac{L^2}{4m^2}T^2$$

Vì $p = \frac{L^2}{mK} = a(1-e^2)$ nên ta được :

$$\pi^2 a^3 = \frac{KT^2}{4m} = \frac{GMT^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

e) Nếu lực xuyên tâm là lực đẩy như lực Cu-lông giữa hai điện tích cùng dấu thì ta chỉ việc thay K bằng –K vào các công thức (2.5a) và (2.8a) và được các công thức sau :

$$\vec{F} = \frac{K}{r^2}\vec{e}_r \qquad (2.5b)$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{K}{r} = C^{te}$$

Ở vô cùng, thế năng $E_t = 0$, còn động năng bằng $\frac{1}{2}mv^2$, nên ta viết :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{K}{r} = \frac{1}{2}mv_0^2 \ (>0) \qquad (2.8c)$$

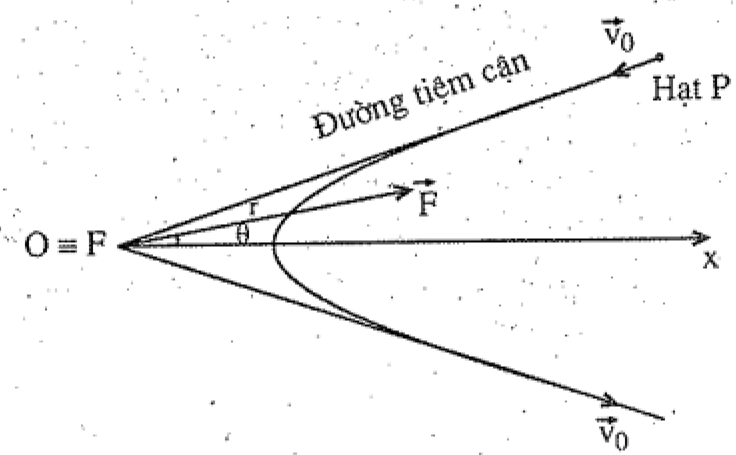
Tiếp theo ta áp dụng công thức Bi-nê vào định luật II Niu-tơn và được :

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(u+\frac{mK}{L^2}\right)+\left(u+\frac{mK}{L^2}\right)=0$$

Nghiệm của phương trình này là :

$$r=\frac{p}{e\cos(\theta-\theta_1)-1},\ \text{với } e>1$$

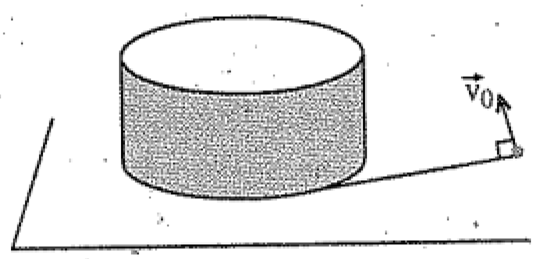
Đây là phương trình của một nhánh hypebol có tiêu điểm nằm ở tâm của lực. Nếu chọn trục Ox đi qua cận điểm (Hình 2.8) thì $\theta_0 \equiv O$.



Hình 2.8

BÀI TẬP

2.1. Một xilanh thẳng đứng, bán kính R, được đặt cố định trên một mặt phẳng nằm ngang (Hình 2.9). Một sợi dây dài L, một đầu được buộc vào mép dưới của mặt bên của xilanh và hướng theo đường tiếp tuyến với mặt bên. Đầu kia của dây được buộc vào một vật nhỏ. Người ta truyền cho vật một vận tốc theo phương ngang, vuông góc với dây và vật bắt đầu trượt trên mặt phẳng.



Hình 2.9

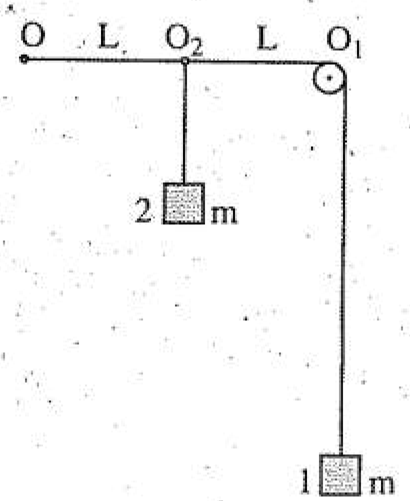
a) Chuyển động của vật tiếp tục trong bao lâu trong trường hợp mặt phẳng không có ma sát ?

b) Trong trường hợp mặt phẳng có ma sát với hệ số ma sát trượt là μ, thì chuyển động của vật diễn ra trong bao lâu ?

ĐS : a) $t = \dfrac{L^2}{2Rv_0}$;

b) $t_1 = \dfrac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - \dfrac{\mu g L^2}{R}}}{\mu g}$ (nếu $v_0 > L\sqrt{\dfrac{\mu g}{R}}$) ; $t_2 = \dfrac{v_0}{\mu g}$ (nếu $v_0 < L\sqrt{\dfrac{\mu g}{R}}$).

2.2. Cho một cơ hệ như Hình 2.10. Một sợi dây dài, một đầu được giữ cố định ở điểm O, đầu kia vắt qua một ròng rọc nhỏ ở điểm O_1 và treo một vật, khối lượng m. Hai điểm O, O_1 ở cùng một độ cao. Một vòng nhỏ được luồn vào dây và ở giữa đoạn OO_1. Một vật khác, khối lượng cũng là m được treo vào vòng bằng một đoạn dây ngắn. Các dây không có khối lượng, không dãn. Bỏ qua ma sát.

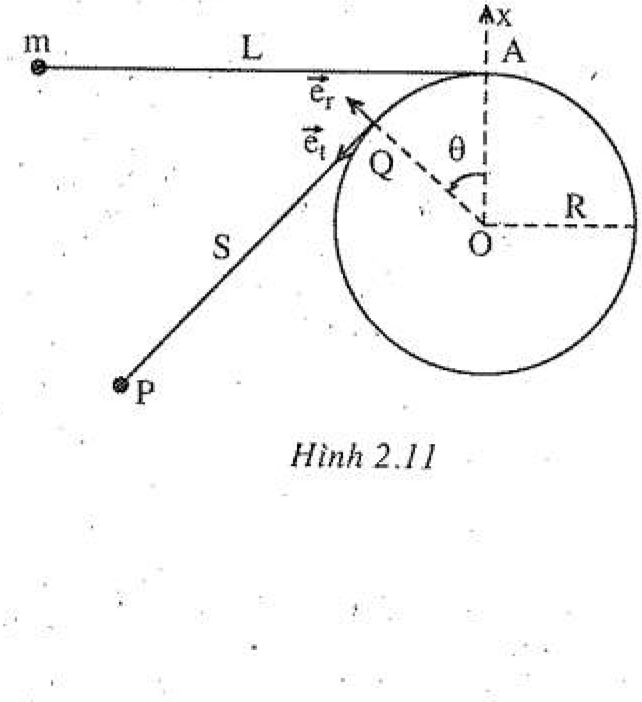


Hình 2.10

Ban đầu hệ được giữ như ở Hình 2.10, rồi thả không vận tốc đầu. Tìm gia tốc của hai vật khi đi qua vị trí cân bằng tĩnh.

ĐS : $a_1 = a_2 = \dfrac{(6\sqrt{3} - 9)g}{8}$ (hướng xuống).

2.3. Một đoạn ống hình trụ, bán kính R được giữ nằm ngang ở bên trên mặt đất. Dùng một dây, khối lượng không đáng kể và dài L ($L > 2\pi R$), người ta treo một vật, khối lượng m vào điểm A ở chỗ cao nhất của ống (Hình 2.11). Vật m được nâng lên tới cùng độ cao so với A rồi được thả từ nghỉ lúc dây đang căng.



Hình 2.11

Gọi O là gốc toạ độ cực, $\vec{e}_r$ và $\vec{e}_t$ là các vectơ đơn vị tại Q. QP = S, θ là toạ độ góc của Q.

Hãy xác định theo các đại lượng S, θ, $\dot{S}$, $\dot{\theta}$, R, L, g, $\vec{e}_r$ và $\vec{e}_t$:

a) Hệ thức giữa $\dot{\theta}$ và $\dot{S}$.

b) Vận tốc $\vec{v}_Q$ của điểm di động Q so với O.

c) Vận tốc $\vec{v}'$ của hạt m đối với điểm di động Q khi hạt ở P.

d) Vận tốc v của hạt đối với O khi hạt ở điểm P.

e) Hình chiếu lên $\vec{e}_r$ của gia tốc của hạt đối với điểm O khi hạt ở P.

f) Thế năng trọng trường E_t của hạt khi ở P (mốc thế năng tại A).

g) Độ lớn của vận tốc v_m của hạt khi hạt ở điểm thấp nhất trên quỹ đạo của nó.

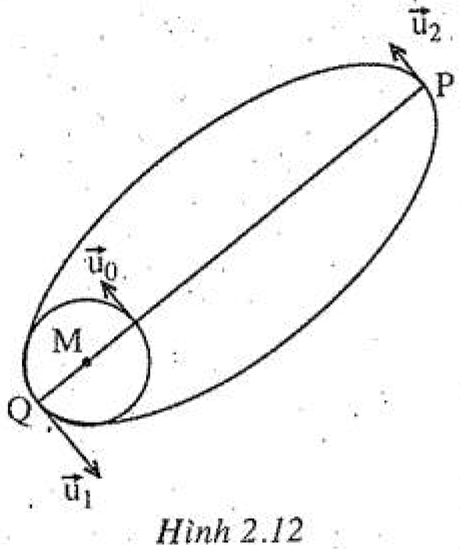
ĐS : c) $\dot{S}\vec{e}_t - S\dot{\theta}\vec{e}_r$; d) $\vec{v} = -S\dot{\theta}\vec{e}_r$;

$$\text{e) } -(\dot{S}\dot{\theta} + S\ddot{\theta}) \text{ ; g) } v_m = \sqrt{2g\left[L - R\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right]}.$$

2.4. a) Một vệ tinh (VT), khối lượng m, đang quay quanh Trái Đất (TĐ), khối lượng M, theo một quỹ đạo tròn, bán kính R_0. Tính vận tốc u_0 của VT theo M, R_0 và G.

b) Ta cần đưa VT này vào quỹ đạo đi qua điểm P cách tâm TĐ một khoảng R_1 bằng cách tăng (hầu như tức thời) vận tốc của nó ở điểm Q từ u_0 lên u_1 (Hình 2.12). Tính u_1 theo u_0, R_0, R_1.

c) Suy ra giá trị tối thiểu của u_1 theo u_0 mà VT cần để có thể thoát khỏi ảnh hưởng của TĐ.

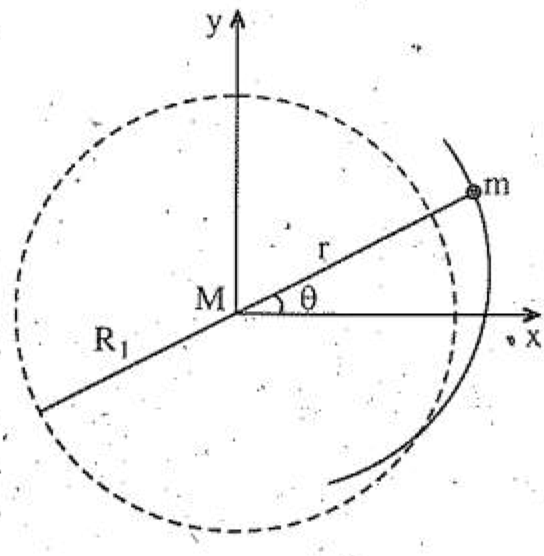


Hình 2.12

d) (Liên quan đến câu b). Tính vận tốc u_2 của VT tại P theo u_0, R_0, R_1.

e) Bây giờ tại P ta muốn đổi quỹ đạo của VT thành quỹ đạo tròn có bán kính R_1 bằng cách tăng giá trị của u_2 (hầu như tức thời) tới u_3. Tính độ lớn của u_3 theo u_2, R_0, R_1.

g) Nếu VT bị nhiễu loạn nhẹ và tức thời theo phương bán kính, sao cho nó bị lệch khỏi quỹ đạo tròn bán kính R_1 lúc đầu, hãy tính chu kì dao động T của r quanh khoảng cách trung bình R_1 (Hình 2.13).



Hình 2.13

ĐS : b) $u_1 = u_0\sqrt{\dfrac{2R_1}{R_1 + R_0}}$

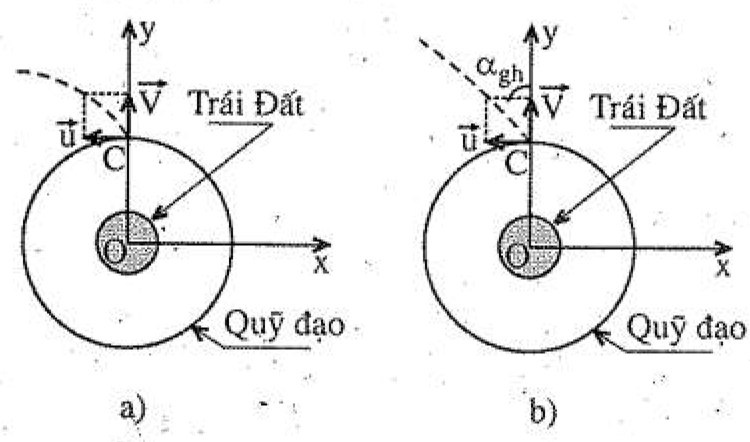
c) $u_1 = u_0\sqrt{2}$; d) $u_2 = u_0\dfrac{R_0\sqrt{2}}{\sqrt{R_1(R_1 + R_0)}}$;

e) $u_3 = u_2\sqrt{\dfrac{R_1 + R_2}{2R_0}}$; g) $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{GM}{R_1^3}}$.

2.5. Một trạm vũ trụ chuyển động với tốc độ u trên một quỹ đạo tròn bán kính R, quanh Trái Đất (TĐ). Khi đi qua điểm C trên trục Oy cố định gắn với tâm O của TĐ, trạm vũ trụ phóng ra một máy thăm dò. Lúc phóng ra, máy thăm dò được truyền thêm vận tốc $\vec{V}$ theo phương Oy, sau đó trạm vũ trụ vẫn chuyển động tròn đều với vận tốc u (Hình 2.14a). Gọi góc hợp bởi tia Oy và tia nhìn từ tâm TĐ qua vật thể cần quan sát là góc nhìn.

a) Chứng minh rằng nếu góc nhìn máy thăm dò bằng góc nhìn trạm vũ trụ thì các vectơ vận tốc của chúng lại khác nhau một lượng là $\vec{V}$ như lúc phóng.

b) Khi góc nhìn máy thăm dò là α thì máy thăm dò cách tâm TĐ là bao nhiêu ?



Hình 2.14

c) Tốc độ V phải thoả mãn điều kiện nào thì quỹ đạo của máy thăm dò sẽ là kín (quỹ đạo elip) ?

d) Trong trường hợp quỹ đạo không kín, hãy tìm góc giới hạn α_{gh} hợp bởi vectơ vận tốc của máy thăm dò và tia Oy khi máy thăm dò ở xa vô cùng (Hình 2.14b).

e) Trong trường hợp quỹ đạo elip, hãy tìm bán trục lớn và bán trục nhỏ của quỹ đạo thăm dò.

ĐS : b) $r(\alpha) = \dfrac{uR}{u - V\sin\alpha}$; d) $\alpha_{gh} = \arcsin\dfrac{u}{V}$;

e) $a = \dfrac{Ru^2}{u^2 - V^2}$; $b = \dfrac{Ru}{\sqrt{u^2 - V^2}}$.

2.6. a) Một con tàu vũ trụ P, khối lượng m, được xác định bằng toạ độ cực r = OP (O là tâm Trái Đất) và θ là góc cực. Con tàu chịu lực hấp dẫn của TĐ :

$F_{hd} = mg\left(\dfrac{R}{r}\right)^2$. Một tên lửa đẩy truyền cho nó một lực đẩy F_d không đổi cùng hướng với vận tốc của tàu vũ trụ. Cuối cùng, tàu chịu lực ma sát f của khí quyển giả thiết là không đổi.

a.1) Viết phương trình vi phân của chuyển động của con tàu trong hệ toạ độ cực.

a.2) Viết biểu thức của vận tốc xuyên tâm $\dot{r}$ theo r. Bỏ qua $\dot{r}$ và $\ddot{r}$ trước các số hạng khác.

b) Tàu vũ trụ P được chuyển từ quỹ đạo tròn bán kính r_0 sang quỹ đạo tròn khác có bán kính $r_1 = 2r_0$ trong thời gian t_0. Tên lửa đẩy hoạt động trong suốt thời gian chuyển quỹ đạo, phụt khí đốt với tốc độ không đổi là μ (kg/s). Hãy xác định lực đẩy F_d của tên lửa.

Cho biết : $r_0 = 8000$ km, $R_T = 6400$ km.

$g = 9{,}8$ m/s^2. Khối lượng của tàu ngay trước dịch chuyển là $m_0 = 50$ tấn.

$\mu = 100$ kg/s ; $f = 1{,}4.10^4$ N. $t_0 = 6$ ph 40 s.

ĐS : a.2) $\dot{r} = -\dfrac{2(F_d - f)}{3.\sqrt{gmR}}r^{3/2}$; b) $F_d = 4.10^5$ N.

2.7. Một tên lửa đạn đạo được bắn từ điểm A của bề mặt Trái Đất, tâm O, với vận tốc v_0 dưới góc bắn α (so với phương ngang tại A). Người ta muốn tên lửa rơi trúng điểm B trên mặt đất sao cho góc $\widehat{AOB} = 2\lambda$. Cho biết $R_{TĐ} = 6360$ km ; $g = 9,8$ m/s^2.

a) Tên lửa được phóng lên với vận tốc $v_0 = 7$ km/s, dưới góc bắn $\alpha = \alpha_0$, cho phép đạt được tầm bắn $\overset{\frown}{AB}$ cực đại. Trong điều kiện ấy, hãy tìm biểu thức tính các đại lượng sau đây theo R và theo một hệ số không có đơn vị (không có thứ nguyên) là $\beta_0 = \dfrac{v_0^2}{gR}$:

a.1) Bán trục lớn a, thông số p và tâm sai e của quỹ đạo elip của tên lửa.

a.2) Tầm bay xa cực đại của tên lửa.

a.3) Góc bắn α_0.

a.4) Độ cao cực đại của tên lửa. Suy ra vận tốc nhỏ nhất của tên lửa trên quỹ đạo.

b) Tên lửa phải nối hai điểm A và B của mặt đất sao cho góc $\widehat{AOB} = 60^\circ$. Nó được phóng lên dưới góc bắn $\alpha = \alpha_1$ cho phép giảm vận tốc đến mức tối thiểu. Trong điều kiện ấy, hãy tính :

b.1) Góc bắn α_1.

b.2) Vận tốc phóng v_0.

ĐS : a.1) $a = \dfrac{R}{2-\beta} = 5240$ km ; $p = 4120$ km ; $e = 0,462$; *a.2)* $\overset{\frown}{AB}_{max} = 8964$ km ;

a.3) $\alpha_0 = 24,8^\circ$; *a.4)* $h_{max} = 1303$ km ; $v_{min} = 5,27$ km/s ; *b.1)* $\alpha_1 = 30^\circ$;

b.2) $v_0 = 6,45$ km/s.

2.8. Một vệ tinh nhân tạo, khối lượng m vạch một quỹ đạo tròn bán kính R + z, xung quanh Trái Đất (giả thiết là hình cầu, khối lượng M, bán kính R) trong đó z là độ cao của vệ tinh. Gọi g là gia tốc trọng trường ở mặt đất.

a) Hãy xác định :

a.1) Vận tốc của vệ tinh.

a.2) Cơ năng toàn phần của vệ tinh.

a.3) Momen động lượng L_O của VT đối với tâm O của TĐ.

a.4) Thời gian T của 1 vòng.

a.5) Độ cao z_0 mà ở đó VT quay trên một quỹ đạo tròn trong mặt phẳng xích đạo của TĐ, luôn luôn ở trên đầu một điểm của TĐ (VT địa tĩnh dùng để liên lạc vô tuyến).

Áp dụng : $g = 10\ m/s^2$; $R = 6400$ km ; $z = 3200$ km ; $m = 100$ kg.

b) Giả sử rằng do các va chạm với các phần tử trong lớp không khí ở trên cao, nên VT chịu một lực ma sát có mô đun $f = km\dfrac{v^2}{z}$, ngược chiều với vận tốc. Giả sử rằng mô đun của lực ma sát lớn hơn rất nhiều mô đun của lực hút TĐ, để cho sau mỗi vòng quay thì độ cao bị biến thiên một lượng Δz rất bé, chuyển động của VT thực tế là đường tròn bán kính R + z.

b.1) Hãy viết biểu thức của sự biến thiên vận tốc Δv theo Δz và T.

b.2) Biểu thức của hệ số ma sát theo R, z và Δz. Tại sao vận tốc của VT tăng ?

b.3) Công của các lực ma sát trong mỗi vòng quay. So sánh nó với độ biến thiên năng lượng toàn phần của vệ tinh.

c) Hợp lực của các lực ma sát nhớt tác dụng lên các lớp không khí phía trên là $f = f_0v^n$ (f_0 và n là những hằng số dương) những lực ma sát này kéo theo một sự biến thiên nhỏ của độ cao của VT trong khoảng thời gian dt : $dz = -Cdt$ (C là hằng số dương nhỏ).

Hãy xác định n và tìm biểu thức của f_0 theo m, C, g và R.

ĐS : *a.1)* $v = R\sqrt{\dfrac{g}{R+z}}$; *a.2)* $E = -\dfrac{1}{2}mg\dfrac{R^2}{R+z}$;

a.3) $L_O = mR\sqrt{g(R+z)}$; *a.4)* T = 2h 34 ph ; *a.5)* z = 36 000 km.

b.1) $\Delta v = -\dfrac{\pi}{T}\Delta z$; *b.2)* $k = \dfrac{-z\Delta z}{4\pi(R+z)^2}$;

b.3) $A_{ms} = \dfrac{1}{2}mg\left(\dfrac{R}{R+z}\right)^2\Delta z$; $\Delta E = A_{ms}$;

c) $n = 3$; $f_0 = -\dfrac{mC}{2gR^2}$.

Chủ đề 3

CHUYỂN ĐỘNG PHẲNG CỦA VẬT RẮN VAI TRÒ CỦA TÂM QUAY TỨC THỜI

I – VAI TRÒ CỦA KHỐI TÂM

1. Như đã biết, nếu chỉ xét thuần tuý về mặt động học thì chuyển động phẳng tổng quát có thể xem là chuyển động tổng hợp của hai chuyển động thành phần :

• Chuyển động tịnh tiến với vận tốc bằng vận tốc của một điểm bất kì của vật mà ta gọi là cực.

• Chuyển động quay quanh cực với vận tốc góc không phụ thuộc vào việc chọn cực.

Gọi A là điểm được chọn làm cực, B là điểm bất kì khác của vật, ta có :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB} \qquad (3.1)$$

2. Tuy nhiên, nếu xét cả về mặt động lực học thì khối tâm của vật trở nên khác biệt hẳn với các điểm khác của vật. Chuyển động phẳng tổng quát có thể xem là chuyển động tổng hợp của hai chuyển động thành phần :

• Chuyển động tịnh tiến với gia tốc bằng gia tốc của khối tâm.

• Chuyển động quay quanh khối tâm với gia tốc góc chung cho toàn bộ vật.

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}_G$$

$$\Sigma\overrightarrow{M}_G = I_G\vec{\gamma}$$

Biết $\vec{a}_G$ và $\vec{\gamma}$ ta có thể tìm được gia tốc của một điểm bất kì của vật. Thật vậy, gọi A là điểm bất kì, theo (3.1) ta có :

$$\vec{v}_A = \vec{v}_G + \omega \wedge \overrightarrow{GA}$$

Lấy đạo hàm, ta được :

$$\vec{a}_A = \vec{a}_G + \vec{\gamma} \wedge \overrightarrow{GA} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GA}) \qquad (3.2)$$

trong đó gia tốc của điểm A trong chuyển động tròn quanh G bao gồm $\vec{a}_t = \vec{\gamma} \wedge \overrightarrow{GA}$ và $\vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GA})$.

3. Xét về mặt năng lượng, khối tâm cũng có một vai trò đặc biệt :

• Thế năng của vật bằng thế năng của toàn bộ khối lượng của vật tập trung tại khối tâm.

$$E_t = mgz_G = mgh_G \tag{3.3}$$

• Động năng của vật bằng tổng động năng của chuyển động tịnh tiến theo khối tâm và động năng quay quanh khối tâm.

$$E_d = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2 \tag{3.4}$$

4. Khối tâm của vật cũng có vai trò đặc biệt đối với các đại lượng bảo toàn.

• Động lượng của vật trong chuyển động phẳng tổng quát chỉ bằng động lượng của chuyển động tịnh tiến theo khối tâm của nó.

$$\vec{p} = m\vec{v}_G \tag{3.5}$$

(Động lượng của vật trong chuyển động quay quanh khối tâm bằng không).

• Công thức tính momen động lượng của vật đối với khối tâm có cùng dạng với công thức tính momen động lượng của vật đối với tâm quay cố định (gọi là O) cho dù G chuyển động.

$$\vec{L}_G = I_G\vec{\omega} \tag{3.6}$$

• Hệ thức liên hệ giữa momen lực và momen động lượng đối với khối tâm cũng đơn giản như đối với tâm quay cố định.

$$\Sigma\overrightarrow{M}_G = \frac{d\vec{L}_G}{dt} = I_G\vec{\gamma} \tag{3.7}$$

• Nếu hệ hai vật tương tác với nhau là hệ cô lập thì ta áp dụng định luật bảo toàn momen động lượng của hệ đối với điểm *cố định bất kì* (gọi là O). Khi ấy momen động lượng của mỗi vật đối với điểm cố định O bất kì được tính bằng định lí Kơ-nic :

$$\vec{L}_O = \vec{L}_G + \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{v}_G \tag{3.8}$$

Các công thức trên đây cho phép ta giải được các bài toán về chuyển động phẳng tổng quát (Dĩ nhiên phải kết hợp với một số công thức liên quan tới tính chất đặc thù của bài toán).

II – VAI TRÒ CỦA TÂM QUAY TỨC THỜI

Tâm quay tức thời là điểm đặc biệt thứ hai chỉ đứng sau khối tâm của vật. Việc nghiên cứu vai trò của tâm quay tức thời không những giúp ta hiểu sâu thêm đặc điểm của chuyển động phẳng tổng quát mà còn tìm ra được nhiều công thức lí thú và bổ ích khác nữa.

1. Như đã biết, khi một vật chuyển động phẳng tổng quát, thì tại mỗi thời điểm ta đều có thể tìm được một điểm trên vật hoặc trên mặt phẳng gắn với vật (trong Cơ học 2 gọi là mặt phẳng O') có vận tốc bằng không. Điểm này được gọi là tâm quay tức thời của vật. Vận tốc của các điểm khác của vật tại thời điểm đó có thể được xác định bằng cách coi vật quay quanh tâm quay tức thời.

Gọi K là tâm quay tức thời của vật, A là một điểm bất kì của vật, ta có :

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{KA} \qquad (3.9a)$$

$$\vec{v}_G = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{KG} \qquad (3.9b)$$

Từ công thức (3.9) ta suy ra công thức tính động năng của vật :

$$E_đ = \frac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2 = \frac{1}{2} I_K \omega^2 \qquad (3.10)$$

với

$$I_K = I_G + m(\overline{KG})^2 \qquad (3.11)$$

Từ công thức (3.9) ta suy ra được công thức tính momen động lượng của vật đối với K.

$$\vec{L}_K = \Sigma(\vec{r}_{iK} \wedge m_i \vec{v}_i) = I_K \vec{\omega} \qquad (3.12)$$

Ta có nhận xét, tất cả các công thức từ (3.9) đến (3.12) đều có dạng giống như các công thức tương ứng đối với vật chuyển động quanh tâm O cố định. Từ đó ta rút ra kết luận :

Chuyển động phẳng tổng quát có thể xem là chuyển động quay thuần tuý quanh tâm quay tức thời khi xét về các mặt sau đây :

– mặt động học (khi tính vận tốc của mỗi điểm của vật).

– mặt năng lượng (khi tính động năng của vật).

– mặt bảo toàn (khi tính momen động lượng của vật đối với tâm quay tức thời).

Các công thức liên quan đến tâm quay tức thời trên đây (từ (3.9) đến (3.12) đã góp phần vào việc lựa chọn các cách giải hay và hiệu quả cho các bài tập về chuyển động phẳng.

Đến đây tất nảy ra câu hỏi : Nếu xét về mặt động lực học thì sao ? Có thể xem chuyển động phẳng tổng quát là chuyển động quay thuần tuý quanh tâm quay tức thời được không ? Nói cách khác có thể dùng được công thức :

$$\Sigma\overrightarrow{M}_K = I_K\vec{\gamma} \tag{3.13}$$

giống như công thức đối với tâm quay cố định hay không ?

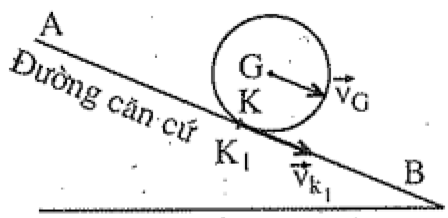
Khi nghiên cứu sâu chuyển động phẳng tổng quát, tác giả nhận ra là không thể trả lời câu hỏi nêu trên một cách đơn giản là "dùng được" hoặc "không dùng được". Lí do nằm ở chỗ *tâm quay tức thời có gia tốc khác không*, đó là điểm khác biệt so với tâm quay cố định. Thêm nữa, tác giả tìm ra được câu trả lời có liên quan đến đường căn cứ. Hoá ra đường căn cứ không chỉ là một khái niệm thuần tuý lí thuyết mà còn có ứng dụng lí thú mà ta sẽ thấy ở phần sau.

2. Đường căn cứ

Giả sử tại thời điểm xét, điểm K (thuộc mặt phẳng O' gắn với vật) có vận tốc bằng không. Điểm K trùng với điểm K_1 trên mặt phẳng cố định O. Do K có gia tốc khác không, nên sang thời điểm sau nó có vận tốc và điểm lân cận K' (thuộc mặt phẳng O') có vận tốc bằng không. Điểm K' trùng với điểm K_1' trên mặt phẳng O. Và cứ như thế, tâm quay tức thời đã dịch chuyển trên mặt phẳng O, vạch nên một đường gọi là *đường căn cứ.*

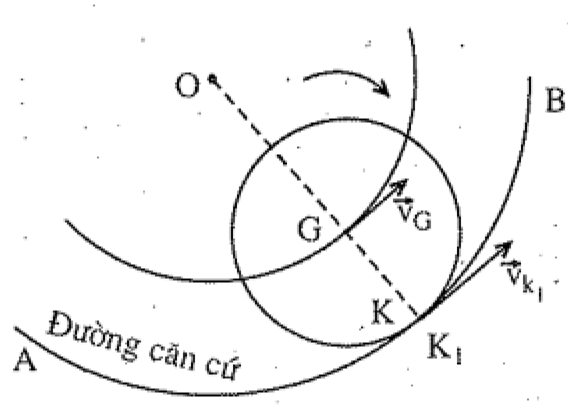
Gọi $\vec{v}_{K_1}$ là vận tốc dịch chuyển của tâm quay tức thời trên đường căn cứ. Vectơ $\vec{v}_{K_1}$ tiếp tuyến với đường căn cứ. Dưới đây là một vài ví dụ về đường căn cứ :

– Một hòn bi lăn không trượt theo đường dốc chính AB của một mặt phẳng nghiêng. Đường thẳng AB là đường căn cứ (Hình 3.1).



Hình 3.1

– Một hòn bi lăn không trượt trong một máng tròn, bán kính R. Đường tròn AB, bán kính R vạch trên máng tròn là đường căn cứ (Hình 3.2).



Hình 3.2

Dựa vào đường căn cứ ta có thể tìm được câu trả lời nêu ở trên.

3. Mối liên hệ tổng quát giữa $\sum \vec{M}_K$ và $\vec{L}_K$

Nếu tại thời điểm xét, tâm quay tức thời K trùng với điểm K_1 của mặt phẳng cố định O, thì theo định lí Kơ-nic ta viết :

$$\vec{L}_{K_1} = \vec{L}_G + \overrightarrow{K_1G} \wedge m\vec{v}_G$$

$$\frac{d\vec{L}_{K_1}}{dt} = \frac{d\vec{L}_G}{dt} + \frac{d}{dt}(\overrightarrow{K_1G} \wedge m\vec{v}_G)$$

$$= \frac{d\vec{L}_G}{dt} + \overrightarrow{K_1G} \wedge m\vec{a}_G + \frac{d\overrightarrow{K_1G}}{dt} \wedge m\vec{v}_G$$

$$= \sum \vec{M}_G^{ex} + \overrightarrow{K_1G} \wedge \sum \vec{F}_i^{ex} + (\vec{v}_G - \vec{v}_{K_1}) \wedge m\vec{v}_G$$

$$= \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_G) \wedge \vec{F}_i^{ex} + \sum (\vec{r}_G - \vec{r}_K) \wedge \sum \vec{F}_i^{ex} + (\vec{v}_G - \vec{v}_{K_1}) \wedge m\vec{v}_G$$

$$= \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_K) \wedge \vec{F}_i^{ex} + (\vec{v}_G - \vec{v}_{K_1}) \wedge m\vec{v}_G$$

Vì $\dfrac{d\vec{L}_{K_1}}{dt} = \dfrac{d\vec{L}_K}{dt}$ và $\vec{L}_K = I_K\vec{\omega}$ nên cuối cùng ta được :

$$\frac{d}{dt}(I_K\vec{\omega}) = \sum \vec{M}_K^{ex} + (\vec{v}_G - \vec{v}_{K_1}) \wedge m\vec{v}_G \qquad (*)$$

4. Điều kiện để áp dụng được công thức (3.13)

Từ công thức (*) ta rút ra được điều kiện áp dụng như sau :

a) Điều kiện thứ nhất : nếu tại thời điểm xét (t = 0) vật đứng yên tức thời, tức là v_G và ω của vật đều bằng không.

Tại sao vậy ? Đó là vì $\left(\dfrac{dI_K}{dt}\right)_{t=0}$ cũng bằng không dù I_K là đại lượng biến thiên. Thế còn I_K ? Ta xác định được I_K nếu xét đến xu hướng chuyển động của vật ngay sau đó (Xem bài tập 1.27, tr. 58, Cơ học 2).

b) Điều kiện thứ hai : nếu tại thời điểm xét, vật đang chuyển động thì :

- I_K = const (hay KG = const) và $\vec{v}_G \,//\, \vec{v}_{K_1}$.

Nói cách khác, KG = const và $\vec{v}_G$ *song song với tiếp tuyến với đường căn cứ.* (Xem Hình 3.1 và Hình 3.2 và xem các bài tập 1.5 tr. 50 ; 1.6 tr.50 ; 2.17 tr 104 ; 2.18 tr. 104, Cơ học 2).

Như vậy là nếu xét về mặt động lực học thì chỉ khi một trong hai điều kiện trên đây được thoả mãn thì chuyển động phẳng tổng quát mới có thể xem là chuyển động quay thuần tuý quanh tâm quay tức thời. Khi ấy ta có thêm công thức (3.13) để giải bài tập.

Qua phần trình bày ở trên, ta thấy có những khó khăn nhất định khi áp dụng công thức (3.13) nên rất nhiều sách Vật lí ở bậc đại học trong phần "chuyển động phẳng" đã không đề cập đến công thức (3.13) và xem nhẹ vai trò của tâm quay tức thời.

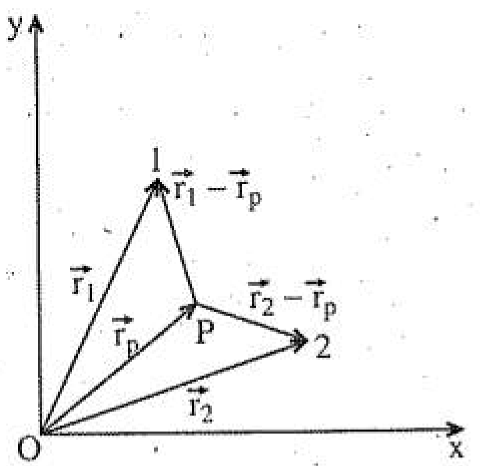
Tuy nhiên theo tác giả, nếu vận dụng đúng công thức (3.13) thì trong một số bài tập ta có cách giải ngắn gọn hơn so với khi không dùng nó. Và điều này thì học sinh giỏi môn Vật lí làm được.

III – MOMEN ĐỘNG LƯỢNG (TỔNG QUÁT)

Momen động lượng là một khái niệm khó và việc áp dụng định luật bảo toàn momen động lượng cho một hệ vật cũng khó. Muốn hiểu đúng khái niệm này chúng ta phải bắt đầu từ những định nghĩa và những công thức tổng quát.

1. Định nghĩa tổng quát của momen động lượng và momen lực

Xét một hệ hạt đang chuyển động và giả sử rằng mỗi hạt chịu một ngoại lực $\vec{F}^{ex}$ tác dụng. Chọn điểm cố định O làm gốc toạ độ. Chọn điểm bất kì P để tính momen, điểm P có thể đứng yên hoặc chuyển động (Hình 3.3). Ta có định nghĩa sau :



Hình 3.3

a) Momen động lượng toàn phần của hệ đối với điểm P là :

$$\vec{L}_P = \sum(\vec{r}_i - \vec{r}_p) \wedge m_i(\vec{v}_i - \vec{v}_p) \qquad (3.14)$$

b) Momen toàn phần của các ngoại lực đối với điểm P là :

$$\sum\overrightarrow{M}_P^{ex} = \sum(\vec{r}_i - \vec{r}_p) \wedge \vec{F}_i^{ex} \qquad (3.15)$$

2. Mối liên hệ tổng quát giữa momen động lượng và momen lực

Lấy đạo hàm của $\vec{L}_P$ theo thời gian ta được :

$$\frac{d\vec{L}_P}{dt} = \sum \underbrace{(\vec{v}_i - \vec{v}_P) \wedge m_i(\vec{v}_i - \vec{v}_P)}_{=0} + \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_P) \wedge (m_i\vec{a}_i - m_i\vec{a}_P)$$

Thay $m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i^{ex}$ là tổng hợp các lực tác dụng lên hạt i, ta được :

$$\frac{d\vec{L}_P}{dt} = \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_P) \wedge \vec{F}_i^{ext} - \sum m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_P) \wedge \vec{a}_P$$

Thay tiếp $\sum m_i\vec{r}_i = m\vec{r}_G$ ta được :

$$\frac{d\vec{L}_P}{dt} = \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_P) \wedge \vec{F}_i^{ext} - m(\vec{r}_G - \vec{r}_P) \wedge \vec{a}_P$$

Cuối cùng ta được công thức tổng quát :

$$\frac{d\vec{L}_P}{dt} = \sum \overrightarrow{M}_P^{ex} - (\vec{r}_G - \vec{r}_P) \wedge m\vec{a}_P \qquad (3.16)$$

Công thức (3.16) cho thấy mối liên hệ giữa momen lực và momen động lượng không đơn giản như mối liên hệ giữa lực và động lượng $\left(\sum \vec{F}_{ex} = \frac{d\vec{P}}{dt}\right)$. *Có sự khác biệt này là do momen động lượng và momen lực còn tuỳ thuộc vào điểm để tính momen.*

Từ các công thức (3.14) và (3.16) ta rút ra một điều là mỗi khi áp dụng các công thức về momen động lượng, ta *phải chỉ ra điểm để tính momen và điểm đó là điểm đứng yên hay chuyển động.*

3. Điều kiện để $\sum \overrightarrow{M}_P^{ex} = \frac{d\vec{L}_P}{dt}$

Số hạng thứ hai trong công thức (3.16) sẽ triệt tiêu nếu một trong ba điều kiện sau đây được thoả mãn.

a) $\vec{a}_P = \vec{0}$: điểm P đứng yên hay chuyển động thẳng đều. Tuy nhiên, ta thường chọn P đứng yên và coi P trùng với gốc toạ độ O của HQC đứng yên. Khi ấy ta có các công thức quen thuộc :

- $\vec{L}_O = \sum \vec{r}_i \wedge m_i\vec{v}_i$ ($\vec{v}_i$ là vận tốc tuyệt đối của hạt i).

- $\sum \vec{M}_O = \sum \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{ex}$.

- $\sum \vec{M}_O^{ex} = \dfrac{d\vec{L}_O}{dt}$.

b) $\vec{r}_P = \vec{r}_G$ hay $P \equiv G$. Khi ấy ta cũng có các công thức quen thuộc :

- $\vec{L}_G = \sum(\vec{r}_i - \vec{r}_G) \wedge m_i(\vec{v}_i - \vec{v}_G)$, với $\vec{v}_i - \vec{v}_G = \vec{v}_{iG}$ là vận tốc tương đối của hạt i đối với khối tâm của hệ hạt.

- $\sum \vec{M}_G^{ex} = \sum(\vec{r}_i - \vec{r}_G) \wedge \vec{F}_i$

- $\sum \vec{M}_G = \dfrac{d\vec{L}_G}{dt}$ (công thức (3.7) ở phần trên)

c) Vectơ gia tốc $\vec{a}_P \,//\, (\vec{r}_G - \vec{r}_P)$ hay $\vec{a}_P \,//\, \overrightarrow{PG}$. Điều kiện này chỉ có ý nghĩa về mặt lí thuyết, ít vận dụng trong thực tiễn.

Từ điều kiện (a) và (b) ta rút ra một điều là có một sự hiểu khác nhau giữa "momen động lượng của hệ đối với khối tâm" và "momen động lượng của hệ đối với *điểm cố định trùng với khối tâm*. Thật vậy, giả sử một hệ đang chuyển động và tại thời điểm xét khối tâm G của hệ trùng với điểm cố định G_1 của HQC O. Momen động lượng của hệ đối với khối tâm được viết là :

$$\vec{L}_G = \sum(\vec{r}_i - \vec{r}_G) \wedge m_i(\vec{v}_i - \vec{v}_G)$$

Còn momen động lượng của hệ đối với điểm G_1 sẽ là :

$$\vec{L}_{G_1} = \sum(\vec{r}_i - \vec{r}_G) \wedge m_i(\vec{v}_i - \vec{v}_{G_1})$$

nhưng $\vec{r}_{G_1} = \vec{r}_G$ và $v_{G_1} = 0$ nên ta viết :

$$\vec{L}_{G_1} = \sum(\vec{r}_i - \vec{r}_G) \wedge m_i\vec{v}_i$$

Vì thế, khi ta viết $\vec{L}_G = \sum(\vec{r}_i - \vec{r}_G) \wedge m_i\vec{v}_i$ với $\vec{v}_i$ là vận tốc tuyệt đối của hạt i thì ta phải hiểu $\vec{L}_G$ là momen động lượng của hệ đối với điểm cố định trùng với khối tâm tại thời điểm xét, chứ không phải là momen động lượng đối với khối tâm như ta vẫn quen viết, quen nói.

4. Momen động lượng của một vật rắn chuyển động phẳng đối với tâm quay tức thời

Nếu tại thời điểm xét, điểm P trùng với tâm quay tức thời K thì theo công thức tổng quát (3.16), ta viết :

$$\frac{d\vec{L}_K}{dt} = \frac{d}{dt}(I_K\vec{\omega}) = \sum\overrightarrow{M}_K^{ex} - \overrightarrow{KG} \wedge m\vec{a}_K \qquad (3.17)$$

Để hiểu về số hạng thứ hai trong công thức (3.17), ta chọn HQC tịnh tiến tại thời điểm xét có gốc toạ độ tại K. Trong HQC này vật chịu thêm lực quán tính $\vec{F}_q = -m\vec{a}_K$ đặt tại khối tâm và $(-\overrightarrow{KG} \wedge m\vec{a}_K)$. Chính là momen đối với K của lực quán tính. Khi ấy công thức (3.17) được viết thành :

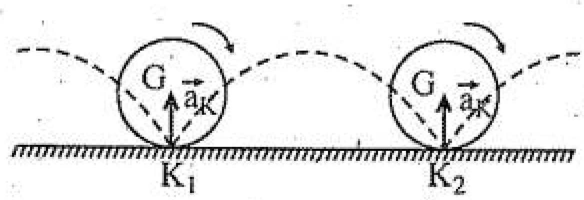
$$\sum\overrightarrow{M}_K^{ex} = \frac{d\vec{L}_K}{dt} = \frac{d}{dt}(I_K\vec{\omega}) \qquad (3.18)$$

(bao gồm cả momen của lực quán tính)

Nếu tại thời điểm xét, vectơ $\vec{a}_K \,//\, \overrightarrow{KG}$ thì momen của lực quán tính đối với K sẽ bằng không.

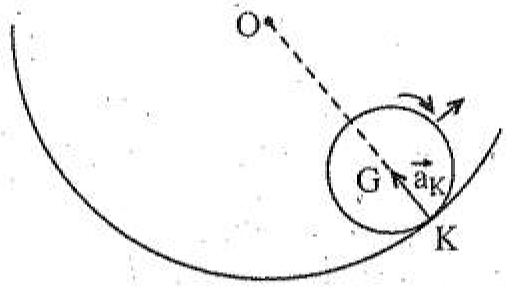
Bây giờ ta trở lại HQC đứng yên, tức là trở lại công thức (3.17). Nếu $\vec{a}_K \,//\, \overrightarrow{KG}$ và $I_K = \text{const}$ thì công thức (3.17) trở thành công thức (3.13). Ta hãy xét một vài ví dụ :

• *Ví dụ 1 :* Một bánh xe đang chuyển động đều trên đường nằm ngang (Hình 3.4). Mỗi điểm trên vành bánh vạch một quỹ đạo hình xiclôit. Khi điểm trên vành tiếp xúc với mặt đường tại K_1, K_2,... thì điểm đó có vận tốc bằng không và đóng vai trò tâm quay tức thời. Vectơ gia tốc $\vec{a}_K$ hướng vào tâm G của bánh xe.



Hình 3.4

• *Ví dụ 2 :* Một hòn bi lăn không trượt trên một cung tròn (Hình 3.5).

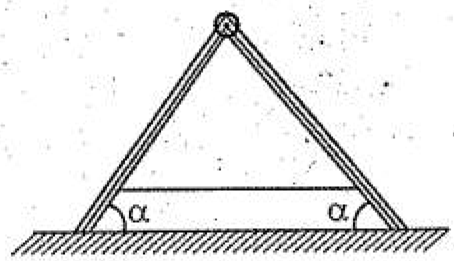


Hình 3.5

Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp khác ta rất khó nhận ra được hướng của vectơ $\vec{a}_K$. Vì thế việc dùng đường căn cứ để tìm điều kiện áp dụng công thức (3.13) là việc làm dễ dàng hơn nhiều.

BÀI TẬP

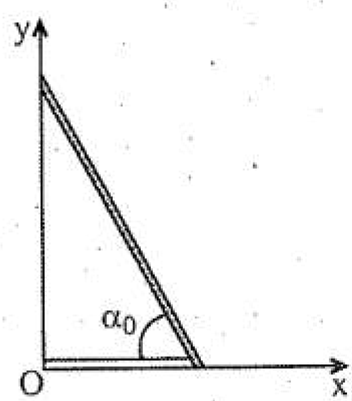
3.1. Một chiếc thang xếp gồm hai chân được liên kết với nhau bởi một khớp nối ở đỉnh và một sợi dây nằm ngang ở gần chân thang. Thang được đặt đứng trên một mặt phẳng nằm ngang và tạo với bề mặt một góc $\alpha = 60^o$ (Hình 3.6). Nếu sợi dây đột nhiên bị cắt thì gia tốc của khớp nối tại thời điểm đó bằng bao nhiêu ? Bỏ qua mọi ma sát.



Hình 3.6

ĐS : $\dfrac{3g}{8}$ (hướng xuống).

3.2. Một tấm ván, khối lượng m, dài l, đứng yên trên một mặt sàn nằm ngang không ma sát và tựa vào một bức tường thẳng đứng không ma sát. Tấm ván được giữ bằng một sợi dây nối đầu dưới của tấm ván với chân tường (Hình 3.7). Góc giữa tấm ván và sàn là α_0.



Hình 3.7

Giả sử rằng tại t = 0 dây bị cắt đứt và đầu dưới của ván luôn tiếp xúc với sàn trong khi rơi. Hãy tính :

a) Gia tốc góc của ván tại t = 0.

b) Gia tốc dài của đầu trên của ván tại t = 0.

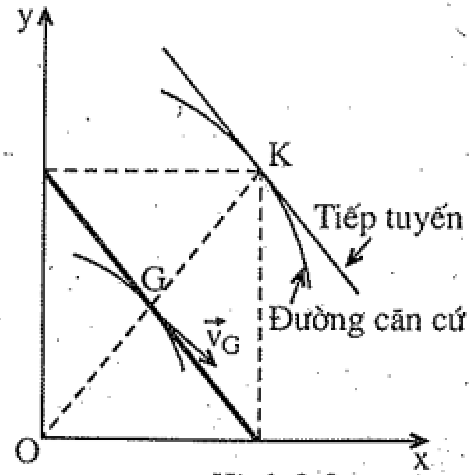
c) Tính góc α tại thời điểm ván bắt đầu rời khỏi tường.

ĐS : a) $\dfrac{3g}{2l}\cos\alpha_0$; b) $-\dfrac{3g}{2}\cos^2\alpha_0$; c) $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}\sin\alpha_0$.

Gợi ý (Hình 3.8) :

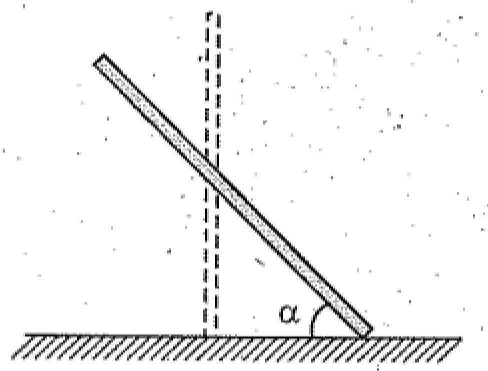
Có thể dùng được công thức $\sum \overrightarrow{M}_K = I_K\vec{\gamma}$

- $\vec{v}_G$ // tiếp tuyến với đường căn cứ tại K.
- $KG = \dfrac{l}{2} = \text{const}$.



Hình 3.8

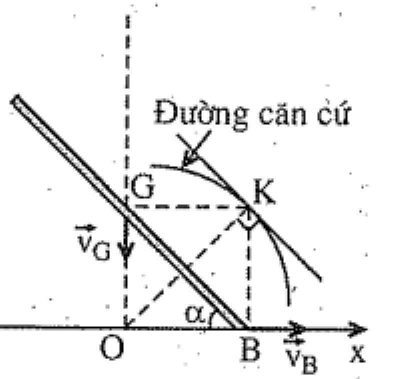
3.3. Một thanh cứng, đồng chất, dài l, khối lượng m, đặt thẳng đứng trên một mặt sàn nằm ngang không ma sát. Do bị đụng nhẹ, thanh đổ xuống trong mặt phẳng thẳng đứng và đầu dưới của thanh trượt trên mặt phẳng nằm ngang (Hình 3.9). Tìm phản lực N của sàn lên thanh tại thời điểm thanh hợp với sàn một góc α.



Hình 3.9

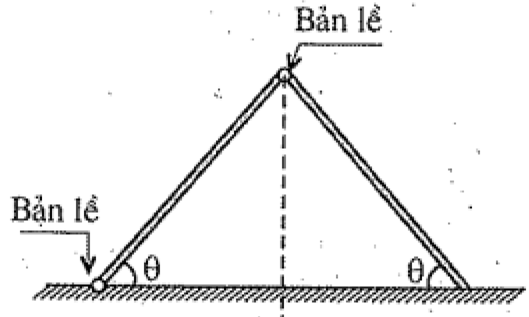
ĐS : $N = \dfrac{mg[1 + 3(1 - \sin\alpha)^2]}{(1 + 3\cos^2\alpha)^2}$.

Gợi ý : Ở bài toán này không dùng được công thức $\sum \overrightarrow{M}_K = I_K\vec{\gamma}$ vì $\vec{v}_G$ không song song với tiếp tuyến với đường căn cứ và I_K là đại lượng biến thiên (Hình 3.10).



Hình 3.10

3.4. Hai thanh cứng, mỗi thanh có khối lượng m, dài l, nối với nhau bằng một bản lề, tạo thành một hình chữ V ngược mà góc giữa chúng có thể thay đổi được. Các thanh luôn nằm trong mặt phẳng thẳng đứng đối với sàn. Đầu dưới của thanh bên trái liên kết với sàn bằng một bản lề. Đầu dưới của thanh bên phải trượt trên mặt sàn không ma sát (Hình 3.11). Mọi bản lề đều không có ma sát và không có khối lượng. Các thanh được thả từ trạng thái nghỉ khi góc giữa chúng hợp với phương ngang θ = 45°.

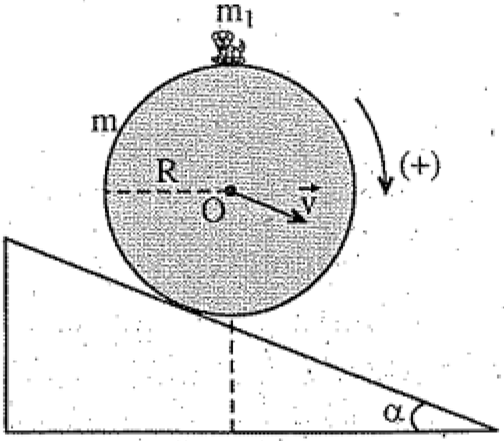


Hình 3.11

Tìm phản lực N mà sàn tác dụng lên thanh bên phải ngay sau khi thả.

ĐS : $N = \dfrac{7mg}{10}$.

3.5. Một hình trụ lớn, rỗng khối lượng m, bán kính R, lăn không trượt trên một mặt phẳng nghiêng với góc nghiêng α so với phương ngang. Trên bề mặt của hình trụ có một con chó, khối lượng m_1, đang chạy sao cho nó luôn giữ vị trí cao nhất của hình trụ (Hình 3.12). Hỏi gia tốc góc của hình trụ.

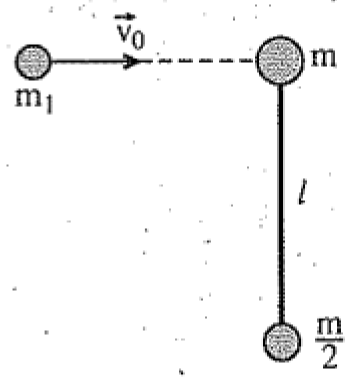


Hình 3.12

ĐS : $\gamma = \dfrac{(m + m_1)g\sin\alpha}{R[2m + m_1(1 + \cos\alpha)]}$.

Gợi ý : Khối tâm G của hệ "hình trụ + chó" chuyển động song song với mặt phẳng nghiêng (hay đường căn cứ) nên áp dụng được các công thức $\sum \overrightarrow{M}_K = \dfrac{d\overrightarrow{L}_K}{dt}$.

3.6. Trên mặt bàn nằm ngang, nhẵn, có đặt một tạ đôi, gồm hai quả cầu, khối lượng lần lượt là m và $\dfrac{m}{2}$, được gắn vào hai đầu một thanh không khối lượng, dài l. Một quả cầu nhỏ, khối lượng m_1, chuyển động với vận tốc v_0 trên mặt bàn theo hướng vuông góc với tạ đôi và đập vào quả cầu m (Hình 3.13). Va chạm là đàn hồi và trực diện.



Hình 3.13

a) Tìm vận tốc của các vật sau va chạm.

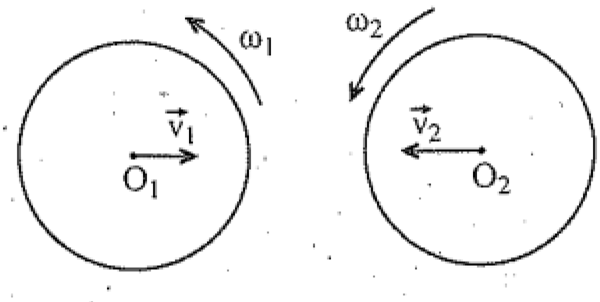
b) Có thể xảy ra một va chạm nữa giữa quả cầu và tạ đôi hay không ? Nếu có thì điều kiện là gì ?

ĐS : a) $v_G = \dfrac{4m_1v_0}{3(m_1 + m)}$; $\omega = \dfrac{2m_1v_0}{l(m_1 + m)}$; $v = \dfrac{(m_1 - m)v}{m_1 + m}$; b) Có ; $\dfrac{m}{m_1} \approx 0{,}22$.

3.7. Một quả bóng đặc được làm bằng một loại cao su đặc biệt cho phép nó nẩy đàn hồi trên một mặt phẳng, đồng thời không trượt trên mặt phẳng có ma sát khi va chạm. Bóng được ném lên từ một mặt phẳng nghiêng có góc nghiêng là α so với phương ngang. Vận tốc đầu của quả bóng vuông góc với mặt phẳng nghiêng và có độ lớn là v_0. Tìm thành phần của vận tốc quả bóng dọc theo mặt phẳng nghiêng ngay sau lần nẩy thứ n.

ĐS : $v_n = \dfrac{(10n - 4)}{7} v\tan\alpha$ (n lẻ) ; $v_n = \dfrac{10n}{7} v\tan\alpha$ (n chẵn).

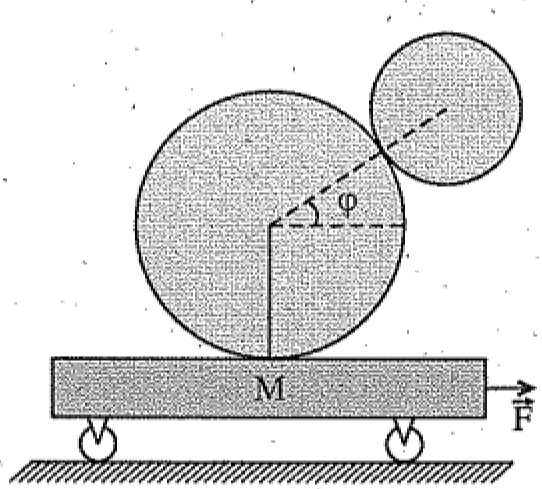
3.8. Trên một mặt nằm ngang, nhẵn, có hai vòng mảnh giống nhau, đang quay với vận tốc góc lần lượt là ω_1, ω_2, đồng thời chuyển động về phía nhau với vận tốc v_1, v_2 theo đường nối tâm (Hình 3.14). Hãy xác định vận tốc góc của hai vòng sau va chạm nếu sự va chạm có kèm theo sự trượt ở chỗ tiếp xúc và do có ma sát mà sự trượt sẽ mất đi tại thời điểm cuối cùng của va chạm.



Hình 3.14

ĐS : $\omega_1' = \dfrac{3\omega_1 - \omega_2}{4}$; $\omega_2' = \dfrac{3\omega_2 - \omega_1}{4}$.

3.9. Hai quả cầu có cùng khối lượng riêng, có bán kính lần lượt là r và R = 2r. Khối lượng của quả cầu nhỏ là m. Quả cầu lớn được đặt tại điểm giữa của một chiếc xe, khối lượng M = 6m, dài *l*. Quả cầu nhỏ đặt trên quả cầu lớn (Hình 3.15). Khi xe được kéo với một lực không đổi $\vec{F}$ nằm ngang thì hai quả cầu lăn không trượt theo cách sao cho đường thẳng nối hai tâm luôn giữ một góc không đổi φ so với phương ngang.



Hình 3.15

a) Tìm độ lớn của lực $\vec{F}$.

b) Sau một khoảng thời gian bao lâu thì các quả cầu rời khỏi xe ?

ĐS : $F = \dfrac{30mg\cos\varphi}{1 + \sin\varphi}$; $t = \sqrt{\dfrac{2l(1 + \sin\varphi)}{5g\cos\varphi}}$.

Chủ đề 4

TĨNH HỌC. PHƯƠNG PHÁP CÔNG ẢO

Phương pháp công ảo dựa trên khái niệm về *sự dịch chuyển ảo*. Trong tĩnh học, phương pháp này tỏ ra có lợi vì nó không đòi hỏi phải tính toán mọi phản lực giữa các phần khác nhau của một hệ thống được khảo sát.

I – SỰ DỊCH CHUYỂN ẢO

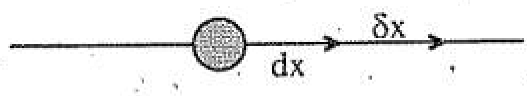
1. Định nghĩa

Sự dịch chuyển ảo là bất kì sự dịch chuyển vô cùng nhỏ nào phù hợp với các liên kết xác định hệ vật cần khảo sát ở một thời điểm xác định.

Người ta kí hiệu độ dịch chuyển ảo là $\delta\vec{r}$ để phân biệt với độ dịch chuyển thực là $d\vec{r}$.

2. Ví dụ : Để làm rõ sự khác nhau giữa sự dịch chuyển ảo và sự dịch chuyển thực chúng ta xét một vài ví dụ sau đây :

a) Ví dụ 1: Một quả cầu có rãnh chuyển động dọc theo một thanh xuyên qua rãnh (Hình 4.1).



Hình 4.1

– Độ dịch chuyển thực của quả cầu là

$$dx = vdt.$$

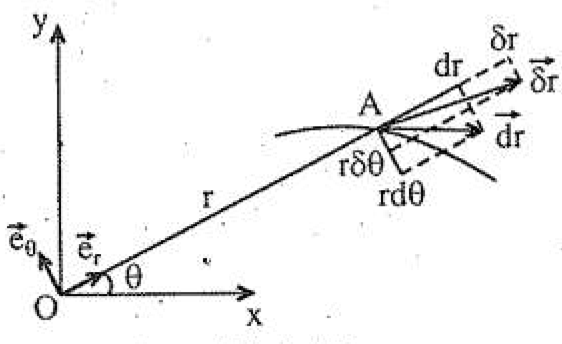
– Độ dịch chuyển ảo là δx. Vì δx là tuỳ ý nên nó độc lập với vận tốc.

b) Ví dụ 2 : Hình 4.2 cho biết quỹ đạo chuyển động của một điểm A trong mặt phẳng Oxy.

– Độ dịch chuyển thực của A là :

$$d\vec{r} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta$$

Vì $dr = \dot{r}dt$ và $d\theta = \dot{\theta}dt$ nên vectơ $d\vec{r}$ tiếp tuyến với quỹ đạo.



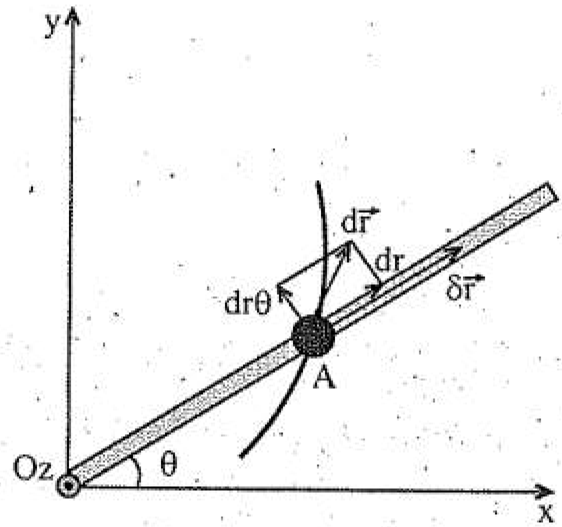
Hình 4.2

– Độ dịch chuyển ảo của A là :

$$\delta\vec{r} = \delta r\vec{e}_r + r\delta\theta\vec{e}_\theta$$

Vì δr và $\delta\theta$ là tuỳ ý nên vectơ $\delta\vec{r}$ không tiếp tuyến với quỹ đạo.

c) Ví dụ 3 : Một quả cầu A có rãnh trượt không ma sát trên một thanh đang quay Oz quanh trục thẳng đứng. A vạch một quỹ đạo trong mặt phẳng nằm ngang xOy (Hình 4.3).



Hình 4.3

Trong trường hợp này thì lực liên kết phụ thuộc vào thời gian. Bởi vậy, ở một thời điểm xác định t, độ dịch chuyển ảo của A *không chứa độ dịch chuyển góc.* Từ đó ta suy ra :

$$\delta\vec{r} = \delta r.\vec{e}_r$$

II – CÔNG ẢO. ĐỊNH LÍ VỀ CÔNG ẢO

1. Công ảo

Ở một thời điểm nào đó, người ta gọi công ảo của một lực $\vec{F}$ tác dụng vào một điểm của một hệ thống là công của lực $\vec{F}$ trong sự dịch chuyển ảo ở thời điểm ấy.

$$\delta A = \vec{F}.\delta\vec{r} \qquad (1)$$

trong đó $\delta\vec{r}$ nói chung không tiếp tuyến với quỹ đạo.

2. Định lí về công ảo

a) Một hệ chất điểm sẽ đứng yên nếu mỗi chất điểm A của hệ đứng yên dưới tác dụng của mọi lực $\vec{F}_A$ tác dụng lên nó.

$$\sum \vec{F}_A = \vec{0}$$

Bởi vậy đối với một sự dịch chuyển ảo bất kì ta có :

$$\sum \vec{F}_A \delta\vec{r}_A = 0$$

Các lực trong $\sum \vec{F}_A$ bao gồm hai loại, đó là các ngoại lực đặt vào hệ và các lực liên kết và chúng ta giới hạn ở hai trường hợp quan trọng khi mà *các liên kết là* *hoàn hảo*. Đó là trường hợp không có ma sát và trường hợp không có sự trượt khi có ma sát. Từ đó suy ra :

$$\sum_{A} \vec{F}_A \delta \vec{r}_A = 0 \qquad (2)$$

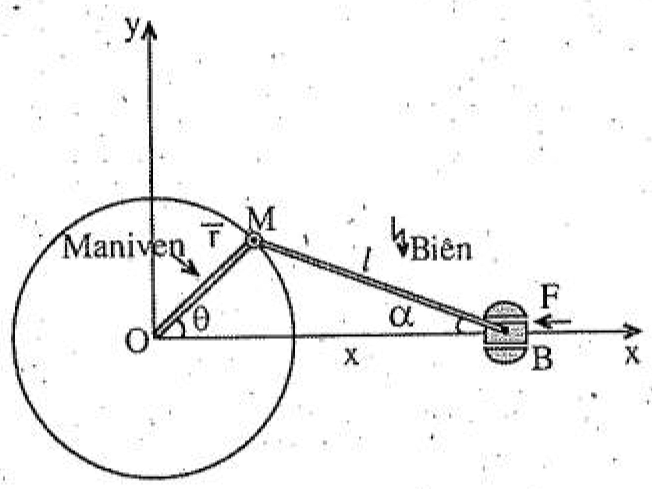
b) Định lí về công ảo phát biểu như sau:

Muốn cho một hệ chất điểm có các liên kết hoàn hảo ban đầu đứng yên sẽ vẫn đứng yên thì điều kiện cần và đủ là tổng các công ảo của các ngoại lực đặt vào hệ phải bằng không.

3. Phương pháp công ảo

Phương pháp công ảo tỏ ra rất thích hợp với những bài toán tĩnh học trong đó người ta *không đòi hỏi phải tính các lực liên kết*. Sau đây là một số bài tập ví dụ.

a) Ví dụ 1 : Hãy xác định momen của ngẫu lực $\vec{M}_z$ cần tác dụng vào maniven OM để giữ cho hệ "maniven – biên" đứng yên khi đầu B của biên (gắn vào quả pittông) chịu một lực $\vec{F}$ ngược chiều trục ox (Hình 4.4).



Hình 4.4

Giải

Ta hãy tính công của lực $\vec{F}$ và của ngẫu lực $\vec{M}_z$ trong sự dịch chuyển ảo của B phù hợp với liên kết tại B.

$$\delta A_F = -F\delta x$$

$$\delta A_M = M_z.\delta\theta$$

Mối liên hệ giữa δx và δθ có thể tìm được dễ dàng nhờ áp dụng định lí hàm số cosin vào tam giác OMB :

$$l^2 = r^2 + x^2 - 2xr\cos\theta$$

Lấy vi phân, ta được :

$$0 = 0 + 2x\delta x - 2r\cos\theta\delta x + 2xr\sin\theta\delta\theta$$

$$xr\sin\theta\delta\theta = -(x - r\cos\theta)\delta x$$

$$\delta x = \frac{-xr\sin\theta\delta\theta}{x - r\cos\theta}$$

khi công của lực ma sát bằng 0 thì ta có :

$$\Sigma\delta A = -F\delta x + M_z\delta\theta = 0 = (F\frac{xr\sin\theta}{x - r\cos\theta} + Mz)\delta\theta = 0$$

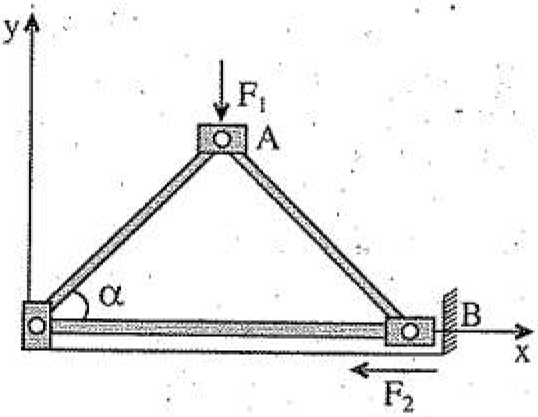
Suy ra $$Mz = -Fr.\frac{x\sin\theta}{x - r\cos\theta}$$

Thay $x = r\cos\theta + l\cos\alpha$ và thay $\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2\theta}$ vào, ta được :

$$M = -Fr\sin\theta(1 + \frac{r\cos\theta}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2\theta}}$$

Nếu $r << x$, tức là biên dài so với maniven thì $M_z = -Fr.\sin\theta$

b) Ví dụ 2 : Máy ép là một hệ gồm hai thanh giống nhau liên kết với nhau bằng một khớp động. Một trong hai thanh có đầu O cố định còn thanh kia có đầu B có thể dịch chuyển dọc theo trục Ox (Hình 4.5). Người ta tác dụng vào trọng vật A (có khối lượng m) một lực $\vec{F_1}$ hướng thẳng đứng xuống dưới. Hãy tính lực $\vec{F_2}$ mà khuôn ép phải tác dụng vào đầu B để cho hệ đứng yên.



Hình 4.5

Giải

Chúng ta hãy xét một sự dịch chuyển ảo về góc $\delta\alpha$.

$$y_A = l\sin\alpha \Rightarrow \delta y_A = l\cos\alpha\, \delta\alpha$$

$$x_B = 2l\cos\alpha \Rightarrow \delta x_B = -2l\sin\alpha\, \delta\alpha$$

Vì $\Sigma\delta A = -F_1\delta y_A - mg\delta y_A - F_2\delta x_B = 0$

hay $$(-F_1 l\cos\alpha - mgl\cos\alpha + 2F_2 l\sin\alpha)\delta\alpha = 0$$

Suy ra : $$F_2 = \frac{F_1 + mg}{2\tan\alpha}.$$

Đối với lực F_1 cho trước nếu góc α mà nhỏ thì lực ép F_2 có thể rất lớn.

III – CÂN BẰNG BỀN CỦA MỘT HỆ CHẤT ĐIỂM BẢO TOÀN VỚI MỘT THỨ NGUYÊN

1. Điều kiện cân bằng

Ta hãy xét một hệ chất điểm bảo toàn được đặc trưng bởi thế năng là một hàm của một toạ độ tổng quát kí hiệu là q (ví dụ như toạ độ góc θ). Theo định lí về công ảo, khi hệ ở vị trí cân bằng ta có :

$$\sum_A \vec{F}\delta\vec{r} = -\delta E_t(q) = 0$$

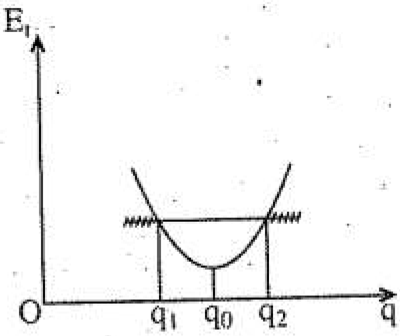
Mặt khác, $$\delta E_t(q) = \frac{dE_t}{dq}\delta q$$

Từ đó ta suy ra điều kiện cân bằng là :

$$\frac{dE_t(q)}{dq} = 0 \qquad (3)$$

2. Tính chất của trạng thái cân bằng được xác định bởi hình dáng đường cong miêu tả hàm $E_t(q)$ ở lân cận giá trị q_0 của q ở vị trí cân bằng.

a) Nếu đường cong $E_t(q)$ đi qua điểm cực tiểu khi $q = q_0$, thì *cân bằng là bền*, vì mọi sự lệch giá trị của q đối với q_0 đều gây ra dao động giữa hai giá trị q_1 và q_2 ở hai phía của q_0 (Hình 4.6).

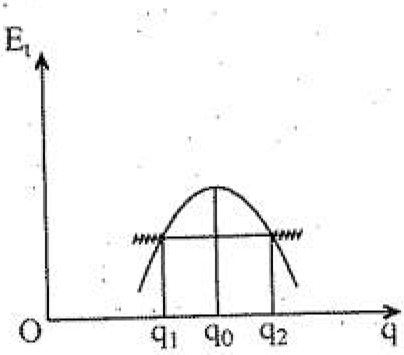


Hình 4.6

Thật vậy, sự bảo toàn cơ năng $E = E_d + E_t = const$ kéo theo $E_d = E - E_t > 0$

Từ đó suy ra : $q_1 \leq q \leq q_2$ nếu $\frac{d^2E_t}{dq^2} > 0$

b) Nếu đường cong $E_t(q)$ đi qua điểm cực đại khi $q = q_0$ thì *cân bằng là không bền*. Vì mọi sự sai lệch đối với q_0 đều bị khuếch đại lên (Hình 4.7).

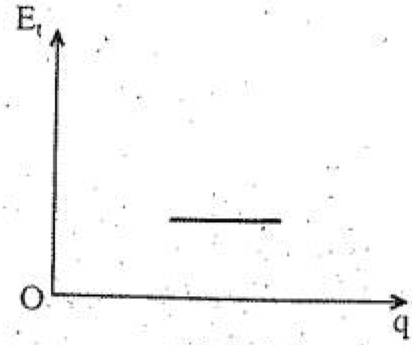


Hình 4.7

$q < q_1$ và $q > q_2$ nếu $\frac{d^2E_t}{dq^2} < 0$

c) Cuối cùng nếu $E_t(q)$ biểu diễn một đường nằm ngang (Hình 4.8) thì cân bằng là *phiếm định*. Trong trường hợp này, ta có :

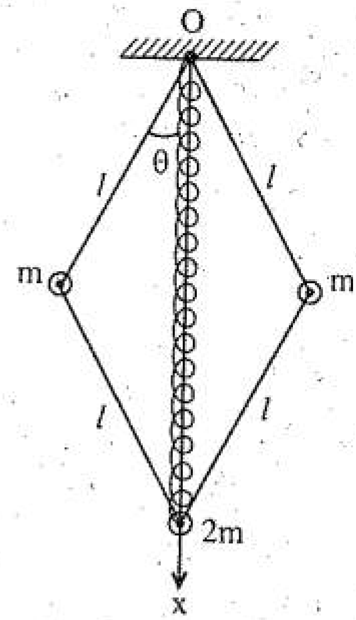
$$\frac{d^2E_t}{dq^2} = 0$$



Hình 4.8

3. Bài tập ví dụ

Một cơ hệ gồm hai quả cầu khối lượng m và một quả cầu khối lượng 2m nối với nhau bằng các thanh mảnh có cùng chiều dài và có khớp nối ở hai đầu (Hình 4.9). Lò xo có độ cứng k và có chiều dài tự nhiên l_0. Hệ thống quay đều với vận tốc góc ω xung quanh trục thẳng đứng Ox. Hãy xác định vị trí cân bằng của hệ. Cân bằng là bền hay không bền.



Hình 4.9

Giải

Chọn HQC quay. Trong HQC này thế năng toàn phần của cơ hệ gồm thế năng trọng thường, thế năng đàn hồi và thế năng li tâm. Chọn mốc tính thế năng trọng trường ở O ta có biểu thức thế năng toàn phần của hệ là

$$E_t = (-6mgl\cos\theta) + \frac{1}{2}k(2l\cos\theta - l_0)^2 + 2(-\frac{\omega^2}{2}ml^2\sin^2\theta)$$

Ta có nhận xét thế năng của hệ là hàm của một toạ độ góc θ. Do đó vị trí cân bằng của hệ thoả mãn điều kiện :

$$\frac{dE_t}{d\theta} = 0$$

$$\frac{dE_t}{d\theta} = 2l\sin\theta[3mg + kl_0 - l(2k + m\omega^2)\cos\theta] = 0$$

Kết quả là hệ có hai vị trí cân bằng θ_1 và θ_2.

$$\theta_1 = 0$$

$$\cos\theta_2 = \frac{3mg + kl_0}{l(2k + m\omega^2)}$$

Xét dấu của đạo hàm bậc 2 :

$$\left(\frac{d^2E_t}{d\theta^2}\right)_1 = 2l[3mg + kl_0 - l(2k + m\omega^2)]$$

$$\left(\frac{d^2E_t}{d\theta^2}\right)_2 = 2l(2k + m\omega^2)\sin^2\theta_2 > 0$$

Chú ý rằng vị trí thứ hai thì luôn luôn bền trong khi vị trí thứ nhất chỉ bền nếu ω nhỏ hơn một giá trị đặc biệt nào đấy.

Để kết luận, chúng ta nhắc lại các điều kiện cân bằng đã học trong tĩnh học.

+ Đối với một chất điểm : $\sum \vec{F} = 0$.

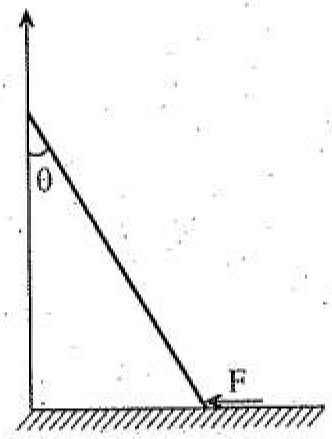
+ Đối với một vật rắn : $\sum \vec{F}_{ex} = \vec{0}$; $\sum \vec{M}_{ex} = \vec{0}$.

+ Đối với một hệ gồm n vật rắn thì ta có n cặp phương trình vectơ như trên.

+ Đối với một hệ liên tục và biến dạng được, như sợi dây chẳng hạn, thì một phương trình vectơ cho mỗi phần tử của hệ.

BÀI TẬP

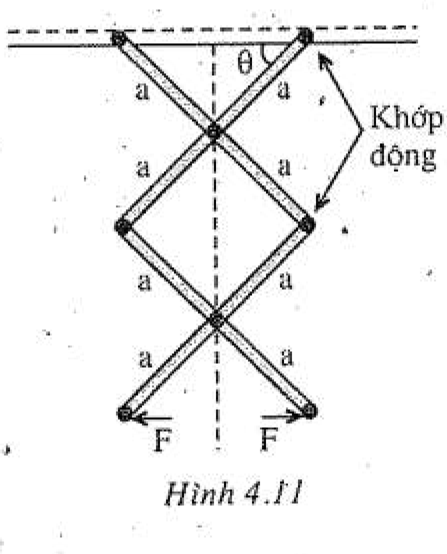
4.1. Một chiếc thang đồng chất, tiết diện đều, trọng lượng P, dài l, được giữ cân bằng bởi một lực F nằm ngang (Hình 4.10). Bỏ qua ma sát với tường và với sàn. Tìm F.



Hình 4.10

ĐS : $F = \frac{1}{2}P\tan\theta$.

4.2. Có một khung xếp tạo bởi 4 thanh, mỗi thanh có trọng lượng P và dài 2a (Hình 4.11). Hãy xác định hai lực F cần để giữ cho khung ở trạng thái cân bằng với góc $\theta = 45^o$.

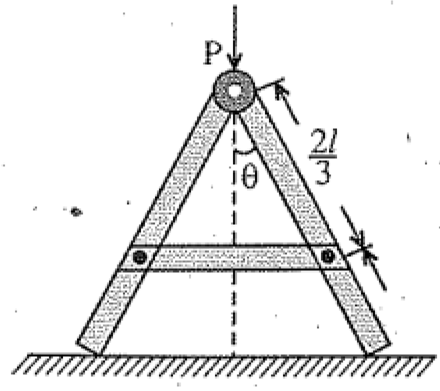


Hình 4.11

ĐS : F = 4P.

4.3. Hình 4.12 là một chiếc thang gấp. Tìm lực F mà thanh ngang tác dụng vào thang theo tải P và góc θ.

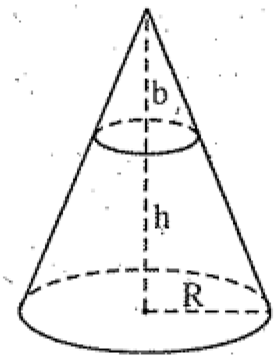
ĐS : $F = \frac{3P}{4}\tan\theta$.



Hình 4.12

4.4. Một vòng dây cáp, trọng lượng P được quàng vào một hình nón thẳng đứng có độ cao h và bán kính mặt đáy R. Tìm sức căng T trong dây cáp khi nó nằm trong mặt phẳng ngang, cách đỉnh là b (Hình 4.13). Bỏ qua ma sát với mặt nón.

ĐS : $T = \frac{Ph}{2\pi R}$.



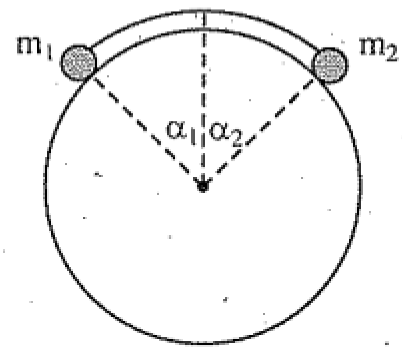
Hình 4.13

4.5. Hai quả cầu nhỏ, khối lượng m_1 và m_2 được đặt trên một xi lanh và được nối với nhau bằng một sợi dây không dãn, không khối lượng. Tìm vị trí cân bằng của hệ (Hình 4.14).

Xét hai trường hợp : trường hợp không có ma sát và trường hợp có ma sát với hệ số ma sát trượt là μ.

ĐS : a) $m_1\sin\alpha_1 = m_2\sin\alpha_2$;

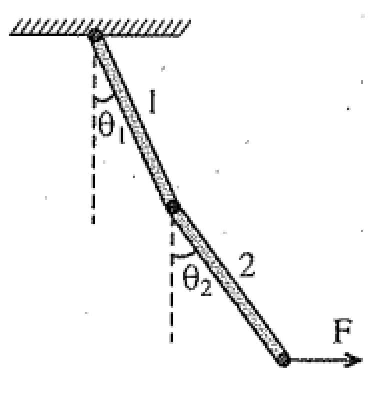
b) $m_1(\sin\alpha_1 - \mu\cos\alpha_1) = m_2(\sin\alpha_2 + \mu\cos\alpha_2)$



Hình 4.14

4.6. Một hệ gồm hai thanh cứng, mỗi thanh dài *l*, khối lượng m. Hai thanh liên kết với nhau và với giá đỡ bằng các khớp nối hoàn hảo. Kéo hệ lệch ra khỏi phương thẳng đứng bằng một lực F nằm ngang tác dụng vào đầu dưới của thanh 2 (Hình 4.15).

Hãy tìm các góc lệch θ_1 và θ_2 khi hệ cân bằng.



Hình 4.15

Gợi ý : Có thể giải bằng ba cách :

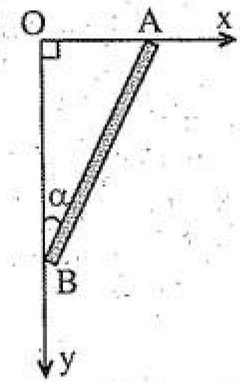
Cách 1 : Dùng phương pháp công ảo.

Cách 2 : Dùng phương pháp năng lượng.

Cách 3 : Dùng phương pháp động lực học.

ĐS : $\tan\theta_1 = \dfrac{2F}{3mg}$; $\tan\theta_2 = \dfrac{2F}{mg}$.

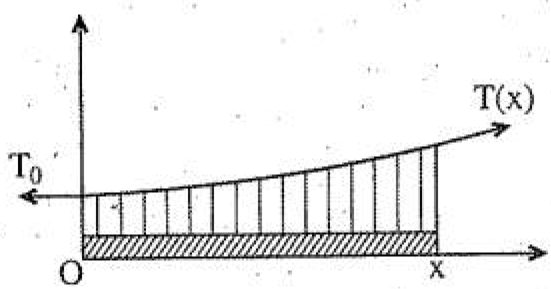
4.7. Một thanh AB nặng, đồng chất, đầu A luôn tiếp xúc với trục Ox, đầu B luôn tiếp xúc với trục Oy (Hình 4.16). Cho mặt phẳng xOy quay quanh trục thẳng đứng Oy với vận tốc góc không đổi ω. Hãy tìm vị trí cân bằng của thanh. Bỏ qua ma sát với hai trục.



Hình 4.16

ĐS : $\cos\alpha = \dfrac{3g}{2\omega^2}$.

4.8. Một dây cáp không khối lượng, dễ uốn ở một cầu treo chịu một tải trọng phân bố đều dọc theo trục x. Trọng lượng của tải tính trên một đơn vị chiều dài của dây cáp là ω và sức căng của dây cáp ở tâm của cầu (tại x = 0) là T_0 (Hình 4.17). Hãy tìm :



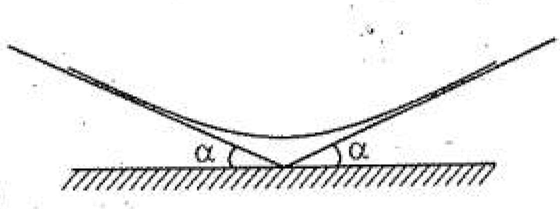
Hình 4.17

a) Hình dạng của cáp khi cân bằng.

b) Sức căng T(x) trong dây cáp tại toạ độ x khi cáp cân bằng.

ĐS : a) parabol ; b) $T(x) = T_0\sqrt{1 + \dfrac{\omega^2}{T_0}x^2}$.

4.9. Một dây dài L nằm yên trên hai mặt phẳng nghiêng một góc α như (Hình 4.18). Dây có khối lượng phân bố đều theo chiều

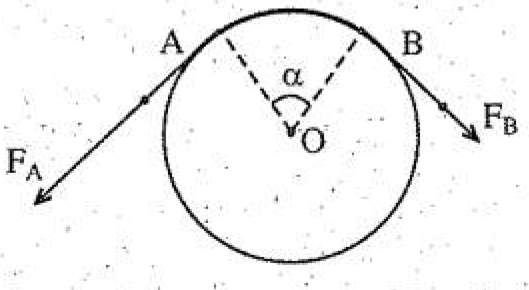


Hình 4.18

dài và hệ số ma sát nghỉ với hai mặt phẳng nghiêng bằng 1. Hệ có tính chất đối xứng phải trái. Hỏi đoạn dây l không tiếp xúc với hai mặt phẳng nghiêng lớn nhất bằng bao nhiêu ? Góc α tương ứng bằng bao nhiêu ?

ĐS : $l_{max} = 0{,}172L$; $\alpha = 22{,}5^o$.

4.10. Một sợi dây được quấn quanh một cái tời cố định như Hình 4.19. Hệ số ma sát nghỉ giữa dây và tời là μ_n, góc α xác định cung của tời được quấn bởi dây. Một người khoẻ kéo dây ở đầu A với một lực bằng F_A trong khi người yếu hơn chỉ cần kéo dây ở đầu B với một lực F_B nhỏ hơn, vừa đủ để ngăn cản dây không trượt trên tời.



Hình 4.19

a) Tìm công thức liên hệ F_B với F_A.

b) Cho biết khi $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{3}$ thì lực $F_B = \dfrac{1}{10}F_A$. Hỏi muốn $F_B = \dfrac{1}{100}F_A$ thì góc α_1 nhỏ nhất phải bằng bao nhiêu ?

ĐS : a) $F_A = F_B e^{\mu\alpha}$; b) $\alpha_1 = \dfrac{2\pi}{3}$.

Chủ đề 5

CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT RẮN CÓ MỘT ĐIỂM CỐ ĐỊNH. CÔNG THỨC CỘNG VẬN TỐC GÓC. CON QUAY

I – CHUYỂN ĐỘNG KHÔNG GIAN CỦA VẬT RẮN

1. Chuyển động không gian của một vật rắn có thể xem là chuyển động tổng hợp của hai chuyển động :

– Chuyển động tịnh tiến của một điểm bất kì của vật (thường là khối tâm).

– Chuyển động quay quanh một trục đi qua điểm đó, trục này có thể thay đổi phương trong không gian.

2. Chuyển động quay thuần túy xảy ra khi vật rắn có một điểm cố định trong không gian. Ta chỉ giới hạn xét chuyển động này.

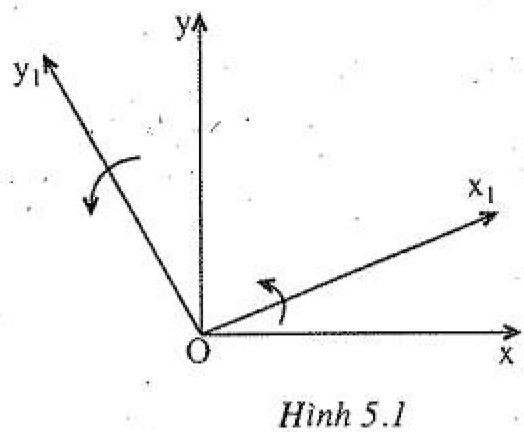
II – CÔNG THỨC VẬN TỐC GÓC

1. Công thức

Gọi (O) là hệ quy chiếu (HQC) cố định. Gọi (O_1) là HQC quay với vận tốc góc $\vec{\omega}_1$ so với (O). Gọi (O_2) là HQC quay với vận tốc góc $\vec{\omega}_2$ so với (O). Gọi $\vec{\omega}_{21}$ là vận tốc góc của HQC (O_2) so với HQC (O_1). Ta có công thức :

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_{21} + \vec{\omega}_1 \tag{5.1}$$

2. Thành lập : Để đơn giản, ta chọn các HQC quay có gốc tại O và tại thời điểm t = 0 các trục toạ độ tương ứng trùng nhau (Hình 5.1). Xét hai điểm A và B thuộc HQC (O_2).



Hình 5.1

Trong HQC (O) các vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ quay quanh O với vận tốc góc $\vec{\omega}_2$. Ta có :

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{OA}$$

$$\vec{v}_B = \vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{OB}$$

Suy ra :

$$\vec{v}_A - \vec{v}_B = \vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{BA} \qquad \text{(a)}$$

Trong HQC (O_1) các vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ quay với vận tốc góc $\vec{\omega}_{21}$. Tương tự như trên ta có :

$$\vec{v}'_A - \vec{v}'_B = \vec{\omega}_{21} \wedge \overrightarrow{BA} \qquad \text{(b)}$$

Áp dụng công thức cộng vận tốc $\vec{v}_{\text{tuyệt đối}} = \vec{v}_{\text{tương đối}} + \vec{v}_{\text{kéo theo}}$ cho các điểm A và B, ta có :

$$\vec{v}_A = \vec{v}'_A + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{OA}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}'_B + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{OB}$$

$$\vec{v}_A - \vec{v}_B = \vec{v}'_A - \vec{v}'_B + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{BA} \qquad \text{(c)}$$

Thay (a), (b) vào (c) ta được công thức (5.1).

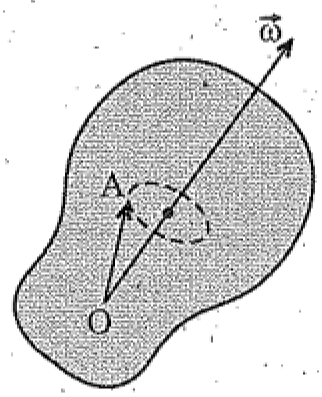
III – VẬN TỐC VÀ VẬN TỐC GÓC CỦA MỘT VẬT RẮN CÓ MỘT ĐIỂM CỐ ĐỊNH

1. Giả sử O là điểm cố định của vật, A là một điểm của vật, $\overrightarrow{OA} = \vec{r}_A$.

Ta có :

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_A \qquad (5.2)$$

Trong đó $\vec{\omega}$ là vận tốc góc của vật quay quanh trục quay tức thời đi qua O (Hình 5.2)



Hình 5.2

2. Nếu A, B là hai điểm của vật thì theo (5.2) ta có :

$$\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB} \qquad (5.3)$$

IV – MOMEN ĐỘNG LƯỢNG. TENXƠ MOMEN QUÁN TÍNH

1. Momen động lượng của một vật đối với một điểm cố định là khái niệm quan trọng nhất của phần động lực học của chuyển động quay của vật rắn.

$$\vec{L}_0 = \Sigma\vec{r}_i \wedge m_i\vec{v}_i = \Sigma m_i\left[\vec{r}_i \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i)\right]$$

$$= \Sigma m_i\left[\vec{\omega}(\vec{r}_i.\vec{r}_i) - \vec{r}_i(\vec{r}_i.\vec{\omega})\right]$$

$$= \Sigma m_i\left[r_i^2\vec{\omega} - \vec{r}_i(x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z)\right] \quad (5.4)$$

2. Gọi (O) là HQC cố định có gốc O tại điểm cố định của vật. Gọi $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ là các vectơ đơn vị, ta có :

$$\vec{L} = L_x\vec{e}_x + L_y\vec{e}_y + L_z\vec{e}_z$$

$$\vec{\omega} = \omega_x\vec{e}_x + \omega_y\vec{e}_y + \omega_z\vec{e}_z$$

$$\vec{r}_i = x_i\vec{e}_x + y_i\vec{e}_y + z_i\vec{e}_z$$

Thay vào (5.4) ta được :

$$L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$$

$$L_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z$$

$$L_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

Với

$$\begin{cases} I_{xx} = \Sigma m_i(y_i^2 + z_i^2) \\ I_{yy} = \Sigma m_i(z_i^2 + x_i^2) \\ I_{zz} = \Sigma m_i(x_i^2 + y_i^2) \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} I_{xy} = I_{yx} = -\Sigma m_i x_i y_i \\ I_{yz} = I_{zy} = -\Sigma m_i y_i z_i \\ I_{zx} = I_{xz} = -\Sigma m_i z_i x_i \end{cases} \quad (5.5)$$

3. Như vậy, trong trường hợp tổng quát, vectơ $\vec{L}$ và vectơ $\vec{\omega}$ *không trùng nhau*. Mặt khác, vectơ $\vec{L}$ liên hệ với vectơ $\vec{\omega}$ qua một đại lượng gọi là tenxơ *momen quán tính*, kí hiệu là [I] gồm 9 thành phần thường được viết dưới dạng *một ma trận* như sau :

$$[I] = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

và $$\vec{L} = [I]\vec{\omega} \quad (5.7)$$

Thuật ngữ tenxơ có thể làm cho chúng ta sợ. Chúng ta chỉ cần biết rằng đại lượng tenxơ là một ma trận và khi nó tác dụng lên một vectơ (ví dụ vectơ $\vec{\omega}$) thì cho một vectơ khác (ví dụ vectơ $\vec{L}$, xem công thức (5.7)). Hơn nữa trong phần sau ta sẽ tránh không dùng đến nó.

V – TRỤC QUÁN TÍNH CHÍNH. MOMEN QUÁN TÍNH CHÍNH

1. Trục quán tính chính

Người ta chứng minh được rằng đối với vật rắn có một điểm cố định O, tồn tại ba trục quay (hay ba hướng của vectơ $\vec{\omega}$) vuông góc với nhau từng đôi một, mà đối với chúng *hướng của vectơ* $\vec{L}$ *trùng với hướng của vectơ* $\vec{\omega}$. Trục có tính chất như vậy gọi là *trục quán tính chính* (gọi tắt là trục chính).

2. Momen quán tính chính

Nếu ta chọn HQC (O') có gốc O tại điểm cố định, có các trục Ox', Oy', Oz' trùng với 3 trục quán tính chính của vật thì HQC ((O') được gọi là "*HQC vật*", còn ma trận [I] sẽ có dạng hình chéo :

$$[I] = \begin{pmatrix} I_1 & O & O \\ O & I_2 & O \\ O & O & I_3 \end{pmatrix} \qquad (5.8)$$

Các đại lượng I_1, I_2, I_3 được gọi là những *momen quán tính chính* của vật và mối liên hệ giữa vectơ $\vec{L}$ và vectơ $\vec{\omega}$ sẽ đơn giản hơn nhiều.

$$L_1 = I_1\omega_1 \; ; L_2 = I_2\omega_2 \; ; L_3 = I_3\omega_3 \qquad (5.9)$$

và $$\vec{L} = (I_1\omega_1)\vec{e}_{x'} + (I_2\omega_2)\vec{e}_{y'} + (I_3\omega_3)\vec{e}_{z'} \qquad (5.10)$$

Nếu vật quay quanh một trục quán tính chính, ví dụ như trục Oz' thì

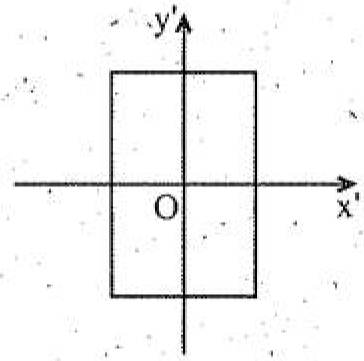
$$\omega_1 = \omega_2 = 0$$

$$\vec{L} = I_3\omega_3\vec{e}_{z'} \text{ hay } \vec{L} = I\vec{\omega}$$

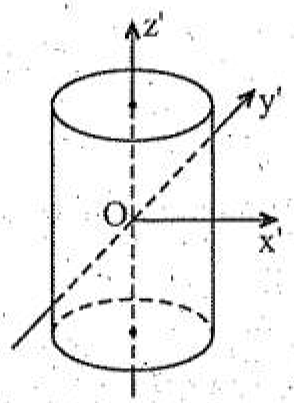
Với I là momen quán tính của vật đối với trục quay Oz' và là một *số vô hướng*.

3. Ví dụ

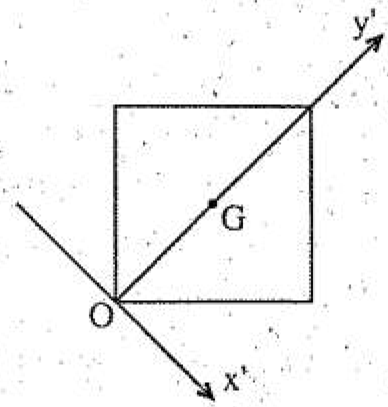
a) Hình chữ nhật có tâm O cố định. Các trục quán tính chính là trục Oz' và hai trục Ox', Oy' song song với hai cạnh (Hình 5.3).



Hình 5.3



Hình 5.4



Hình 5.5

b) Hình trụ có tâm O cố định. Các trục chính là trục Oz' và hai trục vuông góc bất kì nằm trong mặt phẳng (x', y') (Hình 5.4).

c) Hình vuông có điểm cố định O ở một đỉnh. Các trục chính là trục Oz', trục qua khối tâm Oy' và trục vuông góc với trục này (Hình 5.5)

VI – ĐỘNG NĂNG CỦA VẬT CÓ MỘT ĐIỂM CỐ ĐỊNH

1. Trong HQC (O) cố định có gốc tại O, động năng của vật được cho bởi :

$$E_d = \frac{1}{2}(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2) + 2(I_{xy}\omega_x\omega_y + I_{xz}\omega_x\omega_z + I_{yz}\omega_y\omega_z)$$

hay $$E_d = \frac{1}{2}\vec{\omega}.\vec{L} \qquad (5.11)$$

2. Trong "HQC vật", tức HQC (O'), công thức tính động năng của vật trở nên đơn giản. Thật vậy :

$$E_d = \frac{1}{2}\vec{\omega}.\vec{L} = \frac{1}{2}(\omega_1 L_1 + \omega_2 L_2 + \omega_3 L_3)$$

$$E_d = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) \qquad (5.12)$$

VII – CÁC PHƯƠNG TRÌNH ƠLE (EULER)

1. Cách thành lập

a) Gọi (O) là HQC cố định có gốc tại điểm cố định O của vật. Ta có :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{(O)} = \vec{M}_O$$

$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{(O)}$ là vận tốc tuyệt đối của đầu mút vectơ $\vec{L}_O$.

b) Gọi (O') là "HQC vật" có gốc tại điểm cố định O. HQC (O') gắn với vật nên quay quanh O cùng với vật với vận tốc góc $\vec{\omega}$:

$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{(O')}$ là vận tốc tương đối của đầu mút vectơ $\vec{L}_O$. Áp dụng công thức cộng vận tốc ta viết :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{(O)} = \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{(O')} + \vec{\omega} \wedge \vec{L}_O.$$

Suy ra : $$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{(O')} + \vec{\omega} \wedge \vec{L}_O = \vec{M}_O. \tag{5.13}$$

Trong HQC O' thì mối liên hệ giữa hai vectơ $\vec{L}_O$ và $\vec{\omega}$ trở nên đơn giản. Do đó ta có thể chiếu phương trình (5.13) lên các trục Ox', Oy', Oz' để được các phương trình đại số. Ví dụ :

$$Ox' : M_1 = \frac{d}{dt}(I_1\omega_1) + (\omega_2 L_3 - \omega_3 L_2) = I_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3(I_3 - I_2).$$

2. Các phương trình Ơ-le :

Làm tương tự đối với Oy' và Oz', ta được các phương trình :

$$\begin{aligned} M_1 &= I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 \\ M_2 &= I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 \\ M_3 &= I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Hệ phương trình (5.14) gọi là *các phương trình Ơ-le*.

Nếu vật qùay quanh một trục chính, ví dụ trục Oz' với vận tốc góc không đổi thì ta có :

$$\omega_1 = \omega_2 = 0\ ;\ \dot{\omega}_3 = 0.$$

Thay vào (5.14) ta được : $M_1 = M_2 = M_3 = 0$. Từ đó ta có định nghĩa khác về trục quán tính như sau :

Trục quán tính chính là trục mà vật có thể quay quanh nó với vận tốc góc không đổi mà không cần đến bất kì momen lực nào.

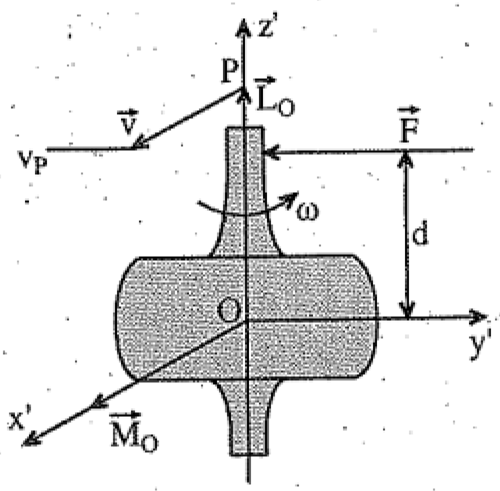
VIII – CON QUAY. CHUYỂN ĐỘNG TIẾN ĐỘNG

Con quay là một vật rắn quay quanh một điểm cố định nằm trên trục quay, trục này có thể thay đổi phương trong không gian. Ta hạn chế, chỉ xét các con quay có hình dạng đều quay quanh trục đối xứng của nó.

1. Tác dụng của lực lên trục quay

Ta xét một con quay có tâm cố định O trùng với gốc toạ độ của HQC (O). Giả sử ta tác dụng một lực $\vec{F}$ lên trục của một con quay đang quay nhanh (Hình 5.6). Momen của lực $\vec{F}$ đối với tâm O có trị số $M_O = Fd$. Áp dụng định lí biến thiên momen động lượng ta được :

$$\overrightarrow{M_O} = \frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} \text{ hay : } \overrightarrow{M_O} = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}.$$



Hình 5.6

Trong đó $\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OP}$ là vectơ momen động lượng của con quay đối với điểm O, vectơ $\overrightarrow{L_O}$ trùng với vectơ $\vec{\omega}$ nên nằm trên trục chính Oz' còn P là điểm mút của vectơ $\overrightarrow{L_O}$. Vì đạo hàm của vectơ $\overrightarrow{OP}$ theo thời gian là vận tốc $\vec{v}_P$ của điểm P, nên ta có :

$$\vec{v}_P = \overrightarrow{M_O} \tag{5.15}$$

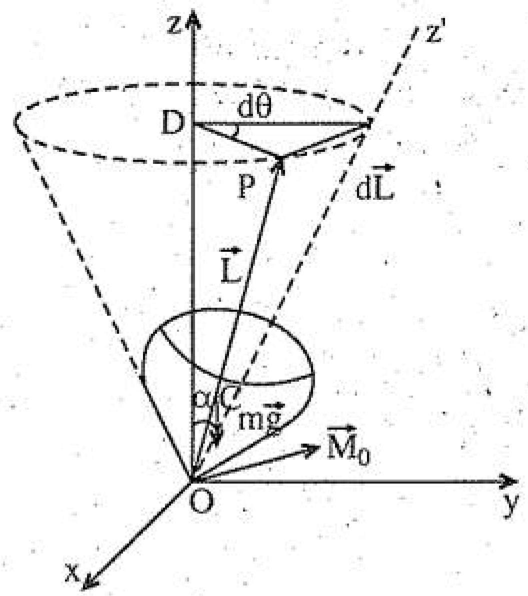
Đẳng thức (5.15) chứng tỏ rằng vận tốc của điểm P trên trục quay của vật đối với tâm O bằng vectơ momen của ngoại lực đối với tâm đó cả về độ lớn lẫn hướng. Do đó, điểm P và cả trục quay của con quay sẽ chuyển động theo hướng của vectơ $\overrightarrow{M_O}$.

Như vậy, nếu ta tác dụng lên trục của một con quay đang quay nhanh một lực thì trục quay lại không chuyển động theo hướng của lực mà theo hướng của vectơ momen lực. Kiểu chuyển động này của trục quay gọi là *chuyển động tiến động*. Trục Oy' gọi là *trục tiến động*, trục Ox' gọi là *trục momen*.

Theo đẳng thức (5.15) ta suy ra được một kết quả quan trọng nữa là : khi lực thôi tác dụng thì cả $\overrightarrow{M_O}$ lẫn $\vec{v}_P$ đều bằng 0, do đó trục quay dừng ngay lại. Nếu lực tác dụng là lực tức thời (lực va chạm) thì trục quay hầu như không đổi hướng. Đây là *tính chất ổn định của trục con quay khi quay nhanh*.

2. Chuyển động tiến động của con quay

Xét một con quay có hình dạng đều, khối lượng m với điểm cố định không trùng với khối tâm C. Giả sử con quay đang quay nhanh với vận tốc góc quanh trục đối xứng Oz' của nó, trục này làm một góc α với trục cố định z thì khi thả ra, trục của con quay sẽ quay xung quanh trục z với vận tốc góc Ω và vạch nên một mặt nón.



Hình 5.7

Ta hãy tìm vận tốc góc Ω của chuyển động tiến động của con quay. Gọi (O) là HQC đứng yên, (O') là HQC quay với vận tốc góc $\vec{\Omega}$ quanh trục Oz của HQC (O) (Hình 5.7). Ta có :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{(O)} = \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{(O')} + \vec{\Omega} \wedge \vec{L}_O$$

Nếu con quay quay nhanh và ω của nó giảm chậm trong một chu kì tiến động thì :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{(O')} \approx 0$$

Ta có : $\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{(O)} \approx \vec{\Omega} \wedge \vec{L}_O = \vec{M}_O$

Thay $\overrightarrow{L_O} = I\omega\vec{e}_{z'}$ vào, ta được :

$$\overrightarrow{M_O} = I\omega\Omega\vec{e}_z \wedge \vec{e}_{z'} \text{ hay}$$

$$M_O = I\omega\Omega\sin\alpha. \quad (5.16)$$

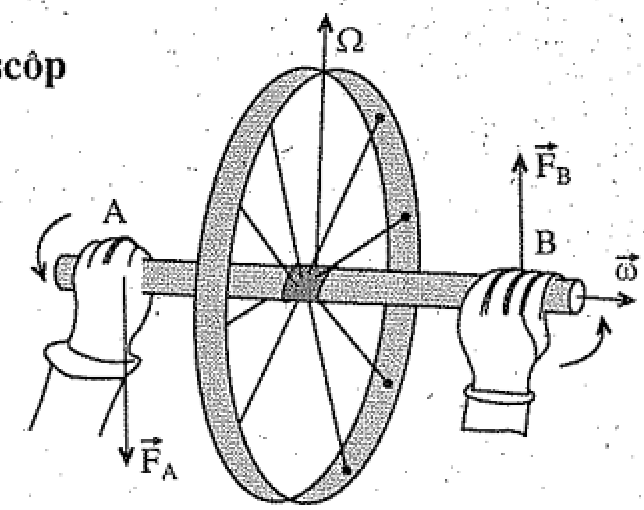
Phương trình (5.16) được gọi là *phương trình chuyển động của con quay.*

Từ phương trình (16) suy ra : $\Omega = \dfrac{mgr}{I\omega}$. (5.17)

Phương trình (5.17) cho thấy con quay quay càng nhanh thì chuyển động tiến động càng chậm và ngược lại.

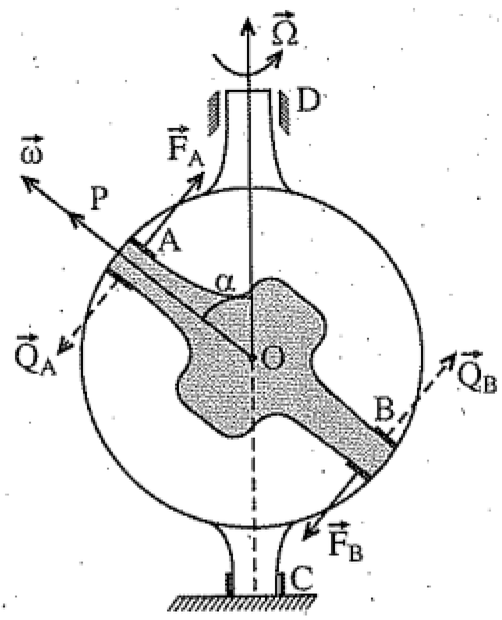
3. Hiệu ứng Gyrôscôp. Ngẫu lực Gyrôscôp

a) Hiệu ứng Gyrôscôp



Hình 5.8

– Ta làm một thí nghiệm đơn giản : dùng tay nắm hai đầu trục AB trên đó đã lắp một bánh xe C có ổ bi. Nếu bánh xe quay nhanh thì khi cố gắng quay trục AB trong mặt phẳng nằm ngang với vận tốc góc Ω nhỏ sẽ dẫn đến một hiệu ứng thú vị như sau : Trục quay có xu hướng tuột ra khỏi bàn tay và quay trong mặt phẳng thẳng đứng. Nó tác dụng vào bàn tay những lực xác định $\vec{F}_A$ và $\vec{F}_B$. (Hình 5.8). Ta cảm nhận được một cách rõ ràng là phải dùng sức để giữ cho trục bánh xe nằm trong mặt phẳng nằm ngang.



Hình 5.9

– Xét một gyrôscôp quay nhanh được gắn vào một vành bằng các ổ bi A và B (Hình 5.9). Nếu ta cho vành quay quanh trục CD với vận tốc góc Ω (Ω << ω) thì trục gyrôscôp chuyển động tiến động và điểm P (đầu vectơ $\vec{L}$) có vận tốc $v_P = I\omega\Omega\sin\alpha$.

Theo công thức $\overrightarrow{M_O} = \dfrac{d\overrightarrow{L_O}}{dt}$ ta suy ra là trục phải chịu một momen tác dụng có giá trị bằng $M_O = v_P = I\omega\Omega\sin\alpha$.

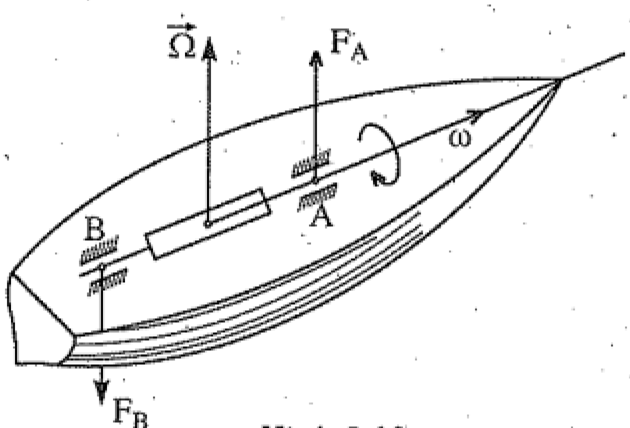
Rõ ràng là momen này do các lực $\vec{Q}_A$ và $\vec{Q}_B$ mà các ổ bi A và B tác dụng lên trục gây ra. Vì khối tâm của gyrôscôp đứng yên tại chỗ, nên tổng các lực $\vec{Q}_A$ và $\vec{Q}_B$ bằng 0, do đó các lực này tạo thành một ngẫu lực với momen $\vec{M}$ và có chiều như vận tốc $\vec{v}_P$.

b) Ngẫu lực Gyrôscôp

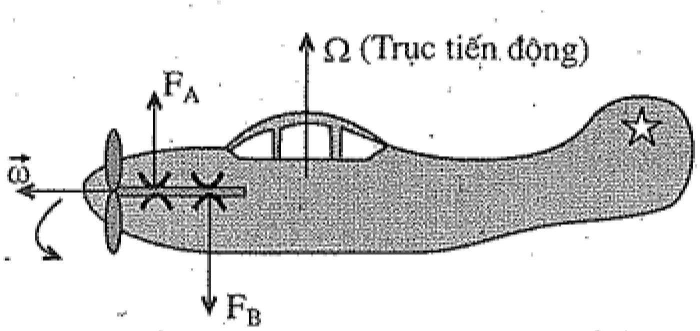
Theo định luật III Niu-tơn, trục của gyrôscôp cũng tác dụng trở lại các ổ bi A và B các lực $\vec{F}_A$ và $\vec{F}_B$ có độ lớn bằng Q_A và Q_B nhưng ngược chiều. Ngẫu lực $\left(\vec{F}_A, \vec{F}_B\right)$ gọi là *ngẫu lực gyrôscôp*, momen của nó gọi là *momen gyrôscôp*.

Từ đó suy ra *quy tắc Ju-cốp-xki : Nếu truyền cho gyrôscôp đang quay nhanh một chuyển động tiến động cưỡng bức thì sẽ có một ngẫu lực tác dụng lên các ổ bi đỡ trục gyrôscôp. Momen này có xu hướng bắt trục quay riêng phải tiến tới song song với trục tiến động theo đường ngắn nhất sao cho các vectơ $\vec{\omega}$ và $\vec{\Omega}$ trùng hướng nhau.*

c) Ví dụ : Xét con tàu chạy bằng tuabin có rôto quay với vận tốc góc $\vec{\omega}$ (Hình 5.10). Giả sử người lái tàu rẽ con tàu sang một bên thì khi đó sẽ xuất hiện một ngẫu lực $\vec{F}_A$ và $\vec{F}_B$ có hướng như hình vẽ tác dụng lên ổ bi A và B. Các lực này có thể rất lớn, đó là điều cần chú ý khi tính toán các ổ bi. Ngẫu lực gyrôscôp truyền qua ổ bi đến thân tàu và nếu tàu quá nhẹ thì đuôi tầu hoặc mũi tầu có thể bị chúi xuống. Hiệu ứng này còn thấy cả ở các máy bay nhẹ một động cơ khi lượn vòng (Hình 5.11).



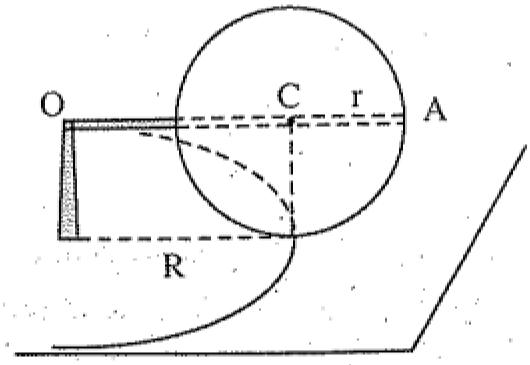
Hình 5.10



Hình 5.11

BÀI TẬP

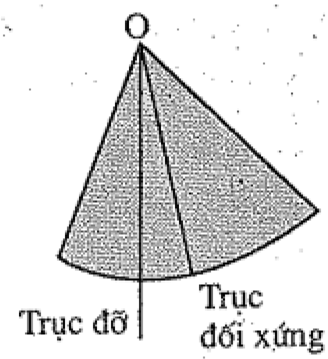
5.1. Một quả cầu đồng chất, khối lượng m, bán kính r, lăn không trượt trên một mặt phẳng nằm ngang và quay xung quanh trục nằm ngang OA (Hình 5.12). Khi đó, tâm của quả cầu chuyển động với vận tốc v theo một đường tròn bán kính R. Tìm động năng của quả cầu.



Hình 5.12

ĐS : $E_đ = \frac{mv^2}{10}\left(7 + \frac{2r^2}{R^2}\right)$.

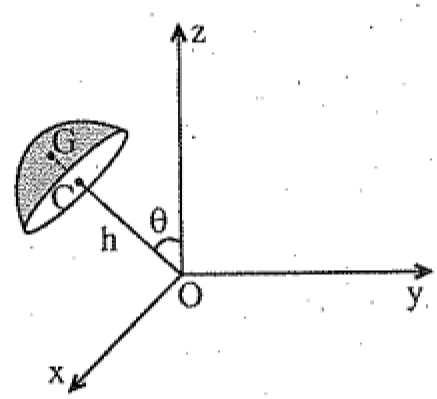
5.2. Một chiếc phễu hình nón được bịt đầu và được đỡ bởi một trục (Hình 5.13). Nếu ta quay nhanh phễu xung quanh trục đối xứng của phễu với vận tốc góc ω thì chuyển động tiến động sẽ cùng chiều hay ngược chiều quay với chuyển động quay $\vec{\omega}$?



Hình 5.13

ĐS : Ngược chiều.

5.3. Một vật rắn gồm một nửa quả cầu đồng chất, khối lượng m, bán kính R = 8 cm, gắn vào đầu của một thanh CO, dài h = 5 cm, khối lượng không đáng kể, coi là trục kể từ tâm C của toàn bộ quả cầu (Hình 5.14). Người ta cho nó quay quanh O bằng cách truyền cho nó một chuyển động quay riêng, nhanh và nghiêng một góc θ_o so với phương thẳng đứng. Tìm :



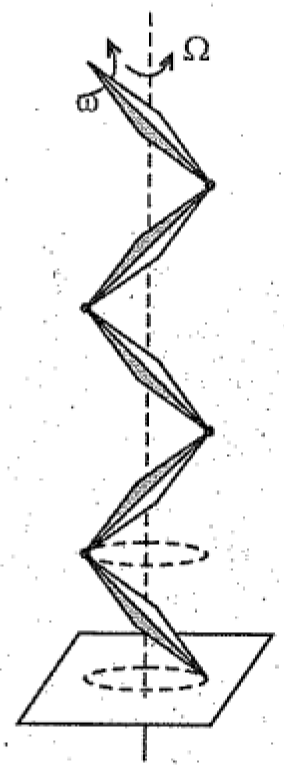
Hình 5.14

a) Biểu thức của vận tốc góc Ω của chuyển động tiến động của vật.

b) Vận tốc góc Ω, biết rằng vận tốc góc được truyền là 100 vòng/s. Suy ra chu kì của chuyển động tiến động của trục quay.

ĐS : a) $\Omega = \frac{g\left(h + \frac{3R}{8}\right)}{\frac{2}{5}R^2\omega}$; b) $T \approx 13$ s.

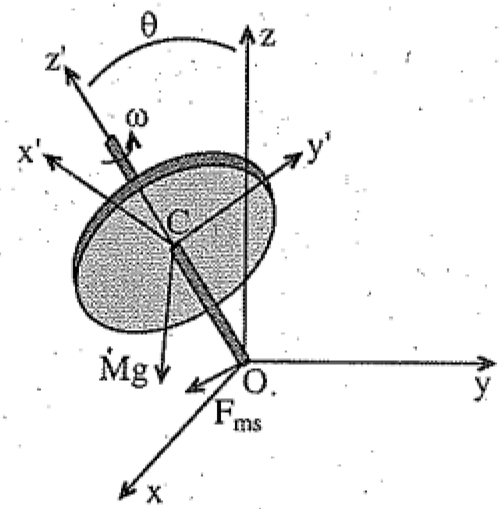
5.4. Xét một bộ gồm N con quay đối xứng, trục giống hệt nhau, con quay dưới cùng tựa lên một mặt bàn nhẵn, không ma sát. Mỗi con quay được nối với con quay ở trên nó bằng một trục quay tự do. Góc nghiêng của các con quay đều như nhau. Khối tâm của mỗi con quay nằm ở trung điểm của trục đối xứng của nó (Hình 5.15). Người ta muốn tạo ra chuyển động tiến động của các con quay, trong đó khối tâm của mỗi con quay đứng yên trong khi hai đầu con quay thì chuyển động tròn với vận tốc góc là Ω. Cho biết vận tốc góc của con quay trên cùng là ω. Hãy tìm vận tốc góc ω_i của con quay thứ i, tính từ trên xuống như là hàm số của ω.



Hình 5.15

ĐS : $\omega_i = (2i - 1)\omega$.

5.5. Một con quay đơn giản, đối xứng, gồm một đĩa, khối lượng M, bán kính r và một thanh hình trụ, không khối lượng, dài *l*, bán kính a, gắn vào tâm của đĩa tại trung điểm của thanh (Hình 5.16). Con quay quay với tốc độ lớn $\omega(t)$ và được đặt nghiêng một góc θ đối với phương thẳng đứng, trên một mặt phẳng nằm ngang có ma sát với hệ số ma sát nhỏ. Giả sử rằng tốc độ giảm $\omega(t)$ là nhỏ trong một chu kì tiến động.



Hình 5.16

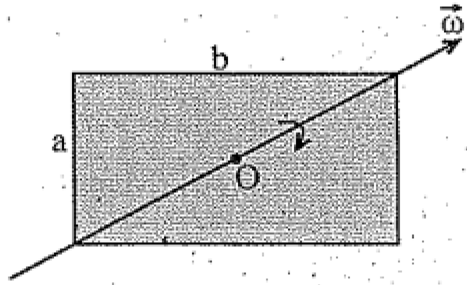
a) Hãy miêu tả toàn bộ chuyển động sau đó của con quay.

b) Tính tốc độ góc Ω của tiến động chậm.

c) Tính thời gian để trục quay riêng (trục spin) trở nên thẳng đứng.

ĐS : b) $\Omega = \dfrac{lg}{r^2\omega}$; c) $t = \dfrac{r^2\omega}{\mu g l}\theta$.

5.6. Một tấm gỗ mỏng, hình chữ nhật, tâm O, khối lượng m, các cạnh a và b (b > a) (Hình 5.17). Bỏ qua trọng lượng của tấm gỗ.



Hình 5.17

a) Cần phải dùng một momen quay có hướng và độ lớn thế nào để giữ cho tấm gỗ quay quanh một đường chéo với vận tốc góc $\vec{\omega}$ không đổi ?

b) Khi ấy vectơ momen động lượng của tấm gỗ đối với tâm O có độ lớn và hướng thế nào ?

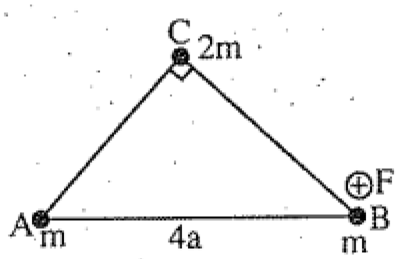
c) Động năng của tấm gỗ bằng bao nhiêu ?

d) Cũng câu hỏi trên nhưng tấm gỗ hình vuông (a = b).

ĐS : a) $M_3 = \dfrac{m(b^2 - a^2)ab\omega^2}{12(a^2 + b^2)}$; b) $L = \dfrac{1}{12}mab\omega$; c) $E_đ = \dfrac{1}{24}\dfrac{ma^2b^2}{(a^2 + b^2)}\omega^2$;

d) $E_đ = \dfrac{ma^2}{48}$.

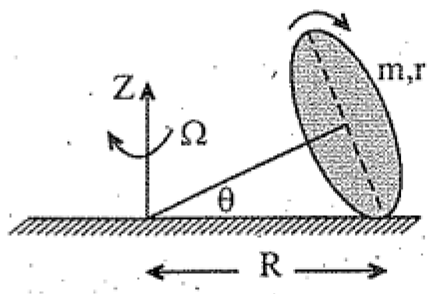
5.7. Một vật rắn được cấu tạo bởi ba khối lượng nối với nhau bằng ba thanh cứng, không khối lượng, thành hình một tam giác vuông cân với cạnh huyền bằng 4a. Khối lượng tại góc vuông là 2 m, hai khối lượng còn lại là m (Hình 5.18). Giả sử rằng vật nổi tự do trong không gian (hoặc vật được treo vào một sợi dây dài buộc vào khối lượng C). Tác dụng vào khối lượng B một xung lực $\vec{F}$ theo hướng đâm vào trong tờ giấy. Tính vận tốc của ba khối lượng ngay sau khi xung lực ngừng tác dụng theo xung lượng của lực $\vec{P} = \vec{F}.\Delta t$.



Hình 5.18

ĐS : $\vec{v}_A = \vec{0}$; $\vec{v}_C = \vec{0}$; $\vec{v}_B = \dfrac{\vec{P}}{m}$.

5.8. Một trục không khối lượng, một đầu gắn vào tâm của một bánh xe, đầu kia gắn vào một chốt quay ở mặt đất (Hình 5.19). Bánh xe là một đĩa đồng chất, bán kính r, khối lượng m, lăn không trượt trên mặt đất và điểm tiếp xúc vạch một đường tròn với vận tốc góc là Ω.



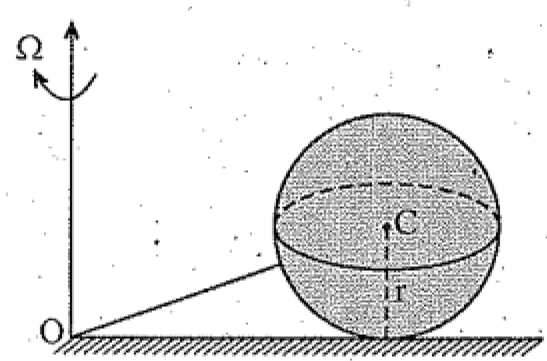
Hình 5.19

a) Chứng minh rằng vectơ $\vec{\omega}$ của bánh xe hướng sang phải (tại thời điểm chỉ trên Hình 5.19) và có độ lớn là $\omega = \dfrac{\Omega}{\tan\theta}$.

b) Chứng minh rằng lực pháp tuyến giữa mặt đất và bánh xe là :

$$N = mg\cos^2\theta + mr\Omega^2\left(\frac{3}{2}\cos^3\theta + \frac{1}{4}\cos\theta.\sin^2\theta\right).$$

5.9. Xét một vật có dạng quả cầu đặc, khối lượng m, bán kính r và một thanh cứng, không khối lượng, cắm xuyên tâm vào nó. Đầu tự do của thanh quay quanh một chốt cắm trên mặt đất (Hình 5.20). Quả cầu lăn không trượt trên mặt đất với tâm C của nó chuyển động trên một đường tròn bán kính R với vận tốc góc Ω. Hãy tìm :



Hình 5.20

a) Vận tốc góc ω của vật.

b) Lực pháp tuyến N giữa mặt đất và vật.

ĐS : a) $\omega = \dfrac{R\Omega}{r}$; b) $N = mg + \dfrac{7}{5}mr\Omega^2$.

Chủ đề 6

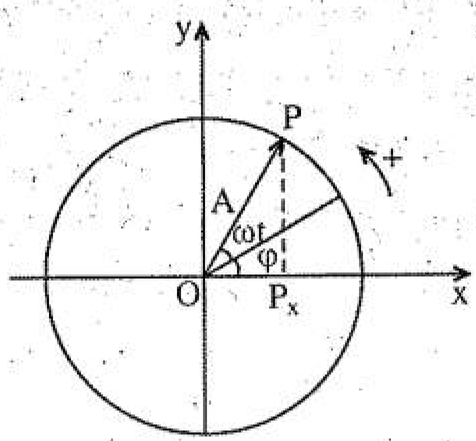
DAO ĐỘNG CƠ

A. PHƯƠNG PHÁP SỐ PHỨC

I – VECTƠ QUAY VÀ CÁC SỐ PHỨC

1. Giả sử có một điểm P chuyển động với vận tốc góc ω trên đường tròn tâm O, bán kính OP = A (Hình 6.1). Vectơ vị trí $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ là một vectơ quay, toạ độ của hình chiếu P_x và P_y của điểm P trên trục toạ độ là

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi) \\ y = A\sin(\omega t + \varphi) \end{cases} \quad (6.1)$$



Hình 6.1

Các phương trình (6.1) cho thấy các hình chiếu P_x và P_y dao động điều hoà.

Đối với mục đích nghiên cứu dao động điều hoà thì phương trình x = Acos(ωt + φ) là có ý nghĩa vật lí, vì dao động điều hoà chỉ xảy ra trên trục x. Còn phương trình y = Asin(ωt + φ) thì bỏ qua, vì chuyển động trên trục y là không có thực.

2. Gọi i và j là hai vectơ đơn vị trên trục x và y. Khi đó vectơ $\vec{r}$ được viết thành :

$$\vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} \quad (6.2)$$

Nhưng ta cũng có thể định nghĩa vectơ $\vec{r}$ bằng một cách khác như sau :

$$\vec{r} = x + jy \quad (6.3)$$

Với một quy ước ban đầu phù hợp với phương trình (6.3) như sau :

a) Sự dịch chuyển x được thực hiện theo trục x mà không kèm theo một thừa số đặc trưng nào.

b) Số hạng jy được hiểu như là một chỉ dẫn để thực hiện dịch chuyển y theo trục y.

Thực ra không cần thiết phải dùng kí hiệu vectơ đi kèm mà có thể đưa vào một số phức Z đồng nhất với $\vec{r}$ được hiểu là kết quả của việc cộng jy với x.

$$Z = x + jy \tag{6.4}$$

3. *Bây giờ ta mở rộng cách giải thích kí hiệu j bằng cách xem nó như một sự chỉ dẫn thực hiện một phép quay 90^o theo chiều dương (tức là ngược chiều kim đồng hồ) trên bất cứ cái gì mà nó đứng trước.*

Ví dụ :

a) Để thành lập một đại lượng jb, ta thực hiện dịch chuyển b dọc theo trục x, rồi quay 90^o, cuối cùng thành dịch chuyển b theo trục y.

b) Để thành lập một đại lượng j^2b với j (jb). Hai phép quay 90^o liên tiếp cùng chiều biến đổi dịch chuyển b theo trục x thành dịch chuyển –b theo trục x.

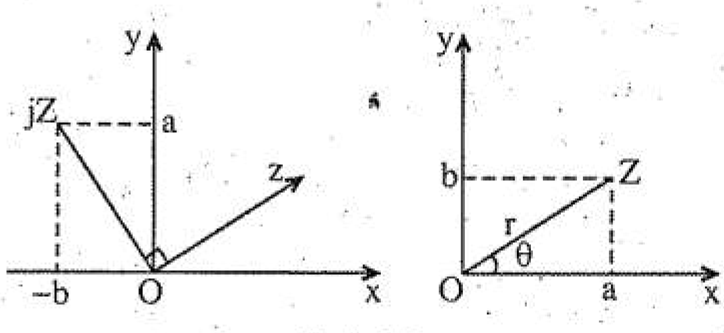
$$j^2b = -b$$

$$j^2 = -1 \tag{6.5}$$

c) Giả sử ta có vectơ Z = a + jb. Khi ấy jZ sẽ là gì ?

$$jZ = j\,(a + jb) = ja - b = -b + ja$$

Ta thấy jZ là một vectơ có được bằng cách quay vectơ Z đi một góc 90^o (Hình 6.2).



Hình 6.2

Chúng ta đang đi trên cây cầu bắc qua đường ranh giới giữa đại số và hình học. Tại ví dụ c) nếu các đại lượng a và b là các số thực, thì tổ hợp Z = a + jb là một số phức. Nhưng theo ngôn ngữ hình học thì Z được xem như một sự dịch chuyển $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ dọc theo một trục làm với trục x góc θ với $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$.

4. Trong phép biểu diễn vectơ bằng một số phức chúng ta có một cách lựa chọn ra phần thực thích hợp về phương diện vật lí cho mục đích khảo sát dao động điều hoà. Nếu sau khi giải bài toán về dao động điều hoà bằng số phức, ta được đáp số là một số phức Z = a + jb, trong đó a và b là các số thực, thì a là đại lượng mà ta mong đợi, còn b bị loại bỏ.

Đại lượng jb là số ảo. Thuật ngữ này rất phù hợp với một phần không thực của chuyển động hai chiều tức là phần $y = A\sin(\omega t + \varphi)$.

II – SỐ MŨ PHỨC

Sự phát triển của số mũ đã dẫn đến số mũ phức, tức là các hàm mũ trong đó số mũ là số ảo. Chúng ta bắt đầu bằng việc khai triển Tay-lo hàm sin và cosin :

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + ...$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - ...$$

$$\cos\theta + j\sin\theta = 1 + j\theta + \frac{(j\theta)^2}{2!} + \frac{(j\theta)^3}{3!} + ... + \frac{(j\theta)^n}{n!}$$

$$= \sum_1^n \frac{(j\theta)^n}{n!} = e^{j\theta}$$

$$\cos\theta + j\sin\theta = e^{j\theta} \qquad (6.6)$$

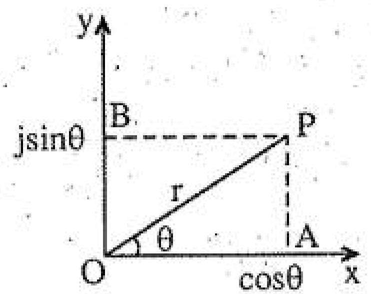
Công thức (6.6) gọi là hệ thức Ơ-le. Đây là một kết quả rất ấn tượng. Nó cho ta một mối quan hệ giữa hình học và đại số (Hình 6.3).

$OA = \cos\theta$

$OB = j\sin\theta$

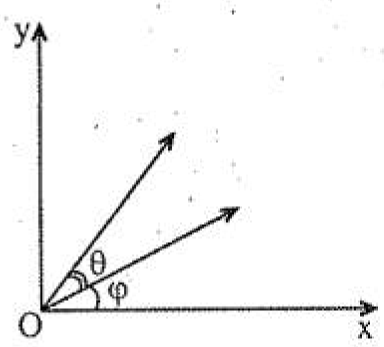
$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

$\left|\overrightarrow{OP}\right| = \left|e^{j\theta}\right| = 1$



Hình 6.3

Nói một cách tổng quát, *việc nhân một số phức Z với $e^{j\theta}$ có thể được biểu diễn về mặt hình học bằng một phép quay vectơ mà Z mô tả đi một góc θ theo chiều dương mà không làm thay đổi chiều dài vectơ* (Hình 6.4).



Hình 6.4

Thật vậy :

$$Z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) = re^{j\varphi}$$

$$Ze^{j\theta} = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)(\cos\theta + j\sin\theta) = r[\cos(\varphi + \theta) + j\sin(\varphi + \theta)]$$

$$re^{j\varphi}.e^{j\theta} = re^{j(\varphi + \theta)}$$

III – SỬ DỤNG SỐ MŨ PHỨC

Tại sao việc đưa vào hệ thức Ơ-le lại là một đóng góp quan trọng trong việc khảo sát dao động điều hoà ? Đó là vì hàm mũ có một tính chất rất đặc biệt, đó là sự tái xuất hiện của nó sau mỗi phép tính vi phân hay tích phân.

Ví dụ :

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \quad \Leftrightarrow \quad Z = x + jy = Ae^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$v = x' = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dZ}{dt} = j\omega Ae^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega Z$$

$$a = x'' = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2Z}{dt^2} = -\omega^2 Z$$

(j tương đương với phép quay theo chiều + đi 90^o).

IV – CÁC PHÉP TÍNH VỚI SỐ PHỨC

1. Các cách biểu diễn một số phức

a) $Z = x + jy$ (trong toạ độ Đê-các)

b) $Z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$ (trong toạ độ cực)

r gọi là *mođun* của số phức Z

θ gọi là *argumen* của số phức Z.

c) $Z = re^{j\theta}$.

2. Các phép tính

a) Tổng của hai số phức

$$Z = Z_1 + Z_2$$

$$Z = (x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

Phần thực bằng tổng hai phần thực.

Phần ảo bằng tổng hai phần ảo.

b) Tích của hai số phức

$$Z = Z_1.Z_2$$

$$Z = r_1e^{j\theta_1}.r_2e^{j\theta_2} = r_1r_2e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

Mođun của Z bằng tích các mođun

Arg Z = Arg Z_1 + Arg Z_2.

c) Thương của hai số phức

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

Mođun của Z bằng thương của hai mođun

Arg Z = Arg Z_1 – Arg Z_2.

d) Hai số phức (a + jb) và (c + jd) bằng nhau khi a = c và b = d.

e) Số phức liên hợp

Số phức $Z^* = x - jy$ là *số phức liên hợp* của số phức Z.

$$Z.Z^* = r^2$$

Khi có một phân số $\frac{a + jb}{c + jd}$ thì cách tốt hơn cả là nhân phân số đó với số phức liên hợp của mẫu số.

$$\frac{a + jb}{c + jd} = \frac{(a + jb)(c - jd)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + j\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

V – PHÉP BIỂU DIỄN PHỨC

1. Biểu diễn một hàm số dạng sin bằng số phức

Cho một hàm số dạng sin : $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

Ta có thể làm tương ứng hàm này với một số phức Z

$$Z = Ae^{(\omega t + \varphi)} = A[\cos(\omega t + \varphi) + j\sin((\omega t + \varphi)].$$

x tương ứng với phần thực của Z.

Z còn có thể viết thành : $Z = A.e^{j\varphi}.e^{j\omega t}$.

Trong cách viết này thì phần hay nhất là $A.e^{j\varphi}$ vì nó chứa thông tin chủ yếu, cho phép ta biết được biên độ A và góc lệch pha φ đặc trưng cho x. Người ta gọi *$A.e^{j\varphi}$ là biên độ phức*, kí hiệu là $\hat{A}$: $\hat{A} = A.e^{j\varphi}$ trong đó A là mođun của $\hat{A}$ và φ là arg của $\hat{A}$: $Z \Leftrightarrow \hat{A}$.

2. Đạo hàm

$$\dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) = A\omega\cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$\dot{x}$ là phần thực của $\frac{dZ}{dt}$.

$$\frac{dZ}{dt} = A\omega e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j\omega.t} = A\omega j e^{j\varphi}e^{j\omega.t}$$

Ta làm tương ứng nó với một biên độ phức $j\,\omega A e^{j\varphi} = j\,\omega\hat{A}$.

$$\frac{dZ}{dt} \Leftrightarrow j\,\omega\hat{A}$$

3. Tích phân

$$\int x dt = \frac{A}{\omega}\sin(\omega t + \varphi) = \frac{A}{\omega}\cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \text{ là phần thực của}$$

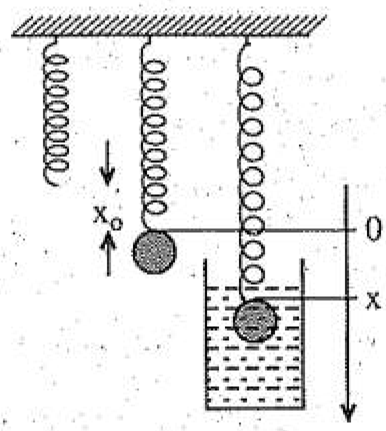
$$\int Z dt = \frac{A}{\omega}e^{j\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{A}{\omega}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j\varphi}e^{j\omega t}$$

$$= \frac{A}{\omega}(-j)e^{j\varphi} = -\frac{j\hat{A}}{\omega}$$

Phương trình vi phân $A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = D\cos\omega t$ có một nghiệm đặc biệt dạng $x = x_m\cos(\omega t + \varphi)$. Những số hạng của phương trình vi phân có thể xem là những phần thực của số phức. Điều đó cho phép viết một phương trình liên hệ các số phức này. Khi ấy có thể khử thừa số $e^{j\omega t}$ ở tất cả các số hạng và **chỉ còn lại một phương trình liên hệ các biên độ phức.**

B. GIẢI CÁC PHƯƠNG TRÌNH CỦA DAO ĐỘNG TẮT DẦN VÀ DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC BẰNG PHƯƠNG PHÁP SỐ PHỨC

I – DAO ĐỘNG TẮT DẦN (Hình 6.5)



Hình 6.5

1. $\vec{F}_c = -b\vec{v}$.

2. Định luật II Niu-tơn

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_c + \vec{F}_{lx}$$

Ox : $$m\ddot{x} = mg - b\dot{x} - k(x + x_0)$$

$$= (mg - kx_0) - m\dot{x} - kx$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (6.7)$$

Với $\lambda = \dfrac{b}{2m}$; $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ (6.8)

Đặt $x = e^{rt}$ trong đó r thuộc tập hợp số phức $(r \in \mathbb{C})$.

Ta có : $$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0 \qquad (6.9)$$

Phương trình (6.9) gọi là **phương trình đặc trưng** của phương trình vi phân (6.7).

3. Giải phương trình đặc trưng

a) Nếu $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 > 0$ hay nếu $\lambda > \omega_0$ (sự tắt dần quan trọng), thì phương trình (6.9) có hai nghiệm :

$$r_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

$$r_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (6.7) được viết thành một tổ hợp bậc nhất của hai nghiệm cơ sở $e^{r_1 t}$ và $e^{r_2 t}$ hai nghiệm này hợp thành một nghiệm cơ sở :

$$x = e^{-\lambda t}\left(A.e^{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}t} + B.e^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}t}\right) \tag{6.10}$$

Con lắc trở về vị trí cân bằng mà không dao động.

b) Nếu $\Delta' = 0$ hay $\lambda = \omega_0$. Phương trình đặc trưng có nghiệm kép $r = -\lambda$. Khi ấy ngoài một nghiệm cơ sở của phương trình (6.8) là $Ae^{-\lambda t}$, người ta thấy $Bte^{-\lambda t}$ cũng là một nghiệm của phương trình (6.7). Nghiệm tổng quát là :

$$x = (A + Bt)e^{-\lambda t} \tag{6.11}$$

Con lắc ở chế độ tới hạn. Nó trở về VTCB với thời gian ngắn nhất.

c) Nếu $\Delta' < 0$ hay $\lambda < \omega_0$ thì lực tắt dần là yếu.

$$\Delta' = -\left(\omega_0^2 - \lambda^2\right) = j^2\left(\omega_0^2 - \lambda^2\right) = j^2\omega^2$$

$$\sqrt{\Delta'} = \pm j\omega \ ; \ \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \tag{6.12}$$

Phương trình đặc trưng có hai nghiệm :

$$r_1 = -\lambda + j\omega$$

$$r_2 = -\lambda - j\omega$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (6.7) dưới dạng phức :

$Z = e^{-\lambda t}(Ae^{j\omega t} + Be^{-j\omega t})$ với A và B là những số phức không phụ thuộc t.

Hay : $Z = ae^{-\lambda t}e^{j(\omega t + \varphi)}$

Phần thực : $x = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi)$ (6.13)

Con lắc dao động điều hoà tắt dần.

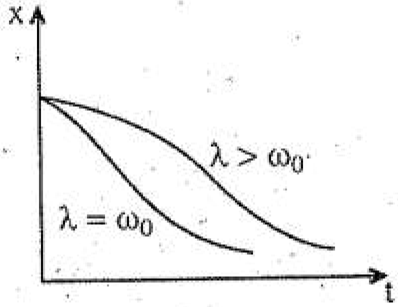
– Giả chu kì : $$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} > T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

– Lượng giảm loga : $$\delta = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t + T)}\right) = \ln e^{\lambda T} = \lambda T$$

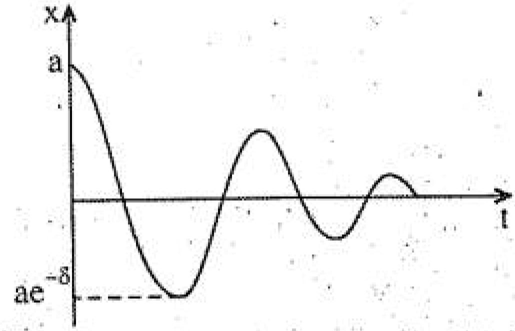
$$\delta = \lambda T \tag{6.14}$$

Biên độ giảm theo quy luật hàm mũ.

4. Các đồ thị (Hình 6.6 và Hình 6.7)



Hình 6.6



Hình 6.7

II – DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC

1. Lực cưỡng bức : $F = F_0\cos\omega t$

Lực tắt dần : $F_c = -b\vec{v}$

2. Định luật II Niu-tơn

$Ox : m\ddot{x} = mg - k(x + x_0) - b\dot{x} + F_0\cos\omega t$

$$= -kx - b\dot{x} + F_0\cos\omega t \Leftrightarrow \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \quad (6.15)$$

$$\text{Với } \lambda = \frac{b}{2m}\ ;\ \omega_0^2 = \frac{k}{m}. \quad (6.16)$$

3. Giải phương trình (6.15)

Trong chế độ cưỡng bức ổn định, nghiệm của phương trình (6.15) có dạng $x = A\cos(\omega t + \varphi)$. Có thể giải phương trình (6.15) bằng phương pháp số phức.

Lực cưỡng bức $F = F_0\cos\omega t$ có thể xem như là phần thực của một đại lượng phức $F.e^{j\omega t}$ và nghiệm $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ có thể xem là phần thực của đại lượng phức $Z = Ae^{j(\omega t+\varphi)} = Ae^{j\varphi}e^{j\omega t}$, trong đó đại lượng $\hat{A} = Ae^{j\varphi}$ gọi là **biên độ phức** của Z.

$$Z = \hat{A}e^{j\omega t}$$

$$\dot{Z} = j\omega\hat{A}e^{j\omega t}$$

$$\ddot{Z} = -\omega^2\hat{A}e^{j\omega t}$$

Phương trình (6.15) viết dưới dạng phức thành :

$$-\omega^2 \hat{A} e^{j\omega t} + 2\lambda j\omega \hat{A} e^{j\omega t} + \omega_0^2 \hat{A} e^{j\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t}$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\omega\lambda)\hat{A} = \frac{F_0}{m}$$

$$\hat{A} = \frac{\frac{F_0}{m}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j2\omega\lambda} \tag{6.17}$$

Suy ra : $$A = \left|\hat{A}\right| = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}} \tag{6.18}$$

$$\arg \hat{A} = \varphi = 0 - \arg\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + j2\omega\lambda\right]$$

$$\tan\varphi = -\frac{2\omega\lambda}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

III – SỰ CỘNG HƯỞNG

Xét điều kiện để A đạt max

Đặt : $$y = \frac{A.m}{F_0} = \left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{d\omega} = -\frac{1}{2}\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2\right]^{-\frac{3}{2}}\left[2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)(-2\omega) + 8\lambda^2\omega\right] = 0$$

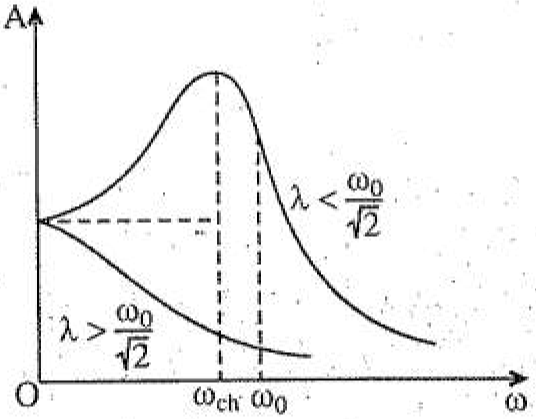
$$\Rightarrow -2\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2\right]^{-\frac{3}{2}}\left(\omega^2 - \omega_0^2 + 2\lambda^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \omega_{ch}^2 = \omega_0^2 - 2\lambda^2.$$

Khi $\omega = \omega_{ch}$ thì $y' = 0$ và A đạt max

$$A_{max} = \frac{\frac{F_0}{m}}{2\lambda\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$$

$$= \frac{F_0}{b\sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}}}. \text{ (Hình 6.8)}$$

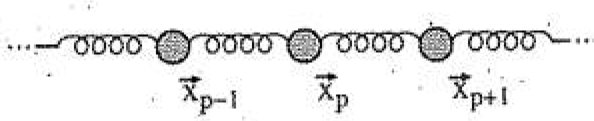


Hình 6.8

C. CÁC DAO ĐỘNG TỬ LIÊN KẾT VỚI NHAU THÀNH CHUỖI. CÁC MODE CƠ BẢN. CÁC TẦN SỐ CỦA MODE

Có một số rất lớn N các hạt chuyển động được, mỗi hạt có khối lượng m, và N + 1 lò xo giống nhau không khối lượng, có độ cứng k. Chúng được nối thành chuỗi, đầu và cuối của chuỗi được nối với hai hạt cố định (hạt N = 0 và hạt N + 1) (Hình 6.8). Chuỗi này được dùng làm mô hình để xét các mode dao động của một tinh thể một chiều. Khi ta làm cho chuỗi dao động, dao động của chuỗi có thể xem là sự chồng chập của nhiều mode, mỗi mode có một tần số đặc trưng riêng.

1. Lập phương trình dao động (Hình 6.9)



Hình 6.9

$$m\ddot{x}_p = k\left(x_{p+1} - x_p\right) - k\left(x_p - x_{p-1}\right)$$

$$\ddot{x}_p + 2\omega_0^2 x_p - \omega_0^2\left(x_{p+1} + x_{p-1}\right) = 0 \;;\; \left(\omega_0^2 = \frac{k}{m}\right) \qquad (6.19)$$

2. Tìm các mode cơ bản

Đặt $\quad x_p = A_p\cos\omega t \quad (p = 1,2,\ldots N)$

$$\ddot{x}_p = -\omega^2 x_p. \text{ Thay vào (6.19) :}$$

$$\left(-\omega^2 + 2\omega_0^2\right)A_p - \omega_0^2\left(A_{p+1} + A_{p-1}\right) = 0.$$

Với điều kiện bờ $A_0 = 0$ và $A_{n+1} = 0$.

Hay $$\frac{A_{p+1} + A_{p-1}}{A_p} = \frac{-\omega^2 + 2\omega_0^2}{\omega_0^2} \tag{6.20}$$

Vấn đề đặt ra là liệu N phương trình (6.20) có được thỏa mãn bằng cách sử dụng cùng một giá trị ω cho mỗi phương trình ?

Ta nhận thấy rằng với mỗi giá trị của ω thì tỉ số các biên độ ở vế trái của phương trình (6.20) là không đổi. Điều đó cho ta chìa khóa để giải bài toán.

Thật vậy, giả sử biên độ được viết dưới dạng : $A_p = C\sin p\theta$. (6.21)

$$A_{p-1} + A_{p+1} = C[\sin(p-1)\theta + \sin(p+1)\theta]$$

$$= 2C\sin p\theta\cos\theta = 2A_p\cos\theta$$

$$\frac{A_{p-1} + A_{p+1}}{A_p} = 2\cos\theta = \text{const} \tag{6.22}$$

Như vậy, phương trình (6.22) tương đương với phương trình (6.20) vì vế phải của nó không phụ thuộc p. Vấn đề còn lại là tìm θ.

$$A_p = 0 \text{ khi } p = 0 \text{ và } p = N + 1 \Rightarrow (N+1)\theta = n\pi$$

$$\theta = \frac{n\pi}{N+1} \qquad (n = 1,2,\ldots n) \tag{6.23}$$

$$A_p = C\sin\left(\frac{pn\pi}{N+1}\right) \tag{6.24}$$

$$\frac{A_{p+1} + A_{p-1}}{A_p} = \frac{-\omega^2 + 2\omega_0^2}{\omega_0^2} = 2\cos\left(\frac{n\pi}{N+1}\right)$$

$$\omega^2 = 2\omega_0^2\left[1 - \cos\left(\frac{n\pi}{N+1}\right)\right] = 4\omega_0^2\sin^2\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right]$$

$$\omega = 2\omega_0\sin\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right] \tag{6.25}$$

$$\omega_n = 2\omega_0\sin\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right] \tag{6.26}$$

là tần số của mode n của chuỗi N hạt. Phải thừa nhận rằng chuyển động của mỗi hạt phụ thuộc không chỉ vào số thứ tự p của hạt đó mà còn cả vào số mode n. Theo (6.24) ta viết lại là :

$$A_{pn} = C_n \sin\left(\frac{pn\pi}{N+1}\right) \tag{6.27}$$

Li độ của hạt p khi toàn thể các hạt dao động trong mode n là :

$$x_{pn} = A_{pn}\cos\omega_n t$$

$$x_{pn} = C_n \sin\left(\frac{pn\pi}{N+1}\right)\cos\omega_n t \tag{6.28}$$

3. Có bao nhiêu mode cơ bản ?

Như đã biết với hai dao động tử mắc thành cặp dao động thì chỉ có hai mode cơ bản. Bằng trực giác lành mạnh có thể suy ra rằng với N dao động tử thì chỉ có N mode cơ bản. Tuy nhiên vẫn còn một điều gì đó ẩn dấu trong các phương trình (6.25), (6.26). Có điều là khi n > N thì các phương trình trên không mô tả một tình huống vật lí mới nào.

Thật vậy, với $n = N + 1$ thì mọi biên độ $A_{pn} = 0$.

Với $n = N + 2$ thì :

$$\omega_{N+2} = 2\omega_0 \sin\left[\frac{(N+2)\pi}{2(N+1)}\right] = 2\omega_0 \sin\left[\frac{N\pi}{2(N+1)}\right]$$

$$\omega_{N+2} = \omega_N.$$

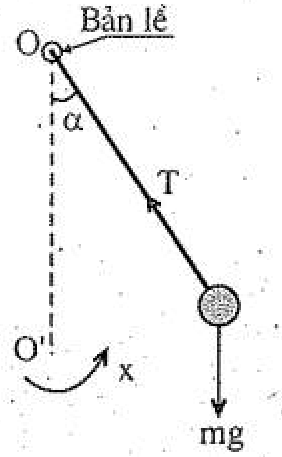
D. DAO ĐỘNG PHI ĐIỀU HOÀ CỦA CON LẮC VỚI BIÊN ĐỘ GÓC LỚN

Ta hãy xét dao động của một con lắc đơn với biên độ góc lớn. Trong trường hợp này ta sẽ coi chất điểm m không gắn với đầu dây mà gắn với đầu một thanh cứng, mảnh, không trọng lượng, dài *l*, đầu kia của thanh gắn với giá đỡ cố định bằng một bản lề (Hình 6.10).

Áp dụng phương trình $\Sigma\overrightarrow{M_0} = I_0\vec{\gamma}$, ta viết :

$$-mgl\sin\alpha = ml^2\ddot{\alpha}$$

Đặt $\omega_0^2 = \dfrac{g}{l}$, ta được :



Hình 6.10

$$\ddot{\alpha} = -\omega_0^2 \sin\alpha \qquad (6.29)$$

Phương trình (6.29) là phương trình phi tuyến, không có nghiệm giải tích đơn giản. Vì thế ta sẽ giải nó một cách gần đúng.

Trước hết ta triển khai sinα thành dãy số :

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3 + ... \qquad (6.30)$$

Tiếp đến ta bỏ đi những số hạng bậc cao hơn như α^5, α^7, ... rồi đặt (6.30) vào (6.29). Ta được :

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = \frac{\omega_0^2}{6}\alpha^3 \qquad (6.31)$$

Nghiệm của phương trình (6.31) không phải là một hàm điều hoà. Theo công thức : $\sin^3\omega t = \dfrac{3}{4}\sin\omega t - \dfrac{1}{4}\sin 3\omega t$, thì số hạng phi tuyến ở vế phải của phương trình (6.31) biến đổi theo thời gian không chỉ với tần số cơ bản ω mà cả với tần số 3ω (hoạ ba bậc ba). Chúng ta sẽ thừa nhận rằng dao động của con lắc có phương trình :

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sin(\omega t + \varphi_0) + \varepsilon\alpha_0 \sin 3(\omega t + \varphi_0) \qquad (6.32)$$

trong đó ε là một thông số không có đơn vị.

Đặt (6.32) vào (6.31) một lần nữa ta lại phát hiện ra rằng số hạng phi tuyến không chỉ biến đổi theo thời gian với hai tần số ω và 3ω mà cả với tần số 9ω. Điều đó nói lên rằng nghiệm (6.32) là không đầy đủ (trong đó thiếu các họa ba bậc cao hơn như là 9ω và 27ω...). Tuy nhiên, nếu biên độ α_0 không quá lớn thì thông số $\varepsilon \ll 1$ và ta có thể bỏ qua các họa ba có biên độ $\varepsilon^2\alpha_0$, $\varepsilon^3\alpha_0$,...

Bây giờ ta hãy tính tần số ω. Để đơn giản ta đặt $\varphi_0 = 0$. Ta lần lượt tính từng số hạng của phương trình (6.31) với α(t) lấy từ phương trình (6.32) :

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\omega^2\alpha_0 \sin\omega t - 9\omega^2\varepsilon\alpha_0 \sin 3\omega t \ ;$$

$$\omega_0^2\alpha = \omega_0^2\alpha_0 \sin\omega t + \omega_0^2\varepsilon\alpha_0 \sin 3\omega t$$

$$\frac{1}{6}\omega_0^2\alpha^3 = \frac{3\omega_0^2}{24}\alpha_0^3\sin\omega t - \frac{\omega_0^2}{24}\alpha_0^3\sin 3\omega t + \frac{\omega_0^2}{2}\alpha_0^3\varepsilon\sin^2\omega t\sin 3\omega t.$$

Số hạng thứ ba của vế phải có chứa thừa số $\alpha_0^3\varepsilon$ nên nhỏ hơn hai số hạng đầu và do đó có thể bỏ qua. Thay vào phương trình (6.31) ta được :

$$0 = \alpha_0\left(-\omega^2 + \omega_0^2 - \frac{3}{24}\omega_0^2\alpha_0^2\right)\sin\omega t$$

$$+ \alpha_0\left(-9\omega^2\varepsilon + \omega_0^2\varepsilon + \frac{1}{24}\omega_0^2\alpha_0^2\right)\sin 3\omega t . \qquad (6.33)$$

Vì phương trình (6.33) đúng đối với mọi thời điểm nên biểu thức đứng trong dấu ngoặc phải bằng không.

Cho biểu thức trong dấu ngoặc thứ nhất bằng không ta được :

$$\omega^2 = \omega_0^2\left(1 - \frac{1}{8}\alpha_0^2\right)$$

Nếu $\frac{\alpha_0^2}{8} << 1$ thì : $\omega = \omega_0\left(1 - \frac{\alpha_0^2}{8}\right)^{\frac{1}{2}} = \omega_0\left(1 - \frac{\alpha_0^2}{16}\right)$ (6.34)

Biểu thức (6.34) chỉ ra rằng, khi tăng biên độ dao động thì tần số dao động giảm, nghĩa là tính đẳng thời của dao động không còn.

Cho biểu thức trong dấu ngoặc thứ hai bằng không và để ý rằng $\omega \approx \omega_0$ ta tìm được hệ số ε.

$$-9\omega_0^2\varepsilon + \omega_0^2\varepsilon + \frac{\omega_0^2}{24}\alpha_0^2 = 0$$

$$\varepsilon = \frac{\alpha_0^2}{192} \qquad (6.35)$$

Nếu đặt $\alpha_0 = 15^o = 0,26$ rad, thì $\varepsilon = 3,5.10^{-4}$ và sự đóng góp của số hạng thứ ba vào dao động là nhỏ. Độ chênh lệch tương đối của ω so với ω_0 được xác định bằng đại lượng :

$$\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \frac{\alpha_0^2}{16} = 4,2.10^{-3} \qquad (6.36)$$

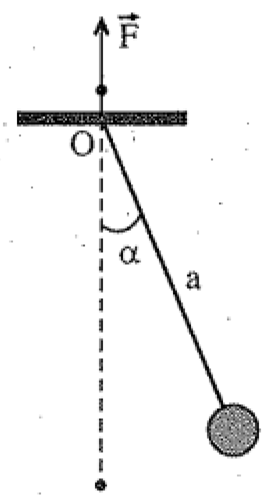
Ngay cả khi $\alpha \approx 1$ rad thì $\varepsilon \approx 5.10^{-3}$ còn $\dfrac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} \approx 6\%$.

Như vậy (6.32) là nghiệm gần đúng của phương trình (6.31) trong đó ω được xác định bởi (6.34) còn thông số ε thì được cho bởi phương trình (6.35).

E. DAO ĐỘNG CỦA MỘT HỆ CÓ THAM SỐ THAY ĐỔI

Chúng ta gặp những dao động không tắt do thay đổi một cách tuần hoàn một tham số nào đó của hệ dao động. Một trong những ví dụ nổi bật là dao động của chiếc đu. Ta biết rõ rằng có thể duy trì dao động trong một thời gian dài nếu ta ngồi xuống nhanh vào lúc chiếc đu có độ lệch cực đại và đứng lên nhanh vào lúc nó qua VTCB. Bằng cách đó ta làm cho khoảng cách a từ khối tâm của chiếc đu đến trục quay thay đổi đột ngột một lượng $\pm\Delta a$ ($\Delta a \ll a$). Đại lượng Δa phải có giá trị thích hợp để bảo đảm sự cân bằng năng lượng của hệ : sự mất năng lượng của con lắc sau một chu kì phải được bù bằng công của trọng lực thực hiện khi ngồi xuống và đứng lên.

Ta sẽ viết điều kiện cân bằng năng lượng cho trường hợp đơn giản nhất, là trường hợp một con lắc toán học có chiều dài a có thể thay đổi một lượng $\pm\Delta a$ (Hình 6.11). Ta luồn dây qua lỗ tại điểm O của giá đỡ và đặt vào đầu dây một lực $\vec{F}$ để thay đổi chiều dài dây.



Hình 6.11

Vì $\Delta a \ll a$ nên có thể xem một cách gần đúng là li độ góc α biến thiên theo thời gian theo quy luật của hàm điều hoà : $\alpha(t) = \alpha_0 \sin\omega t$, trong đó theo (6.34)

$$\omega = \omega_0\left(1 - \frac{\alpha_0^2}{16}\right), \text{ còn } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}. \qquad (6.37)$$

Tại thời điểm con lắc có góc lệch cực đại α_0, lực căng của dây bằng $T_1 = mg\cos\alpha_0$. Bởi thế khi tăng chiều dài dây một lượng Δa, ngoại lực $F_1 = T_1$ thực hiện một công âm $A_- = -mg\cos\alpha_0.\Delta a$.

Khai triển $\cos\alpha_0$ thành dãy $\cos\alpha_0 = 1 - \frac{\alpha_0^2}{2} + \frac{\alpha_0^4}{24} + ...$

và thay vào ta được :

$$A_- = -mg\left(1 - \frac{\alpha_0^2}{2} + \frac{\alpha_0^4}{24}\right)\Delta a \qquad (6.38)$$

Khi đi qua VTCB ($\alpha = 0$), $F_2 = T_2 = mg + \frac{mv_0^2}{a}$, trong đó $v_0 = \alpha_0\omega a$. Bởi thế, công dương khi rút ngắn dây bằng :

$$A_+ = (mg + m\alpha_0^2\omega^2 a)\Delta a = mg\left(1 + \alpha_0^2 - \frac{\alpha_0^4}{8}\right)\Delta a \qquad (6.39)$$

trong đó $\omega_0^2 a = g$.

Công toàn phần mà lực F thực hiện trong một chu kì sẽ là dương và bằng :

$$A = 2(A_+ + A_-) = 3mg\alpha_0^2\Delta a - \frac{mg\alpha_0^4}{3}\Delta a$$

$$= 3mg\alpha_0^2\Delta a\left(1 - \frac{\alpha_0^2}{9}\right) \qquad (6.40)$$

Năng lượng hao phí trong một chu kì bằng công của lực ma sát :

$$A_{ms} = \int_0^T F_{ms} v dt = -\int_0^T bv^2 dt \qquad (6.41)$$

trong đó $\vec{F}_{ms} = -b\vec{v}$.

Thay $v = a\dot{\alpha}(t) = a\alpha_0\omega\cos\omega t$ vào (6.41) ta được :

$$A_{ms} = -ba^2\alpha_0^2\omega^2\int_0^T \cos^2\omega t dt = -ba^2\alpha_0^2\omega^2\frac{T}{2}$$

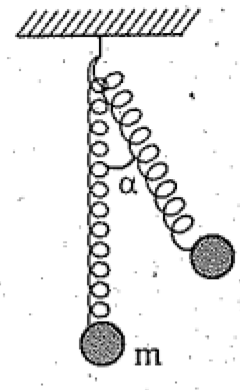
$$= -b\alpha_0^2 ga\left(1 - \frac{\alpha_0^2}{16}\right)\frac{T_0}{2} \qquad (6.42)$$

vì $\omega T = \omega_0 T_0 = 2\pi$.

Do đó, điều kiện cân bằng năng lượng là : $A + A_{ms} = 0$.

Hay : $$3mg\alpha_0^2\Delta a\left(1 - \frac{\alpha_0^2}{9}\right) = b\alpha_0^2 ga\frac{T_0}{2}\left(1 - \frac{\alpha_0^2}{16}\right) \qquad (6.43)$$

F. DAO ĐỘNG TỰ DO KHÔNG TẮT TRONG MỘT HỆ CÓ HAI BẬC TỰ DO



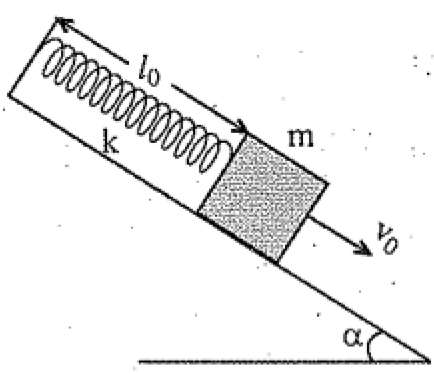
Hình 6.12

Khi quan sát dao động của một khối lượng m treo vào một lò xo nhẹ ta không thể không chú ý là, bên cạnh các dao động theo phương thẳng đứng của vật m còn xuất hiện cả kiểu dao động của con lắc đơn (Hình 6.12). Các dao động này mạnh nhất khi tần số của dao động thẳng đứng $\sqrt{\frac{k}{m}}$ bằng hai lần tần số của dao động con lắc đơn $\sqrt{\frac{g}{a}}$ (a là chiều dài của lò xo khi vật đứng yên). Dễ dàng hiểu điều này nếu khảo sát dao động con lắc như là kiểu dao động của con lắc đơn có thông số biến đổi mà ở đây là chiều dài a của lò xo thay đổi khi dao động thẳng đứng một lượng là $\pm\Delta a$. Trong một khoảng thời gian nào đó dao động con lắc có thể mạnh lên do giảm năng lượng của dao động thẳng đứng. Sau đó quá trình diễn ra theo hướng ngược lại : dao động con lắc yếu dần, trả năng lượng cho dao động thẳng đứng làm dao động này mạnh dần. Do đó, dao động thẳng đứng là không điều hòa. Trong những điều kiện xác định có thể xuất hiện cả dao động xoắn của vật xung quanh trục thẳng đứng của lò xo. Thí nghiệm chứng tỏ rằng, dao động xoắn mạnh nhất khi tần số của dao động xoắn nhỏ hơn tần số của dao động thẳng đứng khoảng 2 lần.

($\sqrt{\frac{C}{I}} \approx \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$, trong đó C là hằng số xoắn trong phương trình $M = -C\theta = I\ddot{\theta}$).

Trong trường hợp tổng quát trong hệ dao động này có thể xảy ra 4 kiểu dao động : 1 kiểu dao động thẳng đứng, 2 kiểu dao động của con lắc đơn trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau và 1 kiểu dao động xoắn.

BÀI TẬP



Hình 6.13

6.1. Một vật có khối lượng m, được nối với một đầu của một lò xo có độ cứng k. Tại thời điểm ban đầu (t = 0) lò xo không bị dãn và vật có vận tốc v_0 hướng xuống dưới (Hình 6.13). Giữa vật và mặt nghiêng có ma sát. Hệ số ma sát nghỉ và hệ số ma sát trượt lần lượt là μ_n và μ_t. Ta có thể giả thiết ma sát là nhỏ nhưng khác không.

a) Động năng của vật khi qua vị trí ban đầu lần sau giảm đi bao nhiêu ?

b) Tần số lặp lại giá trị $v = 0$ là bao nhiêu ?

c) Nó dừng lại ở đâu thì đúng hơn, ở điểm cao hơn hay thấp hơn vị trí ban đầu ? Hãy giải thích câu trả lời.

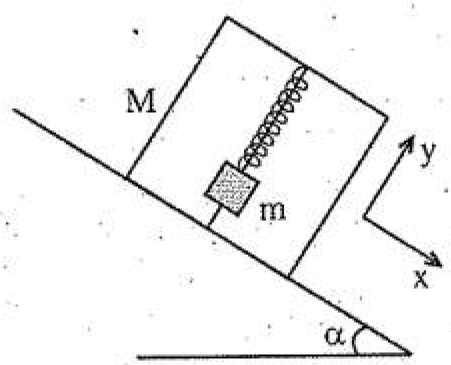
d) Hãy vẽ một cách định tính trên đồ thị vị trí của vật theo thời gian cho đến khi dừng hẳn.

ĐS : a) $\mu_t mg\cos\alpha . 2(x_{01} + A)$ với $x_{01} = \dfrac{mg}{k}(\sin\alpha - \mu_t \cos\alpha)$

$$\text{và } A = \sqrt{x_{01}^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \; ;$$

c) Dưới vị trí ban đầu.

6.2. Có một chiếc hộp, khối lượng M, lúc đầu đứng yên trên một mặt phẳng nghiêng với góc nghiêng α so với phương ngang. Bên trong hộp có một con lắc lò xo, khối lượng m đang dao động điều hòa theo phương trình $y = A\cos\omega t$, dọc theo một đường vuông góc với mặt phẳng nghiêng (Hình 6.14). Hệ số ma sát trượt $\mu = \tan\alpha$.



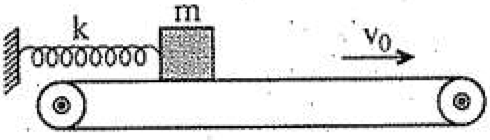
Hình 6.14

a) Tìm điều kiện để hộp không nảy lên.

b) Tìm tốc độ trung bình của hộp trong một khoảng thời gian dài. Giả sử trong thời gian ấy hộp không nảy lên.

$$ĐS: \text{a) } A \le \frac{(M + m)g\cos\alpha}{m\omega^2} \; ; \; \text{b) } \frac{m\omega A\tan\alpha}{\pi(M + m)}.$$

6.3. Để nghiên cứu hiện tượng "dính - trượt" do lực ma sát nghỉ lớn hơn lực ma sát trượt chúng ta xét thí nghiệm sau :



Hình 6.15

Người ta đặt lên một băng chuyền nằm ngang đang chuyển động đều với vận tốc v_0 một vật hình hộp chữ nhật. Vật này có khối lượng m, được mắc vào một đầu tự do của một lò xo có độ cứng k, đầu kia của lò xo được gắn chặt vào một giá đỡ đứng yên (Hình 6.15). Khi đó vật dao động không tắt theo kiểu lúc dính, lúc trượt.

a) Hãy giải thích cơ chế xuất hiện dao động theo kiểu "dính - trượt".

b) Tìm độ biến dạng cực đại và cực tiểu của lò xo trong quá trình vật chuyển động.

c) Xác định chu kì của chuyển động "dính - trượt".

d) Tìm phương trình chuyển động x(t) của vật và vẽ đồ thị (dùng độ biến dạng của lò xo làm toạ độ x của vật).

Áp dụng bằng số : $m = 100$ g ; $k = 10$ N/m ; $v_0 = 5,0$ cm/s ; $\mu_n = 0,30$; $\mu_t = 0,25$.

ĐS : b) 3,2 cm, 1,8 cm ; c) $T \approx 0,67$ s.

6.4. Một vật khối lượng m, được treo vào một lò xo có độ cứng k và chịu một lực ma sát nhớt $\vec{f} = -b\vec{v}$.

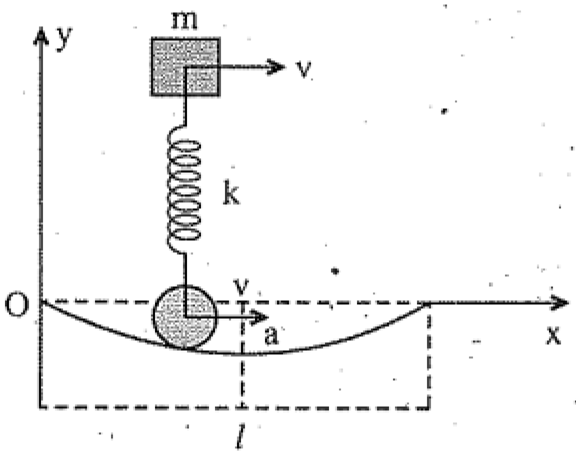
a) Hỏi b có giá trị lớn nhất là bao nhiêu để tần số f của dao động tắt dần sai khác tần số riêng f_0 của dao động điều hòa không quá 1% ?

b) Giá trị của b ứng với dao động tới hạn là bao nhiêu ?

c) Áp dụng bằng số : m = 100 g, k = 100 N/m. Tính b trong hai trường hợp trên.

ĐS : c) $b = 0,89\ \dfrac{Ns}{m}$, $b_{th} = 6,32\ \dfrac{Ns}{m}$.

6.5. Một ô tô, không có bộ phận giảm xóc, có thể sơ đồ hóa bằng một khối lượng m gắn vào đầu của một lò xo có độ cứng k, đầu dưới của lò xo gắn vào trục của một bánh xe có khối lượng không đáng kể (Hình 6.16). Ô tô đang chạy trên đường nằm ngang với vận tốc v thì gặp một ổ gà mà mặt cắt được biểu diễn bằng đường cong có dạng



Hình 6.16

$$y = -\frac{a}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi x}{l}\right).$$

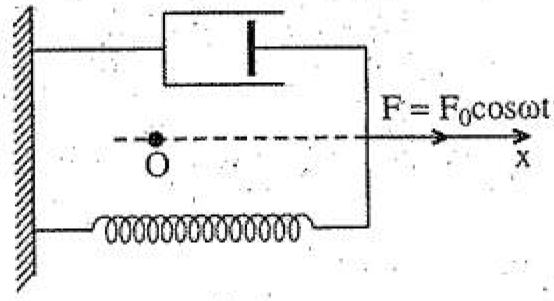
a) Thừa nhận rằng thời gian ô tô đi qua ổ gà rất nhỏ so với chu kì dao động riêng theo phương thẳng đứng của xe. Hãy tính vận tốc theo phương thẳng đứng của xe sau khi đi qua ổ gà.

b) Suy ra biên độ dao động theo phương thẳng đứng xuất hiện sau khi đi qua ổ gà.

Áp dụng bằng số : $m = 1{,}0.10^3$ kg ; $k = 50.10^3$ N/m ; $v = 90$ km/s ; $l = 0{,}50$ m ; $a = 0{,}10$ m.

ĐS : a) 0,050 m/s (hướng xuống) ; b) 7 mm.

6.6. Hình 6.17 là một hệ dao động. Gọi x là li độ của chất điểm m = 10 g. Lò xo có độ cứng k = 100 N/m. Bộ phận tắt dần tạo ra một lực cản tỉ lệ với vận tốc $\vec{f} = -b\vec{v}$. Hệ số tắt dần b có thể điều chỉnh được và đối với sự tắt dần tới hạn thì giá trị của nó là b_{th}.



Hình 6.17

a) *a.1)* Viết phương trình vi phân của chuyển động của m.

a.2) Dùng phương pháp giản đồ Frê-nen hoặc phương pháp số phức để tìm nghiệm của phương trình trên.

b) Đặt $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$; $a = \dfrac{\omega}{\omega_0}$; $\alpha = \dfrac{b}{b_{th}}$.

b.1) Hãy biểu thị biên độ A của hệ theo a và α.

Gọi A_0 là giá trị của A đối với $\omega = 0$. Hãy tìm hàm số $y = \dfrac{A}{A_0}$.

b.2) α có giá trị α_1 bằng bao nhiêu thì xảy ra giá trị cực đại của A đối với $\omega = 0$? Hãy suy ra giá trị của hệ số tắt dần tương ứng.

b.3) Vẽ những đường cong biểu diễn các biên độ A phụ thuộc vào ω khi b = 0 ; $\dfrac{1}{4}$; $\sqrt{2}$ và 2.

ĐS : b.1) $\dfrac{A}{A_0} = \dfrac{1}{\sqrt{4a^2\alpha^2 + (1 - a^2)^2}}$; *b.2)* $\alpha_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ và $b = \sqrt{2}$.

6.7. Người ta dùng một con lắc lò xo để đo khối lượng của một vật trên trạm vũ trụ ở một nơi không có trọng trường. Cách đo như sau :

Trước tiên nhà du hành vũ trụ đo tần số dao động của con lắc lò xo với khối lượng m_0 đã biết. Sau đó đặt thêm khối lượng m của vật vào con lắc và đo tần số mới.

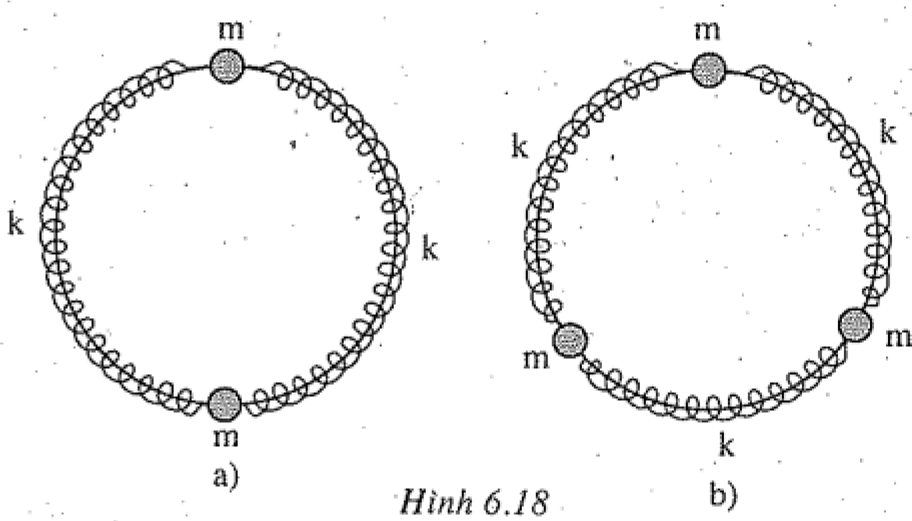
a) Xác định khối lượng m từ hai giá trị tần số đo được như thế nào ?

b) Nếu ta thực hiện phép đo khối lượng trên mặt đất thì ta không thể bỏ qua lực ma sát tỉ lệ với vận tốc ($\vec{f} = -b\vec{v}$). Nếu khối lượng đã cho có li độ ban đầu x_0 và được thả ra không vận tốc đầu, hãy xác định các chuyển động có thể có của khối lượng.

c) Trong điều kiện nào chúng ta có thể sử dụng cùng một phương pháp để xác định khối lượng chưa biết ?

ĐS : a) $m = m_0\left(\dfrac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 1\right)$; b) Điều kiện : $b < 2\sqrt{mk}$.

6.8. a) Hai vật có khối lượng m giống nhau bị buộc phải chuyển động trên một vòng tròn. Hai lò xo giống nhau, độ cứng k, quấn vòng quanh vòng tròn và nối với hai khối lượng (Hình 6.18a). Tìm tần số của các mode dao động và phương trình chuyển động của các vật trong mỗi mode.



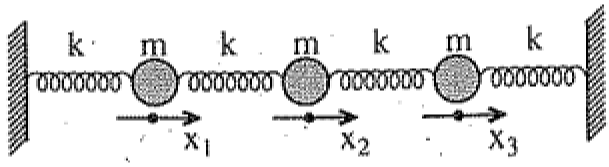
Hình 6.18

b) Ba vật có khối lượng m giống nhau bị buộc phải chuyển động trên một vòng tròn. Ba lò xo giống nhau, độ cứng k, quấn vòng quanh vòng tròn và nối với ba khối lượng (Hình 6.18b). Tìm tần số của các mode dao động và phương trình chuyển động của các vật trong mỗi mode.

ĐS : a) mode 1 : $\omega = 0$, mode 2 : $\omega = 2\omega_0$ $\left(\text{với } \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}\right)$;

b) mode 1 : $\omega = 0$, mode 2 : $\omega = \omega_0\sqrt{3}$.

6.9. Xét một chuỗi gồm ba dao động tử giống nhau được tạo nên bởi 3 vật có khối lượng m và 4 lò xo có độ cứng k (Hình 6.19). Hãy xác định tần số của các mode dao động của hệ và phương trình chuyển động của các vật trong mỗi mode.



Hình 6.19

ĐS : $\omega_1 = 0{,}77\omega_0$; $\omega_2 = \omega_0\sqrt{2}$; $\omega_3 = 1{,}85\omega_0$.

6.10. Quả chuông của nhà thờ có khối lượng m, được treo bằng một sợi dây dài l, có thể xem như một con lắc.

Mỗi khi con lắc đi qua VTCB thì người coi chuông kéo dây làm dây ngắn đi một đoạn là a. Khi con lắc đi tới điểm cao nhất thì người ấy lại thả dây để nó lấy lại chiều dài ban đầu l.

a) Gọi v_m là vận tốc của con lắc khi tới VTCB. Trong một nửa chu kì sau đó nó vạch một chu trình sau đây :

a.1) Rút ngắn dây một cách tức thời từ l đến $l - a$.

a.2) Đi lên theo quỹ đạo tròn với bán kính $l - a$.

a.3) Trở lại chiều dài l một cách tức thời và với độ nghiêng của dây không đổi.

a.4) Đi xuống theo quỹ đạo tròn, bán kính l.

Hãy tính giá trị gần đúng của phần tăng năng lượng của con lắc gây ra bởi người kéo chuông.

b) Trong không khí con lắc chịu lực ma sát tỉ lệ với bình phương của vận tốc ($f = kv^2$). Hãy tính gần đúng phần năng lượng của con lắc bị mất trong một nửa chu kì.

c) Sau một số lần kéo thì con lắc đạt được chế độ tuần hoàn giới hạn. Hãy tính li độ góc giới hạn θ_{gh}.

d) Xét một ví dụ : Quả chuông có khối lượng m = 53,0 kg, dây treo dài l = 20,6 m. Khi kéo dây ngắn đi a = 3 m. Hệ số ma sát k = 0,35. Lấy g = 9,81 m/s^2.

d.1) Tính θ_{gh}.

d.2) Quả chuông lúc đầu được đẩy với $v_1 = 3{,}22$ m/s (hay với $E_1 = 274$ J). Hãy xác định giá trị của các đại lượng sau đây :

– Vận tốc của quả chuông khi qua đường thẳng đứng.

– Năng lượng của con lắc.

– Li độ góc cực đại.

– Công của người kéo chuông trong một chu kì.

– Công của lực ma sát trong một chu kì.

Biện luận kết quả.

ĐS : a) $\dfrac{\Delta E}{E} = \dfrac{3a}{l}$; b) $A_{ms} = 4kgl^2(\sin\theta_m - \theta_m\cos\theta_m)$;

d) $\theta_{gh} = 82^\circ$ (ứng với nửa chu kì thứ 38), A = 4045 J, $A_{ms} = 4043$ J.

6.11. Một con lắc đàn hồi A (khối lượng m = 0,1 kg, độ cứng $k = m\omega_0^2 = 20$ N/m) dao động dọc theo một thanh làm với đường thẳng đứng hướng xuống một góc θ_0 không đổi (Hình 6.20).

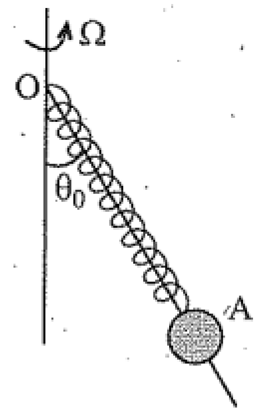
a) *a.1)* Lập phương trình vi phân của chuyển động của A dọc theo thanh đứng yên. Tìm VTCB của dao động của A và tính chu kì dao động.

a.2) Người ta thừa nhận rằng các dao động tắt dần theo quy luật của hàm mũ. Hỏi loại lực nào đã gây ra sự tắt dần này ?

b) Người ta cho thanh quay đều xung quanh đường thẳng đứng với tốc độ góc Ω.

b.1) Hãy biểu thị trong HQC quay động năng, thế năng trọng trường, thế năng đàn hồi và thế năng li tâm của con lắc.

b.2) Trong trường hợp không có ma sát, lập phương trình vi phân của chuyển động của A. Suy ra VTCB và chu kì dao động của A. Biết rằng $\Omega\sin\theta_0 = 0{,}9\omega_0$.

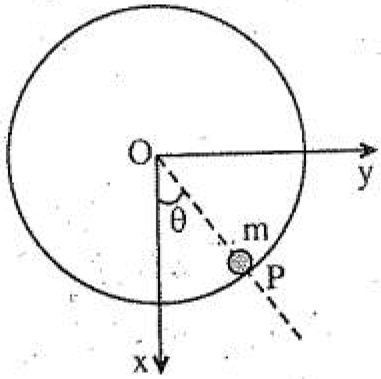


Hình 6.20

ĐS : a.1) T = 0,44 s ; *a.2)* Lực ma sát nhớt.

b.2) VTCB $r_0 = \dfrac{\omega_0^2 l_0 + g\cos\theta_0}{\omega_0^2 - \Omega^2\sin^2\theta_0}$; T ≈ 1 s.

6.12. Một hạt P, khối lượng m, dịch chuyển trên rãnh trong của một vòng cố định, tâm O, bán kính R, có trục nằm ngang OZ và chịu một lực ma sát nhớt $\vec{f} = -b\vec{v}$. Vị trí của hạt được xác định bằng toạ độ góc $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP})$ (Hình 6.21). Giả sử θ nhỏ trong suốt bài toán. Tại t = 0, hạt được thả không vận tốc đầu từ vị trí $\theta = \theta_0$.



Hình 6.21

a) Viết phương trình vi phân của θ(t).

b) *b.1)* Tìm giá trị tới hạn R_{th} của bán kính R để hạt tới được VTCB (θ = 0) một cách nhanh nhất có thể. Hãy xác định phương trình của θ(t).

b.2) Trong điều kiện trên đây, tính tốc độ cực đại của hạt và phản lực tương ứng của vòng.

c) Hãy xác định phương trình của θ(t) đối với $R < R_{th}$ và biểu thị độ giảm loga theo m, b, R và g.

ĐS : a) $\ddot{\theta} + \dfrac{b}{m}\dot{\theta} + \dfrac{g}{R}\theta = 0$;

b.2) $v_{max} = \dfrac{mg\theta_0}{1,36b}$; $N = mg\left[\cos\left(\dfrac{2\theta_0}{e}\right) + \left(\dfrac{\theta_0}{e}\right)^2\right]$;.

c) $\delta = \dfrac{\pi b}{\sqrt{\dfrac{g}{R} - \dfrac{b^2}{4m^2}}}$.

Chủ đề 7

KHÔNG GIAN PHA. QUỸ ĐẠO PHA CÁC BẤT BIẾN ĐOẠN NHIỆT

I – KHÔNG GIAN PHA. QUỸ ĐẠO PHA

1. Ta hãy xét một cơ hệ có một bậc tự do, tức là hệ mà vị trí của mỗi chất điểm của nó được xác định chỉ bằng một toạ độ duy nhất. Ví dụ như đối với một con lắc lò xo thì vị trí của chất điểm m được xác định bằng li độ x, còn đối với một con lắc đơn thì vị trí của chất điểm m được xác định bằng li độ góc α.

Tại mỗi thời điểm, trạng thái cơ học của những hệ như trên được xác định bằng hai đại lượng, đó là toạ độ và động lượng (hay vận tốc). Để miêu tả chuyển động của những hệ này người ta thường dùng đồ thị x(t) biểu diễn sự phụ thuộc của toạ độ vào thời gian và đồ thị v(t) của vận tốc vào thời gian.

Tuy nhiên ta còn có cách khác để miêu tả chuyển động của hệ, đó là dùng đồ thị p(x) (hay v(x)). Nói một cách khác, người ta dùng cái gọi là *không gian pha* là không gian tưởng tượng hai chiều có trục hoành là trục toạ độ và trục tung là trục động lượng (hoặc vận tốc) của tất cả các chất điểm của hệ. Các điểm của không gian pha được gọi là các *điểm tạo ảnh*. Mỗi điểm tạo ảnh xác định một trạng thái của hệ.

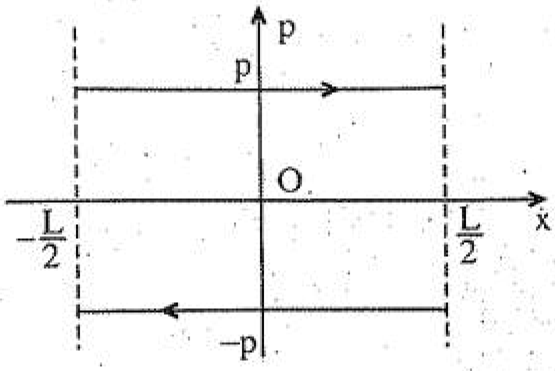
2. Khi hệ chuyển động, điểm tạo ảnh tương ứng đi theo một quỹ đạo trong không gian pha, mà ta gọi là *quỹ đạo pha*. Người ta vẽ một mũi tên trên quỹ đạo pha để chỉ chiều chuyển động của hệ. Một bộ gồm tất cả các quỹ đạo pha khả dĩ của một hệ cơ học được gọi là *chân dung pha* của hệ. Sự phân tích chân dung pha cho phép người ta khảo sát các tính chất định tính quan trọng của chuyển động của hệ, mà không cần giải các phương trình chuyển động của hệ dưới dạng tường minh. Phương pháp dùng không gian pha rất hiệu quả trong việc nghiên cứu các chuyển động phức tạp, khi không thể tìm được nghiệm giải tích của các phương trình động lực học.

3. Một số bài tập ví dụ

Ví dụ 1. Hãy vẽ quỹ đạo pha của một chất điểm tự do, chuyển động giữa hai bức tường song song, phản xạ tuyệt đối, đặt ở $x = -\frac{L}{2}$ và $x = \frac{L}{2}$.

Giải

Đặt trục Ox hướng vuông góc với hai bức tường. Vì chất điểm tự do và các va chạm là tuyệt đối đàn hồi, nên độ lớn của động lượng được bảo toàn, còn hướng thì ngược lại ở mỗi lần va chạm. Do đó quỹ đạo pha có dạng như sau (Hình 7.1).



Hình 7.1

Ví dụ 2. Hãy khảo sát quỹ đạo pha của dao động tử điều hoà, tức là của chất điểm có khối lượng m chịu tác dụng của lực $F = -kx$.

a) Tìm phương trình của quỹ đạo pha và các thông số của nó.

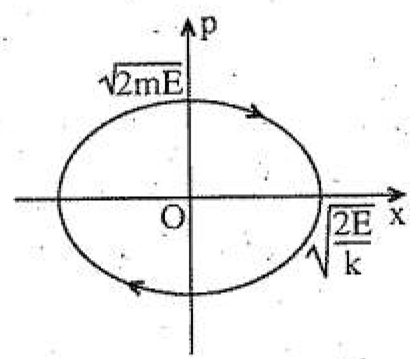
b) Vẽ quỹ đạo pha của dao động tử điều hoà.

Giải

a) Định luật bảo toàn cơ năng áp dụng cho một dao động tử điều hoà được viết như sau : $\frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} = E$ hay $\frac{p^2}{2mE} + \frac{x^2}{\frac{2E}{k}} = 1$.

Đây là phương trình của quỹ đạo elip trong hệ trục toạ độ (x, p). Tâm của elip tại ($x = 0$; $p = 0$) và các bán trục lần lượt là $\sqrt{\frac{2E}{k}}$ và $\sqrt{2Em}$.

b) Quỹ đạo pha có dạng như Hình 7.2. Chuyển động với những giá trị dương của động lượng thì hướng theo các giá trị tăng dần của toạ độ x. Như vậy quỹ đạo pha hướng cùng chiều kim đồng hồ.



Hình 7.2

Ví dụ 3. Vẽ quỹ đạo pha của một con lắc đơn dao động nhỏ chịu lực cản của không khí $\vec{F}_c = -b\vec{v}$.

Giải

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\frac{S}{l} - bv$$

$$\ddot{S} = -\frac{g}{l}S - \frac{b}{m}\dot{S}$$

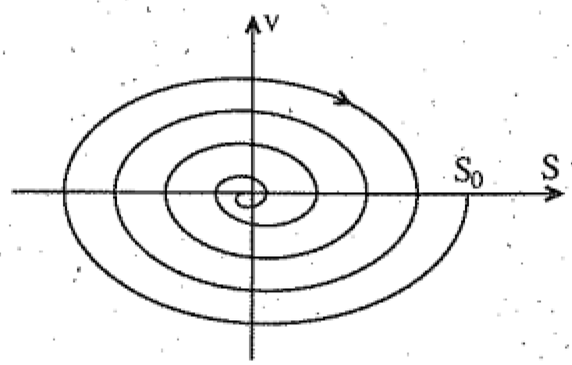
Đặt $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$; $\frac{b}{m} = 2\lambda$, ta được : $\ddot{S} + 2\lambda\dot{S} + \omega_0^2 S = 0$ (1)

Đối với không khí thì b có giá trị nhỏ, lực ma sát nhớt là lực tắt dần yếu. Trong trường hợp này thì nghiệm của phương trình (1) là :

$$S(t) = S_0 e^{-\lambda t}\cos\omega t \text{ với } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

$$v(t) = -\omega_0 S_0 e^{-\lambda t}\sin\omega t.$$

Trong không gian pha, quỹ đạo pha là một đường xoắn ốc và kết thúc ở S = 0 (Hình 7.3).



Hình 7.3

II – CÁC BẤT BIẾN ĐOẠN NHIỆT

1. Sự thay đổi các tham số của một hệ vật lí luôn luôn kèm theo sự thay đổi một số tính chất chuyển động của nó. Ví dụ như sự thay đổi chiều dài của con lắc đơn sẽ dẫn đến thay đổi chu kì dao động của nó. Trường hợp sự thay đổi tham số của hệ xảy ra ngay trong thời gian nó chuyển động là trường hợp rất đáng được các nhà vật lí quan tâm.

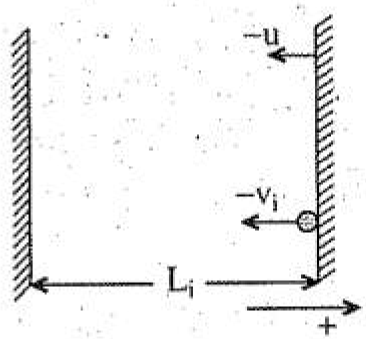
Trong một hệ vật lí tồn tại những đại lượng không thay đổi hoặc gần như không thay đổi khi các tham số của nó *thay đổi rất chậm*, hay như người ta thường nói là thay đổi *một cách đoạn nhiệt*. Những đại lượng được bảo toàn với mức độ chính xác lớn khi thay đổi chậm các tham số của hệ được gọi là *các bất biến đoạn nhiệt* (thuật ngữ "đoạn nhiệt" ở đây có ý nghĩa khác với thuật ngữ "đoạn nhiệt" dùng trong Nhiệt học).

Điều kiện về tính đoạn nhiệt của sự thay đổi các tham số của hệ có thể viết dưới dạng $\frac{T_1}{T_2} << 1$, trong đó T_1 là chu kì đặc trưng đối với hệ, còn T_2 là thời gian đặc trưng của sự biến đổi các tham số của hệ.

Nhưng tìm các bất biến đoạn nhiệt như thế nào và bằng cách nào xác định được chúng bảo toàn chính xác đến mức nào ? Giải quyết những vấn đề này là một trong những lĩnh vực đẹp nhất của Vật lí mà cho đến nay còn chưa hoàn thiện. Nhiều kết quả quan trọng trong Vật lí cổ điển và Vật lí lượng tử gắn liền với các bất biến đoạn nhiệt, đến mức mà hiện nay không thể hình dung nổi một lĩnh vực vật lí nào đó lại không có khái niệm này.

2. Ví dụ

Ta hãy trở lại bài tập ví dụ 1 ở phần trên. Giả sử rằng bây giờ bức tường bên phải chuyển động chậm sang trái với tốc độ u nhỏ hơn tốc độ v của chất điểm. Nói cách khác tham số khoảng cách của hệ biến đổi đoạn nhiệt. Sau mỗi lần va chạm với bức tường này, vận tốc của chất điểm không chỉ có hướng ngược lại mà cả độ lớn cũng thay đổi. Nếu trước va chạm chất điểm có vận tốc v thì sau va chạm chất điểm có vận tốc là $-(v + 2u)$, nghĩa là được tăng tốc về phía ngược lại thêm một lượng là 2u.



Hình 7.4

Gọi v_i và L_i lần lượt là tốc độ của chất điểm và khoảng cách giữa hai bức tường ngay sau lần va chạm thứ i (Hình 7.4).

Gọi Δt_i là khoảng thời gian giữa hai lần va chạm liên tiếp thứ i và thứ i + 1. Ta có :

$$v_{i+1} = v_i + 2u \qquad (7.1)$$

$$L_{i+1} = L_i - u\Delta t_i \qquad (7.2)$$

Vì khoảng cách giữa 2 bức tường trong thời gian Δt_i giảm không đáng kể nên ta có thể viết :

$$\Delta t_i = \frac{2L_i}{v_i} \qquad (7.3)$$

Thay (7.3) vào (7.2) ta được : $L_{i+1} = L_i - u\dfrac{2L_i}{v_i} = L_i\left(1 - \dfrac{2u}{v_i}\right)$

hay $$\frac{L_{i+1} - L_i}{L_i} = -\frac{2u}{v_i} \qquad (7.4)$$

Từ (7.1) suy ra : $$\frac{v_{i+1} - v_i}{v_i} = \frac{2u}{v_i} \qquad (7.5)$$

So sánh (7.4) với (7.5) ta suy ra $\dfrac{\Delta L_i}{L_i} = -\dfrac{\Delta v_i}{v_i}$ hay $v_i\Delta L_i + L_i\Delta v_i = 0 \Rightarrow$ $\Delta(L_i v_i) = 0$.

Như vậy $L_i v_i = \text{const}$ là một bất biến đoạn nhiệt của hệ này.

III – BÀI TẬP

7.1. Xét chất điểm có khối lượng m gắn ở đầu một thanh cứng không có khối lượng, có chiều dài L, đầu kia của thanh gắn với một giá đỡ cố định nhờ một bản lề. Để cho thuận tiện, ta dùng góc α giữa thanh và phương thẳng đứng làm toạ độ của hệ. Mặt phẳng pha chính là mặt phẳng với các toạ độ $\left(\alpha, \dfrac{d\alpha}{dt}\right)$.

Hãy nghiên cứu và vẽ chân dung pha của con lắc này với góc α bất kì. Hệ này có thể có bao nhiêu loại quỹ đạo pha khác nhau về tính chất ? (gọi số các loại quỹ đạo này là K)

Hãy vẽ ít nhất một quỹ đạo pha điển hình cho mỗi loại. Các loại quỹ đạo pha khác nhau này được xác định từ một số điều kiện, hãy tìm các điều kiện đó (Không lấy các điểm cân bằng làm quỹ đạo pha). Bỏ qua lực cản của không khí.

ĐS : Có ba loại quỹ đạo pha ứng với ba điều kiện ($E < 2mgL$; $E = 2mgL$; $E > 2mgL$).

7.2. Xét chuyển động của một vật nằm trên một mặt phẳng nằm ngang, gắn ở đầu một lò xo, đầu kia của lò xo được giữ cố định. Khối lượng của vật là m, hệ số đàn hồi của lò xo là k, hệ số ma sát giữa vật và bề mặt là μ. Giả sử vật chuyển động dọc theo một đường thẳng với toạ độ x ($x = 0$ ứng với lò xo không bị kéo dãn). Giả thiết thêm rằng hệ số ma sát nghỉ và hệ số ma sát trượt là như nhau. Lúc đầu vật có vị trí $x = A_0$ ($A_0 > 0$) và có vận tốc bằng không.

a) Viết phương trình chuyển động của một dao động tử điều hòa bị hãm bởi lực ma sát trượt.

b) Vẽ quỹ đạo pha của dao động tử này và tìm các điểm cân bằng.

c) Vật có dừng hẳn ở vị trí mà lò xo không bị kéo dãn không ? Nếu không, hãy xác định bề rộng của miền mà trong đó vật có thể dừng hẳn.

d) Hãy tìm độ giảm biên độ ΔA của dao động tử theo chiều dương của x trong một chu kì dao động. Thời gian giữa hai biên độ liên tiếp theo chiều dương là bao nhiêu ? Hãy tìm sự phụ thuộc $A(t_n)$ của độ lệch cực đại này, trong đó t_n là thời gian của lần cực đại thứ n theo chiều dương.

e) Hãy vẽ đồ thị chỉ sự phụ thuộc của toạ độ vào thời gian x(t), và ước tính số dao động N của vật.

ĐS : c) Bề rộng của miền nghỉ là $\frac{2F_{ms}}{m\omega_0^2}\left(\text{với } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$;

d) $\Delta A = \frac{4F_{ms}}{2\pi m\omega_0}$; e) $N = \frac{A_0 m\omega_0^2}{4F_{ms}}$.

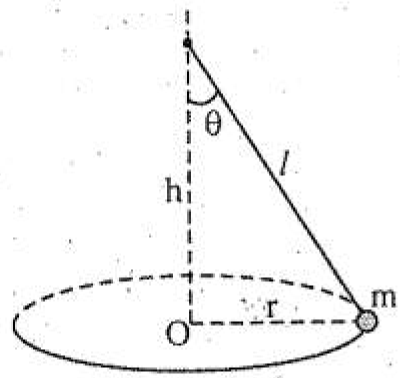
7.3. Một con lắc đơn tạo nên bởi một quả cầu, khối lượng m, được treo vào một chốt xoay trên trần nhà bằng một sợi dây dài *l*. Con lắc dao động tự do trong mặt phẳng thẳng đứng. Hỏi biên độ góc của con lắc khi dao động nhỏ thay đổi thế nào nếu dây bị rút ngắn lại một cách từ từ xuống còn một nửa ?

ĐS : $\theta_0 l^{\frac{3}{4}} = \text{const} \Rightarrow \theta_0$ tăng lên đến $1,68\theta_0$.

7.4. Một chất điểm, khối lượng m, được treo vào một dây không khối lượng và đu đưa trên một đường tròn nằm ngang. Chiều dài của dây tăng hoặc giảm rất chậm. Gọi θ, *l*, r, h như được ghi trên (Hình 7.5).

a) Giả sử θ rất nhỏ. Hỏi r phụ thuộc vào *l* như thế nào ?

b) Giả sử θ rất gần 90°. Hỏi h phụ thuộc vào *l* như thế nào ?

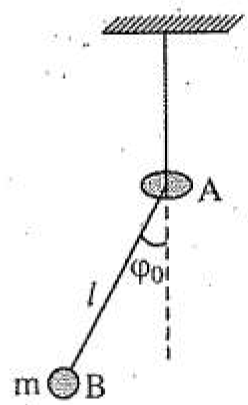


Hình 7.5

ĐS : a) $r \sim l^{\frac{1}{4}}$; b) $h \sim l^4$.

7.5. Một vật B, khối lượng m, được treo vào đầu một sợi dây dài *l*, sợi dây này luồn qua một vòng nhỏ A rồi buộc vào trần nhà (Hình 7.6). Hãy :

a) Xác định lực trung bình mà dây tác dụng lên vòng A khi con lắc thực hiện các dao động nhỏ với biên độ góc là φ_0.

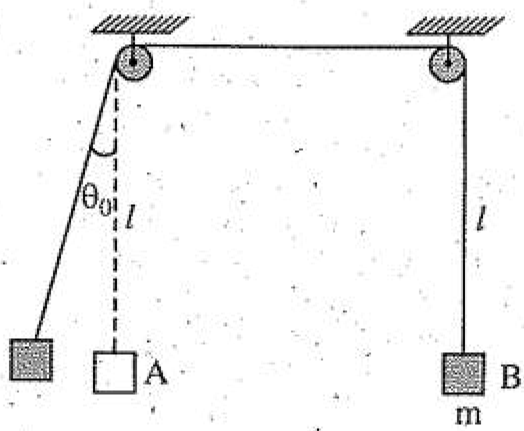


Hình 7.6

b) Tìm sự biến thiên về năng lượng của con lắc khi vòng được dịch chuyển chậm theo phương thẳng đứng.

ĐS : a) $\frac{1}{4}mg\varphi_0^2$; b) $El^2 = \text{const}$.

7.6. Hai vật A và B cùng khối lượng m, được buộc vào hai đầu của một dây không khối lượng. Dây vắt qua hai ròng rọc không khối lượng và có kích thước không đáng kể. Các vật đứng yên cách ròng rọc một khoảng l. Vật A được truyền một cú hích rất nhỏ theo phương ngang để cho lúc đầu nó dao động với biên độ góc θ_0 rất nhỏ (Hình 7.7). Sau một thời gian rất dài, một trong hai vật lên cao rõ rệt và va vào ròng rọc của nó.



Hình 7.7

a) Vật nào đụng vào ròng rọc ?

b) Vận tốc của vật bằng bao nhiêu khi nó đụng vào ròng rọc ?

Gợi ý : Toạ độ cực :

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta.$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta.$$

ĐS : a) Vật B ; b) $v_B = \theta_0\sqrt{\frac{gl}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$.

Chủ đề 8

SÓNG CƠ

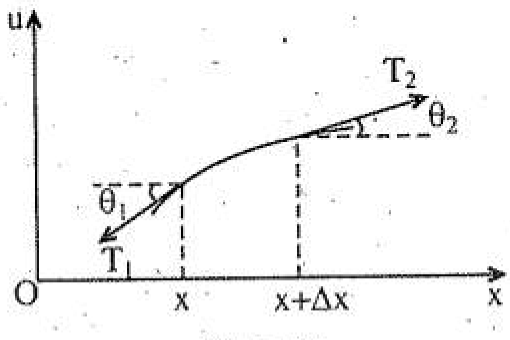
Như đã biết, *sóng cơ là biến dạng cơ lan truyền trong một môi trường*. Sự lan truyền của các biến dạng cơ gọi là chuyển động sóng. Chuyển động sóng có những đặc điểm chung, bất kể đó là sóng cơ, sóng âm hay sóng điện từ. Những đặc điểm này làm cho chuyển động sóng khác hẳn chuyển động của các hạt (xem Cơ học 2). Vì thế người ta có xu hướng muốn gọi v là tốc độ của hạt còn c là tốc độ của sóng. Các sóng khác nhau có tốc độ khác nhau. Sóng âm trong không khí có tốc độ c = 340 m/s. Sóng điện từ trong chân không có tốc độ $c = 3.10^8$ m/s.

A. KHẢO SÁT SÓNG NGANG VỀ MẶT ĐỘNG LỰC HỌC

I – LẬP PHƯƠNG TRÌNH SÓNG NGANG

1. Điều kiện khảo sát (hay còn gọi là các giả thiết)

- Dây mảnh, mềm và được kéo căng ở cả hai đầu.
- Các dao động của dây là nhỏ.
- Sức căng T là một hàm biến thiên chậm dọc theo dây.
- Không có sự tắt dần của dao động.



Hình 8.1

2. Lập phương trình vi phân của sóng

a) Xét một phần tử rất nhỏ của dây nằm trong khoảng x và x + dx (Hình 8.1).

Gọi ρdx là khối lượng của phần tử dx này.

- u(x, t) là li độ của phần tử dx tại thời điểm t.
- $v(x, t) = \dfrac{du(x, t)}{dt}$ là vận tốc của phần tử dx tại thời điểm t.

• $a(x, t) = \dfrac{d^2u}{dt^2}$ là gia tốc của phần tử dx tại thời điểm t.

b) Áp dụng định luật II Niu-tơn cho phần tử dx :

$$\rho dx \frac{d^2u}{dt^2} = T_2 \sin\theta_2 - T_1 \sin\theta_1 \quad (8.1)$$

Theo điều kiện khảo sát thì $T_2 \approx T_1 = T = \text{const}$ dọc theo dây, nên phương trình (8.1) được viết thành :

$$\rho dx \frac{d^2u}{dt^2} = T[\sin\theta(x + dx) - \sin\theta(x)] \quad (8.2)$$

Cũng theo điều kiện khảo sát thì $\sin\theta \approx \tan\theta = \dfrac{du}{dx'}$ nên phương trình (8.2) được viết thành :

$$\rho dx \frac{d^2u}{dt^2} = T dx \left[\frac{\tan\theta(x + dx) - \tan\theta(x)}{dx}\right]$$

$$= T dx \left[\frac{d}{dx} \tan\theta(x)\right] = T dx \frac{d^2u}{dx^2}$$

Suy ra : $\dfrac{d^2u}{dt^2} = \dfrac{T}{\rho}\dfrac{d^2u}{dx^2}$ hay $\dfrac{d^2u}{dt^2} = c^2 \dfrac{d^2u}{dx^2}$ (8.3)

Trong đó $c = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$ là tốc độ truyền sóng. Ta có nhận xét tốc độ truyền sóng trên dây chỉ phụ thuộc vào sức căng T và mật độ khối lượng trên một đơn vị chiều dài của dây.

Nên nhớ rằng u(x, t) là một hàm của hai biến t và x, trong khi đó ta chỉ lấy đạo hàm theo từng biến và giữ nguyên biến số kia, tức là chỉ lấy đạo hàm riêng phần.

Phương trình (8.3) được gọi là *phương trình vi phân của sóng*.

II – PHƯƠNG TRÌNH CỦA SÓNG CHẠY HÌNH SIN

1. Điều kiện khảo sát

Ngoài 4 điều kiện trên dây, ta thêm vào điều kiện thứ năm là dây phải rất dài, để trong thời gian khảo sát không có sự phản xạ của sóng tại điểm cuối dây.

2. Phương trình sóng

Phương trình $u(x, t) = a\cos\omega\left(t \mp \frac{x}{c}\right)$ đúng là một nghiệm của phương trình (8.3). Thật vậy :

$$\omega^2 a\cos\omega\left(t \mp \frac{x}{c}\right) = c^2\frac{\omega^2}{c^2}a\cos\omega\left(t \mp \frac{x}{c}\right)$$

Như vậy phương trình của một sóng ngang hình sin chạy là :

$$u(x,t) = a\cos\omega\left(t \mp \frac{x}{c}\right)\begin{cases} -: \text{sóng chạy theo chiều x dương} \\ +: \text{sóng chạy theo chiều x âm} \end{cases} \tag{8.4}$$

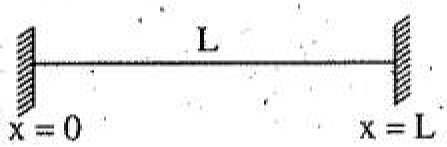
Đặt $\frac{\omega}{c} = k$ (số sóng) thì phương trình (8.3) được viết một cách đối xứng như sau :

$$u(x, t) = a\cos(\omega t \mp kx) \tag{8.5}$$

III – PHƯƠNG TRÌNH CỦA SÓNG DỪNG

1. Điều kiện khảo sát

Ngoài 4 điều kiện nêu ra ở mục I.1, ta thêm điều kiện thứ năm là dây có độ dài L được căng ngang giữa hai giá đỡ vững chắc (Hình 8.2). Nói cách khác ta thêm *điều kiện bờ* sau đây :



Hình 8.2

$$u(x,t)\Big|_{x=0} = u(x,t)\Big|_{x=L} = 0$$

2. Phương trình của sóng dừng

Trong trường hợp này ta dùng *phương pháp tách biến số* :

$$u(x, t) = g(x)f(t)$$

Thay vào phương trình (8.3) ta được :

$$g(x)\frac{d^2f(t)}{dt^2} = c^2f(t).\frac{d^2g(x)}{dx^2}$$

hay $$\frac{1}{f(t)}\frac{d^2f(t)}{dt^2} = c^2\frac{1}{g(x)}.\frac{d^2g(x)}{dx^2} \tag{8.6}$$

Ta nhận thấy vế bên trái của phương trình (8.6) không phụ thuộc x, còn vế phải thì không phụ thuộc t. Do đó cả hai vế của phương trình phải bằng một hằng số, độc lập với cả t lẫn x. Do đó phương trình (8.6) được viết lại thành :

$$\frac{1}{f(t)}.\frac{d^2f(t)}{dt^2} = c^2\frac{1}{g(x)}\frac{d^2g(x)}{dx^2} = -\omega^2$$

Từ đó suy ra :

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} + \omega^2 f = 0 \Rightarrow f(t) = B\sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$\frac{d^2g(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}g(x) = 0$$

hay $\frac{d^2g(x)}{dx^2} + k^2g(x) = 0 \Rightarrow g(x) = C\sin(kx + \varphi_2)$

$$u(x, t) = A\sin(\omega t + \varphi_1)\sin(kx + \varphi_2) \tag{8.7}$$

Áp dụng điều kiện bờ cho phương trình (8.7) ta được :

$$u(x,t)\Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow \varphi_2 = 0$$

$$u(x,t)\Big|_{x=L} = 0 \Rightarrow k = \frac{n\pi}{L}$$

Nếu ta chọn gốc thời gian t = 0 là lúc sợi dây đi qua vị trí cân bằng (VTCB), hay $u(x, 0) = 0$ thì $\varphi_1 = 0$.

Khi ấy phương trình của sóng dừng là :

$$u(x, t) = A\sin kx\sin\omega t \tag{8.8}$$

B. KHẢO SÁT SÓNG NGANG VỀ MẶT NĂNG LƯỢNG

I – SỰ PHÂN BỐ NĂNG LƯỢNG TRÊN DÂY KHI CÓ SÓNG CHẠY

Xét một phần tử nhỏ của dây nằm giữa x và x + dx.

1. Mật độ động năng

Động năng của phần tử dx là :

$$dE_đ = \frac{1}{2}(\rho dx)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}(\rho dx)\omega^2 a^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

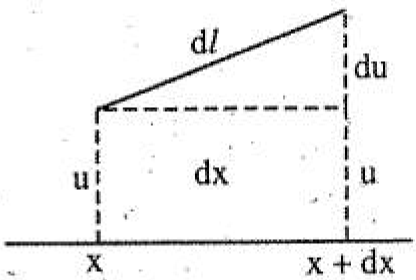
Mật độ động năng tại x là :

$$\frac{dE_đ}{dx} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 a^2 \sin^2(\omega t - kx) \qquad (8.9)$$

2. Mật độ thế năng

Gọi :

- dx là độ dài của phần tử của dây khi chưa biến dạng.
- dl là độ dài của phần tử khi biến dạng,
- $\delta l = dl - dx$ là độ biến dạng của phần tử dx.



Hình 8.3

Theo (Hình 8.3) ta có : $(dl)^2 = (dx)^2 + (du)^2$

$$\left(\frac{dl}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2$$

$$\frac{dl}{dx} = \left[1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Vì $\left(\frac{du}{dx}\right)^2 << 1$ nên :

$$\frac{dl}{dx} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2$$

$$\frac{dl - dx}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2$$

hay : $$\frac{\delta l}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 \qquad (8.10)$$

Vì sức căng T coi như không đổi nên công của lực căng $\vec{T}$ làm phần tử dx dãn ra một lượng δl là $dA = T\delta l$. Công này làm tăng thế năng đàn hồi của phần tử dx. Do đó thế năng của phần tử dx là :

$$dE_t = T\delta l$$

Kết hợp với (8.10) và thay $T = \rho c^2$ vào ta được :

$$dE_t = \rho c^2 dx \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho c^2 dx.k^2a^2\sin^2(\omega t - kx)$$

Thay $k = \frac{\omega}{c}$ vào ta được :

$$\frac{dE_t}{dx} = \frac{1}{2}\rho\omega^2a^2\sin^2(\omega t - kx) \qquad (8.11)$$

3. Mật độ năng lượng tại x

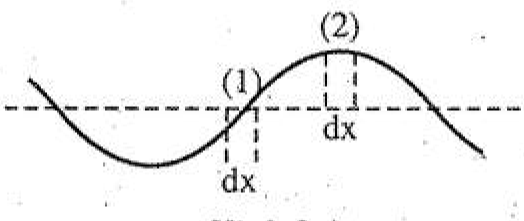
$$\frac{dE}{dx} = \rho\omega^2a^2\sin^2(\omega t - kx) \qquad (8.12)$$

4. Nhận xét

a) *Trong sóng chạy, mật độ động năng và thế năng tại vị trí x của dây luôn biến thiên đồng pha với nhau. Chúng đều cực đại tại vị trí cân bằng và đều bằng 0 tại vị trí biên.*

Ta có thể thấy điều này qua Hình 8.4.

Phần tử (1) đi qua VTCB có vận tốc lớn nhất, đồng thời cũng có độ dãn cực đại. Phần tử (2) ở vị trí biên có vận tốc bằng 0, đồng thời cũng có độ biến dạng bằng 0 (vì $\frac{du}{dx} = 0$).

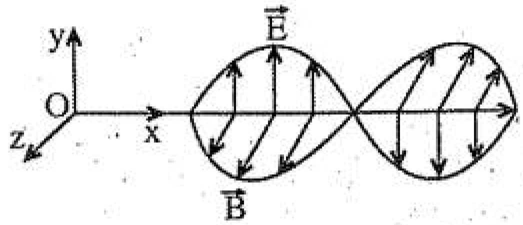


Hình 8.4

b) *Sự bằng nhau của giá trị tức thời của mật độ động năng và mật độ thế năng là một tính chất chung của sóng chạy, dù đó là sóng ngang hay sóng dọc.*

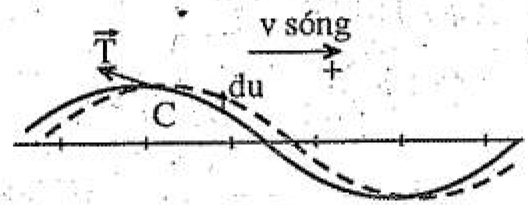
Sóng điện từ lan truyền cũng có tính chất tương tự. Mật độ năng lượng điện trường và mật độ năng lượng từ trường luôn biến thiên đồng pha. Do đó cường độ điện trường $\vec{E}$ và cảm ứng từ $\vec{B}$ cũng luôn biến thiên cùng pha (Hình 8.5).

Kết quả cho bởi các công thức (8.9) và (8.12) có thể gây ra sự ngạc nhiên, vì chúng ta thường quan niệm dao động của một phần tử của dây khi có sóng chạy giống như dao động của một con lắc lò xo. Nhưng như đã thấy, nếu xét về mặt năng lượng thì quan niệm đó là sai lầm. Tại sao vậy ?



Hình 8.5

Sở dĩ có sự khác nhau về mặt năng lượng giữa dao động của con lắc lò xo và của một phần tử của dây là vì con lắc lò xo là một hệ cô lập còn các phần tử của dây thì không. Mỗi điểm của dây, ví dụ điểm C (Hình 8.6), thực hiện công dương lên phần dây bên phải. Vì thế năng lượng của nguồn luôn truyền từ điểm gần nguồn cho điểm xa nguồn.



Hình 8.6

II – KHẢO SÁT SÓNG DỪNG

1. Sự phân bố năng lượng trên dây khi có sóng dừng

Đối với sóng dừng ta có các công thức sau đây :

- Vận tốc mỗi phần tử :

$$v = \frac{du}{dt} = a\omega \sin kx \cos \omega t \qquad (8.13)$$

- Mật độ động năng :

$$\frac{dE_d}{dx} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho a^2\omega^2 \sin^2 kx \cos^2 \omega t \qquad (8.14)$$

- Độ biến dạng tương đối :

$$\frac{\delta l}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = \frac{1}{2}a^2k^2 \cos^2 kx \sin^2 \omega t \qquad (8.15)$$

- Mật độ thế năng :

$$\frac{dE_t}{dx} = \frac{1}{2}\rho c^2\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho c^2 a^2k^2 \cos^2 kx \sin^2 \omega t$$

Thay $k = \dfrac{\omega}{c}$ vào ta được :

$$\frac{dE_t}{dx} = \frac{1}{2}\rho a^2\omega^2\cos^2 kx\sin^2\omega t \tag{8.16}$$

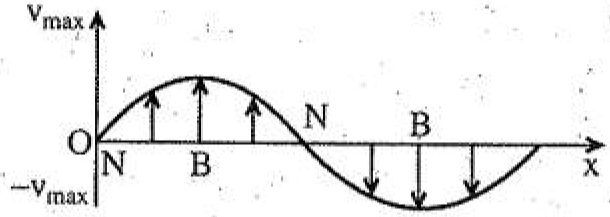
Để đơn giản, ta xét trường hợp trên dây hình thành hai bụng sóng. Từ các công thức (8.13), (8.14), (8.15), (8.16) ta suy ra thông tin về sự phân bố năng lượng trên dây.

a) Tại $t = 0$:

- $u(x, 0) = 0$
- $v_{max} = \left(\dfrac{du}{dt}\right)_{max} = a\omega\sin kx$

Suy ra sợi dây thẳng và chuyển động nhanh nhất. Vận tốc cực đại biến thiên theo quy luật của sinkx (Hình 8.7).

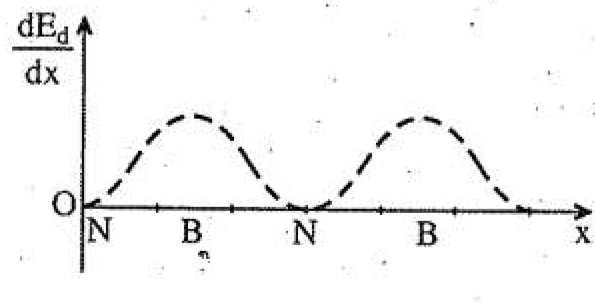
- $\dfrac{\delta l}{dx} = 0$
- $\dfrac{dE_t}{dx} = 0$
- $\dfrac{dE_đ}{dx} = \dfrac{1}{2}\rho a^2\omega^2\sin^2 kx$



Hình 8.7

Sợi dây không dãn, do đó không có thế năng trên toàn dây.

Sợi dây có động năng cực đại. Mật độ động năng biến thiên theo quy luật của hàm $\sin^2 kx$ (Hình 8.8).

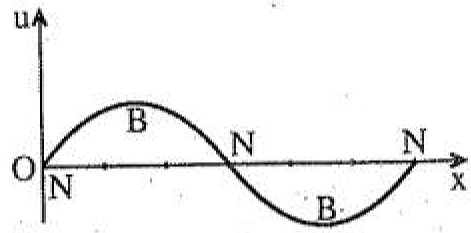


Hình 8.8

b) Tại $t = \dfrac{T}{4}$:

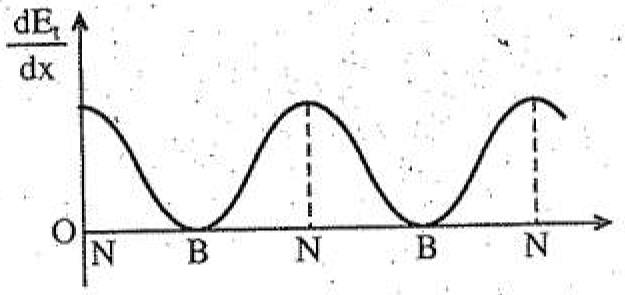
- $u(x, 0) = a\sin kx$; $\dfrac{du}{dt} = 0$
- $\dfrac{\delta l}{dx} = \dfrac{1}{2}a^2k^2\cos^2 kx$
- $\dfrac{dE_t}{dx} = \dfrac{1}{2}\rho a^2\omega^2\cos^2 kx$

Suy ra sợi dây đứng yên tức thời các điểm của dây đều ở vị trí biên. Sợi dây có độ cong cực đại (Hình 8.9). Mật độ thế năng biến thiên theo quy luật của hàm $\cos^2 kx$ (Hình 8.10).



Hình 8.9

Ta còn biết thêm các phần tử tại bụng sóng không có thế năng (vì không bị biến dạng) mà chỉ có động năng. Động năng cực đại ở VTCB và giảm dần đến 0 khi đến vị trí biên.



Hình 8.10

Các nút chỉ có thế năng. Thế năng tại nút bằng 0 khi dây qua VTCB và tăng dần đến cực đại khi dây đến vị trí biên.

Còn các điểm khác trong khi dao động vừa có động năng vừa có thế năng.

2. Sự truyền năng lượng trong sóng dừng

Tại sao lại gọi là sóng dừng ? Có phải vì năng lượng không truyền mà dừng lại ? Nếu dừng lại thì dừng ở đâu ? Nếu có truyền thì truyền thế nào ? Ta hãy xét vấn đề này.

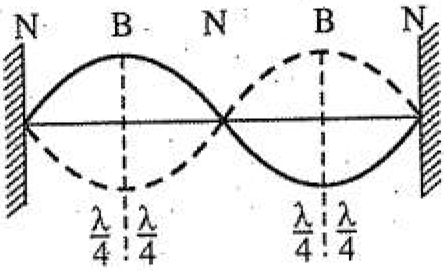
Như ta đã biết có mối quan hệ giữa công và năng lượng. Khi có công thực hiện thì kèm theo đó là sự biến đổi năng lượng hoặc ngược lại.

a) Nút luôn đứng yên nên nó không thực hiện công. Do đó năng lượng không truyền qua được nút. Bụng không biến dạng, sức căng T tại bụng bằng 0, nên bụng cũng không thực hiện công. Do đó *năng lượng cũng không truyền qua được bụng.*

Như vậy năng lượng của mỗi đoạn dây dài $\frac{1}{4}$ bước sóng có một đầu là nút, đầu kia là bụng thì không đổi. Nói cách khác, năng lượng "dừng" trong mỗi đoạn nút – bụng.

Trong trường hợp trên dây có hai bụng sóng thì ta có 4 đoạn nút – bụng (Hình 8.11).

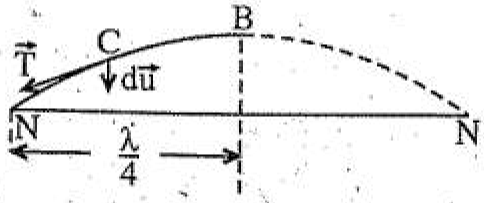
Năng lượng của mỗi đoạn dây là không đổi. Không có sự truyền năng lượng từ đoạn dây này cho đoạn dây kia.



Hình 8.11

b) Trong mỗi đoạn dây có sự truyền năng lượng không ? Có sự biến đổi từ dạng động năng sang thế năng không ?

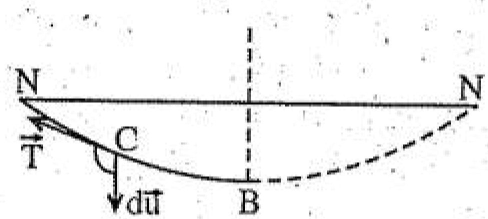
Giả sử trong $\frac{1}{4}$ T đoạn dây chuyển động từ vị trí biên về VTCB (Hình 8.12). Tại một điểm bất kì C, lực căng $\vec{T}$ tác dụng vào đoạn dây CB (Hình 8.12) có hướng như hình vẽ.



Hình 8.12

Điểm C thực hiện công dương ($dA = \vec{T}.d\vec{u} > 0$) do đó năng lượng truyền qua C từ trái sang phải.

Trong $\frac{1}{4}$ T tiếp theo, đoạn dây N-B chuyển động từ VTCB ra vị trí biên (Hình 8.13). Điểm C thực hiện công âm ($dA = \vec{T}.d\vec{u} < 0$). Do đó năng lượng truyền từ phải qua trái.



Hình 8.13

Như vậy là có sự truyền năng lượng từ điểm này cho điểm khác của mỗi đoạn dây mà ta xét. Nếu trong $\frac{1}{4}$ T, năng lượng truyền từ trái sang phải, ví dụ từ nút đến bụng thì trong $\frac{1}{4}$ T tiếp theo, năng lượng truyền theo chiều từ phải sang trái, từ bụng đến nút. Như vậy, công suất truyền qua mỗi điểm tính trung bình trong một chu kì thì bằng 0. Thật vậy :

$$\mathscr{P} = T\sin\theta\frac{du}{dt} = T\tan\theta\frac{du}{dt}$$

$$= T.\frac{du}{dx}.\frac{du}{dt} = Ta^2\omega k(\sin kx\cos kx)(\sin\omega t\cos\omega t)$$

$$= \frac{1}{4}Ta^2\omega k\sin(2kx)\cos(2\omega t)$$

$$\overline{\mathscr{P}} = \frac{1}{4}Ta^2\omega k\sin 2kx(\overline{\cos 2\omega t}) = 0$$

Đó là điều ta mong đợi.

c) Tóm lại, *năng lượng "dừng" trong mỗi đoạn dây dài $\frac{1}{4}$ bước sóng có một đầu là nút đầu kia là bụng*. Năng lượng không truyền ra khỏi dây cũng như không truyền vào đoạn dây này qua nút hoặc bụng. Mặt khác, *trong mỗi đoạn dây thì năng lượng lại truyền qua lại từ đầu này đến đầu kia*, đồng thời có sự đổi dạng từ động năng sang thế năng và ngược lại. Vì thế nếu xét về sự bảo toàn và chuyển hóa năng lượng thì cả đoạn dây N-B (chứ không phải từng phần tử của dây) mới giống như con lắc lò xo.

3. Theo nguyên lí chồng chập, sóng dừng được tạo thành do sự chồng chập của một sóng tới và một sóng phản xạ

$$u = a\cos(\omega t - kx) - a\cos(\omega t + kx)$$

$$u = 2a\sin kx\sin\omega t$$

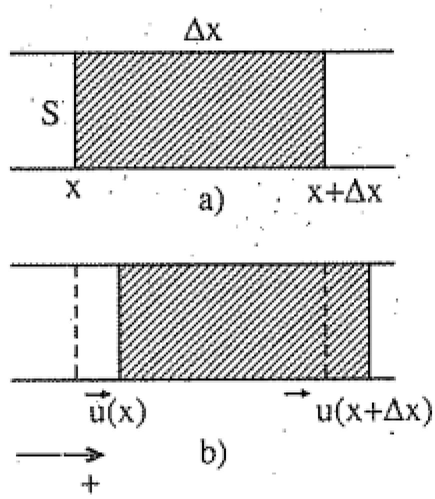
Biên độ của bụng sóng là A = 2a, tức là chỉ gấp hai lần biên độ của mỗi sóng.

Thế nhưng trong thực tế, khi làm thí nghiệm về sóng dừng ta được sóng có biên độ cực đại lớn hơn 2a nhiều lần. Tại sao vậy ? Do có ma sát với không khí nên tại mỗi điểm biên độ của sóng phản xạ nhỏ hơn biên độ của sóng tới. Do đó sóng tổng hợp không bị triệt tiêu tại điểm nút. Nút không thực sự đứng yên mà hơi dao động tức là vẫn thực hiện công. Năng lượng từ nguồn vẫn truyền qua được "nút" làm năng lượng của mỗi đoạn dây N-B lớn dần lên, biên độ của bụng sóng tăng dần lên. Mặt khác tốc độ chuyển động của dây tăng dần làm năng lượng tiêu hao do ma sát với không khí tăng dần. *Biên độ của bụng sóng đạt tới giá trị không đổi khi tốc độ tiêu hao năng lượng do ma sát bằng tốc độ cung cấp năng lượng của nguồn cho dây.* Và ta có thể xem một đoạn dây N-B cũng như cả dây khi có sóng dừng là một ví dụ về *một vật dao động ở tần số cộng hưởng* $f = \frac{nc}{2L}$ *và mỗi giá trị ứng với một mode dao động.*

C. KHẢO SÁT SÓNG DỌC VỀ MẶT ĐỘNG LỰC HỌC

I – LẬP PHƯƠNG TRÌNH SÓNG CHẠY

Xét trường hợp một sóng âm là sóng phẳng truyền trong một ống dài, tiết diện S, chứa không khí, nằm dọc theo trục x. Để lập phương trình, ta tách ra một đoạn nhỏ của ống, đoạn này khi cân bằng nằm trong khoảng x và x + Δx (Hình 8.14a).



Hình 8.14

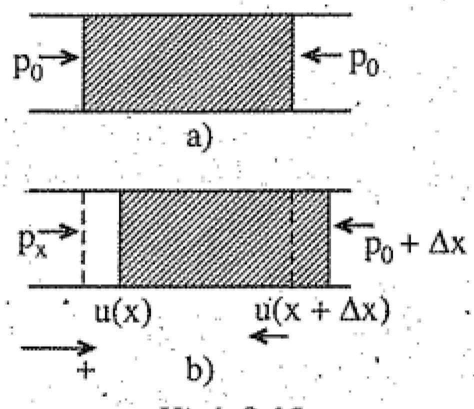
Khi có sóng âm truyền tới, các phân tử khí dao động dọc theo trục x.

Gọi u(x, t) và u(x + Δx, t) là li độ của các phần tử khí ở hai đầu đoạn ống tại thời điểm t (Hình 8.14b).

Xét về phương diện áp suất, khi các phần tử khí ở trạng thái cân bằng, áp suất ở hai đầu đoạn ống đều bằng p_0 (Hình 8.15a).

Khi các phần tử khí dao động, áp suất tại hai đầu đoạn ống biến thiên (Hình 8.15b).

Gọi $u_p(x, t)$ là độ biến thiên áp suất (so với p_0) tại vị trí x vào lúc t, ta có :



Hình 8.15

Tại đầu x : $u_p(x, t) = p(x, t) - p_0$.

Tại đầu x + Δx : $u_p(x + \Delta x, t) = p(x + \Delta x, t) - p_0$.

Để lập phương trình sóng ta tiến hành các bước sau đây :

1. Tính độ biến thiên tương đối của thể tích khí

Dựa vào Hình 8.14 ta có : $\Delta V = S[u(x + \Delta x) - u(x)] = S\Delta x\left(\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\right)$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{du}{dx} \tag{8.17}$$

(u(x, t) là hàm hai biến độc lập là x và t, nên $\dfrac{du}{dx}$ phải được hiểu là đạo hàm riêng phần).

2. Tính hệ số nén $\mathcal{K}$

Khả năng chịu nén của mỗi chất khí được đặc trưng bằng đại lượng $\mathcal{K}$ và được định nghĩa như sau :

$$\mathcal{K} = -\frac{\Delta V}{V\Delta p} = -\frac{\Delta V}{Vu_p} \tag{8.18}$$

Kết hợp với (8.17) ta được :

$$\frac{du}{dx} = -\mathcal{K}u_p \tag{8.19}$$

Trong chất khí, sự dịch chuyển của các lớp chất khí rất nhanh đến mức *khối khí chịu sự biến đổi đoạn nhiệt.*

Từ $pV^\gamma = \text{const}$ hay $\Delta(pV^\gamma) = 0$, suy ra :

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{\gamma}\frac{\Delta p}{p} = -\frac{1}{\gamma}\frac{u_p}{p_0}$$

Kết hợp với (8.18) ta được :

$$\mathcal{K} = \frac{1}{\gamma p_0} \tag{8.20}$$

3. Tính độ chênh lệch áp suất tại hai đầu đoạn ống

$$\Delta p = u_p(x + \Delta x) - u_p(x) = \left(\frac{du_p}{dx}\right)\Delta x$$

Lấy đạo hàm theo x hai vế của phương trình (8.19) ta được :

$$\frac{du_p}{dx} = -\frac{1}{\mathcal{K}}\frac{d^2u}{dx^2}$$

Thay vào trên ta được :

$$\Delta p = -\frac{1}{\mathcal{K}}\frac{d^2u}{dx^2}\Delta x = -\gamma p_0\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\Delta x \tag{8.21}$$

4. Áp dụng định luật II Niu-tơn

$$\sum F = ma$$

$$S\left[u_p(x) - u_p(x + \Delta x)\right] = \rho S\Delta x\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)$$

$$S[-\Delta p] = \rho S\Delta x\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)$$

Thay (8.21) vào ta được :

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{\gamma p_0}{\rho}\frac{d^2u}{dx^2}$$

hay : $\dfrac{d^2u(x,t)}{dt^2} = c^2\dfrac{d^2u(x,t)}{dx^2}$ (8.22)

Phương trình (8.22) là phương trình vi phân của sóng li độ với $c = \sqrt{\dfrac{\gamma p_0}{\rho}}$ là tốc độ truyền sóng. Đối với không khí ta có :

$$\gamma = \frac{7}{5},\ p_0 = 10^5\,\text{Pa},\ \rho = 1{,}3\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.\ \text{Suy ra } v = 330\ \text{m/s}.$$

Trong trường hợp sóng âm truyền trong một thanh kim loại thì theo định luật Húc :

$\dfrac{\Delta V}{V} = \dfrac{\Delta l}{l} = \dfrac{F}{ES} = \dfrac{\Delta p}{E}$. Khi ấy $c = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$, tức là chỉ phụ thuộc vào ρ và suất Y-âng.

Sóng áp suất

Lấy đạo hàm theo x cả hai vế của phương trình (8.22) ta được :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) = c^2\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)$$

Vì hai biến x và t là độc lập nhau nên ta có thể đổi thứ tự lấy đạo hàm riêng phần. Cụ thể là :

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{du}{dx}\right) = c^2\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{du}{dx}\right)$$

Kết hợp với (8.19) ta được :

$$\frac{d^2u_p(x,t)}{dt^2} = c^2\frac{d^2u_p(x,t)}{dx^2} \qquad (8.23)$$

Phương trình (8.23) là *phương trình vi phân của sóng áp suất.*

Như vậy, mọi điều diễn ra với li độ u thì cũng diễn ra như thế với độ biến thiên áp suất u_p. Chỉ có điều khác là $u_p = -\dfrac{1}{\mathcal{K}}\dfrac{du}{dx}$ (dấu "–" rất quan trọng), cho nên *sóng áp suất trễ pha 90^o so với sóng li độ.*

5. Sóng âm hình sin

Đối với nguồn âm dao động điều hoà ta có sóng âm hình sin. Khi ấy nghiệm của các phương trình (8.22) và (8.23) là :

$$u(x, t) = a\sin(\omega t - kx) \tag{8.24}$$

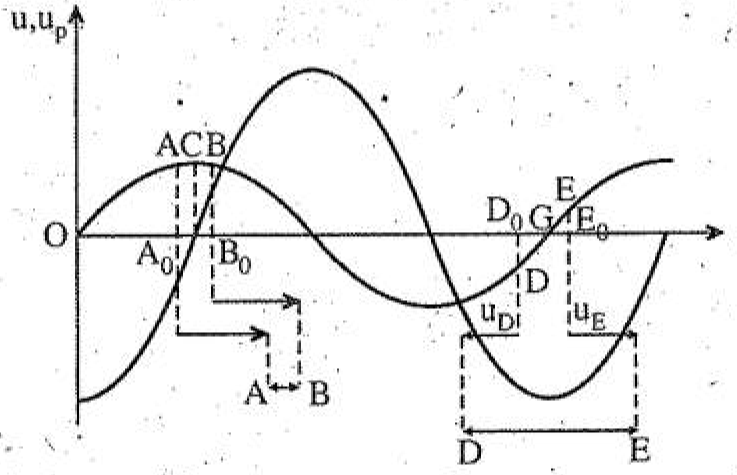
và $$u_p(x, t) = -\frac{1}{\mathcal{K}}\frac{du}{dx} = \frac{ak\cos(\omega t - kx)}{\mathcal{K}}$$

hay $$u_p(x, t) = B\cos(\omega t - kx) \tag{8.25}$$

với $B = \gamma p_0 ak$

Phương trình (8.24) và (8.25) là phương trình của sóng âm hình sin truyền theo trục x.

Hình 8.16 là đồ thị miêu tả sóng li độ và sóng áp suất tại thời điểm t. Ta thấy nơi nào li độ của các phần tử khí bằng 0 thì ở nơi đó độ biến thiên áp suất là cực đại (về giá trị tuyệt đối).



Hình 8.16

Có thể giải thích một cách định tính như sau :

Theo hình 8.16 hai điểm A, B ở sát hai bên bụng sóng C có li độ bằng nhau ($u_A = u_B \approx u_C$) nên khoảng cách AB vẫn bằng A_0B_0 khi cân bằng. Mật độ không khí và do đó áp suất ở trong khoảng hai lớp ở sát hai bên bụng sóng C vẫn như khi cân bằng. Độ biến thiên áp suất bằng 0. Trái lại, hai điểm D và E ở sát hai bên điểm G (có $u_G = 0$) thì có li độ bằng nhau nhưng trái dấu ($u_D = -u_E$) nên khoảng cách DE lớn hơn D_0E_0 khi cân bằng. Mật độ không khí và do đó áp suất trong khoảng hai lớp ở sát hai bên điểm G nhỏ hơn so với khi cân bằng. Độ giảm áp suất là nhiều nhất tại điểm G.

II – LẬP PHƯƠNG TRÌNH SÓNG DỪNG

Ta cũng dùng phương pháp tách biến số như đã làm đối với sóng ngang. Ta đặt :

$$u(x, t) = g(x)f(t)$$

rồi thay vào phương trình vi phân (8.22) ta được :

$$u(x, t) = A\sin kx\sin\omega t \tag{8.26}$$

$$u_p(x, t) = -\frac{1}{\mathcal{K}}Ak\cos kx\sin\omega t \tag{8.27}$$

Các phương trình (8.26) và (8.27) là phương trình sóng dừng đối với sóng âm hình sin.

D. KHẢO SÁT SÓNG DỌC VỀ MẶT NĂNG LƯỢNG

I – ĐỐI VỚI SÓNG CHẠY

1. Mật độ động năng

a) Động năng của khối khí trong một đoạn ống rất nhỏ :

$$dE_đ = \frac{1}{2}\rho Sdx\left(\frac{du}{dt}\right)^2$$

b) Mật độ động năng tại x :

$$e_đ = \frac{dE_đ}{Sdx} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{du}{dt}\right)^2$$

Thay $u = a\cos(\omega t - kx)$ vào, ta được :

$$e_đ = \frac{1}{2}\rho\omega^2a^2\sin^2(\omega t - kx) \tag{8.28}$$

c) Độ biến thiên mật độ động năng :

$$d(e_đ) = \frac{1}{2}\rho\omega^2a^2\left[\frac{d}{dt}\sin^2(\omega t - kx)\right]dt$$

$$d(e_đ) = \rho\omega^3a^2\sin(\omega t - kx)\cos(\omega t - kx)dt \tag{8.29}$$

2. Công tác dụng lên hai đầu đoạn ống trong thời gian dt tính từ thời điểm t

$$dA = S\left[\left(u_p\frac{du}{dt}\right)_{x,\,t} - \left(u_p\frac{du}{dt}\right)_{x\,+\,\Delta x,\,t}\right]dt$$

Thay $u_p = -\frac{1}{\mathcal{K}}\frac{du}{dx}$ từ công thức (8.19) vào, ta được :

$$dA = \frac{S}{\mathcal{K}}\left[\left(\frac{du}{dx}\frac{du}{dt}\right)_{x+\Delta x,\,t} - \left(\frac{du}{dx}\frac{du}{dt}\right)_{x,\,t}\right]dt$$

$$= \frac{Sk\omega a^2}{\mathcal{K}}\left\{-\sin^2\left[\omega t - k(x + \Delta x)\right] + \sin^2\left[\omega t - k(x)\right]\right\}dt$$

$$= -\frac{Sk\omega a^2}{\mathcal{K}}\left[\frac{d}{dx}\sin^2(\omega t - kx)\right]dxdt$$

$$= -\frac{Sk\omega a^2}{\mathcal{K}}2\sin(\omega t - kx)\frac{d}{dx}\sin(\omega t - kx)dxdt$$

$$= \frac{2Sk^2\omega a^2}{\mathcal{K}}\sin(\omega t - kx)\cos(\omega t - kx)dxdt$$

Thay $k = \frac{\omega}{c}$ và $\frac{1}{\mathcal{K}} = \rho c^2$ vào, ta được :

$$dA = Sdx.2\rho\omega^3 a^2\sin(\omega t - kx)\cos(\omega t - kx)dt$$

Mật độ công mà khối không khí tại x nhận được là :

$$\frac{dA}{Sdx} = 2\rho\omega^3 a^2\sin(\omega t - kx)\cos(\omega t - kx)dt$$

So sánh với (8.29) ta thấy :

$$\frac{dA}{Sdx} = 2de_d$$

3. Mật độ thế năng

Mật độ công mà khối không khí tại x nhận được bằng độ biến thiên mật độ năng lượng (bao gồm cả động năng và thế năng) của khối khí :

$$\frac{dA}{Sdx} = d(e_d + e_t) = 2de_d$$

Suy ra : $de_t = de_d$

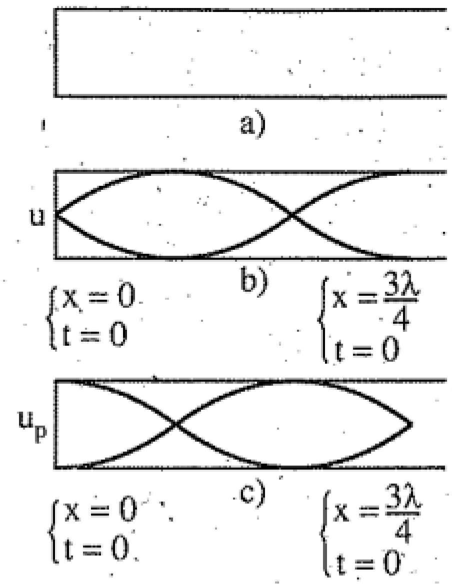
hay $e_t = e_d = \frac{1}{2}\rho\omega^2 a^2 \sin^2(\omega t - kx).$

Vậy, *mật độ động năng và mật độ thế năng tại mỗi điểm trên phương truyền sóng của sóng dọc luôn luôn bằng nhau. Mật độ động năng và mật độ thế năng luôn biến thiên đồng pha, cùng cực đại tại VTCB và bằng 0 tại vị trí biên.*

II – ĐỐI VỚI SÓNG DỪNG

1. Ta hãy xét sóng dừng trong một ống hẹp có một đầu kín và một đầu hở (Hình 8.17a). Tại đầu kín, các phần tử không khí không thể chuyển động vào trong "tường". Chúng cũng không thể chuyển động từ tường ra, vì như thế sẽ có một lớp chân không ở sát tường hút chúng trở lại tường ngay lập tức. Vậy, tường phải là một nút của sóng li độ dừng. Còn ở đầu hở các phần tử không khí chuyển động tự do với tốc độ lớn nên đầu hở là một bụng sóng li độ dừng.

Kèn Cờ-la-ri-nét thuộc trường hợp này. Miệng kèn ở đầu kín, bên trong có một lưỡi gà dao động với biên độ rất nhỏ ($u \approx 0$).



Hình 8.17
Trong thực tế, điểm nút của sóng áp suất ở ngoài đầu hở của ống một chút.

Trong một ống hẹp, dài $L = \frac{3\lambda}{4}$ sóng li độ dừng có 2 bụng và 2 nút như ở Hình 8.17b. Sóng li độ trong trường hợp này có phương trình :

$$u(x, t) = A\sin kx\cos\omega t$$

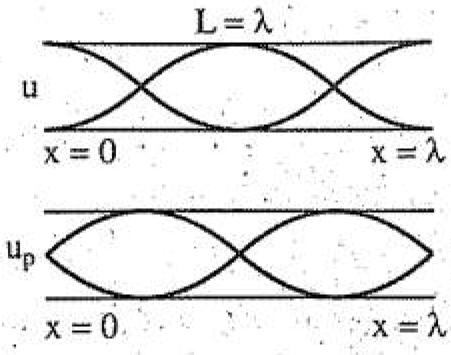
2. Bây giờ ta xét sóng áp suất dừng tương ứng :

$$u_p(x,t) = -\frac{1}{\mathcal{K}}\frac{du}{dx} = -\frac{Ak}{\mathcal{K}}\cos kx\cos\omega t$$

Ta thấy tại "tường" ($x = 0$) ta được một bụng sóng, còn tại đầu hở $\left(x = \frac{3\lambda}{4}\right)$ ta được một nút sóng ($u_p = 0$). Hình 8.17c miêu tả đồ thị của sóng áp suất dừng.

Lưỡi gà trong miệng kèn Cờ-la-ri-nét có tác dụng đẩy sóng áp suất về phía đầu hở, do vậy ở đầu kín có áp suất u_p cực đại. Tại đầu hở áp suất bằng áp suất khí quyển ở bên ngoài.

3. Xét về mặt năng lượng thì năng lượng không truyền qua được nút sóng li độ (hay bụng sóng áp suất) và cũng không truyền qua được nút sóng áp suất (hay bụng sóng li độ). Đó là vì công suất truyền $\mathscr{P} = Su_p \dfrac{du}{dt}$ tại các điểm đó luôn luôn bằng 0. Năng lượng "dừng" (hay không đổi) trong mỗi đoạn "nút-bụng".



Hình 8.18

Hình 8.18 mô tả sóng dừng li độ và sóng dừng áp suất trong một ống hở cả hai đầu như ống sáo.

Tóm lại xét về mặt năng lượng sóng dọc hoàn toàn giống sóng ngang.

E. VẬN TỐC PHA VÀ VẬN TỐC NHÓM

I – VẬN TỐC PHA

1. Phương trình của một sóng hình sin truyền theo hướng x trong một môi trường :

$$u(x,t) = a\cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

trong đó c là tốc độ lan truyền dao động từ phần tử này sang phần tử khác.

Giả sử tại thời điểm t sóng truyền tới điểm A có tọa độ x. Pha của sóng tại A là :

$$\phi_A = \omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Sau Δt giây, tức là tại thời điểm $t + \Delta t$, sóng truyền tới điểm B có tọa độ là $x + \Delta x$. Pha của sóng tại B là :

$$\phi_B = \omega\left(t + \Delta t - \frac{x + \Delta x}{c}\right)$$

Thay $\Delta x = c\Delta t$ vào ta được $\phi_B(t + \Delta t) = \phi_A(t)$.

Ta nói rằng pha của sóng đã truyền đi với tốc độ là c, vì thế mà c được gọi là *vận tốc pha*. Trong mục này ta dùng kí hiệu v_p thay cho c.

2. Hiện tượng tán sắc. Môi trường tán sắc

a) Như đã biết, khi ánh sáng trắng truyền từ không khí vào thủy tinh thì có hiện tượng tán sắc. Đó là vì chiết suất n của thủy tinh phụ thuộc vào bước sóng λ của ánh sáng tới, hay là vì vận tốc của ánh sáng trong thủy tinh phụ thuộc vào bước sóng của ánh sáng. Từ đó ta có thể mở rộng khái niệm tán sắc như sau :

Hiện tượng tán sắc là hiện tượng vận tốc pha của ánh sáng phụ thuộc bước sóng. Môi trường trong đó có hiện tượng tán sắc được gọi là *môi trường tán sắc*.

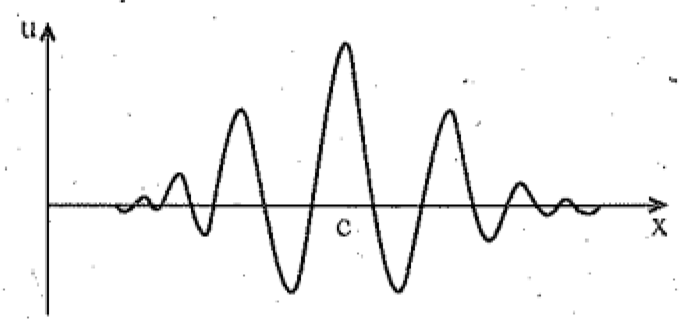
b) Ví dụ

- Sóng điện từ có hiện tượng tán sắc là vì $v_p = f(\lambda)$.
- Sóng âm không có hiện tượng tán sắc vì $\frac{dv_p}{d\lambda} = v$.
- Sóng biển có hiện tượng tán sắc là vì $v_p = k\sqrt{\lambda}$.

II – VẬN TỐC NHÓM

1. Một số sóng có tần số khác nhau rất ít lan truyền theo một phương được gọi là một *nhóm sóng*.

2. Người ta thấy rằng năng lượng được nhóm sóng mang đi với vận tốc khác với vận tốc pha.



Hình 8.19

Thật vậy, tại mỗi thời điểm, biên độ cực đại của sóng tổng hợp tương ứng với phần không gian trong đó năng lượng tập trung cực đại. Điểm đó được gọi là tâm C của nhóm sóng (Hình 8.19). Tại thời điểm tiếp theo, do pha của các sóng thay đổi, nên tâm C của nhóm sóng và cả năng lượng sóng cũng chuyển dời trong không gian. Vận tốc dịch chuyển của tâm C, gọi là vận tốc nhóm, có thể tìm được nếu ta để ý rằng tại tâm C, những dao động gây ra bởi các sóng có bước sóng gần nhau có *pha trùng nhau*. Do đó tại tâm sóng, pha của các dao động không phụ thuộc bước sóng : $\frac{d\phi}{d\lambda} = 0$.

$$\phi(x,t) = \omega\left(t - \frac{x}{v_p}\right) = 2\pi\left(\frac{v_p t}{\lambda} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = 2\pi\left[t\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{v_p}{\lambda}\right) + \frac{x_C}{\lambda^2}\right]$$

Tại C : $$t\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{v_p}{\lambda}\right) + \frac{x_C}{\lambda^2} = 0 \Rightarrow x_C = -\lambda^2 t\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{v_p}{\lambda}\right)$$

$$\frac{dx_C}{dt} = v_p - \lambda\frac{dv_p}{d\lambda} = v_p - \lambda\frac{dv}{d\lambda}$$

vì $\frac{dx_c}{dt}$ là vận tốc nhóm, kí hiệu là v_g, nên ta có :

$$v_g = v_p - \lambda\frac{dv_p}{d\lambda} \tag{8.30}$$

Ta cũng có thể chứng minh được rằng, vận tốc nhóm được tính bằng công thức :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \tag{8.31}$$

Thậy vậy, từ vận tốc pha $v_p = \frac{\omega}{k}$ ta có :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(v_p k)}{dk} = v_p + k\frac{dv_p}{dk} = v_p + k\left(\frac{dv_p}{d\lambda}.\frac{d\lambda}{dk}\right)$$

Mặt khác, từ $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ ta có :

$$\frac{d\lambda}{dk} = -\frac{2\pi}{k^2} = -\frac{k\lambda}{k^2} = -\frac{\lambda}{k}$$

Thay vào ta được :

$$v_g = v_p - \lambda\frac{dv_p}{d\lambda}$$

III – SÓNG ĐƠ BRƠI

1. Theo Đơ Brơi, sóng của các hạt như êlectron có bước sóng liên hệ với động lượng của hạt theo cùng một cách giống như phôtôn, tức là theo hệ thức :

$$p = \frac{h}{\lambda} \qquad (8.32)$$

Mặt khác, theo Planck, năng lượng của hạt liên hệ với tần số của sóng theo hệ thức :

$$E = \frac{h\omega}{2\pi} \qquad (8.33)$$

2. Bây giờ ta tìm vận tốc pha và vận tốc nhóm của sóng Đơ Brơi.

a) Trường hợp 1 : hạt không tương đối tính

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

Thay p từ hệ thức (8.32) và E từ hệ thức (8.33) vào, ta được hệ thức tán sắc liên hệ ω với k như sau :

$$\omega = \frac{hk^2}{4\pi m} \qquad (8.34)$$

Vận tốc phá : $v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{hk}{4\pi m} = \frac{1}{4\pi m}(\lambda p)\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) = \frac{p}{2m}$.

Vận tốc nhóm : $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}\left[\frac{hk^2}{4\pi m}\right] = 2\frac{hk}{4\pi m}$.

Tóm lại : $v_p = \frac{v}{2}$ (v là vận tốc của hạt)

$v_g = v$

b) Trường hợp 2 : hạt tương đối tính

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

Đặt p từ hệ thức (8.32) và E từ hệ thức (8.33) vào ta được hệ thức tán sắc :

$$\frac{h^2\omega^2}{4\pi^2} = \frac{h^2c^2k^2}{4\pi^2} + m^2c^4 \qquad (8.35)$$

Lấy đạo hàm theo k hệ thức (8.35) ta được :

$$\frac{h^2}{4\pi^2}2\omega\frac{d\omega}{dk} = \frac{h^2c^2}{4\pi^2}.2k \Rightarrow \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2k}{\omega} = \frac{c^2p}{E}$$

Thay $p = \gamma m_0 v$ và $E = \gamma m_0 c^2$ vào ta được :

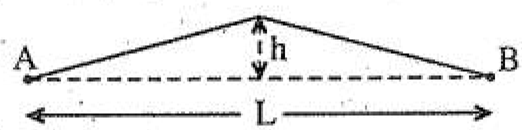
$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v$$

Từ sự phân tích ở trên, ta thấy trong cả hai trường hợp vận tốc nhóm đều bằng vận tốc của hạt. Điều đó chứng tỏ vận tốc nhóm (chứ không phải vận tốc pha) mới quyết định hạt gắn với sóng chuyển động nhanh như thế nào.

BÀI TẬP

8.1. Một dây không dãn, đồng chất, dài l, khối lượng tổng cộng là m, được treo thẳng đứng. Người ta gõ nhẹ vào đầu trên của dây để tạo ra một sóng xung ngang chạy xuống dưới. Đồng thời tại lúc đó người ta thả cho một vật rơi tự do từ đầu trên của dây. Hỏi khi vật đi qua sóng xung thì còn cách đầu dưới của dây bao nhiêu ?

ĐS : $x = \frac{1}{9}l$



Hình 8.20

8.2. Xét một sợi dây đàn hồi được căng giữa hai đầu A và B cố định (Hình 8.20). Mật độ khối lượng dài của dây là ρ. Tốc độ lan truyền sóng ngang trong sợi dây là C. Gọi độ dài $\overline{AB}$ là L. Sợi dây được kéo ngang và giữ cho nó có dạng một tam giác cân với độ cao cực đại h << L ở điểm giữa dây. Tại thời điểm t = 0, dây được thả ra từ trạng thái đứng yên. Bỏ qua mọi tác dụng của trọng trường.

a) Tìm chu kì dao động T của sợi dây.

b) Vẽ hình dạng của sợi dây ở thời điểm $t = \frac{T}{8}$. Trên hình vẽ, hãy xác định các độ dài và các góc dùng để xác định hình dạng của sợi dây.

c) Tìm cơ năng toàn phần của sợi dây dao động theo ρ, c, h và L.

ĐS : a) $T = \frac{2L}{c}$; c) $E = \frac{2c^2h^2}{L}$

8.3. Một sóng hình sin truyền theo phương ngang trên một sợi dây bị kéo căng, khối lượng riêng tính theo chiều dài là ρ. Sóng có tần số góc là ω, tốc độ truyền sóng là c và biên độ là a ($a \ll \lambda$). Sóng truyền theo chiều dương của trục x.

a) Viết biểu thức của li độ u theo t và x.

b) Mật độ năng lượng tại x bằng bao nhiêu ?

c) Lập công thức tính công suất truyền dọc theo trục x.

d) Nếu sóng được tạo ra bởi một thiết bị cơ học ở đầu dây ($x = 0$), hãy tìm lực tác dụng theo phương vuông góc với dây.

ĐS : b) $\dfrac{dE}{dx} = \rho\omega^2 a^2 \sin^2(\omega t - kx)$; c) $\mathscr{P} = c\rho\omega^2 a^2 \sin^2(\omega t - kx)$;

d) $F_u(x,t) = -\rho c\omega a \sin(\omega t - kx)$.

8.4. Một dây dài, có $\rho = 0{,}2$ kg/m được kéo căng đến sức căng $T = 500$ N. Hãy tìm :

a) Tốc độ truyền sóng ngang trên dây.

b) Công suất trung bình mà nguồn sóng cần truyền cho dây để duy trì một sóng chạy có biên độ $a = 10$ mm và bước sóng 0,5 m.

ĐS : a) 50 m/s ; b) 197 W.

8.5. Xét một sóng âm dừng, phẳng, có tần số 10^3 Hz trong không khí tại nhiệt độ 300 K. Giả sử biên độ áp suất do sóng này là 0,1 N/m^2 so với áp suất môi trường là 10^5 N/m^2. Hãy đánh giá (bậc của độ lớn) biên độ dịch chuyển của các phần tử khí do sóng này tạo ra. Biết tốc độ của âm là $c = 340$ m/s.

ĐS : $A \approx 4.10^{-8}$ m.

8.6. Vận tốc pha của một sóng mặt nước có sức căng mặt ngoài T và khối lượng riêng ρ là :

$$v_p = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi T}{\lambda\rho}\right)}$$

trong đó g là gia tốc trọng trường, λ là bước sóng.

a) Hãy tìm vận tốc nhóm v_g của sóng mặt nước.

b) Xem v_p như một hàm của bước sóng. Hãy tìm giá trị của v_g khi v_p có giá trị cực tiểu.

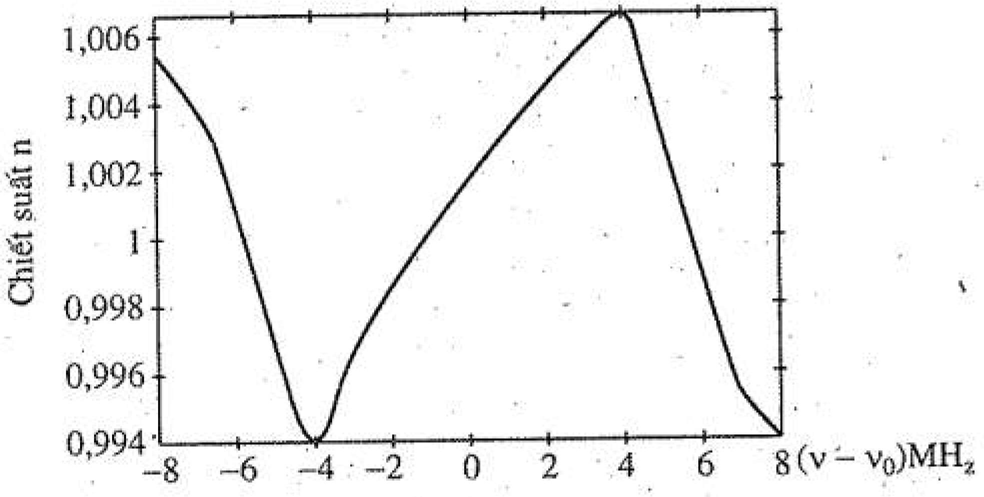
ĐS : a) $v_g = \dfrac{g + 12\pi^2 T/\rho\lambda^2}{2\sqrt{2\pi g/\lambda + 8\pi^3 T/\rho\lambda^3}}$; b) $v_g = \sqrt{2}\left(\dfrac{gT}{\rho}\right)^{1/4}$.

8.7. a) Gần đây người ta đã chứng minh được rằng ánh sáng có thể bị chậm đi nhiều bậc độ lớn trong một môi trường tán sắc thích hợp có chiết suất n. Vận tốc nhóm v_g của một xung ánh sáng được cho bởi công thức : $v_g = \dfrac{d\omega}{dk}$, trong đó $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ là số sóng. Đạo hàm được lấy ở giá trị $k = k_0$ tương ứng với tần số của đỉnh. Hãy chứng minh rằng :

$$v_g = \frac{c}{n + \nu\dfrac{dn}{d\nu}}$$

(Mọi đại lượng ở mẫu số được tính tại tần số của đỉnh ν_0 của xung)

b) Hình 8.21 cho thấy sự biến thiên của chiết suất theo tần số. Hãy tính vận tốc nhóm ứng với $\lambda_0 = 600$ nm và $n(\nu_0 = 1$ MHz). Tập trung sự chú ý vào phần gần như thẳng của đồ thị quanh giá trị ν_0.



Hình 8.21

ĐS : $v_g = 2{,}99.10^8$ m/s

Chủ đề 9

THUYẾT TƯƠNG ĐỐI HẸP

A. PHẦN ĐỘNG HỌC

I – HAI TIÊN ĐỀ CỦA THUYẾT TƯƠNG ĐỐI VÀ CÁC Ý NGHĨA CỦA CHÚNG

1. Hai tiên đề

Tiên đề 1 **:** *Tốc độ của ánh sáng có giá trị như nhau trong mọi hệ quy chiếu (HQC) quán tính.*

Tiên đề 2 **:** *Các định luật vật lí có cùng một dạng trong mọi HQC quán tính.*

2. Ý nghĩa

a) Tiên đề 1 :

• Tiên đề 1 thừa nhận ánh sáng truyền được trong chân không và không thừa nhận sự tồn tại của HQC đứng yên tuyệt đối.

• Tiên đề 1 khẳng định tốc độ ánh sáng trong chân không $c \approx 3.10^8$ m/s là một hằng số dù nguồn sáng hay người quan sát (NQS) có vận tốc nào.

• Tiên đề 1 phủ nhận công thức cộng vận tốc cổ điển.

b) Tiên đề 2 :

Tiên đề 2 là sự mở rộng nguyên lí tương đối của Ga-li-lê từ hiện tượng cơ học sang các hiện tượng vật lí khác như hiện tượng điện từ.

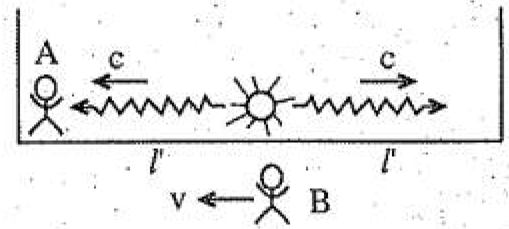
II – CÁC HIỆU ỨNG TƯƠNG ĐỐI TÍNH

Theo Anh-xtanh, ta phải coi hai tiên đề như những sự kiện thực nghiệm mà ta không nên cố gắng giải thích tại sao lại như vậy, mà nên hướng vào việc xác định các hệ quả vật lí của chúng. Anh-xtanh đã vận dụng hai tiên đề vào những *thí nghiệm tưởng tượng* với những con tàu chuyển động thẳng đều với tốc độ có thể sánh được với tốc độ ánh sáng, từ đó tìm ra được những hệ quả lí thú đáng ngạc nhiên.

1. Sự mất tính đồng thời

Xét một thí nghiệm sau : Trong một con tàu có đặt một nguồn sáng ở giữa hai máy thu. Con tàu chuyển động thẳng đều với tốc độ v so với mặt đất. NQS A đứng trong tàu, còn NQS B đứng trên mặt đất. Cho nguồn phát ra một chớp sáng. Hỏi ánh sáng có đập vào hai máy thu cùng một lúc hay không ?

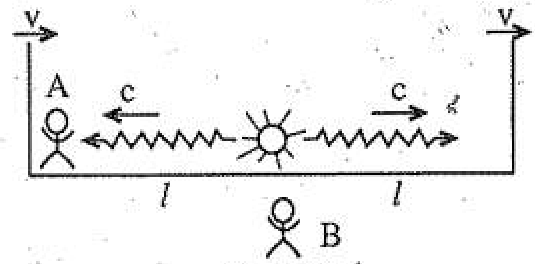
Theo NQS A thì ánh sáng đập vào hai máy thu cùng một lúc. Thật vậy, gọi l' là khoảng cách từ nguồn đến mỗi máy thu, t' là thời gian chớp sáng đi tới máy thu (Hình 9.1). Ta có :



Hình 9.1

$$t'_{(\text{trái})} = t'_{(\text{phải})} = \frac{l'}{c}$$

Nhưng theo NQS B thì khác, máy thu bên trái nhận được chớp sáng trước máy thu bên phải. Thật vậy, gọi l là khoảng cách từ nguồn đến mỗi máy thu, t là thời gian chớp sáng đi tới máy thu (Hình 9.2). Ta có :



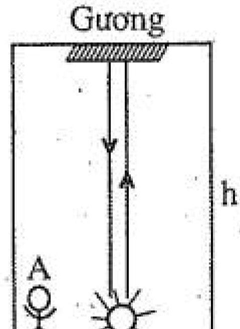
Hình 9.2

$$t_{(\text{trái})} = \frac{l}{c + v} \; ; \; t_{(\text{phải})} = \frac{l}{c - v} \Rightarrow t_{(\text{trái})} < t_{(\text{phải})}$$

Như vậy, sự kiện "ánh sáng đập vào hai máy thu" xảy ra đồng thời trong HQC O' nhưng không xảy ra đồng thời trong HQC O. Ta nói, *tính đồng thời của hai sự kiện đã bị mất nếu xét trong các HQCQT khác nhau.*

2. Sự trôi chậm (hay sự dãn nở) của thời gian

Ta hãy xét một thí nghiệm sau đây. Trong một con tàu, đặt một nguồn sáng trên sàn tàu và một chiếc gương trên trần cách sàn một độ cao h (Hình 9.3). Con tàu chuyển động thẳng đều với tốc độ v so với mặt đất. NQS A đứng trong con tàu, NQS B đứng trên mặt đất. Cho nguồn phát ra một chớp sáng. Ánh sáng đi tới gương rồi phản xạ trở lại sàn, đập vào một máy ghi đặt sát nguồn.



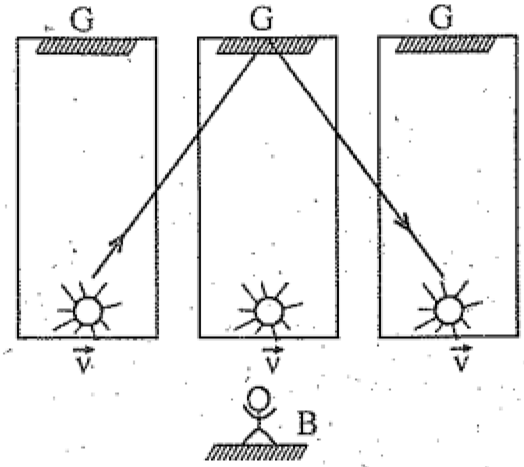
Hình 9.3

Theo NQS A ghi được thì thời gian ánh sáng đi - về là :

$$t'_A = \frac{2h}{c}$$

Theo NQS B, con tàu chuyển động (Hình 9.4) nên thời gian đi – về của ánh sáng là :

$$t_B = \frac{2\sqrt{h^2 + L^2}}{c} \text{ với } 2L = vt_B$$



Hình 9.4

Thay vào ta được :

$$t_B = \frac{2h}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

hay $$t_B = \gamma t'_A \qquad (9.1)$$

với $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (9.2)$$

t' được gọi là *thời gian riêng* (còn được kí hiệu là t_0) của HQC chuyển động và được đo bởi đồng hồ treo trong HQC đó. Từ công thức (9.1) ta suy ra :

- Đồng hồ chuyển động chạy chậm hơn đồng hồ đứng yên.

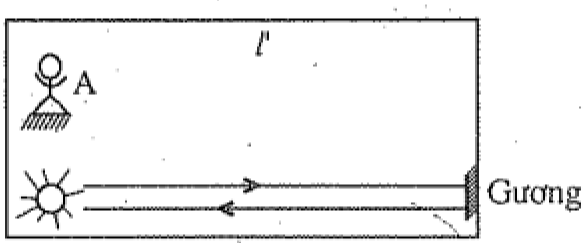
Hay :

- *So với HQC đứng yên thì thời gian trong HQC chuyển động trôi chậm hơn.*

Đến đây nảy ra thắc mắc : Đối với NQS A thì HQC gắn với con tàu là HQC đứng yên, còn HQC gắn với mặt đất là HQC chuyển động. Cho nên theo NQS A thì thời gian trên mặt đất trôi chậm hơn. Vậy thì ai đúng, NQS B hay NQS A ? Nếu chỉ tách riêng yếu tố thời gian để xét thì ta thấy kết luận trên đây thật khó hiểu, thậm chí vô lí. Vì thế ta phải xét thêm các hiệu ứng khác nữa và khi ấy sẽ hiểu được cả hai NQS đều đúng (xem các bài tập 9.3 và 9.4).

3. Sự co chiều dài (theo phương chuyển động)

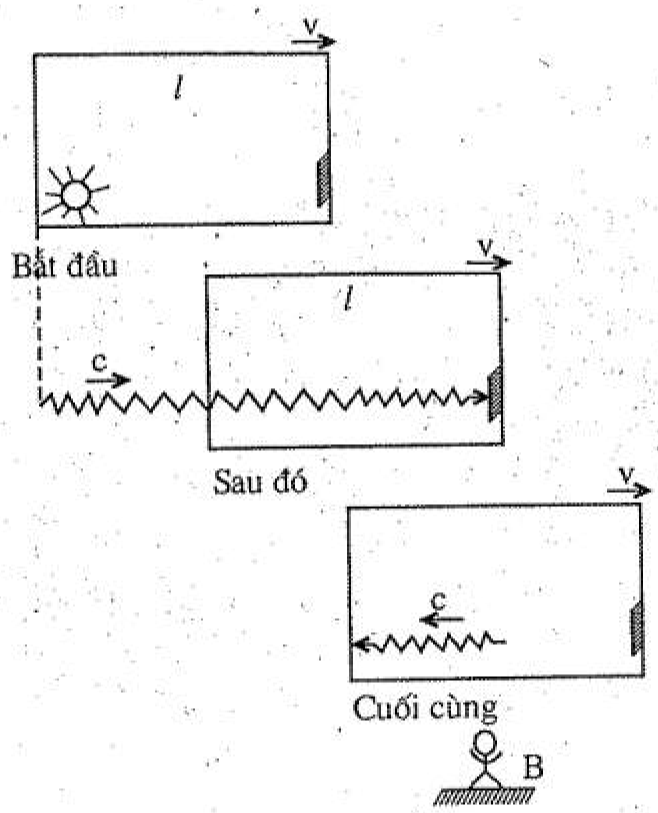
Ta bố trí thí nghiệm như sau : Đặt gương ở đầu tàu, còn nguồn sáng ở cuối tàu. Đối với NQS A đứng trong tàu thì l' là chiều dài của tàu, t' là thời gian ánh sáng đi từ nguồn tới gương và phản xạ trở về đến nguồn (Hình 9.5). Ta có :



Hình 9.5

$$t' = \frac{2l'}{c}$$

Đối với NQS B đứng trên mặt đất thì con tàu chuyển động thẳng đều với tốc độ v, chiều dài của tàu là l, còn thời gian ánh sáng đi từ nguồn đến gương và phản xạ trở về đến gương là t (Hình 9.6).



Hình 9.6

Ta có :

$$t = \frac{l}{c - v} + \frac{l}{c + v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2}$$

$$t = \frac{2l}{c}\gamma^2.$$

Mặt khác $t = \gamma t'$. Suy ra :

$$l = \frac{l'}{\gamma} \qquad (9.3)$$

Công thức (9.3) áp dụng được cho khoảng cách cũng như cho chiều dài của một vật (xét theo phương chuyển động).

Như vậy, *chiều dài của vật chuyển động thì ngắn hơn chiều dài của chính nó khi đứng yên.* l' được gọi là *chiều dài riêng của vật* (còn kí hiệu là l_0). Đó là chiều dài được đo bởi một NQS đứng yên đối với vật.

Chú ý :

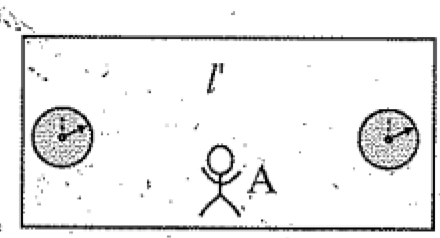
- Không có sự co lại của chiều dài của vật theo phương vuông góc với phương chuyển động. Ví dụ như chiều dài của tên lửa khi chuyển động thì nhỏ hơn chiều dài khi đứng yên, nhưng đường kính của tên lửa thì vẫn thế.

- Theo thuyết tương đối thì câu hỏi "Thực ra chiều dài của con tàu là bao nhiêu ?" là một câu hỏi vô nghĩa. Câu hỏi có nghĩa phải là "Chiều dài của tàu trong HQC đã cho là bao nhiêu ?".

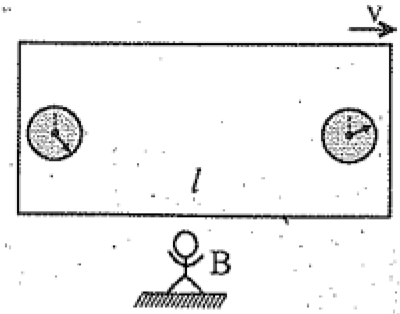
4. Đồng hồ ở đằng sau chạy nhanh hơn đồng hồ ở đằng trước (xét theo phương chuyển động)

Xét một thí nghiệm sau đây : Trong con tàu chuyển động thẳng đều so với mặt đất đặt hai đồng hồ, một ở đầu tàu còn một ở cuối tàu.

NQS A đứng trong tàu thì thấy hai đồng hồ chạy đồng bộ (Hình 9.7), còn NQS B đứng ở mặt đất thì thấy đồng hồ ở đằng sau chạy nhanh hơn đồng hồ ở đằng trước (Hình 9.8).

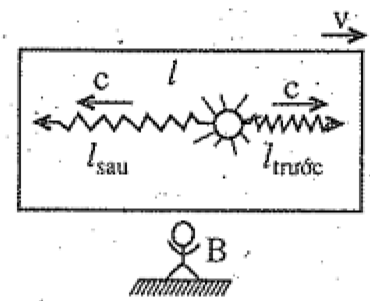


Hình 9.7



Hình 9.8

Ta giải thích hiệu ứng này như sau :

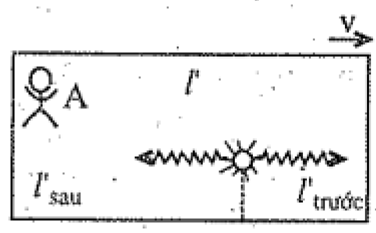


Hình 9.9

Theo NQS B, phải đặt nguồn sáng ở vị trí nào trong tàu để ánh sáng (phôtôn) đập vào hai đồng hồ cùng một lúc (tính theo đồng hồ của B) ? (Hình 9.9). Vận tốc tương đối của phôtôn và các đồng hồ lần lượt (c + v) và (c – v), ta có :

$$t' = \frac{l_{sau}}{c+v} = \frac{l_{trước}}{c-v} = \frac{l}{2c}$$

Suy ra : $l_{sau} = \dfrac{l(c+v)}{2c}$; $l_{trước} = \dfrac{l(c-v)}{2c}$.



Hình 9.10

NQS A trong con tàu thì thấy nguồn sáng đặt ở vị trí cách hai đồng hồ những khoảng theo đúng tỉ lệ như trên Hình 9.10.

$$l'_{sau} = \frac{l'(c+v)}{2c}\ ;\ l'_{trước} = \frac{l'(c-v)}{2c}.$$

Trong HQC O', ánh sáng phải đi một đoạn đường dài hơn để đến đồng hồ sau và do đó mất một khoảng thời gian dài hơn là $\Delta t' = \dfrac{l'v}{c^2}$ (so với đồng hồ ở phía trước).

Bây giờ gọi thời điểm mà NQS B nhìn thấy hai đồng hồ là thời điểm các phôtôn va đập vào chúng. *NQS B đọc được trên đồng hồ phía sau một lượng lớn hơn đồng hồ phía trước là :*

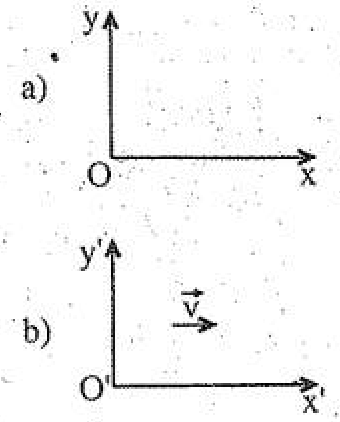
$$\Delta t = \frac{\gamma v l'}{c^2} = \frac{v}{c^2} l \qquad (9.4)$$

Điều này phù hợp với hiệu ứng 1 : Sự va chạm của các phôtôn với hai đồng hồ xảy ra đồng thời trong HQC O nhưng xảy ra trước sau trong HQC O'.

III – PHÉP BIẾN ĐỔI LO-REN-XƠ (LORENTZ)

1. Mỗi sự kiện (hay biến cố) được xác định bằng các tọa độ không gian và thời gian.

Ví dụ : Sự kiện A được xác định trong HQC O bằng toạ độ (x, y, z, t) (Hình 9.11a) hoặc HQC O' bằng toạ độ (x', y', z', t') (Hình 9.11b).



Hình 9.11

2. Chúng ta xét hai sự kiện và tìm mối liên hệ giữa Δx và Δt trong HQC O với $\Delta x'$ và $\Delta t'$ trong HQC O'. Chúng ta giả sử mối liên hệ này là tuyến tính và có dạng như sau :

$$\Delta x = A\Delta x' + B\Delta t' \qquad \text{(a)}$$

$$\Delta t = C\Delta t' + D\Delta x' \qquad \text{(b)}$$

Trong đó A, B, C, D là các hằng số mà ta phải xác định. Để tìm các hằng số này ta phải dựa vào các hiệu ứng đã nêu ở mục II.

- Nếu trong HQC O', hai sự kiện xảy ra ở cùng một chỗ ($\Delta x' = 0$) nhưng tại hai thời điểm khác nhau ($\Delta t' \neq 0$) thì theo (b) ta có $\Delta t = C\Delta t'$. Đối chiếu với hiệu ứng 2 (thời gian trôi chậm trong HQC O') $\Delta t = \gamma\Delta t'$, ta suy ra : $C = \gamma$.

- Nếu trong HQC O', hai sự kiện xảy ra ở cùng một thời điểm ($\Delta t' = 0$) nhưng ở hai nơi cách nhau một khoảng $\Delta x'$, thì theo (a) ta có $\Delta x = A\Delta x'$. Đối chiếu với hiệu ứng 3 (chiều dài co lại khi chuyển động) $\Delta x = \gamma\Delta x'$, ta suy ra : $A = \gamma$.

- Nếu trong HQC O có một vật đứng yên, $\Delta x = 0$ thì theo NQS A trong HQC O', vật này chuyển động với vận tốc là $-v$. Ta có $\Delta x' = -v\Delta t'$ nhưng khi $\Delta x = 0$ thì theo (a) ta có $\Delta x' = -\frac{B}{A}\Delta t'$. Ta suy ra : $\frac{B}{A} = v$ hay $B = \gamma v$ (vì $A = \gamma$).

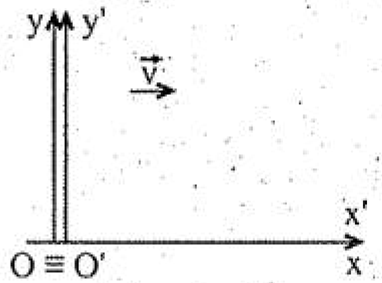
- Hiệu ứng 4 nói rằng NQS B nhìn hai đồng hồ trong HQC O' thì thấy đồng hồ ở phía sau (xét theo chiều chuyển động) chạy nhanh hơn đồng hồ ở phía trước một lượng là $\Delta t = \frac{\gamma v}{c^2}\Delta x'$ ($\Delta x' = L'$). Trong khi đó, NQS A lại thấy hai đồng hồ chạy đồng bộ tức là $\Delta t' = 0$. Mặt khác theo (b) khi $\Delta t' = 0$ ta có $\Delta t = D\Delta x'$. Từ đó suy ra : $D = \frac{\gamma v}{c^2}$.

Cuối cùng ta được :

$$\begin{cases} \Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t') \\ \Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \dfrac{v\Delta x'}{c^2}\right) \\ \Delta y = \Delta y' \\ \Delta z = \Delta z' \end{cases} \quad \text{với} \quad \left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\right) \qquad (9.5)$$

Ta chọn gốc tọa độ và gốc thời gian sao cho tại t = t' = 0 thì x = x' = 0 (Hình 9.12). Khi ấy (9.5) được viết thành :

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ t = \gamma\left(t' + \dfrac{vx'}{c^2}\right) \end{cases} \qquad (9.6)$$



Hình 9.12

hay : $$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{vx}{c^2}\right) \end{cases} \qquad (9.7)$$

Các phép biến đổi (9.5), (9.6), (9.7) được gọi là *phép biến đổi Lo-ren-xơ.*

IV – CÔNG THỨC CỘNG VẬN TỐC

Gọi $u_x = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$, $u_y = \dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ là vận tốc của vật trong HQC O, $u'_x = \dfrac{\Delta x'}{\Delta t'}$ và $u'_y = \dfrac{\Delta y'}{\Delta t'}$ là vận tốc của vật trong HQC O'. Theo (9.5) ta có :

$$u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\Delta t' + \dfrac{v\Delta x'}{c^2}} = \frac{\dfrac{\Delta x'}{\Delta t'} + v}{1 + \dfrac{v}{c^2}\dfrac{\Delta x'}{\Delta t'}}$$

$$u_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y'}{\gamma\left(\Delta t' + \dfrac{v\Delta x'}{c^2}\right)} = \frac{\dfrac{\Delta y'}{\Delta t'}}{\gamma\left(1 + \dfrac{v\Delta x'}{c^2\Delta t'}\right)}$$

Tóm lại, ta được công thức cộng vận tốc sau đây :

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{u'_x + v}{1 + \dfrac{vu'_x}{c^2}} \\ u_y = \dfrac{u'_y}{\gamma\left(1 + \dfrac{vu'_x}{c^2}\right)} \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} u'_x = \dfrac{u_x - v}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}} & (9.8) \\ u'_y = \dfrac{u_y}{\gamma\left(1 - \dfrac{vu_x}{c^2}\right)} & (9.9) \end{cases}$$

V – BẤT BIẾN KHOẢNG

Xét $(\Delta S)^2 = \Delta x^2 - c^2\Delta t^2$ hay $S^2 = x^2 - c^2t^2$

Thay (9.6) vào ta được :

$$x^2 - c^2t^2 = \frac{(x' + vt')^2}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} - \frac{c^2\left(t' + \dfrac{vx'}{c^2}\right)^2}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} = x'^2 - c^2t'^2 = S'^2$$

Suy ra : $S^2 = S'^2$ hay $(\Delta S)^2 = (\Delta S')^2$. (9.10)

Đại lượng S^2 được gọi là *bất biến khoảng*, vì nó không phụ thuộc vào HQC.

VI – GIẢN ĐỒ MIN-CỐP-XKI (MINKOWSKI)

Trong nhiều trường hợp, thật là có ích nếu ta biểu diễn về mặt hình học phép biến đổi Lo-ren-xơ và các sự kiện bằng cách sử dụng một giản đồ không – thời gian, gọi là *giản đồ Min-cốp-xki*. Dưới đây là cách lập giản đồ này.

Giả sử HQC O' chuyển động theo chiều dương của trục x của HQC O đứng yên với tốc độ v. Mỗi sự kiện được xác định bằng một điểm có toạ độ (x, ct) trong HQC O hoặc bằng một điểm có toạ độ (x', ct') trong HQC O'.

Ta chọn trục x và trục ct của HQC O là hai trục vuông góc được vẽ trên một tờ giấy. Khi ấy, hai trục x' và ct' của HQC O' sẽ được nhìn thấy như thế nào nếu vẽ chúng trên tờ giấy này ? Chúng sẽ nghiêng so với các trục x và ct một góc bằng bao nhiêu ? Nếu đo trên tờ giấy thì cỡ lớn của một đơn vị của x' và ct' sẽ bằng bao nhiêu ?

Để vẽ các trục x' và ct' trên tờ giấy này ta dùng phép biến đổi Lo-ren-xơ. Gọi $\beta = \frac{v}{c}$ hay $v = \beta c$, phép biến đổi Lo-ren-xơ được viết thành :

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + \beta ct') \\ ct = \gamma(ct' + \beta x') \end{cases}$$

1. Góc nghiêng của trục ct' và cỡ lớn của một đơn vị

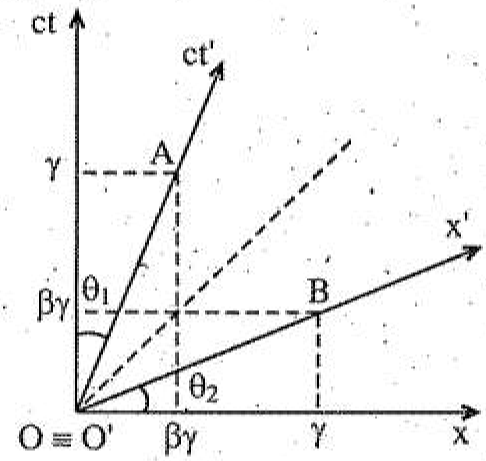
Ta hãy xét một sự kiện được xác định bằng điểm A có toạ độ (x', ct') = (0,1) trong HQC O'. Điểm A nằm trên trục ct' và cách gốc toạ độ O' một đơn vị của ct'. Trong HQC O, điểm A có toạ độ (x, ct) = $(\gamma\beta, \gamma)$. Đường thẳng nối điểm A với gốc toạ độ xác định trục ct' (Hình 9.13).

Gốc giữa trục ct' và trục ct là θ_1. Từ Hình 9.13 ta có :

$$\tan\theta_1 = \beta = \frac{v}{c} \qquad (9.11)$$

Điểm A cách gốc toạ độ một đoạn bằng $\gamma\sqrt{1+\beta^2} = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}$. Do đó, ta được :

$$\frac{\text{một đơn vị của ct'}}{\text{một đơn vị của ct}} = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}} \qquad (9.12)$$



Hình 9.13

2. Góc nghiêng của trục x' và cỡ lớn của một đơn vị

Ta hãy xét một sự kiện khác được xác định bằng điểm B có toạ độ (x', ct') = (1, 0) trong HQC O'. Điểm B nằm trên trục x' và cách gốc toạ độ O' một đơn vị của x'. Trong HQC O, điểm B có toạ độ (x, ct) = $(\gamma, \gamma\beta)$. Đường thẳng nối điểm B với gốc toạ độ xác định trục x'. Dựa vào Hình 9.13 và lập luận tương tự như trên, ta được :

$$\theta_2 = \theta_1 = \theta.$$

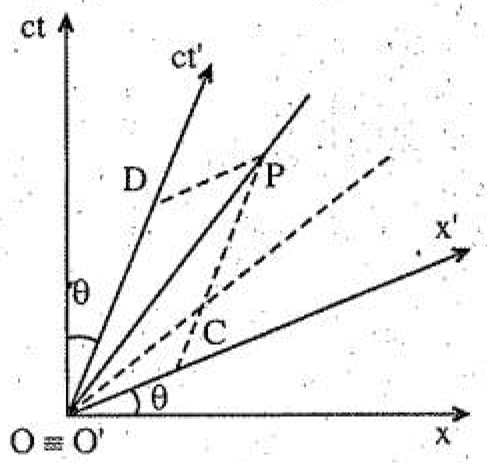
$$\frac{\text{một đơn vị của x'}}{\text{một đơn vị của x}} = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}$$

Như vậy, trên giản đồ Min-cốp-xki cả hai trục x' và ct' đều nghiêng đi cùng một góc θ đối với các trục x và ct và đều bị kéo dãn ra với cùng một thừa số $\sqrt{\dfrac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}$.

3. Đường vũ trụ

Đường đi của một vật trong không – thời gian được gọi là đường vũ trụ.

Trên giản đồ Min-cốp-xki, trục ct' là đường vũ trụ của một NQS đứng tại gốc toạ độ của HQC O'. Mọi điểm trên trục ct' biểu diễn các sự kiện xảy ra tại chỗ NQS đứng, còn mọi điểm trên trục x' biểu diễn các sự kiện xảy ra đồng thời (tại t' = 0). Một vật chuyển động đều dọc theo trục x' của HQC O' có đường vũ trụ là đường thẳng. Toạ độ của điểm P trên đường vũ trụ của vật trong HQC O' là (x', ct'), được xác định bằng hình bình hành O'CPD (Hình 9.14). Toạ độ x' của điểm P là đoạn O'C.

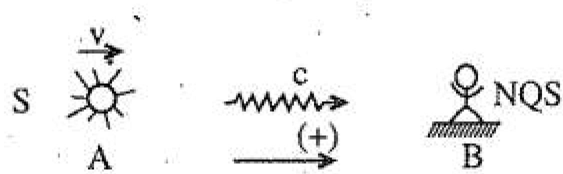


Hình 9.14

4. Bây giờ ta nói đến tác dụng của giản đồ Min-cốp-xki. Nếu cho biết hai sự kiện trong không – thời gian, ta sẽ biểu diễn chúng bằng hai điểm trên giản đồ. Dựa vào giản đồ ta tìm thấy ngay các đại lượng Δx, Δct, Δx', Δct'. Đó chính là các đại lượng mà hai NQS đo được trong hai HQC khác nhau.

VII – HIỆU ỨNG ĐỐP-PLE TƯƠNG ĐỐI TÍNH

1. Giả sử một nguồn S chuyển động thẳng đều với tốc độ v tới NQS (Hình 9.15). Trong HQC của nguồn (HQC O') nguồn phát ra những chớp sáng cách nhau một khoảng thời gian là $\Delta t' = \dfrac{1}{f'}$.



Hình 9.15

Trong HQC của NQS (HQC O) thì thời gian giữa các chớp sáng này là $\Delta t = \gamma\Delta t'$. Như vậy, các phôtôn của một chớp sáng đi được một đoạn đường là cΔt thì chớp sáng sau mới xảy ra. Cũng trong thời gian này thì nguồn đã đi được đoạn đường vΔt về phía NQS. Do đó, tại thời điểm chớp sáng sau xảy ra, các phôtôn của chớp sáng sau ở cách phôtôn của chớp sáng trước một đoạn đường là (c – v)Δt. Gọi ΔT là khoảng thời gian giữa hai lần liên tiếp mắt NQS nhận được chớp sáng, ta có :

$$\Delta T = \frac{(c - v)\Delta t}{c} = \frac{(c - v')\gamma\Delta t'}{c}$$

$$\Delta T = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}\left(\frac{1}{f'}\right)$$

Đặt $\beta = \frac{v}{c}$, ta có :

$$f = \frac{1}{\Delta T} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}f' \quad \begin{cases} v > 0 : f > f' \\ v < 0 : f < f' \end{cases} \qquad (9.13)$$

2. Nếu tại thời điểm xét, nguồn đang chuyển động theo hướng lập với hướng từ A tới B một góc là φ (Hình 9.16) thì ta có :

$$f = \frac{f'\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta\cos\varphi} \qquad (9.14)$$

Hình 9.16

3. Hiệu ứng Đốp-ple đối với ánh sáng nhìn thấy đã cho phép các nhà thiên văn học xác định được chuyển động của các ngôi sao hay thiên hà đối với Trái Đất.

Thật vậy, giả sử có một ngôi sao (nguồn S) chuyển động ra xa Trái Đất trên đường thẳng AB. Thay $\varphi = 180^{o}$ vào công thức (9.14), ta được :

$$f = f'\sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}$$

Vì $\frac{v}{c} \ll 1$ nên :

$$f = f'\left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{f'}{f} = \frac{1}{1 - \frac{v}{c}} = 1 + \frac{v}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta\lambda}{\lambda'} = \frac{v}{c}, \text{ hay : } v = c\frac{\Delta\lambda}{\lambda'} \begin{cases} \Delta\lambda > 0 : \text{ngôi sao chuyển động ra xa} \\ \Delta\lambda < 0 : \text{ngôi sao chuyển động lại gần.} \end{cases}$$

Các quan sát thiên văn cho thấy các thiên hà đang chuyển động ra xa Trái Đất và càng ra xa chúng chuyển động càng nhanh.

VIII – HỆ QUY CHIẾU RIÊNG. GIA TỐC RIÊNG

Để có thể vận dụng được các hiệu ứng của thuyết tương đối hẹp vào việc xét chuyển động có gia tốc của một vật, người ta đưa ra hai khái niệm mới là *HQC riêng và gia tốc riêng của vật*.

Xét một con tàu lúc đầu đứng yên trong HQC đứng yên (HQC phòng thí nghiệm). Gọi t là thời gian chỉ bởi đồng hồ trong HQC đứng yên, $\mathcal{T}$ là thời gian chỉ bởi đồng hồ trong con tàu. Tại thời điểm $t = \mathcal{T} = 0$, tàu được tăng tốc. Tại thời điểm $\mathcal{T}$, tàu có vận tốc là $v(\mathcal{T})$ và được coi là đứng yên tức thời trong một HQC quán tính chuyển động với vận tốc bằng $v(\mathcal{T})$. HQC này gọi là *HQC riêng*. Trong HQC riêng, tàu có *gia tốc riêng* a' nên tại thời điểm $\mathcal{T} + d\mathcal{T}$ tàu có vận tốc $a'd\mathcal{T}$ đối với HQC riêng. Vì tàu có gia tốc riêng a' nên nhà du hành cảm thấy chịu một lực F = ma' tác dụng lên cơ thể.

Bây giờ ta áp dụng công thức cộng vận tốc để tính vận tốc $v(\mathcal{T})$ của tàu đối với HQC đứng yên dưới dạng như sau :

$$v(\mathcal{T} + d\mathcal{T}) = \frac{v(\mathcal{T}) + a'd\mathcal{T}}{1 + \frac{v(\mathcal{T})a'd\mathcal{T}}{c^2}}$$

$$\frac{dv}{d\mathcal{T}} = a'\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \qquad \text{(a)}$$

Lấy tích phân hai vế của (a) :

$$\int_0^v \frac{dv}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \int_0^{\mathcal{T}'} a'd\mathcal{T}'$$

Áp dụng công thức tích phân $\int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \tanh^{-1}x$ và nếu a' không đổi thì ta được :

$$v(\mathcal{T}) = c\tanh\left(\frac{a'\mathcal{T}}{c}\right) \tag{9.15}$$

Để tính v(t) ta áp dụng hiệu ứng 1 dưới dạng $d\mathcal{T} = \frac{dt}{\gamma}$ vào công thức (a) :

$$\frac{\gamma dv}{dt} = a'\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \tag{b}$$

Lấy tích phân hai vế của (b) :

$$\int_0^v \frac{d\left(\frac{v}{c}\right)}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a'}{c}\int_0^t dt = \frac{a't}{c}$$

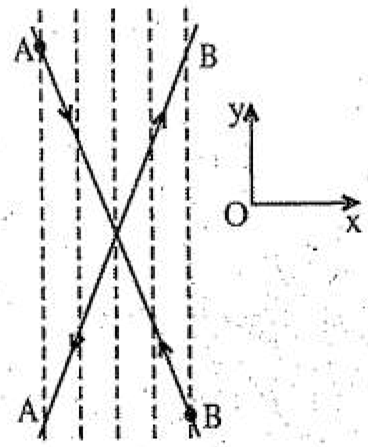
$$v(t) = \frac{\frac{a't}{c}}{\sqrt{1+\left(\frac{a't}{c}\right)^2}} \tag{9.16}$$

B. PHẦN ĐỘNG LỰC HỌC

Bây giờ chúng ta xét trường hợp các hạt chuyển động với tốc độ rất lớn đến va chạm với nhau. Chúng ta thừa nhận rằng trong các va chạm đó, động lượng toàn phần và năng lượng toàn phần của hệ hạt là những đại lượng bảo toàn. Dựa vào các hiệu ứng tương đối tính ở phần trên, chúng ta hãy tìm biểu thức cho hai đại lượng này.

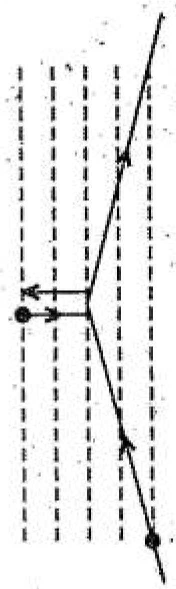
I – ĐỘNG LƯỢNG

1. Xét một hệ gồm hai hạt giống nhau A và B chuyển động đến va chạm với nhau. Trong HQC phòng thí nghiệm (TN), chúng chuyển động ngược chiều với tốc độ bằng nhau nhưng theo hướng x thì tốc độ $|v_x|$ nhỏ, còn theo hướng y thì tốc độ $|v_y|$ lớn (Hình 9.17). Để cho dễ hiểu, ta hãy hình dung một loạt các đường thẳng đứng cách đều nhau để làm căn cứ. Giả sử cả hai hạt đều có đồng hồ giống nhau, chúng kêu tích tắc mỗi khi đi qua một đường.



Hình 9.17

Bây giờ ta xét sự va chạm của hai hạt trong HQC chuyển động theo phương y với cùng vận tốc v_y như hạt A. Trong HQC này tình huống va chạm được mô tả bởi Hình 9.18. Vì va chạm chỉ làm đổi dấu của vận tốc của hai hạt theo trục x, nên $|p_x|$ của hai hạt phải bằng nhau. Nếu không thì động lượng toàn phần $p_{x_A} + p_{x_B}$ của hệ sẽ đổi dấu sau va chạm chứ không được bảo toàn. Thế nhưng trong HQC này thì tốc độ của hai hạt lại không bằng nhau. Hạt A gần như đứng yên, còn hạt B chuyển động với tốc độ rất lớn. Do đó đồng hồ của B chạy chậm hơn đồng hồ của A bởi một thừa số bằng $\frac{1}{\gamma} \equiv \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Và vì đồng hồ của B chỉ kêu tích tắc mỗi khi qua một đường thẳng đứng (sự kiện này độc lập với HQC), nên B phải chuyển động chậm hơn theo phương x bởi một thừa số bằng $\frac{1}{\gamma}$. Do đó, biểu thức $p_x = mv_x$ của cơ học cổ điển không còn đúng cho động lượng. Nếu ta thêm thừa số γ vào p_x để trở thành :



Hình 9.18

$$p_x = \gamma m v_x = \frac{mv_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{9.17}$$

thì đúng với bài toán va chạm này. Thật vậy $\gamma \approx 1$ đối với A và $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ đối với B. Nó khử một cách chính xác *hiệu ứng làm giảm v_x của B.*

Tóm lại, động lượng của một hạt chuyển động với vận tốc $\vec{v}$ là :

$$\vec{p} = \gamma m\vec{v} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{9.18}$$

2. Định luật II Niu-tơn

Thuyết tương đối thừa nhận định luật II Niu-tơn dưới dạng sau đây :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{9.19}$$

Vì γ có thể thay đổi theo thời gian, nên $F = \frac{md(\gamma v)}{dt} = \gamma^3 ma$, tức là $F \neq ma$.

3. Vận tốc giới hạn

Lực tác dụng lên một hạt làm tăng vận tốc của hạt nhưng vận tốc của hạt có thể tăng mãi được không ?

Nếu $v > c$ thì $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ trở thành số ảo : chiều dài, khoảng thời gian không còn là số thực. Suy ra các vật thông thường không thể có tốc độ lớn hơn $c = 3.10^8$ m/s. Cho đến bây giờ $c = 3.10^8$ m/s vẫn là tốc độ giới hạn của vũ trụ.

II – NĂNG LƯỢNG

1. Thuyết tương đối thừa nhận định lí động năng được viết dưới dạng sau đây :

$$Fdx = dE \tag{9.20}$$

2. Dựa vào công thức (9.20) ta tìm biểu thức của năng lượng

$$dE = F.dx = \frac{dp}{dt}dx = vdp$$

Thay $vdp = d(pv) - pdv$ vào ta được :

$$dE = d(pv) - \frac{mvdv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\int_{E_0}^{E} dE = pv - m\int_{v=0}^{v} \frac{vdv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E - E_0 = \gamma mv^2 + mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - mc^2$$

$$= \gamma mv^2 + \gamma mc^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) - mc^2$$

$$E - E_0 = \gamma mc^2 - mc^2.$$

Từ đó ta suy ra :

$$E = \gamma mc^2 \tag{9.21}$$

là năng lượng của một hạt chuyển động với tốc độ v :

$$E_0 = mc^2 \tag{9.22}$$

là năng lượng nghỉ của hạt, tức là năng lượng của hạt khi $v = 0$.

III – MỐI LIÊN HỆ GIỮA NĂNG LƯỢNG VÀ ĐỘNG LƯỢNG

1. $E^2 - p^2c^2 = \gamma^2m^2c^4 - \gamma^2m^2v^2c^2 = \gamma^2m^2c^4\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 = \text{const} \tag{9.23}$$

Đó là một bất biến đối với phép biến đổi Lo-ren-xơ.

2. $\frac{p}{E} = \frac{\gamma mv}{\gamma mc^2} \Rightarrow \frac{p}{E} = \frac{v}{c^2}$ (9.24)

3. Động lượng và năng lượng của một phôtôn :

Theo thuyết lượng tử ánh sáng thì phôtôn có khối lượng $m = 0$ và có năng lượng $\varepsilon = hf$. Theo hệ thức (9.23) thì khi $m = 0$, ta có :

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda} \tag{9.25}$$

IV – KHỐI LƯỢNG

1. Theo quan niệm cũ, người ta muốn động lượng có một dạng đẹp như ở Cơ học cổ điển, nên đã coi γm là khối lượng tương đối tính của hạt, tức là khối lượng của hạt khi chuyển động với tốc độ v rất lớn, còn m là khối lượng nghỉ, tức là khối lượng của hạt khi đứng yên hoặc chuyển động với $v \ll c$ và kí hiệu là m_0. Nhưng nếu theo quan niệm này thì lực F cũng phải có dạng đẹp là $F = \gamma ma$, trong khi như đã thấy $F = \gamma^3 ma$!

2. Theo quan niệm mới (xuất hiện trong vòng 20 năm trở lại đây) thì chỉ có một khối lượng gắn bó với hạt, khối lượng này là một cái gì đó giống như khối lượng của cơ học Niu-tơn hay khối lượng nghỉ theo quan niệm cũ. Vì chỉ có một loại khối lượng nên không cần thiết phải dùng thuật ngữ khối lượng nghỉ hay kí hiệu là m_0. Mặt khác, hệ thức $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$ củng cố thêm cho quan niệm khối lượng m là một bất biến trong khi E và $\vec{p}$ thì phụ thuộc vào HQC. Không có khối lượng tương đối tính mà chỉ có năng lượng tương đối tính $E = \gamma mc^2$ và động lượng tương đối tính được viết là $p = m\gamma v$.

V – ĐỘNG NĂNG. ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN ĐỘNG LƯỢNG VÀ NĂNG LƯỢNG

1. Trong cơ học tương đối, khi ta nói đến năng lượng $E = \gamma mc^2$ của một hạt là ta muốn nói đến *năng lượng toàn phần*. Năng lượng toàn phần bằng tổng của năng lượng nghỉ và động năng (kí hiệu là K).

$$E = E_0 + K \Rightarrow K = (\gamma - 1)mc^2 \tag{9.26}$$

2. Nếu $v \ll c$ thì công thức (9.22) trở thành :

$$K = (\gamma - 1)mc^2 = mc^2\left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \ldots\right) - mc^2 \approx \frac{1}{2}mv^2$$

3. Trong cơ cổ điển, sự sinh ra nhiệt trong va chạm mềm đã phá vỡ sự bảo toàn động năng và nhiệt sinh ra được gắn vào một dạng của năng lượng. Còn trong cơ tương đối chúng ta không lo lắng về sự sinh ra nhiệt. Nhiệt sinh ra được chuyển vào khối lượng của hạt mới. Phần năng lượng tương ứng với phần tăng khối lượng của hạt mới lấy từ động năng ban đầu của hai hạt (xem bài tập 9.21). Như vậy, *hai định luật bảo toàn động lượng và năng lượng trong thuyết tương đối áp dụng được cho mọi loại va chạm*. Còn khối lượng không nhất thiết được bảo toàn trong va chạm nên động năng cũng không nhất thiết được bảo toàn (xem bài tập 9.21).

BÀI TẬP

9.1. Một thanh đứng yên trong HQC O', có chiều dài riêng l' và làm với trục O'x' một góc θ'. HQC O' chuyển động với vận tốc v dọc theo trục Ox của HQC O. Các trục Ox và O'x' trùng nhau. Hãy tính chiều dài l của thanh và góc θ mà thanh làm với trục Ox trong HQC O.

$$ĐS: l = l'\left[1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)\cos^2\theta'\right]^{\frac{1}{2}}.$$

$$\tan\theta = \frac{\tan\theta'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

9.2. Một thanh có chiều dài riêng l', chuyển động dọc theo một chiếc thước đứng yên với vận tốc không đổi là v. NQS B (trong HQC gắn với thước) đã đánh dấu đồng thời vị trí của hai đầu thanh lên thước và đọc được khoảng cách giữa hai dấu là $\Delta x_1 = 4$ m. NQS A (trong HQC gắn với thanh) đã đánh dấu đồng thời vị trí của hai đầu thanh lên thước. NQS B đọc được trên thước khoảng cách giữa hai dấu là $\Delta x_2 = 9$ m. Tính l' và v và giải thích các phép đo dựa trên hiệu ứng 1 (Sự mất tính đồng thời).

ĐS : 6 m ; v = 0,745c.

9.3. Một thiên hà có đường kính xấp xỉ 10^5 năm ánh sáng. Một prôtôn bay với vận tốc v = 0,99999 c đối với HQC đứng yên của thiên hà. Hỏi prôtôn phải bay mất bao lâu thì qua được thiên hà ?

a) Đo trong HQC đứng yên đối với thiên hà.

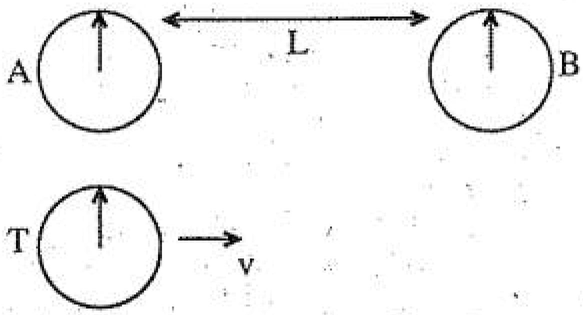
b) Đo trong HQC đứng yên đối với prôtôn.

Gợi ý : Trong bài này ta dùng đơn vị độ dài là năm ánh sáng (kí hiệu là n.c). Năm ánh sáng là chiều dài quãng đường mà ánh sáng đi được trong một năm

$$1\text{n.c} = 9{,}46.10^{12}\text{ km}.$$

ĐS : a) 10^5 năm ; b) 450 năm.

9.4. Có hai hành tinh A và B, đứng yên so với nhau, cách nhau là L và có các đồng hồ chạy đồng bộ. Một con tàu T bay với tốc độ v qua hành tinh A tới hành tinh B. Đúng vào lúc con tàu đi qua A thì các đồng hồ đều được chỉnh để chỉ số 0 (Hình 9.19). Hỏi khi con tàu qua B, thì các đồng hồ B và T chỉ thế nào ?



Hình 9.19

a) Xét trong HQC hành tinh.

b) Xét trong HQC con tàu.

ĐS : a) Đồng hồ ở hành tinh chỉ $\dfrac{L}{v}$

b) Đồng hồ trong con tàu chỉ $\dfrac{L}{\gamma v}$.

9.5. Hạt muyôn là loại hạt cơ bản không bền, có một thời gian sống trung bình (thời gian sống riêng) vào khoảng 2,2 μs. Hãy tính thời gian sống của một hạt muyôn bay với tốc độ 0,99 c và quãng đường đi được kể từ lúc sinh ra cho đến lúc bị phân hủy (đo trong HQC phòng thí nghiệm).

ĐS : 15,595 μs ; 4,632 km.

9.6. Hai con tàu, mỗi chiếc dài 100 m (được đo khi đứng yên) bay về phía nhau với tốc độ 0,85c đối với Trái Đất.

a) Mỗi tàu dài bao nhiêu khi được đo bởi một NQS trên Trái Đất ?

b) Tại thời điểm t = 0 (đo trên Trái Đất) hai mũi tàu gặp nhau khi chúng bay qua nhau. Hỏi tại thời điểm nào thì hai đuôi tàu đi qua nhau ?

c) Vận tốc của mỗi tàu được đo bởi NQS trong tàu kia thì bằng bao nhiêu ?

ĐS : a) 52,68 m ; b) $2{,}066.10^{-7}$ s ; c) –0,987c.

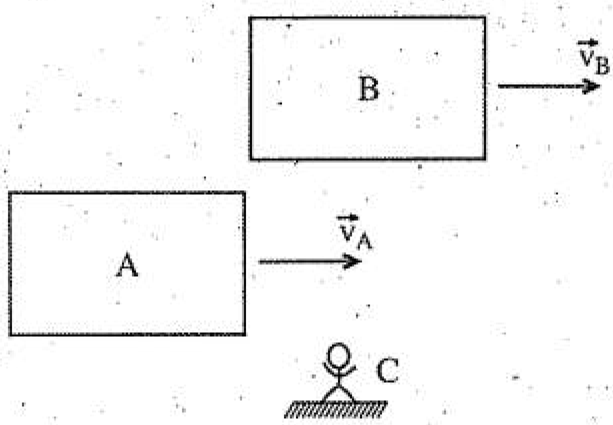
9.7. Có hai HQC quán tính O và O' có hai trục x và x' trùng nhau. HQC O' chuyển động dọc theo trục x với vận tốc $v = 0{,}50c$ đối với HQC O. Một tên lửa chuyển động dọc theo trục y với vận tốc $u = 0{,}20c$ (được đo trong HQC O). Hỏi trong HQC O' thì tên lửa chuyển động với vận tốc bằng bao nhiêu và theo hướng nào ?

ĐS : 0,53c ; $161{,}2^o$ đối với trục x'.

9.8. Hai con tàu A và B chuyển động dọc theo một đường thẳng và theo cùng một hướng, B ở trước mặt A. Trong HQC Trái Đất, tốc độ của A là 0,50c, của B là 0,75c. Một tên lửa được bắn ra từ A và bay về phía B với vận tốc là v đối với A. Hỏi v phải có giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu để tên lửa gặp B.

ĐS : 0,40c

9.9. Hai tàu A và B, mỗi tàu có chiều dài riêng L_0 và chuyển động cùng chiều. A có vận tốc $\frac{4c}{5}$ còn B có vận tốc $\frac{3c}{5}$ đối với mặt đất. Lúc bắt đầu xét thì đầu tàu A ngang qua đuôi tàu B (Hình 9.20). Hỏi :



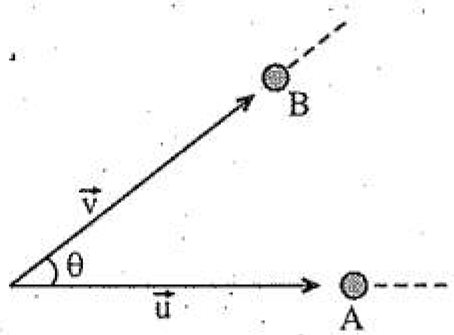
Hình 9.20

a) NQS C đứng ở mặt đất thấy tàu A cần bao nhiêu thời gian để vượt tàu B (tức là để đuôi tàu A ngang qua đầu tàu B) ?

b) NQS B đứng trong tàu B thấy tàu A cần bao nhiêu thời gian để vượt tàu B ?

ĐS : a) $\frac{7L_0}{c}$; b) $\frac{5L_0}{c}$.

9.10. Trong HQC phòng thí nghiệm, hai hạt A và B chuyển động với vận tốc $\vec{u}$ và $\vec{v}$ dọc theo các đường được chỉ trên Hình 9.21. Góc giữa hai quỹ đạo là θ. Hỏi vận tốc của mỗi hạt được quan sát thấy bởi hạt kia bằng bao nhiêu ?



Hình 9.21

ĐS : $c\sqrt{1 - \frac{(1-u^2)(1-v^2)}{(1-uv\cos\theta)^2}}$; $\tan\theta' = \frac{v\sin\theta\sqrt{c^2 - u^2}}{c(v\cos\theta - u)}$.

9.11. Trong HQC O có hai xung ánh sáng được phát ra cách nhau 5 μs ở hai vị trí cách nhau 5 km. Một NQS chuyển động song song với đường nối hai điểm ở đó phát ra xung ánh sáng thì ghi được rằng hai xung ánh sáng phát ra đồng thời. Hãy tìm vận tốc của NQS.

ĐS : 9.10^7 m/s.

9.12. NQS A nhìn thấy hai sự kiện xảy ra ở cùng một chỗ và cách nhau về thời gian là 1.10^{-6} s. NQS B nhìn thấy chúng cách nhau về thời gian là 2.10^{-6} s. Hỏi :

a) NQS B nhìn thấy hai sự kiện xảy ra ở hai chỗ cách nhau bao nhiêu ?

b) Vận tốc của NQS B so với NQS A là bao nhiêu ?

ĐS : a) 520 m ; b) $\frac{\sqrt{3}c}{2}$.

9.13. Trong HQC đứng yên, sự kiện (1) xảy ra tại (x = 0, ct = 0), sự kiện (2) xảy ra tại (x = 2, ct = 1). Bằng cách dùng giản đồ Min-cốp-xki hãy tìm một HQC chuyển động trong đó hai sự kiện xảy ra đồng thời.

ĐS : HQC chuyển động theo trục x với $v = \frac{1}{2}c$.

9.14. HQC O' chuyển động theo chiều dương của trục x của HQC O đứng yên với tốc độ v.

a) Một thước dài 1m nằm yên dọc theo trục x' của HQC O'. Hỏi nếu NQS đứng yên trong HQC O đo độ dài của thước thì được kết quả bao nhiêu ?

b) Bây giờ đặt thước nằm yên dọc theo trục x của HQC O. Nếu NQS đứng yên trong HQC O' đo độ dài của thước thì được kết quả bao nhiêu ?

Giải bằng giản đồ Min-cốp-xki.

ĐS : a) $\sqrt{1-\beta^2}$; b) $\sqrt{1-\beta^2}$.

9.15. Một vật chuyển động với tốc độ v_1 trong HQC O'. HQC O' chuyển động với tốc độ v_2 so với HQC O đứng yên theo chiều chuyển động của vật. Dùng giản đồ Min-cốp-xki hãy tìm vận tốc u của vật đối HQC O.

ĐS : $u = \dfrac{v_1 + v_2}{1 + \dfrac{v_1 v_2}{c^2}}$.

9.16. Một nguồn sáng S đặt tại $x = 0$ trong HQC O. Tại $t = 0$ nguồn phát ra một xung ánh sáng P_1 và sau đó $\mathscr{T}$ giây nó lại phát ra một xung ánh sáng P_2. Một HQC O' chuyển động với vận tốc v theo chiều dương của trục x so với HQC O. NQS đứng tại O' của HQC O' nhận được xung P_1 tại thời điểm $t' = 0$.

a) Trong HQC O', xung P_2 xảy ra tại thời điểm nào và tại vị trí nào ?

b) NQS đứng tại O' nhận được xung P_2 tại thời điểm nào ?

c) Hãy tìm biểu thức cho hiệu ứng Đốp-ple cho ánh sáng.

9.17. Một con tàu bay ra xa Trái Đất với vận tốc v. Trên tàu có máy phát và máy thu tín hiệu rađa. Trên đường đi nó phát một xung rađa về phía Trái Đất. Đồng hồ trên tàu cho biết tàu nhận được tín hiệu phản xạ từ Trái Đất sau 40 s kể từ lúc phát, đồng thời máy thu nhận được tín hiệu phản xạ có tần số bằng một nửa tần số của tín hiệu phát đi.

a) Tìm vận tốc của tàu đối với Trái Đất.

b) Khi Trái Đất nhận được tín hiệu thì nó cách tàu bao xa ?

c) Khi tàu nhận được tín hiệu phản xạ thì nó cách Trái Đất bao xa ?

ĐS : a) $\frac{1}{3}c$; b) 20c ; c) $20\sqrt{2}c$.

9.18. Một hạt mêzôn π có khối lượng m đang chuyển động tương đối tính với vận tốc v theo chiều x dương thì phân hủy thành hai phôtôn. Hãy xác định năng lượng và động lượng của các phôtôn trong HQC phòng thí nghiệm trong hai trường hợp :

a) Hai phôtôn bay ngược chiều nhau dọc theo trục x.

b) Hai phôtôn bay theo hướng làm thành những góc bằng nhau với trục x.

ĐS : a) $\gamma mc\left(\frac{c+v}{2}\right)$; $\gamma m\frac{(c+v)}{2}$; b) $\gamma m\frac{c^2}{2}$; $\gamma m\frac{c}{2}$.

9.19. Một hạt có khối lượng M đang đứng yên trong HQC phòng thí nghiệm thì phân rã thành hai mảnh có khối lượng không bằng nhau m_1 và m_2. Hãy suy ra một biểu thức cho độ lớn của động lượng của mỗi hạt trong HQC phòng thí nghiệm.

ĐS : $p = \frac{c}{2M}\sqrt{[M^2 - (m_1 + m_2)^2][M^2 - (m_1 - m_2)^2]}$.

9.20. Một prôtôn có khối lượng $m = 1,67.10^{-27}$ kg.

a) Tính năng lượng nghỉ của prôtôn ra đơn vị Jun và MeV.

b) Nếu năng lượng toàn phần của prôtôn bằng 3 lần năng lượng nghỉ của nó thì tốc độ của prôtôn bằng bao nhiêu ?

c) Khi ấy động năng của prôtôn (theo đơn vị MeV) và động lượng của prôtôn (theo đơn vị MeV/c) bằng bao nhiêu ?

Cho biết $1eV = 1,6.10^{-19}$ cv $= 1,6.10^{-19}$ J.

ĐS : a) $1,50.10^{-10}$ J ; 939 MeV ; b) 0,943c ; c) 2660 MeV/c.

9.21. Trong HQC phòng thí nghiệm có hai hạt giống nhau, khối lượng m, chuyển động ngược chiều nhau với cùng tốc độ u đến va chạm với nhau. Sau va chạm chúng dính vào nhau (va chạm mềm) và tạo thành một hạt mới có khối lượng M. Tính M.

ĐS : $M = \dfrac{2m}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}$.

9.22. Một phôtôn có tần số f, bay đến va chạm với một êlectron đang đứng yên. Sau va chạm, phôtôn bị lệch đi một góc 90^o so với hướng ban đầu và có tần số f', còn êlectron thì có động lượng tương đối tính là $\vec{p}$ làm thành một góc θ so với hướng ban đầu của phôtôn.

a) Chứng tỏ rằng $c^2p^2 = h^2(f^2 + f'^2)$ và $f' = \left(1 + \dfrac{hf}{mc^2}\right)^{-1} f$.

b) Khi $hf \ll mc^2$ thì f', θ và p bằng bao nhiêu ?

9.23. Một hạt mêzôn π có động lượng $5m_\pi c$ va chạm với một prôtôn, khối lượng $m_p = 7m_\pi$ đang đứng yên. Va chạm là đàn hồi. Hãy tìm :

a) Vận tốc của khối tâm của hệ hai hạt.

b) Năng lượng toàn phần của hệ trong HQC khối tâm.

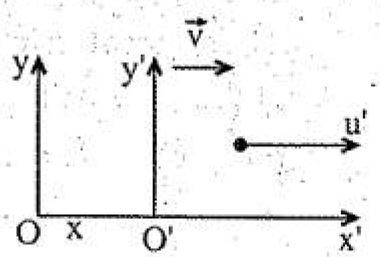
c) Động lượng của hạt mêzôn π trong HQC khối tâm.

ĐS : a) 0,413c ; b) $11,02\ m_\pi c^2$; c) $3,17\ m_\pi c$.

9.24. Một hạt, khối lượng m, bị phân rã thành hai phôtôn. Thừa nhận rằng một phôtôn có năng lượng $\varepsilon = hf$ và có động lượng $p = \frac{hf}{c}$. Bằng cách xét sự phân hủy này trong HQC mà hạt đứng yên và trong HQC mà hạt chuyển động với vận tốc v, hãy suy ra công thức tương đối tính cho năng lượng $E = \gamma mc^2$ và động lượng $p = \gamma mv$ của hạt.

Gợi ý : Sử dụng hiệu ứng Đốp-ple tương đối tính.

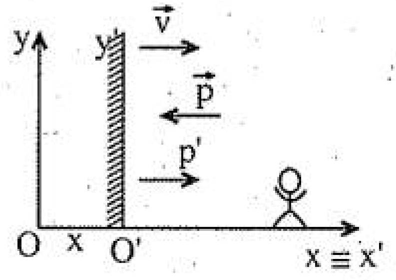
9.25. Có hai HQC QT : HQC O đứng yên, HQC O' chuyển động với vận tốc v theo chiều dương của trục x của O. Một hạt chuyển động dọc theo trục x' trong HQC O' với động lượng p' và năng lượng E' (Hình 9.22). Tìm công thức tính p và E của hạt trong HQC O.



Hình 9.22

ĐS : $p = \gamma\left(p' + \frac{vE}{c^2}\right)$; $E = \gamma(E' + vp')$.

9.26. Một gương phẳng chuyển động trong chân không với vận tốc tương đối tính là $\vec{v}$. Một chùm phôtôn, tần số f, tới vuông góc với gương (Hình 9.23). Hỏi năng lượng và tần số của mỗi phôtôn phản xạ ?



Hình 9.23

Tính bằng hai cách.

Cách 1. Dùng phép biến đổi E và p trong hai HQC O và O'.

Cách 2. Dùng công thức Đốp-ple tương đối tính.

ĐS : $f\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)$; $hf\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)$.

9.27. Một hạt khối lượng m chịu một lực không đổi F hướng theo trục Ox của HQC O. Ở thời điểm ban đầu hạt đứng yên tại O.

Hãy xác định vận tốc và toạ độ x của hạt theo thời gian t.

9.28. Hai hạt giống nhau, khối lượng m, đang đứng yên cách nhau một đoạn x. Một lực không đổi F gia tốc cho một hạt chuyển động hướng tới hạt kia cho đến khi chúng va chạm và dính vào nhau. Hỏi :

a) Thời gian chuyển động của hạt chịu lực ?

b) Khối lượng của hạt tạo thành ?

$$ĐS: \text{a) } t = \frac{mc}{F}\sqrt{\left(\frac{Fx + mc^2}{mc^2}\right)^2 - 1}\ ; \text{ b) } M = m\sqrt{2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right)}$$

9.29. Xét một hạt có khối lượng m chịu một lực F của trường lực không đổi và đều (được xác định trong HQC đứng yên) hướng theo chiều dương của trục x. Gọi t là thời gian trong HQC đứng yên. Gọi τ là thời gian được chỉ bởi đồng hồ của hạt. Ban đầu hạt đứng yên tại gốc toạ độ ($t = \tau = 0$; $x = 0$). Hãy tính :

a) Gia tốc a của hạt đối với HQC đứng yên.

b) Vận tốc v(t) của hạt tại thời điểm t trong HQC đứng yên.

c) Gia tốc riêng a' của hạt.

d) Vận tốc $v(\tau)$ của hạt tại thời điểm đồng hồ của hạt chỉ τ.

$$ĐS: \text{a) } a = \frac{F}{\gamma^3 m}\ ; \text{ b) } v(t) = \frac{\frac{Ft}{mc}}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2}}\ ; \text{ c) } a' = \gamma^3 a\ ; \text{ d) } v(\tau) = c\tanh\left(\frac{a'\tau}{c}\right).$$

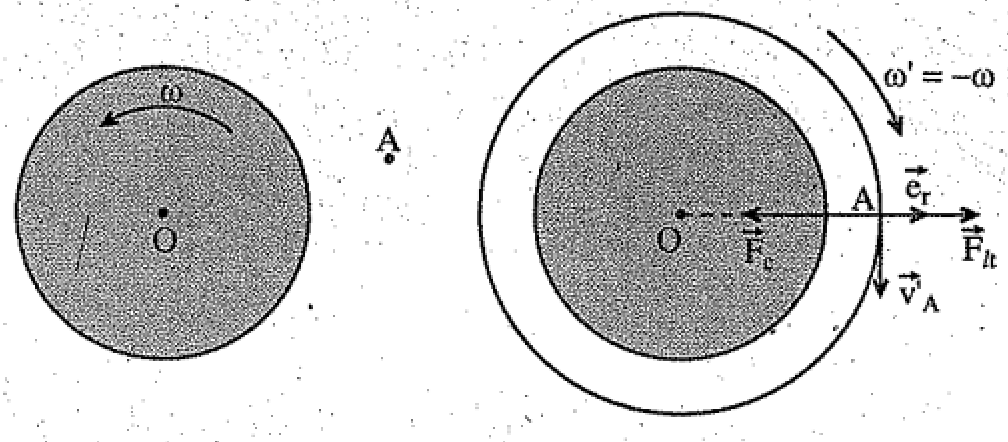
HƯỚNG DẪN GIẢI

CHỦ ĐỀ 1

1.1. a) Chuyển động tròn đều (theo chiều ngược lại với chiều quay của sàn).

b) Gia tốc hướng tâm.

c) Lực li tâm và lực Cô-ri-ô-lít (Hình 1.1Gb).



a) HQC đất b) HQC sàn

Hình 1.1G

Gọi $\vec{e}_r$ là vectơ đơn vị $\left(\vec{e}_r = \dfrac{\vec{r}'}{r'}\right)$.

$$\vec{F}_{lt} = -m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') \text{ (với } \vec{r}' = \overrightarrow{OA})$$

$$\vec{F}_{lt} = m\omega^2 r'\vec{e}_r$$

$$\vec{F}_c = -2m(\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_A) = -2m[\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')]$$

$$\vec{F}_c = -2m\omega^2 r'\vec{e}_r$$

$$\vec{F}_{ht} = \vec{F}_{lt} + \vec{F}_c = -m\omega^2 r'\vec{e}_r$$

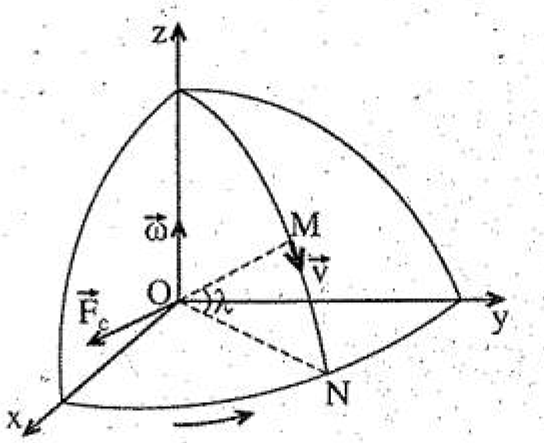
($\vec{F}_{ht}$ là hợp lực của lực li tâm và lực Cô-ri-ô-lít):

Chú ý :

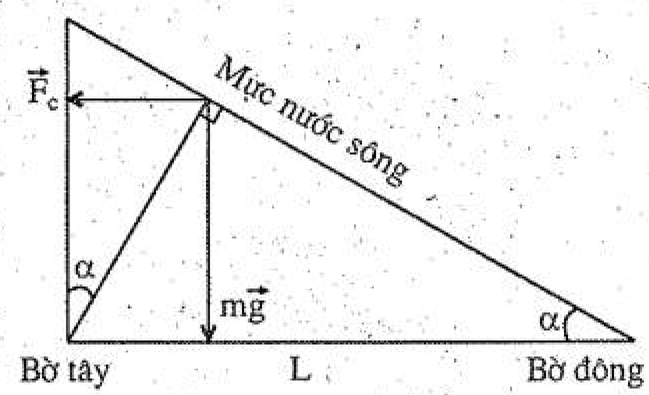
– Trong HQC đất, đứa trẻ tại A chịu hai lực cân bằng, trọng lực và phản lực của mặt đất. Đó là hai *lực thực*, có nguồn gốc từ sự tương tác giữa các vật.

– Trong HQC sàn, đứa trẻ chịu thêm hai lực quán tính, lực li tâm và lực Cô-ri-ô-lít. Hai lực này không phải là hai lực thực mà là hai *lực ảo*. Các lực ảo có nguồn gốc từ HQC phi quán tính.

1.2. a) Chọn HQC gắn với Trái Đất. Đây là HQC quay với chu kì quay là 24 h. Con sông chảy về phía nam do đó chịu thêm lực Cô-ri-ô-lít.



Hình 1.2G



Hình 1.3G

Theo công thức $\vec{F}_c = -2m(\vec{\omega} \wedge \vec{v}')$ thì $\vec{v}'$ ở đây chính là vận tốc $\vec{v}$ của dòng chảy. Lực $\vec{F}_c$ vuông góc với mặt phẳng chứa hai vectơ $\vec{\omega}$ và $\vec{v}$, tức là vuông góc với mặt phẳng kinh tuyến qua M (Hình 1.2G). Suy ra $\vec{F}_c$ nằm ngang và vuông góc với ON. Lực này hướng về phía tây làm mực nước ở bờ tây cao hơn (Hình 1.3G).

b) Theo định nghĩa chính xác thì trọng lực là hợp lực của lực hấp dẫn và lực li tâm tác dụng lên vật. Trọng lực có phương thẳng đứng (Hình 1.3G).

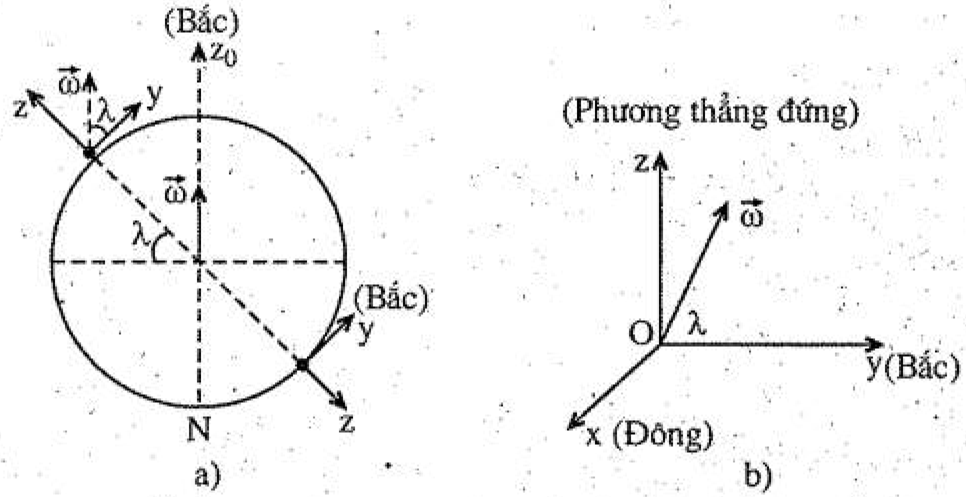
$$\tan\alpha = \frac{F_c}{mg} = \frac{2m\omega v \sin\lambda}{mg}$$

$$h = L\tan\alpha = \frac{2L\omega v \sin\alpha}{g}$$

c) h = 5,3 cm.

1.3. Xem Hình 1.4G (a và b).

a) Xét chuyển động rơi của vật trong HQC quay gắn với Trái Đất, có gốc tọa độ tại O ở mặt đất, trục Oz thẳng đứng (tức có phương của dây rọi), trục Oy hướng về phía bắc, trục Ox hướng về phía đông. Gọi $\vec{\omega}$ là vectơ vận tốc góc của HQC (cũng là của Trái Đất), $\vec{\omega}$ hướng theo trục bắc – nam của Trái Đất. Gọi $\vec{v}$ là vận tốc của vật trong HQC này. Theo công thức tính lực Cô-ri-ô-lít $\vec{F}_c = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$ ta thấy lực này hướng về phía đông (Hình 1.4b).



Hình 1.4G

b) Áp dụng định luật II Niu-tơn cho HQC quay :

$$m\vec{a} = \vec{F}_{hd} + \vec{F}_{lt} + \vec{F}_c$$

Thay $\vec{F}_{hd} + \vec{F}_{lt} = m\vec{g}$, ta được :

$$m\vec{a} = m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

hay $\vec{a} = \vec{g} - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}$ (1)

Gọi $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ và $\vec{e}_z$ là các vectơ đơn vị trên các trục toạ độ x, y, z.

Lúc đầu vật rơi thẳng đứng xuống, nên ta có thể coi một cách gần đúng $\vec{v} = gt\vec{e}_z$. Phương trình (1) được viết thành :

$$\vec{a} \approx -g\vec{e}_z + 2gt\vec{\omega} \wedge \vec{e}_z$$

$$\vec{a} \approx -g\vec{e}_z + 2g\omega t \cos\lambda \qquad (2)$$

Chiếu phương trình (2) lên trục x ta được :

$$\vec{a}.\vec{e}_x = \ddot{x} = 2\omega gt \cos\lambda$$

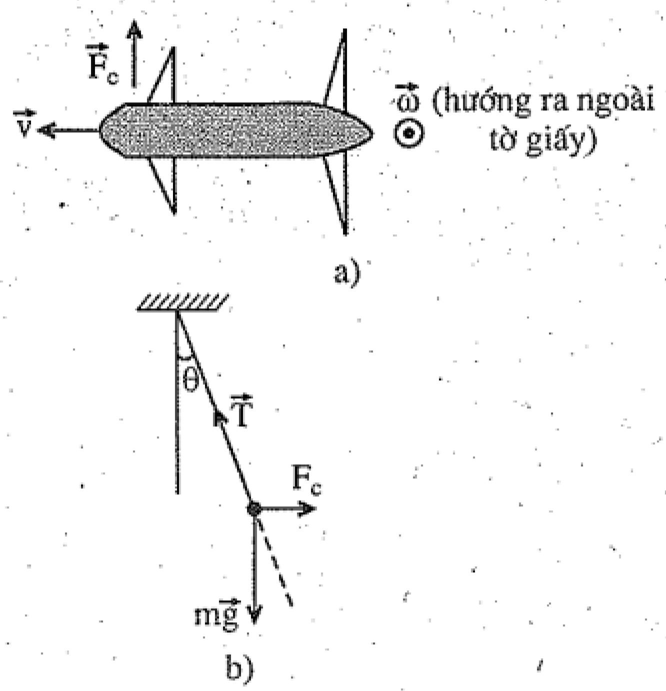
Suy ra : $\dot{x} = gt^2\omega\cos\lambda$ và $x = \dfrac{1}{3}gt^3\omega\cos\lambda$ (3)

Thay $h \approx \frac{1}{2}gt^2$ vào (3) ta được : $x = \left(\frac{8h^3}{9g}\right)^{\frac{1}{2}} \omega\cos\lambda$

c) $x \approx 8$ mm.

1.4. Trong HQC quay của Trái Đất, quả rọi trong máy bay đang bay chịu ba lực : lực hấp dẫn, lực li tâm và lực Cô-ri-ô-lít. Lực hấp dẫn luôn hướng về tâm Trái Đất nên không gây ra độ lệch nào so với $\vec{r}$. Do đó ta chỉ còn xét hai lực quán tính.

a) Tại Bắc cực, máy bay bay vuông góc với trục quay của Trái Đất (tức là vuông góc với vectơ $\vec{\omega}$) còn vectơ $\vec{r}$ thì trùng với vectơ $\vec{\omega}$ (Hình 1.5G). Suy ra lực li tâm bằng 0 ($\vec{F}_{lt} = -m\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{r}) = \vec{0}$). Lực li tâm cũng không gây ra độ lệch nào. Lực Cô-ri-ô-lít $\vec{F}_c = -2m(\vec{\omega}\wedge\vec{v})$ hướng sang phải so với hướng chuyển động của máy bay.



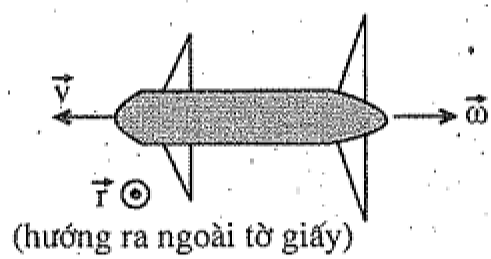
Hình 1.5G

Từ Hình 1.5Gb ta tính được góc lệch θ :

$$\tan\theta = \frac{F_c}{mg} = \frac{2m\omega v}{mg} = \frac{2\omega v}{g}$$

Thay giá trị bằng số : v = 250 m/s, $\omega = 7{,}272.10^{-5}$ rad/s và g = 9,81 m/s, ta được $\theta = 0{,}21^\circ$.

b) Khi máy bay bay qua xích đạo về phía nam, vectơ $\vec{v}$ của máy bay cùng phương, ngược chiều với vectơ $\vec{\omega}$ (Hình 1.6G). Lực Cô-ri-ô-lít bằng 0 còn lực li tâm thì cùng hướng với vectơ $\vec{r}$. Vì thế góc lệch của dây rọi bằng 0.

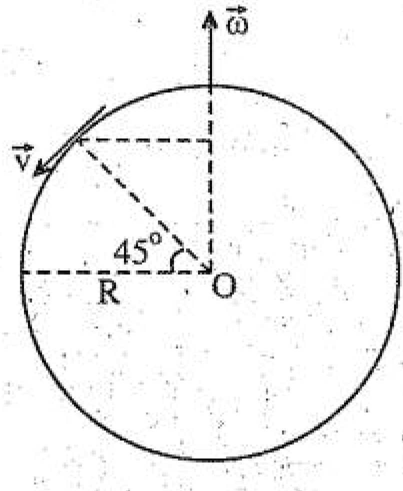


Hình 1.6G

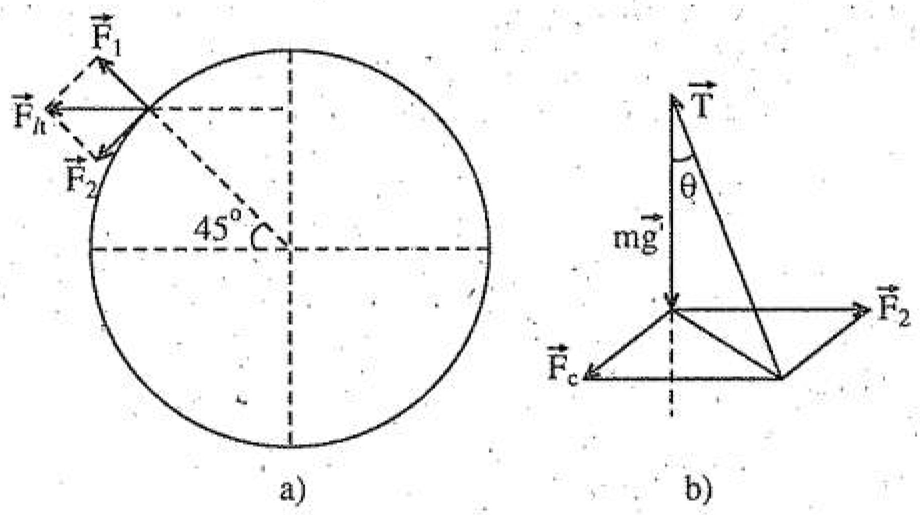
c) Khi máy bay qua vĩ độ $\lambda = 45^o$ về phía nam (Hình 1.7G) :

• Lực $\vec{F}_c$ có độ lớn là $m\omega v\sqrt{2}$ và hướng vào trong tờ giấy, tức là hướng về bên phải so với hướng chuyển động của máy bay.

• Lực li tâm trên Hình 1.8G thì hướng sang trái và có độ lớn là $\frac{m\omega^2 R}{\sqrt{2}}$. Đối với hướng chuyển động của máy bay, lực li tâm hướng chếch lên 45^o so với phương ngang về phía trước.



Hình 1.7G



Hình 1.8G

Thành phần $\vec{F}_1$ của lực li tâm (Hình 1.8G) làm giảm giá trị của gia tốc gây ra bởi lực hấp dẫn. Gia tốc trọng trường biểu kiến tại vị trí này là $g' = 9,81 - \frac{R\omega^2}{2} = 9,81 - 0,02 = 9,79\ m/s^2$.

Thành phần $\vec{F}_2$ của lực li tâm hướng theo vận tốc $\vec{v}$ của máy bay.

• Góc lệch θ so với $\vec{r}$ (tức là so với $-\vec{g}'$) có thể dựa vào Hình 1.8Gb để tính :

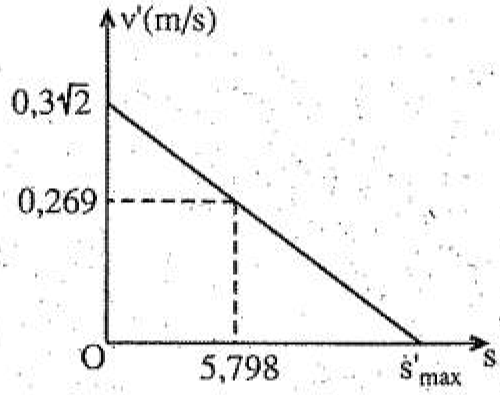
$$\tan\theta = \frac{\sqrt{F_c^2 + F_2^2}}{mg} = \frac{\sqrt{(\omega v\sqrt{2})^2 + \frac{\omega^2 R}{2}}}{g'} = \sqrt{(0,15)^2 + (0,10)^2} = 0,18^o.$$

1.5. Do lực cản ngược chiều với vận tốc tương đối nên không làm thay đổi chiều của vận tốc tương đối và quỹ đạo của bè trong HQC gắn với dòng nước là một đường thẳng.

Gọi $\vec{v}$ là vận tốc của bè so với bờ ;

$\vec{v}'$ là vận tốc của bè so với dòng nước ;

v_n là vận tốc của dòng nước so với bờ.



Hình 1.9G

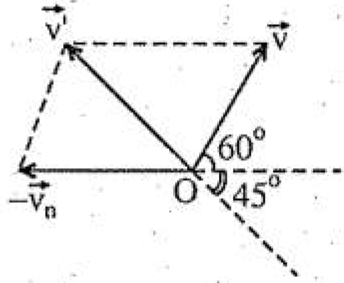
$$\frac{md\vec{v}}{dt} = m\frac{d}{dt}(\vec{v}' + \vec{v}_n) = -kv'$$

$$d\vec{v}' = -\frac{k}{m}\vec{v}'dt$$

Suy ra $v' - v_0' = -\frac{k}{m}(s' - s_0')$ (Hình 1.9G)

Tại $t = 0$: $v_0' = 0,3\sqrt{2}$ m/s ; $s_0' = 0$

Tại thời điểm khi $\vec{v}$ làm với trục Ox một góc 60^o.



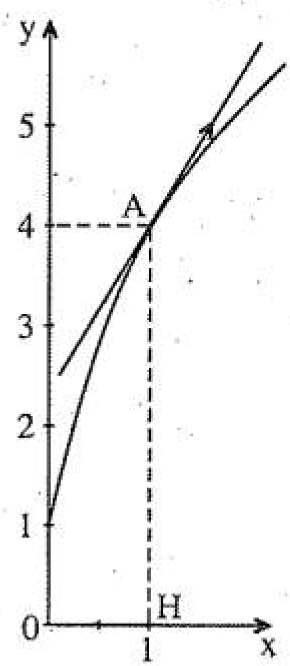
Hình 1.10G

Theo Hình 1.10G ta có :

$$\frac{v'}{\sin 60^o} = \frac{v_n}{\sin(180^o - 45^o - 60^o)}$$

$\Rightarrow v' = 0,269$ m/s.

Theo đồ thị Hình 1.11G thì là điểm A cách bờ AH = 4,1 m. Suy ra :



Hình 1.11G

$$s' = 4,1.\sqrt{2} = 5,798 \text{ m}$$

Suy ra tiếp $s_{max} = 15,86$ m.

Vậy bè cách bờ một đoạn là :

$$BH = \frac{AH}{5,798}.15,86 = 11,21$$

$BH \approx 11,2$ m

Cách giải 2 :

$$\frac{md\vec{v}}{dt} = -k(\vec{v} - \vec{v}_n)$$

Ox : $$\frac{mdv_x}{dt} = -k(v_x - v_n) \qquad (1)$$

$$\frac{mdv_y}{dt} = -kv_y \qquad (2)$$

(1) $$\Rightarrow v_x = v_n\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) = \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow x = v_n t - v_n\frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \qquad (3)$$

(2) $$\Rightarrow v_y = v_n e^{-\frac{k}{m}t} \text{ (do } v_0 = v_n)$$

$$y = v_n\frac{k}{m}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) : $x = v_n t - y$

Theo Hình 1.11G, vật đi qua điểm (1 ; 4, 1) tại thời điểm t_0 :

$$1 = v_n t - 4{,}1 \Rightarrow t_0 = \frac{5{,}1}{0{,}3} \qquad (5)$$

Thay (5) vào (3) ta có :

$$1 = v_n t_0 - v_n\frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t_0}\right) \Rightarrow \frac{m}{k} = 37{,}5$$

Từ (4) suy ra : $y_{max} = \frac{m}{k}v_n = 37{,}5.\ 0{,}3 \approx 11{,}2$ m.

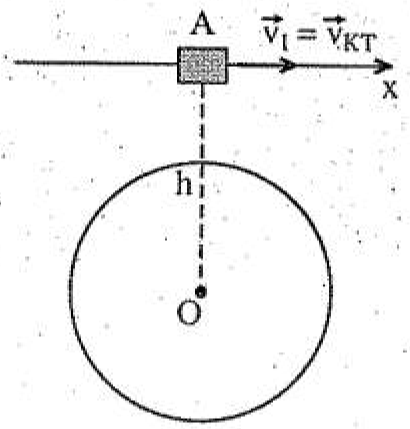
1.6. Gọi ô tô 1 là ô tô chuyển động trên đường thẳng còn ô tô kia là ô tô 2.

a) Giả sử đầu bài cho đồ thị của v_{12} :

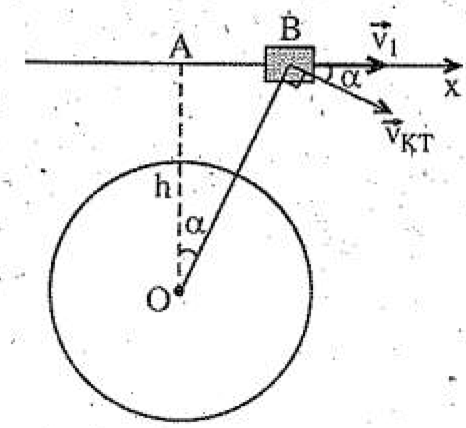
$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{12} - \vec{v}_{KT} = \vec{v}_{12} - \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}$$

Theo đồ thị, tại $t_1 = 20$ s thì $v = 0$. Suy ra $\vec{v}_1 = \vec{v}_{KT} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$ và ô tô 1 lúc đó ở vị trí A trên cung tròn (Hình 1.12G). Suy ra :

$$v_1 = \omega.OA = \frac{v_2}{R}h \qquad (1)$$



Hình 1.12G



Hình 1.13G

Bây giờ ta xét tại t bất kì lớn hơn (hay bé hơn) t_1 một chút (Hình 1.13G).

Khi đó ô tô ở điểm B và $v_{KT} = \omega.OB = \frac{v_2}{R}.OB$.

Chiếu phương trình vectơ $\vec{v}_1 = \vec{v}_{12} + \vec{v}_{KT}$ lên trục x, ta được :

$$v_1 = \omega.OB.\cos\alpha + v_{(12)x}$$

$$v_1 = \frac{v_2}{R}h + v_{(12)x}$$

Nhưng theo (1), $v_1 = \frac{v_2 h}{R}$, suy ra $v_{(12)x} = 0$ tại mọi $t \neq 20$ s. Điều đó là vô lí.

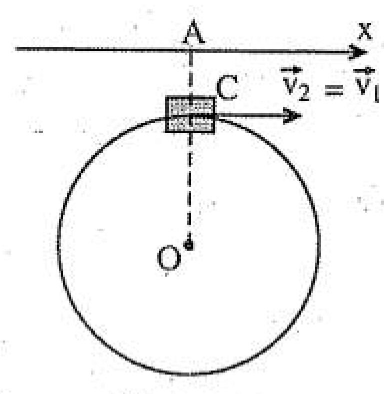
b) Bây giờ ta xét trường hợp đồ thị của v_{21}.

Tại $t_1 = 20$ s, $v_{21} = 0$, suy ra $v_2 = v_{KT}$.

Ở đây $\vec{v}_{KT} = \vec{v}_1$ nên ta được : $v_2 = v_1 = v$ (2)

và ô tô 2 lúc đó ở C (Hình 1.14G).

Bây giờ ta xét tại t lớn hơn (hay bé hơn) t_1 một chút (Hình 1.15G).

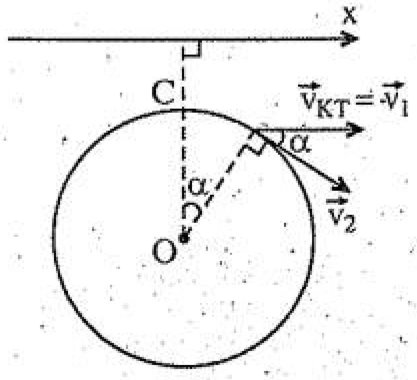


Hình 1.14G

$$v_{12}^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\alpha$$

$$v_{12}^2 = 2v^2(1 - \cos\alpha)$$

$$v_{12}^2 = 2v^2.2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$



Hình 1.15G

Suy ra : $$v_{12} = 2v\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$$

$$v_{12} = 2v\left|\sin\left[\frac{\omega(t - 20)}{2}\right]\right|$$

Theo đồ thị của đầu bài, tại t = 25 s thì v_{12} = 10 m/s. Thế vào ta được :

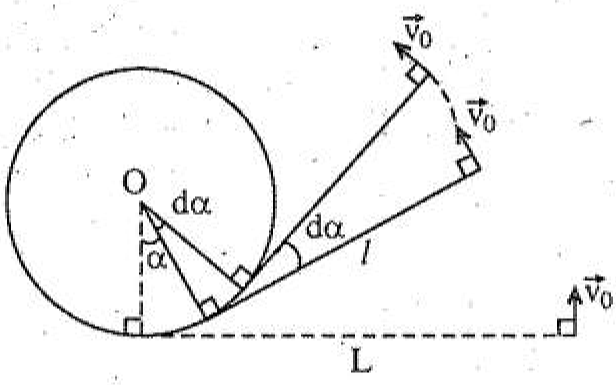
$$10 = 2v\left|\sin\left(\frac{v.5}{2R}\right)\right|$$

$$5 = v\left|\sin\frac{v}{80}\right| = v.\frac{v}{80}$$

Suy ra v = 20 m/s.

CHỦ ĐỀ 2

2.1. a) Tại t : $l = L - R\alpha$ (Hình 2.1G)



Hình 2.1G

$$l d\alpha = v_0 dt$$

$$(L - R\alpha)d\alpha = v_0 dt \qquad (1)$$

$$Ld\alpha - \frac{R}{2}d(\alpha^2) = v_0 dt$$

$$L\int_0^{\frac{L}{R}} d\alpha - \frac{R}{2}\int_0^{\frac{L}{R}} d(\alpha)^2 = v_0\int_0^t dt$$

$$\frac{L^2}{R} - \frac{R}{2}.\frac{L^2}{R^2} = v_0 t \Rightarrow \frac{L^2}{2R} = v_0 t$$

$$t = \frac{L^2}{2Rv_0}$$

b) Lực ma sát ngược chiều với vận tốc $\vec{v}$ nên không làm thay đổi phương của $\vec{v}$ mà chỉ làm giảm độ lớn của $\vec{v}$.

$$\frac{mdv}{d} = -\mu mg \Rightarrow dv = -\mu gdt$$

$$v = v_0 - \mu gt \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) :

$$(L - R\alpha)d\alpha = (v_0 - \mu gt)dt$$

$$\frac{L^2}{2R} = v_0t - \frac{1}{2}\mu gt^2$$

$$\mu gt^2 - 2v_0t + \frac{L^2}{R} = 0$$

$$\Delta' = v_0^2 - \frac{\mu gL^2}{R}$$

• Nếu $\Delta' > 0$ hay nếu $v_0 > L\sqrt{\frac{\mu g}{R}}$ thì thời gian quấn hết dây là :

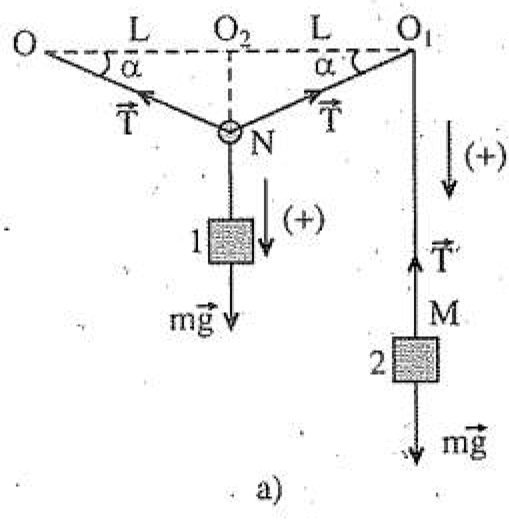
$$t_1 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - \frac{\mu gL^2}{R}}}{\mu g}$$

• Nếu $v_0 < L\sqrt{\frac{\mu g}{R}}$ thì vật sẽ dừng lại trước khi quấn hết dây. Thời gian vật chuyển động cho đến khi dừng lại được tính bằng (2) :

$$t_2 = \frac{v_0}{\mu g}$$

2.2. • Xét tại góc α bất kì (Hình 2.2Ga).

Hợp lực tác dụng vào mỗi vật có phương thẳng đứng, do đó hai vật chuyển động theo phương thẳng đứng, vật 1 đi lên, vật 2 đi xuống. Chọn chiều dương hướng xuống.



a)

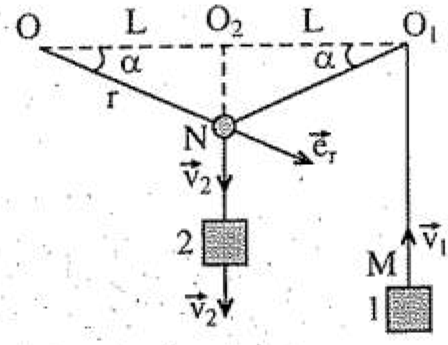
• Xác định VTCB tĩnh :

Vật 1 : $T = mg$

Vật 2 : $2T\sin\alpha = mg$

Suy ra $\alpha = 30^o$

• Gọi $\vec{v}_1$, $\vec{a}_1$ và $\vec{v}_2$, $\vec{a}_2$ lần lượt là vận tốc và gia tốc của hai vật (Hình 2.2Gb). Ta có :



b)

Hình 2.2G

$$\vec{v}_2.\vec{e}_r = v_2 \sin\alpha = \dot{r}$$

Mặt khác : $ON + NO_1 + O_1M = const$

$$\frac{d(ON)}{dt} + \frac{d(NO_1)}{dt} + \frac{d}{dt}(O_1M) = 0$$

$$2\dot{r} + v_1 = 0$$

$$2v_2\sin\alpha + v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = -2v_2\sin\alpha \quad \text{(a)}$$

Tại VTCB ($\alpha = 30^o$) : $v_1 = -v_2$ (1)

Đạo hàm (a) : $\dot{v}_1 = -2\dot{v}_2 \sin\alpha + 2v_2 \cos\alpha.\dot{\alpha}$

$$a_1 = -2a_2 \sin\alpha + 2v_2 \cos\alpha.\dot{\alpha}$$

Tại VTCB : $a_1 = -a_2 + v_2\sqrt{3}.\dot{\alpha}$ (2)

• Định luật II Niu-tơn :

Tại α bất kì : $ma_1 = mg - T$

$$ma_2 = mg - 2T\sin\alpha$$

Tại VTCB ($\alpha = 30^o$) : $a_1 = a_2$ (3)

Thay (3) vào (2) ta được : $a_1 = a_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}v_2\dot{\alpha}$ (4)

• Bảo toàn cơ năng : Tại α bất kì :

$$\frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2) = mg[O_2N - (ON + NO_1 - OO_1)]$$

Tại VTCB ($\alpha = 30^o$) :

$$\frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2) = mg\left[\frac{L}{\sqrt{3}} - 2\left(\frac{2L}{\sqrt{3}} - L\right)\right]$$

Kết hợp với (1), ta được :

$$v_1^2 = v_2^2 = gL(2 - \sqrt{3}) \qquad (5)$$

$$v_1 = \frac{d}{dt}(O_2N) = \frac{d}{dt}(L\tan\alpha) = \frac{L}{\cos^2\alpha}\dot{\alpha}$$

Tại VTCB : $(\alpha = 30^o)$: $\dot{\alpha} = \frac{v_1}{L}.\frac{3}{4}$ (6)

Thay (6) vào (4) : $a_1 = a_2 = \frac{3\sqrt{3}}{8}.\frac{v_1^2}{L}$ (> 0)

Cuối cùng thay (5) vào ta được :

$$a_1 = a_2 = \frac{(6\sqrt{3} - 9)g}{8} \text{ (> 0 : hướng xuống)}$$

Vật 1 chuyển động chậm dần qua VTCB, vật 2 chuyển động nhanh dần qua VTCB.

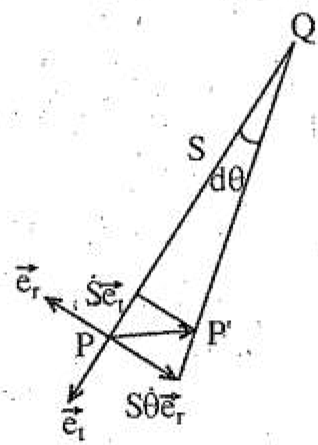
2.3. a) $L = S + R\theta = \text{const}$

$$\dot{S} + R\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{S} = -R\dot{\theta} \qquad (1)$$

b) $\vec{v}_Q = R\dot{\theta}\vec{e}_t = -\dot{S}\vec{e}_t$ (2)

c) $\vec{v}' = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{QP}) = \frac{d}{dt}(S\vec{e}_t)$ (Hình 2.3G)

$$= \dot{S}\vec{e}_t + S\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \dot{S}\vec{e}_t - S\dot{\theta}\vec{e}_r$$



Hình 2.3G

d) Theo công thức cộng vận tốc :

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_Q = (-S\dot{\theta}\vec{e}_r + \dot{S}\vec{e}_t) + (-\dot{S}\vec{e}_t)$$

$$\vec{v} = -S\dot{\theta}\vec{e}_r \qquad (4)$$

e) $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -(\dot{S}\dot{\theta}\vec{e}_r + S\ddot{\theta}\vec{e}_r + S\dot{\theta}^2\vec{e}_t)$

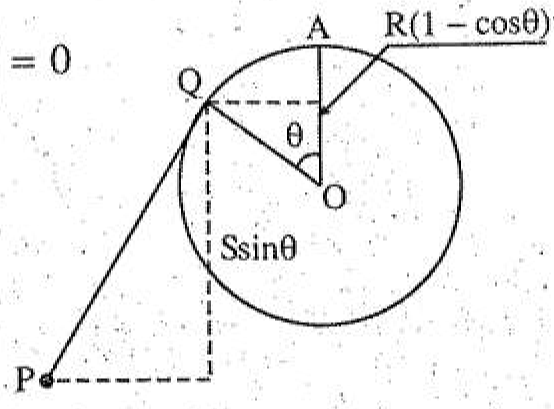
$$\vec{a}.\vec{e}_r = -(\dot{S}\dot{\theta} + S\ddot{\theta}) \qquad (5)$$

f) E_t (tại A) = 0 (Hình 2.4G).

$$E_t = -[mgR(1 - \cos\theta) + mgS\sin\theta] \qquad (6)$$

g) $$\frac{dE}{d\theta} = -mg\left(R\sin\theta + \frac{dS}{d\theta}\sin\theta + S\cos\theta\right) = 0$$

$$\Rightarrow R\sin\theta + \frac{dS}{d\theta}\sin\theta + S\cos\theta = 0 \qquad (a)$$



Hình 2.4G

Vì $L = S + R\theta = \text{const}$

$$\Rightarrow dS + Rd\theta = 0 \Rightarrow \frac{dS}{d\theta} = -R$$

Thay vào (a), ta được : $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ (Hình 2.5G).

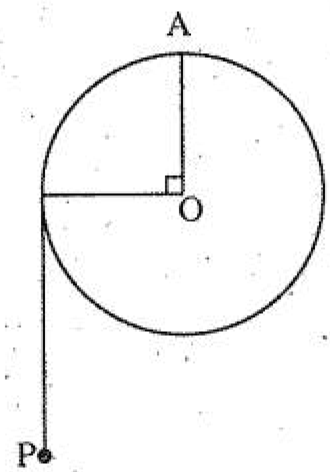
Suy ra : $E_t(\min) = -mg(R + S)$

Bảo toàn cơ năng :

$$\frac{1}{2}mv_m^2 - mg(R + S) = 0$$

$$v_m^2 = 2g\left(R + L - \frac{\pi R}{2}\right)$$

$$v_m = \sqrt{2g\left[L - R\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right]}$$



Hình 2.5G

2.4. a) $u_0 = \sqrt{\frac{GM}{R_0}}$

b) $mu_1R_0 = mu_2R_1$

$$\frac{1}{2}mu_2^2 - \frac{GMm}{R_1} = \frac{1}{2}mu_1^2 - \frac{GMm}{R_0}$$

$$\Rightarrow u_1 = u_0\sqrt{\frac{2R_1}{R_1 + R_0}}$$

c) $\lim\limits_{R_1 \to \infty} u_1 = \sqrt{2}u_0$

d) $u_2 = u_1 \dfrac{R_0}{R_1} = u_0 \dfrac{R_0\sqrt{2}}{\sqrt{R_1(R_1 + R_0)}}$

e) $u_3 = \sqrt{\dfrac{GM}{R_1}} = u_0\sqrt{\dfrac{R_0}{R_1}}$

$$u_3 = u_2\sqrt{\frac{R_1 + R_2}{2R_0}}$$

g) Vì lực hấp dẫn là lực xuyên tâm nên ta có :

$$\begin{cases} r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 & \text{(a)} \\ \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) & \text{(b)} \end{cases}$$

Từ (a) ta thấy $\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = r(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0$

$$\Rightarrow r^2\dot{\theta} = C \text{ hay } r\dot{\theta}^2 = \frac{C}{r^3}.$$

Thay vào (b) ta được :

$$\ddot{r} - \frac{C}{r^3} = -\frac{GM}{r^2}$$

$$\ddot{r} + \frac{1}{r^2}\left(GM - \frac{C}{r}\right) = 0 \qquad \text{(c)}$$

Tại $r = R_1$, ta có $m\dot{\theta}^2R_1 = \dfrac{GMm}{R_1^2}$ và $R_1\dot{\theta}^2 = \dfrac{C}{R_1^3}$.

Suy ra : $C = GMR_1$. Thay vào (c) ta được :

$$\ddot{r} + \frac{GM}{r^2} - \frac{GMR_1}{r^3} = 0$$

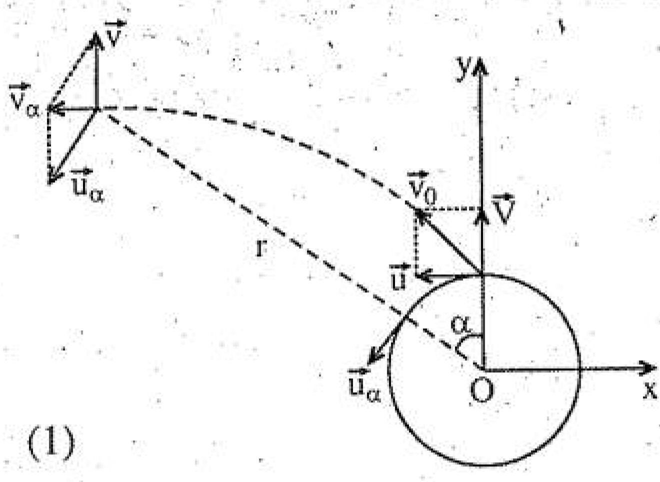
Đặt $r = R_1 + x$ $(x \ll R_1)$

$$\ddot{x} + \frac{GM}{R_1^2\left(1+\frac{x}{R_1}\right)^2} - \frac{GMR_1}{R_1^3\left(1+\frac{x}{R_1}\right)^3} = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{GM}{R_1^2}\left(1 - \frac{2x}{R_1} - 1 + \frac{3x}{R_1}\right) = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{GM}{R_1^3}x = 0 \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{GM}{R_1^3}}$$

2.5. a) Đối với cả trạm và máy thăm dò (Hình 2.6G) :



Hình 2.6G

$$\frac{md\vec{v}}{dt} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{e}_r$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{GM}{r^2}\vec{e}_r \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{d\alpha}.\dot{\alpha} = -\frac{GM}{r^2}\vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{d\alpha} = -\frac{GM}{r^2}\frac{dt}{d\alpha}\vec{e}_r \qquad (1)$$

Định luật bảo toàn MMĐL :

$$rmv_\perp = Rmu \Rightarrow r\left(r\frac{d\alpha}{dt}\right) = Ru$$

$$\Rightarrow \frac{d\alpha}{dt} = \frac{Ru}{r^2} \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) : $d\vec{v} = -\left(\frac{GM}{Ru}d\alpha\right)\vec{e}_r$ (3)

Phương trình (3) : đúng cho cả trạm và máy thăm dò vì nó không chứa khối lượng của chúng. Phương trình (3) cho thấy $d\vec{v}$ là như nhau đối với cả trạm và máy khi vectơ vị trí quay được một góc $d\alpha$ như nhau.

$$\vec{u}_\alpha - \vec{u}_0 = \vec{v}_\alpha - \vec{v}_0$$

$$\Rightarrow \vec{v}_\alpha - \vec{u}_\alpha = \vec{v}_0 - \vec{u}_0 = \vec{V} \text{ (đpcm)}$$

b) Áp dụng định luật BTMMĐL cho máy thăm dò :

$$rm(u - V\sin\alpha) = Rmu$$

$$\Rightarrow r(\alpha) = \frac{uR}{u - V\sin\alpha} = \frac{p}{1 - e\sin\alpha} \quad (4)$$

với $p = R$ và $e = \frac{V}{u}$

c) Điều kiện để quỹ đạo kín là $e = \frac{V}{u} < 1$ hay $V < u$.

d) Quỹ đạo không kín (parabol hoặc hypebol) khi $e \geq 1$.

Từ (4) ta có : $r(\alpha) = \frac{p}{1 - e\sin\alpha}$

$r \to \infty$ khi $e\sin\alpha \to 1$ hay $\sin\alpha \to \frac{u}{V}$.

Vậy $\alpha_{gh} = \arcsin\frac{u}{V}$

e) Theo (4) ta có : $r_{max} = \frac{p}{1 - e}$ (ứng với $\alpha = \frac{\pi}{2}$)

hay $$r_{max} = \frac{uR}{u - V}$$

$$r_{min} = \frac{p}{1 + e} \text{ (ứng với } \alpha = \frac{3\pi}{2})$$

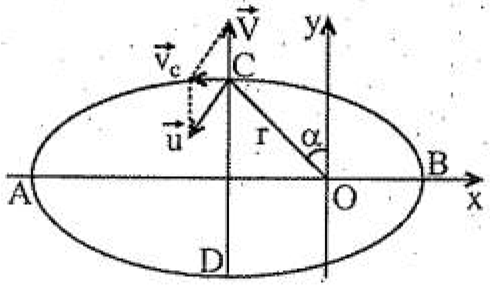
hay $$r_{min} = \frac{uR}{u + V}$$

Tại đỉnh C (Hình 2.7G)

$$u^2 = v_c^2 + V^2 \Rightarrow v_c = \sqrt{u^2 - V^2}$$

Bán trục lớn :

$$a = \frac{1}{2}(r_{max} + r_{min}) = \frac{Ru^2}{u^2 - V^2}$$



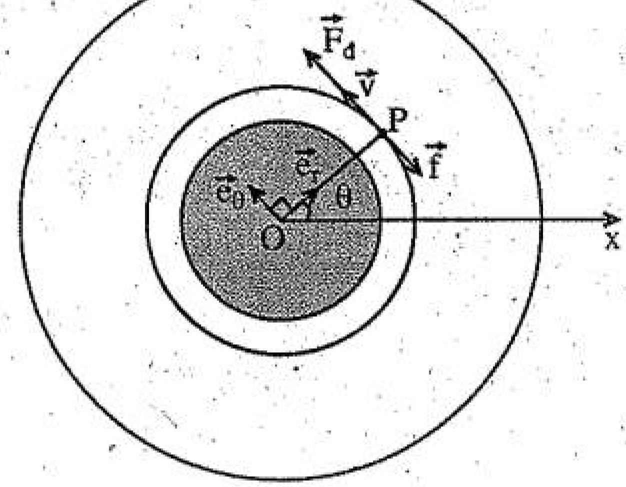
Hình 2.7G

Mặt khác tại C ta có :

$$v_c \cos\alpha . r = Ru \quad \text{mà} \quad r\cos\alpha = b$$

nên $b = \dfrac{Ru}{v_c} = \dfrac{Ru}{\sqrt{u^2 - V^2}}$

2.6. a) (Hình 2.8G).



Hình 2.8G

a.1) $\vec{F}_{hd} + \vec{F}_d + \vec{f} = m\vec{a}$

Chiếu lên vectơ $\vec{e}_r$:

$$-mg\left(\frac{R}{r}\right)^2 = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \qquad (1)$$

Chiếu lên vectơ $\vec{e}_\theta$:

$$F_d - f = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \qquad (2)$$

a.2) Bỏ qua $\ddot{r}$ trước $r\dot{\theta}^2$ ở (1) và bỏ qua $2\dot{r}\dot{\theta}$ trước $r\ddot{\theta}$ ở (2) ta được :

$$g\frac{R^2}{r^2} = r\dot{\theta}^2 \qquad (3)$$

$$F_d - f = mr\ddot{\theta} \qquad (4)$$

Từ (3) suy ra : $\dot{\theta} = \sqrt{g}Rr^{-\frac{3}{2}}$ (3a)

Đạo hàm (3a) : $\ddot{\theta} = -\dfrac{3}{2}\sqrt{g}Rr^{-\frac{5}{2}}\dot{r}$ rồi thay vào (4) :

$$F_d - f = -\frac{3}{2}\sqrt{g}mRr^{-\frac{3}{2}}\dot{r}$$

Suy ra : $\dot{r} = -\dfrac{2(F_d - f)}{3.\sqrt{g}mR}r^{\frac{3}{2}}$

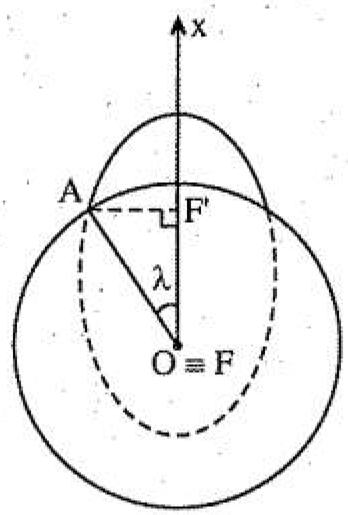
b) $\frac{dr}{dt} = -\frac{2(F_d - f)}{3.\sqrt{gmR}} r^{\frac{3}{2}}$

$$\int_{r_0}^{2r_0} \frac{dr}{r^{\frac{3}{2}}} = \frac{-2(F_d - f)}{3.\sqrt{gR}} \int_0^{t_0} \frac{dt}{m_0 - \mu t}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2r_0}} + \frac{1}{\sqrt{r_0}} = \frac{F_d - f}{3\mu\sqrt{gR}} ln\left(1 - \frac{\mu}{m_0} t_0\right)$$

$$F_d = f + \frac{3\mu R(1 - \sqrt{2})}{ln\left(1 - \frac{\mu}{m_0} t_0\right)} \sqrt{\frac{g}{2r_0}} = 4.10^5 \text{ N}$$

2.7. Xem Hình 2.9G.



Hình 2.9G

a.1) $g = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow GM = gR^2$

Áp dụng định luật BTNL :

$$-\frac{GMm}{R} + \frac{mv_0^2}{2} = -\frac{GMm}{2a}$$

$$\Rightarrow \frac{-gR^2}{2a} + gR = \frac{v_0^2}{2} \Rightarrow -\frac{R}{a} + 2 = \frac{v_0^2}{gR} = \beta$$

$$\Rightarrow a = \frac{R}{2 - \beta} = 5240 \text{ km}$$

Xét $\Delta FAF'$, ta có :

$$\frac{AF'}{\sin\lambda} = \frac{AF}{\sin\gamma} = \frac{R}{\sin\gamma} \qquad (a)$$

Mặt khác : $AF + AF' = 2a$

$$\Rightarrow AF' = 2a - R = 4120 \text{ km}$$

Thay vào (a) ta được :

$$\sin\lambda = \frac{4120}{R}\sin\gamma$$

Muốn λ_{max} thì $\gamma = 90^o$ hay $AF' \perp OF'$.

$$\sin\lambda_{max} = \frac{4120}{6360} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_{max} = 40,4^o \\ \cos\lambda_{max} = 0,762\end{cases}$$

$$FF' = R\cos\lambda_{max} = 2c \Rightarrow c = \frac{R\cos\lambda_{max}}{2} = \frac{6360.0,762}{2} = 2423 \text{ km}$$

$$\Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{2423}{6360}$$

$$e = 0,463$$

Tại A có : $r = R = \dfrac{p}{1 - e\cos\lambda} \Rightarrow p = 4120$ km.

(Để tìm e và λ_{max} ta còn có cách giải khác như sau : Tại A ta có :

$$R = \frac{p}{1 - e\cos\lambda} = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e\cos\lambda}$$

$$\Rightarrow (1 - e\cos\lambda)R = a(1 - e^2)$$

$$\Rightarrow \cos\lambda = \frac{1}{e}\left[1 - \frac{a}{R}(1 - e^2)\right] = \frac{1}{e}\left(1 - \frac{a}{R}\right) + \frac{a}{R}e$$

Để tầm bắn xa nhất thì λ_{max} hay $\cos\lambda_{min}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta viết :

$$\cos\lambda \geq 2.\sqrt{\left(1 - \frac{a}{R}\right)\frac{a}{R}}$$

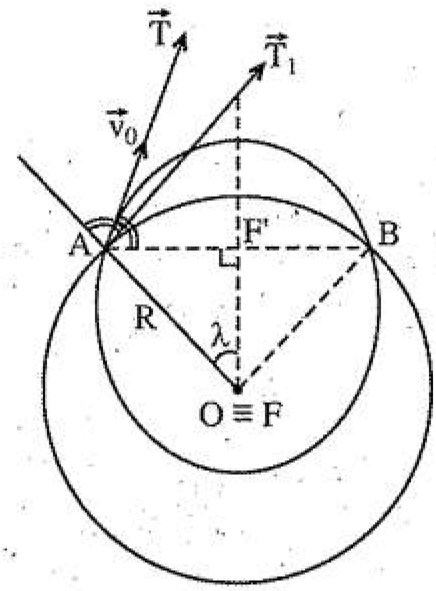
Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{1}{e}\left(1 - \dfrac{a}{R}\right) = \dfrac{ae}{R} \Rightarrow \dfrac{R}{a} - 1 = e^2$

$$\Rightarrow e = \sqrt{\frac{R}{a} - 1} = \sqrt{1 - \beta} = 0,462$$

$$\cos\lambda_{min} = 2.\sqrt{\left(1 - \frac{a}{R}\right)\frac{a}{R}} = 0,7619 \Rightarrow \lambda_{min} = 40,4^o.$$

a.2) $s_{max} = \overset{\frown}{AB}_{max} = \dfrac{2\pi R}{360^o}.2\lambda = 8964$ km.

a.3) Theo tính chất hình học của elip thì tiếp tuyến T với elip tại A là đường phân giác ngoài của góc $\widehat{OAF}$ còn tiếp tuyến T_1 với bề mặt Trái Đất tại A là phương ngang tại A (Hình 2.10G).



Hình 2.10G

Ta có : $\alpha_0 = \widehat{T_1AT} = \dfrac{90^o - \lambda}{2}$

hay $\alpha_0 = \dfrac{90^o - 40,4^o}{2} = 24,8^o$

a.4) $h_{max} = a + c - R = 1303$ km.

Áp dụng định luật BTMMĐL : $(R + h)v_{min} = v_0\cos\alpha_0.R \Rightarrow v_{min} = 5,27$ km/s.

b.1) $\overset{\frown}{AOB} = 60^o \Rightarrow \lambda = 30^o \Rightarrow \alpha_1 = \dfrac{90^o - \lambda}{2} = 30^o$.

b.2) Vì muốn vận tốc phóng có giá trị tối thiểu nên theo câu *a.2* : AF' ⊥ OF'.

Suy ra : $AF' = \dfrac{R}{2}$

$$AF + AF' = R + \frac{R}{2} = 2a \Rightarrow a = \frac{3R}{4}$$

Áp dụng định luật BTCN : $\dfrac{mv_0^2}{2} - \dfrac{GMm}{R} = -\dfrac{GMm}{2a}$

Thay $a = \dfrac{3R}{4}$ vào ta được :

$$v_0^2 = \frac{2gR}{3} \Rightarrow v_0 = 6,45 \text{ km/s}$$

2.8. *a.1)* $g = \dfrac{GM}{R^2}$; $\dfrac{GMm}{(R+z)^2} = \dfrac{mv^2}{R}$

$$\Rightarrow \frac{g}{\left(1 + \frac{z}{R}\right)} = \frac{v^2}{R} \Rightarrow v = R\sqrt{\frac{g}{R+z}} \quad (1)$$

a.2) $E = -\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}mg\frac{R^2}{R + z}$ (2)

a.3) $L_O = (R + z)mv = mR\sqrt{g(R + z)}$ (3)

a.4) $T = \frac{2\pi(R + z)}{v} = \frac{2\pi(R + z)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{g}.R}$ (4)

$$\Rightarrow R + z = \sqrt[3]{\frac{gT^2R^2}{4\pi^2}}$$

hay $z = \sqrt[3]{\frac{gT_0^2R^2}{4\pi^2}} - R$ (với $T_0 = 86400$ s)

Áp dụng bằng số : v = 6,5 km/s ; E = –2133 MJ ; $L_O = 6{,}3.10^{12}$ kg.m^2/s ; T = 2 h 34 ph ; z = 36000 km.

b.1) Vi phân hệ thức (1) :

$$dv = -\frac{1}{2}\sqrt{g}R(R + z)^{-\frac{3}{2}}dz$$

Mặt khác theo (4) : $\frac{2\pi}{T} = \sqrt{g}R(R + z)^{-\frac{3}{2}}$. Thay vào, ta được :

$$dv = \frac{-\pi}{T}dz$$

Sau mỗi vòng vận tốc biến thiên một lượng là :

$$\Delta v = -\frac{\pi}{T}\Delta z \quad (5)$$

b.2) Từ $\sum \overrightarrow{M_O} = \frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt}$ ta viết :

$$(R + z)\left(-\frac{kmv^2}{z}\right) = \frac{d}{dt}[(R + z)mv]$$

Vì độ biến thiên của momen động lượng trong một chu kì rất nhỏ nên ta có thể viết :

$$\frac{d}{dt}[(R + z)mv] = \frac{mv\Delta z + m(R + z)\Delta v}{T} = \frac{1}{2}\frac{mv\Delta z}{T}$$

$$\Rightarrow (R + z)\left(-\frac{kmv^2}{z}\right) = \frac{1}{2}\frac{mv\Delta z}{T}$$

Thay $T = \frac{2\pi(R + z)}{v}$ vào ta được :

$$k = \frac{-z\Delta z}{4\pi(R + z)^2} \qquad (6)$$

vì $k > 0$ nên khi $\Delta z < 0$ thì theo (5) $\Delta v > 0$. Ta suy ra rằng vệ tinh giảm độ cao và tăng vận tốc. Do thế năng giảm nhiều hơn là động năng tăng, thành thử năng lượng toàn phần vẫn giảm.

b.3) $f = \frac{kmv^2}{z} = \frac{kmgR^2}{(R + z)z}$

$$A_{ms} = -f.2\pi(R + z) = -2\pi kmg\frac{R^2}{z}$$

Thay k từ (6) vào ta được :

$$A_{ms} = \frac{1}{2}mg\left(\frac{R}{R + z}\right)^2 \Delta z$$

Mặt khác vi phân hệ thức (2), ta viết :

$$dE = \frac{1}{2}mg\left(\frac{R}{R + z}\right)^2 dz \qquad (7)$$

Độ biến thiên năng lượng toàn phần của vệ tinh sau một vòng là :

$$\Delta E = \frac{1}{2}mg\left(\frac{R}{R + z}\right)^2 \Delta z$$

So sánh ta thấy $\Delta E = A_{ms}$

c) $\frac{dE}{dt} = \vec{f}.\vec{v} = f_0 v^{n+1}$

$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dz}.\frac{dz}{dt}$

Thay $\frac{dE}{dz}$ từ (7) và thay dz = –Cdt vào ta được :

$$\frac{dE}{dt} = -mgC\left(\frac{R}{R+z}\right)^2$$

$$f_0 v^{n+1} = -mgC\left(\frac{R}{R+z}\right)^2$$

Thay v từ (1) vào, ta được :

$$f_0 R^{n+1}\left(\frac{g}{R+z}\right)^{\frac{n+1}{2}} = -mgC\left(\frac{R}{R+z}\right)^2$$

Đồng nhất các số lũy thừa của (R + z) ta được :

$$\frac{n+1}{2} = 2 \Rightarrow n = 3$$

Suy ra : $f_0 = -\frac{mC}{2gR^2}$ và lực ma sát $f = -\frac{mC}{2gR^2}.v^3$

CHỦ ĐỀ 3

3.1. *Cách giải 1 :*

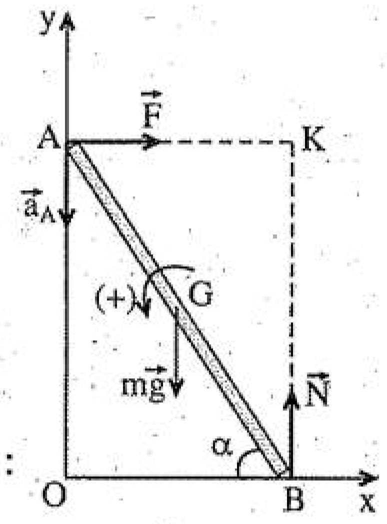
Do hệ có tính chất đối xứng nên ta chỉ cần xét một thang (Hình 3.1G). Chọn chiều dương như hình vẽ thì $\omega = -\dot{\alpha}$, $\gamma = -\ddot{\alpha}$.

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{BA}$$

Chiếu lên trục y ta được :

$$v_A = 0 - \omega l\cos\alpha$$

$$a_A = -\gamma l\cos\alpha - \omega l\sin\alpha(-\omega)$$



Hình 3.1G

Lúc mới cắt dây $\omega = 0$, $\alpha = 60^o$, suy ra :

$$a_A = \frac{-\gamma l}{2} \qquad (1)$$

Gọi K là tâm quay tức thời, theo định luật BTCN ta viết :

$$E = \frac{1}{2}I_K\omega^2 + mg\frac{l}{2}\sin\alpha = \text{const}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}ml^2.2\omega\gamma + mg\frac{l}{2}\cos\alpha(-\omega) = 0$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{3g\cos\alpha}{2l}$$

Lúc mới cắt dây : $\alpha = 60^o$. Thay vào ta được :

$$\gamma = \frac{3g}{4l} \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được : $a_A = \frac{-3g}{8}$

Cách giải 2 :

Lúc mới cắt dây thì $\omega = 0$, ta áp dụng công thức dưới dạng đại số :

$$\Sigma M_K = I_K\gamma$$

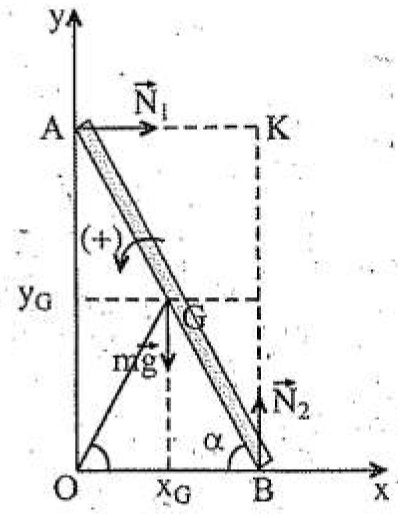
$$mg\frac{l}{2}\cos 60^o = \frac{1}{3}ml^2\gamma$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{3g}{4l}$$

$$a_A = -\gamma.KA = -\frac{3g}{4l}l\cos 60^o$$

$$a_A = -\frac{3g}{8}$$

3.2. *Cách giải 1* (Hình 3.2G) :



Hình 3.2G

a) $\sum M_K = I_K\gamma$ (đại số)

$$mg\frac{l}{2}\cos\alpha = \frac{1}{3}ml^2\gamma$$

$$\gamma = \frac{3g\cos\alpha}{2l} \qquad (1)$$

Tại $t = 0$, $\alpha = \alpha_0 \Rightarrow \gamma = \dfrac{3g\cos\alpha_0}{2l}$

b) $a_A = -KA.\gamma = -\dfrac{3g\cos\alpha}{2}$

Tại $t = 0$, $\alpha = \alpha_0 \Rightarrow a_A = -\dfrac{3g\cos^2\alpha_0}{2}$

c) $N = 0 \Rightarrow a_{Gx} = 0$

G chuyển động tròn quanh O, ta có :

$$\vec{a}_G = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$$\Rightarrow a_{Gx} = \gamma\frac{l}{2}\sin\alpha - \omega^2\frac{l}{2}\cos\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{\gamma\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Thay (1) vào : $\omega^2 = \dfrac{3g\sin\alpha}{2}$ (2)

Áp dụng định luật BTCN :

$$\frac{1}{2}I_K\omega^2 = mg\frac{l}{2}(\sin\alpha_0 - \sin\alpha)$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{3g}{l}(\sin\alpha_0 - \sin\alpha)$$

Thay (2) vào ta được : $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}\sin\alpha_0$

Cách giải 2 :

a) Áp dụng định luật BTCN :

$$\omega^2 = \frac{3g}{l}(\sin\alpha_0 - \sin\alpha) \qquad (1)$$

Đạo hàm theo thời gian :

$$2\omega\gamma = -\frac{3g}{l}\cos\alpha(-\omega)$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{3g}{2l}\cos\alpha \qquad (2)$$

Tại $t = 0$, $\alpha = \alpha_0 \Rightarrow \gamma = \frac{3g}{2l}\cos\alpha_0$ (3)

b) $x_G = \frac{l}{2}\cos\alpha$; $\dot{x}_G = -\frac{l}{2}\sin\alpha.\dot{\alpha}$

$$\ddot{x}_G = -\frac{l}{2}(\cos\alpha.\dot{\alpha}^2 + \sin\alpha.\ddot{\alpha}) \qquad (4)$$

$y_G = \frac{l}{2}\sin\alpha$; $\dot{y}_G = \frac{l}{2}\cos\alpha.\dot{\alpha}$

$$\ddot{y}_G = \frac{l}{2}(-\sin\alpha.\dot{\alpha}^2 + \cos\alpha.\ddot{\alpha}) \qquad (5)$$

Lúc $t = 0$, $\alpha = \alpha_0$, $\dot{\alpha} = 0$, công thức (5) trở thành :

$$\ddot{y}_G = \frac{l}{2}\cos\alpha_0(-\gamma)$$

Thay (2) vào, ta được :

$$\ddot{y}_G = -\frac{3g}{4}\cos^2\alpha_0$$

$$y_A = 2y_G \Rightarrow \ddot{y}_A = 2\ddot{y}_G = -\frac{3g\cos^2\alpha}{2}$$

c) $N = m\ddot{x}_G = 0 \Rightarrow \ddot{x}_G = 0$

Từ (4) $\Rightarrow \cos\alpha.\dot{\alpha}^2 + \sin\alpha.\ddot{\alpha} = 0$

$$\cos\alpha.\omega^2 + \sin\alpha(-\gamma) = 0$$

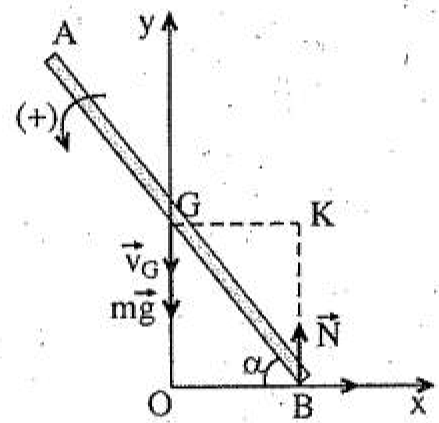
Thay ω^2 và γ từ (1) và (2) vào ta được :

$$\frac{3g}{4}\sin\alpha\cos\alpha - \frac{3g}{2}\cos\alpha(\sin\alpha_0 - \sin\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{2}{3}\sin\alpha_0$$

3.3. (Xem Hình 3.3G).

Chọn chiều dương cho chuyển động của thanh như hình vẽ. Các lực tác dụng lên thanh đều có phương thẳng đứng. Do đó vectơ $\vec{v}_G$ luôn có phương thẳng đứng.



Hình 3.3G

$$y_G = \frac{l}{2}\sin\alpha \ ; \ \dot{y}_G = \frac{l}{2}\cos\alpha.\dot{\alpha}$$

$$\ddot{y}_G = a_G = \frac{l}{2}\left[\dot{\alpha}(-\sin\alpha.\dot{\alpha}) + \cos\alpha.\ddot{\alpha}\right)$$

Thay $\dot{\alpha} = -\omega$, $\ddot{\alpha} = -\gamma$ vào, ta được :

$$a_G = -\frac{l}{2}(\sin\alpha.\omega^2 + \cos\alpha.\gamma)$$

$$N - mg = ma_G = -\frac{ml}{2}(\sin\alpha.\omega^2 + \cos\alpha.\gamma) \qquad (1)$$

Định luật BTCN : $\frac{1}{2}I_K\omega^2 = \frac{1}{2}mgl(1 - \sin\alpha)$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2 + \frac{ml^2\cos^2\alpha}{4}\right)\omega^2 = \frac{1}{2}mgl(1 - \sin\alpha) \qquad (2)$$

$\Sigma M_G = I_G\gamma$ (đại số)

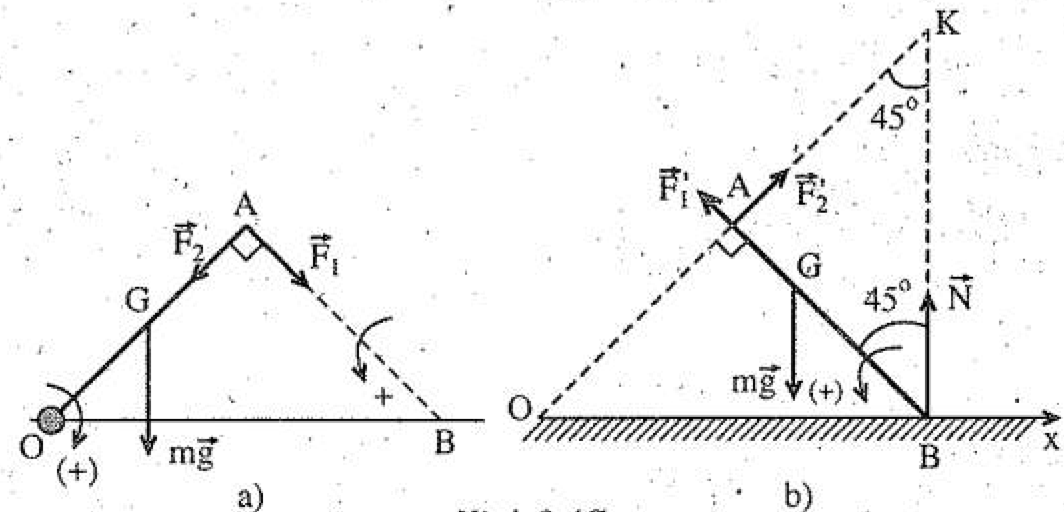
$$N\frac{l}{2}\cos\alpha = \frac{1}{12}ml^2\gamma \qquad (3)$$

Rút ω^2 từ (2) và γ từ (3) rồi thay vào (1) ta được :

$$N = \frac{mg[1 + 3(1 - \sin\alpha)^2]}{(1 + 3\cos^2\alpha)^2}$$

3.4. *Cách giải 1 :*

Chọn chiều dương của chuyển động quay của mọi thanh là chiều góc θ giảm. Khi ấy $\omega = -\dot{\theta}$ và $\gamma = -\ddot{\theta}$. Ta phân tích lực mà mỗi thanh tác dụng lên thanh kia tại đầu A làm hai thành phần vuông góc như Hình 3.4G (a và b).



Hình 3.4G

Xét xu hướng chuyển động của đầu A và đầu B sau khi thả tay một chút ta xác định được tâm quay tức thời K như Hình 3.4Gb.

Xét thanh trái (Hình 3.4Ga) :

$$\sum \overrightarrow{M}_O = I_O\vec{\gamma} \Rightarrow mg\frac{L}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + F_1L = \frac{1}{3}mL^2(-\ddot{\theta})$$

$$\Rightarrow mg\frac{\sqrt{2}}{4} + F_1 = -\frac{1}{3}mL\ddot{\theta} \qquad (1)$$

Xét thanh phải (Hình 3.4Gb) :

$$\sum \overrightarrow{M}_K = I_K\vec{\gamma} \Rightarrow mg\frac{L}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} - F'_1L = \frac{4}{3}mL^2(-\ddot{\theta})$$

$$\Rightarrow mg\frac{\sqrt{2}}{4} - F_1 = -\frac{4}{3}mL\ddot{\theta} \text{ (vì } F'_1 = F_1) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\ddot{\theta} = -\frac{3\sqrt{2}}{10}\frac{g}{L}$ (3)

$$\sum \overrightarrow{M}_G = I_G\vec{\gamma} \Rightarrow N\frac{L}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} - F_2'\frac{L}{2} = \frac{1}{12}mL^2(-\ddot{\theta})$$

$$\Rightarrow N\frac{\sqrt{2}}{2} - F_2 = -\frac{1}{6}mL\ddot{\theta} \quad (\text{vì } F_2' = F_2) \tag{4}$$

$$\sum F_x = m\ddot{x}_G \Rightarrow (F_2 - F_1)\frac{\sqrt{2}}{2} = m\ddot{x}_G \text{ (tại } \theta = 45^o)$$

$$x_G = \frac{3L}{2}\cos\theta \ ; \ \dot{x}_G = -\frac{3L}{2}\sin\theta.\dot{\theta} \ ; \ \ddot{x}_G = -\frac{3L}{2}(\cos\theta.\dot{\theta}^2 + \sin\theta.\ddot{\theta})$$

Tại $t = 0$, $\theta = 45^o$; $\dot{\theta} = 0$; $\ddot{x}_G = -\frac{3L}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}.\ddot{\theta}$

Thay $\ddot{x}_G$ vào, ta được :

$$F_2 - F_1 = -\frac{3mL\ddot{\theta}}{2} \tag{5}$$

Từ (2) và (4) ta suy ra :

$$F_2 - F_1 = \left(N\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{6}mL\ddot{\theta}\right) - \left(mg\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{4}{3}mL\ddot{\theta}\right) - \frac{3mL}{2}\ddot{\theta}$$

$$= \left(N - \frac{mg}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{7}{6}mL\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \left(N - \frac{mg}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{3}mL\ddot{\theta}$$

Thay $\ddot{\theta}$ từ (3) vào ta được : $N = \frac{7mg}{10}$

Cách giải 2 (Hình 3.5G) :

$$x_{G_1} = \frac{l}{2}\cos\theta \ ; \ \dot{x}_{G_1} = -\frac{l}{2}\sin\theta.\dot{\theta}$$

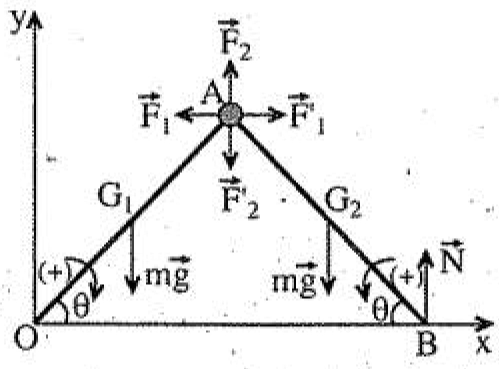
$$y_{G_1} = \frac{l}{2}\sin\theta \ ; \ \dot{y}_{G_1} = \frac{l}{2}\cos\theta.\dot{\theta}$$

$$x_{G_2} = \frac{3l}{2}\cos\theta\ ;\ \dot{x}_{G_2} = -\frac{3l}{2}\sin\theta.\dot{\theta}\ ;$$

$$\ddot{x}_{G_2} = -\frac{3l}{2}(\cos\theta.\dot{\theta}^2 + \sin\theta.\ddot{\theta})$$

$$y_{G_2} = \frac{l}{2}\sin\theta\ ;\ \dot{y}_{G_2} = \frac{l}{2}\cos\theta.\dot{\theta}$$

$$\ddot{y}_{G_2} = \frac{l}{2}(-\sin\theta.\dot{\theta}^2 + \cos\theta.\ddot{\theta})$$



Hình 3.5G

Định luật BTCN :

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}_{G_1}^2 + \dot{y}_{G_1}^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_{G_2}^2 + \dot{y}_{G_2}^2) + \frac{1}{2}.2I_G\dot{\theta}^2 = mg\frac{l}{2}(\sin 45^o - \sin\theta)$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{g\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\theta\right)}{l\left(\frac{1}{3} + \sin^2\theta\right)}$$

Đạo hàm hai vế theo thời gian ta được :

$$\ddot{\theta} = \frac{-g}{2l\left(\frac{1}{3} + \sin^2\theta\right)^2}\left(-\frac{1}{3}\cos\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta + 2\sin\theta\cos\theta\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Tại $\theta = 45^o$: $\ddot{\theta} = -\frac{3\sqrt{2}}{10}\frac{g}{l}$

$$\ddot{x}_{G_2} = -\frac{3l}{2}(\cos\theta.\dot{\theta}^2 + \sin\theta.\ddot{\theta}) = \frac{9}{20}g$$

$$\ddot{y}_{G_2} = \frac{L}{2}(-\sin\theta.\dot{\theta}^2 + \cos\theta.\ddot{\theta}) = -\frac{3}{20}g$$

Áp dụng định luật II Niu-tơn cho thanh bên phải :

$$F_1' = m\ddot{x}_{G_2} = \frac{9}{20}mg$$

$$m\ddot{y}_{G_2} = N - mg - F_2' \Rightarrow N = m\ddot{y}_{G_2} + mg + F_2'$$

Áp dụng phương trình động lực học cho thanh bên trái. Chọn chiều dương cho chuyển động quay là chiều θ giảm. Khi ấy $\gamma = -\ddot{\theta}$.

$$\frac{1}{3}mL^2(-\ddot{\theta}) = -F_1L\sin 45^o - F_2L\cos 45^o + mg\frac{l}{2}\cos 45^o$$

Vì $\quad F_1 = F_1', F_2 = F_2'$ và $\ddot{\theta} = \frac{-3\sqrt{2}}{10}\frac{g}{l}$, ta suy ra :

$$F_2 = -\frac{3}{20}mg$$

$$N = m\ddot{y}_{G_2} + mg + F_2 = -\frac{3}{20}mg + mg - \frac{3}{20}mg$$

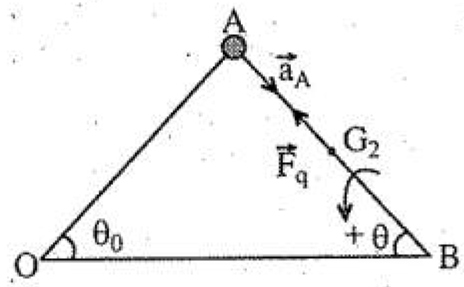
$$N = \frac{7}{10}mg$$

Cách giải 3 :

Theo cách giải trên ta được :

$$\ddot{\theta} = -\frac{3\sqrt{2}}{10}\frac{g}{l}$$

Chọn HQC chuyển động với gia tốc của bản lề A tại thời điểm bắt đầu thả tay. Khi ấy thanh AB quay quanh bản lề A (Hình 3.6G). Tại thời điểm này gia tốc của A trong chuyển động quay quanh O chỉ có thành phần tiếp tuyến $\vec{a}_t$ hướng dọc theo thanh AB. Lực quán tính $\vec{F}_q = -m\vec{a}_A$ đặt tại khối tâm G_2 có momen đối với A bằng 0. Chọn chiều dương cho chuyển động quay của thanh AB là chiều giảm của góc θ. Ta có :

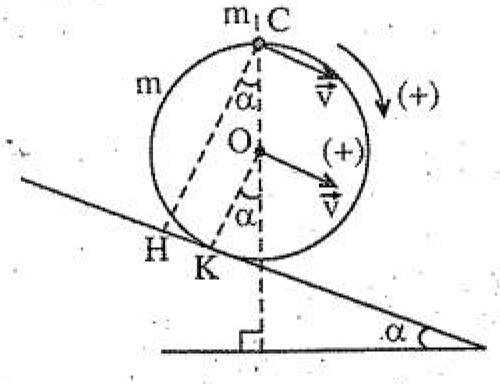


Hình 3.6G

$$Nl\cos\theta_0 - mg\frac{l}{2}\cos\theta = I_A(-\ddot{\theta})$$

$$\frac{Nl}{\sqrt{2}} - \frac{mgl}{2\sqrt{2}} = \frac{ml^2}{3}.\frac{3\sqrt{2}}{10}\frac{g}{l} \Rightarrow N = \frac{7mg}{10}$$

3.5. (Xem Hình 3.7G).



Hình 3.7G

Chọn tâm quay tức thời K để tính momen.

Momen động lượng của con chó (coi là chất điểm nằm tại C) là :

$$\vec{L}_1 = \overrightarrow{KC} \wedge m_1\vec{v}_1 = (\overrightarrow{KH} + \overrightarrow{HC}) \wedge m_1\vec{v}_1$$

$$\Rightarrow L_1 = R(1 + \cos\alpha)m_1v_1$$

vì vectơ $\overrightarrow{OC}$ = const nên trong HQC đứng yên, chó có vận tốc $\vec{v}_1 = \vec{v}$. Suy ra :

$$L_1 = R(1 + \cos\alpha)m_1v = m_1R^2(1 + \cos\alpha)\omega$$

Momen động lượng của hình trụ :

$$\vec{L}_2 = \vec{L}_O + \overrightarrow{KO} \wedge m\vec{v}$$

$$\Rightarrow L_2 = mR^2\omega + Rmv = 2mR^2\omega$$

Momen động lượng của hệ "hình trụ + chó" là :

$$L_K = R^2\omega[2m + m_1(1 + \cos\alpha)]$$

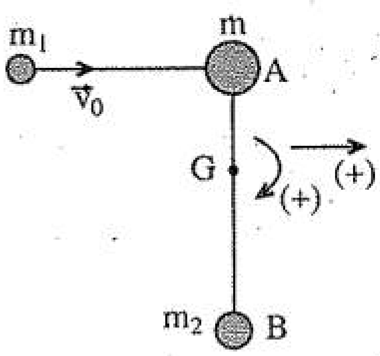
Momen lực : $\sum \vec{M}_K = \overrightarrow{KC} \wedge m_1\vec{g} + \overrightarrow{KO} \wedge m\vec{g}$

Suy ra : $\sum M_K = (m + m_1)gR\sin\alpha$

Áp dụng công thức : $\sum M_K = \dfrac{d\vec{L}_K}{dt}$, ta được :

$$\gamma = \frac{(m + m_1)g\sin\alpha}{R[2m + m_1(1 + \cos\alpha)]}$$

3.6. a) Chọn chiều dương cho chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay của tạ đôi như (Hình 3.8G).



Hình 3.8G

Gọi G là khối tâm của tạ đôi, ta có :

$$GA = \frac{l}{3} ; I_G = \frac{1}{3}ml^2$$

Định luật BTĐL : $m_1v_0 = m_1v + \frac{3m}{2}v_G$ (1)

Định luật BTCN : $\frac{1}{2}m_1v_0^2 = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3m}{2}\right)v_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$ (2)

Định luật BTMMĐL :

• Nếu chọn điểm cố định O trùng với khối tâm G của tạ đôi trước va chạm thì định luật BTMMĐL được viết thành :

$$m_1v_0\frac{l}{2} = m_1v\frac{l}{3} + \frac{1}{3}ml^2\omega \quad (3)$$

• Nếu chọn điểm cố định O trùng với điểm va chạm (tức là trùng với vị trí của quả cầu A trước va chạm) thì định luật BTMMĐL được viết thành :

$$0 = I\omega - \frac{l}{3}\left(\frac{3m}{2}\right)v_G \quad (3b)$$

Giải hệ phương trình ta được :

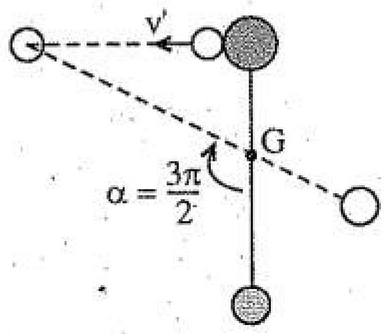
$$v = \frac{(m_1 - m)v}{m_1 + m}\ ;\ v_G = \frac{4m_1v_0}{3(m_1 + m)}\ ;\ \omega = \frac{2m_1v_0}{l(m_1 + m)}$$

b) Chọn HQC gắn với khối tâm G của tạ đôi. Trong HQC này, sau va chạm tạ đôi quay quanh G đứng yên với vận tốc góc ω, còn quả cầu m_1 có vận tốc tương đối $v' = v - v_G = -\frac{(3m + m_1)v_0}{3(m + m_1)} < 0$, tức là chuyển động thẳng đều về phía ngược lại (Hình 3.9G).

Điều kiện để va chạm lần nữa là :

$$|v'|t = \frac{l\sqrt{3}}{3} \text{ và } t = \frac{2\pi}{\omega}$$

Thay |v'| và ω vào ta được : $\frac{m}{m_1} \approx 0,22$



Hình 3.9G

3.7. Xem Hình 3.10G.

$$g_x = g\sin\alpha$$

$$g_y = g\cos\alpha$$

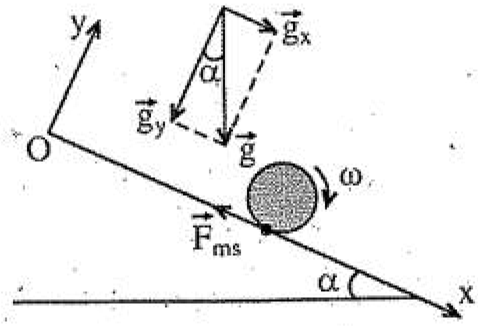
$$v_x = v = v_0 + g\sin\alpha.t$$

Khoảng thời gian giữa hai lần va chạm là :

$$t = \frac{2v_y}{g_y} = \frac{2v}{g\cos\alpha}$$

Giữa hai lần va chạm liên tiếp v_x tăng thêm một lượng là :

$$\Delta v_x = g\sin\alpha.\frac{2v}{g\cos\alpha} = 2v\tan\alpha$$



Hình 3.10G

Xét va chạm thứ i :

Gọi thành phần vận tốc của quả bóng theo phương x và vận tốc góc của quả bóng trước va chạm là v_i' ; ω_i' ; sau va chạm là v_i ; ω_i.

Áp dụng định lí biến thiên động lượng :

$$-F_{ms}\Delta t = m(v_i - v_i')$$

Áp dụng định lí biến thiên momen động lượng :

$$F_{ms}R\Delta t = \frac{2}{5}mR^2(\omega_i - \omega_i')$$

Suy ra : $v_i - v_i' = \frac{2}{5}R(\omega_i' - \omega_i)$ (1)

Áp dụng định luật BTNL :

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + \frac{1}{2}.\frac{2}{5}mR^2\omega_i^2 = \frac{1}{2}mv_i'^2 + \frac{1}{2}.\frac{2}{5}mR^2\omega_i'^2$$

$$v_i^2 - v_i'^2 = \frac{2}{5}(\omega_i'^2 - \omega_i^2) \quad (2)$$

Kết hợp với (1) ta được :

$$v_i + v_i' = R(\omega_i + \omega_i'$$

Từ (1) và (2) ta được :

$$v_i = \frac{3}{10}R\omega_i + \frac{7}{10}R\omega_i'$$

Thay vào (1) ta được :

$$\omega_i = \frac{10}{7}\frac{v_i'}{R} - \frac{3}{7}\omega_1' \qquad (3)$$

$$v_i = \frac{3}{7}v_i' + \frac{4}{7}\omega_i'R \qquad (4)$$

Căn cứ vào (3) và (4) ta xét một số va chạm :

• Va chạm 1 $\begin{cases} \text{trước : } v_1' = 2v\tan\alpha \;;\; \omega_1' = 0 \\ \text{sau : } v_1 = \dfrac{6v\tan\alpha}{7} \;;\; \omega_1 = \dfrac{20v\tan\alpha}{7R} \end{cases}$

• Va chạm 2 $\begin{cases} \text{trước : } v_2' = \dfrac{20v\tan\alpha}{7} \;;\; \omega_2' = \omega_1 = \dfrac{20v\tan\alpha}{7R} \\ \text{sau : } v_2 = \dfrac{20v\tan\alpha}{7} \;;\; \omega_2 = \dfrac{20v\tan\alpha}{7R} \end{cases}$

• Va chạm 3 $\begin{cases} \text{trước : } v_3' = \dfrac{34v\tan\alpha}{7} \;;\; \omega_3' = \dfrac{20v\tan\alpha}{7R} \\ \text{sau : } v_3 = \dfrac{26}{7}v\tan\alpha \;;\; \omega_3 = \dfrac{40v\tan\alpha}{7R} \end{cases}$

Tương tự ta được : $v_4 = \dfrac{40}{7}v\tan\alpha \;;\; \omega_4 = \dfrac{40v\tan\alpha}{7R}$

Khái quát kết quả tìm được :

Khi n lẻ : $v_n = \dfrac{10n - 4}{7}v\tan\alpha$

Khi n chẵn : $v_n = \dfrac{10n}{7}v\tan\alpha$.

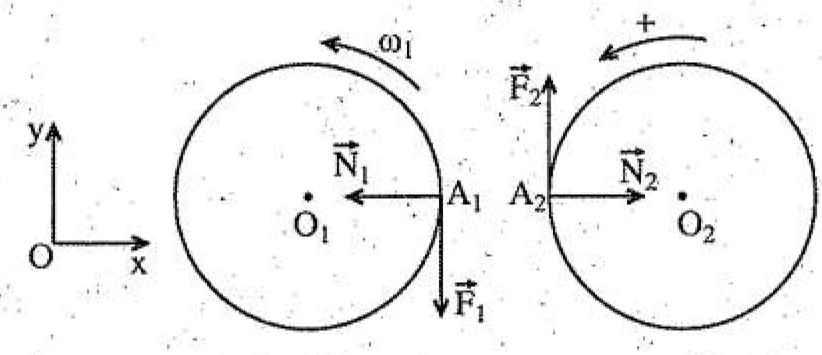
Chú ý : Ta có thể thay định luật BTCN bằng công thức khác. Cụ thể là, do điểm tiếp xúc K khi va chạm không dịch chuyển nên vận tốc của điểm tiếp xúc trước va chạm bằng và ngược chiều với vận tốc của nó sau va chạm.

Từ $\vec{v}'_K = -\vec{v}_K \Rightarrow \begin{cases} v_{yi} = -v'_{yi} \\ v_{xi} - \omega_i R = -(v'_{xi} - \omega'_i R) \end{cases}$

(Xem bài tập 1.29 Cơ học 2)

3.8. *Cách giải 1* (Áp dụng định lí biến thiên momen động lượng cho mỗi vòng khi va chạm).

Chọn chiều dương cho mỗi vòng là chiều chuyển động lúc đầu (Hình 3.11G).



Hình 3.11G

Áp dụng định lí biến thiên động lượng cho mỗi vòng :

$$-F_1\Delta t = mv'_{1y} \qquad (1)$$

$$F_2\Delta t = mv'_{2y} \qquad (2)$$

Chọn điểm cố định trùng với tâm của mỗi vòng lúc va chạm để tính momen động lượng.

$$-F_1R\Delta t = mR^2(\omega'_1 - \omega_1) \qquad (3)$$

$$-F_2R\Delta t = mR^2(\omega'_2 - \omega_2) \qquad (4)$$

Gọi A_1 và A_2 là hai điểm của hai vòng khi tiếp xúc.

$$\vec{v}'_{A_1} = \vec{v}'_1 + \omega'_1 \wedge \overrightarrow{O_1A_1}$$

$$\vec{v}'_{A_2} = \vec{v}'_2 + \omega'_2 \wedge \overrightarrow{O_2A_2}$$

Ngay sau va chạm $\vec{v}'_{A_1} = \vec{v}'_{A_2}$

$$\vec{v}'_1 + \vec{\omega}'_1 \wedge \overrightarrow{O_1A_1} = \vec{v}'_2 + \vec{\omega}'_2 \wedge \overrightarrow{O_2A_2}$$

Chiếu lên Oy : $\quad v'_{1y} + \omega'_1R = v'_{2y} - \omega'_2R \qquad (5)$

Từ (1) và (3) suy ra : $v'_{1y} = R(\omega'_1 - \omega_1)$

Từ (2) và (4) suy ra : $v'_{2y} = -R(\omega'_2 - \omega_2)$

Thế vào (5) ta được : $\omega'_1 + \omega'_2 = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ (6)

So sánh (3) với (4) ta được :

$$\omega'_1 - \omega_1 = \omega'_2 - \omega_2$$

$$\omega'_1 - \omega'_2 = \omega_1 - \omega_2 \qquad (7)$$

Cuối cùng kết hợp (6) với (7) ta được :

$$\omega'_1 = \frac{3\omega_1 - \omega_2}{4} \; ; \; \omega'_2 = \frac{3\omega_2 - \omega_1}{4}$$

Cách giải 2 (Áp dụng định luật bảo toàn động lượng và momen động lượng cho hệ).

Định luật BTĐL : Ox : $v'_{1x} + v'_{2x} = v_1 - v_2$ (1)

Oy : $v'_{1y} + v'_{2y} = 0$ (2)

Định luật BTMMĐL (Chọn điểm cố định A trùng với điểm tiếp xúc của hai vòng để tính momen).

Đĩa 1 : $\vec{L}_{A_1} = \vec{L}_{O_1} + \overrightarrow{AO_1} \wedge m\vec{v}'_1$

$\Rightarrow L_{A_1} = mR^2\omega_1$

$\vec{L}'_{A_1} = \vec{L}'_{O_1} + \overrightarrow{AO_1} \wedge m\vec{v}'_1$

$\Rightarrow L'_{A_1} = mR^2\omega'_1 - Rmv'_{1y}$ $(v'_{1y} < 0)$

Đĩa 2 : $\vec{L}_{A_2} = \vec{L}_{O_2} + \overrightarrow{AO_2} \wedge m\vec{v}_2$

$\Rightarrow L_{A_2} = mR^2\omega_2$

$$\vec{L}'_{A_2} = \vec{L}'_{O_2} + \overrightarrow{AO_2} \wedge m\vec{v}'_2$$

$$\Rightarrow L'_{A_2} = mR^2\omega'_2 + Rmv'_{2y}$$

$$mR^2(\omega_1 + \omega_2) = mR^2(\omega'_1 + \omega'_2) + mR(v'_{2y} - v'_{1y})$$

$$\Rightarrow R(\omega_1 + \omega_2) = R(\omega'_1 + \omega'_2) + v'_{2y} - v'_{1y} \quad (3)$$

Tại thời điểm cuối cùng của va chạm : $\vec{v}_{A_1} = \vec{v}_{A_2}$

$$\Rightarrow v'_{1y} + \omega'_1 R = v'_{2y} - \omega'_2 R \quad (4)$$

Giải hệ phương trình trên ta được :

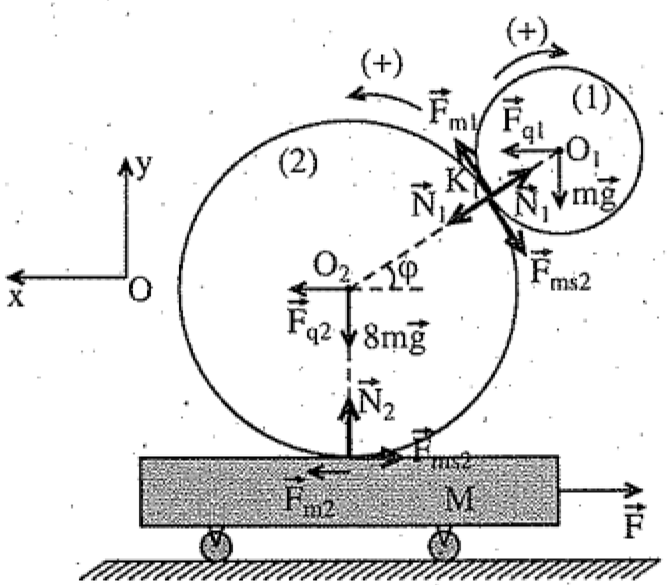
$$\omega'_1 = \frac{3\omega_1 - \omega_2}{4} \; ; \; \omega'_2 = \frac{3\omega_2 - \omega_1}{4}$$

3.9. (Xem Hình 3.12G).

Chọn các chiều dương cho chuyển động như hình vẽ.

Gia tốc của xe trong HQC đứng yên :

$$\text{Ox} : a_M = \frac{-F + F_{ms_2}}{6m} \quad (1)$$



Hình 3.12G

Xét trong HQC gắn với xe.

Do góc φ không đổi nên ta có :

$$a_{O_1} = a_{O_2} = a$$

$$r\gamma_1 = 2r\gamma_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma_1 = 2\gamma_2 = 2\gamma \\ a = 2\gamma r \end{cases}$$

Phương trình của chuyển động quay đối với khối tâm O_1 và O_2 :

$$F_{ms_1} r = \frac{2}{5} mr^2.2\gamma \Rightarrow F_{ms_1} = \frac{2}{5} ma$$

$$(F_{ms_2} - F_{ms_1})2r = \frac{2}{5}(8m)4r^2\gamma$$

$$\Rightarrow F_{ms_2} = \frac{18}{5}ma$$

Xét chuyển động tịnh tiến của cả hệ hai quả cầu :

$$9ma = F_{q_1} + F_{q_2} - F_{ms_2} = 9ma_M - \frac{18}{5}ma$$

$$\Rightarrow a_M = \frac{7a}{5}$$

Xét riêng quả cầu O_1.

$Oy: N_1 \sin\varphi + F_{ms_1}\cos\varphi = mg$

$Ox: -N_1\cos\varphi + F_{ms_1}\sin\varphi + F_{q_1} = ma$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_1 \sin\varphi - \dfrac{2}{5}ma\cos\varphi = mg \\ N_1\cos\varphi - \dfrac{2}{5}ma\sin\varphi - \dfrac{7ma}{5} = -ma \end{cases}$$

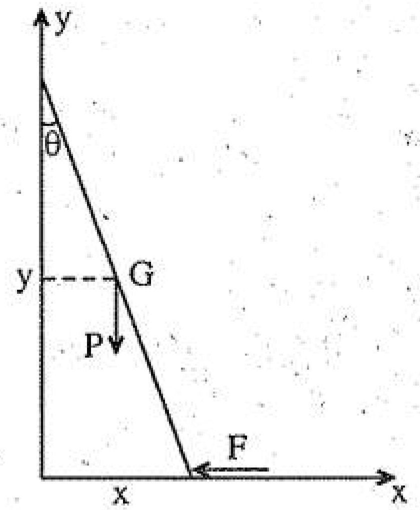
$$\Rightarrow a = \frac{5g\cos\varphi}{2(1+\sin\varphi)} \Rightarrow F = Ma_M + F_{ms_2} = \frac{30mg\cos\varphi}{1+\sin\varphi}$$

$$t = \sqrt{\frac{l}{a}} = \sqrt{\frac{2l(1+\sin\varphi)}{5g\cos\varphi}}$$

Chú ý : Trong HQC gắn với xe, vì $\vec{a}_{O_1} = \vec{a}_{O_2}$, nên ta có thể áp dụng các công thức : $\sum \vec{M}_K = I_K\vec{\gamma}_2$ cho quả cầu to và $\sum M_{K_1} = I_{K_1}\vec{\gamma}_1$ cho quả cầu nhỏ (bao gồm cả momen của lực quán tính).

CHỦ ĐỀ 4

4.1. Xem Hình 4.1G



Hình 4.1G

Cho thang dịch chuyển ảo về góc là $\delta\theta$. Điều kiện để thang cân bằng là :

$$\sum\delta A = -P\delta y - F\delta x = 0 \quad (a)$$

$$x = l\sin\theta \Rightarrow \delta x = l\cos\theta\delta\theta \quad (b)$$

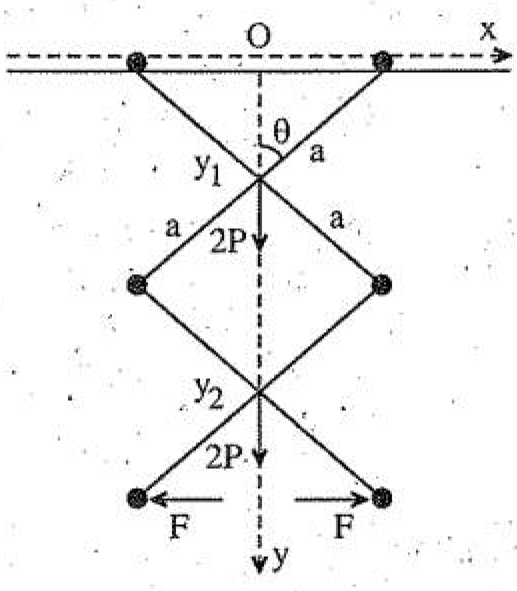
$$y = \frac{l}{2}\cos\theta \Rightarrow \delta y = -\frac{l}{2}\sin\theta\delta\theta \quad (c)$$

Thay (b) và (c) vào (a) ta được :

$$\left(P\frac{l}{2}\sin\theta - Fl\cos\theta\right)\delta\theta = 0$$

$$\Rightarrow F = \frac{1}{2}P\tan\theta$$

4.2. Xem Hình 4.2G



Hình 4.2G

Giả sử ta thực hiện một sự dịch chuyển ảo về góc θ một lượng $\delta\theta$. Khi ấy điểm đặt của các trọng lực dịch chuyển ảo một lượng là $\delta y_1 = \delta(a\cos\theta)$ và $\delta y_2 = \delta(3a\cos\theta)$, còn điểm đặt của lực F dịch chuyển ảo một lượng là $\delta(a\sin\theta)$. Điều kiện để hệ đứng yên là :

$$\sum\delta A = 0$$

$$\Rightarrow 2Fa\cos\theta\delta\theta - 2P.a\sin\theta\delta\theta - 2P.3a\sin\theta\delta\theta = 0$$

$$\Rightarrow F = 4P\tan\theta$$

Với $\theta = 45$ thì $F = 4P$.

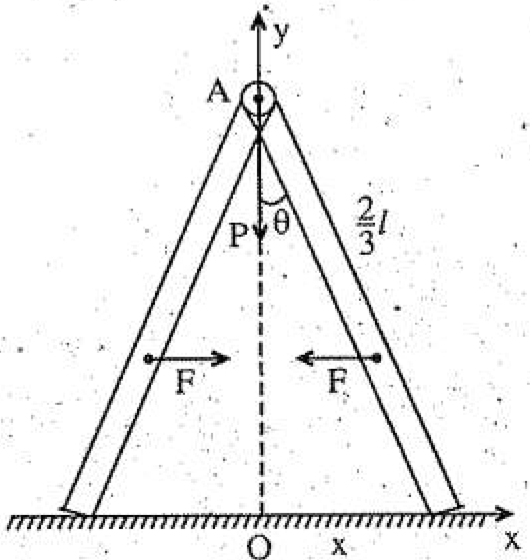
4.3. Xem Hình 4.3G

Cho đỉnh A của thang dịch chuyển ảo một đoạn $\delta y = \delta(l\cos\theta)$.

$$\delta A_p = P\delta y = -Pl\sin\theta\delta\theta$$

Điểm đặt của lực F dịch chuyển ảo một đoạn $\delta x = \delta\left(\frac{2}{3}l\sin\theta\right) = \frac{2l}{3}\cos\theta\delta\theta$

$$\delta A_F = 2F\frac{2l}{3}\cos\theta.\delta\theta$$



Hình 4.3G

$$\sum\delta A = 0 \Rightarrow -Pl\sin\theta\delta\theta + \frac{4Fl}{3}\cos\theta\delta\theta = 0$$

$$\Rightarrow F = \frac{3P}{4}\tan\theta$$

4.4. Cho xích dịch chuyển ảo một đoạn δb.

$$r = \frac{R}{h}b \Rightarrow \delta r = \frac{R}{h}\delta b$$

$$l = 2\pi r \Rightarrow \delta l = 2\pi\delta r = \frac{2\pi R}{h}\delta b$$

$$\sum\delta A = \delta A_P + \delta A_T = 0$$

$$P\delta b - T\frac{2\pi R}{h}\delta b = 0 \Rightarrow T = \frac{Ph}{2\pi R}$$

4.5. Xem Hình 4.4G

a) Trường hợp không ma sát :

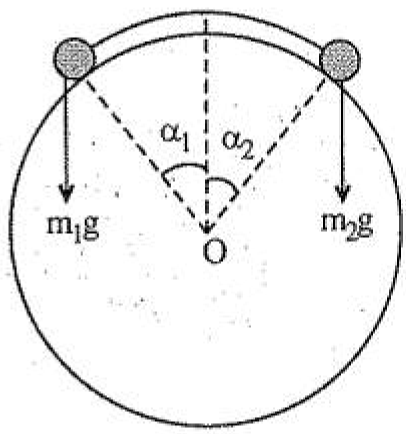
Xét một sự dịch chuyển ảo về góc.

Vì dây không dãn nên $\delta\alpha_2 = -\delta\alpha_1$

$\sum\delta A = 0 \Rightarrow m_1 g\sin\alpha_1 l\delta_1 + m_2 g\sin\alpha_2 l\delta\alpha_2 = 0$

$= gl\delta\alpha_1(m_1\sin\alpha - m_2\sin\alpha_2) = 0$

$\Rightarrow m_1\sin\alpha_1 = m_2\sin\alpha_2$.



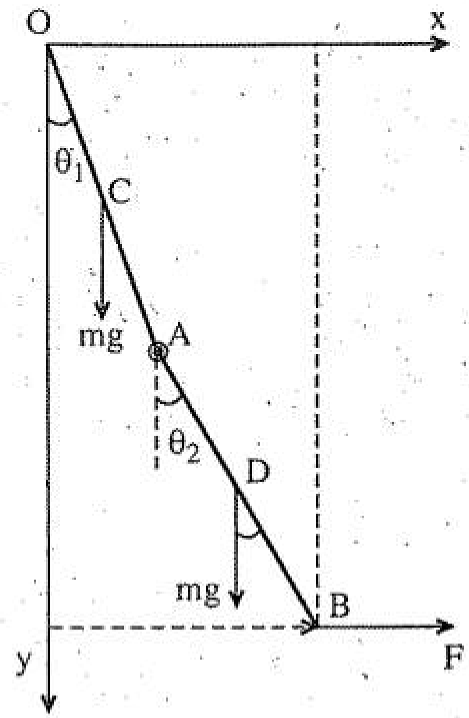
Hình 4.4G

b) Trường hợp có ma sát

$\Sigma\delta A = (m_1 g\sin\alpha_1 - m_2 g\sin\alpha_2)l\delta\alpha_1 - (\mu m_1 g\cos\alpha_1 + \mu m_2 g\cos\alpha_2)l\delta\alpha_1 = 0$

$\Rightarrow m_1(\sin\alpha_1 - \mu\cos\alpha_1) = m_2(\sin\alpha_2 + \mu\cos\alpha_2)$

4.6. Xem Hình 4.5G



Hình 4.5G

Cách 1 : Dùng phương pháp cộng ảo

Xét một sự dịch chuyển ảo về góc $\delta\theta_1$ và $\delta\theta_2$.

$$y_C = \frac{l}{2}\cos\theta_1$$

$$\delta y_C = -\frac{l}{2}\sin\theta_1\delta\theta_1$$

$$y_D = l\cos\theta_1 + \frac{l}{2}\cos\theta_2$$

$$\delta y_D = -l\sin\theta_1\delta\theta_1 - \frac{l}{2}\sin\theta_2\delta\theta_2$$

$x_B = l\sin\theta_1 + l\sin\theta_2$

$\delta x_B = l\cos\theta_1\delta\theta_1 + l\cos\theta_2\delta\theta_2$

$\Sigma\delta A = mg\delta y_c + mg\delta y_B + F\delta x_B = 0$

$$\Rightarrow \delta\theta_1\left(F\cos\theta_1 - \frac{3}{2}mg\sin\theta_1\right) + \delta\theta_2\left(F\cos\theta_2 - \frac{mg}{2}\sin\theta_2\right) = 0$$

Vì $\delta\theta_1$ và $\delta\theta_2$ độc lập với nhau nên ta có :

$$\begin{cases} F\cos\theta_1 - \dfrac{3}{2}mg\sin\theta_1 = 0 \\ F\cos\theta_2 - \dfrac{mg}{2}\sin\theta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \tan\theta_1 = \dfrac{2F}{3mg} \\ \tan\theta_2 = \dfrac{2F}{mg} \end{matrix}$$

Cách 2 : Dùng phương pháp năng lượng

Chọn mốc thế năng trọng trường tại đường nằm ngang Ox

$$E_P = -\frac{1}{2}mgl\cos\theta_1 - mg\left(l\cos\theta_1 + \frac{l}{2}\cos\theta_2\right)$$

$$= -\frac{3}{2}mgl\cos\theta_1 - \frac{1}{2}mgl\cos\theta_2$$

Vì lực $\vec{F}$ có tính chất giống như trọng lực nên nó cũng được suy ra từ thế năng E_F. Chọn mốc thế năng này tại đường thẳng đứng Oy :

$$E_F = -F(l\sin\theta_1 + l\sin\theta_2)$$

Thế năng hiệu dụng của hệ là :

$$E_t = \left(-\frac{3}{2}mgl\cos\theta_1 - Fl\sin\theta_1\right) + \left(-\frac{mgl}{2}\cos\theta_2 - Fl\sin\theta_2\right)$$

E_t là một hàm của hai tọa độ tổng quát là θ_1 và θ_2. Điều kiện cân bằng của hệ là

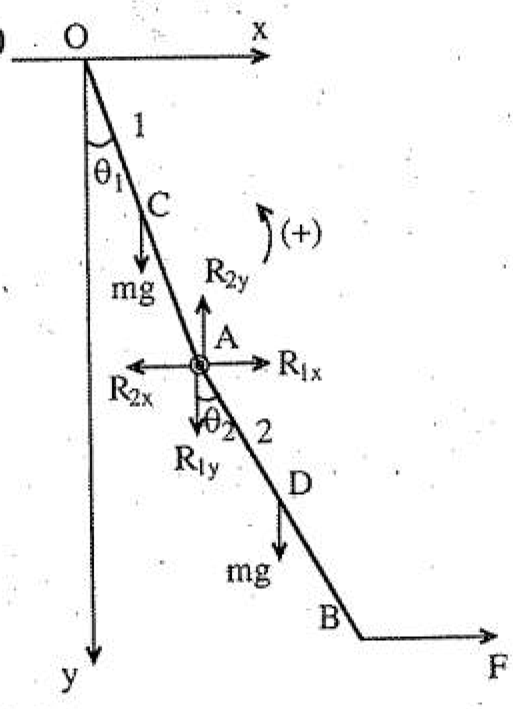
$$\frac{dE(\theta_1)}{d\theta_1} = 0 \text{ và } \frac{dE(\theta_2)}{d\theta_2} = 0 \text{ (xem công thức (3))}$$

$$\frac{dE(\theta_1)}{d\theta_1} = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}mgl\sin\theta_1 - Fl\cos\theta_1 = 0$$

$$\Rightarrow \tan\theta_1 = \frac{2F}{3mg}$$

$$\frac{dE(\theta_2)}{d\theta_1} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mgl\sin\theta_2 - Fl\cos\theta_2 = 0$$

$$\Rightarrow \tan\theta_2 = \frac{2F}{mg}.$$



Hình 4.6G

Cách 3 : Dùng phương pháp động lực học

Gọi $\vec{R}$ là lực tương tác giữa hai thanh tại khớp nối (Hình 4.6G). Thanh 1 chịu hai lực thành phần (R_{1x}, R_{1y}) còn thanh 2 chịu hai lực thành phần (R_{2x}, R_{2y})

• Xét thanh 1 : $\sum M_O = 0$

$$\Rightarrow -mg\frac{l}{2}\sin\theta_1 + R_{1x}l\cos\theta_1 - R_{1y}l\sin\theta_1 = 0 \quad (a)$$

• Xét thanh 2 :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F = R_{2x} \qquad \text{(b)}$$

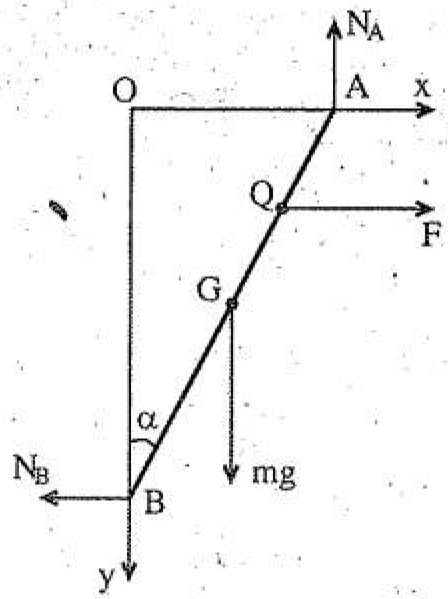
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow mg = R_{2y} \qquad \text{(c)}$$

Thay (b) và (c) vào (a) ta được : $\tan\theta_1 = \dfrac{2F}{3mg}$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow Fl\cos\theta_2 - mg\frac{l}{2}\sin\theta_2 = 0$$

$$\Rightarrow \tan\theta_2 = \frac{2F}{mg}$$

4.7. Xem Hình 4.7G



Hình 4.7G

Trong HQC quay thanh chịu các lực :

– trọng lực P

– lực li tâm F

– Các lực liên kết N_A, N_B

Trước hết ta tìm độ lớn và điểm đặt của lực li tâm F

• Độ lớn F :

$dF = \rho dl\omega^2 x$. Thay $dl = \dfrac{dx}{\sin\alpha}$ vào :

$$dF = \frac{\rho\omega^2}{\sin\alpha}xdx \Rightarrow F = \frac{\rho\omega^2}{\sin\alpha}\int_0^{x_A} xdx = \frac{\rho\omega^2 x_A^2}{2\sin\alpha}$$

• Điểm đặt Q : Xét momen của lực F đối với điểm A :

$$M_{\vec{F}} = \frac{\rho\omega^2 x_A^2 y_Q}{2\sin\alpha} \qquad \text{(a)}$$

$\sum M_{\overrightarrow{dF}} = \displaystyle\int \frac{\rho\omega^2 xdxy}{\sin\alpha}$. Thay $y = \dfrac{x_A - x}{\tan\alpha}$ vào ta được :

$$\sum M_{\overrightarrow{dF}} = \frac{\rho\omega^2}{\sin\alpha\tan\alpha}\int_0^{x_A} x(x_A - x)dx = \frac{1}{6}\frac{\rho\omega^2 x_A^3}{\sin\alpha\tan\alpha} \qquad \text{(b)}$$

Đặt (a) = (b) ta được :

$$y = \frac{1}{3}\frac{x_A}{\tan\alpha} = \frac{1}{3}y_B \Rightarrow x_Q = \frac{2}{3}x_A$$

Bây giờ ta tìm VTCB bằng phương pháp cộng ảo.

Cho đầu A dịch chuyển trên trục x một đoạn δx thì đầu B dịch chuyển trên trục y một đoạn δy_B.

Từ $x_A^2 + y_B^2 = l \Rightarrow x_A\delta x_A + y_B\delta y_B = 0$ (c)

$$\sum\delta A = 0 \Rightarrow P.\frac{1}{2}\delta y_B + F\frac{2}{3}\delta x_A = 0$$

$$\frac{mg}{2}\delta y_B + \frac{\rho\omega^2 x_A^2\delta x_A}{3\sin\alpha} = 0$$

Thay $\delta y_B = -x_A\dfrac{\delta x_A}{y_B}$ từ (c) vào, ta được

$$-\frac{mg}{2}\frac{x_A\delta x_A}{y_B} + \frac{\rho\omega^2 x_A^2\delta x_A}{3\sin\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{g}{2y_B} = \frac{\omega^2 x_A}{3l\sin\alpha} = \frac{\omega^2}{3l}$$

$$\Rightarrow y_B = \frac{3lg}{2\omega^2} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3g}{2\omega^2}$$

Chú ý : Có thể xác định VTCB bằng hệ phương trình :

$$\sum\vec{F} = \vec{O} \text{ và } \sum M = 0.$$

4.8. Xem Hình 4.8G

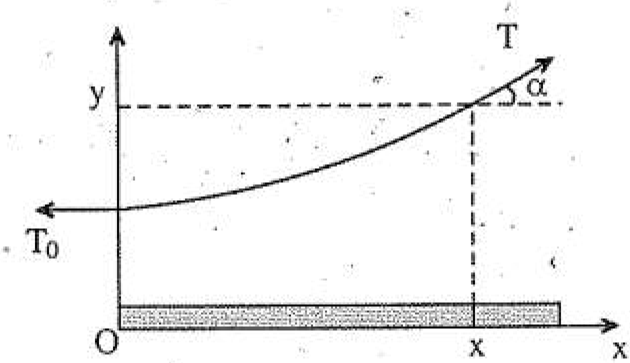
a) Xét sự cân bằng của một đoạn dây có hoành độ từ O đến x như Hình 4.8G

Oy : $T(x)\sin\alpha - \omega x = 0$ (a)

Ox : $T(x)\cos\alpha - T_0 = 0$ (b)

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{\omega x}{T_0} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\omega x}{T_0}$$

$$\Rightarrow y = \frac{\omega}{2T_0}x^2 + y_0 \text{ (parabol)}$$



Hình 4.8G

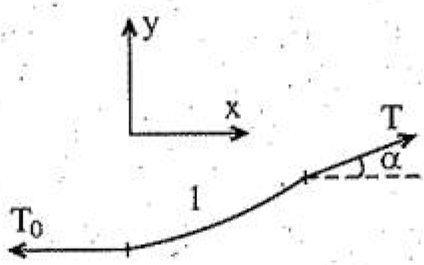
b) Từ (a) và (b) ta có :

$$T^2(x)\sin^2\alpha = \omega^2 x^2$$

$$T^2(x)\cos^2\alpha = T_0^2$$

$$\Rightarrow T(x) = T_0\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{T_0}x^2}$$

4.9. Xét sự cân bằng của nửa dây bên phải. Nửa dây này gồm hai đoạn : đoạn 1 không tiếp xúc với mặt phẳng nghiêng có trọng lượng là $\frac{mg}{L}\frac{l}{2}$ và đoạn 2 nằm trên mặt phẳng nghiêng có trọng lượng là $\frac{mg}{2L}(L - l)$. Điều kiện cân bằng của đoạn 1 (Hình 4.9G) là :

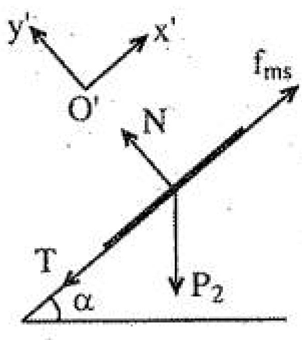


Hình 4.9G

$$Oy : T\sin\alpha - \frac{mg}{L}\frac{l}{2} = 0$$

$$\Rightarrow T = \frac{mgl}{2L\sin\alpha} \qquad \text{(a)}$$

Điều kiện cân bằng của đoạn 2 (Hình 4.10G) là :



Hình 4.10G

$$O'y' : N - \frac{mg}{2L}(L - l)\cos\alpha = 0$$

$$O'x' : f_{ms(max)} - T - \frac{mg}{2L}(L - l)\sin\alpha = 0$$

Thay $f_{ms(max)} = \mu N = N$ và T từ (a) vào ta được :

$\frac{l}{L} = \frac{\cos\alpha\sin\alpha - \sin^2\alpha}{1 + (\cos\alpha\sin\alpha - \sin^2\alpha)}$. Đặt $y = \cos\alpha\sin\alpha - \sin^2\alpha$, ta được :

$$\frac{l}{L} = \frac{1}{1 + \frac{1}{y}}$$

$\left(\frac{l}{1}\right)_{max}$ khi y_{max} hay $\frac{dy}{d\alpha} = 0$

$\Rightarrow \tan\alpha = 1$ hay $\alpha = 22{,}5^o$

$\Rightarrow l_{max} = 0{,}172$ L.

4.10. Xem Hình 4.11G

a) Xét sự cân bằng của một phần tử của dây nằm giữa các góc α và $\alpha + \Delta\alpha$

$$Ox : f_{ms} + (T + \Delta T)\cos\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) - T\cos\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) = 0$$

$$Oy : N - (T + \Delta T)\sin\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) - T\sin\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) = 0$$

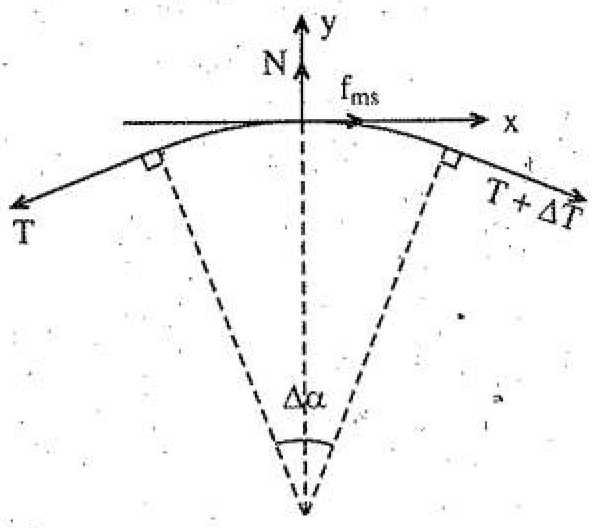
Trong phép gần đúng cấp 1 các phương trình trên trở thành :

$f_{ms} + (T + \Delta T) - T = 0 \Rightarrow f_{ms} = -\Delta T$

$N - T\frac{\Delta\alpha}{2} - T\frac{\Delta\alpha}{2} = 0 \Rightarrow N = T\Delta\alpha$

Vì $f_{ms(max)} = \mu N$ nên ta suy ra :

$\frac{\Delta T}{T} = -\mu_n\Delta\alpha$ hay $\frac{dT}{T} = -\mu_n d\alpha$



Hình 4.11G

Cuối cùng ta được : $F_A = F_B e^{\mu\alpha}$

b) $\mu\alpha_0 = l n10$; $\mu\alpha_1 = l n100 = 2l n10 = 2\mu\alpha_0$

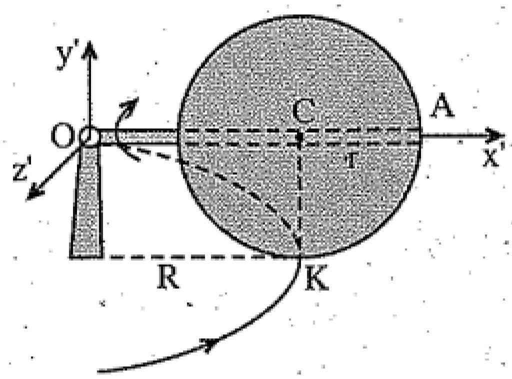
Suy ra $\alpha_1 = 2\alpha_0 = \frac{2\pi}{3}$

CHỦ ĐỀ 5

5.1. (Xem Hình 5.1G)

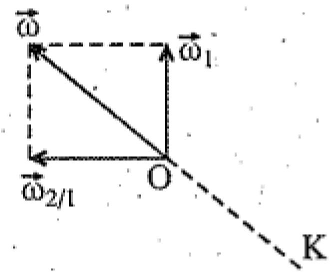
Cách giải 1.

$\left.\begin{matrix} v_0 = 0 \\ v_K = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ OK là trục quay tức thời của quả cầu. Gọi $\vec{\omega}$ là vận tốc góc trong chuyển động quay này, nó nằm trên trục quay tức thời KO.



Hình 5.1G

Gọi $\vec{\omega}_1$ là vận tốc góc của HQC quay cùng với trục OA quanh trục thẳng đứng qua O. Gọi $\vec{\omega}_{2/1}$ là vận tốc góc của HQC quay cùng với quả cầu quanh trục OA.



Hình 5.2G

Áp dụng công thức cộng vận tốc góc :

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{2/1} + \vec{\omega}_1 \text{ (Hình 5.2G)}$$

Suy ra : $\omega^2 = \omega_{2/1}^2 + \omega_1^2$ (1)

Vì quả cầu lăn không trượt trên mặt phẳng, ta có :

$$\vec{v}_K = \vec{0} \Rightarrow v_c - \omega_{2/1} r = 0 \Rightarrow \omega_{2/1} = \frac{v}{r} \qquad (2)$$

Mặt khác $v_c = \omega_1 R \Rightarrow \omega_1 = \dfrac{v}{R}$ (3)

Thay (2), (3) vào (1) ta được :

$$\omega^2 = v^2\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{R^2}\right).$$

$$W_d = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2 + md^2\right)\omega^2$$

Với $d = r\cos\alpha = r\dfrac{OC}{OK} = \dfrac{rR}{\sqrt{R^2 + r^2}}$

Cuối cùng ta được $E_d = \dfrac{mv^2}{10}\left(7 + \dfrac{2r^2}{R^2}\right)$.

Cách giải 2. Chọn "HQC vật" Ox'y'z' như ở Hình 5.1G. $\omega_1 = \frac{v}{r}$; $\omega_2 = \frac{v}{R}$; $\omega_3 = 0$.

$$E_K = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + 0) = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}mr^2\frac{v^2}{r^2} + \left(\frac{2}{5}mr^2 + mR^2\right)\frac{v^2}{R}\right]$$

$$= \frac{mv^2}{10}\left(7 + \frac{2r^2}{R^2}\right)$$

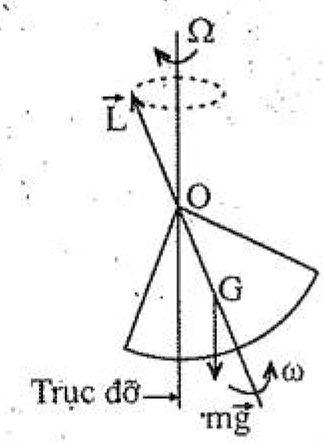
5.2. (Xem Hình 5.3G)

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} = -OG\frac{\vec{L}}{L} \wedge m\vec{g}$$

$$\vec{M}_O = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{L}$$

$$-OG.\frac{\vec{L}}{L} \wedge m\vec{g} = \vec{\Omega} \wedge \vec{L}$$

$$\frac{OG}{L}.m\vec{g} \wedge \vec{L} = \vec{\Omega} \wedge \vec{L}$$



Hình 5.3G

Suy ra : $\vec{\Omega} = \frac{OG}{L}m\vec{g}$

Ta thấy $\vec{\Omega}$ // $\vec{g}$, tức là trục tiến động trùng với trục đỡ và chiều của vectơ $\vec{\Omega}$ hướng xuống, ngược chiều của $\vec{\omega}$.

5.3. a) Áp dụng định lí biến thiên momen động lượng trong sự gần đúng của con quay, ta viết

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} \approx \vec{\Omega} \wedge \vec{L}_O$$

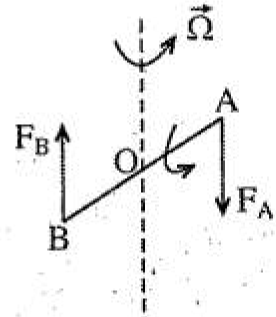
Suy ra : $\Omega = \frac{mgl}{L_O}$ với $l = OG = h + \frac{3R}{8}$ và $L_O = \frac{2}{5}mR^2\omega$. Thay vào, ta được :

$$\Omega = \frac{g\left(h + \frac{3R}{8}\right)}{\frac{2}{5}R^2\omega}$$

b) $\omega = 0,5$ rad/s $\Rightarrow T \approx 13$ (s)

5.4. Xét chuyển động của con quay thứ i (Hình 5.4G).

Các lực tác dụng vào con quay là :



Hình 5.4G

$$F_A = (i - 1)mg$$

$$F_B = img$$

$$\sum M_O = I\omega_i\Omega\sin\alpha$$

$$(2i - 1)mg\frac{l}{2}\sin\alpha = I\omega_i\Omega\sin\alpha$$

Suy ra $\Omega = \dfrac{(2i-1)mgl}{2I\omega_i}$ là như nhau đối với các con quay.

Đối với con quay trên cùng ta có :

$$\Omega = \frac{mgl}{2I\omega} = \frac{(2i-1)mgl}{2I\omega_i}$$

Cuối cùng ta được $\omega_i = (2i - 1)\omega$.

5.5. a) Chuyển động của con quay là chuyển động tổng hợp của ba chuyển động thành phần chủ yếu :

+ chuyển động quay quanh trục đối xứng (trục spin) với vận tốc góc ω

+ chuyển động tiến động chậm quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc Ω gây ra bởi trọng lực.

+ chuyển động của trục đối xứng tiến đến trục thẳng đứng gây ra bởi momen của lực ma sát.

b) Dùng hai HQC : HQC cố định Oxyz và HQC Ox'y'z' quay với vận tốc góc ω cùng với vật (HQC vật)

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{(O)} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{(O')} + \vec{\Omega} \wedge \vec{L}$$

vì ω thay đổi chậm nên $\left(\dfrac{d\vec{L}}{dt}\right)_{(O')} \approx 0$. Ta có : $\left(\dfrac{d\vec{L}}{dt}\right)_{(O)} = \vec{\Omega} \wedge \vec{L}$

trong đó $\vec{L} = I_3\omega\vec{e}_{z'}$ (I_3 là momen quán tính của con quay đối với trục z', $\left(I_3 = \frac{1}{2}Mr^2\right)$

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{(O)} = I_3\omega\frac{d}{dt}\vec{e}_{z'} = I_3\omega\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_{z'} \qquad (1)$$

Mặt khác $\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{(O)} = \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{M\vec{g}}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra :

$$I_3\omega\Omega\sin\theta = \frac{1}{2}lMg\sin\theta \text{ hay } \Omega = \frac{Mlg}{2I_3\omega} = \frac{lg}{r^2\omega}$$

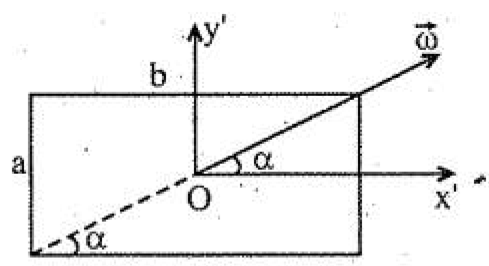
c) Khi trục đối xứng làm một góc θ với phương thẳng đứng thì lực ma sát F_{ms} tại điểm tiếp xúc với đất xấp xỉ bằng μMg. Thực ra chỉ có cạnh trái của đáy thanh là tiếp xúc với đất. Lực ma sát ngược với vận tốc trượt và có hướng như Hình 5.16. Momen của lực này đối với C làm giảm góc θ, tức là làm cho trục đối xứng trở nên song song với trục tiến động, tức là trở nên có phương thẳng đứng.

$$\frac{d\vec{L}_c}{dt} = -\frac{1}{2}\mu Mgl\vec{e}_{y'}$$

$$I_3\omega\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{2}\mu Mgl$$

$$t = \int_0^t d\theta = -\int_\theta^0 \frac{r^2\omega}{\mu gl}d\theta = \frac{r^2\omega}{\mu gl}\theta$$

5.6. a) Chọn "HQC vật" có gốc tại khối tâm O, trục Ox' // cạnh b, trục Oy' // cạnh a (Hình 5.5G).



Hình 5.5G

$$I_{x'} = I_1 = \frac{1}{12}ma^2$$

$$I_{y'} = I_2 = \frac{1}{12}mb^2$$

$$I_{z'} = I_3 = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$$

$$\omega_1 = \omega_{x'} = \frac{\omega b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \; ; \; \omega_2 = \omega_{y'} = \frac{\omega a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \; ; \; \omega_3 = \omega_{z'} = 0$$

$$\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = 0$$

Các phương trình Ơ-le :

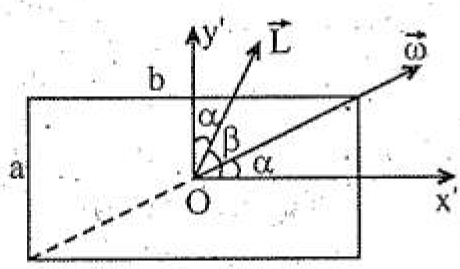
$$M_1 = I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = 0$$

$$M_2 = I\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 = 0$$

$$M_3 = I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = \frac{m(b^2 - a^2)ab\omega^2}{12(a^2 + b^2)} > 0$$

Vectơ $\overrightarrow{M_3}$ hướng theo trục chính OZ'.

b) $\vec{L} = (I_1\omega_1)\vec{e}_{x'} + (I_2\omega_2)\vec{e}_{y'} + 0$



Hình 5.6G

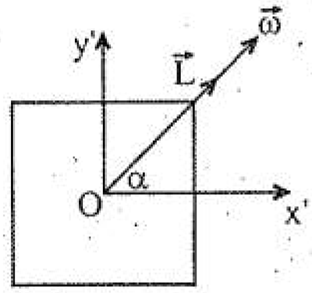
$$L_1 = L_{x'} = \frac{1}{12} \cdot \frac{ma^2b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\omega$$

$$L_2 = L_{y'} = \frac{1}{12} \cdot \frac{mb^2a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\omega$$

$$\left.\begin{aligned} \tan\beta &= \frac{L_2}{L_1} = \frac{b}{a} \\ \tan\alpha &= \frac{a}{b} = \text{cotan}\beta \end{aligned}\right\} \beta = 90^\circ - \alpha \neq \alpha. \text{ (Hình 5.6G)}$$

$$L = \sqrt{L_1^2 + L_2^2} = \frac{1}{12} mab\omega$$

c) Nếu a = b (Hình 5.7G)



Hình 5.7G

$$M_1 = M_2 = M_3 = 0$$

$\tan\beta = \tan\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \beta = 45^\circ \Rightarrow \vec{L} \; // \; \vec{\omega}$

$$L = \frac{1}{12} ma^2\omega$$

Suy ra, hai đường chéo của hình vuông cũng là hai trục chính.

c) $E_d = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 = \frac{1}{24}\frac{ma^2b^2}{(a^2+b^2)}\omega^2$

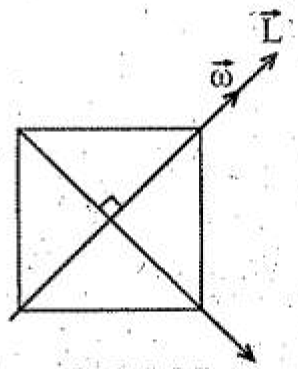
d) Nếu là hình vuông, tức a = b :

$$M_1 = M_2 = M_3 = 0$$

$\tan\beta = \tan\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \beta = 45^o$

$\Rightarrow \vec{L} \,//\, \vec{\omega}$ và $L = L_1\sqrt{2}$

$L = \frac{1}{12}\frac{ma^3\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2}}\omega = \frac{ma^2}{12}\omega$

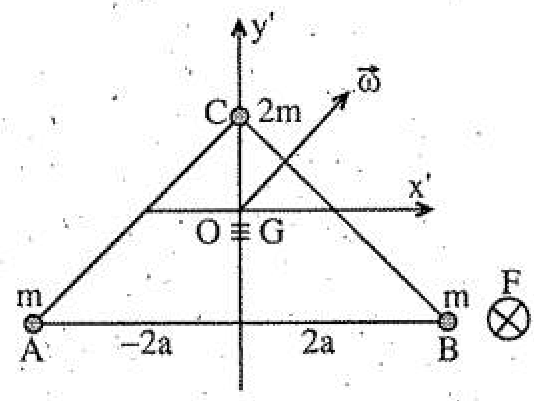


Hình 5.8G

Suy ra hai đường chéo của hình vuông cũng là hai trục chính (Hình 5.8G)

$\Rightarrow E_d = \frac{ma^2}{48}$

5.7. + Khối tâm của vật nằm tại trung điểm của đường cao. Chọn "HQC vật" có gốc tọa độ tại khối tâm (O ≡ G), mặt phẳng chứa ba khối lượng là mặt phẳng (x', y') (Hình 5.9G)



Hình 5.9G

Vị trí của ba khối lượng :

A(−2a, −a, 0)

B(2a, −a, 0)

C(O, a, 0)

$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G = \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}$

$(\vec{L} - \vec{0}) = \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}.\Delta t$

$\Rightarrow L_1 = a.F.\Delta t = aP$

$L_2 = 2aF\Delta t = 2aP$

$L_3 = 0$

+ Các trục tọa độ Ox', Oy' và Oz' đều là các trục chính. Ta có :

$$I_1 = 4ma^2 \,;\, I_2 = 8ma^2 \text{ và } I_3 = 12ma^2$$

$$L_1 = I_1\omega_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{aP}{4ma^2} = \frac{P}{4ma}$$

$$L_2 = I_2\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{2a}{8ma^2} = \frac{P}{4ma}$$

$$L_3 = I_3\omega_3 = 0 \Rightarrow \omega_3 = 0$$

Suy ra, vectơ vận tốc góc $\vec{\omega}$ nằm trên đường phân giác của góc $\widehat{x'Oy'}$ (Hình 5.9G)

\+ $\vec{F}.\Delta t = (\sum m)(\vec{v}_G - 0)$

$$\vec{v}_G = \frac{\vec{P}}{4m}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GA} \Rightarrow \begin{cases} v_{Ax'} = 0 \\ v_{Ay'} = 0 \\ v_{z'} = 0 \end{cases}$$

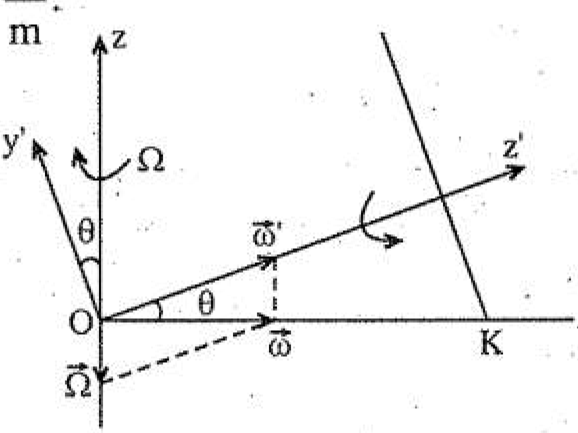
Tương tự : $\vec{v}_B = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GB} \Rightarrow \begin{cases} v_{Bx'} = 0 \\ v_{By'} = 0 \\ v_{Bz'} = -\dfrac{P}{m} \end{cases}$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GC} \Rightarrow \begin{cases} v_{Cx'} = 0 \\ v_{Cy'} = 0 \\ v_{Cz'} = 0 \end{cases}$$

Tóm lại : $\vec{v}_A = \vec{0}$; $\vec{v}_C = \vec{0}$; $\vec{v}_B = \dfrac{\vec{P}}{m}$.

5.8. Xem Hình 5.10G

a) OK là trục quay tức thời. Trong HQC cố định (O), vectơ $\vec{\omega}$ của đĩa nằm trên trục quay tức thời.



Hình 5.10G

Áp dụng công thức cộng vận tốc góc $\vec{\omega} = \vec{\omega}' + \vec{\Omega}$, ta suy ra vectơ $\vec{\omega}$ hướng sang phải và có độ lớn bằng :

$$\omega = \frac{\Omega}{\tan\theta}$$

b) Chọn "HQC vật" Ox'y'z', ta có :

$$\vec{\omega} = \omega'\vec{e}_{z'} - \Omega\vec{e}_z$$

$$\vec{e}_z = \sin\theta\vec{e}_{z'} + \cos\theta\vec{e}_{y'}$$

$$\vec{\omega} = \omega'\vec{e}_{z'} - \Omega(\sin\theta\vec{e}_{z'} + \cos\theta\vec{e}_{y'})$$

$$= (\omega' - \Omega\sin\theta)\vec{e}_{z'} - \Omega\cos\theta\vec{e}_{y'}$$

$$= \omega_3\vec{e}_{z'} + \omega_2\vec{e}_{y'}$$

Suy ra :

$$\omega_3 = \omega' - \Omega\sin\theta = \Omega\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$$

$$\omega_2 = -\Omega\cos\theta$$

$$I_3 = \frac{1}{2}mr^2$$

$$I_2 = \frac{1}{4}mr^2 + m(OC)^2 = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{mr^2}{\tan^2\theta}$$

$$\vec{L}_0 = I_3\omega_3\vec{e}_{z'} + I_2\omega_2\vec{e}_{y'}$$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = I_3\omega_3\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt} + I_2\omega_2\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt}$$

$$= I_3\omega_3\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_{z'} + I_2\omega_2\vec{e}_{y'}$$

$$= I_3\omega_3\Omega(-\sin\theta\vec{e}_{z'} - \cos\theta\vec{e}_{y'}) \wedge \vec{e}_{z'} + I_2\omega_2\Omega(-\sin\theta\vec{e}_{z'} - \cos\theta\vec{e}_{y'}) \wedge \vec{e}_{y'}$$

$$= (I_2\omega_2\Omega\sin\theta - I_3\omega_3\Omega\cos\theta)\vec{e}_{x'}$$

$$= \left(\frac{1}{4}mr^2 + \frac{mr^2}{\tan^2\theta}\right)(-\Omega\cos\theta)(\Omega\sin\theta) - \frac{1}{2}mr^2\Omega^2\frac{\cos^3\theta}{\sin\theta}$$

$$= \left(-\frac{1}{4}mr^2\Omega^2\cos\theta\sin\theta - \frac{3}{2}mr^2\Omega^2\frac{\cos^3\theta}{\sin\theta}\right)\vec{e}_{x'} \qquad (a)$$

Mặt khác :

$$\sum\overrightarrow{M}_0 = \overrightarrow{OC}\wedge mg(-\vec{e}_z) + \overrightarrow{OK}\wedge N\vec{e}_z$$

$$= -mgR\cos\theta\vec{e}_{z'}\wedge(\cos\theta\vec{e}_y + \sin\theta\vec{e}_{z'}) +$$

$$+ RN(\cos\theta\vec{e}_{z'} - \sin\theta\vec{e}_{y'})\wedge(\cos\theta\vec{e}_{y'} + \sin\theta\vec{e}_{z'})$$

$$= (mgR\cos^2\theta - RN)\vec{e}_{x'} \qquad (b)$$

Từ (a) = (b), suy ra :

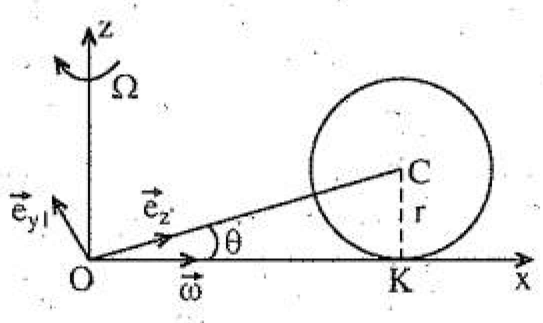
$$N = mg\cos^2\theta + \frac{1}{4}m\frac{r^2}{R}\Omega^2\cos\theta\sin\theta + \frac{3}{2}m\frac{r^2}{R}\Omega\frac{\cos^3\theta}{\sin\theta}$$

Thay $\dfrac{r}{R} = \sin\theta$, ta được :

$$N = mg\cos^2\theta + mr\Omega^2\left(\frac{3}{2}\cos^3\theta + \frac{1}{4}\cos\theta\sin^2\theta\right)$$

5.9. *Cách 1* : Dùng trục quay tức thời

a) Tại thời điểm xét vật có hai điểm có vận tốc bằng 0 là điểm O và điểm tiếp xúc K. Suy ra, trục OK là trục quay tức thời của vật và vectơ vận tốc góc $\vec{\omega}$ nằm trên trục quay tức thời OK (Hình 5.11G)



Hình 5.11G

Vì $\vec{v}_K = \vec{v}_C + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{CK} = \vec{O}$, suy ra :

$$\Omega R = \omega r \text{ hay } \omega = \frac{R\Omega}{r}$$

b) Vectơ momen động lượng của vật $\overrightarrow{L} = I\vec{\omega}$ cũng nằm trên trục quay tức thời nên nó quay quanh trục Oz với vận tốc góc Ω.

$$I = \frac{2}{5}mr^2 + mr^2 = \frac{7}{5}mr^2$$

$$\left|\vec{L}\right| = \frac{7}{5}mr^2.\frac{R\Omega}{r} = \frac{7}{5}mrR\Omega = \text{const}$$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{L}$$

$$\left|\frac{d\vec{L}_0}{dt}\right| = \Omega L = \frac{7}{5}mrR\Omega^2$$

$$\sum \vec{M}_0 = \overrightarrow{OC} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{OK} \wedge \vec{N}$$

$$\left|\sum \vec{M}_0\right| = (N - mg)R$$

Từ $\dfrac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum \vec{M}_0$, suy ra :

$$N = mg + \frac{7}{5}mr\Omega^2$$

Cách 2 :

Dùng các trục chính và momen quán tính chính.

Vì vật có một điểm O cố định nên các trục chính của vật là

– Trục Oz' dọc theo thanh

– Hai trục bất kì vuông góc với thanh. Chọn trục Oy' nằm trong mặt phẳng của tờ giấy (Hình 5.11G)

Từ điều kiện lăn không trượt tại K, suy ra vectơ $\vec{\omega}$ nằm trên trục OK và có độ lớn là $\omega = \dfrac{R\Omega}{r}$.

Các thành phần của $\vec{\omega}$ trên các trục chính là :

$$\omega_1 = 0\ ;\ \omega_2 = -\frac{R}{r}\Omega\sin\theta\ ;\ \omega_3 = \frac{R}{r}\Omega\cos\theta$$

Suy ra : $\vec{L}_0 = I_2\omega_2\vec{e}_{y'} + I_3\omega_3\vec{e}_{z'}$.

trong đó $I_2 = \frac{2}{5}mr^2 + m(R^2 + r^2)$ và $I_3 = \frac{2}{5}mr^2$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \frac{d}{dt}(I_2\omega_2\vec{e}_{y'} + I_3\omega_3\vec{e}_{z'})$$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{L}_0$$

$$\left|\frac{d\vec{L}_0}{dt}\right| = (I_3\omega_3\Omega\cos\theta - I_2\omega_2\Omega\sin\theta)$$

Thay I_2, I_3, ω_2, ω_3 và $\sin\theta = \frac{r}{\sqrt{R^2 + r^2}}$ vào ta được

$$\left|\frac{d\vec{L}_0}{dt}\right| = \frac{7}{5}mrR\Omega^2$$

Mặt khác $\left|\sum\vec{M}_0\right| = (N - mg)R$. Suy ra : $N = mg + \frac{7}{5}mr\Omega^2$.

CHỦ ĐỀ 6

6.1. Hình 6.1G

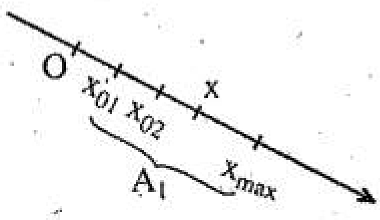
Chọn gốc tọa độ tại vị trí ban đầu, chọn chiều dương hướng xuống.

Khi ấy $\Delta l = x$.

a) Xét tại x

– Khi v > 0 :

$$m\ddot{x}'' = -kx + mg\sin\alpha - \mu_t mg\cos\alpha$$



Hình 6.1G

$$\ddot{x} = \frac{-k}{m}(x - x_{01}) \text{ với } x_{01} = \frac{mg}{k}(\sin\alpha - \mu_t\cos\alpha)$$

hay $x = x_{01} + A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$

Vật dao động điều hoà quanh VTCB (có tọa độ x_{01}) với tần số góc $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

– Khi v < 0

$$m\ddot{x} = -kx + mg\sin\alpha + \mu_t mg\cos\alpha$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}(x - x_{02}) \text{ với } x_{02} = \frac{mg}{k}(\sin\alpha + \mu_t\cos\alpha)$$

hay $x = x_{02} + A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$

Vật dao động điều hoà quanh VTCB có tọa độ x_{02} với tần số góc $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

– Khi v > 0 ta có :

$$t = 0 \begin{cases} x = x_{01} + A\cos\varphi_1 = 0 \\ v = -A\omega\sin\varphi_1 = v_0 \end{cases}$$

Suy ra : $A = \sqrt{x_{01}^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$

Đường đi của vật từ lúc đầu cho đến khi lại trở về vị trí ban đầu lần sau là :

$$S = 2(x_{01} + A)$$

Độ giảm động năng là :

$$-\Delta W_d = \mu_t mg\cos\alpha.2(x_{01} + A)$$

b) Tần số lặp lại giá trị v = 0 là $f' = 2f = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

c) Sau một thời gian dao động tắt dần vật dừng lại. Xét hai trường hợp :

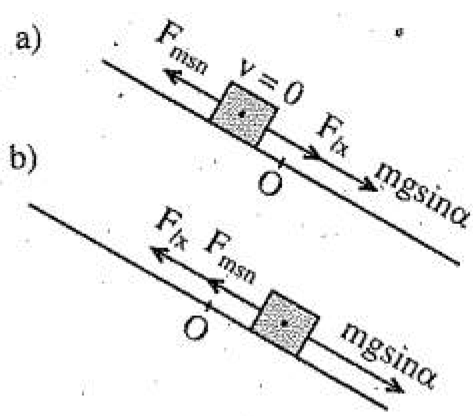
– Vật dừng lại ở trên vị trí ban đầu (Hình 6.2Ga)

Muốn dừng hẳn thì $F_{msn} = F_{lx} + mg\sin\alpha$

– Vật dừng lại ở dưới vị trí ban đầu (Hình 6.2Gb) :

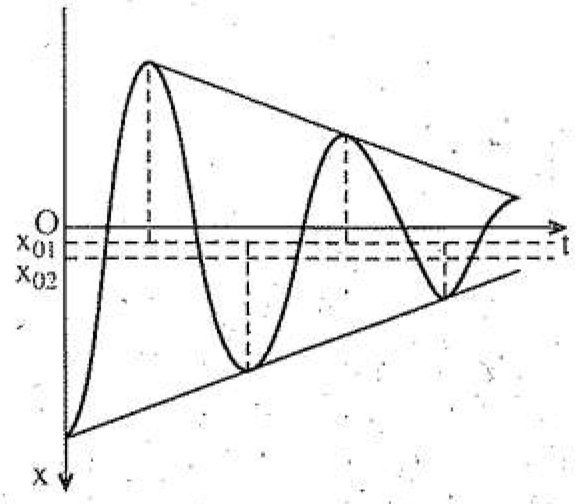
Khi ấy $F_{msn} = mg\sin\alpha - F_{lx}$

Suy ra vật dừng ở dưới vị trí ban đầu thì hợp lí hơn vì μ_n nhỏ, nên F_{msn} nhỏ



Hình 6.2G

d).



Hình 6.3G

6.2. • Xét con lắc đang dao động (Hình 6.4G)

$$F_{lx} - mg\cos\alpha = m\ddot{y} = -mA\omega^2\cos\omega t$$

Suy ra : $F_{lx} = mg\cos\alpha - mA\omega^2\cos\omega t$

• Xét riêng hộp :

$$Oy : N - Mg\cos\alpha + F' = 0$$

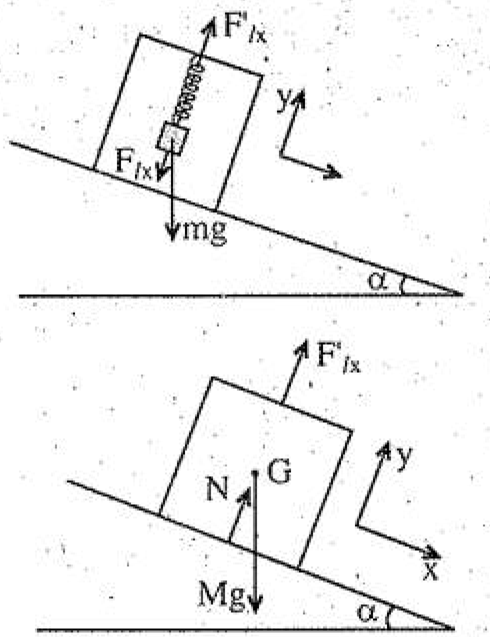
Thay $F'_{lx} = -F_{lx}$ (đại số), ta được

$$N - Mg\cos\alpha - mg\cos\alpha + mA\omega^2\cos\omega t = 0$$

hay : $N = (M + m)g\cos\alpha + mA\omega^2\cos\omega t$

Từ điều kiện $N \geq 0$ suy ra :

$$A \leq \frac{(M + m)g\cos\alpha}{m\omega^2}$$



Hình 6.4G

b) Xét cả hộp và con lắc chuyển động theo trục x :

$$Ox : \quad (M + m)g\sin\alpha - \mu N = (M + m)a_x$$

$$(M + m)g\sin\alpha - \tan\alpha[(M + m)g\cos\alpha + mA\omega^2\cos\omega t] = (M + m)a_x.$$

Suy ra : $$a_x = \frac{\tan\alpha . mA\omega^2}{M + m}\cos\omega t$$

$$v = \frac{mA\omega\tan\alpha}{M + m}\sin\omega t \qquad (1)$$

Theo (1) ta thấy trong một chu kì dao động của con lắc thì cả hộp chỉ chuyển động trong một nửa chu kì, còn một nửa chu kì hộp đứng yên vì $v < 0$ và lực ma sát $\geq (M + m)g\sin\alpha$. Như vậy đoạn đường mà vật đi được trong một chu kì là

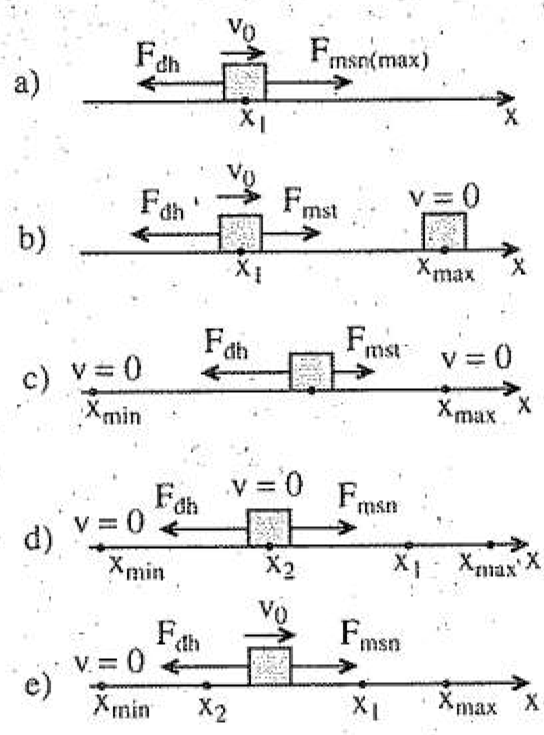
$$S = \int_0^{\frac{T}{2}} v dt = \frac{2mA\tan\alpha}{M + m}$$

Vậy tốc độ trung bình của hộp trong một khoảng thời gian dài là :

$$v_{tb} = \frac{S}{T} = \frac{m\omega A\tan\alpha}{\pi(M + m)}$$

6.3. a) Xét chuyển động của vật trong HQC đứng yên. Chọn gốc tọa độ x của vật là đầu tự do của lò xo khi chưa biến dạng. Khi ấy tọa độ của vật cũng là độ biến dạng x của lò xo. Chọn chiều dương là chiều chuyển động của băng chuyền.

Giả sử tại một thời điểm nào đó vật có vận tốc v_0. Vật "dính" với băng chuyền và chuyển động đều cùng với băng chuyền. Chuyển động dính diễn ra cho đến khi lực đàn hồi cân bằng với lực ma sát nghỉ cực đại. Gọi x_1 là vị trí tương ứng của vật (Hình 6.5Ga). Sau đó vật hết dính và lực ma sát giảm đột ngột đến lực ma sát trượt (Hình 6.5Gb). Vật trượt chậm dần theo kiểu dao động điều hoà từ vị trí x_1 đến vị trí x_{max} có $v = 0$ (Hình 6.5Gb). Sau đó vật chuyển động nhanh dần về phía ngược lại. Vì hệ lực tác dụng lên vật vẫn như ở Hình 6.5G b nên vật dao động điều hoà từ vị trí biên x_{max} đến vị trí biên x_{min} (Hình 6.5Gc). Sau đó vật trượt nhanh dần (theo kiểu dao động điều hoà) đến khi đạt được vận tốc v_0 của băng chuyền tại vị trí x_2 (Hình 6.5Gd). Từ vị trí x_2 vật trượt đều với vận tốc v_0 đến vị trí x_1 (Hình 6.5Ge). Một quá trình giống như trên lại lặp lại.



Hình 6.5G

b) Tại x_1 : $kx_1 = \mu_n mg \Rightarrow x_1 = \dfrac{\mu_n mg}{k}$ (1)

Khi vật chuyển động từ $x_1 \to x_{max}$

$$m\ddot{x} = -kx + \mu_t mg$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}\left(x - \frac{\mu_t mg}{k}\right)$$

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{\mu_t mg}{k} \qquad \left(\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

$$v = -A\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Gọi $t = 0$ là lúc vật có tọa độ x_1 và có $v = v_0$ (Hình 6.5Ga)

$$v_0 = -A\omega_0\sin\varphi$$

$$x_1 - \frac{\mu_t mg}{k} = A\cos\varphi$$

Thay $x_1 = \dfrac{\mu_n mg}{k}$ vào, ta được :

$$\frac{\mu_n mg}{k} - \frac{\mu_t mg}{k} = A\cos\varphi$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{v_0^2}{\omega_0^2} + \frac{m^2g^2}{k^2}(\mu_n - \mu_t)^2}$$

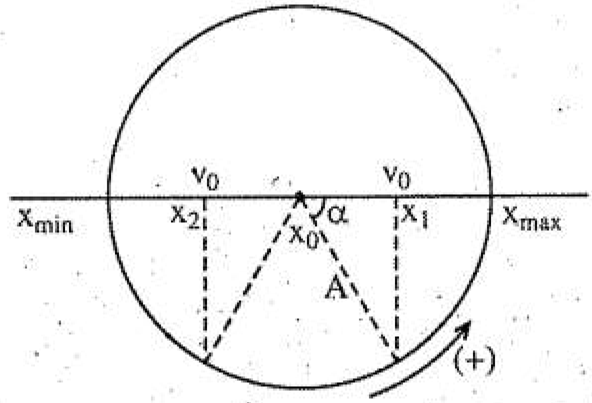
Vì vật DĐĐH từ $x_{max} \to x_{min}$ quanh VTCB có tọa độ x_0, ta có

$$kx_0 = \mu_t mg \Rightarrow x_0 = \frac{\mu_t mg}{k}$$

Như vậy $x_{max} = x_0 + A$ và $x_{min} = x_0 - A$.

Áp dụng bằng số ta được $x_{max} = 3{,}2$ cm và $x_{min} = 1{,}8$ cm.

c) Để tìm chu kì của chuyển động "dính – trượt" này ta dùng mối liên hệ giữa chuyển động tròn đều và DĐĐH (Hình 6.6G)



Hình 6.6G

Gọi t_1 là thời gian vật đi từ x_1 đến x_{max} từ x_{min} đến x_2, ta có :

$$\cos\alpha = \frac{x_1 - x_0}{A}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{x_1 - x_0}{A}\right)$$

$$t_1 = \frac{T_0\alpha}{2\pi} \qquad \left(T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right)$$

Gọi t_2 là thời gian vật DĐĐH từ $x_{max} \to x_{min}$: $t_2 = \frac{1}{2}T_0$

Gọi t_3 là thời gian vật chuyển động đều từ $x_2 \to x_1$:

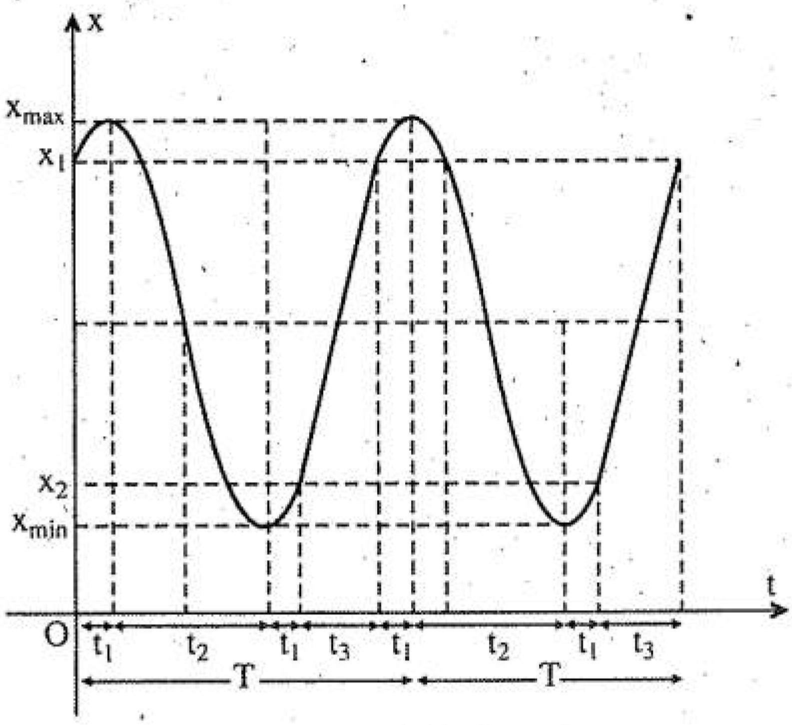
$$t_3 = \frac{x_1 - x_2}{v_0} = \frac{2(x_1 - x_0)}{v_0}$$

Vậy chu kì của chuyển động "dính – trượt" là :

$$T = T_0\left(\frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{2}\right) + \frac{2mg(\mu_n - \mu_t)}{kv_0}$$

$T \approx 0,67$ s.

d) Hình 6.7G



Hình 6.7G

6.4. a) $\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}$ hay $\omega_0^2 - \omega^2 = \frac{b^2}{4m^2}$

$$\Rightarrow 4\pi^2(f_0^2 - f^2) = \frac{b^2}{4m^2}$$

$$4\pi^2 f_0^2\left(1 - \frac{f^2}{f_0^2}\right) = \frac{b^2}{4m^2}$$

Ở giới hạn : $f_0 - f = \frac{1}{100}f_0 \Rightarrow f = f_0\left(1 - \frac{1}{100}\right)$

$$4\pi^2 f_0^2\left[1 - \left(1 - \frac{1}{100}\right)^2\right] = \frac{b^2}{4m^2}$$

$$4\pi^2 f_0^2\left(1 - 1 + \frac{2}{100}\right) = \frac{b^2}{4m^2}$$

Mặt khác : $\omega^2 = 4\pi^2 f_0^2 = \frac{k}{m}$

$$\Rightarrow \frac{k}{m}.\frac{2}{100} = \frac{b^2}{4m^2} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{8km}{100}}$$

b) $\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2} = 0$

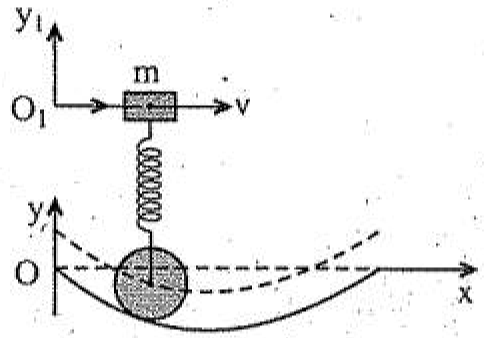
$$\Rightarrow b_{th} = \sqrt{4km}$$

c) Áp dụng bằng số

$$b = \sqrt{\frac{8 \times 100 \times 0,1}{100}} = 0,89\frac{Ns}{m}$$

$$b_{th} = \sqrt{4 \times 100 \times 0,1} = \sqrt{40} = 6,32\frac{Ns}{m}$$

6.5. Xem Hình 6.8G



Hình 6.8G

a) Thời gian qua ổ gà :

$$\mathscr{T} = \frac{l}{v} = \frac{0,50}{25} = 0,020 \text{ s}$$

Chu kì dao động riêng :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1,0.10^3}{50.10^3}} = 0,89 \text{ s}$$

$\Rightarrow \mathscr{T} \ll T_0$. Giả thiết của đầu bài được nghiệm đúng.

Lập phương trình chuyển động của khối lượng m : Khi khối lượng m lệch khỏi VTCB theo phương thẳng đứng một đoạn là li độ y_1 và bánh xe lệch khỏi VTCB một đoạn là li độ y thì lò xo sinh ra một lực kéo về là $F = -k(y_1 - y)$ tác dụng vào khối lượng m.

$$m\ddot{y}_1 = -ky_1 + ky = -ky_1 - \frac{ka}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi vt}{l}\right)$$

$$m\ddot{y}_1 + ky_1 = -\frac{ka}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi vt}{l}\right)$$

$$\int_0^{\mathscr{T}} m\ddot{y}dt + \int_0^{\mathscr{T}} ky_1 dt = \int_0^{\mathscr{T}} -\frac{ka}{2}dt + \int_0^{\mathscr{T}} \frac{ka}{2}\cos\frac{2\pi vt}{l}dt.$$

Trong thời gian $\mathscr{T}$ rất bé, li độ y_1 theo phương thẳng đứng của xe không đáng kể, tức là ≈ 0 trong $[0, \mathscr{T}]$

Tại $t = 0$, $\dot{x} = 0$; tại $t = \mathscr{T}$, $\dot{x} = v_0$. Ta có :

$$mv_0 = -\frac{ka}{2}\mathscr{T} + \frac{ka}{2}\sin\frac{2\pi v}{l}\Big|_0^{\frac{l}{v}}$$

$$\Rightarrow v_0 = -\frac{ka\mathscr{T}}{2m} = -0,050 \text{ m/s}$$

b) Chuyển động trong ổ gà làm phát sinh ra dao động của xe theo phương thẳng đứng sau khi đi qua ổ gà :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\ ;\ |v_0| = A\omega$$

$$A = |v_0|\sqrt{\frac{m}{k}} = 7\text{ mm}$$

6.6. *a.1)* $$m\ddot{x} = F_0\cos\omega t - kx - b\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0\cos\omega t \qquad (1)$$

a.2) Giải phương trình (1) bằng phương pháp giản đồ frê-nen hay phương pháp số phức, ta được

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad (2)$$

với $$A = \frac{F_0}{\sqrt{b^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2}} \qquad (3)$$

$$\text{tg}\varphi = \frac{-b\omega}{k - m\omega^2} \qquad (4)$$

Ta nhận thấy m dao động điều hoà cưỡng bức với cùng ω của lực cưỡng bức nhưng trễ pha hơn lực cưỡng bức.

b.1) Hệ dao động ở chế độ tới hạn khi biệt thức của phương trình đặc trưng bằng 0.

$$b_{th}^2 - 4km = 0 \Rightarrow b_{th} = 2\sqrt{km} = 2\frac{Ns}{m}$$

Đặt $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, $b = \alpha b_{th} = 2\alpha$ và $\omega = a\omega_0$

Công thức (3) được viết lại thành :

$$A = \frac{F_0}{m\omega_0^2}\frac{1}{\sqrt{4a^2\alpha^2 + (1 - a^2)^2}}$$

Nếu $\omega = 0$, $a = 0$, $A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$ thì

$$y = \frac{A}{A_0} = \frac{1}{\sqrt{4a^2\alpha^2 + (1 - a^2)^2}} \qquad (5)$$

b.2) Biên độ A cực đại khi y(max) :

$$\frac{dy}{da} = 0 \Rightarrow a[2(1 - a^2) - 4\alpha^2][4\alpha^2a^2 + (1 - a^2)^2]^{-\frac{3}{2}} = 0 \ (6)$$

hay $\begin{cases} a = \sqrt{1 - 2\alpha_1^2} \\ a = 0 \text{ (loại)} \end{cases}$

Vậy A_{max} khi $a = \sqrt{1 - 2\alpha_1^2}$ với $a_1 < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ và $b < \sqrt{2}$

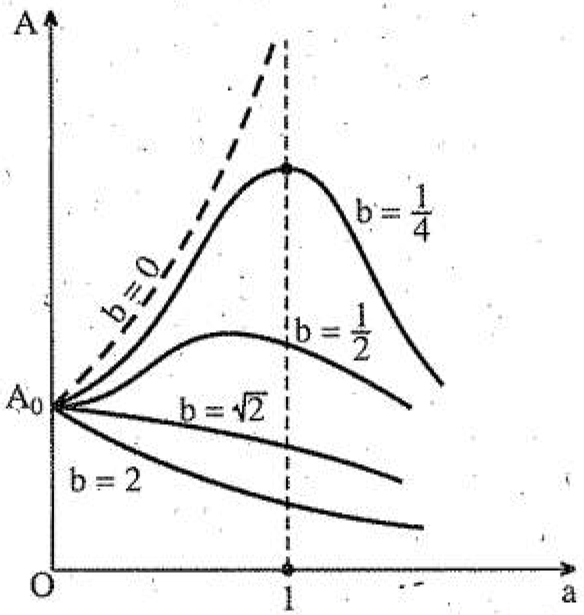
Khi ấy $A_{max} = \dfrac{A_0}{2\alpha_1\sqrt{1 - \alpha_1^2}}$

Nếu $\omega = 0$ thì $a = \sqrt{1 - 2\alpha_1^2} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ và $b = \sqrt{2}$

Sự cộng hưởng sẽ càng nhọn khi $\alpha \to 0$ (hay $b \to 0$).

Nếu $\alpha > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (hay $b > \sqrt{2}$) thì không có cộng hưởng.

b.3) Hình 6.9G biểu diễn sự phụ thuộc của biên độ A vào ω, tức là vào a (vì $\omega = a\omega_0$).



Hình 6.9G

6.7. a) $\omega_1^2 = \dfrac{k}{m_0}$ (m_0 đã biết)

$$\omega_2^2 = \frac{k}{m_0 + m}$$

Suy ra : $m = m_0\left(\dfrac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 1\right)$

b) Chọn trục Ox hướng xuống, chọn gốc tọa độ tại VTCB. Ta có :

Ở VTCB : $mg - k\Delta l = 0$

Ở li độ x : $mg - k(\Delta l + x) - bv = m\ddot{x}$

Suy ra : $\ddot{x} + \dfrac{b}{m}\dot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0$

Đặt $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, $\lambda = \dfrac{b}{2m}$, ta được :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Đặt $x = e^{rt}$ ta được phương trình đặc trưng

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2$$

Trường hợp 1 : $\Delta' > 0$, $\lambda > \omega_0$ hay $b > 2\sqrt{mk}$

Vật dịch chuyển chậm về VTCB theo quy luật :

$$x = e^{-\lambda t}\left(Ae^{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\,t} + Be^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\,t}\right)$$

Trường hợp 2 : $\Delta' = 0$, $\lambda = \omega_0$ hay $b = 2\sqrt{mk}$

Vật dịch chuyển nhanh nhất về VTCB theo quy luật :

$$x = e^{-\lambda t}(A + Bt)$$

Kết hợp với điều kiện ban đầu :

$$t = 0 \begin{cases} x = A = x_0 \\ \dot{x} = 0 \end{cases}$$

ta được : $x = (1 + \lambda)x_0 e^{-\lambda t}$

Trường hợp 3 : $\Delta' < 0$, $\lambda < \omega_0$ hay $b < 2\sqrt{mk}$

. Vật dao động điều hoà tắt dần

$$x = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$t = 0 \begin{cases} x = A\cos\varphi = x_0 \\ \dot{x} = -A\lambda\cos\varphi - A\omega\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

6.8. Trên quỹ đạo tròn, chọn gốc tọa độ của mỗi khối lượng tại VTCB của nó. Chọn một chiều dương chung

a) Giả sử tại thời điểm t, khối lượng 1 có tọa độ x_1, khối lượng 2 có tọa độ x_2.

$$m\ddot{x}_1 = 2k(x_2 - x_1) \quad (1)$$

$$m\ddot{x}_2 = -2k(x_2 - x_1) \quad (2)$$

Đặt $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ và thay $\ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1$, $\ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2$ vào, ta được

$$-\omega^2 x_1 = 2\omega_0^2(x_2 - x_1) \quad (3)$$

$$-\omega^2 x_2 = -2\omega_0^2(x_2 - x_1) \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra :

$$(-\omega^2 + 2\omega_0^2)x_1 = 2\omega_0^2 x_2 \quad (5)$$

$$(-\omega^2 + 2\omega_0^2)x_2 = 2\omega_0^2 x_1 \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra :

$$(-\omega^2 + 2\omega_0^2)^2 = 4\omega_0^4$$

$$\omega^2(\omega^2 - 4\omega_0^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \omega = 0 & \text{(mode 1)} \\ \omega = 2\omega_0 & \text{(mode 2)} \end{cases}$$

Với $\omega = 0$ ta được $x_1 = x_2 = vt$

Với $\omega = 2\omega_0$ ta được : $x_1 = -x_2 = A\cos\omega t$.

b) $m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) + k(x_3 - x_1)$

$$m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_3) + k(x_1 - x_2)$$

$$m\ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_1) + k(x_2 - x_3)$$

Suy ra : $-\omega^2 x_1 = -\omega_0^2(x_1 - x_2) + \omega_0^2(x_3 - x_1)$

$$-\omega^2 x_2 = -\omega_0^2(x_2 - x_3) + \omega_0^2(x_1 - x_2)$$

$$-\omega^2 x_3 = -\omega_0^2(x_3 - x_1) + \omega_0^2(x_2 - x_3)$$

hay : $(-\omega^2 + 2\omega_0^2)x_1 = \omega_0^2(x_2 + x_3)$ (4)

$$(-\omega^2 + 2\omega_0^2)x_2 = \omega_0^2(x_1 + x_3) \quad (5)$$

$$(-\omega^2 + 2\omega_0^2)x_3 = \omega_0^2(x_1 + x_2) \quad (6)$$

Lấy (4) + (5) + (6) ta được :

$$-\omega^2 + 2\omega_0^2 = 2\omega_0^2 \Rightarrow \omega = 0 \text{ (mode 1)}$$

Lấy (4) – (5), ta được :

$$(-\omega^2 + 2\omega_0^2)(x_1 - x_2) = -\omega_0^2(x_1 - x_2)$$

hay $\omega = \omega_0\sqrt{3}$ nếu $x_1 \neq x_2$. Thay $\omega = \omega_0\sqrt{3}$ vào (6), ta được

$$-x_3 = x_1 + x_2 \text{ hay } x_1 = -(x_2 + x_3)$$

Vậy nếu $x_2 = x_3$ thì $x_1 = -2x_2$ và ta được mode 2 với $\omega = \omega_0\sqrt{3}$.

Tương tự, nếu $x_1 = x_2$ thì $x_3 = -2x_1$ và ta cũng được mode 2.

6.9. Chọn gốc tọa độ cho mỗi khối lượng tại VTCB của nó. Chọn một chiều dương chung. Gọi x_1, x_2, x_3 lần lượt là li độ của mỗi khối lượng. Ta có :

$$m\ddot{x} = -kx_1 - k(x_1 - x_2) = -2kx_1 + kx_2 \quad (1)$$

$$m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) - k(x_2 - x_3) = kx_1 - 2kx_2 + kx_3 \quad (2)$$

$$m\ddot{x}_3 = -kx_3 + k(x_2 - x_3) = kx_2 - 2kx_3 \quad (3)$$

hay : $(\omega^2 - 2\omega_0^2)x_1 + \omega_0^2 x_2 = 0$ (4)

$$(\omega^2 - 2\omega_0^2)x_2 + \omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_3 = 0 \quad (5)$$

$$(\omega^2 - 2\omega_0^2)x_3 + \omega_0^2 x_2 = 0 \quad (6)$$

Lấy (4) – (6) ta được :

$$(\omega^2 - 2\omega_0^2)(x_1 - x_3) = 0$$

Suy ra :

- Nếu $x_1 \neq x_3$ thì $\omega = \omega_0\sqrt{2}$. Thay vào (5) ta được : $x_1 = -x_3$.
- Nếu $x_1 = x_3$ thì hệ (4) và (5) trở thành :

$$(\omega^2 - 2\omega_0^2)x_1 + \omega_0^2 x_2 = 0 \qquad (4')$$

$$(\omega^2 - 2\omega_0^2)x_2 + 2\omega_0^2 x_1 = 0 \qquad (5')$$

Từ (4') suy ra : $x_1 = \dfrac{-\omega_0^2}{\omega^2 - 2\omega_0^2}x_2$

Từ (5') suy ra : $x_1 = \dfrac{-(\omega^2 - 2\omega_0^2)}{2\omega_0^2}x_2$

Suy ra : $\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2 - 2\omega_0^2} = \dfrac{(\omega^2 - 2\omega_0^2)}{2\omega_0^2}$

hay $\omega^4 - 4\omega_0^2\omega^2 + 2\omega_0^4 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \omega = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\omega_0 = 1,85\omega_0 \\ \omega = \left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\omega_0 = 0,77\omega_0 \end{array}\right.$$

Vậy ta được 3 mode với các tần số là

$$\omega_1 = 0,77\omega_0 \text{ khi } x_1 = x_3 = \frac{x_2}{\sqrt{2}} = A_1\cos\omega t$$

$$\omega_2 = \sqrt{2}\omega_0 \text{ khi } x_2 = 0 \text{ và } x_1 = -x_3 = A_2\cos\omega t$$

$$\omega_3 = 1,85\omega_0 \text{ khi } x_1 = x_3 = \frac{-x_2}{\sqrt{2}} = A_3\cos\omega t$$

Cách giải tổng quát (xem mục C phần lí thuyết)

Đặt $x_1 = A_1\cos\omega t$; $x_2 = A_2\cos\omega t$ và $x_3 = A_3\cos\omega t$ rồi thay vào các phương trình (1), (2), (3) tìm được từ cách 1, ta được :

$$(\omega^2 - 2\omega_0^2)A_1 + \omega_0^2 A_2 = 0$$

$$(\omega^2 - 2\omega_0^2)A_2 + \omega_0^2 A_1 + \omega_0^2 A_3 = 0$$

$$(\omega^2 - 2\omega_0^2)A_3 + \omega_0^2 A_2 = 0$$

Suy ra : $$\frac{A_1 + A_3}{A_2} = \frac{-\omega^2 + 2\omega_0^2}{\omega_0^2} = \frac{2\omega_0^2}{-\omega^2 + 2\omega_0^2} \qquad (7)$$

Đặt $A_1 = C\sin\theta$; $A_2 = C\sin 2\theta$; $A_3 = C\sin 3\theta$ rồi thay vào (7) ta được :

$$\frac{A_1 + A_3}{A_2} = 2\cos\theta = \frac{-\omega^2 + 2\omega_0^2}{\omega_0^2} \qquad (8)$$

Từ điều kiện bờ $A_0 = 0$ và $A_4 = 0$ ta suy ra $4\theta = n\pi \Rightarrow \theta = \frac{n\pi}{4}$. Thế vào (8) ta được

$$2\cos\frac{n\pi}{4} = \frac{-\omega^2 + 2\omega_0^2}{\omega_0^2}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = 2\omega_0^2\left(1 - \cos\frac{n\pi}{4}\right) = 4\omega_0^2 \sin^2\frac{n\pi}{8}$$

$$\omega = 2\omega_0 \sin\frac{n\pi}{8} \text{ (với } n = 1, 2, 3)$$

Ta được các mode dao động sau :

Mode 1 : $\omega_1 = 2\omega_0 \sin\frac{\pi}{8} = 0,77\omega_0$. Ứng với nó là :

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= C\sin\frac{\pi}{4} = \frac{C}{\sqrt{2}} \Rightarrow x_1 = \frac{C}{\sqrt{2}}\cos\omega t \\ A_2 &= C\sin\frac{2\pi}{4} = C \Rightarrow x_2 = C\cos\omega t \\ A_3 &= C\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{C}{\sqrt{2}} \Rightarrow x_3 = \frac{C}{\sqrt{2}}\cos\omega t \end{aligned}\right\} x_1 = x_3 = \frac{x_2}{\sqrt{2}}$$

Mode 2 : $\omega_2 = 2\omega_0 \sin\dfrac{\pi}{4} = \omega_0\sqrt{2}$. Ứng với nó là :

$$\left.\begin{aligned} &A_1 = C\sin\frac{\pi}{2} = C \Rightarrow x_1 = C\cos\omega t \\ &A_2 = C\sin\pi = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \\ &A_3 = C\sin\frac{3\pi}{2} = -C \Rightarrow x_3 = -C\cos\omega t \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &x_2 = 0 \\ &x_1 = -x_3 \end{aligned}$$

Mode 3 : $\omega_3 = 2\omega_0 \sin\dfrac{3\pi}{8} = 1{,}85\omega_0$

$$\left.\begin{aligned} &A_1 = C\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{C}{\sqrt{2}} \Rightarrow x_1 = \frac{C}{\sqrt{2}}\cos\omega t \\ &A_2 = C\sin\frac{3\pi}{2} = -C \Rightarrow x_2 = -C\cos\omega t \\ &A_3 = C\sin\frac{9\pi}{4} = \frac{C}{\sqrt{2}} \Rightarrow x_3 = \frac{C}{\sqrt{2}}\cos\omega t \end{aligned}\right\} x_1 = x_3 = \frac{-x_2}{\sqrt{2}}$$

6.10. Xem Hình 6.10G

a) *Cách 1* : Khi dây bị rút ngắn tức thời tại VTCB

Áp dụng định luật bảo toàn momen động lượng : $mv_m l = mv_1(l - a)$

$$v_1 = \frac{v_m l}{l - a}$$

Khi khối lượng m đi lên theo quỹ đạo tròn bán kính $(l - a)$:

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng : $\dfrac{1}{2}mv_1^2 = mg(l - a)(1 - \cos\theta_m)$

Khi vật đi xuống theo quỹ đạo tròn với bán kính l :

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng : $mgl(1 - \cos\theta_m) = \dfrac{1}{2}mv_n^2$

$$v_n^2 = v_m^2\left(\frac{l}{l - a}\right)^3 \approx v_m^2\left(1 + \frac{3a}{l}\right)$$

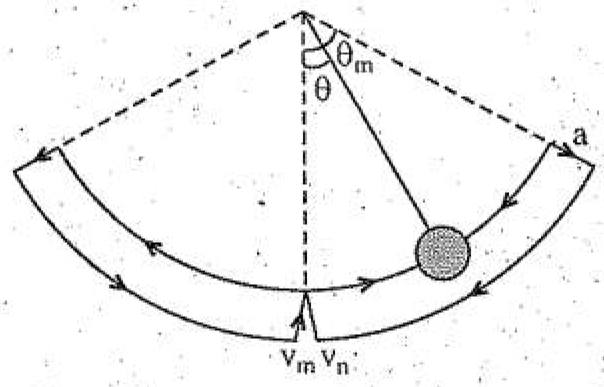
Độ tăng năng lượng :

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\frac{1}{2}mU_2^2 - \frac{1}{2}mv_m^2}{\frac{1}{2}mv_m^2} = \frac{v_2^2 - v_m^2}{v_m^2} = \frac{3a}{l}$$

b) $A_{ms} = 2\int_O^{\theta_m} kv^2 l d\theta$ (gần đúng)

với $v^2(\theta) = v_n^2 - 2gl(1 - \cos\theta)$

và $\cos\theta_m = 1 - \frac{v_n^2}{2gl}$



Hình 6.10G

$\Rightarrow A_{ms} = 4kgl^2(\sin\theta_m - \theta_m\cos\theta_m)$

c) Dao động của con lắc đạt tới chế độ tuần hoàn giới hạn khi năng lượng cung cấp cho con lắc trong mỗi nửa chu kì bằng năng lượng tiêu hao do ma sát trong nửa chu kì đó

$$\frac{3a}{l}.\frac{1}{2}mv_{gh}^2 = 4kgl^2(\sin\theta_{gh} - \theta_{gh}\cos\theta_{gh})$$

Thay $v_{gh}^2 = 2gl(1 - \cos\theta_{gh})$ vào, ta được

$$3ma(1 - \cos\theta_{gh}) = 4kl^2(\sin\theta_{gh} - \theta_{gh}\cos\theta_{gh})$$

d) *d.1)* $\theta_{gh} = 82^o$

d.2) $E_n = E_m + A_{kéo} - A_{ms}$

Nửa chu kì 1 : $E_1 = 274$ J ; $v_1 = 3,22$ m/s ; $\theta_1 = 13^o$

$A_1 = 120$ J ; $A_{ms} = 20$ J

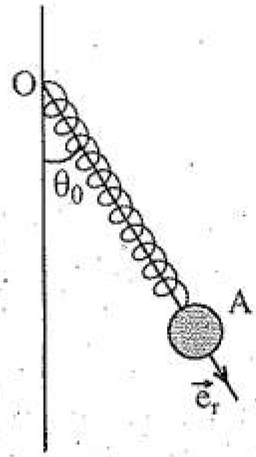
Nửa chu kì 2 : $E_2 = 374$ J ; $v_2 = 3,76$ m/s ; $\theta_2 = 15^o$

$A_2 = 163$ J ; $A_{ms} = 31$ J

Nửa chu kì thứ 38 : $E_{38} = 9258$ J ; $v_{38} = 18,69$ m/s ; $\theta_{38} = 82^o$

$A = 4045$ J ; $A_{ms} = 4043$ J.

6.11. Xem hình 6.11G



Hình 6.11G

a.1) $\overrightarrow{OA} = r\vec{e}_r$

$$m\ddot{r}\vec{e}_r = -k(r - l_0)\vec{e}_r + m\vec{g} + \vec{N}$$

chiếu lên $\vec{e}_r$:

$$m\ddot{r} = -k(r - l_0) + mg\cos\theta_0 \qquad (1)$$

VTCB : $\ddot{r} = 0 \Rightarrow kr_0 = kl_0 + mg\cos\theta_0 \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$m(r - r_0)'' + k(r - r_0) = 0$$

$$\omega = \frac{k}{m} \; ; \; T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0{,}44 \text{ s}$$

a.2. Lực ma sát nhớt : $F_c = -bv = b\dot{r}$

b.1. Trong HQC quay gắn với thanh

$$E_đ = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

$$E_{t_1} = -mgz = -mgr\cos\theta \quad \text{(mốc thế năng ở 0)}$$

$$E_{t_2} = \frac{1}{2}k(r - l_0)^2$$

$$E_{t_3} = -\frac{1}{2}(m\Omega^2 r^2 \sin^2\theta_0)$$

(Lực Cô-ri-ô-lít vuông góc với vận tốc tương đối của A so với thanh nên không sinh công).

b.2. $E = E_đ + E_{t_1} + E_{t_2} + E_{t_3} = \text{const}$

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow m\ddot{r} - mg\cos\theta_0 - k(r - l_0) - m\Omega^2 r\sin^2\theta_0 = 0$$

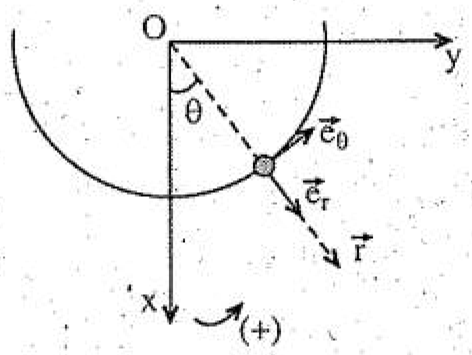
hay : $\ddot{r} + (\omega_0^2 - \Omega^2\sin^2\theta_0)r = \omega_0^2 l_0 + g\cos\theta_0 \left(\text{với } \omega_0^2 = \dfrac{k}{m}\right)$

$$\text{VTCB}: \ddot{r} = 0 \Rightarrow r_0 = \frac{\omega_0^2 l_0 + g\cos\theta_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 \sin^2\theta_0}$$

Đặt $\omega^2 = \omega_0^2 - \Omega^2 \sin^2\theta_0 = 0{,}19\omega_0^2$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{T_0}{0{,}436} \approx 1\text{ s}$$

6.12. Xem Hình 6.12G



Hình 6.12G

a) $m\vec{g} + \vec{N} - b\vec{v} = m\vec{a}$ (1)

$$-mg\sin\theta - bv = m\frac{dv}{dt}$$

$$-mg\theta - bR\dot{\theta} = mR\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{b}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0 \qquad (2)$$

b.1. Sự trở về VTCB diễn ra nhanh nhất ứng với chế độ phi tuần hoàn tới hạn. Khi ấy biệt thức của phương trình đặc trưng bằng 0.

$$\Delta = \frac{b^2}{m^2} - \frac{4g}{R} = 0 \Rightarrow R_{th} = \frac{4m^2g}{b^2} \qquad (3)$$

Khi ấy nghiệm của phương trình (2) là

$$\theta = (A + Bt)e^{-\frac{bt}{2m}}$$

$$\dot{\theta} = \left[B - \frac{b}{2m}(A + Bt)\right]e^{-\frac{bt}{2m}}$$

Điều kiện ban đầu (t = 0) : $\theta = \theta_0$; $\dot{\theta} = 0$. Suy ra

$$\theta(t) = \theta_0\left(1 + \frac{b}{2m}t\right)e^{-\frac{bt}{2m}}$$

b.2. $\dot{\theta} = -\dfrac{b^2}{4m^2}\theta_0 t e^{-\frac{bt}{2m}}$

Vậy $|v| = R_{th}\left|\dot{\theta}\right| = g\theta_0 t e^{-\frac{bt}{2m}}$

$$\frac{d|v|}{dt} = 0 \Rightarrow g\theta_0 e^{-\frac{bt}{2m}}\left(1 - \frac{bt}{2m}\right) = 0 \text{ tại } t = \frac{2m}{b}$$

$$\Rightarrow v_{max} = \frac{2mg\theta_0}{eb} = \frac{mg\theta_0}{1,36b} \qquad (4)$$

Chiếu phương trình (1) lên $\vec{e}_r$:

$$mg\cos\theta - N = -\frac{mv^2}{R} \text{ với } \theta = \theta_{\left(t = \frac{2m}{b}\right)} = \frac{2\theta_0}{e}$$

và v cho bởi phương trình (4), ta được :

$$N = mg\left[\cos\left(\frac{2\theta_0}{e}\right) + \left(\frac{\theta_0}{e}\right)^2\right]$$

c) Đối với $R < R_{th}$

$$\Delta = \frac{b^2}{m^2} - \frac{4g}{R} < 0$$

Chuyển động của hạt P là dao động tắt dần quanh VTCB ($\theta = 0$).

Phương trình (2) cho phép hai nghiệm phức :

$$r_1 = -\frac{b}{2m} + j\omega \text{ và } r_2 = -\frac{b}{2m} - j\omega$$

với $\omega = \sqrt{\frac{g}{R} - \frac{b^2}{4m^2}}$

Nghiệm tổng quát của phương trình (1) là

$$\theta = e^{-\frac{bt}{2m}}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

Tại $t = 0$, $\theta = \theta_0$ và $\dot{\theta} = 0$. Suy ra : $A = \theta_0$ và $B = \frac{b\theta}{2m\omega}$

$$\Rightarrow \theta(t) = \theta_0^{-\frac{bt}{2m}}\left[\cos\omega t + \frac{b}{2m\omega}\sin\omega t\right]$$

Dao động tắt dần với giả chu kì $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, được đặc trưng bởi lượng giảm loga :

$$\delta = \ln e^{-\frac{bT}{2m}} = \frac{b}{2m}T = \frac{b\pi}{\omega} \Rightarrow \delta = \frac{\pi b}{\sqrt{\dfrac{g}{R} - \dfrac{b^2}{4m^2}}}$$

CHỦ ĐỀ 7

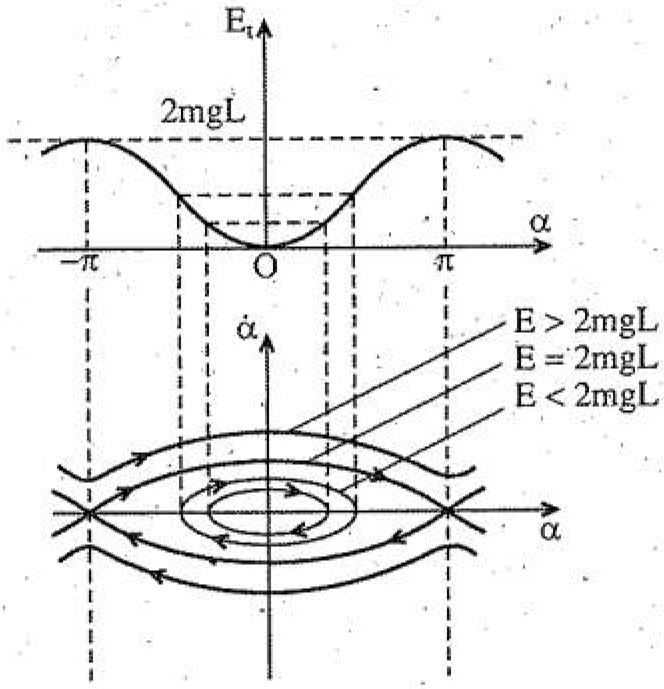
7.1. Chọn mốc thế năng tại điểm thấp nhất của con lắc (trạng thái cân bằng). Cơ năng toàn phần của con lắc là :

$$E = \frac{mL^2\dot{\alpha}^2}{2} + mgL(1 - \cos\alpha) = \text{const}$$

Phân tích biểu thức của E ta thấy :

- Nếu $E < 2mgL$, con lắc dao động quanh VTCB thấp nhất. Nếu $E \ll 2mgL$ thì con lắc dao động điều hoà.
- Nếu $E = 2mgL$, con lắc không dao động mà chuyển động tới VTCB cao nhất.
- Nếu $E > 2mgL$, con lắc quay quanh điểm cố định.

Quỹ đạo pha được chỉ trên Hình 7.1G



Hình 7.1G

Có K = 3 loại quỹ đạo pha khác nhau về tính chất : dao động, quay và chuyển động tới điểm cân bằng cao nhất.

7.2. a) Chọn trục x dọc theo phương chuyển động, chọn gốc tọa độ tại VTCB khi không có ma sát (lò xo chưa dãn). Ta được hai phương trình chuyển động sau đây

- Nếu $\dot{x} > 0 : \ddot{x} + \omega_0^2 x = -\dfrac{F_{ms}}{m}$

• Nếu $\dot{x} < 0 : \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_{ms}}{m}$ trong đó $F_{ms} = \mu mg$ và $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

b) Bằng cách đưa vào các biến số $x_1 = x + \frac{F_{ms}}{m\omega_0^2}$ và $x_2 = x - \frac{F_{ms}}{m\omega_0^2}$ chúng ta viết các phương trình trên đây theo cùng một dạng giống như khi không có ma sát.

$$\ddot{x}_{1,2} = \omega_0^2 x_{1,2} = 0$$

Tác dụng của lực ma sát là làm dịch chuyển vị trí cân bằng :

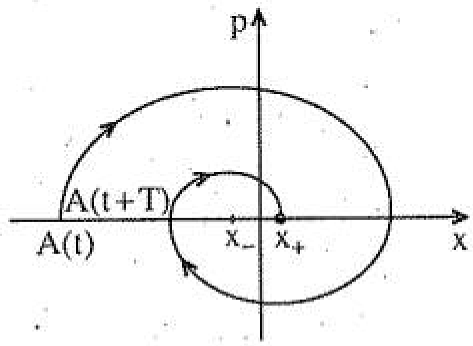
khi $\dot{x} > 0$, nó trở thành $x_- = -\frac{F_{ms}}{m\omega_0^2}$, $x_1 = 0$ và khi $\dot{x} < 0$ nó trở thành $x_+ = \frac{F_{ms}}{m\omega_0^2}$, $x_2 = 0$.

Như vậy, quỹ đạo pha gồm hai phần : đối với $p > 0$ thì quỹ đạo pha là phần elip có tâm tại x_-, còn đối với $p < 0$ thì quỹ đạo pha là phần elip có tâm tại x_+. Do tính liên tục của chuyển động mà các phần này phải ghép thành một đường cong liên tục và điểm ghép tại $p = 0$ (Hình 7.2G).

c) Theo quỹ đạo pha ở Hình 7.2G thì vật không nhất thiết phải dừng lại ở điểm $x = 0$.

Nó sẽ dừng lại trong khoảng từ x_- đến x_+, khoảng này gọi là "miền nghỉ". Bề rộng của miền này là :

$$x_+ - x_- = \frac{2F_{ms}}{m\omega_0^2}$$



Hình 7.2G

d) Từ quỹ đạo pha ta dễ dàng tính được độ giảm biên độ sau một chu kì :

$$\Delta A = A(t) - A(t+T) = 2(x_+ - x_-) = \frac{4F_{ms}}{m\omega_0^2} = \frac{4F_{ms}}{2\pi m\omega_0}$$

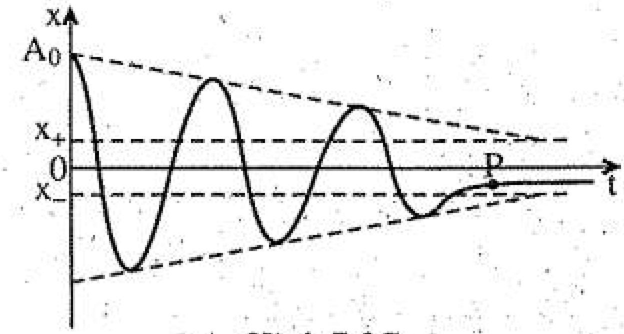
Ta thấy rằng khác với trường hợp ma sát nhớt, biên độ giảm dần theo định luật tuyến tính

$$A = A_0 - pt_n, \text{ trong đó } p = \frac{2F_{ms}}{\pi m\omega_0}$$

e) Số dao động toàn phần phụ thuộc vào biên độ ban đầu, cụ thể là

$$N = \frac{A_0}{2(x_+ - x_-)}$$

Hình 7.3G là đồ thị chỉ sự phụ thuộc của tọa độ x vào thời gian. Chu kì bằng chu kì của dao động tử tự do, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Thời gian giữa hai độ lệch cực đại liên tiếp là $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Dao động không dừng lại chừng nào biên độ còn lớn hơn một nửa miền nghỉ. Ở Hình 7.3G, điểm P đánh dấu điểm ở đó vật dừng lại.



Hình 7.3G

7.3. Trước hết ta tìm giá trị trung bình của lực căng T trong một chu kì dao động khi con lắc có chiều dài là l và biên độ góc là θ_0 (θ_0 nhỏ).

Tại li độ góc θ, ta có :

$$T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{l} = ml\dot{\theta}^2$$

Suy ra $T = mg\cos\theta + ml\dot{\theta}^2$

Vì θ nhỏ nên :

$$T = mg\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + ml\dot{\theta}^2$$

Lấy giá trị trung bình và nhớ rằng $\overline{\sin^2 \omega t} = \overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{2}$.

$$\overline{T} = mg - \frac{mg}{2}\overline{\theta^2} + ml\overline{\dot{\theta}^2} = mg - \frac{mg\theta_0^2}{4} + ml\frac{(\omega\theta_0)^2}{2}$$

Thay $\omega^2 = \frac{g}{l}$ vào ta được :

$$\overline{T} = mg\left(1 + \frac{\theta_0^2}{4}\right)$$

Khi dây bị rút ngắn từ từ thì công của lực kéo dây (cũng bằng công của lực căng) bằng độ tăng năng lượng của con lắc.

Chọn mốc thế năng tại điểm treo, ta viết :

$$-\overline{T}\Delta l = \Delta E$$

$$-mg\left(1 + \frac{\theta_0^2}{4}\right)\Delta l = \Delta(-mgl\cos\theta_0) \qquad (1)$$

$$\Delta(-mgl\cos\theta_0) = \Delta\left[-mgl\left(1 - \frac{\theta_0^2}{2}\right)\right] = -mg\Delta l + \frac{1}{2}mg\theta_0^2\Delta l + mgl\theta_0\Delta\theta_0$$

Thay vào (1) ta được :

$$l\theta_0\Delta\theta_0 + \frac{3}{4}\theta_0^2\Delta l = 0$$

$$l\theta_0^2\left(\frac{\Delta\theta_0}{\theta_0} + \frac{3}{4}\theta_0\frac{\Delta l}{l}\right) = 0$$

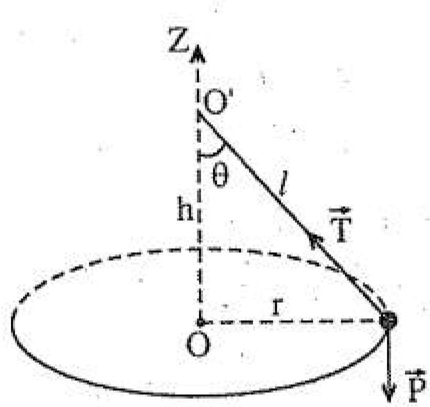
$$l\theta_0^2\Delta ln\left(\theta_0 l^{\frac{3}{4}}\right) = 0$$

Suy ra : $\theta_0 l^{\frac{3}{4}} = \text{const}$ (2)

Đây là một bất biến đoạn nhiệt trong quá trình thay đổi đoạn nhiệt chiều dài con lắc.

Từ (2) ta suy ra : khi $l \to \dfrac{l}{2}$ thì $\theta_0 \to 1,68\theta_0$.

7.4. Xem Hình 7.4G



Hình 7.4G

Trước hết ta xét momen của các lực tác dụng vào khối lượng m đối với trục OZ.

• Momen của lực căng $\vec{T}$ đối với điểm treo cố định O' trên trục OZ bằng 0. Suy ra, momen của lực căng T đối với trục OZ cũng bằng 0.

• Momen của trọng lực $\vec{P}$ đối với trục OZ bằng 0.

Vậy, $\frac{dL_Z}{dt} = 0$ hay $L_Z = \text{const}$

$$L_Z = I_Z\omega = mr^2\omega = \text{const} \qquad (1)$$

Mặt khác ta có :

$$F_{ht} = mg\tan\theta = m\omega^2 l\sin\theta$$

Suy ra :
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}} = \sqrt{\frac{g}{h}} \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được :

$$L_Z = mr^2\sqrt{\frac{g}{h}} = \text{const} \qquad (3)$$

a) Khi θ rất nhỏ thì $h \approx l$

$$L_Z = mr^2\sqrt{\frac{g}{h}} = mr^2\sqrt{\frac{g}{l}} = \text{const}$$

$$\Rightarrow \frac{r^2}{\sqrt{l}} = \text{const} \text{ hay } r \sim l^{\frac{1}{4}}$$

b) Khi $\theta \approx \frac{\pi}{2}$ thì $r \approx l$, ta có :

$$L_Z = mr^2\sqrt{\frac{g}{h}} = ml^2\sqrt{\frac{g}{h}} = \text{const} \Rightarrow \frac{l^2}{\sqrt{h}} = \text{const} \Rightarrow \frac{l^2}{\sqrt{h}} = \text{cosnt} \text{ hay } h \sim l^4$$

Tóm lại khi θ rất nhỏ thì $\frac{r^2}{\sqrt{l}}$ là bất biến đoạn nhiệt của hệ. Khi $\theta \approx 90^\circ$ thì $\frac{l^2}{\sqrt{h}}$ là bất biến đoạn nhiệt của hệ.

7.5. Xem Hình 7.5G

a) Vì vật B dao động nhỏ nên $T \approx mg$.

Vật A chịu hai lực căng $\vec{T}_1$ và $\vec{T}_2$ có độ lớn đều là T. Gọi $\vec{F}$ là hợp lực của $\vec{T}_1$ và $\vec{T}_2$. Ta có :

$$F_x = T\sin\varphi \approx mg\varphi$$

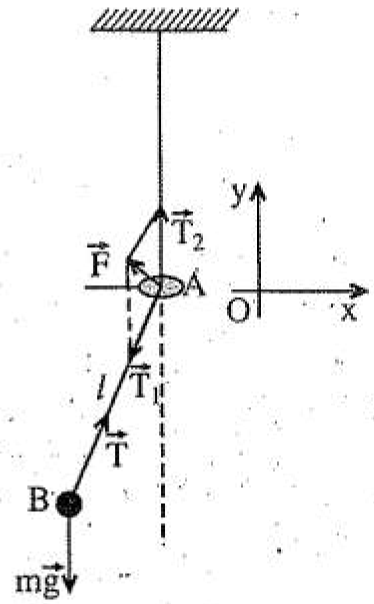
$$F_y = T(1 - \cos\varphi) = \frac{1}{2}mg\varphi^2 \qquad (1)$$

Thay $\varphi = \varphi_0\cos\omega t$ (với $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$) vào (1) ta có :

$$F_y = \frac{1}{2}mg\varphi_0^2\cos^2\omega t$$

Giá trị trung bình của $\overline{F}_y$ trong một chu kì là :

$$\overline{F}_y = \frac{1}{2}mg\varphi_0^2\overline{\cos^2\omega t} = \frac{1}{4}mg\varphi_0^2 \ (> 0)$$



Hình 7.5G

b) Dùng ngoại lực $\overline{F}'_y = -\overline{F}_y$ để dịch chuyển chậm vòng A theo phương thẳng đứng. Công của ngoại lực $\overline{F}'_y$ khi vòng dịch chuyển một đoạn dy là :

$$dA = -F_y dy = -\frac{1}{4}mg\varphi_0^2 dy \qquad (2)$$

Gọi l là chiều dài con lắc (l = AB), E là cơ năng của con lắc, ta có :

$$dy = dl \text{ và } E = \frac{1}{2}mgl\varphi_0^2$$

Thay vào (2) ta được : $dA = -\frac{1}{2}\frac{E}{l}dl$ vì dA = dE nên :

$$dE = -\frac{1}{2}\frac{E}{l}dl \Rightarrow \frac{dE}{E} + \frac{1}{2}\frac{dl}{l} = 0$$

Suy ra : $El^2 = \text{const}$ (3)

Công thức (3) cho biết sự biến đổi cơ năng của con lắc khi thay đổi chiều dài con lắc. Nó là bất biến đoạn nhiệt của hệ này.

7.6. Xem Hình 7.6G.

a) Định luật II Niu-tơn viết theo phương của dây :

Vật B : $T - mg = m\ddot{r}$

Vật A : $-T + mg\cos\theta = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$

Suy ra : $2m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - mg(1 - \cos\theta)$

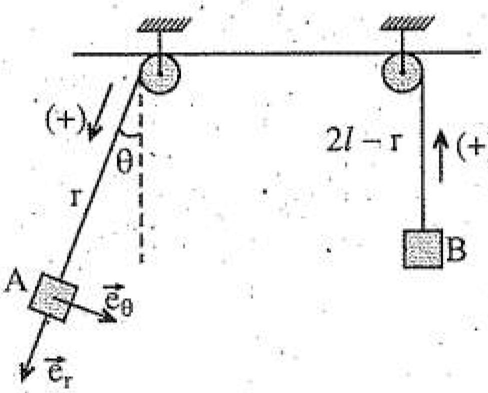
Thay $1 - \cos\theta = \dfrac{\theta^2}{2}$ vào, ta được phương trình :

$$\ddot{r} = \frac{1}{2}r\dot{\theta}^2 - \frac{1}{4}g\theta^2 \qquad (1)$$

Xét trong một chu kì dao động bất kì, ta coi chuyển động của vật A như chuyển động của một con lắc dài là r với biên độ góc là θ_r.

$$\theta = \theta_r\cos\omega t \left(\text{với } \omega = \sqrt{\frac{g}{r}}\right)$$

$$\dot{\theta} = -\omega\theta_r\sin\omega t$$



Hình 7.6G

Thay vào (1), ta được :

$$\ddot{r} = \frac{1}{2}g\theta_r^2\left(\sin^2\omega t - \frac{1}{2}\cos^2\omega t\right)$$

Gia tốc trung bình của B trong mỗi chu kì là :

$$\overline{a}_B = \overline{\ddot{r}} = \frac{1}{8}g\theta_r^2 \qquad (2)$$

Vì $\overline{a}_B > 0$ nên vật B đi lên nhưng rất chậm và sau một thời gian dài nó sẽ va vào ròng rọc.

b) Chọn mốc thế năng tại ròng rọc và viết biểu thức của cơ năng tại thời điểm khi $\theta = \theta_r$.

$$E = -mgr\cos\theta_r - mg(2l - r) + \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

$$= -mgr\left(1 - \frac{\theta_r^2}{2}\right) - mg(2l - r) + \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

$$= m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mgr\theta_r^2 - 2mgl = \text{const} \qquad (3)$$

Vì cơ năng bảo toàn nên ta có :

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\dot{r}^2 + \frac{1}{2}gr\theta_r^2\right) = 0$$

$$2\dot{r}\ddot{r} + \frac{g}{2}(\dot{r}\theta_r^2 + 2r\theta_r\dot{\theta}_r) = 0$$

Thay (1) vào, ta được

$$\frac{3}{4}\dot{r}\theta_r + r\dot{\theta}_r = 0 \Rightarrow \frac{3}{4}\frac{\dot{r}}{r} + \frac{\dot{\theta}_r}{\theta_r} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[ln\left(r^{\frac{3}{4}}\theta_r\right)\right] = 0$$

hay : $\theta_r r^{\frac{3}{4}} = \text{const}$ (4)

Suy ra : $\underbrace{\theta_0 l^{\frac{3}{4}}}_{\text{lúc đầu}} = \underbrace{\theta_m (2l)^{\frac{3}{4}}}_{\text{lúc B chạm ròng rọc}} \Rightarrow \theta_m = \theta_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$ (5)

Kết hợp (5) với (3) ta được : $v_B = \theta_0\sqrt{\frac{gl}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$

CHỦ ĐỀ 8

8.1. Chọn đầu dưới làm gốc tọa độ, chiều dương hướng lên. Xét một điểm có tọa độ x. Khối lượng của đoạn dây ở dưới điểm đó là $\frac{mx}{l}$. Lực căng $\vec{T}$ tại điểm đó là $T = \frac{mgx}{l}$. Như vậy tốc độ truyền sóng trên dây tại điểm x là :

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \sqrt{gx}$$

Ta lại có : $dx = -cdt$

Suy ra : $dt = -\frac{dx}{\sqrt{gx}}$

Thời gian để sóng xung chạy từ $x_0 = l$ đến x là :

$$\mathcal{T}(x) = -\int_l^x \frac{dx}{\sqrt{gx}} = \frac{\sqrt{l} - \sqrt{x}}{\sqrt{g}}$$

Nếu vật gặp sóng xung tại tọa độ x thì ta có :

$$l - x = \frac{1}{2}g\left(\frac{\sqrt{l} - \sqrt{x}}{\sqrt{g}}\right)^2$$

Suy ra : $9x^2 - 10lx + l^2 = 0$

$$x = \frac{1}{9}l$$

8.2. a) Chọn trục x có gốc tại A, chiều dương từ A $\rightarrow$ B. Sóng dừng xuất hiện trên dây AB có thể xem là sự giao thoa của hai sóng chạy ngược chiều nhau trên trục x : $u_1(x - ct)$ và $u_2 = (x + ct)$. Ta sẽ tìm hai sóng này.

Gọi f(x) là phương trình của dây AB tại t = 0.

Ta có : $u_1(x, 0) + u_2(x, 0) = f(x) \qquad (0 \leq x \leq L) \qquad (1)$

Vì các điểm trên dây tại t = 0 có vận tốc bằng 0.

Ta có : $$\frac{du_1(x, 0)}{dt} + \frac{du_2(x, 0)}{dt} = 0$$

vì $$\frac{du_1}{dt} = \frac{du_1}{dx}.\frac{dx}{dt} = c\frac{du_1}{dx}$$

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{du_2}{dx}.\frac{dx}{dt} = -c\frac{du_2}{dx}$$

Suy ra : $$\frac{du_1(x, 0)}{dx} - \frac{du_2(x, 0)}{dx} = 0 \qquad (2)$$

Tích phân phương trình (2) và cộng với (1) ta được :

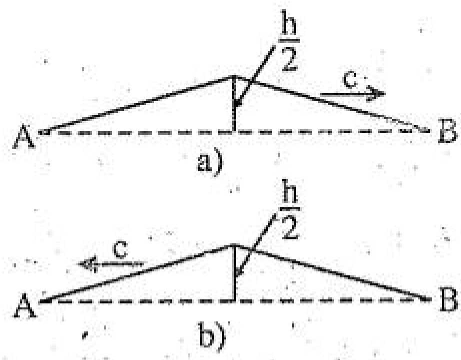
$$u_1(x) = \frac{1}{2}[f(x) + u_0]$$

$$u_2(x) = \frac{1}{2}[f(x) - u_0] \qquad (0 \leq x \leq L)$$

Trong đó u_0 là một hằng số tùy ý, ta có thể chọn $u_0 = 0$ và được :

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = \frac{1}{2}f(x) \quad (0 \le x \le L)$$

Như vậy hai sóng thành phần có li độ tại $t = 0$ bằng một nửa li độ của dây tại $t = 0$ và chạy về hai phía. Hình 8.1Ga mô tả sóng $u_1(x - ct)$, còn Hình 8.1Gb mô tả sóng $u_2(x + ct)$.



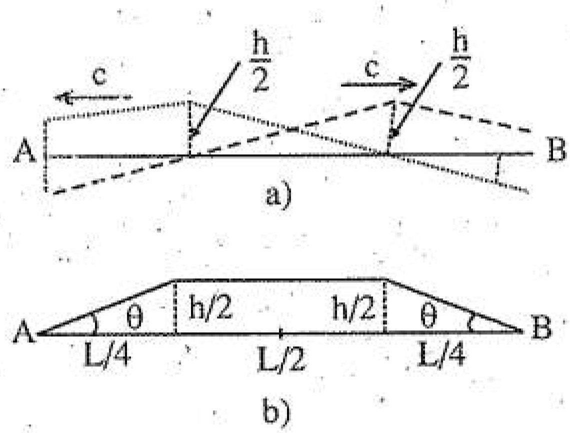
Hình 8.1G

Vì hai sóng sau khi phản xạ cùng lúc tại hai đầu dây và có quãng đường đi là 2L thì trở lại vị trí và trạng thái xuất phát nên chu kì dao động của dây là $T = \frac{2L}{c}$.

Điều này phù hợp với điều kiện cộng hưởng : $L = n\frac{\lambda}{2}$. Với $n = 1$ thì $\lambda = 2L$.

Suy ra $T = \frac{2L}{c}$.

b) Tại $t = \frac{T}{8}$, mỗi sóng chạy được $\frac{L}{4}$ và sẽ bị phản xạ tại A hoặc B. Sóng chạy về bên phải được mô tả bằng đường đứt nét, sóng chạy về bên trái được mô tả bằng đường chấm chấm (Hình 8.2Ga). Hình 8.2Ga cho biết dạng sóng tổng hợp (cũng là dạng sợi dây) tại $t = \frac{T}{8}$.



Hình 8.2G

$$\tan\theta = \frac{\frac{h}{2}}{\frac{L}{4}} = \frac{2h}{L}$$

c) Vì sức căng T coi như không đổi nên công của lực căng $\vec{T}$ làm sợi dây dãn ra là :

$$A = T\left[2\sqrt{\frac{L^2}{4} + h^2} - L\right]$$

$$A = T.\frac{2h^2}{L}$$

Thay $T = \rho c^2$ vào ta được : $A = 2\rho c^2 \dfrac{h^2}{L}$.

Công này làm tăng thế năng của dây. Vậy, năng lượng toàn phần của dây khi dao động là :

$$E = \frac{2c^2h^2}{L}$$

8.3. a) $u(x, t) = a\cos(\omega t - kx)$

b) $\dfrac{dE}{dx} = 2\dfrac{dE_d}{dx} = \rho\omega^2 a^2 \sin^2(\omega t - kx)$

c) $\mathcal{P} = \dfrac{dE}{dt} = \dfrac{dE}{dx}.\dfrac{dx}{dt} =$

$\mathcal{P} = c\rho\omega^2 a^2 \sin^2(\omega t - kx)$

(Cách khác : $\mathcal{P} = \vec{T}.\vec{v} = -T\sin\theta\dfrac{du}{dt} = -T\tan\theta\dfrac{du}{dt} = -T\dfrac{du}{dx}.\dfrac{du}{dt}$

$$= -\rho c^2[ka\sin(\omega t - kx)][-\omega a\sin(\omega t - kx)]$$

$$= \rho c^2 k\omega a^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

$$\mathcal{P} = \rho c\omega^2 a^2 \sin^2(\omega t - kx)).$$

d) $F_u(x, t) = -T\sin\theta = -T\tan\theta = -T\dfrac{du}{dx} = -\rho c^2 ka\sin(\omega t - kx)$

Tại $x = 0$ ta có : $F_u(t) = -\rho c\omega a\sin\omega t$

8.4. a) $c = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}} = \sqrt{\dfrac{500}{0,2}} = 50$ m/s

b) $\overline{\mathcal{P}} = \left(\overline{\dfrac{dE}{dx}}\right)c$

$$\frac{dE}{dx} = 2\frac{dE_d}{dx} = \rho a^2\omega^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

$$\overline{\frac{dE}{dx}} = \frac{1}{2}\rho a^2\omega^2$$

$$\overline{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}\rho a^2\omega^2 c = \frac{1}{2}\rho a^2\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^2 c = \frac{1}{2}\rho\frac{a^2.4\pi^2c^3}{\lambda^2} = \frac{2\pi^2A^2}{\lambda^2}\left(\frac{T}{\rho}\right)^2$$

$$\overline{\mathcal{P}} = \frac{2\pi^2A^2T^{\frac{3}{2}}}{\lambda^2\rho^{\frac{1}{2}}} = 197\ \text{W}.$$

8.5. Phương trình sóng dừng li độ là : $u = A\sin kx\sin\omega t$

Phương trình sóng dừng áp suất là :

$$u_P = -\frac{1}{\mathcal{K}}\frac{du}{dx} = -\frac{1}{\mathcal{K}}Ak\cos kx\sin\omega t$$

Biên độ dịch chuyển của các phân tử khí là A.

Biên độ biến thiên áp suất là $\frac{kA}{\mathcal{K}} = 0,1\ \text{N/m}^2$.

Suy ra $A = 0,1\frac{\mathcal{K}}{k}$

$$A = 0,1\frac{1}{\gamma p_0}.\frac{c}{2\pi f} = \frac{0,1.340}{2\pi.10^3.\frac{7}{5}.10^5} \approx 4.10^{-8}\ \text{m}$$

8.6. a) $c = \frac{\omega}{k}$, $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

$$\frac{\omega}{k} = \sqrt{\left(\frac{g}{k} + \frac{kT}{\rho}\right)}$$

Suy ra : $\omega = \sqrt{gk + \frac{k^3T}{\rho}}$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{g + 3k^2\frac{T}{\rho}}{2\sqrt{gk + \frac{k^3T}{\rho}}}$$

Thay $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ vào ta được : $v_g = \dfrac{g + 12\pi^2\frac{T}{\rho\lambda^2}}{2\sqrt{2\pi\frac{g}{\lambda} + 8\pi^3\frac{T}{\rho\lambda^3}}}$.

b) $c(\min) \Rightarrow c^2(\min)$

$$\frac{d(c^2)}{d\lambda} = 0$$

Suy ra : $\frac{g}{2\pi} - \frac{2\pi T}{\lambda^2 \rho} = 0$ hay $\lambda = 2\pi\left(\frac{T}{g\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Thay giá trị này của λ vào biểu thức của v_G, ta được :

$$v_g = \frac{g + 3g}{2\sqrt{g\sqrt{\frac{\rho g}{T}} + g\sqrt{\frac{\rho g}{T}}}} = \frac{2g}{\sqrt{\left(2\sqrt{\frac{\rho g^3}{T}}\right)}}$$

$$v_g = \sqrt{2}\left(\frac{Tg}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}$$

8.7. a) $n = \frac{c}{v}$; $\omega = 2\pi\nu$; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$; $\lambda = \frac{v}{\nu}$

$$\Rightarrow k = \frac{2\pi n\nu}{c}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(2\pi\nu)}{d\left(\frac{2\pi n\nu}{c}\right)} = \frac{cd\nu}{d(n\nu)} = \frac{cd\nu}{nd\nu + \nu dn}$$

$$v_g = \frac{c}{n + \nu\frac{dn}{d\nu}}$$

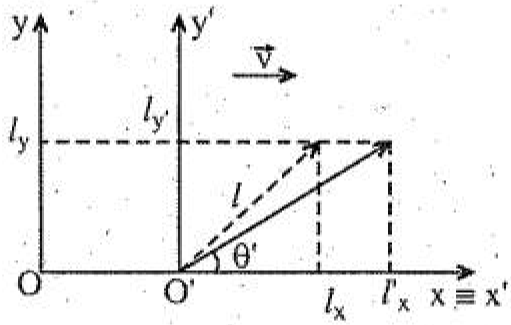
b) Từ đồ thị : $\nu - \nu_0 = 0 \Rightarrow n_0 = 1{,}001$.

Xét lân cận ν_0 : $\frac{dn}{d\nu_0} = \tan\alpha = \frac{1{,}0046 - 1{,}001}{2.10^9}\left(\frac{1}{\text{MHz}}\right) \Rightarrow \tan\alpha = 1{,}9.10^{-6}$

$$v_g = \frac{c}{n + \frac{c}{\lambda_0}\tan\alpha} = \frac{3.10^8}{1{,}00 + \frac{3.10^8}{600.10^9}.1{,}9.10^6} = 2{,}99.10^8 \text{ m/s}$$

CHỦ ĐỀ 9

9.1. Xem Hình 9.1G.



Hình 9.1G

- $l'_x = l'\cos\theta'$; $l'_y = l'\sin\theta'$

Chiều dài của thanh chỉ co lại theo phương x

$$l_x = l'_x\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = l'\cos\theta'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$l_y = l'_y = l'\sin\theta'$$

$$l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2} = l'\left[1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\cos^2\theta'\right]^{\frac{1}{2}} \quad (l < l')$$

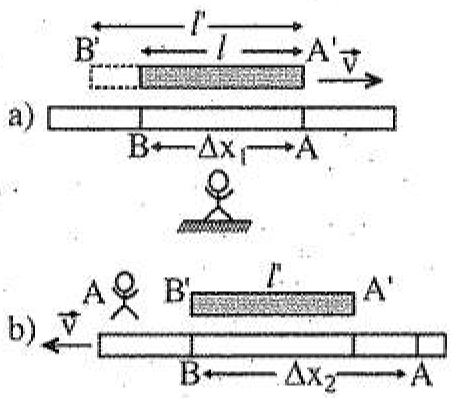
- $$\tan\theta = \frac{l_y}{l_x} = \frac{\tan\theta'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (\theta > \theta')$$

9.2. $$l = \Delta x_1 = l'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 4\ \text{m}$$

$$l' = \Delta x_2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 9\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\ (\text{m})$$

Trong phép đo đầu (Hình 9.2Ga) NQS B thấy hai đầu A', B' của thanh trùng với hai vạch A, B trên thước một cách đồng thời. Còn NQS A thì lại thấy đầu A' trùng với vạch A trước, đầu B' trùng với vạch B sau.

Trong phép đo sau (Hình 9.2Gb) NQS A thấy hai đầu A', B' của thanh trùng với hai vạch A, B của thước một cách đồng thời. Còn NQS B thì lại thấy đầu A' trùng với vạch A trước, đầu B' trùng với vạch B sau.



Hình 9.2G

9.3. a) Trong HQC của thiên hà :

$$\Delta t = \frac{L}{v} = \frac{10^5 \text{n.c}}{0,99999c} = \frac{10^5}{0,9999} \approx 10^5 \text{ năm}$$

b) Trong HQC gắn với prôtôn :

• *Cách giải 1 :* HQC gắn với prôtôn là HQC chuyển động với vận tốc v so với HQC của thiên hà (mà ta coi là đứng yên). Gọi $\Delta t'$ là thời gian trôi trong HQC này, ta có :

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 10^5\sqrt{1 - (0,99999)^2} = 10^5[1 - (1 - 1.10^{-5})^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 10^5[1 - (1 - 2.10^{-5})]^{\frac{1}{2}} = 10^5.4,5.10^{-3} = 450 \text{ năm.}$$

• *Cách giải 2 :*

Đối với HQC gắn với prôtôn thì thiên hà chuyển động, do đó đường kính của thiên hà co lại chỉ còn là L' ta có :

$$L' = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c}} = 10^5.4,5.10^{-3} = 450\text{n.c}$$

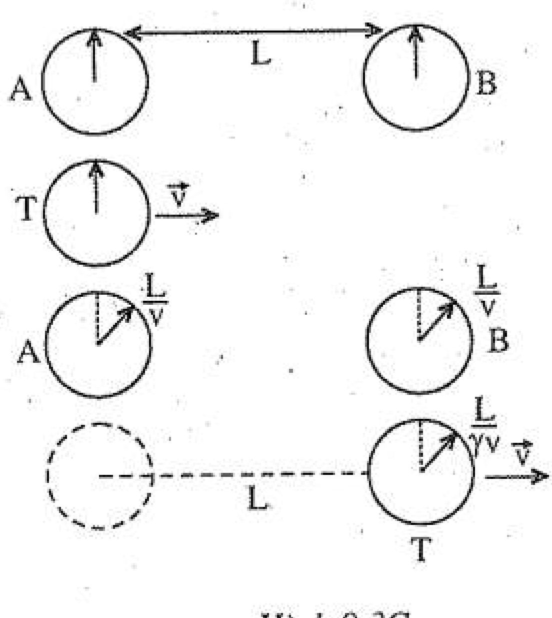
$$\Delta t' = \frac{L'}{v} = 450 \text{ năm}$$

9.4. a) Xét trong HQC hành tinh :

Khi tàu tới B thì thời gian đi mất $\frac{L}{v}$.

Đồng hồ ở B (và cả đồng hồ ở A) chỉ $\frac{L}{v}$.

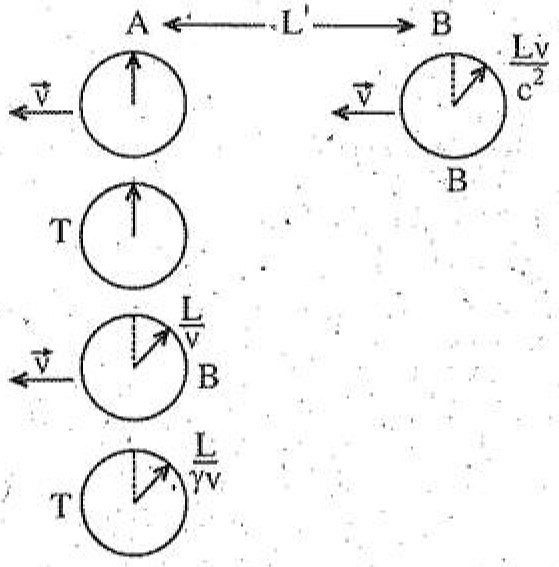
Đồng hồ trong HQC chuyển động của con tàu thì chạy chậm, nên chỉ $\frac{L}{\gamma v}$ (Hình 9.3G).



Hình 9.3G

b) Xét trong HQC của con tàu :

Các hành tinh chuyển động với vận tốc $-v$ và cách nhau là $L' = \frac{L}{\gamma}$. Khi đồng hồ A chạy ngang qua T thì hai đồng hồ A và T đều chỉ số 0. Nhưng đồng hồ B ở đằng sau chạy nhanh hơn (hiệu ứng 4) nên đã chỉ $\frac{Lv}{c^2}$. Khi B đi ngang qua T thì thời gian đi mất $\frac{L'}{v} = \frac{L}{\gamma v}$. Đồng hồ T chỉ $\frac{L}{\gamma v}$ (Hình 9.4G). Nhưng thời gian trong HQC hành tinh trôi chậm hơn, nên thời gian đi là $\frac{L}{\gamma^2 v}$ và đồng hồ B chỉ là :



Hình 9.4G

$$\frac{Lv}{c^2} + \frac{L}{\gamma^2 v} = \frac{L}{v}\left(\frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right) = \frac{L}{v}$$

9.5. Thời gian sống riêng của hạt muyôn là $\Delta t' = 2,2\mu s$.

Thời gian tương ứng đo trong HQC phòng TN là :

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = 15,595\ \mu s$$

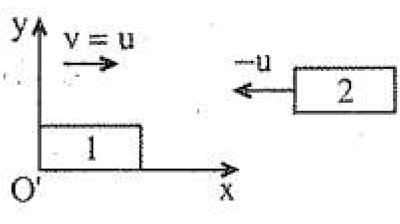
Quãng đường đi được cho tới lúc bị phân hủy là : $\Delta S = v\Delta t = 4,632$ km.

9.6. a) $L' = 100$ m

$$L = \frac{L'}{\gamma} = 100\sqrt{1 - (0,85)^2} = 52,68 \text{ m}$$

b) $t = \frac{L}{v} = \frac{52,68}{0,85c} = 2,066.10^{-7}$ s.

c) Gọi HQC Trái Đất là HQC đứng yên, HQC gắn với tàu (1) là HQC chuyển động. Vận tốc của HQC này là u. Vận tốc của tàu (2) là $-u$ (Hình 9.5G). Vận tốc của tàu (2) đối với tàu (1) là $v_{21} = u'$. Áp dụng công thức cộng vận tốc ta viết :



Hình 9.5G

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \Rightarrow v_{21} = \frac{-0,85c - 0,85c}{1 + (0,85)^2} = -0,987c$$

9.7. Áp dụng công thức cộng vận tốc :

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} = \frac{0 - 0,5c}{1 - 0} = -0,5c$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)} = 0,20c\sqrt{1 - (0,5)^2} = 0,17c$$

$$u' = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y} = 0,53c$$

$$\tan\alpha = \frac{u'_y}{u'_x} = \frac{0,17c}{-0,5c} = -0,34$$

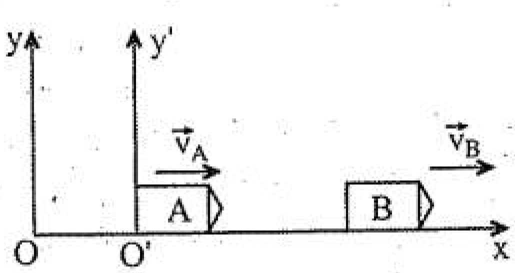
$$\alpha = 161,2^o.$$

9.8. Xem (Hình 9.6G).

HQC gắn với A là HQC O' chuyển động với vận tốc $\vec{v}_A$ so với HQC O. Gọi $\vec{u}$ và $\vec{u}'$ lần lượt là vận tốc của tên lửa đối với HQC O và HQC O'.

Theo công thức cộng vận tốc ta có :

$$u = \frac{u' + v_A}{1 + \frac{u'v_A}{c^2}} = \frac{v + 0,50c}{1 + \frac{0,50c.v}{c^2}}$$



Hình 9.6G

Điều kiện để tên lửa gặp B là : $u \geq v_B$.

Suy ra : $$\frac{v + 0,50c}{1 + \frac{0,50v}{c}} \geq 0,75c \Rightarrow v \geq 0,40c.$$

9.9. a) Đối với NQS C :

$$L_A = \frac{L_0}{\gamma_A} = L_0\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3L_0}{5}$$

$$L_B = \frac{L_0}{\gamma_B} = L_0\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4L_0}{5}$$

$$t_c = \frac{L_A + L_B}{v_A - v_B} = \frac{7L_0}{c}$$

b) Đối với NQS B, thì tàu A chuyển động với vận tốc là $v_{A/B}$ áp dụng công thức cộng vận tốc, ta viết :

$$v_{A/B} = \frac{v_A - v_B}{1 - \frac{v_A v_B}{c^2}} = \frac{\frac{4c}{5} - \frac{3c}{5}}{1 - \frac{4}{5}.\frac{3}{5}} = \frac{5c}{13}$$

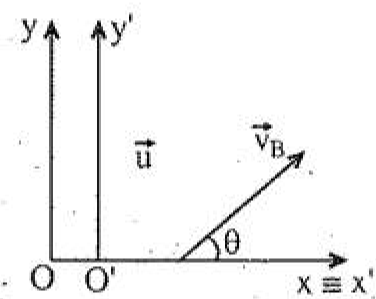
Mặt khác, tàu A chỉ dài là $\frac{L'}{\gamma} = L'\sqrt{1 - \frac{v_{\frac{A}{B}}^2}{c^2}}$.

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12L_0}{13}$$

Suy ra : $$t_B = \frac{L_0 + \frac{12L_0}{13}}{\frac{5c}{13}} = \frac{5L_0}{c} \; (< t_c).$$

9.10. Xem (Hình 9.7G).

Chọn trục x hướng theo $\vec{v}_A$ và gọi (O) là HQC phòng TN, (O') là HQC gắn với A. (O) chuyển động với vận tốc –u so với (O') (Hình 9.7G).



Hình 9.7G

Trong (O), hạt B có vận tốc là :

$$v_x = v\cos\theta \; ; \; v_y = v\sin\theta$$

Trong (O'), hạt B có vận tốc là : v'_x ; v'_y

Áp dụng công thức cộng vận tốc ta viết :

$$v'_x = \frac{v\cos\theta - u}{1 - \dfrac{uv\cos\theta}{c^2}} = \frac{c^2(v\cos\theta - u)}{c^2 - uv\cos\theta}$$

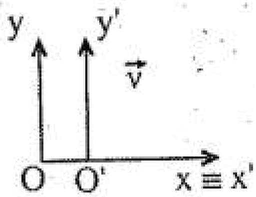
$$v'_y = \frac{v\sin\theta\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{uv\cos\theta}{c^2}} = \frac{c^2 v\sin\theta\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}{c^2 - uv\cos\theta}$$

$$v'_y = \frac{cv\sin\theta\sqrt{c^2 - u^2}}{c^2 - uv\cos\theta}$$

$$v' = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y} = c\sqrt{1 - \frac{(c^2 - u^2)(c^2 - v^2)}{(c^2 - uv\cos\theta)^2}}$$

$$\tan\theta' = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{v\sin\theta\sqrt{c^2 - u^2}}{c(v\cos\theta - u)}$$

9.11. Gọi HQC O' là HQC chuyển động với vận tốc của NQS (Hình 9.8G). Theo phép biến đổi Lo-ren-xơ ta viết :



Hình 9.8G

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t') = \gamma(\Delta x' + 0)$$

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right) = \gamma\left(0 + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right)$$

Suy ra : $\quad \Delta t = \dfrac{v\gamma\Delta x'}{c^2} = \dfrac{v\Delta x}{c^2}$

$$v = \frac{c^2\Delta t}{\Delta x} = 9.10^7 \text{ m/s.}$$

9.12. a) *Cách 1* : (Dùng phép biến đổi Lo-ren-xơ).

NQS A đứng trong HQC O : $\Delta x = 0$; $\Delta t = 1.10^{-6}$ s.

NQS B đứng trong HQC O' : $\Delta t' = 2.10^{-6}$ s.

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x) = \gamma\Delta t$$

$$\gamma = \frac{\Delta t'}{\Delta t} = 2$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2 \Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}c}{2}$$

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) = 2\left(0 - \frac{\sqrt{3}c}{2}.10^{-6}\right) = -520 \text{ m}.$$

Cách 2 : (Dùng bất biến khoảng)

$$\Delta S^2 = \Delta S'^2 \Rightarrow \Delta x^2 - c^2\Delta t^2 = \Delta x'^2 - c^2\Delta t'^2$$

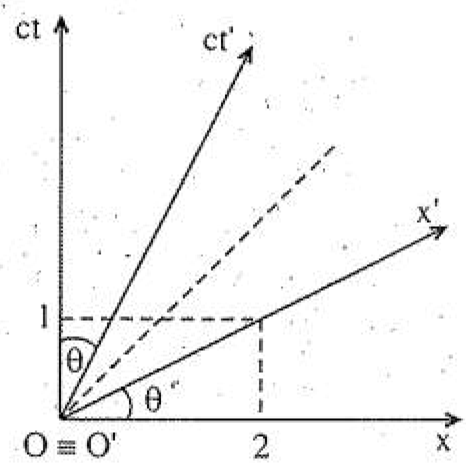
$$\Rightarrow \Delta x'^2 = c^2(\Delta t'^2 - \Delta t^2) = 3c^2(10^{-6})^2$$

$$\Delta x' = 520 \text{ m}.$$

b) $\frac{\sqrt{3}c}{2}$.

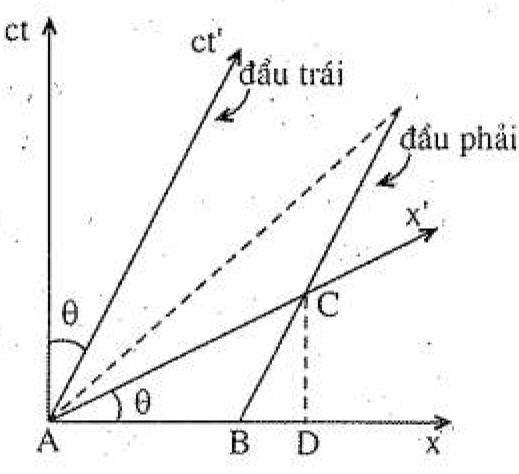
9.13. HQC O' có trục x' đi qua điểm (x, ct) = (2, 1) (Hình 9.9G.). Vì mọi điểm trên trục x' là đồng thời (tại t' = 0) nên :

$$\tan\theta = \frac{v}{c} = \frac{1}{2} \Rightarrow v = \frac{1}{2}c.$$



Hình 9.9G

9.14. a) Đặt đầu trái của thước tại gốc toạ độ của HQC O'. Các đường vũ trụ của hai đầu thước được chỉ trên Hình 9.10G. Trong HQC O' thì khoảng cách AC bằng 1m vì phép đo trong HQC O' xảy ra tại cùng thời điểm t' = 0. Một đơn vị độ dài của x' bằng $\sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}$ đơn vị độ dài trên tờ giấy và bằng đoạn AC. NQS O đo độ dài của thước bằng cách ghi toạ độ x của hai đầu thước tại cùng thời điểm (t = 0). Như vậy nó đo hai đầu thước tại hai điểm A và B. Từ giản đồ ta có :



Hình 9.10G

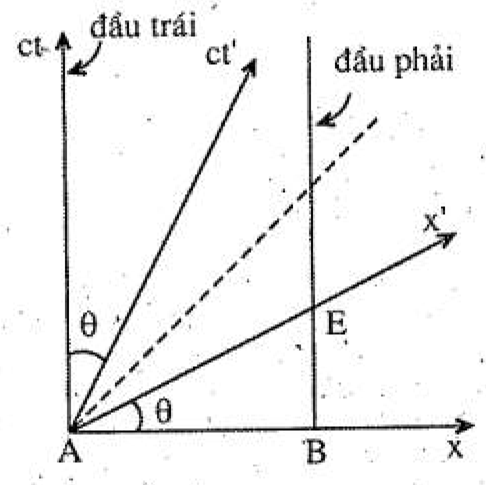
$AB = AD - BD$

$= (AC)\cos\theta - (AC)\sin\theta\tan\theta$

$= (AC)\cos\theta(1 - \tan^2\theta)$

$= \sqrt{\dfrac{1+\beta^2}{1-\beta^2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}(1-\beta^2)$

$\Rightarrow AB = \sqrt{1-\beta^2}$.



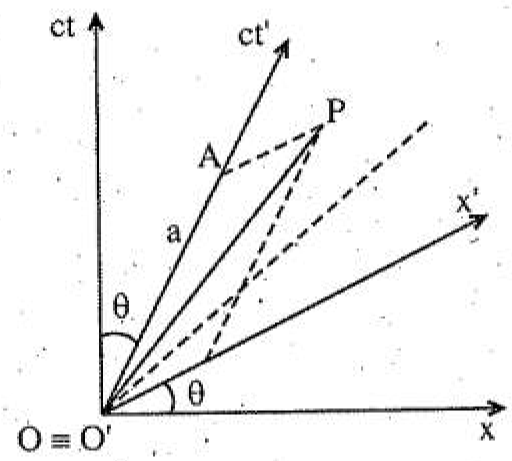
Hình 9.11G

b) AB = 1m (Hình 9.11G)

$$AE = \frac{1}{\cos\theta} = \sqrt{1+\beta^2}$$

(AE) có độ dài trong HQC O' là $L = \dfrac{AE}{\sqrt{\dfrac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}} = \sqrt{1-\beta^2}$.

9.15. Xem Hình 9.12G.



Hình 9.12G

Lấy một điểm P trên đường vũ trụ của vật. Gọi toạ độ của điểm P trong HQC O là (x, ct), trong HQC O' là (x', ct').

$$x' = v_1 t' = \beta_1 ct' = \beta_1 a$$

Trong HQC O, điểm A có toạ độ ($a\sin\theta$, $a\cos\theta$), điểm P có toạ độ ($a\sin\theta + \beta_1 a\cos\theta$, $a\cos\theta + \beta_1 a\sin\theta$)

$$u = \frac{x}{t} \Rightarrow \frac{u}{c} = \frac{x}{ct} = \frac{\sin\theta + \beta_1\cos\theta}{\cos\theta + \beta_1\sin\theta} = \frac{\tan\theta + \beta_1}{1 + \beta_1\tan\theta}$$

Thay $\tan\theta = \dfrac{v_2}{c}$ và $\beta_1 = \dfrac{v_1}{c}$ vào ta được :

$$u = \frac{v_1 + v_2}{1 + \dfrac{v_1 v_2}{c^2}}$$

9.16. a) HQC O : Sự kiện 1 (phát xung P_1) ($x_1 = 0$; $t_1 = 0$).

Sự kiện 2 (phát xung P_2) ($x_2 = 0$; $t_2 = \mathcal{T}$).

HQC O' : Sự kiện 1 ($x'_1 = 0$; $t'_1 = 0$)

Sự kiện 2 (x'_2, t'_2)

$$x_2 = \gamma(x'_2 + vt'_2)$$

$$0 = \gamma(x'_2 + vt'_2) \Rightarrow x'_2 = -vt'_2$$

$$t_2 = \gamma\left(t'_2 + \frac{vx'_2}{c^2}\right)$$

$$\mathcal{T} = \gamma\left(t'_2 - \frac{v^2t'_2}{c^2}\right) = \gamma t'_2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\Rightarrow t'_2 = \frac{\mathcal{T}}{\gamma\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \gamma\mathcal{T}$$

$$\Rightarrow x'_2 = -v\gamma\mathcal{T}$$

Như vậy trong HQC O' sự kiện 2 xảy ra ở địa điểm $x_2 = -v\gamma\mathcal{T}$ và tại thời điểm $t'_2 = \gamma\mathcal{T}$.

b) Gọi T' là thời điểm mà NQS O' nhận được xung P_2, ta có :

$$\mathcal{T}' = \gamma\mathcal{T} + \frac{|x_2|}{c} = \gamma\mathcal{T} + \frac{v\gamma\mathcal{T}}{c}$$

$$\mathcal{T}' = \gamma\mathcal{T}\left(1 + \frac{v}{c}\right) = \mathcal{T}\sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \quad (\mathcal{T}' > \mathcal{T})$$

c) $\mathcal{T}$ và $\mathcal{T}'$ chính là chu kì phát xung ánh sáng mà hai NQS đo được trong hai HQC O và O'. Do đó ta có :

$$f' = f\sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \text{ (với } \beta = \frac{v}{c})$$

9.17. a) Gọi f_0 là tần số tín hiệu phát đi bởi con tàu, f_1 là tần số của tín hiệu mà Trái Đất nhận được ; f_2 là tần số của tín hiệu phản xạ mà tàu nhận được. Ta có :

$$f_1 = f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\ ;\ f_2 = f_1\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

Suy ra : $f_2 = f_0\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right) = \frac{1}{2}f_0 \Rightarrow v = \frac{1}{3}c$.

b) Xét trong HQC O' của tàu : Gọi L_0' là khoảng cách từ Trái Đất đến tàu khi Trái Đất nhận được tín hiệu :

$$\Delta t' = \frac{2L_0'}{c} \Rightarrow L_0' = \frac{c\Delta t'}{2} = \frac{c.40}{2} = 20c$$

c) Gọi A là sự kiện tín hiệu gặp Trái Đất, B là sự kiện tín hiệu gặp lại tàu. Ta có :

HQC O của Trái Đất $\begin{cases} A\ (x_A = 0\ ;\ t_A) \\ B\ (x_B\ ;\ t_B) \end{cases}$;

HQC O' của tàu $\begin{cases} A\ (x_A' = -20c\ ;\ t_A') \\ B\ (x_B' = 0\ ;\ t_B' = t_A' + 20) \end{cases}$

$$x_A = \gamma(x_A' + vt_A') = 0 \Rightarrow t_A' = \frac{-x_A'}{v} = \frac{20c}{\frac{1}{3}c} = 60\text{ s.}$$

$$t_B' = t_A' + 20 = 80\text{ s}$$

$$x_B = \gamma(x_B' + vt_B') = \gamma vt_B' = \gamma\frac{c}{3}.80$$

Thay $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{3}{\sqrt{8}}$ vào, ta được : $x_B = 20\sqrt{2}c$.

9.18. a) Theo định luật bảo toàn năng lượng : $\gamma mc^2 = E_1 + E_2$. (1)

Áp dụng định luật bảo toàn động lượng theo phương x :

$$\gamma mv = \frac{E_1}{c} - \frac{E_2}{c} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

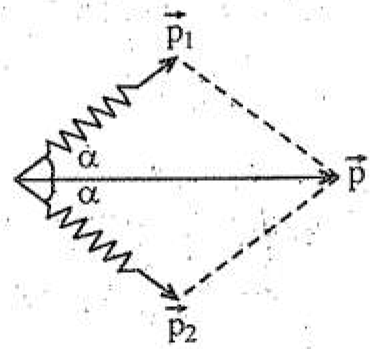
$$E_1 = \gamma mc\left(\frac{c+v}{2}\right) \text{ và } E_2 = \gamma mc\left(\frac{c-v}{2}\right)$$

$$p_1 = \frac{E_1}{c} = \gamma m\left(\frac{c+v}{2}\right) \text{ và } p_2 = \frac{E_2}{c} = \frac{\gamma m(c-v)}{2}$$

b) Xem (Hình 9.13G).

$$E_1 = E_2 = \frac{\gamma mc^2}{2}$$

$$p_1 = p_2 = \frac{E_1}{c} = \frac{\gamma mc}{2}$$



Hình 9.13G

9.19. Áp dụng định luật bảo toàn động lượng :

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$$

$\Rightarrow \vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ và $p_1 = p_2 = p$.

Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng : $E_1 + E_2 = Mc^2$

$$\sqrt{p^2c^2 + m_1^2c^4} + \sqrt{p^2c^2 + m_2^2c^4} = Mc^2$$

$$2p^2c^2 + (m_1^2 + m_2^2)c^4 + 2\sqrt{(p^2c^2 + m_1^2c^4)(p^2c^2 + m_2^2c^4)} = M^2c^4$$

$$\Rightarrow p^2 = \frac{[M^2 - (m_1 + m_2)^2][M^2 - (m_1 - m_2)]c^2}{4M^2}$$

$$\Rightarrow p = \frac{c\sqrt{[M^2 - (m_1 + m_2)^2][M^2 - (m_1 - m_2)^2]}}{2M}$$

9.20. a) $E = mc^2 = (1,67.10^{-17})(3,00.10^8) = 1,50.10^{-10}$ J

$$E = \frac{1,50.10^{-10}}{1,6.10^{-19}}\text{ eV} = \frac{1,50.10^{-10}}{1,6.10^{-19}.10^6}\text{ MeV}$$

$\Rightarrow E = 1,50.10^{-10}\text{ J} = 939$ MeV

b) $E = \gamma mc^2 \Rightarrow \gamma = 3 = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$

$$\Rightarrow v = \frac{\sqrt{8}c}{3} = 0,943c$$

c) $K = (\gamma - 1)mc^2 = (3 - 1).939 = 1878\text{ MeV} \Rightarrow K \approx 1880$ MeV

$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 = (3mc^2)^2 \Rightarrow p = 2657 \approx 2660$ MeV/c

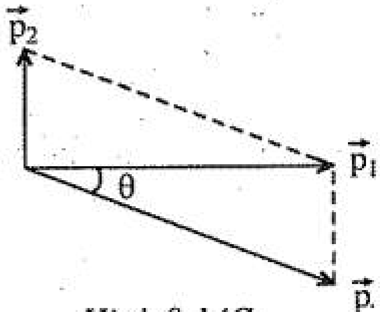
9.21. Vì $p_1 = -p_2 \Rightarrow p = p_1 + p_2 = 0$. Hạt tạo thành đứng yên.

Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng : $Mc^2 = 2\gamma mc^2$, với $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}$

$$\Rightarrow M = \frac{2m}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}\ (M > 2m)$$

Trong va chạm này khối lượng của hạt mới lớn hơn khối lượng của hai hạt tạo thành nó. Phần năng lượng tương ứng với phần tăng khối lượng của hạt mới đúng bằng phần động năng của hai hạt mất đi sau va chạm mềm. Thật vậy :

$(\Delta M)c^2 = (M - 2m)c^2 = 2mc^2(\gamma - 1) = 2K.$



Hình 9.14G

9.22. Xem (Hình 9.14G).

a) Áp dụng định luật bảo toàn động lượng :

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}$$

$$\begin{cases} p_1 = p\cos\theta \\ p_2 = p\sin\theta \end{cases} \Rightarrow p^2 = \frac{h^2f^2 + h^2f'^2}{c^2}$$

$$\Rightarrow p^2c^2 = h^2(f^2 + f'^2) \qquad (1)$$

Theo định luật bảo toàn năng lượng : $hf + mc^2 = hf' + \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$.

Thay (1) vào, ta được : $f' = f\left(1 + \frac{hf}{mc^2}\right)^{-1}$.

b) Khi $hf \ll mc^2$, ta được : $f' \approx f$; $p \approx \sqrt{2}\frac{hf}{c}$; $\theta = 45^o$.

9.23. a) Xét trong HQC phòng TN :

Động lượng toàn phần của hệ là : $p = p_\pi = 5m_\pi c$.

Năng lượng toàn phần của hệ là :

$$E = \sqrt{p_\pi^2c^2 + m_\pi^2c^4} + m_pc^2 = \sqrt{26}m_\pi c^2 + 7m_\pi c^2$$

Hệ coi như một hạt chuyển động với vận tốc là vận tốc của HQC khối tâm.

$$v_G = \frac{pc^2}{E} = \frac{5c}{\sqrt{26} + 7} = 0,413c \qquad (1)$$

b) Xét bất biến $E^2 - p^2c^2$

Trong HQC khối tâm :

$$E^2 - p^2c^2 = E'^2$$

(Vì động lượng toàn phần của hệ bằng 0)

$$E'^2 = E^2 - p^2c^2$$

$$= (\sqrt{26} + 7)m_\pi^2c^4 - 25m_\pi^2c^4 = (14\sqrt{26} + 50)m_\pi^2c^4$$

$$\Rightarrow E' = 11,02m_\pi c^2$$

c) $\vec{p}_\pi + \vec{p}'_p = \vec{0} \Rightarrow p'_\pi = -p'_p$

$$p'_p = -\gamma_G m_p v_G \Rightarrow p'_\pi = \gamma_G m_p v_G$$

$$p'_\pi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_G^2}{c^2}}}.7m_\pi.v_G$$

Thay v_G từ (1) vào, ta được $p'_\pi = 3,17m_\pi c$.

Chú ý : Theo quan niệm cũ, khối lượng của hạt mêzôn π khi chuyển động là γm_π, vì thế mới viết là :

$$v_G = \frac{\gamma m_\pi v}{\gamma\mu_\pi + m_p} = 0,41c$$

9.24. Xem (Hình 9.15G).

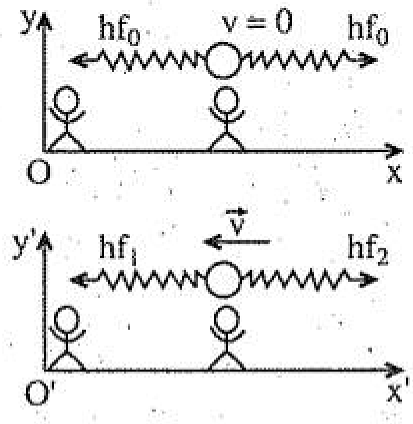
– Tìm công thức $E = \gamma mc^2$.

• Xét trong HQC O mà hạt đứng yên.

Theo định luật bảo toàn năng lượng :

$$E_0 = 2hf_0 \Rightarrow hf_0 = \frac{E_0}{2}$$

• Xét trong HQC O' mà hạt chuyển động :



Hình 9.15G

$$E = hf_1 + hf_2 = hf_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} + hf_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

$$E = \frac{E_0}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \gamma E_0$$

Tìm E_0 khi $v \ll c$.

$$K = E - E_0 = E_0(\gamma - 1) = E_0\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right]$$

$$K \approx \frac{E_v v^2}{2c^2} = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow E_0 = mc^2 \text{ và } E = \gamma mc^2.$$

– Tìm công thức $p = \gamma mc^2$.

• Trong HQC O : Áp dụng định luật bảo toàn động lượng :

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0} \Rightarrow p_1 = p_2 = p_0 = \frac{hf_0}{c}$$

• Trong HQC O' :

$$p = \frac{hf_0}{c}\left(\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\right) = \frac{hf_0}{c}\frac{2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{mc^2}{2c}\cdot\frac{2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma mc\beta$$

$p = \gamma mv$.

9.25. $$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \quad (1)$$

$E' = \gamma_{u'} mc^2$ và $p' = \gamma_{u'} mu'$ (2)

$E = \gamma_u mc^2$ và $p = \gamma_u mu$ (3)

Tìm γ_u :

$$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\left(\frac{u'}{c} + \frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 + \frac{u'}{c}\cdot\frac{v}{c}\right)^2}}}$$

Đặt $x = \frac{u'}{c}$ và $y = \frac{v}{c}$, ta được :

$$\gamma_u = \frac{1 + xy}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)}} = \gamma_{u'}\gamma_v\left(1 + \frac{u'v}{c^2}\right)$$

Thay vào (3) ta được :

$$E = \gamma_{u'}\gamma_v\left(1 + \frac{u'v}{c^2}\right)mc^2$$

$$p = \gamma_{u'}\gamma_v\left(1 + \frac{u'v}{c^2}\right)m\left(\frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}\right)$$

Sử dụng E' và p' từ (2) và đặt $\gamma_v \equiv \gamma$ ta được :

$$E = \gamma(E' + vp')$$

$$p = \gamma\left(p' + \frac{vE'}{c^2}\right) \qquad (4)$$

9.26. Trong HQC mặt đất (HQC O) : Gọi $\vec{p}$ và E là động lượng và năng lượng của phôtôn tới gương ; gọi $\vec{p}\,'$ và E' là động lượng và năng lượng của phôtôn phản xạ. Trong HQC gắn với gương (HQC O') :

Gọi $\vec{p}_1$ và E_1 là động lượng và năng lượng của phôtôn tới gương ; $\vec{p}_1'$ và E_1' là động lượng và năng lượng của phôtôn phản xạ :

$$p_1 = \gamma\left(p - \frac{vE}{c^2}\right) \text{ với } p = -\frac{hf}{c} \text{ và } E = hf$$

$$p_1 = \gamma\left(-\frac{hf}{c} - \frac{v}{c^2}hf\right) = -\gamma\frac{hf}{c}(1+\beta)$$

$$p_1' = -p_1 = \gamma\frac{hf}{c}(1+\beta)$$

$$E' = p_1'c = \gamma hf(1+\beta)$$

$$p' = \gamma\left(p_1 + \frac{v}{c^2}p_1'c\right) = \gamma p_1'(1+\beta)$$

$$p' = \gamma(1+\beta)\frac{\gamma hf}{c}(1+\beta)$$

$$\frac{hf'}{c} = \frac{hf}{c}\gamma^2(1+\beta)^2 \Rightarrow f' = f\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)$$

$$E' = E\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)$$

Cách 2 : Gương là máy thu, phôtôn tới máy thu $f_1 = f\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$.

Phôtôn phản xạ trên gương :

$$f_1' = f_1 = f\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}.$$

Gương là nguồn phát phôtôn phản xạ. Do gương lại gần NQS nên ta có :

$$f' = f_1'\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = f\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)$$

Năng lượng của phôtôn phản xạ : $E' = hf\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)$.

9.27. $F = \frac{dp}{dt} \Rightarrow p = F.t \Rightarrow \gamma mv = F.t \Rightarrow v = \frac{\frac{Ft}{m}}{\sqrt{1+\frac{F^2t^2}{m^2c^2}}}$

$$x = \int_0^t vdt = \frac{mc^2}{F}\left[\sqrt{1+\frac{F^2t^2}{m^2c^2}} - 1\right]$$

9.28. a) $F = \frac{dp}{dt} \Rightarrow Ft = \gamma mv = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{F^2t^2}{m^2c^2 + F^2t^2}$ (1)

$$F = \frac{dE}{dx} \Rightarrow Fx = (\gamma - 1)mc^2 \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{mc^2}{Fx + mc^2}\right)^2 \quad (2)$$

Từ (1) = (2), ta viết :

$$\frac{F^2t^2}{m^2c^2 + F^2t^2} = 1 - \left(\frac{mc^2}{Fx + mc^2}\right)^2 \Rightarrow t = \frac{mc}{F}\sqrt{\left(\frac{Fx + mc^2}{mc^2}\right)^2 - 1}$$

b) Theo định luật bảo toàn động lượng : $\gamma mv = \gamma_u Mu$ (3)

Theo định luật bảo toàn năng lượng $(\gamma + 1)mc^2 = \gamma_u Mc^2$ (4)

$$\Rightarrow u = \frac{\gamma v}{\gamma + 1} = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + 1}$$

$$\Rightarrow \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}}}$$

Thay vào (4) ta được :

$$M = \frac{(\gamma + 1)m}{\gamma_u} = m\sqrt{2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right)}$$

9.29. a) $F = \frac{d}{dt}(\gamma m v) = \frac{mc\beta}{(1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}}$.

$$F = \gamma^2 ma$$

$$a = \frac{F}{\gamma^3 m}$$

b) $a = \frac{dv}{dt} = c\frac{d\beta}{dt} = \frac{F}{\gamma^3 m}$

$$\int_0^\beta \frac{d\beta}{(1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{F}{mc}\int_0^t dt$$

$$\frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{Ft}{mc}$$

$$v(t) = \frac{\frac{Ft}{m}}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2}}$$

c) $a' = \dfrac{F}{m} = \gamma^3 a = \text{const}$

d) Theo câu b) $c\dfrac{d\beta}{dt} = \dfrac{F}{\gamma^3 m} = \dfrac{a'}{\gamma^3}$

Áp dụng hiệu ứng về sự dãn nở thời gian $dt = \gamma d\mathcal{T}$ ta viết :

$$c\frac{d\beta}{\gamma d\mathcal{T}} = \frac{a'}{\gamma^3}$$

$$\int_0^{\beta}\frac{d\beta}{1-\beta^2} = \frac{a'}{c}\int_0^{\mathcal{T}} d\mathcal{T}$$

$$\tanh^{-1}\beta = \frac{a'}{c}\mathcal{T}$$

Suy ra $\beta = \tanh\left(\dfrac{a'\mathcal{T}}{c}\right)$ hay $v(\mathcal{T}) = c\tanh\left(\dfrac{a'\mathcal{T}}{c}\right)$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. *Introduction to classical mechanics*, David Morin, Cambridge University Press, Anh, 2004.
2. *Physique générale*, Douglas, Giancoli, bản tiếng Pháp, 1993.
3. *Newtonian Mechanics*, A.P. French, Mỹ, 1971.
4. Mécanique, José-Philip Pérez, Pháp, 2001.
5. Mécanique du point, Huber Lumbroso, Pháp, 1995.
6. Vibrations and waves, A.P. French, Mỹ, 1970.
7. Vật lí học (tập I, cơ học), Butikov và A.S. Kondratiev, Nga, bản dịch tiếng Việt.
8. Giáo trình cơ vật rắn, Aletxkievid, Đeđenko và Karavaev, ĐHTH Matxcơva, Nga, 1997.
9. Engineering Mechanics, W.G.Mc Lean và E.W. Nelson, Mỹ, 1987.
10. Bài tập và lời giải môn Vật lí của các trường đại học nổi tiếng Hoa Kì, NXBGD, 2009.
11. Một số đề thi học sinh giỏi Vật lí của một số nước.
12. Một số đề thi Vật lí Châu Á (APHO) và quốc tế (IPHO).
13. Bài viết "Khái niệm khối lượng" (The concept of mass) của Lev B.Borisovich đăng trong tạp chí Physics Today, tháng 6 năm 1989.

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Chủ tịch Hội đồng Thành viên NGUYỄN ĐỨC THÁI

Tổng Giám đốc HOÀNG LÊ BÁCH

Chịu trách nhiệm nội dung:

Tổng biên tập PHAN XUÂN THÀNH

Tổ chức và chịu trách nhiệm bản thảo:

Phó Tổng biên tập : NGUYỄN HIỀN TRANG

Giám đốc CTCP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội : PHẠM THỊ HỒNG

Biên tập lần đầu: PHAN THỊ THANH BÌNH - ĐỖ THỊ BÍCH LIÊN

VŨ THỊ THANH MAI - ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Biên tập tái bản và sửa bản in: ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Trình bày bìa : LƯU CHÍ ĐỒNG

Thiết kế : TRẦN THANH HẰNG

BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI VẬT LÍ TRUNG HỌC PHỔ THÔNG- CƠ HỌC 3

Mã số : C3L24h9 - CPD

In 1.000 bản (QĐ in 28-STK), khổ 17x24cm.

In tại Công ty CP In và Dịch vụ Thừa Thiên Huế, 57 Bà Triệu - TP. Huế.

Số ĐKXB : 979-2019/CXBIPH/26-336/GD

Số QĐXB : 919/QĐ-GD-ĐN ngày 24 tháng 07 năm 2019

In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2019

Mã số ISBN : 978-604-0-17139-9