NGUYỄN ĐÌNH DŨNG

CƠ HỌC LÝ THUYẾT

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN ĐÌNH DŨNG

CƠ HỌC LÝ THUYẾT

(In lần thứ hai)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách này được soạn thảo theo chương trình cơ học lý thuyết dùng cho sinh viên vật lý được trường Đại học Khoa học Tự nhiên thuộc Đại học Quốc gia Hà Nội duyệt.

Cuốn sách gồm 3 phần: Cơ học phi tương đối tính, cơ học tương đối tính (lý thuyết tương đối hẹp) và phần bài tập.

Mục đích của cuốn sách này là giúp cho sinh viên hiểu sâu sắc hơn cơ học kinh điển.

Từ sự thừa nhận tiên đề tổng quát "nguyên lý tác dụng tối thiểu", từ nguyên lý đối xứng của không gian và thời gian ta xây dựng được toàn bộ hệ thống các kiến thức cơ bản của cơ học kinh điển phi tương đối tính.

Từ sự thừa nhận hai tiên đề của Einstein (nguyên lý tương đối và nguyên lý hằng số vận tốc ánh sáng) ta xây dựng được cơ học tương đối tính.

Cuốn sách này được soạn thảo dựa vào các bài giảng về cơ học lý thuyết mà chúng tôi đã trình bày trong những năm gần đây ở Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội. Chúng tôi cũng tham khảo các sách giáo khoa về cơ học lý thuyết đã xuất bản ở trong và ngoài nước. Tài liệu tham khảo chính là hai cuốn sách cơ học, lý thuyết trường của Landau và Lipshitz.

Cuốn sách được viết chủ yếu cho sinh viên Khoa vật lý Trường Đại học Khoa học Tự nhiên nhưng cũng có thể làm tài liệu tham khảo cho sinh viên các trường Đại học khác có học cơ lý thuyết.

Vì kinh nghiệm còn ít cho nên chắc chắn cuốn sách này còn nhiều thiếu sót. Chúng tôi chân thành mong bạn đọc góp ý kiến phê bình để cuốn sách ngày một hoàn thiện hơn.

Tác giả

TS. *Nguyễn Đình Dũng*

MỤC LỤC

Phần 1

CƠ HỌC PHI TƯƠNG ĐỐI TÍNH

Chương 1

CÁC PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG

§1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1. Chất điểm

Một trong những khái niệm cơ bản của cơ học là khái niệm chất điểm.

Chất điểm là vật thể mà kích thước của nó có thể bỏ qua khi mô tả chuyển động của vật thể đó.

Tất nhiên, khả năng bỏ qua kích thước của vật thể phụ thuộc vào điều kiện cụ thể của từng bài toán.

Ví dụ: Chúng ta có thể coi trái đất là chất điểm khi nghiên cứu chuyển động của nó xung quanh mặt trời. Nhưng khi xét chuyển động quay quanh trục của nó trong ngày thì không thể coi trái đất là chất điểm được.

2. Véc tơ bán kính của chất điểm

Vị trí của chất điểm trong không gian được xác định bởi véc tơ bán kính của nó $\vec{r}(x,y,z)$ có các thành phần trùng với các toạ độ Descartes của chất điểm.

3. Số bậc tự do

Số các đại lượng độc lập cần để xác định một cách đơn trị vị trí của hệ cơ học được gọi là số bậc tự do.

Ví dụ:

- Để xác định ví trí của hệ cơ học gồm N chất điểm độc lập trong không gian ta cần phải cho N véc tơ bán kính nghĩa là 3N toạ độ. Như vậy trong trường hợp này số bậc tự do (ký hiệu là s) $s = 3N$.

- Hệ tạo bởi hai chất điểm cách nhau một khoảng không đổi thì sáu toạ độ Descartes của các chất điểm đó(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) phải thoả mãn điều kiện $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = R^2_{12}$ ở đây R_{12} khoảng cách đã cho giữa hai chất điểm. Vì vậy tất cả sáu toạ độ Descartes trên không phải là độc lập mà chỉ có năm trong sáu đại lượng đó là độc lập. Do đó số bậc tự do s của hệ này bằng năm.

Nếu xét ba chất điểm gắn chặt với nhau thành một tam giác thì các toạ độ của điểm thứ ba phải thoả mãn hai đẳng thức tương tự như đẳng thức vừa nêu mà các vế phải sẽ là R_{13}^2, R_{23}^2. Như vậy chín toạ độ của các đỉnh của tam giác tuân theo ba đẳng thức và chỉ có sáu đại lượng là độc lập. Hệ có số bậc tự do là sáu.

4. Toạ độ suy rộng

s đại lượng bất kỳ $q_1\ q_2 \ldots q_s$ đặc trưng đầy đủ vị trí của hệ (với số bậc tự do s) được gọi là các toạ độ suy rộng của hệ đó. Còn các đại lượng $\dot{q}_i \equiv \dfrac{dq_i}{dt}$ được gọi là các vận tốc suy rộng ($i = 1, 2, \ldots s$).

5. Phương trình chuyển động

Biểu thức cho mối quan hệ giữa gia tốc với các toạ độ và vận tốc được gọi là phương trình chuyển động.

§2. NGUYÊN LÝ TÁC DỤNG TỐI THIỂU (NGUYÊN LÝ HAMILTON)

Nguyên lý tác dụng tối thiểu (hay còn gọi là nguyên lý Hamilton) diễn đạt một cách tổng quát định luật chuyển động của các hệ cơ học. Nguyên lý tổng quát này có thể coi như tiên đề của cơ học lý thuyết. Chấp nhận nó, chúng ta có thể lập luận và toán học hoá chặt chẽ các định luật và các kết quả của cơ học kinh điển.

Theo nguyên lý tác dụng tối thiểu thì từng hệ cơ học được đặc trưng bởi một hàm xác định:

$L\ (q_1\ q_2\ .....q_s\ ,\ \dot{q}_1,\dot{q}_2,.....\dot{q}_s,t\ )$ hay viết gọn là $L\ (\ q,\ \dot{q}\ ,\ t)$, trong đó chuyển động của hệ cơ học thoả mãn các điều kiện sau:

Giả sử ở các thời điểm $t = t_1$ và $t = t_2$ hệ ở những vị trí xác định, được đặc trưng bởi hai hệ các giá trị toạ độ $q^{(1)}$ và $q^{(2)}$. Khi đó giữa hai vị trí này hệ chuyển động sao cho tích phân

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt \tag{2.1}$$

có giá trị khả dĩ nhỏ nhất. Hàm $L\ (q,\dot{q}\ ,\ t)$ được gọi là hàm Lagrange của hệ đã cho, còn tích phân (2.1) được gọi là tích phân tác dụng.

Dựa vào nguyên lý tổng quát trên chúng ta đi tìm các phương trình chuyển động của hệ cơ học. Nói cụ thể là chúng ta đi giải bài toán xác định giá trị tối thiểu của tích phân tác dụng S.

Để viết các công thức cho gọn, đầu tiên ta giả thiết rằng hệ cơ học có bậc tự do là một.

Giả sử $q = q\ (t)$ chính là hàm để cho S nhận giá trị tối thiểu.

Điều đó có nghĩa là S sẽ tăng lên khi thay $q\ (t)$ bằng bất kỳ hàm nào có dạng $q\ (t) + \delta q\ (t)$, ở đó $\delta q\ (t)$ - hàm vô cùng nhỏ trong toàn bộ khoảng thời gian từ t_1 đến t_2 và nó được gọi là biến phân của hàm q (t).

Vì tại các thời điểm $t = t_1$ và $t = t_2$ hàm $q(t) + \delta q(t)$ có giá trị là $q^{(1)}$ và $q^{(2)}$ ta suy ra

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \tag{2.2}$$

Sự thay đổi của S khi thay đổi q (t) ----> q (t) + δq (t) là

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, t)dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt \tag{2.3}$$

Phân tích hiệu này theo các bậc của δq và $\delta\dot{q}$ và lấy hạn chế ở khai triển bậc một.

Điều kiện cần để S nhận giá trị tối thiểu là $\delta S = 0$.

Như vậy nguyên lý tác dụng tối thiểu có thể viết dưới dạng biến phân $\delta S = 0$

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt = 0 \tag{2.4}$$

Tiến hành phép biến phân ta có:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} \right) dt = 0 \tag{2.5}$$

Thay $\delta\dot{q} = \frac{d}{dt}\delta q$ và tích phân số hạng thứ hai theo từng phần ta nhận được:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt}\delta q \right) dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q\, dt \tag{2.6}$$

Thay (2.6) vào (2.5) ta có:

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q\, dt = 0 \tag{2.7}$$

Từ công thức (2.2) ta suy ra số hạng đầu bằng không. Còn số hạng thứ hai (tích phân) bằng không với mọi giá trị δq, ta suy ra

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \qquad (2.8)$$

Nếu hệ cơ học có s bậc tự do thì chúng ta làm tương tự như trên đối với từng hàm q_i ($i = 1, 2, ...s$) và ta sẽ thu được s phương trình sau:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (2.9)$$

Các phương trình này được gọi là các phương trình Lagrange. Các phương trình (2.9) thiết lập mối quan hệ giữa gia tốc với vận tốc và toạ độ cho nên chúng chính là các phương trình chuyển động.

Về mặt toán học, các phương trình (2.9) lập thành hệ s phương trình vi phân bậc hai để cho s biến là các hàm q_i (t).

Nghiệm tổng quát của hệ này chứa 2s hằng số tùy ý. Để xác định đầy đủ chuyển động của hệ cơ học ta cần thêm các điều kiện ban đầu, đặc trưng cho trạng thái của hệ ở một thời điểm nào đó. Ví dụ: cho các giá trị ban đầu của tất cả các toạ độ và các vận tốc.

Đối với hàm Lagrange mô tả trạng thái của hệ cơ học ta cần chú ý đến hai nhận xét sau:

1. Tính chất cộng tính

Nếu hệ cơ học cấu tạo từ hai phần A và B, hai phần này đều kín và có các hàm Lagrange tương ứng là L_A và L_B thì hàm Lagrange của hệ sẽ tiến đến

$$\text{Lim } L = L_A + L_B \qquad (2.10)$$

Trong giới hạn khi hai phần đó đủ xa để có thể bỏ qua tương tác giữa chúng.

2. Tính không đơn trị

Xét hai hàm Lagrange $L'(q, \dot{q}, t)$ và $L(q, \dot{q}, t)$, chúng khác nhau một lượng là đạo hàm toàn phần theo thời gian của một hàm $f(q, t)$ của toạ độ và thời gian:

$$L'(q,\dot{q},t)=L(q,\dot{q},t)+\frac{d}{dt}f(q,t) \tag{2.11}$$

Ta đi tính tích phân tác dụng S' theo công thức (2.1)

$$S'=\int_{t_1}^{t_2} L'(q,\dot{q},t)dt=\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt+\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}f(q,t)dt=$$

$$=S+f\left(q^{(2)},t_2\right)-f\left(q^{(1)},t_1\right)$$

Như vậy S' sai khác S một lượng xác định [$f(q^{(2)}, t_2)$ - $f(q^{(2)}, t_1)$], lượng xác định này sẽ biến mất khi ta làm phép biến phân, do vậy điều kiện $\delta S' = 0$ trùng với điều kiện $\delta S = 0$ và dạng của các phương trình chuyển động vẫn giữ nguyên.

Từ các nhận xét ở trên ta thấy hàm Lagrange xác định một cách không đơn trị. Nó được xác định với độ sai khác một lượng là đạo hàm theo thời gian của một hàm $f(q, t)$ bất kỳ.

§3. NGUYÊN LÝ TƯƠNG ĐỐI GALILÉE

Để mô tả những quá trình xảy ra trong tự nhiên, chúng ta cần phải chọn hệ quy chiếu này hay hệ quy chiếu khác. Hệ quy chiếu là hệ các toạ độ xác định vị trí của hạt trong không gian và gắn đồng hồ xác định thời gian.

Trong các hệ quy chiếu khác nhau, nói chung các định luật tự nhiên, trong đó có các định luật cơ học, sẽ có dạng khác nhau.

Nếu ta chọn một hệ quy chiếu bất kỳ thì có thể xảy ra điều là các định luật của các hiện tượng đơn giản có thể trở thành dạng phức tạp. Do vậy xuất hiện vấn đề về việc chọn hệ quy chiếu sao cho trong nó các định luật tự nhiên có dạng đơn giản nhất.

Ta đã biết dạng chuyển động đơn giản nhất là chuyển động của vật thể tự do, có nghĩa là của vật thể không chịu một tác động của lực nào.

Tồn tại những hệ quy chiếu, trong đó chuyển động tự do xảy ra với vận tốc không đổi theo giá trị và hướng của nó. Những hệ quy chiếu như vậy được gọi là hệ quy chiếu quán tính. Nội dung của định luật quán tính khẳng định sự tồn tại các hệ quy chiếu loại này.

Tính chất quán tính có thể phát biểu như sự khẳng định về tính đồng nhất và đẳng hướng của không gian và sự đồng nhất của thời gian đối với hệ quy chiếu quán tính.

Sự đồng nhất của không gian và thời gian có nghĩa là sự tương đương của tất cả các vị trí của hạt tự do trong không gian và ở mọi thời điểm.

Sự đẳng hướng của không gian là sự tương đương của tất cả các hướng của không gian.

Nếu có hai hệ quy chiếu chuyển động tương đối với nhau thẳng đều và một trong hai hệ đó là hệ quy chiếu quán tính thì hệ kia cũng sẽ là hệ quy chiếu quán tính. Đúng vậy, bất kỳ chuyển động tự do nào trong hệ đó sẽ xảy ra với vận tốc không đổi. Như vậy sẽ có nhiều hệ quy chiếu quán tính.

Ngoài những chuyển động tự do ra, các thực nghiệm đã chỉ ra rằng nguyên lý tương đối sau đây là đúng:

Tất cả các định luật của tự nhiên đều bất biến (đều như nhau) trong tất cả các hệ quy chiếu quán tính. Nói cách khác, các phương trình biểu diễn các định luật tự nhiên đều bất biến đối với phép biến đổi các toạ độ và thời gian từ hệ quy chiếu quán tính này sang hệ quy chiếu quán tính khác.

Cùng với nguyên lý tương đối, trong cơ sở của cơ học kinh điển còn có giả thuyết về tính tuyệt đối của thời gian - tính đồng nhất xuất phát thời gian trong tất cả các hệ quy chiếu quán tính.

Galilée đã kết hợp nguyên lý tương đối với giả thiết tuyệt đối của thời gian và nguyên lý kết hợp đó được gọi là nguyên lý tương đối Galilée.

Để thu được các công thức biến đổi Galilée chúng ta đi xét hai hệ quy chiếu quán tính K và K', ở đó K' chuyển động tương đối với K với vận tốc không đổi $\vec{V}$. Khi đó các véc tơ bán kính của một hạt trong hai hệ quy chiếu quán tính đó $\vec{r}$ và $\vec{r}'$ có mối quan hệ như sau:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t \tag{3.1}$$

t là thời gian và nó như nhau trong cả hai hệ quy chiếu quán tính

$$t = t' \tag{3.2}$$

Đạo hàm hai vế của (3.1) theo thời gian ta sẽ thu được công thức biến đổi vận tốc như sau:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \tag{3.3}$$

Các phép biến đổi (3.1) (3.2) (3.3) được gọi là các phép biến đổi Galilée.

§4. HÀM LAGRANGE CỦA HẠT TỰ DO

Từ tính chất đồng nhất của không gian và thời gian, hàm Lagrange của hạt tự do không thể phụ thuộc tường minh vào véc tơ bán kính $\vec{r}$ và thời gian t. Có nghĩa là hàm Lagrange L chỉ là hàm phụ thuộc vào vận tốc $\vec{v}$.

Từ tính chất đẳng hướng của không gian, hàm Lagrange L không phụ thuộc vào hướng của véc tơ vận tốc $\vec{v}$, do vậy hàm Lagrange L chỉ có thể là hàm phụ thuộc vào giá trị tuyệt đối của vận tốc. Có nghĩa là L chỉ phụ thuộc vào v^2.

$$L = L(v^2) \tag{4.1}$$

Dạng của hàm này sẽ được xác định bởi nguyên lý tương đối Galilée.

Từ nguyên lý tương đối Galilée hàm $L(v^2)$ phải có dạng như nhau trong mọi hệ quy chiếu quán tính.

Mặt khác, khi chuyển từ hệ quy chiếu quán tính này sang hệ quy chiếu quán tính khác, vận tốc của hạt được biến đổi theo công thức (3.3) do vậy

$$L(\vec{v}^2) \text{ -------> } L\left((\vec{v}' + \vec{V})^2\right) \tag{4.2}$$

Để biểu thức cuối này nếu có khác $L(v^2)$ thì chỉ khác một lượng là đạo hàm toàn phần theo thời gian của một hàm vô hướng của toạ độ và thời gian $\frac{d}{dt} f(r,t)$(như ở cuối mục §2 đã có nhận xét) thì hàm Lagrange của hạt tự do phải có dạng:

$$L = a\,v^2 \tag{4.3}$$

Đúng vậy, nếu ta chọn $L = a\,v^2$ thì khi chuyển từ hệ quy chiếu quán tính này sang hệ quy chiếu quán tính khác, dựa vào công thức biến đổi vận tốc Galilée ta có:

$$L\left(\vec{v}^2\right) = a\vec{v}^2 = a\left(\vec{v}' + \vec{V}\right)^2 = a\vec{v}'^2 + 2a\vec{v}'.\vec{V} + a\vec{V}^2$$

thay $\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt}$ vào công thức trên ta có:

$$L\left(\vec{v}^2\right) = L\left(\vec{v}'^2\right) + \frac{d}{dt}\left(2a\vec{r}'.\vec{V} + a\vec{V}^2 t\right) \tag{4.4}$$

Số hạng thứ hai là đạo hàm toàn phần theo thời gian của một hàm vô hướng của toạ độ và thời gian và nó sẽ được bỏ qua như lý luận ở cuối §2.

Hằng số a thường được chọn là $\frac{m}{2}$. Như vậy chúng ta có thể viết hàm Lagrange của hạt tự do dưới dạng

$$L = \frac{m\vec{v}^2}{2} \tag{4.5}$$

m được gọi là khối lượng của hạt.

Thay hàm Lagrange (4.5) vào phương trình

Lagrange $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$ ta thu được phương trình chuyển động của hạt tự do:

$$\frac{d}{dt}m\vec{v} = 0 \text{ hay } m\dot{\vec{v}} = 0 \tag{4.6}$$

Từ tính chất cộng tính của hàm Lagrange, hệ của các chất điểm không tương tác với nhau có hàm Lagrange dưới dạng:

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} \tag{4.7}$$

Ở đó a là chỉ số các hạt của hệ cơ học.

Ta đã biết $\vec{v}^2 = \left(\frac{d\vec{l}}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dl}{dt}\right)^2$ ở đó

dl là yếu tố độ dài của cung đường đi.

Trong toạ độ Descartes thì $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ và hàm Lagrange của hạt tự do sẽ là:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) \tag{4.8}$$

Trong toạ độ trụ $dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$ và

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) \tag{4.9}$$

Trong toạ độ cầu $dl^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2$ và

$$L=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\dot{\varphi}^2\right) \tag{4.10}$$

Một điều đáng chú ý nữa là đại lượng m không thể nhận giá trị âm. Đúng vậy, theo nguyên lý tác dụng tối thiểu đối với chuyển động của hạt từ điểm 1 đến điểm 2 của không gian thì tích phân $S=\int_1^2 \frac{mv^2}{2}dt$ sẽ có giá trị cực tiểu.

Nếu khối lượng m là âm thì tích phân tác dụng S không thể có cực tiểu.

§5. HÀM LAGRANGE CỦA HỆ CÁC HẠT TƯƠNG TÁC LẪN NHAU

Bây giờ chúng ta xét hệ các hạt tương tác lẫn nhau nhưng không tương tác với các vật ngoài hệ. Hệ như vậy được gọi là hệ kín. Hàm Lagrange của hệ kín sẽ là:

$$L=\sum_a \frac{m_a\vec{v}_a^{\,2}}{2}-U\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_a,\ldots\right) \tag{5.1}$$

Ở đó $\vec{r}_a$ là véc tơ bán kính của chất điểm thứ a.

$T\equiv\sum_a \frac{m_a\vec{v}_a^{\,2}}{2}$ được gọi là động năng của hệ.

Ý nghĩa của T và U chúng ta sẽ làm sáng tỏ ở mục sau.

Biết hàm Lagrange của hệ, chúng ta có thể tìm các phương trình chuyển động.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a}\right)-\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a}=0 \tag{5.2}$$

Thay (5.1) vào (5.2) ta có

$$m_a \frac{d\vec{v}_a}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a} \tag{5.3}$$

Các phương trình này được gọi là các phương trình Newton và là cơ sở của cơ học của các hệ có các hạt tương tác lẫn nhau.

Véc tơ $\vec{F}_a \equiv -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}$ được gọi là lực tác động lên hạt thứ a và công thức (5.3) cũng chính là biểu thức toán học của định luật thứ hai của Newton.

Nếu ta không sử dụng toạ độ Descartes của các chất điểm để mô tả chuyển động của chúng mà sử dụng các toạ độ suy rộng tự chọn nào đó thì ta cần phải làm phép biến đổi tương ứng.

$$x_a = f_a(q_1 q_2 \ldots\ldots q_S)$$

$$\dot{x}_a = \sum_k \frac{\partial f_a}{\partial q_k} \dot{q}_k \tag{5.4}$$

Thay (5.4) vào hàm Lagrange $L = \frac{1}{2}\sum_a m_a\left(\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2\right) - U$ ta sẽ nhận được hàm Lagrange tương ứng cần tìm như sau:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k - U(q) \tag{5.5}$$

Ở đó a_{ik} chỉ là hàm của toạ độ q.

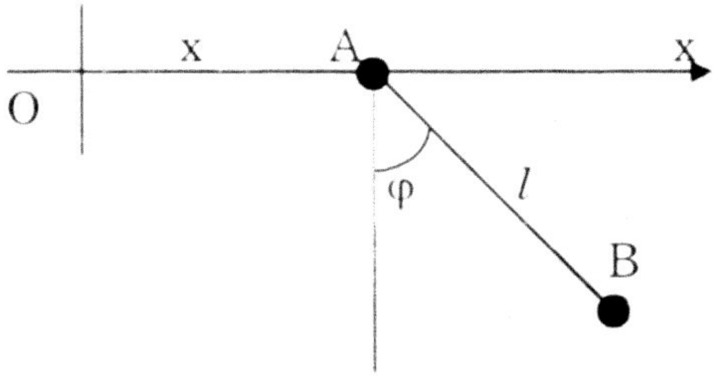
Chuyển động của hệ cơ học trong trường ngoài được mô tả bởi hàm Lagrange dạng bình thường như trên nhưng có điều khác là thế năng tương tác bây giờ có thể phụ thuộc tường minh vào thời gian.

Ví dụ: Chuyển động của một hạt trong trường ngoài được đặc trưng bởi hàm Lagrange có dạng như sau:

$L = \frac{m\vec{v}^2}{2} - U(r,t)$ và phương trình chuyển động sẽ là $m\dot{\vec{v}} = -\frac{\partial U(r,t)}{\partial \vec{r}}$

§6. MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ HÀM LAGRANGE VÀ PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE

Ta hãy xét một vài ví dụ về hàm Lagrange và phương trình Lagrange.



Hình vẽ 1

1. Một con lắc phẳng B có khối lượng m_2, có điểm treo A với khối lượng m_1 chuyển động không ma sát theo một đường thẳng nằm ngang. Chiều dài của con lắc là l (Xem hình vẽ 1)

Số bậc tự do s = 2

Toạ độ quy rộng $q_1 = x_A = x$

$q_2 = \varphi$

hàm Lagrange của hệ trên

$$L = T_A + T_B - U_B = \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2\right) - U_B \quad (6.1)$$

Thay $x_B = x + l\sin\varphi$, $y_B = l\cos\varphi$ vào (5.1) ta sẽ nhận được

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi\right) + m_2 g l\cos\varphi \quad (6.2)$$

Các phương trình Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left[(m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi\right] = 0 \quad (6.3)$$

$$\frac{d}{dt}\left[m_2\left(l^2\dot{\varphi} + l\dot{x}\cos\varphi\right)\right] = -m_2 l(\dot{\varphi}\dot{x} + g)\sin\varphi \quad (6.4)$$

2. Bài toán con lắc kép (xem hình vẽ 2)

Số bậc tự do s = 2

Toạ độ suy rộng: $q_1 = \varphi_1$, $q_2 = \varphi_2$

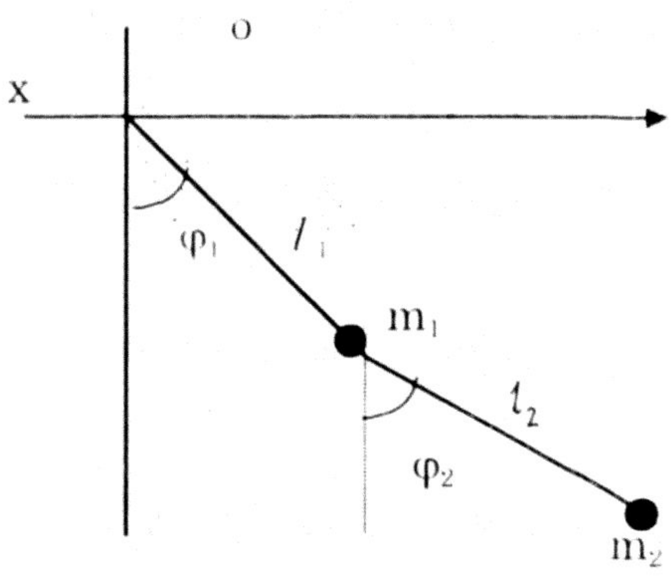
$x_A = l_1 \sin\varphi_1$,

$y_A = l_1 \cos\varphi_1$

$x_B = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2$

$y_B = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2$

Hàm Lagrange:



(Hình vẽ 2)

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2}l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \tag{6.5}$$
$$+ (m_1 + m_2)gl_1\cos\varphi_1 + m_2 g l_2 \cos\varphi_2$$

Các phương trình Lagrange:

$$(m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{\varphi}_2 - \tag{6.6}$$
$$- m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) = -(m_1 + m_2)gl_1\sin\varphi_1$$

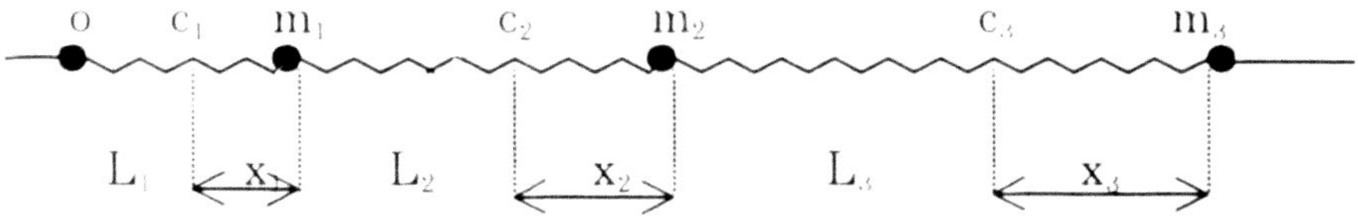
$$m_2 l_2^2\ddot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{6.7}$$
$$- m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) = -m_2 g l_2 \sin\varphi_2$$

3. Ba hạt có khối lượng m_1, m_2, m_3 trượt không ma sát trên đường thẳng nằm ngang (xem hình vẽ 3). Hạt m_1 nối với điểm 0 bởi lò xo L_1, các hạt m_1 và m_2 được nối với nhau bởi lò xo L_2, còn hạt m_2 nối với hạt m_3 bởi lò xo L_3. Vị trí cân bằng của hạt, tức là khi các lò xo không căng, tương ứng là c_1, c_2 và c_3.

Thế năng sinh bởi các lò xo tính theo công thức.

$$U = \frac{1}{2}K\Delta x^2 \tag{6.8}$$

Ở đó Δx là độ dãn của lò xo, còn K là hằng số mô tả độ cứng của lò xo. Các độ cứng của các lò xo nói trên tương ứng ký hiệu là K_1, K_2 và K_3.



Hình vẽ 3

Số bậc tự do s = 3

Toạ độ suy rộng: x_1, x_2, x_3

Hàm Lagrange

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2$$

$$U = \frac{1}{2}K_1x_1^2 + \frac{1}{2}K_2(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}K_3(x_3 - x_2)^2 \quad (6.9)$$

$$L = T - U$$

Các phương trình Lagrange

$$m_1\ddot{x}_1 + K_1x_1 - K_2(x_2 - x_1) = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 + K_2(x_2 - x_1) - K_3(x_3 - x_2) = 0$$

$$m_3\ddot{x}_3 + K_3(x_3 - x_2) = 0$$

4. Một hạt chuyển động dưới tác dụng của trường hấp dẫn với thế năng

$$U(r) = \frac{a}{r}, \qquad a = \text{const}$$

Số bậc tự do s = 3

Toạ độ suy rộng: Toạ độ cầu: r, θ, φ.

Hàm Lagrange:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) - \frac{a}{r} \tag{6.10}$$

Các phương trình Lagrange

$$m\left[\ddot{r} - r\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\right] = -\frac{a}{r^2} \tag{6.11}$$

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta\right) = 0 \tag{6.12}$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) + \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}^2\sin 2\theta = 0 \tag{6.13}$$

Tóm lại xuất phát từ nguyên lý biến phân Hamilton chúng ta đã tìm được các phương trình chuyển động Lagrange. Các công cụ toán học đã được sử dụng là đại số trừu tượng và phép tính biến phân. Tất nhiên để giải các phương trình Lagrange là những phương trình vi phân còn cần đến một công cụ toán học khác là vi phân (giải tích toán học). Phương pháp hình thức để giải các bài toán cơ học dựa vào nội dung trên gọi là hệ hình thức Lagrange.

Chương 2

CÁC ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN

§7. ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN NĂNG LƯỢNG

Khi chuyển động, các đại lượng q_i, $\dot{q}_i (i = 1,2,...,s)$ xác định trạng thái của hệ cơ học sẽ thay đổi theo thời gian. Tuy nhiên vẫn tồn tại các hàm của q_i và $\dot{q}_i$ có giá trị không đổi khi hệ chuyển động và chỉ phụ thuộc vào điều kiện ban đầu. Các hàm đó được gọi là các tích phân chuyển động.

Tìm tất cả các tích phân chuyển động đối với một hệ cơ học tuỳ ý là rất phức tạp và trong một số ít trường hợp có thể đạt được dưới dạng giải tích.

Mặt khác không phải tất cả các tích phân chuyển động có vai trò quan trọng như nhau trong cơ học. Giữa chúng có vài đại lượng mà sự bảo toàn của chúng có nguồn gốc sâu xa liên quan với các tính chất cơ bản của không gian và thời gian - tính chất đồng nhất và đẳng hướng của không gian và thời gian.

Chúng ta bắt đầu xem xét tích phân chuyển động thứ nhất, đó là năng lượng. Định luật bảo toàn năng lượng liên quan mật thiết với tính chất đồng nhất của thời gian.

Do tính chất đồng nhất của thời gian, hàm Lagrange của hệ kín không phụ thuộc tường minh vào thời gian (có nghĩa là $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$) và ta có thể viết đạo hàm toàn phần theo thời gian của hàm Lagrange của hệ cơ học kín như sau:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \qquad (7.1)$$

Từ các phương trình Lagrange $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

Với $i = 1, 2, \ldots, s$, ta suy ra

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (7.2)$$

Thay (7.2) vào (7.1) ta có:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) \qquad (7.3)$$

hay là $\frac{d}{dt}\left[\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right] = 0$, tức là

đại lượng $\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \equiv E = \text{const}$ (7.4)

trong quá trình chuyển động của hệ cơ học kín.

Đại lượng E không đổi đó được gọi là năng lượng của hệ cơ học.

Tính chất cộng tính của năng lượng được trực tiếp suy ra từ tính chất cộng tính của hàm Lagrange.

Định luật bảo toàn năng lượng đúng không chỉ riêng cho hệ kín mà còn đúng cho các hệ nằm trong trường ngoài không đổi (trường ngoài không phụ thuộc vào thời gian).

Ở §5 ta đã biết hàm Lagrange của hệ cơ học kín có các hạt tương tác lẫn nhau nhưng không tương tác với các vật ngoài là

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots \vec{r}_a, \ldots) \qquad (7.5)$$

Thay (7.5) vào (7.4) ta có:

$$E = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_a, ...) \qquad (7.6)$$

Số hạng đầu của (7.6) $\sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} = T$ được gọi là động năng còn số hạng thứ hai $U = U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ... \vec{r}_a, ...)$ được gọi là thế năng của hệ.

Năng lượng của hệ E bằng tổng của động năng T và thế năng U của hệ.

§8. ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN XUNG LƯỢNG

Định luật bảo toàn xung lượng liên quan chặt chẽ với tính chất đồng nhất của không gian.

Do tính chất đồng nhất của không gian, các tính chất cơ học của hệ kín không thay đổi đối với sự dịch chuyển song song bất kỳ của cả hệ trong không gian.

Tương ứng với nhận xét trên chúng ta sẽ xem xét một sự dịch chuyển song song vô cùng nhỏ đi một đoạn ε và yêu cầu sao cho hàm Lagrange không thay đổi ($\delta L = 0$).

Sự dịch chuyển song song có nghĩa là phép biến đổi trong đó tất cả các điểm của hệ đã dịch chuyển đi cùng một đoạn, có nghĩa là các véc tơ bán kính của chúng $\vec{r}_a \to \vec{r}_a + \vec{\varepsilon}$. Sự thay đổi của hàm Lagrange trong kết quả của sự dịch chuyển song song đi một đoạn vô cùng nhỏ, khi vận tốc của các hạt không đổi sẽ là:

$$\delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} \delta \vec{r}_a = \varepsilon \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} \qquad (8.1)$$

Ở đây tổng được lấy theo tất cả số hạt của hệ.

Vì $\vec{\varepsilon}$ được chọn tuỳ ý cho nên yêu cầu $\delta L = 0$ tương đương với yêu cầu

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = 0 \qquad (8.2)$$

Từ phương trình chuyển động Lagrange (5.2) và điều kiện trên ta sẽ nhận được:

$$\sum_a \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = \frac{d}{dt}\sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = 0 \qquad (8.3)$$

Như vậy chúng ta đi đến kết luận là đối với hệ cơ học kín đại lượng véc tơ.

$$\vec{p} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} \qquad (8.4)$$

không thay đổi trong quá trình chuyển động. Véc tơ $\vec{P}$ được gọi là xung lượng của hệ. Thay hàm Lagrange (7.5) vào biểu thức trên ta có:

$$\vec{p} = \sum_a m_a \vec{v}_a = \sum_a \vec{p}_a \qquad (8.5)$$

Tính chất cộng tính của xung lượng được thể hiện qua công thức trên một cách rõ rệt. Khác với năng lượng, xung lượng của hệ bằng tổng các xung lượng của từng hạt của hệ.

Định luật bảo toàn tất cả ba thành phần của véc tơ xung lượng chỉ xảy ra trong trường hợp không có trường ngoài. Tuy nhiên từng thành phần của véc tơ xung lượng có thể bảo toàn khi tồn tại trường ngoài có thế năng không phụ thuộc vào các toạ độ Descartes. Khi dịch chuyển dọc theo trục toạ độ tương ứng nào đó hiển nhiên là các tính chất cơ học của hệ sẽ không thay đổi và cũng bằng lý luận như trên chúng ta sẽ thấy rằng hình chiếu của xung lượng lên trục đó bảo toàn. Như vậy trong trường đồng nhất hướng dọc theo trục z, thì các thành phần xung lượng dọc theo trục x và y sẽ bảo toàn.

Đẳng thức (8.2) có ý nghĩa vật lý đơn giản như sau:

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = \sum_a -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a} = \sum_a \vec{F}_a = 0 \qquad (8.6)$$

Tổng các lực tác động lên tất cả các hạt của hệ kín bằng không.

Trong trường hợp riêng, khi hệ kín tạo bởi hai hạt thì

$$\sum_{a=1}^{2} \vec{F}_a = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \qquad (8.7)$$

Từ (8.7) ta thấy lực tác động lên hạt thứ nhất từ phía hạt thứ hai bằng về giá trị nhưng ngược hướng của lực tác động lên hạt thứ hai từ phía hạt thứ nhất. Đó chính là định luật cân bằng tác động lực và phản lực (Định luật thứ ba Newton).

Nếu chuyển động của hệ được mô tả bởi các toạ độ suy rộng q_i thì các đại lượng.

$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ được gọi là các xung lượng suy rộng

$F_i = \dfrac{\partial L}{\partial q_i}$ được gọi là lực suy rộng.

Trong ký hiệu đó thì phương trình chuyển động Lagrange có dạng

$$\dot{p}_i = F_i \qquad (8.8)$$

§9. TÂM QUÁN TÍNH CỦA HỆ CƠ HỌC

Chúng ta đã định nghĩa đại lượng xung lượng trong một hệ quy chiếu quán tính xác định. Bây giờ chúng ta hãy xét xem sự biến đổi hệ quy chiếu quán tính sẽ có ảnh hưởng gì đến đại lượng xung lượng của hệ cơ học kín.

Nếu ta có hệ quy chiếu quán tính K' chuyển động tương đối với hệ quy chiếu quán tính K với vận tốc không đổi $\vec{V}$ thì vận tốc $\vec{v}'_a$ và $\vec{v}_a$ của các hạt tương đối với K' và K có mối quan hệ như sau:

$$\vec{v}_a = \vec{v}'_a + \vec{V}$$

Do đó mối quan hệ giữa các xung lượng sẽ là:

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \sum_a m_a \vec{v}_a = \sum_a m_a \left(\vec{v}'_a + \vec{V}\right) = \\ &= \sum_a m_a \vec{v}'_a + \sum_a m_a \vec{V} = \vec{p}' + \vec{V} \sum_a m_a\end{aligned} \qquad (9.1)$$

Như vậy ta thấy xung lượng của hệ cơ học kín có các giá trị khác nhau đối với các hệ quy chiếu quán tính khác nhau.

Trong trường hợp riêng, luôn tồn tại hệ quy chiếu quán tính K' trong đó xung lượng $\vec{p}'$ của hệ cơ học bằng không (ở đây K' được gọi là hệ quy chiếu quán tính đứng yên của hệ cơ học). Đặt $\vec{p}' = 0$ vào (9.1) ta tìm được

$$\vec{V} = \frac{\vec{p}}{\sum_a m_a} = \frac{\sum_a m_a \vec{v}_a}{\sum_a m_a} \qquad (9.2)$$

Vận tốc $\vec{V}$ cho bởi công thức trên có ý nghĩa là vận tốc chuyển động của cả hệ như một vật thể thống nhất có xung lượng khác không tương đối với hệ quy chiếu quán tính K.

Như vậy, chúng ta nhận thấy, nhờ định luật bảo toàn xung lượng có thể phát biểu suy rộng khái niệm bất động và vận tốc chuyển động của cả hệ như một vật thể thống nhất.

Công thức (9.2) chỉ ra rằng mối liên hệ giữa xung lượng $\vec{p}$ và vận tốc $\vec{V}$ của hệ như một vật thể thống nhất sẽ như mối liên hệ giữa xung lượng và vận tốc của một chất điểm với khối lượng là $\mu = \sum_a m_a$. Điều này cũng có thể phát biểu như sự khẳng định tính chất cộng tính của khối lượng.

Ta nhận thấy vế bên phải của công thức (9.2) có thể biểu diễn như là đạo hàm theo thời gian của biểu thức sau:

$$\vec{R} = \frac{\sum_a m_a \vec{r}_a}{\sum_a m_a} \tag{9.3}$$

Có thể nói rằng vận tốc của hệ như vật thể thống nhất là vận tốc dịch chuyển trong không gian của điểm có véc tơ bán kính xác định theo công thức (9.3). Điểm như vậy được gọi là tâm quán tính của hệ.

Định luật bảo toàn xung lượng của hệ độc lập có thể phát biểu như sự khẳng định rằng tâm quán tính của hệ chuyển động thẳng đều.

§10. ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN MÔMEN XUNG LƯỢNG

Bây giờ chúng ta xem xét định luật bảo toàn khac có nguồn gốc liên quan với tính chất đẳng hướng của không gian.

Tính chất đẳng hướng của không gian có nghĩa là các tính chất cơ học của hệ kín sẽ không đổi khi ta quay hệ như một thể thống nhất trong không gian.

Tương ứng với điều vừa nêu ra, ta xem xét một phép quay vô cùng nhỏ của cả hệ và yêu cầu hàm Lagrange của hệ không đổi ($\delta L = 0$).

Ta đưa vào khái niệm véc tơ yếu tố góc quay vô cùng nhỏ $\delta\vec{\varphi}$, nó là véc tơ hướng theo trục quay và có giá trị bằng góc quay $\delta\varphi$ (sao cho chiều quay ứng với quy tắc đinh vít đối với chiều của $\delta\vec{\varphi}$).

Trước hết ta tính xem trong phép quay đó số gia của véc tơ bán kính bằng bao nhiêu; véc tơ bán kính này vẽ từ gốc toạ độ chung (nằm trên trục quay) đến một chất điểm nào đó thuộc hệ cơ học quay.

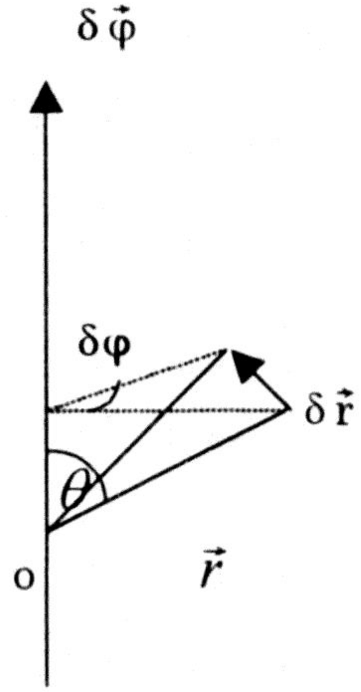
$$|\delta\vec{r}| = r\sin\theta\delta\varphi \tag{10.1}$$

Hướng của véc tơ $\delta\vec{r}$ vuông góc với mặt phẳng chứa các véc tơ $\vec{r}$ và $\delta\vec{\varphi}$, do vậy ta có

$$\delta\vec{r} = [\delta\vec{\varphi}\times\vec{r}] \tag{10.2}$$

Số gia vận tốc của chất điểm tương đối với hệ toạ độ bất động sẽ là

$$\delta\vec{v} = [\delta\vec{\varphi}\times\vec{v}] \tag{10.3}$$



Thay các biểu thức đó vào điều kiện bất biến của hàm Lagrange trong phép quay ta có

$$\delta L = \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} \delta \vec{r}_a + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} \delta \vec{v}_a \right) =$$
$$= \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} [\delta \vec{\varphi} \times \vec{r}_a] + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} [\delta \vec{\varphi} \times \vec{v}_a] \right) = 0 \qquad (10.4)$$

Thay $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = \dot{\vec{p}}_a$ và $\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = \vec{p}_a$ vào biểu thức trên, ta có:

$$\sum_a \left(\dot{\vec{p}}_a [\delta \vec{\varphi} \times \vec{r}_a] + \vec{p}_a [\delta \vec{\varphi} \times \vec{v}_a] \right) = 0 \qquad (10.5)$$

Làm phép giao hoán đối với tích hỗn hợp ta sẽ thu được

$$\sum_a \delta \vec{\varphi} \left[\vec{r}_a \times \dot{\vec{p}}_a \right] + \sum_a \delta \vec{\varphi} \left[\vec{v}_a \times \vec{p}_a \right] =$$
$$= \delta \vec{\varphi} \sum_a \left(\left[\vec{r}_a \times \dot{\vec{p}}_a \right] + \left[\vec{v}_a \times \vec{p}_a \right] \right) = \qquad (10.6)$$
$$= \delta \vec{\varphi} \frac{d}{dt} \sum_a \left[\vec{r}_a \times \vec{p}_a \right]$$

Vì véc tơ yếu tố góc $\delta \vec{\varphi}$ được chọn tuỳ ý cho nên ta có:

$$\frac{d}{dt} \sum_a \left[\vec{r}_a \times \vec{p}_a \right] = 0 \qquad (10.7)$$

Như vậy, ta đi đến kết luận là trong quá trình chuyển động của một hệ kín, đại lượng.

$$\vec{M} = \sum_a \left[\vec{r}_a \times \vec{p}_a \right] \qquad (10.8)$$

được bảo toàn. Đại lượng đó được gọi là mômen xung lượng (đơn giản còn gọi là mômen quay hay mômen góc) của hệ cơ học. Từ công thức (10.8) ta nhận thấy mômen xung lượng có tính chất cộng tính và cũng như xung lượng, tính chất đó không phụ thuộc vào việc giữa các hạt có tương tác hay không.

Như vậy đối với hệ cơ học độc lập kín có bảy tích phân chuyển động đó là năng lượng, ba thành phần của véc tơ xung lượng và ba thành phần của mômen xung lượng.

Vì trong định nghĩa của mômen xung lượng có chứa véc tơ bán kính của hạt nên nói chung giá trị của mômen xung lượng phụ thuộc vào sự lựa chọn gốc toạ độ.

Nếu $\vec{r}_a$ và $\vec{r}'_a$ là các véc tơ bán kính của cùng một điểm tương đối với các gốc toạ độ, cách nhau một khoảng $\vec{A}$ thì các véc tơ đó liên hệ với nhau bởi biểu thức

$\vec{r}_a = \vec{r}'_a + \vec{A}$ và khi đó ta có :

$$\vec{M} = \sum_a [\vec{r}_a \times \vec{p}_a] = \sum_a \left[(\vec{r}'_a + \vec{A}) \times \vec{p}_a \right] = \sum_a [\vec{r}'_a \times \vec{p}_a] + \left[\vec{A} \times \sum_a \vec{p}_a \right] \text{ hay} \tag{10.9}$$

$$\vec{M} = \vec{M}' + [\vec{A} \times \vec{P}] \tag{10.10}$$

Ở đó $\vec{P} = \sum_a \vec{p}_a$.

Từ công thức (10.10) ta thấy rằng chỉ trong trường hợp hệ như một vật thể đứng yên (có nghĩa là $\vec{P} = 0$) thì mômen xung lượng của hệ mới không phụ thuộc vào việc chọn gốc toạ độ.

Bây giờ chúng ta đi xét mối quan hệ giữa các giá trị của mômen xung lượng đối với hai hệ quy chiếu quán tính khác nhau K và K'. Giả sử K' chuyển động tương đối với hệ quy chiếu quán tính K với vận tốc không đổi $\vec{V}$ và các gốc toạ độ của K và K' ở một thời điểm cho trước nào đó trùng nhau. Ở thời điểm này các véc tơ bán kính của các hạt ở trong hai hệ quy chiếu là như nhau, còn vận tốc của chúng thì liên hệ với nhau theo biểu thức:

$$\vec{v}_a = \vec{v}'_a + \vec{V} \tag{10.11}$$

Như vậy ta có:

$$\vec{M} = \sum_a m_a[\vec{r}_a \times \vec{v}_a] = \sum_a m_a\left[\vec{r}_a \times \left(\vec{v}'_a + \vec{V}\right)\right] =$$

$$= \sum_a m_a[\vec{r}_a \times \vec{v}'_a] + \sum_a m_a\left[\vec{r}_a \times \vec{V}\right] =$$

$$= \vec{M}' + \sum_a m_a\left[\vec{r}_a \times \vec{V}\right]$$

hay $\vec{M} = \vec{M}' + \mu\left[\vec{R} \times \vec{V}\right]$ (10.12)

Ở đó $\vec{R}$ là véc tơ bán kính của tâm quán tính của hệ.

Công thức trên xác định quy luật biến đổi của mômen xung lượng khi chuyển từ hệ quy chiếu quán tính này sang hệ quy chiếu quán tính khác.

Nếu hệ K' là hệ quy chiếu quán tính mà tương đối với nó hệ cơ học bất động như một vật thể thống nhất thì khi đó $\mu\vec{V} = \vec{P}$ chính là xung lượng của hệ cơ học như một vật thể thống nhất tương đối với hệ quy chiếu quán tính K và

$$\vec{M} = \vec{M}' + \left[\vec{R} \times \vec{P}\right] \tag{10.13}$$

Nói cách khác, mômen xung lượng của hệ cơ học bằng tổng của mômen riêng của hệ cơ học $\vec{M}'$ tương đối với hệ quy chiếu trong đó hệ cơ học bất động tuyến tính và mômen $\left[\vec{R}\times\vec{P}\right]$ liên quan với sự chuyển động của hệ như một vật thể thống nhất.

Mặc dầu định luật bảo toàn ba thành phần của véc tơ mômen xung lượng (đối với điểm gốc toạ độ tuỳ ý) chỉ đúng với hệ kín, nhưng cả trường hợp khi hệ cơ học nằm ở trường ngoài, định luật bảo toàn mômen vẫn có thể đúng trong một dạng hẹp hơn. Từ những suy luận ở trên ta thấy hình chiếu của mômen trên trục đối xứng của trường ngoài luôn được bảo toàn, vì rằng những tính chất cơ học của hệ không thay đổi khi quay hệ với một góc tuỳ ý xung quang trục đó, dĩ nhiên ở đây mômen phải được xác định đối với điểm (gốc toạ độ) nằm trên trục đối xứng của trường ngoài.

Trường hợp quan trọng nhất về loại trường đó là trường đối xứng xuyên tâm, có nghĩa là trường có thế năng chỉ phụ thuộc vào khoảng cách đến một điểm nào đó xác định trong không gian (tâm của trường). Dĩ nhiên, nếu hệ cơ học chuyển động trong một trường như vậy thì hình chiếu của mômen trên mọi trục đi qua tâm của trường đều được bảo toàn. Nói cách khác, vec tơ $\vec{M}$ được bảo toàn nhưng, ở đây, $\vec{M}$ xác định không phải đối với bất kỳ điểm nào trong không gian, mà phải đối với tâm của trường.

Một ví dụ khác: trường đồng nhất dọc theo trục z trong đó hình chiếu M_z được bảo toàn, ở đây gốc toạ độ có thể lấy tuỳ ý.

Ta nhận thấy rằng hình chiếu của mômen trên trục z có thể tính bằng cách lấy đạo hàm hàm số Lagrange theo công thức:

$$M_z = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_a} \qquad (10.14)$$

với toạ độ φ là góc quay quanh trục z.

Đúng vậy, trong toạ độ trụ r, φ, z ta có $x_a = r_a \cos \varphi_a$

$y_a = r_a \sin \varphi_a$ và

$$M_z = \sum_a m_a (x_a \dot{y}_a - y_a \dot{x}_a) = \sum_a m_a r_a^2 \dot{\varphi}_a \quad (10.15)$$

Mặt khác, hàm Lagrange trong toạ độ trụ của hệ có dạng

$$L = \frac{1}{2} \sum_a m_a \left(\dot{r}_a^2 + r_a^2 \dot{\varphi}_a^2 + \dot{z}_a^2\right) - U$$

và nếu thay biểu thức này vào công thức (10.14) ta được ngay biểu thức (10.15).

Chương 3

CHUYỂN ĐỘNG XUYÊN TÂM

Trong chương này chúng ta sẽ áp dụng các định luật bảo toàn ở chương II để giải quyết bài toán chuyển động của các chất điểm trong trường xuyên tâm. Bằng cách này chúng ta sẽ thu được kết quả nhanh chóng mà không cần phải giải phương trình chuyển động Lagrange (phương trình vi phân bậc 2).

§11. CHUYỂN ĐỘNG MỘT CHIỀU

Chuyển động của hệ cơ học được gọi là chuyển động một chiều nếu chuyển động đó có một bậc tự do.

Dạng tổng quát nhất của hàm Lagrange của hệ như vậy, khi các điều kiện ngoài cố định là:

$$L = \frac{1}{2}a\,(q)\dot{q}^2 - U(q) \tag{11.1}$$

Ở đó a (q) là hàm nào đó của toạ độ suy rộng.

Trong trường hợp riêng, nếu q là một toạ độ Descartes (ví dụ toạ độ x) thì hàm Lagrange sẽ là:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) \tag{11.2}$$

Các phương trình chuyển động tương ứng với các hàm Lagrange trên thường được lấy tích phân trong dạng tổng quát. Trong cách đó không cần phải viết phương trình chuyển động

Lagrange mà chỉ cần xuất phát từ tích phân chuyển động thứ nhất - định luật bảo toàn năng lượng. Cụ thể là đối với hàm Lagrange (11.2) ta có:

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) \tag{11.3}$$

Giải phương trình vi phân bậc nhất (11.3) ta sẽ thu được kết quả sau:

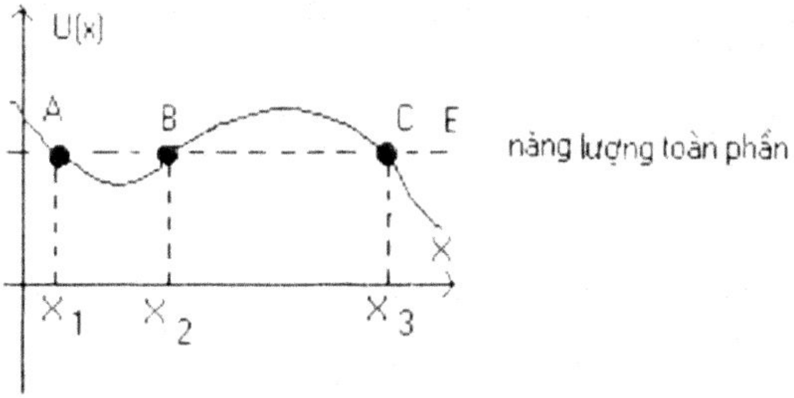
$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m}[E - U(x)]$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]} \tag{11.4}$$

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + const$$

Vì động năng là đại lượng dương do vậy khi chuyển động năng lượng toàn phần phải luôn lớn hơn thế năng, như vậy chuyển động chỉ khả dĩ khi E > U (x).

Nếu thế năng U (x) có đồ thị như hình vẽ 4



Hình vẽ 4

thì chuyển động chỉ có thể xảy ra ở miền AB hoặc ở miền bên phải của điểm C (vì ở các miền đó E > U (x))

Những điểm mà ở đó E = U (x) (điểm A, B, C) xác định biên của chuyển động được gọi là các điểm dừng (hay các điểm chết) vì ở các điểm đó vận tốc bằng không.

Chuyển động xảy ra trong miền không gian giới hạn giữa hai điểm dừng thì được gọi là chuyển động giới hạn. Còn chuyển động bị hạn chế ở một phía hoặc không bị giới hạn thì được gọi là chuyển động vô hạn và hạt đi ra xa vô cùng.

Chuyển động giới hạn một chiều còn được gọi là dao động, hạt sẽ thực hiện chuyển động lặp lại theo chu kỳ giữa hai biên (trên hình vẽ 4 là trong hố thế AB, giữa hai điểm x_1 và x_2.

Chúng ta đã nói về tính đồng nhất của thời gian. Từ dạng của hàm Lagrange ta nhận thấy thời gian trong cơ học không chỉ là đồng nhất mà còn đẳng hướng. Thực vậy nếu thay t ----> t' = - t (phép nghịch đảo thời gian) thì hàm Lagrange và các phương trình chuyển động không thay đổi. Như vậy nếu trong hệ cơ học có chuyển động nào đó thì sẽ có chuyển động ngược lại sao cho hệ đi qua các trạng thái theo trình tự ngược.

Từ tính đẳng hướng này của thời gian ta suy ra thời gian chuyển động của hệ từ x_1 đến x_2 sẽ bằng thời gian chuyển động ngược lại từ x_2 đến x_1. Vì vậy mà chu kỳ dao động T (thời gian mà hạt chuyển động từ x_1 đến x_2 và ngược lại) bằng hai lần thời gian hạt chuyển động từ x_1 đến x_2. Theo công thức (11.4) ta sẽ có:

$$T(E)=2\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)}\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}} \tag{11.5}$$

Ở đó $x_1(E)$, $x_2(E)$ chính là nghiệm của phương trình U (x) = E khi ta cho E.

Công thức (11.5) cho ta thấy chu kỳ chuyển động phụ thuộc vào năng lượng toàn phần của hạt.

§12. BÀI TOÁN HAI VẬT

Bài toán hai vật là bài toán về chuyển động của một hệ kín gồm hai chất điểm với thế năng tương tác chỉ phụ thuộc vào khoảng cách tương đối giữa các chất điểm đó. Do vậy hàm Lagrange của hệ hai hạt đó sẽ là:

$$L = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\vec{r}}_2^2}{2} - U\left(\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|\right) \qquad (12.1)$$

ta đưa vào véc tơ khoảng cách giữa hai chất điểm $\vec{r}$.

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 \equiv \vec{r} \qquad (12.2)$$

và đặt gốc toạ độ vào tâm quán tính, có nghĩa là ta có:

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0 \qquad (12.3)$$

Từ (12.2), (12.3) ta nhận được:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}; \vec{r}_2 = \frac{-m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \qquad (12.4)$$

Đặt (12.4) vào (12.1) ta có:

$$L = \frac{m_1 m_2 \dot{\vec{r}}^2}{2(m_1 + m_2)} - U(r) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - U(r) \qquad (12.5)$$

Ở đó $m \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ được gọi là khối lượng rút gọn.

Hàm Lagrange (12.5) về hình thức trùng với hàm Lagrange của một chất điểm có khối lượng là m chuyển động trong trường ngoài U (r) có đối xứng tương đối với gốc toạ độ.

Như vậy bài toán hai vật tương tác với nhau được đưa về hai bài toán chuyển động của một chất điểm trong trường ngoài cho trước U (r). Khi giải bài toán chuyển động này ta sẽ thu được nghiệm $r = r$ (t), và theo công thức (12.4) ta sẽ thu được các quỹ đạo chuyển động của hai hạt m_1 và m_2 là $r_1 = r_1$ (t) và $r_2 = r_2$ (t).

§.13. CHUYỂN ĐỘNG TRONG TRƯỜNG XUYÊN TÂM

Chúng ta xét chuyển động của một hạt trong trường ngoài có thế năng chỉ phụ thuộc vào khoảng cách r tới một điểm cố định. Trường như vậy gọi là trường xuyên tâm.

Lực tác động lên hạt sẽ là:

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r} \qquad (13.1)$$

Ta đã biết ở mục định luật bảo toàn mômen, khi chuyển động trong trường xuyên tâm thì mômen của hệ cơ học tương đối với tâm của trường sẽ bảo toàn.

Đối với một hạt có mômen xung lượng $\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}]$. Vì $\vec{r} \perp \vec{M}$ do vậy sự bảo toàn mômen $\vec{M}$ có nghĩa là khi chuyển động bán kính véc tơ của hạt luôn nằm trong một mặt phẳng vuông góc với $\vec{M}$. Như vậy quỹ đạo chuyển động của hạt trong trường xuyên tâm nằm trọn vẹn trong một mặt phẳng.

Chúng ta sử dụng hệ toạ độ cực (r, φ) và viết hàm Lagrange của hạt dưới dạng:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - U(r) \qquad (13.2)$$

Hàm L không phụ thuộc tường minh vào φ.

Trước khi giải bài toán tích phân phương trình chuyển động ta cần lưu ý tới khái niệm toạ độ suy rộng tuần hoàn và nhận định như sau:

Bất kỳ một toạ độ suy rộng nào q_i không phải là biến tường minh của hàm Lagrange L thì được gọi là toạ độ suy rộng tuần hoàn.

Từ phương trình chuyển động Lagrange ta có đối với toạ độ suy rộng tuần hoàn biểu thức sau:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \text{(L không phụ thuộc tường minh vào } q_i\text{)}$$

Từ công thức này ta suy ra xung lượng suy rộng ứng với toạ độ tuần hoàn là một tích phân chuyển động

$$\left(P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{const}\right)$$

Chú ý tới nhận định trên, bài toán tích phân phương trình chuyển động của ta ở đây sẽ được đơn giản đi rất nhiều. Chúng ta có toạ độ φ là toạ độ tuần hoàn, do vậy

$$P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = \text{const} \tag{13.3}$$

So sánh P_φ với $M_z = M$ ở mục mômen xung lượng ta thấy chúng trùng nhau, như vậy chúng ta có định luật bảo toàn mômen.

$$M = mr^2\dot{\varphi} \tag{13.4}$$

Ta nhận thấy rằng, đối với chuyển động của hạt trên một mặt phẳng trong trường ngoài xuyên tâm, định luật bảo toàn momen xung lượng có ý nghĩa hình học như sau:

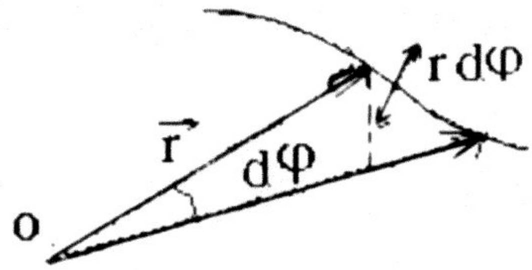
Biểu thức $\frac{1}{2}r.r.d\varphi$ chính là diện tích quạt tạo bởi hai véc tơ bán kính vô cùng gần nhau và yếu tố cung đường của quỹ đạo như hình vẽ 5.

Ký hiệu $\frac{1}{2}r.r.d\varphi \equiv df$ và viết mômen của hạt dưới dạng

$$M = mr^2\dot{\varphi} = 2m\dot{f} = \text{const} \tag{13.5}$$

Ở đó $\dot{f}$ được gọi là vận tốc quạt.

Như vậy bảo toàn mômen dẫn đến sự bảo toàn vận tốc quạt $\dot{f}$. Điều này có ý nghĩa là



Hình vẽ 5

trong cùng các khoảng thời gian như nhau, các véc tơ bán kính của hạt chuyển động sẽ vẽ ra những diện tích quạt như nhau. Đó chính là định luật thứ hai của Kepler.

Chúng ta sẽ nhận được lời giải đầy đủ của bài toán chuyển động của hạt trong trường xuyên tâm dựa vào định luật bảo toàn năng lượng và định luật bảo toàn mômen mà không cần phải viết phương trình Lagrange của hạt.

Năng lượng của hạt

$$E=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\right)+U(r) \tag{13.6}$$

Biểu diễn $\dot{\varphi}$ qua M theo công thức (12.4) ta có :

$$\dot{\varphi} = \frac{M}{r^2 m} \tag{13.7}$$

Thay (13.7) vào (13.6) ta có: (13.8)

$$E=\frac{m\dot{r}^2}{2}+\frac{M^2}{2mr^2}+U(r) \tag{13.8}$$

$$\dot{r}^2=\frac{2}{m}\left[E-U(r)\right]-\frac{M^2}{m^2r^2}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(r)\right] - \frac{M^2}{m^2 r^2}} \qquad (13.9)$$

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(r)\right] - \frac{M^2}{m^2 r^2}}} + \text{const} \qquad (13.10)$$

Viết lại công thức (13.7) dưới dạng

$$d\varphi = \frac{M}{mr^2}dt \qquad (13.11)$$

và thay dt từ công thức (13.10) ta sẽ có:

$$d\varphi = \frac{\frac{M}{mr^2}dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(r)\right] - \frac{M^2}{m^2 r^2}}}$$

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m\left[E - U(r)\right] - \frac{M^2}{r^2}}} + \text{const} \qquad (13.12)$$

Các công thức (13.10) và (13.12) cho ta lời giải trong dạng tổng quát bài toán chuyển động của hạt trong trường xuyên tâm. Công thức (13.12) cho ta mối liên hệ giữa φ và r có nghĩa là cho ta phương trình của quỹ đạo chuyển động.

Ta có mấy nhận xét sau:

Từ biểu thức $M = mr^2\dot{\varphi} = \text{const}$ ta thấy φ thay đổi theo thời gian nhưng không bao giờ đổi dấu.

Từ công thức (13.8) ta thấy rằng có thể xem bài toan của ta như chuyển động một chiều trong trường có thế năng hiệu dụng là:

$$U_{eff} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} \qquad (13.13$$

Đại lượng $\frac{M^2}{2mr^2}$ được gọi là năng lượng xuyên tâm.

Những giá trị của r mà tương ứng với chúng có đẳng thức:

$$U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} = E \qquad (13.14$$

sẽ xác định biên của miền chuyển động theo khoảng cách từ tâm. Khi (13.14) được thoả mãn thì $\dot{r}=0$, điều này không có nghĩa là sự dừng của hạt (như ta đã xét ở trong mục chuyển động một chiều thực sự), bởi vì vận tốc góc $\dot{\varphi}$ không bằng không. Đẳng thức $\dot{r}=0$ cho ta điểm quay của quỹ đạo, trong đó hàm r (t) chuyển từ sự tăng sang sự giảm hoặc ngược lại.

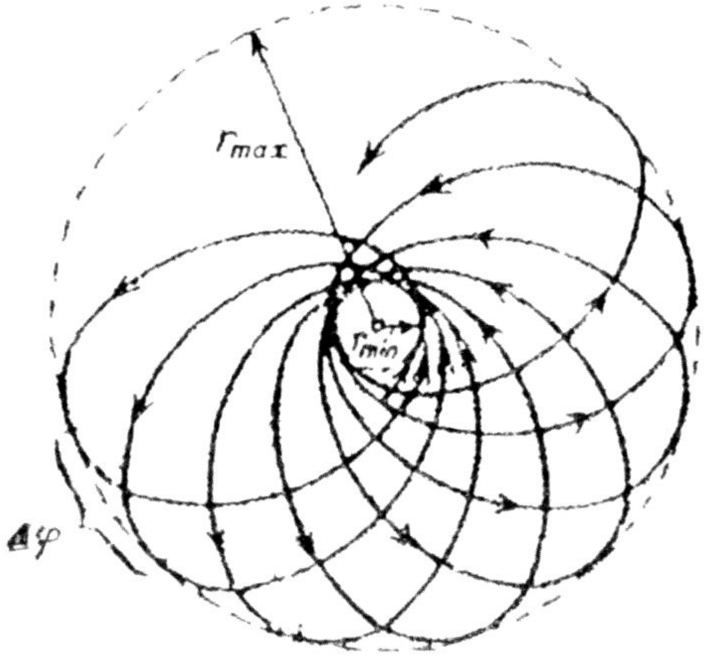
Nếu miền biến thiên khả dĩ của hàm r (t) bị chặn bởi một điều kiện $r \geq r_{min}$ thì chuyển động của hạt sẽ là chuyển động không giới hạn. Quỹ đạo của nó sẽ đến từ vô cùng và sẽ đi ra xa vô cùng.

Nếu miền biến thiên khả dĩ của hàm r (t) bị chặn bởi r_{min} và r_{max} thì chuyển động sẽ là chuyển động giới hạn và qũy đạo của nó sẽ nằm trọn vẹn trong vòng nhẫn giới hạn bởi hai đường tròn $r = r_{max}$ và $r = r_{min}$. Tuy nhiên điều đó không có nghĩa là quỹ của chuyển động phải là đường cong kín.

Trong khoảng thời gian mà r (t) biến thiên từ r_{max} đến r_{min} thì véc tơ bán kính đã quay đi một góc $\Delta\varphi$ bằng (theo (13.12)).

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\frac{M}{r^2}\,dr}{\sqrt{2m\left[E - U(r)\right] - \frac{M^2}{r^2}}} \qquad (13.15)$$

Ta thấy những trường hợp thoả mãn điều kiện kín của quỹ đạo là rất hiếm vì trong dạng bất kỳ của U (r) thì góc $\Delta\varphi$ không phải là phần hữu tỷ của 2π. Do vậy trong trường hợp tổng quát thì quỹ đạo chuyển động hữu hạn trên là không kín và có dạng như hình vẽ 6 sau:



Hình vẽ 6

Tuy hiếm nhưng tồn tại hai loại trường xuyên tâm có thế năng $U(r) \sim \frac{1}{r}$ và $U(r) \sim r^2$ mà trong đó có quỹ đạo chuyển động kín của hạt. Điều này ta sẽ thấy khi giải bài toán Kepler ở mục sau.

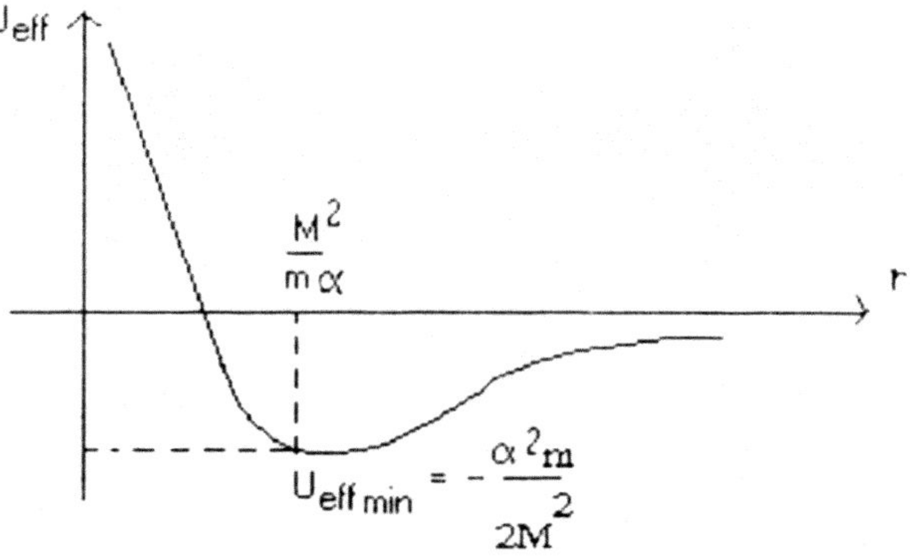
§14. BÀI TOÁN KEPLER

Một trường hợp quan trọng của trường xuyên tâm là các trường có thế năng tỷ lệ với $\frac{1}{r}$ và lực tương ứng tỷ lệ với $\frac{1}{r^2}$. Thuộc loại trường này có trường hấp dẫn Newton và trường điện tĩnh Coulomb. Trường hấp dẫn có đặc điểm là trường hút. Trường điện tĩnh có thể là trường hút và là trường đẩy.

Trước hết chúng ta xem xét trường hút có thế năng

$$U(r) = \frac{-\alpha}{r} \tag{14.1}$$

với α là hằng số dương.



Hình vẽ 7

Đồ thị của thế năng hiệu dụng $U_{eff} = \frac{-\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$ có dạng như hình vẽ 7:

Khi r -----> 0 U_{eff} -----> ∞

Khi r -----> ∞ U_{eff} -----> 0 từ phía các giá trị âm

$$U'_{eff}(r) = \frac{\alpha}{r^2} - \frac{M^2 4mr}{4m^2 r^4} = 0$$

Khi $r = \frac{M^2}{m\alpha}$, U_{eff} có cực tiểu bằng $(U_{eff})_{min} = -\frac{\alpha^2 m}{2M^2}$

Từ đồ thị của thế hiệu dụng U_{eff} ta nhận thấy rằng khi $E \geq 0$ thì chuyển động của hạt sẽ là không giới hạn còn khi $U_{eff} \leq E < 0$ thì chuyển động của hạt sẽ là chuyển động giới hạn.

Dạng của quỹ đạo chuyển động sẽ nhận được từ công thức tổng quát (13.12) ở mục trước nếu ta thay cụ thể:

$$U = -\frac{\alpha}{r};$$

$$\varphi = \int \frac{\left(\frac{M}{r^2}\right)dr}{\sqrt{2m\left[E + \frac{\alpha}{r}\right] - \frac{M^2}{r^2}}} + \text{const} \tag{14.2}$$

Ta ký hiệu $b^2 = 2mE + \left(\frac{m\alpha}{M}\right)^2$ và $u = \frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}$ thì ta sẽ có:

$$\varphi = -\int \frac{du}{\sqrt{b^2 - u^2}} + \text{const}$$

$$\varphi = \arccos\frac{u}{b} + \text{const} \tag{14.3}$$

$$\varphi = \arccos\frac{\left(\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}\right)}{\sqrt{2mE + \left(\frac{m\alpha}{M}\right)^2}} + \text{const}$$

Chúng ta chọn gốc tính góc φ sao cho const bằng không và đưa vào ký hiệu:

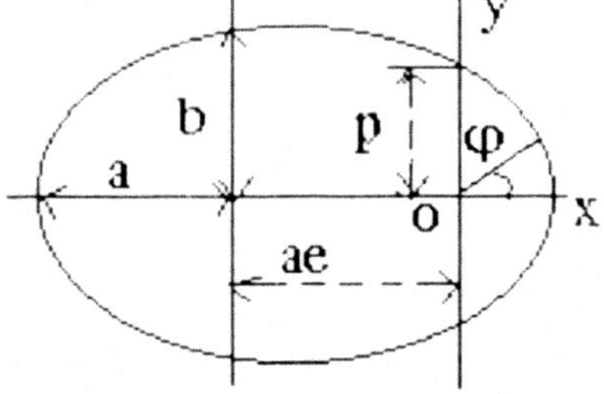
$$p = \frac{M^2}{m\alpha}; \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}} \tag{14.4}$$

thì từ công thức (14.3) ta sẽ nhận được kết quả sau:

$$\cos\varphi = \frac{\frac{M^2}{r} - m\alpha}{\sqrt{2mEM^2 + m^2\alpha^2}} = \frac{\frac{p}{r} - 1}{e} \tag{14.5}$$

$$\frac{p}{r} = e\cos\varphi + 1$$

Phương trình (14.5) là phương trình của tiết diện hình elíp với tiêu điểm ở gốc toạ độ, còn P và e là thông số và tâm sai của quỹ đạo.



Hình vẽ 8

Nửa trục lớn $a = \dfrac{p}{1-e^2} = \dfrac{\alpha}{2|E|}$ (14.6)

Nửa trục nhỏ $b = \dfrac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \dfrac{M}{\sqrt{2m|E|}}$ (14.7)

Từ công thức (14.4) ta nhận thấy khi E < 0 thì e < 1, điều đó có nghĩa là quỹ đạo sẽ là elíp như hình vẽ 8 và chuyển động là giới hạn, điều này thoả mãn những khẳng định ở đầu mục. Khi $E = (U_{eff})_{min} = -\dfrac{m\alpha^2}{2M^2}$ thì e = 0 có nghĩa là elíp sẽ biến thành đường tròn.

Khoảng cách lớn nhất và khoảng cách nhỏ nhất đến tâm trường (tiêu điểm của elíp) bằng:

$$r_{min} = \frac{p}{1+e\cos 0} = \frac{p}{1+e} = a(1-e) \quad (14.8)$$

$$r_{max} = \frac{p}{1+e\cos\pi} = \frac{p}{1-e} = a(1+e) \qquad (14.9)$$

Để xác định chu kỳ chuyển động T theo quỹ đạo elíp, chúng ta sử dụng định luật bảo toàn mômen xung lượng trong dạng bảo toàn vận tốc quạt:

$$M = 2m\dot{f} = const$$

Tích phân biểu thức này theo thời gian từ 0 đến T ta có $2mf = MT$ ở đó f là diện tích của quỹ đạo, đối với hình elíp thì $f = \pi ab$ và ta suy ra chu kỳ chuyển động theo quỹ đạo elíp bằng:

$$T = \frac{2m\pi ab}{M} = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{\alpha}} \qquad (14.10)$$

hay là $$T = \frac{2m\pi}{M}\frac{\alpha}{2|E|}\frac{M}{\sqrt{2m|E|}} = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}} \qquad (14.11)$$

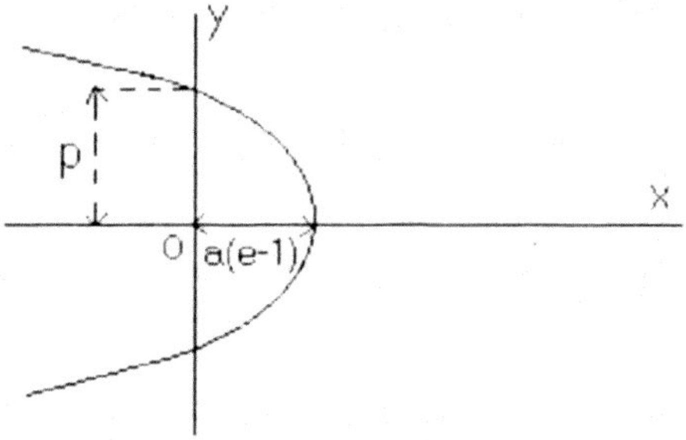
Từ (14.11) và (14.10) ta thấy chu kỳ chuyển động chỉ phụ thuộc vào năng lượng của hạt và bình phương của chu kỳ T^2 tỷ lệ với lập phương kích thước của quỹ đạo (a^3). Đó chính là định luật thứ ba của Kepler.

Còn khi $E \geq 0$ chuyển động sẽ không giới hạn.

Nếu $E > 0$ thì tâm sai $e = \sqrt{1 + \frac{2E\ M^2}{m\alpha^2}} > 1$ có nghĩa là quỹ đạo sẽ là Hypecbol uốn quanh tiêu điểm (tâm của trường) như hình vẽ 9 sau:

Khoảng cách gần nhất đến tâm trường sẽ là:

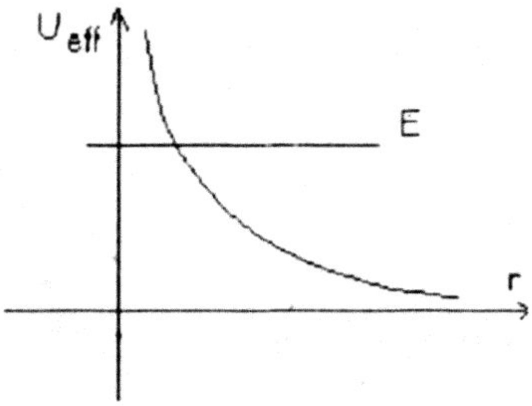
$$r_{min} = \frac{p}{1+e\cos 0} = \frac{p}{1+e} = a(e-1)$$



Hình vẽ 9

Ở đó $a = \dfrac{p}{e^2-1} = \dfrac{\alpha}{2E}$ là bán trục của Hypecbol.

Nếu E = 0 thì tâm sai e = 1, hạt sẽ chuyển động theo quỹ đạo là Parabol với khoảng cách ngắn nhất là:



$$r_{min} = \frac{p}{1+1} = \frac{p}{2}$$

Hình vẽ 10

Bây giờ chúng ta chuyển sang xem xét trường đẩy có thế năng $U = \dfrac{\alpha}{r} (\alpha > 0)$. Trong trường hợp này

$$U_{eff} = \frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \tag{14.12}$$

U_{eff} sẽ giảm dần đơn điệu từ ∞ đến 0 khi r tiến từ 0 tới ∞ (hình vẽ 10)

Năng lượng của hạt chỉ có thể dương và như vậy chuyển động ở đây là không giới hạn. Lặp lại tất cả các tính toán tương tự như trên, ta sẽ thấy trong trường hợp trường đẩy, quỹ đạo chuyển động sẽ là Hypecbol nếu E > 0.

$\frac{p}{r} = -1 + e\cos\varphi$ ở đó p và e được xác như công thức (14.4) và

$$r_{min} = \frac{p}{-1+e} = a(e+1)$$

§15. ĐỒNG DẠNG CƠ HỌC

Từ dạng của phương trình chuyển động Lagrange ta nhận thấy rằng, khi nhân hàm Lagrange với một số nào đó thì phương trình chuyển động Lagrange sẽ không thay đổi.

Nhận xét này cho chúng ta khả năng trong những trường hợp cụ thể thu được các kết luận quan trọng mà không cần phải giải phương trình chuyển động. Đó là những trường hợp, khi thế năng có dạng là hàm đồng nhất bậc K của toạ độ:

$$U(\alpha r_1, \alpha r_2, \dots \alpha r_n) = \alpha^K U(r_1, r_2, \dots r_n) \qquad (15.1)$$

Ở đó α là hằng số và K là bậc đồng nhất của hàm.

Nếu ta làm phép biến đổi:

$$r_a \longrightarrow r'_a = \alpha r_a \qquad (15.2)$$
$$t \longrightarrow t' = \beta t$$

thì khi đó vận tốc $v_a = \frac{dr_a}{dt}$ sẽ thay đổi đi $\frac{\alpha}{\beta}$ lần và động năng của hạt sẽ thay đổi đi $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ lần.

Từ công thức (15.1) ta thấy thế năng U (r_1 . r_2 . ... r_n) nhân với một số α^K. Do vậy nếu ta ràng buộc α và β bởi điều kiện

$$\alpha^K = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \text{ hay } \beta = \alpha^{1-\frac{K}{2}} \tag{15.3}$$

thì động năng cũng nhân thêm với một số như thế năng và như vậy khi (15.1) và (15.3) được thoả mãn thì phương trình chuyển động Lagrange, như ta đã nhận xét ở trên, sẽ không thay đổi.

Ý nghĩa của phép biến đổi (15.2): sự thay đổi tất cả các toạ độ của các hạt cùng một số lần như nhau tương đương với việc chuyển từ quỹ đạo chuyển động này sang quỹ đạo chuyển động khác, mà về mặt hình học, chúng đồng dạng với nhau và khác nhau chỉ về kích thước.

Từ những nhận xét ở trên ta đi đến kết luận: Nếu thế năng là một hàm đồng nhất bậc K của toạ độ thì phương trình chuyển động sẽ cho ta các quỹ đạo đồng dạng, trong đó tất cả các thời điểm của chuyển động thoả mãn điều kiện

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-\frac{K}{2}} \tag{15.4}$$

ở đó l'/l là tỷ số các kích thước tuyến tính của hai quỹ đạo.

Các đại lượng cơ học khác ở những điểm tương ứng của quỹ đạo, tương ứng với các thời điểm, thoả mãn các tỷ số sau:

$$\frac{v'}{v} = \frac{\alpha}{\beta} = \alpha^{\frac{K}{2}} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{K}{2}}$$

$$\frac{E'}{E} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \alpha^K = \left(\frac{l'}{l}\right)^K \tag{15.5}$$

$$\frac{M'}{M} = \alpha.\frac{\alpha}{\beta} = \alpha^{1+\frac{K}{2}} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1+\frac{K}{2}}$$

Bây giờ ta xét một ví dụ cụ thể, đó là chuyển động trong trường thế xuyên tâm $U(r) \sim \frac{1}{r}$.

Ta nhận thấy ngay $U(\alpha r) \sim \frac{1}{\alpha r} = \alpha^{-1} U(r)$ (15.6)

và như vậy thế năng xuyên tâm này là hàm đồng nhất bậc K = - 1 của toạ độ. Sử dụng các kết quả ở trên ta có ngay

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-\frac{K}{2}} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1+\frac{1}{2}} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{3/2} \tag{15.7}$$

Đây chính là định luật thứ ba của Kepler: Bình phương thời gian chuyển động theo quỹ đạo tỷ lệ với lập phương kích thước của quỹ đạo.

§16. SỰ VA CHẠM ĐÀN HỒI CỦA HAI HẠT

Sự va chạm, trong đó các trạng thái bên trong của các hạt không thay đổi, được gọi là va chạm đàn hồi. Do tính chất này, chúng ta có thể sử dụng định luật bảo toàn năng lượng cho va chạm đàn hồi mà không cần phải chú ý đến năng lượng bên trong của các hạt.

Khi va chạm được nghiên cứu, quan sát trong phòng thí nghiệm thì một trong số các hạt thường nằm yên trước khi va chạm - đó là hạt dùng làm bia.

Hệ quy chiếu gắn liền với bia (và với phòng thí nghiệm) được gọi là hệ quy chiếu phòng thí nghiệm. Trong hệ quy chiếu này một trong hai hạt (giả sử là hạt có khối lượng m_2) trước khi va chạm là đứng yên ($v_2 = 0$), còn hạt kia (hạt có khối lượng m_1) chuyển động với vận tốc v_1.

Tuy nhiên bức tranh va chạm của hai hạt sẽ đơn giản hơn nhiều nếu ta sử dụng hệ quy chiếu khác, trong đó tâm quán tính của hai hạt đứng yên (hệ quy chiếu này được gọi là hệ quy chiếu tâm quán tính). Các đại lượng trong hệ quy chiếu này quy ước viết thêm chỉ số 0.

Vận tốc của các hạt trong hệ quy chiếu tâm quán tính liên hệ với vận tốc của các hạt này trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm bởi các biểu thức sau: (lấy đạo hàm theo thời gian công thức (12.4)

$$\vec{v}_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v} \;;\; \vec{v}_{20} = \frac{-m_1}{m_1 + m_2}\vec{v} \qquad (16.1)$$

Ở đó

$$\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1 - 0 = \vec{v}_1 \qquad (16.2)$$

Từ (16.1) ta thấy $\vec{p}_{10} = m_1\vec{v}_{10} = -m_2\vec{v}_{20} = -\vec{p}_{20}$

Sử dụng định luật bảo toàn xung lượng ta suy ra các xung lượng của hai hạt sau khi va chạm sẽ bằng nhau về giá trị và ngược chiều nhau.

Còn từ định luật bảo toàn năng lượng ta suy ra các giá trị tuyệt đối của các xung lượng là không đổi sau khi va chạm.

Như vậy, kết quả của sự va chạm trong hệ quy chiếu tâm quán tính dẫn đến sự quay của các vận tốc của hai hạt, hai vận tốc luôn có giá trị tuyệt đối không đổi và có chiều ngược nhau.

Nếu ta ký hiệu $\vec{n}_0$ là véc tơ đơn vị hướng theo hướng của vận tốc hạt thứ nhất sau khi va chạm thì vận tốc của hai hạt sau khi va chạm sẽ là:

$$\vec{v}'_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v\,\vec{n}_0 \;;\; \vec{v}'_{20} = \frac{-m_1}{m_1 + m_2} v\,\vec{n}_0 \qquad (16.3)$$

Để quay lại hệ quy chiếu phòng thí nghiệm cần phải thêm vào vận tốc $\vec{V}$ của tâm quán tính. Như vậy, vận tốc của hai hạt trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm sau khi va chạm sẽ là:

$$\vec{v}'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v\vec{n}_0 + \vec{V} \; ; \; \vec{v}'_2 = \frac{-m_1}{m_1 + m_2} v\vec{n}_0 + \vec{V} \quad (16.4)$$

Ở đó

$$\vec{V} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\vec{v}_1 + 0}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\vec{v}}{m_1 + m_2} \quad (16.5)$$

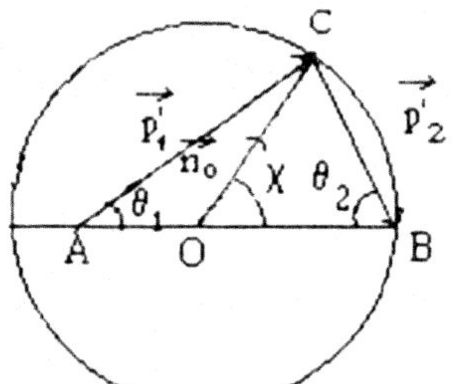
Xung lượng của hai hạt sau khi va chạm trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm sẽ là:

$$\vec{p}_1' = mv\vec{n}_0 + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{p}_1 \quad (16.6)$$

$$\vec{p}_2' = -mv\vec{n}_0 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{p}_1 \quad (16.7)$$

Ở đó $m = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ khối lượng rút gọn

Để thấy ý nghĩa hình học của va chạm, ta xây dựng vòng tròn bán kính *mv*, véc tơ đơn vị $\vec{n}_0$ hướng theo véc tơ $\overrightarrow{OC}$ (như hình vẽ 11):



Hình vẽ 11a

a) Trường hợp $m_1 < m_2$:

$$\overrightarrow{OC} = mv\vec{n}_0$$

$$\overrightarrow{AO} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{p}_1$$

$$\left|\overrightarrow{AO}\right| < \left|\overrightarrow{OC}\right|$$

$$\overrightarrow{OB} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{p}_1 = m\vec{v}$$

$\left|\overrightarrow{OB}\right|$ trùng với độ dài bán kính. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \vec{P}_1$

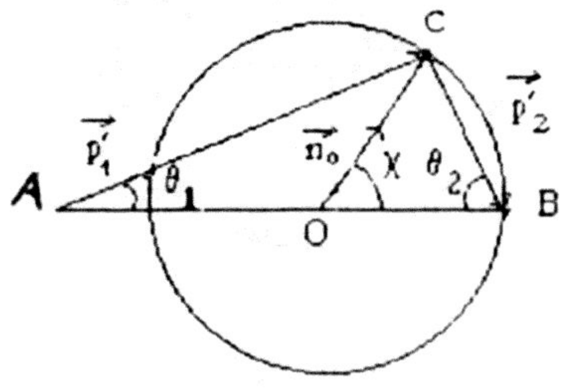
b) Trường hợp $m_1 > m_2$

$$\left|\overrightarrow{AO}\right| > \left|\overrightarrow{OC}\right|$$

Độ dài của $\overrightarrow{AO}$ lớn hơn bán kính.

Trên hình vẽ các góc θ_1 và θ_2 là các góc lệch của hai hạt sau khi va chạm so với hướng tiến tới va chạm (so với hướng véc tơ $\vec{P}_1$). Góc χ (góc cho hướng của véc tơ đơn vị $\vec{n}_0$) là góc quay của hạt thứ nhất trong hệ quy chiếu tâm quán tính.

Từ hình vẽ trên ta thấy θ_1 và θ_2 có thể biểu diễn qua góc χ như sau:



Hình vẽ 11b

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{m v \sin\chi}{\frac{m_1}{m_1 + m_2} p_1 + m v \cos\chi} = \frac{m_2 \sin\chi}{m_1 + m_2 \cos\chi} \qquad (16.8)$$

$$\theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2} \qquad (16.9)$$

Giá trị tuyệt đối của các vận tốc của hai hạt sau khi va chạm có thể biểu diễn qua góc χ như sau:

$$v_1' = \frac{\left|\vec{p}_1'\right|}{m_1} = \frac{\sqrt{m_2^2 + m_1^2 + 2m_1 m_2 \cos\chi}}{m_1 + m_2} v \qquad (16.10)$$

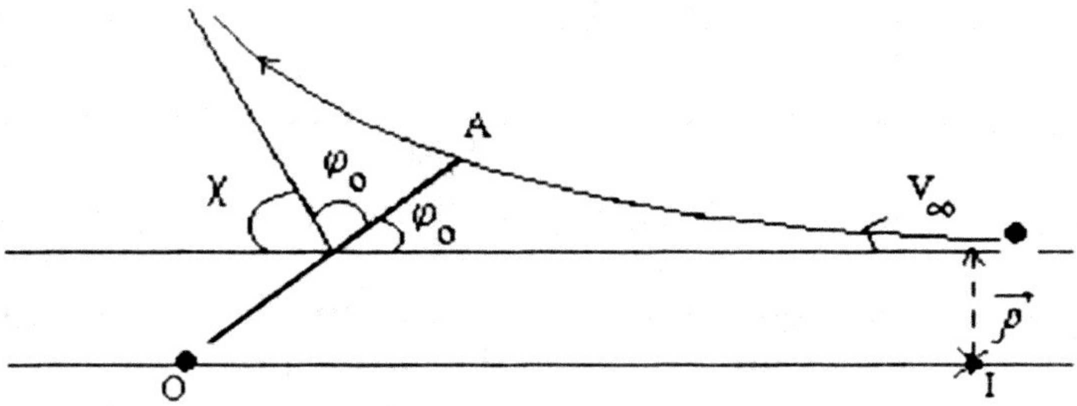
$$v_2' = \frac{\left|\vec{p}_2'\right|}{m_2} = \frac{1}{m_2} 2\left|\overrightarrow{OC}\right| \sin\frac{\chi}{2} = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} \sin\frac{\chi}{2} \qquad (16.11)$$

Tổng hai góc $\theta_1 + \theta_2$ là góc bay tách ra của hai hạt sau khi va chạm. Ta thấy rằng khi $m_1 < m_2$ thì $\theta_1 + \theta_2 > \frac{\pi}{2}$, còn khi $m_1 > m_2$ thì $\theta_1 + \theta_2 < \frac{\pi}{2}$.

§17. TÁN XẠ CỦA CÁC HẠT

Như chúng ta đã biết ở mục trước, muốn xác định đầy đủ kết quả của sự va chạm của hai hạt (xác định góc χ) ta phải giải phương trình chuyển động với quy luật cụ thể của tương tác giữa hai hạt đó.

Tương ứng với quy tắc chung, chúng ta đi xét một bài toán tương đương về sự lệch của một hạt có khối lượng m trong trường xuyên tâm U(r) của một tâm bất kỳ nằm ở tâm quán tính của các hạt. Quỹ đạo của hạt chuyển động trong trường xuyên tâm, như chúng ta đã biết ở chương trước, đối xứng với đường thẳng nối từ tâm trường đến điểm quỹ đạo gần nhất. Do vậy hai đường tiệm cận của quỹ đạo sẽ cắt đường đối xứng kể trên và tạo thành những góc như nhau với đường đó.



Hình vẽ 12

Nếu ta ký hiệu các góc đó là φ_0 thì góc lệch của hạt χ khi nó bay qua tâm của trường sẽ là:

$$\chi = |\pi - 2\varphi_0| \tag{17.1}$$

Ở đó góc φ_0 được xác định bởi công thức sau:

$$\varphi_0 = \int_{r_0}^{\infty} \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m[E-U(r)]-\frac{M^2}{r^2}}} \tag{17.2}$$

r_0 là nghiệm của phương trình $2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2} = 0$

Trong chuyển động không giới hạn, để tiện lợi thường người ta thay thế hai đại lượng bảo toàn E và M bởi vận tốc của hạt ở xa vô cùng v_∞ và khoảng ngắm ρ.

Khoảng ngắm ρ là khoảng cách của hạt đến tâm O khi mà hạt bay qua tâm trong trường hợp không có trường lực. Khoảng ngắm đồng thời cũng là tay đòn của mômen khi hạt ở xa vô cùng.

Năng lượng E và mômen M có thể biểu diễn qua v_∞ và ρ như sau:

$$E = \frac{m v_\infty^2}{2} \text{ (thế năng của trường ở xa vô cùng } U(\infty) = 0) \quad (17.3)$$

$$\vec{M} = [\vec{r}_\infty \times \vec{p}_\infty] = \left[\left(\overrightarrow{OI} + \vec{\rho}\right) \times \vec{p}_\infty\right] =$$
$$= \left[\overrightarrow{OI} \times \overrightarrow{p_\infty}\right] + [\vec{\rho} \times \vec{p}_\infty]$$

Vì $\overrightarrow{OI} \parallel \vec{p}_\infty$ và $\vec{\rho} \perp \vec{p}_\infty$ cho nên ta có:

$$M = m \rho v_\infty \quad (17.4)$$

Thay (17.3) (17.4) vào công thức (17.2) ta sẽ nhận được kết quả sau:

$$\varphi_0 = \int_{r_0}^{\infty} \frac{\rho \dfrac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{\rho^2}{r^2} - \dfrac{2U(r)}{m v_\infty^2}}} \quad (17.5)$$

và khi đó góc χ cũng sẽ được xác định qua ρ. Nói cách khác góc χ là hàm của khoảng ngắm ρ.

Trong ứng dụng, chúng ta thường gặp trường hợp không phải là sự lệch của một hạt, mà là tán xạ của một chùm hạt giống nhau khi chúng tiến tới tâm tán xạ với cùng một vận tốc v_∞. Các hạt khác nhau trong chùm có khoảng ngắm khác nhau, do vậy chúng tán xạ dưới các góc χ khác nhau. Để mô tả đặc trưng cho quá trình tán xạ của chùm hạt chúng ta đưa vào tỷ số:

$$d\sigma = \frac{dN}{n} \tag{17.6}$$

Ở đó dN là số hạt tán xạ trong một đơn vị thời gian dưới góc nằm trong khoảng χ và $\chi + d\chi$.

n là số hạt trong một đơn vị thời gian đi qua một đơn vị diện tích của tiết diện ngang vuông góc với hướng bay của chùm hạt.

Tỷ số (17.6) có thứ nguyên là diện tích và được gọi là tiết diện hiệu dụng của tán xạ.

Chúng ta đã biết χ và ρ có mối liên hệ tương hỗ ($\chi = \chi(\rho)$ và ngược lại $\rho = \rho(\chi)$) và χ là hàm giảm đơn điệu của ρ, do vậy chỉ những hạt có khoảng ngắm nằm trong khoảng $\rho(\chi)$ và $\rho(\chi) + d\rho(\chi)$ sẽ tán xạ dưới góc nằm trong khoảng χ và $\chi + d\chi$. Số các hạt này sẽ bằng tích của n với diện tích vành khuyên được giới hạn bởi hai đường tròn có bán kính là ρ và $\rho + d\rho$, có nghĩa là:

$$dN = 2\pi\rho\, d\rho.\, n \text{ và} \tag{17.7}$$

$$d\sigma = 2\pi\rho\, d\rho \tag{17.8}$$

Để tìm sự phụ thuộc của tiết diện hiệu dụng của tán xạ vào góc tán xạ χ, chúng ta chỉ cần viết lại (17.8) dưới dạng sau:

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi)\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right| d\chi \tag{17.9}$$

Ở đây ta viết giá trị tuyệt đối vì đạo hàm $\dfrac{d\rho(\chi)}{d\chi}$ có thể là giá trị âm.

Thường thường $d\sigma$ hay được viết qua góc cầu $d\Omega$.

Ta biết góc cầu $d\Omega$ giữa hai hình nón với góc mở χ và $\chi + d\chi$ là:

$d\Omega = 2\pi \sin\chi\, d\chi$ cho nên ta có:

$$d\chi = \frac{d\Omega}{2\pi \sin\chi} \tag{17.10}$$

thay (17.10) vào (17.9) ta có biểu thức sau.

$$d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin\chi}\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right| d\Omega \tag{17.11}$$

§18. CÔNG THỨC RUTHERFORD

Một trong những ứng dụng quan trọng của các công thức tìm được ở mục trước là sự tán xạ của các hạt tích điện trong trường điện tĩnh Coulomb có thế năng $U = \frac{\alpha}{r}$.

Thay thế năng $U = \frac{\alpha}{r}$ vào công thức (17.5) và tính tích phân ta có:

$$\varphi_0 = \arccos\left(\frac{\frac{\alpha}{m v_\infty^2 \rho}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{m v_\infty^2 \rho}\right)^2}}\right) \tag{18.1}$$

Từ (18.1) suy ra

$$\cos^2\varphi_0 = \frac{\left(\frac{\alpha}{m v_\infty^2 \rho}\right)^2}{1 + \left(\frac{\alpha}{m v_\infty^2 \rho}\right)^2}$$ và ta sẽ tính được:

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2 \, tg^2 \varphi_0}{m^2 v_\infty^4} \tag{18.2}$$

Thay $\varphi_0 = \frac{\pi - \chi}{2}$ vào biểu thức (18.2) ta có:

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\chi}{2} \tag{18.3}$$

Lấy đạo hàm công thức (18.3) theo χ và thay vào (17.9) hay (17.11) ta thu được công thức Rutherford:

$$d\sigma = \pi \left(\frac{\alpha}{m v_\infty^2} \right)^2 \frac{\cos \frac{\chi}{2}}{\sin^3 \frac{\chi}{2}} d\chi \text{ hay} \tag{18.4}$$

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2 m v_\infty^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\chi}{2}} \tag{18.5}$$

Ta nhận thấy rằng tiết diện hiệu dụng không phụ thuộc vào dấu của α, do vậy kết quả tìm được sẽ như nhau cho trường hợp trường hút cũng như trường đẩy.

Sử dụng công thức (16.9) chúng ta có thể chuyển qua hệ quy chiếu phòng thí nghiệm. Đối với hạt có khối lượng m_2 lúc đầu đứng yên thì theo (16.9) ta có $\chi = \pi - 2\theta_2$. Đặt biểu thức của χ này vào (18.4) ta thu được:

$$d\sigma_2 = 2\pi \left(\frac{\alpha}{m v_\infty^2} \right)^2 \frac{\sin \theta_2}{\cos^3 \theta_2} d\theta_2 = \left(\frac{\alpha}{m v_\infty^2} \right)^2 \frac{d\Omega_2}{\cos^3 \theta_2} \tag{18.6}$$

Ở đó $d\Omega_2 = 2\pi \sin\theta_2 \, d\theta_2$

Đối với hạt có khối lượng m_1 bay tới tâm tán xạ thì công thức biến đổi để chuyển từ $d\sigma$ về $d\sigma_1$ trong trường hợp tổng quát rất phức tạp. Ta chỉ xét hai trường hợp đặc biệt sau:

Nếu $m_1 = m_2$ thì $m = \frac{m_1}{2}$ và theo kết quả của §16 ta suy ra kết quả đối với trường hợp hai hạt có khối lượng như nhau là $\chi = 2\theta_1$. Thay $\chi = 2\theta_1$ vào (18.4) ta được:

$$d\sigma_1 = 2\pi\left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \frac{\cos\theta_1}{\sin^3\theta_1} d\theta_1 = \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \frac{\cos\theta_1}{\sin^4\theta_1} d\Omega_1 \qquad (18.7)$$

Ở đó $d\Omega_1 = 2\pi \sin\theta_1\, d\theta_1$. $E_1 = \frac{m_1 v_\infty^2}{2}$

Nếu hai hạt không những có khối lượng bằng nhau mà còn là hai hạt đồng nhất thì không thể phân biệt được hạt nào là hạt bị tán xạ, hạt nào là hạt tán xạ. Khi đó, tiết diện hiệu dụng chung của cả hai hạt được xác định bằng cách cộng các biểu thức $d\sigma_1$ và $d\sigma_2$ từ (18.6) và (18.7). Thêm vào đó thay θ_1 và θ_2 bằng giá trị chung θ cho cả hai hạt:

$$\begin{aligned} d\sigma &= d\sigma_1 + d\sigma_2 = \\ &= \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \left(\frac{1}{\sin^4\theta} + \frac{1}{\cos^4\theta}\right) \cos\theta\, d\Omega \end{aligned} \qquad (18.8)$$

Nếu $m_2 >> m_1$ thì $\alpha \approx \theta_1$ và $m \approx m_1$. do vậy

$$d\sigma_1 = \left(\frac{\alpha}{4E_1}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\theta_1}{2}} \qquad (18.9)$$

Chương 4

CÁC DAO ĐỘNG NHỎ

§19. CÁC DAO ĐỘNG TỰ DO MỘT CHIỀU

Các dao động của hệ cơ học quanh vị trí cân bằng của mình thì được gọi là các dao động nhỏ.

Trong mục này chúng ta xét dao động của hệ có bậc tự do là một. Vị trí cân bằng của hệ là vị trí mà ở đó thế năng của hệ U(q) có giá trị tối thiểu. Sự lệch khỏi vị trí cân bằng dẫn đến sự xuất hiện lực $-\dfrac{dU}{dq}$ có hướng đưa hệ quay ngược lại. Ta ký hiệu vị trí cân bằng là q_0.

Khi có sự lệch nhỏ khỏi vị trí cân bằng, ta khai triển thế năng U(q) quanh vị trí cân bằng q_0 và hạn chế ở gần đúng bậc hai:

$$U(q) \approx U(q_0) + U'(q_0)(q - q_0) + \frac{U''(q_0)}{2}(q - q_0)^2 \qquad (19.1)$$

Vì ở vị trí cân bằng q_0 thế năng có giá trị cực tiểu, cho nên ta được:

$$U(q) \approx U(q_0) + \frac{k}{2}(q - q_0)^2 \qquad (19.2)$$

Ở đó $k \equiv U''(q_0) > 0$

Nếu ta coi $U_{min} = U(q_0) = 0$ và đưa vào ký hiệu độ lệch của toạ độ khỏi vị trí cân bằng $x = q - q_0$ thì:

$$U(x) = \frac{kx^2}{2} \quad (19.3)$$

Động năng của hệ có bậc tự do là một là:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad (19.4)$$

Hàm Lagrange của hệ dao động nhỏ là:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{kx^2}{2} \quad (19.5)$$

Tương ứng với hàm Lagrange (19.5) có phương trình chuyển động sau:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad \text{hay}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (19.7)$$

Ở đó $\omega^2 \equiv \dfrac{k}{m}$

Hai nghiệm riêng độc lập của phương trình (19.7) là $\cos\omega t$ và $\sin\omega t$. Như vậy nghiệm tổng quát của phương trình (19.7) là:

$$x = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t \quad (19.8)$$

hoặc có thể viết dưới dạng sau:

$$x = a\cos(\omega t + \alpha) \quad (19.9)$$

Viết lại dưới dạng $x = a(\cos\omega t\cos\alpha - \sin\omega t\sin\alpha)$ và so sánh với (19.8) ta sẽ có mối liên hệ giữa a, α và c_1, c_2 như sau:

$$c_1 = a\cos\alpha$$

$$c_2 = -a\sin\alpha$$

Từ hai đẳng thức trên ta suy ra:

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \qquad (19.10)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{c_2}{c_1} \qquad (19.11)$$

Như vậy, ở quanh vị trí cân bằng hệ đã thực hiện một dao động điều hoà. Hệ số a ở công thức (19.9) được gọi là biên độ của dao động. Biến của cosin được gọi là pha của dao động; α là gía trị ban đầu của pha, nó phụ thuộc vào việc chọn gốc đo thời gian, ω được gọi là tần số của dao động. Tần số là đại lượng đặc trưng cơ bản của dao động, nó không phụ thuộc vào các điều kiện ban đầu của chuyển động.

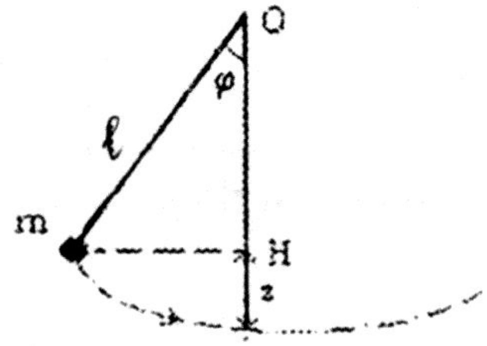
Năng lượng của hệ dao động nhỏ là:

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2\right) =$$
$$= \frac{m}{2}\left[a^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \alpha) + \omega^2 a^2 \cos^2(\omega t + \alpha)\right] = \frac{m}{2}a^2\omega^2 \qquad (19.12)$$

Năng lượng của hệ dao động nhỏ tỷ lệ với bình phương của biên độ dao động.

§20. CON LẮC ĐƠN

Con lắc đơn phẳng là một chất điểm có khối lượng m được treo tại một điểm trên bản lề phẳng bởi một sợi dây không có khối lượng với chiều dài là l như hình vẽ 13.



Hình vẽ 13

Con lắc đơn có bậc tự do là một. Ta chọn toạ độ suy rộng là góc lệch của con lắc khỏi vị trí thẳng đứng φ.

Động năng của chất điểm là:

$$T = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2 \qquad (20.1)$$

Thế năng của chất điểm là:

$$U = m\,g\,z \qquad (20.2)$$

Ở đó g là gia tốc rơi tự do. Lực tác động lên con lắc là trọng lực - mg. Dấu trừ nói lên là lực có hướng xuống dưới.

z được biểu diễn qua góc φ như sau:

$$z = l - OH = l - l\cos\varphi = l\,(1 - \cos\varphi) \qquad (20.3)$$

hàm Lagrange của con lắc đơn là:

$$L = T - U = \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2 - mgl(1 - \cos\varphi) \qquad (20.4)$$

và năng lượng của nó là:

$$E = T + U = \frac{m}{2}l\dot{\varphi}^2 + m\,g\,l(1 - \cos\varphi) \qquad (20.5)$$

Giá trị năng lượng được xác định từ điều kiện ban đầu. Giả sử ban đầu con lắc lệch đi một góc φ_0 và được thả không có vận tốc ban đầu ($v_0 = 0 \Rightarrow \dot{\varphi}_0 = 0$). Năng lượng của con lắc đơn khi đó bằng:

$$E = m\,g\,l\,(1 - \cos\varphi_0) \qquad (20.6)$$

Từ định luật bảo toàn năng lượng ta suy ra phương trình sau:

$$E = mgl(1 - \cos\varphi_0) = \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos\varphi_0) \qquad (20.7)$$

Giải phương trình vi phân bậc nhất (20.7) ta sẽ nhận được:

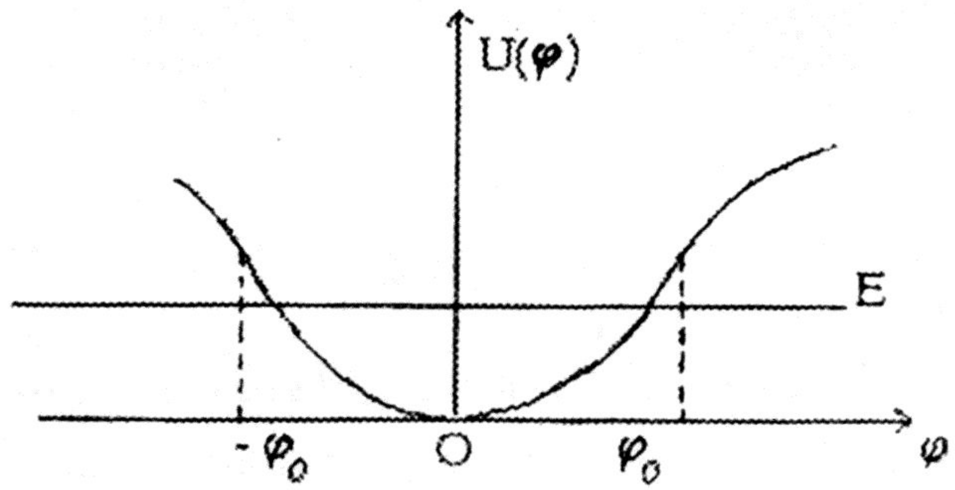
$$\frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 = mgl(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0} \tag{20.8}$$

$$t = -\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}}$$

Dấu trừ được đặt vào ở trước tích phân vì khi bắt đầu chuyển động thì góc φ giảm.

Từ công thức (20.8) ta thấy một điều quan trọng là: quy luật dao động của con lắc đơn chỉ phụ thuộc vào tỷ số l/g. Do vậy nhờ con lắc đơn ta có thể đo rất chính xác gia tốc của các vật rơi tự do g.



Hình vẽ 14

Bây giờ chúng ta xét dao động nhỏ của con lắc đơn. Đồ thị của thế năng của con lắc đơn được mô ta bởi hình vẽ 14.

$$U(\varphi) = m\,g\,l\,(1 - \cos\varphi)$$

Việc nghiên cứu đơn giản bằng đồ thị chứng tỏ rằng chuyển động của con lắc đơn là tuần hoàn.

Nếu E < U(φ) thì chuyển động của con lắc xảy ra giữa các điểm $-\varphi_0$ và φ_0 sẽ tuần hoàn theo thời gian.

Nếu con lắc dao động nhỏ (khi φ_0 rất nhỏ) thì bài toán trở nên đơn giản. Khi đó có thể thay cos φ_0 bằng khai triển của nó thành chuỗi Taylor và giới hạn ở gần đúng bậc hai.

$$\cos\varphi_0 = 1 - \frac{\varphi_0^2}{2} \tag{20.9}$$

Vì $|\varphi| < |\varphi_0|$ cho nên ta cũng được:

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} \tag{20.10}$$

Thay (20.9), (20.10) vào (20.8) ta được:

$$t = -\int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{\varphi_0^2 - \varphi^2}{2}}} = -\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{\varphi_0^2 - \varphi^2}{2}}} = \tag{20.11}$$

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \arccos\frac{\varphi}{\varphi_0}$$

Từ (20.11) ta suy ra: $\sqrt{\frac{g}{l}}\, t = \arccos\frac{\varphi}{\varphi_0}$

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\, t$$

$$\varphi = \varphi_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\, t \tag{20.12}$$

Như vậy ta nhận được φ là một hàm tuần hoàn. Từ công thức (20.12) ta thấy, sau một khoảng thời gian $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ góc lệch φ lại trở lại giá trị ban đầu φ_0. Khoảng thời gian τ đó được gọi là chu kỳ của dao động. Đại lượng $\sqrt{\frac{g}{l}} \equiv \omega$ được gọi là tần số của dao động. Chu kỳ dao động liên hệ với tần số bởi hệ thức $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$. Ta nhận thấy một điều quan trọng là τ và ω không phụ thuộc vào φ_0 (không phụ thuộc vào điều kiện ban đầu).

§21. DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC

Ta xem xét dao động của hệ chịu tác động của một trường ngoài biến thiên. Dao động như vậy được gọi là dao động cưỡng bức.

Giả sử trường ngoài đủ yếu để ta có dao động nhỏ. Trong trường hợp này cùng với thế năng riêng của hệ $\frac{1}{2}Kx^2$, hệ còn có thế năng U_e (x,t) bổ xung do tác động của trường ngoài. Ta đi phân tích thế năng bổ xung U_e quanh điểm $x = 0$ và hạn chế ở gần đúng bậc nhất ta có:

$$U_e(x,t) \approx U_e(0,t) + \left.\frac{\partial U_e(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} x \qquad (21.1)$$

Số hạng thứ nhất của (21.1) chỉ là hàm của thời gian cho nên có thể bỏ đi khi viết hàm Lagrange vì, như chúng ta đã biết, hàm Lagrange được xác định với độ chính xác sai khác một lượng là đạo hàm toàn phần theo thời gian của một hàm f bất kỳ chỉ phụ thuộc vào toạ độ và thời gian.

Trong số hạng thứ hai của (21.1) ta thấy $-\left.\frac{\partial U_e}{\partial x}\right|_{x=0}$ là lực của trường ngoài tác động lên hệ ở vị trí cân bằng và là một hàm của thời gian. Ta ký hiệu $F(t) = -\left.\frac{\partial U_e}{\partial x}\right|_{x=0}$.

Hàm Lagrange của hệ dao động cưỡng bức là:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{1}{2}kx^2 + xF(t) \qquad (21.2)$$

Phương trình chuyển động Lagrange là

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$m\ddot{x} + kx - F(t) = 0 \text{ hay là}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m}F(t) \qquad (21.3)$$

Ở đó $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$ và được gọi là tần số của dao động tự do.

Phương trình (21.3) là phương trình không thuần nhất. Nghiệm của nó có thể nhận được trong dạng tổng quát

$$x = x_0 + x_1 \qquad (21.4)$$

Ở đó x_0 là nghiệm của phương trình thuần nhất $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

x_1 là nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất.

Ở mục §19 ta đã giải phương trình thuần nhất và nhận được

$$x_0 = a\cos(\omega t + \alpha) \qquad (21.5)$$

Để giải một bài toán cụ thể về dao động cưỡng bức, chúng ta xét trường hợp khi lực cưỡng bức là một hàm chu kỳ của thời gian với tần số γ:

$$F(t) = f\cos(\gamma t + \beta) \qquad (21.6)$$

Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m}f\cos(\gamma t + \beta) \qquad (21.7)$$

được tìm dưới dạng sau:

$$x_1 = b\cos(\gamma t + \beta) \qquad (21.8)$$

Đặt (21.8) vào (21.7) ta được:

$$b(\omega^2 - \gamma^2) = \frac{f}{m}$$

$$b = \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} \tag{21.9}$$

Như vậy ta có:

$x_1 = \dfrac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)}\cos(\gamma t + \beta)$ và nghiệm tổng quát của phương trình sẽ là:

$$x = a\cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)}\cos(\gamma t + \beta) \tag{21.10}$$

Ở đó các hằng số a và α được xác định từ các điều kiện ban đầu.

Từ kết quả (21.10) ta nhận thấy: dưới tác dụng của lực cưỡng bức tuần hoàn hệ đã thực hiện chuyển động. Chuyển động này là tổ hợp của hai dao động: dao động với tần số riêng của hệ ω và dao động với tần số γ của lực cưỡng bức. Nghiệm (21.10) sẽ không sử dụng được trong trường hợp cộng hưởng, khi mà tần số riêng của hệ ω trùng với tần số γ của lực cưỡng bức.

§22. DAO ĐỘNG TẮT DẦN

Ở các mục trước chúng ta coi như chuyển động xảy ra trong chân không. Trong thực tế khi vật thể chuyển động trong môi trường thì môi trường có sự cản chuyển động và làm cho nó chuyển động chậm dần. Trên vật có lực tác động lên. Đó là lực ma sát. Lực này chỉ phụ thuộc vào vận tốc của vật dao động.

Vận tốc của dao động nhỏ là bé và lực ma sát sẽ là:

$$f_{ms} = -\alpha\dot{x} \tag{22.1}$$

Ở đó α là hệ số dương.

Trong trường hợp này phương trình chuyển động sẽ là:

$$m\ddot{x} + kx = f_{ms}$$

$$m\ddot{x} + kx = -\alpha\dot{x} \qquad (22.2)$$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Ở đó $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ là tần số dao động khi không có ma sát. $\lambda = \dfrac{\alpha}{2m}$ là hệ số tắt dần.

Ta đi tìm nghiệm của phương trình (22.2) dưới dạng sau:

$$x = e^{\beta t} \qquad (22.3)$$

Đặt (22.3) vào (22.2) ta được:

$$\beta^2 + 2\lambda\beta + \omega_0^2 = 0$$

$$\beta_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (22.2) là:

$$x = c_1 e^{\beta_1 t} + c_2 e^{\beta_2 t} \qquad (22.4)$$

Ở đây chúng ta tách ra hai trường hợp:

Nếu $\lambda < \omega_0$ thì $\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ và

$$\beta_1 = \beta_2^* = -\lambda + i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

Do vậy nghiệm của phương trình (22.2) có thể biểu diễn dưới dạng:

$$x = a e^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha) \qquad (22.5)$$

Ở đó $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$, còn a và α là các hằng số được xác định bởi điều kiện ban đầu.

Công thức (22.5) mô tả dao động tắt dần. Chúng ta có thể xem dao động này như dao động tuần hoàn có biên độ nhỏ dần theo quy luật hàm số mũ $e^{-\lambda t}$.

2) Nếu $\lambda > \omega_0$ thì $\beta_{1,2}$ là thực và là các giá trị âm.

$$x = c_1 e^{-\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t} + c_2 e^{-\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t} \qquad (22.6)$$

Khi $t \dashrightarrow \infty$ thì $x \dashrightarrow 0$, hệ quay trở lại vị trí cân bằng. Dao động như vậy được gọi là dao động tắt dần không theo quy luật tuần hoàn.

§23. DAO ĐỘNG CỦA CÁC HỆ CÓ NHIỀU BẬC TỰ DO

Lý thuyết dao động tự do của các hệ có nhiều bậc tự do (bậc s) cũng được xây dựng tương tự như lý thuyết dao động tự do một chiều mà ta đã khảo sát ở §19.

Giả thiết rằng thế năng của hệ $U(q_1, q_2 \ldots\ldots q_i \ldots\ldots)$ ($i = 1, 2, \ldots\ldots s$) có cực tiểu tại $q_i = q_{i0}$. Ta đưa vào những khái niệm những chuyển rời nhỏ:

$$x_i = q_i - q_{i0} \qquad (23.1)$$

và khai triển $U(q_1, q_2 \ldots\ldots q_i \ldots\ldots)$ theo các đại lượng đó đến các số hạng bậc hai, ta được thế năng dưới dạng toàn phương xác định dương.

$$U = \frac{1}{2}\sum_{ik} K_{ik}\, x_i\, x_k \qquad (23.2)$$

Ở đó ta lại tính thế năng bắt đầu từ gía trị cực tiểu của nó. Vì các hệ số K_{ik} và K_{ki} nằm trong (23.2) được nhân với cùng một đại lượng $x_i x_k$ cho nên ta thấy rõ ràng những hệ số đó có thể xem là đối xứng với các chỉ số của nó.

$$K_{ik} = K_{ki} \qquad (23.3)$$

Với động năng mà trong trường hợp tổng quát có dạng $\frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_k$ (xem 6.5), ta đặt $q_i = q_{i0}$ trong các hệ số và ký hiệu các hằng số $a_{ik}(q_0)$ bằng m_{ik}, chúng ta sẽ nhận được động năng dưới dạng toàn phương xác định dương:

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k} m_{ik}\,\dot{x}_i\,\dot{x}_k \qquad (23.4)$$

Những hệ số m_{ik} ta cũng luôn luôn có thể xem là đối xứng theo các chỉ số

$$m_{ik} = m_{ki} \qquad (23.5)$$

Như vậy hàm Lagrange của một hệ dao động nhỏ tự do là:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{ik}\left(m_{ik}\,\dot{x}_i\,\dot{x}_k - K_{ik}\,x_i\,x_k\right) \qquad (23.6)$$

Bây giờ chúng ta đi xác định các phương trình chuyển động. Để tính các đạo hàm của hàm Lagrange theo toạ độ và vận tốc, trước hết ta viết vi phân toàn phần của hàm Lagrange:

$$dL = \frac{1}{2}\sum_{ik}\left(m_{ik}\,\dot{x}_i\,d\dot{x}_k + m_{ik}\,\dot{x}_k\,d\dot{x}_i - K_{ik}\,x_i\,dx_k - K_{ik}\,x_k\,dx_i\right)$$

Vì đại lượng tổng không phụ thuộc vào ký hiệu của chỉ số lấy tổng nên trong các số hạng thứ nhất và thứ ba đổi i thành k và k thành i; và chú ý tới tính đối xứng của các hệ số m_{ik} và K_{ik} ta được:

$$dL = \sum_{ik}\left(m_{ik}\,\dot{x}_k\,d\dot{x}_i - K_{ik}\,x_k\,dx_i\right)$$

Từ đó ta thấy rằng:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \sum_k m_{ik}\,\dot{x}_k$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\sum_k K_{ik}\,x_k$$

vì vậy phương trình chuyển động Lagrange là:

$$\sum_k m_{ik}\ddot{x}_k + \sum_k K_{ik}x_k = 0 \qquad (23.7)$$

Các phương trình (23.7) lập thành hệ s phương trình vi phân bậc hai thuần nhất có các hệ số không đổi.

Theo quy tắc chung, giải các phương trình đó, ta tìm được s hàm số chưa biết $x_k(t)$ dưới dạng:

$$x_k(t) = A_k e^{i\omega t} \qquad (23.8)$$

với A_k là những hằng số nào đó chưa xác định. Thay (23.8) vào hệ (23.7), sau khi giản ước với $e^{i\omega t}$ ta được một hệ những phương trình đại số bậc nhất thuần nhất mà những hằng số A_k phải thoả mãn:

$$\sum_k \left(-\omega^2 m_{ik} + K_{ik}\right)A_k = 0 \qquad (23.9)$$

Để hệ này có nghiệm khác không, định thức của nó phải bằng không.

$$\left|K_{ik} - \omega^2 m_{ik}\right| = 0 \qquad (23.10)$$

Phương trình (23.10) được gọi là phương trình đặc trưng; đó là phương trình bậc s đối với ω^2. Trường hợp tổng quát phương trình đó có s nghiệm dương thực khác nhau $\omega_\alpha^2\,(\alpha = 1, 2, \ldots s)$ (trong các trường hợp đặc biệt, một vài giá trị trong số đó có thể trùng nhau). Những lượng ω_α xác định như trên gọi là những tần số riêng của hệ.

Tính chất thực và dương của các nghiệm của phương trình (23.10) hiển nhiên có thể thấy trước được từ những suy luận vật lý. Đúng vậy, nếu ω có phần ảo thì điều đó sẽ có nghĩa là có sự phụ thuộc của x_k (và cùng với nó cả của vận tốc $\dot{x}_k$) vào thời gian với dạng hàm số mũ. Nhưng trong trường hợp này không tồn tại một thừa số như vậy được vì điều kiện đó sẽ đưa đến sự biến đổi của năng lượng toàn phần $E = T + U$ của hệ theo thời gian, điều này trái với định luật bảo toàn năng lượng.

Điều khẳng định trên cũng có thể nhận được bằng phương pháp toán học thuần tuý. Nhân phương trình (23.9) với A_i^* và lấy tổng theo i ta được:

$$\sum_{ik} \left(-\omega^2 m_{ik} + K_{ik}\right) A_i^* A_k = 0$$

Từ đó suy ra

$$\omega^2 = \frac{\sum\limits_{ik} K_{ik} A_i^* A_k}{\sum\limits_{ik} m_{ik} A_i^* A_k}$$

Những dạng toàn phương tại tử số và mẫu số của biểu thức đó là thực vì các hệ số K_{ik} và m_{ik} là đối xứng và thực; quả vậy:

$$\left(\sum_{i,k} K_{ik} A_i^* A_k\right)^* = \sum_{i,k} K_{ik} A_i A_k^* =$$

$$= \sum_{i,k} K_{ki} A_i A_k^* = \sum_{i,k} K_{ik} A_k A_i^*$$

Những lượng đó cũng dương và do vậy những ω^2 cũng dương.

Sau khi tính được các tần số ω_α, thay lần lượt mỗi số đó vào phương trình (23.9) ta có thể tìm được những giá trị tương ứng của các hệ số A_k. Nếu tất cả những nghiệm ω_α của phương trình đặc trưng đều khác nhau thì, như ta đã biết, các hệ số A_k tỷ lệ với những định thức con của (23.10) trong đó ω được thay bằng giá trị tương ứng ω_α ; ta gọi định thức con đó là $\Delta_{k\alpha}$. Như vậy nghiệm riêng của hệ các phương trình vi phân (23.7) có dạng:

$$x_k = \Delta_{k\alpha} C_\alpha e^{i\omega_\alpha t} \tag{23.11}$$

Ở đó C_α là hằng số (phức) tuỳ ý.

Còn nghiệm tổng quát là tổng của tất cả s nghiệm riêng. Chuyển sang phần thực, ta viết nghiệm đó dưới dạng:

$$x_k = \mathrm{Re}\left\{\sum_\alpha \Delta_{k\alpha} C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\right\} \equiv \sum_\alpha \Delta_{k\alpha} \theta_\alpha \tag{23.12}$$

Ở đó $$\theta_\alpha = \mathrm{Re}\left\{C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\right\} \tag{23.13}$$

Như vậy, sự biến thiên của mỗi toạ độ trong số các toạ độ của hệ theo thời gian là sự chập của s dao động tuần hoàn đơn giản θ_1, θ_2, ... θ_s với pha và biên độ tuỳ ý, nhưng có các tần số hoàn toàn xác định.

Tất nhiên sẽ nảy ra câu hỏi liệu có thể chọn được những toạ độ suy rộng sao cho mỗi toạ độ đó thực hiện chỉ một dao động đơn giản không? Chính công thức (23.12) chỉ ra hướng giải đáp câu hỏi đó.

Trong thực tế, khi xem s biểu thức (23.12) như là một hệ phương trình chứa s lượng chưa biết θ_α, chúng ta có thể biểu diễn các đại lượng θ_1, θ_2, ... θ_s qua các toạ độ x_1, x_2, ... x_s sau khi đã giải hệ. Do vậy các đại lượng θ_α có thể được xem như các toạ độ suy rộng mới. Các toạ độ này được gọi là các toạ độ chuẩn (hay toạ độ chính), còn những dao động tuần hoàn đơn giản mà chúng thực hiên được gọi là các dao động chuẩn của hệ.

Như ta thấy rõ từ định nghĩa, những toạ độ chuẩn thoả mãn các phương trình:

$$\ddot{\theta}_\alpha + \omega^2 \theta_\alpha = 0 \tag{23.14}$$

Điều này có nghĩa là: với các toạ độ chuẩn, những phương trình chuyển động tách làm s phương trình độc lập với nhau.

Gia tốc của mỗi một toạ độ chuẩn chỉ phụ thuộc vào giá trị của toạ độ đó, và để hoàn toàn xác định sự phụ thuộc của toạ độ đó vào thời gian, cần phải biết những giá trị ban đầu của chỉ toạ độ đó và của vận tốc tương ứng. Nói cách khác, những dao động chuẩn của một hệ hoàn toàn độc lập với nhau.

Từ nhận xét trên ta thấy rõ ràng hàm Lagrange biểu diễn theo toạ độ chuẩn tách thành tổng của nhiều biểu thức, mỗi một biểu thức đó tương ứng với một dao động một chiều có tần số thuộc số các tần số ω_α, nghĩa là hàm Lagrange có dạng:

$$L = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2}\left(\dot{\theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 \theta^2\right) \tag{23.15}$$

trong đó m_α là những hằng số dương. Về phương diện toán học, điều đó có nghĩa là với phép biến đổi (13.12) cả hai dạng toàn phương động năng (23.4) và thế năng (23.2) đồng thời được quy về dạng đường chéo.

Thông thường, các toạ độ chính quy được chọn sao cho những hệ số ở những vận tốc bình phương trong hàm Lagrange bằng 1/2.

Muốn thế, chỉ cần xác định những toạ độ chuẩn (bây giờ ta ký hiệu là Q_α) bởi các công thức:

$$Q_\alpha = \sqrt{m_\alpha}\,\theta_\alpha \tag{23.16}$$

Khi đó:

$$L = \frac{1}{2}\sum_\alpha \left(\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2\right) \tag{23.17}$$

Tất cả những điều trình bày ở trên sẽ thay đổi đi một chút trong trường hợp khi trong số những nghiệm của phương trình đặc trưng có những nghiệm bội. Dạng tổng quát (23.12), (23.13) của tích phân của các phương trình chuyển động vẫn như cũ (với cùng số s số hạng), chỉ khác một điểm là những hệ số $\Delta_{k\alpha}$ tương ứng với những tần số bội không còn là những tử thức của định thức, những tử thức này, như đã biết, triệt tiêu trong trường hợp đó. Điều này dễ hiểu từ các suy luận vật lý. Ta phải loại bỏ các tần số phức vì sự tồn tại của chúng sẽ vi phạm định luật bảo toàn năng lượng. Do vậy, không thể xuất hiện trong tích phân tổng quát các số hạng chứa cả các thừa số lũy thừa của thời gian cùng với các thừa số e mũ (exp).

Ứng với mỗi tần số bội (hay như người ta thường nói với mỗi tần số suy biến) có một số toạ độ chuẩn khác nhau, bằng số bội, nhưng sự lựa chọn những toạ độ chuẩn đó là không được duy nhất. Vì trong động năng và thế năng, những toạ độ chuẩn (với cùng ω_α) nằm trong những tổng $\sum \dot{Q}_\alpha^2$ và $\sum Q_\alpha^2$ về hình thức biến đổi như nhau cho nên chúng ta có thể vận dụng trên những toạ độ đó bất kỳ phép biến đổi bậc nhất nào không làm thay đổi tổng bình phương.

Việc tìm những toạ độ chuẩn cho trường hợp dao động ba chiều của một chất điểm nằm trong một trường ngoài không đổi rất là đơn giản.

Chọn gốc toạ độ Descartes tại điểm cực tiểu của thế năng U (x, y, z), chúng ta sẽ được biểu thức của thế năng đó dưới dạng toàn phương của những biến số x, y, z. Còn động năng

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

(m là khối lượng của hạt), không phụ thuộc vào cách chọn phương của các trục toạ độ. Do vậy, với một sự quay trục toạ độ thích hợp cần để đưa thế năng về dạng chéo, chúng ta sẽ được:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - \frac{1}{2}\left(K_1 x^2 + K_2 y^2 + K_3 z^2\right) \quad (23.18)$$

và những dao động dọc theo các trục x, y, z sẽ là những dao động chuẩn với các tần số:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K_1}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{K_2}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{K_3}{m}}$$

Cách dùng các toạ độ chuẩn cho phép ta có thể quy bài toán dao động cưỡng bức của một hệ có nhiều bậc tự do về nhiều bài toán dao động cưỡng bức một chiều.

Hàm Lagrange của hệ với việc tính đến tác động của ngoại lực biến thiên có dạng:

$$L = L_0 + \sum_k F_k(t)\, x_k \quad (23.19)$$

Ở đó L_0 - hàm Lagrange của các dao động tự do. Đưa vào các toạ độ chuẩn thay cho các toạ độ x_k chúng ta sẽ nhận được:

$$L = \frac{1}{2}\sum_\alpha \left(\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2\right) + \sum_\alpha f_\alpha(t)\, Q_\alpha \quad (23.20)$$

Ở đó ta đưa vào ký hiệu:

$$f_\alpha(t) = \sum_k F_k(t)\, \frac{\Delta_{k\alpha}}{\sqrt{m_\alpha}}$$

Phương trình chuyển động tương ứng

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega^2 Q_\alpha = f_\alpha(t) \quad (23.21)$$

sẽ chứa chỉ một hàm số chưa biết $Q_\alpha(t)$ mà thôi.

Chương 5

CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT RẮN

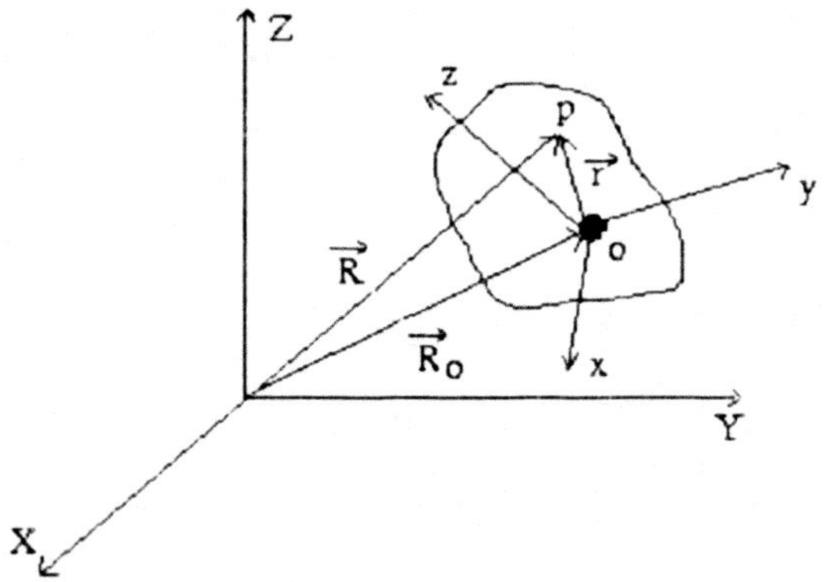
§24. VẬN TỐC GÓC CỦA VẬT RẮN

Định nghĩa: Trong cơ học người ta xem vật rắn như là một hệ các chất điểm mà khoảng cách giữa chúng không đổi trong suốt quá trình chuyển động.

Để mô tả chuyển động của vật rắn chúng ta đưa vào hai hệ toạ độ:

a) Hệ toạ độ bất động " X, Y, Z "

b) Hệ toạ độ chuyển động x, y, z, gắn chặt với vật rắn và tham gia vào tất cả các chuyển động của vật rắn.



Hình vẽ 14

Như vậy vị trí của vật rắn tương đối với hệ "bất động" được xác định bởi sự cho biết vị trí của hệ toạ độ chuyển động.

Trên (hình vẽ 14) ta thấy $\vec{R}_0$ là véc tơ xác định vị trí của gốc toạ độ O của hệ toạ độ chuyển động. Sự định hướng của các trục x, y, z của hệ toạ độ chuyển động tương đối với hệ toạ độ "bất động" được xác định bởi ba góc độc lập.

Như vậy cùng với ba thành phần của véc tơ $\vec{R}_0$ và ba góc độc lập ta có sáu toạ độ cần để xác định vị trí của hệ toạ độ chuyển động (vị trí của vật rắn tương đối với hệ toạ độ "bất động").

Do vậy bất kỳ vật rắn nào cũng là hệ cơ học có số bậc tự do là sáu.

Bây giờ ta đi xét một sự chuyển dời vô cùng nhỏ của vật rắn. Sự chuyển dời đó có thể biểu diễn dưới dạng tổng của hai thành phần.

+ Phần dịch chuyển song song vô cùng nhỏ và kết quả của nó là tâm quán tính của vật rắn đã dịch chuyển đi một đoạn vô cùng nhỏ còn sự định hướng của các trục x, y, z không đổi.

+ Phần quay đi một góc vô cùng nhỏ xung quanh tâm quán tính.

Nếu ta ký hiệu véc tơ bán kính của một điểm bất kỳ P của vật rắn trong hệ toạ độ chuyển động là $\vec{r}$ và véc tơ bán kính của điểm P đó trong hệ toạ độ "bất động" là $\vec{R}$ thì khi đó sự chuyển dời $d\vec{R}$ của điểm P sẽ là tổng của sự dịch chuyển song song $d\vec{R}_0$ cùng với tâm quán tính và sự chuyển dời $[d\vec{\varphi} \times \vec{r}]$ khi quay đi một góc $d\varphi$ xung quanh tâm quán tính.

$$d\vec{R} = d\vec{R}_0 + [d\vec{\varphi} \times \vec{r}] \tag{24.1}$$

Chia hai vế của đẳng thức (24.1) cho dt (khoảng thời gian xảy ra sự chuyển dời trên) và đưa vào các vận tốc:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{v}\ ; \quad \frac{d\vec{R}_0}{dt} = \vec{V}\ ; \quad \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\Omega} \tag{24.2}$$

ta sẽ nhận được:

$$\vec{v} = \vec{V} + \left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right] \tag{24.3}$$

Ở đó $\vec{V}$ là véc tơ vận tốc của tâm quán tính của vật rắn hay còn gọi là vận tốc của chuyển động tịnh tiến.

$\vec{\Omega}$ là véc tơ vận tốc góc của chuyển động quay của vật rắn.

Như vậy $\vec{v}$ - vận tốc của một điểm bất kỳ của vật rắn tương đối với hệ toạ độ "bất động", có thể biểu diễn qua vận tốc tịnh tiến và vận tốc gó của vật rắn.

§25. ĐỘNG NĂNG CỦA VẬT RẮN

Động năng của vật rắn được xem như động năng của một hệ gián đoạn các chất điểm và ta có:

$$T = \sum \frac{m\vec{v}^2}{2} \tag{25.1}$$

Ở đây tổng được lấy theo tất cả các chất điểm tạo nên vật rắn. Ta không viết chỉ số dưới tổng vì coi vật rắn đó có vô số chất điểm.

Đặt (24.3) vào (25.1) ta được:

$$\begin{aligned} T &= \sum \frac{m}{2}\left(\vec{V} + \left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right]\right)^2 = \\ &= \sum \frac{m}{2}\vec{V}^2 + \sum m\vec{V}.\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right] + \sum \frac{m}{2}\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right]^2 \end{aligned} \tag{25.2}$$

vận tốc $\vec{V}$ và vận tốc góc $\vec{\Omega}$ như nhau đối với mọi chất điểm của vật rắn vì vậy ta có thể đưa $\vec{V}$ ở số hạng thứ nhất ra ngoài dấu tổng; còn ở số hạng thứ hai thì ta có thể viết lại như sau:

$$\sum m\vec{V}.\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right] = \sum m\left[\vec{V} \times \vec{\Omega}\right].\vec{r} = \left[\vec{V} \times \vec{\Omega}\right].\sum m\vec{r} \quad (25.3)$$

Kết quả tổng (25.3) sẽ bằng không nếu ta chọn gốc toạ độ của hệ toạ độ chuyển động nằm ở tâm quán tính của vật rắn (vì $\sum m\vec{r} = 0$).

Như vậy nếu ta chọn gốc toạ độ của hệ toạ độ chuyển động nằm ở tâm quán tính của vật rắn thì động năng của vật rắn sẽ là:

$$T = \frac{\mu\vec{V}^2}{2} + \frac{1}{2}\sum m\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right]^2 \quad (25.4)$$

Ở đó $\mu = \sum m$ là khối lượng của cả vật rắn.

Ta có thể viết (25.4) dưới dạng sau:

$$T = \frac{\mu\vec{V}^2}{2} + \frac{1}{2}\sum m\left(\Omega^2 r^2 \sin^2(\hat{\vec{\Omega}}\hat{\vec{r}})\right) =$$

$$= \frac{\mu\vec{V}^2}{2} + \frac{1}{2}\sum m\,\Omega^2 r^2\left(1 - \cos^2(\hat{\vec{\Omega}}\hat{\vec{r}})\right) = \quad (25.5)$$

$$= \frac{\mu\vec{V}^2}{2} + \frac{1}{2}\sum m\left[\Omega^2 r^2 - (\vec{\Omega}.\vec{r})^2\right]$$

Từ (25.4), (25.5) ta thấy động năng của vật rắn bằng tổng của hai phần:

+ Động năng của chuyển động tịnh tiến, nó có dạng như khi tất cả khối lượng của vật rắn có tập trung tại điểm tâm quán tính (số hạng thứ nhất).

+ Động năng của chuyển động quay với vận tốc góc $\vec{\Omega}$ xung quanh trục đi qua tâm quán tính với vận tốc góc $\vec{\Omega}$ xung quanh trục đi qua tâm quán tính.

§26. TÂM QUÁN TÍNH

Chúng ta viết lại phần động năng của chuyển động quay dưới dạng tensơ:

$$T_Q = \frac{1}{2}\sum m\left(\Omega_i^2 x_l^2 - \Omega_i x_i \Omega_k x_k\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum m\left(\Omega_i \Omega_k \delta_{ik} x_l^2 - \Omega_i \Omega_k x_i x_k\right) = \qquad (26.1)$$

$$= \frac{1}{2}\Omega_i \Omega_k \sum m\left(x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k\right)$$

Ở đây ta đã sử dụng đẳng thức: $\Omega_i = \Omega_k \delta_{ik}$

Ở đó $\delta_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ là tensơ đơn vị.

Tensơ $I_{ik} = \sum m\left(x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k\right)$ (26.2)

được gọi là tensơ quán tính. Từ công thức (26.2) ta thấy tensơ quán tính là tensơ đối xứng có các hệ số thực ($I_{ik} = I_{ki}$).

Trong dạng tường minh tensơ quán tính I_{ik} được viết như sau:

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} \Sigma m\,(y^2 + z^2) & -\Sigma m x y & -\Sigma m x z \\ -\Sigma m x y & \Sigma m(x^2 + z^2) & -\Sigma m y z \\ -\Sigma m x z & -\Sigma m y z & \Sigma m(x^2 + y^2) \end{pmatrix} \qquad (26.3)$$

Sử dụng tensơ quán tính I_{ik}, động năng của vật rắn được viết như sau:

$$T_Q = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik}\Omega_i \Omega_k \qquad (26.4)$$

và hàm Lagrange của vật rắn sẽ là:

$$L = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k - U$$

Thế năng U trong trường hợp tổng quát là hàm của sáu biến số (sáu toạ độ) xác định vị trí của vật rắn.

Ví dụ: Ba biến số X, Y, Z xác định vị trí của tâm quán tính và ba góc xác định hướng của các trục của hệ toạ độ chuyển động tương đối với hệ toạ độ "bất động".

Nếu ta coi vật rắn là vật thể đông đặc thì thay tổng trong công thức (26.2) bằng tích phân theo thể tích của vật rắn và khi đó tensơ quán tính sẽ là:

$$I_{ik} = \int_V \rho\left(x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k\right) dV \qquad (26.5)$$

Ở đó ρ là mật độ hạt điểm.

Như chúng ta đã biết, bất kỳ một tensơ đối xứng nào có các phần tử thực, cụ thể ở đây tensơ quán tính, đều đưa về dạng đường chéo bằng cách chọn một hệ tọa độ thích hợp. Các giá trị tương ứng của các thành phần của tensơ quán tính được gọi là mômen quán tính chính. Ta ký hiệu chúng là I_1, I_2, I_3.

Bằng cách chọn các trục x_1, x_2, x_3 như vậy, phần động năng của chuyển động quay của vật rắn sẽ được biểu diễn rất đơn giản như sau:

$$T_Q = \frac{1}{2}\left(I_1 \Omega_1 + I_2 \Omega_2 + I_3 \Omega_3\right) \qquad (26.6)$$

Ở đó Ω_1, Ω_2, Ω_3 là các vận tốc góc của vật rắn quay xung quanh các trục chính tương ứng x_1, x_2, x_3.

Đối với vật rắn ta có một số khái niệm như sau:

Vật rắn có ba mômen quán tính chính khác nhau $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ được gọi là con quay không đối xứng.

Vật rắn có hai mômen quán tính chính bằng nhau (ví dụ $I_1 = I_2 \neq I_3$) được gọi là con quay đối xứng.

Vật rắn có ba mômen quán tính chính bằng nhau $I_1 = I_2 = I_3$ được gọi là con quay cầu (đối xứng cầu).

Việc tìm các trục chính của vật rắn sẽ đơn giản đi rất nhiều nếu vật rắn có tính đối xứng vì khi đó vị trí của tâm quán tính và hướng của các trục quán tính chính cũng sẽ có tính đối xứng như vật rắn.

Nếu vật rắn có mặt phẳng đối xứng thì tâm quán tính sẽ nằm trên mặt phẳng đó. Trên mặt phẳng này có hai trục quán tính chính, còn trục thứ ba sẽ vuông góc với mặt phẳng đối xứng này. Trường hợp này là hệ các hạt nằm trên một mặt phẳng. Nếu mặt phẳng của hệ các hạt được chọn là mặt phẳng x_1 x_2 thì đối với tất cả các hạt ta đều có $x_3 = 0$ và chúng ta được:

$$I_1 = \sum m x_2^2 \ ; \ I_2 = \sum m x_1^2 \ ; \ I_3 = \sum m (x_1^2 + x_2^2) = I_1 + I_2$$

Nếu vật rắn có trục đối xứng thì tâm quán tính sẽ nằm trên trục đó. Có một trục quán tính chính sẽ trùng với trục đối xứng này. Còn hai trục quán tính chính khác sẽ vuông góc với trục này. Trường hợp này là hệ các hạt nằm trên một đường thẳng. Nếu đường thẳng của hệ các hạt được chọn là trục x_3 thì khi đó đối với tất cả các hạt của vật rắn ta đều có $x_1 = x_2 = 0$ và chúng ta được:

$$I_1 = I_2 = \sum m x_3^2 \ ; \ I_3 = 0$$

§27. MÔMEN XUNG LƯỢNG CỦA VẬT RẮN

Đại lượng mômen xung lượng, như chúng ta đã biết, phụ thuộc vào việc chọn điểm mà tương ứng với điểm đó ta xác định giá trị của mômen.

Trong cơ học vật rắn thường người ta chọn điểm đó là gốc toạ độ của hệ toạ độ chuyển động, có nghĩa là tâm quán tính của vật rắn.

$$\vec{M} = \sum m \left[\vec{r} \times \vec{v}\right] \qquad (27.1)$$

Với cách chọn điểm xác định mômen như trên thì mômen của vật rắn $\vec{M}$ sẽ trùng với mômen riêng của nó và chỉ liên quan đến chuyển động của các chất điểm của vật rắn tương đối với tâm quan tính. Nói cách khác trong (27.1) ta có

$\vec{v} = \left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right]$. Do vậy ta được:

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \sum m\left[\vec{r} \times \vec{v}\right] = \sum m\left[\vec{r} \times \left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right]\right] = \\ &= \sum m\left(\vec{\Omega} r^2 - \vec{r}(\vec{r}.\vec{\Omega})\right)\end{aligned} \qquad (27.2)$$

hay ở dạng tensơ

$$\begin{aligned}M_i &= \sum m\left(x_l^2 \Omega_i - x_i x_k \Omega_k\right) = \\ &= \sum m\left(x_l^2 \Omega_k \delta_{ik} - x_i x_k \Omega_k\right) = \\ &= \Omega_k \sum m\left(x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k\right)\end{aligned} \qquad (27.3)$$

Ở đây Ω_k được đưa ra ngoài dấu tổng vì vận tốc góc của tất cả chất điểm của vật rắn đều như nhau; i, k = 1, 2, 3.

Từ các công thức (27.3) và (27.2) ta thu được:

$$M_i = I_{ik}\,\Omega_k \qquad (27.4)$$

Nếu các trục toạ độ hướng theo các trục quán tính chính của vật rắn thì mômen xung lượng sẽ là:

$$M_1 = I_1\Omega_1 \;;\quad M_2 = I_2\Omega_2 \;;\quad M_3 = I_3\Omega_3 \qquad (27.5)$$

Trong trường hợp con quay cầu (đối xứng cầu) thì ba mômen quán tính chính bằng nhau ($I_1 = I_2 = I_3 \equiv I$) do vậy ta có:

$$\vec{M} = I\,\vec{\Omega} \qquad (27.6)$$

Công thức (27.6) cho ta thấy trong trường hợp này véc tơ mômen xung lượng tỷ lệ với vận tốc góc.

Còn trong trường hợp tổng quát của vật rắn bất kỳ thì mômen xung lượng $\vec{M}$ nói chung không trùng hướng với $\vec{\Omega}$ và chỉ khi vật rắn quay xung quanh một trong các trục quán tính chính thì véc tơ $\vec{M}$ và véc tơ $\vec{\Omega}$ mới có cùng một định hướng.

§28. CÁC PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT RẮN

Vì vật rắn trong trường hợp tổng quát có số bậc tự do là sáu nên để mô tả chuyển động của vật rắn ta cần phải có sáu phương trình độc lập tuyến tính. Các phương trình này có thể biểu diễn dưới dạng xác định của các đạo hàm theo thời gian của hai véc tơ xung lượng và mômen xung lượng của vật rắn ($\dot{\vec{P}}$ và $\dot{\vec{M}}$).

Phương trình véc tơ thứ nhất có thể nhận được bằng cách lấy tổng tất cả các phương trình $\dot{\vec{p}} = \vec{f}$ đối với từng hạt cấu tạo thành vật rắn. Ở đây $\vec{p}$ là xung lượng của hạt và $\vec{f}$ là lực tác động lên hạt đó. Nếu ta đưa vào véc tơ xung lượng tổng cộng của vật rắn:

$$\vec{P} = \sum \vec{p} = \mu \vec{V} \tag{28.1}$$

và lực tổng cộng tác động lên vật rắn:

$$\vec{F} = \sum \vec{f} \tag{28.2}$$

thì ta sẽ được:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \tag{28.3}$$

Mặc dù khi định nghĩa lực tổng cộng $\vec{F}$ như tổng tất cả các lực $\vec{f}$ tác động lên từng hạt của vật rắn, nhưng thực tế ở trong lực tổng cộng $\vec{F}$ chỉ có những lực tác động ngoài. Tất cả các lực tương tác giữa các hạt của vật rắn đã triệt tiêu tương ứng với nhau. Điều này dễ dàng nhận thấy vì khi không có trường lực ngoài thì xung lượng của vật rắn (được coi như hệ cơ học kín) phải bảo toàn, có nghĩa là $\frac{d\dot{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{F} = 0$.

Nếu U là thế năng của vật rắn trong trường ngoài thì lực $\vec{F}$ sẽ được xác định bởi đạo hàm của U theo toạ độ của tâm quán tính của vật rắn:

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{R}} \tag{28.4}$$

Đúng vậy, vì chuyển động tịnh tiến vật rắn đi một đoạn nhỏ $\delta\vec{R}$ thì véc tơ bán kính $\vec{r}$ của từng hạt của vật rắn cũng sẽ dịch đi một đoạn nhỏ

$\delta\vec{r} = \delta\vec{R}$ và ta sẽ có:

$$\delta U = \sum \frac{\partial U}{\partial r}\delta r = \delta R \sum \frac{\partial U}{\partial r} = -\delta R \sum f = -F\delta R$$

Từ đó suy ra $F = -\frac{\partial U}{\partial R}$

Ta nhận thấy rằng phương trình (28.3) có thể xem như phương trình Lagrange đối với toạ độ của tâm quán tính:

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial V} - \frac{\partial L}{\partial R} = 0$ với hàm Lagrange

$$L = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik}\Omega_i\Omega_k - U \tag{28.5}$$

Ở đó

$$\frac{\partial L}{\partial V} = \mu V = P$$

$$\frac{\partial L}{\partial R} = -\frac{\partial U}{\partial R} = F$$

Bây giờ ta chuyển sang xác định phương trình véc tơ thứ hai mô tả chuyển động của vật rắn.

Để suy luận được đơn giản, ta chọn hệ toạ độ "bất động" sao cho ở thời điểm cho trước tâm quán tính của vật rắn đứng yên đối với hệ đó. Như vậy phương trình chuyển động nhận được trong hệ này cũng đúng cho bất kỳ hệ quy chiếu quán tính khác (nguyên lý tương đối Galilê).

Ta có:

$$\dot{\vec{M}} = \frac{d}{dt}\Sigma\left[\vec{r} \times \vec{p}\right] = \Sigma\left[\dot{\vec{r}} \times \vec{p}\right] + \Sigma\left[\vec{r} \times \dot{\vec{p}}\right]$$

Do ta chọn hệ quy chiếu quán tính "bất động" như nói ở trên (trong đó $\vec{V} = 0$) cho nên giá trị $\dot{\vec{r}}$ ở thời điểm cho trước đó sẽ trùng với $\vec{v}$ và vì các véc tơ $\vec{v}$ và $\vec{p} = m\vec{v}$ cùng phương, nên $\left[\dot{\vec{r}} \times \vec{p}\right] = 0$.

Như vậy ta được:

$$\dot{\vec{M}} = \Sigma\left[\vec{r} \times \dot{\vec{p}}\right] = \Sigma\left[\vec{r} \times \vec{f}\right] \text{ hay}$$

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{K} \tag{28.6}$$

với $\vec{K} = \Sigma\left[\vec{r} \times \vec{f}\right]$

Véc tơ $\left[\vec{r} \times \vec{f}\right]$ được gọi là mômen của lực $\vec{f}$, do vậy $\vec{K}$ sẽ là tổng tất cả các mômen của tất cả các lực tác động lên vật rắn.

Mômen lực cũng như mômen xung lượng nói chung phụ thuộc vào việc chọn gốc toạ độ mà tương đối với nó các mômen được xác định. Trong biểu thức (28.6) mômen lực được xác định tương đối với tâm quán tính.

Khi dịch chuyển gốc toạ độ đi một khoảng $\vec{a}$ thì các véc tơ bán kính mới $\vec{r}'$ của các hạt sẽ liên quan với các véc tơ bán kính cũ $\vec{r}$ theo biểu thức sau:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{a}$$

và vì vậy:

$$\vec{K} = \sum[\vec{r} \times \vec{f}] = \sum[\vec{r}' \times \vec{f}] + \sum[\vec{a} \times \vec{f}]$$
$$\vec{K} = \vec{K}' + \sum[\vec{a} \times \vec{f}] = \vec{K}' + [\vec{a} \times \vec{F}] \qquad (28.7)$$

Từ đó ta thấy rằng trong trường hợp đặc biệt khi $\vec{F} = 0$ thì mômen lực không phụ thuộc vào việc chọn gốc toạ độ.

Phương trình (28.6) xem như phương trình Lagrange đối với toạ độ góc quay φ với hàm lagrange (28.5)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{\Omega}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{\varphi}} = 0 \quad \text{Quả vậy} \quad \frac{\partial L}{\partial \Omega_i} = I_{ik}\,\Omega_k = M_i$$

Còn sự biến thiên của thế năng U khi quay vật rắn đi một góc vô cùng nhỏ δφ sẽ là:

$$\delta U = -\sum \vec{f}.\delta\vec{r} = -\sum \vec{f}\,[\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}\,] = -\sum \delta\vec{\varphi}.[\vec{r} \times \vec{f}] =$$
$$= -\delta\vec{\varphi}.\sum[\vec{r} \times \vec{f}] = -\delta\vec{\varphi}.\vec{K}$$

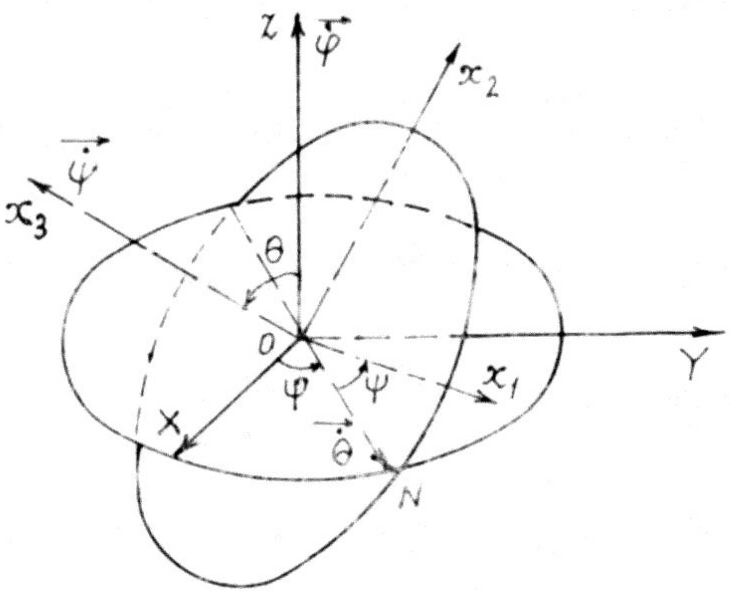
Từ đó suy ra $-\dfrac{\partial U}{\partial \vec{\varphi}} = \vec{K}$.

Các phương trình véc tơ (28.3), (28.6) cho ta hệ sáu phương trình độc lập tuyến tính mô tả chuyển động của vật rắn.

§29. CÁC GÓC EULER

Như chúng ta đã biết, vật rắn có số bậc tự do là sáu và ta có thể sử dụng ba toạ độ của tâm quán tính của vật rắn và ba góc nào đó xác định phương hướng của các trục x_1, x_2, x_3 của hệ toạ độ chuyển động đối với hệ "bất động" X, Y, Z.

Thông thường ta thấy rằng chọn các góc Euler làm các góc định hướng đó thì có nhiều thuận tiện. Vì ở đây ta chỉ nói đến các góc giữa các trục toạ độ thôi, nên ta chọn gốc toạ độ của hai hệ tại cùng một điểm 0 (Hình vẽ 15).



Hình vẽ 15

Mặt phẳng động x_1x_2 cắt mặt phẳng XY theo một đường thẳng, ta ký hiệu là ON và đường thẳng này được gọi là đường của các nút. Vì đường ON vừa nằm trên mặt phẳng x_1x_2, vừa nằm trên mặt phẳng XY cho nên ON vuông với trục z và vuông góc với cả trục x_3. Từ đó suy ra ON vuông góc với mặt phẳng x_3z. Hướng dương của đường thẳng ON ta chọn sao cho hướng đó trùng với hướng của véc tơ.

$[\vec{z} \times \vec{x}_3]$, ở đó $\vec{z}$ và $\vec{x}_3$ là hai véc tơ đơn vị dọc theo trục z và trục x_3.

Để xác định vị trí của các trục x_1, x_2, x_3 tương đối với các trục X, Y, Z ta chọn các góc sau:

$$\theta = z, x_3 \,;\; \varphi = X, ON \,;\; \psi = x_1, ON \qquad (29.1)$$

Các góc φ, θ và ψ được tính theo hướng xác định bởi quy tắc xoắn ốc xung quanh các trục z, trục ON và trục x_3.

Góc θ chạy từ 0 đến π, còn các góc φ, ψ chạy từ 0 đến 2π. Các góc φ, θ và ψ được gọi là các góc Euler.

Bây giờ chúng ta đi phân tích vận tốc góc $\vec{\Omega}$ theo các trục x_1, x_2, x_3 qua các góc Euler và các đạo hàm của chúng. Để làm điều đó trước hết ta tìm hình chiếu lên các trục x_1, x_2, x_3 của các vận tốc góc $\dot{\vec{\theta}}$, $\dot{\vec{\varphi}}$, $\dot{\vec{\psi}}$.

Véc tơ vận tốc góc $\dot{\vec{\theta}}$ có hướng theo đường của các nút $\overrightarrow{ON}$ và hình chiếu của nó lên các trục x_1, x_2, x_3 là $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$, $\dot{\theta}_3$.

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \dot{\theta}\cos\psi \\ \dot{\theta}_2 &= -\dot{\theta}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right) = -\dot{\theta}\sin\psi \end{aligned} \tag{29.2}$$

Vận tốc góc $\dot{\vec{\varphi}}$ có hướng theo trục z, cho nên các hình chiếu của nó lên các trục x_1, x_2, x_3 sẽ là:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi \\ \dot{\varphi}_2 &= \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi \\ \dot{\varphi}_3 &= \dot{\varphi}\cos\theta \end{aligned} \tag{29.3}$$

Vận tốc góc $\dot{\vec{\psi}}$ có hướng theo trục $\bar{x}_3$ cho nên ta có:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_3 &= \dot{\psi} \\ \dot{\psi}_1 &= 0 \\ \dot{\psi}_2 &= 0 \end{aligned} \tag{29.4}$$

Tập hợp lại tất cả các thành phần của các vận tốc góc $\dot{\vec{\theta}}$, $\dot{\vec{\varphi}}$ và $\dot{\vec{\psi}}$ theo các trục x_1, x_2, x_3 ta sẽ thu được:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \dot{\theta}_1 + \dot{\varphi}_1 + \dot{\psi}_1 = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi \\ \Omega_2 &= \dot{\theta}_2 + \dot{\varphi}_2 + \dot{\psi}_2 = -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi \\ \Omega_3 &= \dot{\theta}_3 + \dot{\varphi}_3 + \dot{\psi}_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{aligned} \tag{29.5}$$

Nếu tất cả các trục x_1, x_2, x_3 được chọn theo các trục quán tính chính của vật rắn thì động năng của chuyển động quay sẽ được biểu diễn qua các góc Euler bằng cách đặt (29.5) vào $T_Q = \frac{1}{2}(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2)$

Đối với con quay đối xứng (khi $I_1 = I_2 \neq I_3$) thì ta có:

$$T_Q = \frac{1}{2}I_1\Big[\dot\theta^2\cos^2\psi + \dot\varphi^2\sin^2\theta\sin^2\psi + 2\dot\theta\cos\psi\dot\varphi\sin\theta\sin\psi +$$

$$+ \dot\theta^2\sin^2\psi + \dot\varphi^2\sin^2\theta\cos^2\psi - 2\dot\theta\cos\psi\,\dot\varphi\sin\theta\sin\psi\Big] +$$

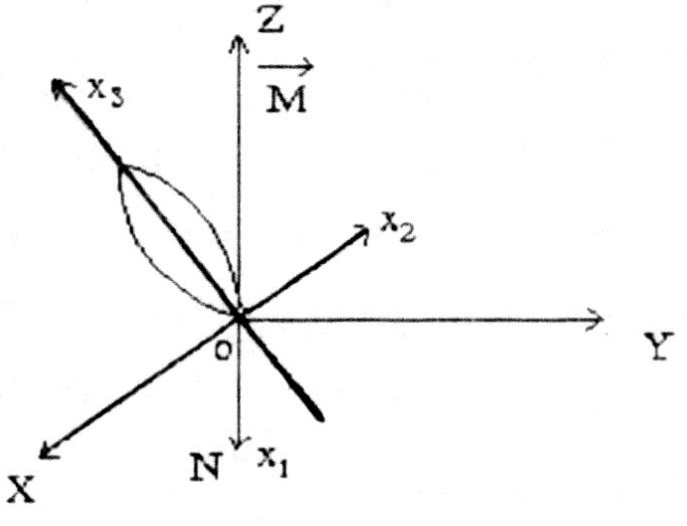
$$+ \frac{1}{2}I_3\left(\dot\varphi^2\cos^2\theta + \dot\psi^2 + 2\dot\varphi\cos\theta\,\dot\psi\right) =$$

$$= \frac{1}{2}I_1\left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta\right) + \frac{1}{2}I_3\left(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi\right)^2 \qquad (29.6)$$

Biểu thức (29.6) của động năng quay T_Q sẽ đơn giản hơn nếu ta chọn trục $\vec{x}_1$ trùng với trục các nút $\overrightarrow{ON}$ (Đối với con quay đối xứng các trục x_1, x_2 được chọn tuỳ ý). Khi đó góc $\psi = 0$ và ta thu được từ công thức (29.5) các biểu thức sau:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \dot\theta\\ \Omega_2 &= \dot\varphi\sin\theta\\ \Omega_3 &= \dot\varphi\cos\theta + \dot\psi\end{aligned} \qquad (29.7)$$

Để làm ví dụ về việc sử dụng các góc Euler ta xem xét chuyển động tự do của con quay đối xứng. Ta chọn trục z theo hướng của mômen xung lượng của con quay $\vec{M}$, trục x_3 theo hướng trục riêng của con quay, còn x_1 trùng với trục của các nút (xem hình vẽ 16). Khi đó ta có:



Hình vẽ 16

$$M_1 = I_1\Omega_1 = I_1\dot{\theta}$$
$$M_2 = I_2\Omega_2 = I_2\dot{\varphi}\sin\theta \qquad (29.8)$$
$$M_3 = I_3\Omega_3 = I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})$$

Mặt khác ta thấy x_1 (trục của các nút) vuông góc với trục z cho nên ta được:

$$M_1 = 0$$
$$M_2 = M\sin\theta \qquad (29.9)$$
$$M_3 = M\cos\theta$$

Từ các công thức (29.8), (29.9) ta suy ra:

$$\dot{\theta} = 0$$
$$I_2\dot{\varphi} = M \qquad (29.10)$$
$$I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}) = M\cos\theta$$

Từ (29.10) ta thu được các kết quả sau;

$\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \theta = const$ - góc giữa trục của con quay và véc tơ mômen $\vec{M}$ là không đổi.

$\dot{\varphi} = \dfrac{M}{I_2}$ được gọi là vận tốc tiến động.

$M_3 = M\cos\theta = I_3\Omega_3 \Rightarrow \Omega_3 = \dfrac{M\cos\theta}{I_3}$ là vận tốc góc quay của con quay xung quanh trục riêng của nó.

§30. CÁC PHƯƠNG TRÌNH EULER

Ở §28 chúng ta đã nhận được hai phương trình véc tơ mô tả chuyển động của vật rắn tương đối với hệ toạ độ “bất động” $\dot{\vec{P}} = \vec{F}$ và $\dot{\vec{M}} = \vec{K}$, ở đây $\dfrac{d\vec{P}}{dt}$ và $\dfrac{d\vec{M}}{dt}$ biểu thị sự thay đổi của xung lượng và mômen xung lượng của vật rắn theo thời gian tương đối với hệ toạ độ “bất động”

Ta nhận thấy giữa các thành phần của mômen $\vec{M}$ của vật rắn và các thành phần của véc tơ vận tốc góc $\vec{\Omega}$ có mối liên hệ đơn giản trong hệ toạ độ chuyển động có các trục hướng theo các trục quán tính chính. Để sử dụng mối liên hệ này trước hết chúng ta đi biến đổi các phương trình chuyển động cho tương ứng với hệ toạ độ chuyển động x_1, x_2, x_3.

Ta đã biết, nếu trong hệ toạ độ chuyển động quay, véc tơ $\vec{A}$ không thay đổi thì sự thay đổi của nó ứng với hệ toạ độ "bất động" sẽ là:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left[\vec{\Omega} \times \vec{A}\right] \tag{30.1}$$

Trong trường hợp tổng quát thì sự thay đổi của véc tơ $\vec{A}$ tương ứng với hệ toạ độ "bất động" là:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \left[\vec{\Omega} \times \vec{A}\right] \tag{30.2}$$

Ở đó $\frac{d'\vec{A}}{dt}$ là sự thay đổi của véc tơ $\vec{A}$ tương ứng với hệ toạ độ chuyển động.

Dựa vào công thức tổng quát (30.2) này ta có thể viết lại các phương trình véc tơ $\dot{\vec{M}} = \vec{K}$ và $\dot{\vec{P}} = \vec{F}$ dưới dạng sau:

$$\dot{\vec{P}} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d'\vec{P}}{dt} + \left[\vec{\Omega} \times \vec{p}\right] = \vec{F} \tag{30.3}$$

$$\dot{\vec{M}} = \frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d'\vec{M}}{dt} + \left[\vec{\Omega} \times \vec{M}\right] = \vec{K}$$

Các đạo hàm $\frac{d'\vec{P}}{dt}, \frac{d'\vec{M}}{dt}$ được tiến hành trong hệ toạ độ chuyển động cho nên ta có thể tìm được các hình chiếu của các phương trình (30.3) xuống các trục của hệ toạ chuyển động.

Nếu dùng các ký hiệu:

$$\left(\frac{d'\vec{P}}{dt}\right)_1 = \frac{dP_1}{dt};\ \ldots\ldots$$

$$\left(\frac{d'\vec{M}}{dt}\right)_1 = \frac{dM_1}{dt};\ \ldots\ldots$$

Ở đó các chỉ số 1, 2, 3 chỉ những thành phần theo các trục x_1, x_2, x_3 và lưu ý rằng $\vec{P} = \mu\vec{V}$, $M_1 = I_1\Omega_1$, $M_2 = I_2\Omega_2$, $M_3 = I_3\Omega_3$ thì ta sẽ nhận được các phương trình hình chiếu xuống các trục x_1, x_2, x_3 như sau;

$$\mu\left(\frac{dV_1}{dt} + \Omega_2 V_3 - \Omega_3 V_2\right) = F_1$$

$$\mu\left(\frac{dV_2}{dt} + \Omega_3 V_1 - \Omega_1 V_3\right) = F_2 \qquad (30.4)$$

$$\mu\left(\frac{dV_3}{dt} + \Omega_1 V_2 - \Omega_2 V_1\right) = F_3$$

$$I_1\frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3 = K_1$$

$$I_2\frac{d\Omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\Omega_1\Omega_3 = K_2 \qquad (30.5)$$

$$I_3\frac{d\Omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 = K_3$$

Các phương trình (30.5) được gọi là các phương trình Euler.

Trường hợp quay tự do thì $\vec{K} = 0$ và các phương trình Euler sẽ có dạng đơn giản như sau:

$$\frac{d\Omega_1}{dt} + \frac{(I_3 - I_2)}{I_1}\Omega_2\Omega_3 = 0$$

$$\frac{d\Omega_2}{dt} + \frac{(I_1 - I_3)}{I_2}\Omega_1\Omega_3 = 0 \qquad (30.6)$$

$$\frac{d\Omega_3}{dt} + \frac{(I_2 - I_1)}{I_3}\Omega_1\Omega_2 = 0$$

Để ví dụ, ta hãy ứng dụng những phương trình đó cho chuyển động quay tự do của con quay đối xứng đã khảo sát ở trên. Đặt $I_1 = I_2$ từ phương trình thứ ba ta có:

$\dot{\Omega}_3 = 0$ nghĩa là $\Omega_3 = \text{const}$.

hai phương trình đầu của (30.6) có thể viết dưới dạng sau:

$$\dot{\Omega}_1 = -\omega\,\Omega_2$$

$$\dot{\Omega}_2 = \omega\,\Omega_1 \qquad (30.7)$$

Ở đó $\omega = \Omega_3 \dfrac{I_3 - I_1}{I_1}$ là một lượng không đổi.

Nhân phương trình thứ hai của (30.7) với i rồi cộng với phương trình đầu ta được:

$$\frac{d}{dt}\left(\Omega_1 + i\Omega_2\right) = i\omega\left(\Omega_1 + i\Omega_2\right) \qquad (30.8)$$

Từ (30.8) suy ra:

$$\Omega_1 + i\Omega_2 = Ae^{i\omega t} \qquad (30.9)$$

Ở đó A là hằng số và được xem là thực (điều này quy về cách chọn gốc toạ độ thời gian cho thích hợp) và như vậy ta có:

$$\Omega_1 = A\cos\omega t \quad ; \quad \Omega_2 = A\sin\omega t \qquad (30.10)$$

Kết quả này chứng tỏ rằng hình chiếu của vận tốc góc trên mặt phẳng vuông góc với trục riêng của con quay quay trong mặt phẳng đó với vận tốc ω và có giá trị luôn không đổi $\left(\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} = A\right)$.

Vì hình chiếu Ω_3 trên trục của con quay cũng không đổi, nên ta kết luận rằng cả véc tơ $\vec{\Omega}$ quay đều với vận tốc góc ω quanh trục của con quay và có giá trị không đổi.

Do mối liên hệ $M_1 = I_1\Omega_1$, $M_2 = I_2\Omega_2$, $M_3 = I_3\Omega_3$ giữa các thành phần của của hai véc tơ $\vec{M}$ và $\vec{\Omega}$ cho nên cả hai véc tơ mômen $\vec{M}$ cũng quay đều với vận tốc góc ω quanh trục của con quay và có gía trị không đổi.

§31. CHUYỂN ĐỘNG TRONG HỆ QUY CHIẾU PHI QUÁN TÍNH

Từ trước tới nay ta đã xét chuyển động của hệ cơ học trong hệ quy chiếu quán tính. Trong hệ quy chiếu quán tính, hàm Lagrange của một hạt chuyển động trong trường ngoài U có dạng:

$$L_0 = \frac{mv_0^2}{2} - U \tag{31.1}$$

và phương trình chuyển động tương ứng là:

$$m\frac{dv_0}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial r} \tag{31.2}$$

Ở đó chỉ số 0 ta quy ước viết dưới các đại lượng được xác định tương ứng với hệ quy chiếu quán tính.

Bây giờ ta đi xét chuyển động của hạt trong hệ quy chiếu phi quán tính. Để giải quyết bài toán này chúng ta vẫn dựa vào nguyên lý tác dụng tối thiểu (nguyên lý tổng quát này không phụ thuộc vào việc chọn hệ quy chiếu) và phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}-\frac{\partial L}{\partial r}=0 \qquad (31.3)$$

Tuy nhiên hàm Lagrange L trong hệ quy chiếu phi quán tính sẽ không có dạng như (31.1).

Để tìm hàm Lagrange tương ứng ta làm phép biến đổi từ hệ quy chiếu quán tính sang hệ quy chiếu phi quán tính theo hai bước sau:

1). Xét hệ quy chiếu K' chuyển động tịnh tiến tương đối với hệ quy chiếu quán tính K_0 với vận tốc $\vec{V}(t)$.

Khi đó các vận tốc $\vec{v}_0$ và $\vec{v}$ của hạt tương ứng với các hệ quy chiếu quán tính K_0 và K' liên hệ với nhau theo biểu thức sau:

$$\vec{v}_0 = \vec{v}' + \vec{V}(t) \qquad (31.4)$$

Thay (31.4) vào (31.1) ta có hàm Lagrange trong hệ quy chiếu K':

$$L' = \frac{m\vec{v}'^2}{2} + m\vec{v}'.\vec{V}(t) + \frac{m\vec{V}^2(t)}{2} - U \qquad (31.5)$$

Vì $\vec{V}^2(t)$ là hàm cho trước của thời gian cho nên nó có thể biểu diễn dưới dạng đạo hàm toàn phần theo thời gian của một hàm nào đó phụ thuộc vào thời gian và do vậy số hạng thứ ba của (31.5) có thể bỏ khi đi tìm phương trình chuyển động theo nguyên lý tác dụng tối thiểu.

Tiếp theo ta thấy $\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt}$ ở đó véc tơ $\vec{r}'$ là véc tơ bán kính của hạt trong hệ quy chiếu K' vì vậy ta có:

$$m\vec{v}'.\vec{V}(t) = m\vec{V}(t).\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{V}(t).\vec{r}'\right) - m\vec{r}'.\frac{dV(t)}{dt}$$

Cũng với lý luận như trên số hạng đầu của biểu thức này cũng có thể bỏ khi đi tìm phương trình chuyển động.

Như vậy hàm Lagrange L' sẽ là:

$$L' = \frac{m\vec{v}'^2}{2} - m\vec{r}'.\frac{d\vec{V}(t)}{dt} - U \quad (31.6)$$

$\frac{d\vec{V}(t)}{dt} \equiv \vec{W}$ được gọi là gia tốc của chuyển động tiến của hệ K' tương đối với K_0.

$$L' = \frac{m\vec{v}'^2}{2} - m\vec{r}'.\vec{W} - U \quad (31.7)$$

Thay (31.7) vào (31.3) ta có phương trình:

$$m\frac{d\vec{v}'}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}'} - m\vec{W} \quad (31.8)$$

Từ (31.8) ta nhận thấy sự chuyển động tuyến tính của hệ quy chiếu K' tương đối với K_0 dẫn đến sự xuất hiện một trường lực bổ xung có giá trị lực tác dụng là $\left|\overline{m\vec{W}}\right|$ và có chiều ngược với véc tơ gia tốc $\vec{W}$.

2) Bước hai ta đi xét một hệ quy chiếu K có chung gốc toạ độ với hệ quy chiếu K' nhưng K quay tương đối với K' với vận tốc góc Ω(t). Như vậy hệ quy chiếu phi quán tính K chuyển động tuyến tính và quay tương đối với hệ quy chiếu quán tính K_0.

Các vận tốc của hạt tương đối với hệ quy chiếu phi quán tính K' và K có mối liên hệ như sau:

$$\vec{v}' = \vec{v} + \left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right] \quad (31.9)$$

(Các véc tơ bán kính $\vec{r}$ và $\vec{r}\,'$ của hạt trong hệ quy chiếu K và K' trùng nhau ----> $\vec{r} = \vec{r}\,'$).

Thay (31.9) vào (31.7) ta sẽ nhận được hàm Lagrange

$$L = \frac{m}{2}\vec{v}^2 + m\vec{v}.\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right] + \frac{m}{2}\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right]^2 - m\vec{r}.\vec{W} - U \quad (31.10)$$

Biểu thức (31.10) là hàm Lagrange của hạt trong hệ quy chiếu phi quán tính K. Sự quay của hệ quy chiếu K dẫn đến sự xuất hiện một số hạng phụ thuộc tuyến tính vào vận tốc (số hạng thứ hai của (31.10)).

Để tính các đạo hàm của hàm Lagrange trong quá trình tìm phương trình chuyển động trước hết ta đi tính vi phân hàm L theo $\vec{r}$ và $\vec{v}$.

$$\begin{aligned}
dL &= m\vec{v}.d\vec{v} + md\vec{v}.\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right] + m\vec{v}.\left[\vec{\Omega} \times d\vec{r}\right] + \\
&\quad + m\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right].\left[\vec{\Omega} \times d\vec{r}\right] - m\vec{W}.d\vec{r} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}.d\vec{r} = \\
&= m\vec{v}.d\vec{v} + md\vec{v}.\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right] + md\vec{r}\left[\vec{v} \times \vec{\Omega}\right] + \\
&\quad + m\left[\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right] \times \vec{\Omega}\right].d\vec{r} - m\vec{W}.d\vec{r} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}.d\vec{r}
\end{aligned} \tag{31.11}$$

Từ (31.11) ta dễ dàng tìm được các đạo hàm của L theo $\vec{v}$ và $\vec{r}$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + m\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = m\left[\vec{v} \times \vec{\Omega}\right] + m\left[\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right] \times \vec{\Omega}\right] - m\vec{W} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$$

Như vậy phương trình chuyển động của hạt trong hệ quy chiếu phi quán tính K sẽ là:

$$\begin{aligned}
m\frac{d\vec{v}}{dt} &= -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - m\vec{W} + 2m\left[\vec{v} \times \vec{\Omega}\right] + \\
&\quad + m\left[\vec{\Omega} \times \left[\vec{r} \times \vec{\Omega}\right]\right] + m\left[\vec{r} \times \dot{\vec{\Omega}}\right]
\end{aligned} \tag{31.12}$$

Ta nhận thấy từ (31.12) ba lực liên quan đến sự quay của hệ quy chiếu K là:

+ Lực $2m\left[\vec{v} \times \vec{\Omega}\right]$ được gọi là lực Koryolis. Nó phụ thuộc vào vận tốc tuyến tính của hạt $\vec{v}$.

++ Lực $m\left[\vec{\Omega} \times \left[\vec{r} \times \vec{\Omega}\right]\right]$ được gọi là lực ly tâm. Nó nằm trên mặt phẳng $\vec{r}$, $\vec{\Omega}$ và vuông góc với trục quay, có hướng đi khỏi trục quay. Về giá trị nó bằng $m\rho\Omega^2$, ở đó ρ là khoảng cách của hạt tới trục quay.

+++ Lực $m\left[\vec{r} \times \dot{\vec{\Omega}}\right]$ là lực liên quan đến sự quay không đều.

Bây giờ ta xét một trường hợp đặc biệt, đó là trường hợp hệ toạ độ chuyển động quay đều và không có gia tốc chuyển động tịnh tiến; tức là $\vec{\Omega} = \text{const}$ và $\vec{W} = 0$.

Trong trường hợp này, hàm Lagrange của hạt sẽ là:

$$L = \frac{m\vec{v}^2}{2} + m\vec{v}.\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right] + \frac{m}{2}\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right]^2 - U \qquad (31.13)$$

và phương trình chuyển động có dạng sau:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + 2m\left[\vec{v} \times \vec{\Omega}\right] + m\left[\vec{\Omega} \times \left[\vec{r} \times \vec{\Omega}\right]\right] \qquad (31.14)$$

Ta tính năng lượng của hạt ở trong trường hợp này:

$$E = \vec{p}.\vec{v} - L \qquad (31.15)$$

$\vec{p} = \dfrac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + m\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right]$. Thay $\vec{p}$ vào biểu thức trên ta có:

$$E = m\vec{v}^2 + m\vec{v}.\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right] - \frac{m\vec{v}^2}{2} - m\vec{v}.\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right] -$$

$$- \frac{m}{2}\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right]^2 + U = \qquad (31.16)$$

$$= \frac{m\vec{v}^2}{2} + U - \frac{m}{2}\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right]^2$$

Sự quay đều của hệ quy chiếu đã làm xuất hiện thêm một thế năng bổ xung phụ thuộc vào toạ độ $\vec{r}$ và tỷ lệ với bình phương của vận tốc góc. Thế năng bổ xung này được gọi là thế năng xuyên tâm.

Vận tốc $\vec{v}$ của hạt trong hệ quy chiếu quay đều liên quan với vận tốc $\vec{v}_0$ của hạt tương đối với hệ quy chiếu quán tính K_0 bởi biểu thức sau (khi hai hệ này có gốc toạ độ trùng nhau):

$$\vec{v}_0 = \vec{v} + \left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right] \tag{31.17}$$

$$\vec{p}_0 = m\vec{v}_0 = m\vec{v} + m\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right] = \vec{p} \tag{31.18}$$

Các xung lượng của hạt trong các hệ quy chiếu K_0 và K trùng nhau và như vậy các mômen xung lượng trong K_0 và K cũng trùng nhau:

$$\vec{M}_0 = \left[\vec{r} \times \vec{p}_0\right] = \left[\vec{r} \times \vec{p}\right] = \vec{M} \tag{31.19}$$

Còn năng lượng của hạt trong các hệ quy chiếu K_0 và K là không trùng nhau:

$$E = \frac{mv^2}{2} + U - \frac{m}{2}\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right]^2 \overset{(31.17)}{=\!=\!=} \frac{m}{2}\left(\vec{v}_0 - \left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right]\right)^2 +$$

$$+ U - \frac{m}{2}\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right]^2 = \frac{m\vec{v}_0^2}{2} - m\vec{v}_0\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right] + \frac{m}{2}\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right]^2 +$$

$$+ U - \frac{m}{2}\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right]^2 = \frac{m\vec{v}_0^2}{2} + U - m\vec{v}_0\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right] \tag{31.20}$$

Vì $E_0 = \dfrac{m\vec{v}_0^2}{2} + U$ cho nên từ (31.20) ta có:

$$\begin{aligned} E &= E_0 - m\vec{\Omega}.\left[\vec{r} \times \vec{v}_0\right] \\ E &= E_0 - \vec{\Omega}.\vec{M} \end{aligned} \tag{31.21}$$

Công thức này là quy luật biến đổi năng lượng khi chuyển sang hệ quy chiếu quay đều.

Ở đây mặc dù ta xem xét cho một hạt nhưng ta có thể tổng quát hoá cho hệ cơ học bất kỳ gồm nhiều hạt và cũng dẫn đến kết quả như (31.21).

Chương 6

CÁC PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC

§32. CÁC PHƯƠNG TRÌNH HAMILTON

Ở các chương trước chúng ta đã mô tả hệ cơ học bởi hàm Lagrange phụ thuộc vào toạ độ suy rộng và vận tốc suy rộng. Cách mô tả này không phải là duy nhất. Trong một loạt các trường hợp, khi nghiên cứu cơ học người ta thấy việc mô tả hệ cơ học bởi hàm của toạ độ suy rộng và xung lượng suy rộng có ưu thế hơn. Đó là hàm Hamilton.

Quá trình chuyển cách chọn hệ các biến số độc lập được thực hiện bởi phép biến đổi, trong toán học được gọi là phép biến đổi Legendre. Trong trường hợp này phép biến đổi đó được thực hiện như sau:

Vi phân toàn phần của hàm Lagrange như một hàm của toạ độ suy rộng q_i và vận tốc suy rộng $\dot{q}_i$ là:

$$dL = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \qquad (32.1)$$

Ta đã biết xung lượng suy rộng $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, do vậy từ phương trình chuyển động Lagrange ta suy ra $\dfrac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i$. Thay các giá trị này vào (32.1) ta được:

$$dL = \sum_{i=1}^{s} \dot{p}_i\, dq_i + \sum_{i=1}^{s} p_i\, d\dot{q}_i \tag{32.2}$$

Số hạng thứ hai có thể viết lại dưới dạng sau:

$$\sum_{i=1}^{s} p_i\, d\dot{q}_i = d\left(\sum_{i=1}^{s} p_i\, \dot{q}_i\right) - \sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i\, dp_i \tag{32.3}$$

Thay (32.3) vào (32.2) ta được:

$$dL = \sum_{i=1}^{s} \dot{p}_i\, dq_i + d\left(\sum_{i=1}^{s} p_i\, \dot{q}_i\right) - \sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i\, dp_i \quad \text{hay}$$

$$d\left(\sum_{i=1}^{s} p_i\, \dot{q}_i - L\right) = -\sum_{i=1}^{s} \dot{p}_i\, q_i + \sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i\, dp_i \tag{32.4}$$

Biểu thức dưới dấu tích phân ở vế trái của công thức trên là năng lượng của hệ cơ học, biểu diễn qua toạ độ suy rộng và xung lượng suy rộng. Chúng ta ký hiệu:

$$H(q_i, p_i, t) \equiv \sum_{i=1}^{s} p_i\, \dot{q}_i - L \tag{32.5}$$

và gọi hàm H (q_i , p_i , t) là hàm Hamilton. Khi đó (32.4) được viết dưới dạng sau:

$$dH = -\sum_{i=1}^{s} \dot{p}_i\, dq_i + \sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i\, dp_i \tag{32.6}$$

Từ biểu thức này ta suy ra được các phương trình sau:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\ ; \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{32.7}$$

Các phương trình (32.7) là các phương trình chuyển động của hệ cơ học với các biến là p_i và q_i. Các phương trình này được gọi là các phương trình Hamilton. Ở đây ta có 2s phương trình vi phân bậc nhất cho 2s biến hàm $p_i(t)$ và $q_i(t)$.

Chú ý rằng các phương trình Hamilton (32.7) có thể quy ra từ nguyên lý biến phân $\delta S = 0$. Thật vậy, tích phân tác dụng S có thể biểu diễn dưới dạng sau:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^{s} p_i\,dq_i - H\,dt \right\} \tag{32.8}$$

Biến phân của tích phân tác dụng S sẽ là:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} \Big[\delta p_i\,dq_i + p_i\,d(\delta q_i) - \\ &\quad - \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i\,dt - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i\,dt \Big] = \\ &= \sum_{i=1}^{s} p_i\,\delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} \Big[\delta p_i \Big(dq_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}dt\Big) - \\ &\quad - \delta q_i \Big(dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}dt\Big) = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} \Big[\delta p_i \Big(dq_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}dt\Big) - \delta q_i \Big(dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}dt\Big) \Big] = 0 \end{aligned} \tag{32.9}$$

Từ (32.9) và lưu ý đến tính chất độc lập giữa các biến phân δq_i và δp_i, ta tìm được các phương trình (32.7)

Như vậy, nếu định luật chuyển động của hệ cơ học được mô tả bằng các phương trình Hamilton thì trạng thái của hệ cơ học được xác định bởi toạ độ suy rộng q_i và xung lượng suy rộng p_i.

Đạo hàm toàn phần của hàm Hamilton theo thời gian là:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i$$

Sử dụng các phương trình Hamilton ta được:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} - \sum_{i=1}^{s} \dot{p}_i \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{32.10}$$

Như vậy, trong trường hợp riêng, khi hàm Hamilton phụ thuộc không tường minh vào thời gian, thì ta có:

$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0$ và do vậy một lần nữa ta lại có định luật bảo toàn năng lượng.

§33. CÁC MÓC POISSON

Giả thiết f (p, q, t) là một hàm nào đó của toạ độ, xung lượng và thời gian. Chúng ta hãy tính đạo hàm toàn phần của hàm đó theo thời gian.

$$\frac{d}{dt} f(p,q,t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) \tag{33.1}$$

Thay vào (33.1) $\dot{q}_i$ và $\dot{p}_i$ từ các phương trình Hamilton ta được:

$$\frac{d}{dt} f(p,q,t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \tag{33.2}$$

Ta đưa vào ký hiệu:

$$\{H, f\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \tag{33.3}$$

và gọi nó là Móc Poisson của các đại lượng H và f.

Sử dụng ký hiệu Móc Poisson ta có thể viết lại (33.2) như sau:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} \tag{33.4}$$

Để hàm f (p, q, t) là một tích phân chuyển động thì:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} = 0 \tag{33.5}$$

Nếu tích phân chuyển động f không phụ thuộc tường minh vào thời gian t thì:

$$\{H, f\} = 0 \tag{33.6}$$

Có nghĩa là Móc Poisson của f với hàm Hamilton phải bằng 0.

Để cho một cặp các đại lượng f và g thì Móc Poisson cũng được định nghĩa tương tự như (33.3):

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} \right) \tag{33.7}$$

Các tính chất của Móc Poisson được suy trực tiếp từ định nghĩa (33.7):

1) $\{f, g\} = -\{g, f\}$

2) $\{f, c\} = 0$ với c = const

3) $\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}$

4) $\{f_1 f_2, g\} = f_1\{f_2, g\} + f_2\{f_1, g\}$

5) Lấy đạo hàm theo thời gian biểu thức (33.7) ta có:

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\}$$

6) Nếu một trong hai đại lượng f và g trùng với xung lượng hoặc toạ độ thì:

$$\{f, q_i\} = \frac{\partial f}{\partial p_i}$$

$$\{f, p_i\} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}$$

7) Đặt $f = q_k$ và $f = p_k$ vào tính chất 6 ta có tính chất sau:

$$\{q_k, q_i\} = \frac{\partial q_k}{\partial p_i} = 0$$

$$\{p_k, p_i\} = \frac{-\partial p_k}{\partial q_i} = 0$$

$$\{p_k, q_i\} = \frac{\partial p_k}{\partial p_i} = \delta_{ik}$$

8) Đẳng thức Jacobi:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

9) Định lý Poisson: nếu f và g là hai tích phân chuyển động thì Móc Poisson của hai đại lượng đó cũng là tích phân chuyển động ($\{f, g\} = const$)

+ Nếu f, g không phụ thuộc vào thời gian một cách tường minh thì việc chứng minh định lý trên hoàn toàn đơn giản. Trong đẳng thức Jacobi ta đặt h = H, ta được:

$$\{f, \{g, H\}\} + \{g, \{H, f\}\} + \{H, \{f, g\}\} = 0$$

Từ đó ta thấy rằng nếu:

$\{H, f\} = 0$ và $\{H, g\} = 0$ thì

$\{H, \{f, g\}\} = 0$, điều phải chứng minh.

+ Nếu f, g phụ thuộc tường minh vào thời gian thì ta có thể viết trên cơ sở công thức (33.4) như sau:

$$\frac{d}{dt}\{f, g\} = \frac{\partial \{f, g\}}{\partial t} + \{H, \{f, g\}\}$$

Sử dụng tính chất 5 và đẳng thức Jacobi ta được:

$$\frac{d}{dt}\{f, g\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\} - \{f, \{g, H\}\} - \{g, \{H, f\}\} =$$

$$= \left\{\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}\right), g\right\} + \left\{f, \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \{H, g\}\right)\right\} =$$

$$= \left\{\frac{df}{dt}, g\right\} + \left\{f, \frac{dg}{dt}\right\} = 0$$

(vì $\frac{df}{dt} = 0$ và $\frac{dg}{dt} = 0$). Như vậy ta đã chứng minh được định lý Poisson cho trường hợp tổng quát.

Sử dụng định lý Poisson chúng ta không phải lúc nào cũng nhận được một tích phân chuyển động mới. Đại lượng $\{f, g\}$ có thể chỉ là một hàm không đổi của các tích phân chuyển động f và g.

§34. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI CHÍNH TẮC VÀ ĐỊNH LÝ LIOUVILLE

Nguyên lý tác dụng tối thiểu đúng cho mọi hệ toạ độ suy rộng. Do vậy các phương trình chuyển động Lagrange nhận được từ nguyên lý trên theo toạ độ suy rộng $q_1, q_2, \dots q_s$ hay theo toạ độ suy rộng khác $Q_1, Q_2, \dots Q_s$ đều có dạngnhư nhau. Tập hợp các toạ độ suy rộng q_i hay Q_i $(i = 1, 2, \dots s)$ đều xác định vị trí của một hệ cơ học. Vì vậy, phép biến đổi từ toạ độ suy rộng q_i sang các toạ độ Q_i sẽ là phép biến đổi sau:

$$Q_i = Q_i(q_1, q_2, \dots q_s, t) = Q_i(q, t) \tag{34.1}$$

Đối với những phép biến đổi (34.1) các phương trình Lagrange và dĩ nhiên cả các phương trình Hamilton đều bảo toàn dạng. Tuy nhiên, những phương trình Hamilton thực ra nhận một lớp biến đổi rộng rãi hơn nhiều. Điều này dĩ nhiên liên quan đến sự việc là trong phương pháp Hamilton những xung lượng p và những toạ độ q đóng vai trò những biến số ngang hàng nhau. Vì vậy khái niệm biến đổi có thể mở rộng sao cho nó có thể bao trùm cả phép biến số đổi từ tất cả 2s biến số độc lập p và q sang những biến mới P và Q theo những công thức sau:

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i(p, q, t) \\ P_i &= P_i(p, q, t) \qquad (i = 1, 2, \dots s) \end{aligned} \tag{34.2}$$

Sự mở rộng lớp những biến đổi cho phép như vậy là một trong những ưu việt cốt yếu của phương pháp Hamilton trong cơ học.

Tuy nhiên, không phải với bất kỳ phép biến đổi nào có dạng như (34.2) các phương trình chuyển động cũng bảo toàn dạng chính tắc của nó. Bây giờ ta hãy đề ra những điều kiện mà các phép biến đổi cần phải thoả mãn để các phương trình chuyển động đối với những toạ độ mới P, Q cũng vẫn có dạng:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}\ ;\ \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} \tag{34.3}$$

với một hàm Hamilton mới nào đó H' (P, Q). Các phép biến đổi như vậy được gọi là các phép biến đổi chính tắc.

Để nhận được các công thức của các phép biến đổi chính tắc chúng ta cũng có thể tiến hành theo đường lối như sau:

Ở cuối §32 chúng ta đã chỉ ra rằng các phương trình Hamilton có thể tìm được trực tiếp từ nguyên lý tác dụng tối thiểu biểu diễn dưới dạng:

$$\delta S = \delta \int \left(\sum_i p_i\, dq_i - H dt \right) = 0 \tag{34.4}$$

(ở đây những toạ độ và xung lượng biến thiên độc lập với nhau).

Để những toạ độ mới P và Q có thể thảo mãn những phương trình Hamiton thì P và Q cũng cần phải thoả mãn nguyên lý tác dụng tối thiểu

$$\delta S = \delta \int \left(\sum_i P_i\, dQ_i - H' dt \right) = 0 \tag{34.5}$$

Nhưng hai nguyên lý (34.4) và (34.5) chỉ tương đương với nhau với điều kiện là những biểu thức dưới dấu tích phân của chúng chỉ khác nhau một vi phân toàn phần của một hàm số F nào đó của toạ độ xung lượng và thời gian, vì hiệu giữa hai tích phân đó sẽ là hằng số (hằng số này là những giá trị của F tại các giới hạn của tích phân).

Như vậy chúng ta phải có:

$$\sum p_i\, dq_i - H dt = \sum P_i\, dQ_i - H' dt + dF \qquad (34.6)$$

Mọi phép biến đổi chính tắc đều được đặc trưng bởi một hàm số F, hàm số này được gọi là hàm sinh của phép biến đổi.

Viết (34.6) dưới dạng:

$$dF = \sum p_i\, dq_i - \sum P_i\, dQ_i + (H' - H)\, dt \qquad (34.7)$$

chúng ta thấy rằng:

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}\ ;\ P_i = \frac{\partial F}{\partial Q_i}\ ;\ H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} \qquad (34.8)$$

Ở đây, chúng ta đã giả thiết rằng hàm sinh được cho như là một hàm của những toạ độ cũ, của những toạ độ mới và của thời gian F = F (q, Q, t). Với hàm F cho sẵn, những công thức (34.8) thành lập một hệ thức giữa những biến số cũ (p, q) và biến số mới (P, Q), và đồng thời cho biểu thức của hàm Hamilton mới.

Để tiện lợi, có lúc cần phải biểu diễn hàm sinh không phải theo những biến số q và Q, mà lại theo những biến số cũ q và xung lượng mới P. Trong trường hợp này, để suy ra những công thức của các phép biến đổi chính tắc, cần phải thực hiện những phép biến đổi Legendre tương ứng trong hệ thức (34.7). Cụ thể, chúng ta viết hệ thức đó dưới dạng:

$$d\left(F + \Sigma P_i Q_i\right) = \Sigma p_i\, dq_i + \Sigma Q_i\, dP_i + (H' - H)\, dt$$

Biểu thức nằm dưới dấu vi phân ở vế trái của đẳng thức trên là hàm của những biến số q và P. Nó chính là hàm sinh mới và ta ký hiệu Φ(q, P, t). Khi đó ta có:

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \; ; \; Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i} \; ; \; H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \qquad (34.9)$$

Tương tự như vậy, có thể chuyển sang những công thức biến đổi chính tắc, biểu diễn theo những hàm sinh phụ thuộc vào những biến số p và Q hay p và P. Bây giờ chúng ta khảo sát tính chất của không gian pha khi thực hiện một phép biến đổi chính tắc. Không gian pha là không gian 2s chiều, trên các trục toạ độ người ta đặt các giá trị của s toạ độ suy rộng và s xung lượng suy rộng của hệ cơ học đã cho. Mỗi một điểm của không gian pha này ứng với một trạng thái xác định của hệ cơ học.

Khi hệ cơ học chuyển động, điểm pha của nó vạch trong không gian pha một đường tương ứng, gọi là quỹ đạo pha. Tích các vi phân

$$d\Gamma = dq_1\, dq_2 \,........\, dq_s\, dp_1\, dp_2 \,.......\, dp_s \qquad (34.10)$$

có thể coi như "thể tích nguyên tố" của không gian pha. Chúng ta xét tích phân của dΓ theo một miền nào đó của không gian pha và chứng minh rằng lượng này có tính chất bất biến đối với các phép biến đổi chính tắc (nếu thực hiện phép biến đổi chính tắc từ những biến số q, p sang những biến số Q, P thì thể tích pha tương ứng của các miền không gian p, q và P, Q sẽ giống nhau):

$$\begin{aligned} &\iint......\int dq_1\, dq_2 \,......dq_s\, dp_1\, dp_2 ....dp_s = \\ &= \iint......\int dQ_1\, dQ_2 \,......dQ_s\, dP_1\, dP_2 ....dP_s \end{aligned} \qquad (34.11)$$

Như ta đã biết, phép biến đổi biến số trong tích phân nhiều lớp tuân theo công thức:

$$\iint\ldots\int dQ_1\, dQ_2 \ldots dQ_s\, dP_1\, dP_2 \ldots dP_s =$$

$$= \iint\ldots\int D\, dq_1\, dq_2 \ldots dq_s\, dp_1\, dp_2 \ldots dp_s$$

Ở đó $D = \dfrac{\partial(Q_1, Q_2 \ldots Q_s, P_1, P_2 \ldots P_s)}{\partial(q_1, q_2 \ldots q_s, p_1, p_2 \ldots p_s)}$ (34.12)

là Jacobien của phép biến đổi. Bởi vậy, chứng minh công thức (34.11) dẫn đến việc chứng minh Jacobien của mọi phép biến đổi chính tắc đều bằng đơn vị:

$$D = 1$$

Với một ý nghĩa xác định, dựa vào các tính chất đã biết của các Jacobien, có thể xem chúng như những phân số. "Chia tử số và mẫu số" cho $\partial(q_1 q_2 \ldots q_s, P_1, P_2 \ldots P_s)$ ta được:

$$D = \frac{\dfrac{\partial(Q_1, Q_2 \ldots Q_s, P_1, P_2 \ldots P_s)}{\partial(q_1, q_2 \ldots q_s, P_1, P_2 \ldots P_s)}}{\dfrac{\partial(q_1, q_2 \ldots q_s, p_1, p_2 \ldots p_s)}{\partial(q_1, q_2 \ldots q_s, P_1, P_2 \ldots P_s)}} \tag{34.13}$$

Theo một định lý về Jacobien khác đã biết: nếu "tử số và "mẫu số" có các lượng giống nhau, thì làm cho jacobien có số biến số ít đi, đồng thời trong tất cả các phép vi phân, những đại lượng giống nhau được coi như các hằng số và bị mất đi. Bởi vậy ta có:

$$D = \frac{\left\{\dfrac{\partial(Q_1, Q_2 \ldots Q_s)}{\partial(q_1, q_2 \ldots q_s)}\right\}_{P = const}}{\left\{\dfrac{\partial(p_1, p_2 \ldots p_s)}{\partial(P_1, P_2 \ldots P_s)}\right\}_{q = const}} \tag{34.14}$$

Chúng ta xét Jacobien ở tử số của (34.14). Theo định nghĩa, đó là định thức hạng s của các yếu tố $\dfrac{\partial Q_i}{\partial q_k}$ (yếu tố nằm ở giao điểm của hàng i cột k). Biểu diễn phép biến đổi chính tắc theo hàm sinh Φ (q,P) trong công thức (34.9) ta được:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_k \partial P_i}$$

Cũng như thế, ta tìm được yếu tố hàng i cột k của định thức ở mẫu số của công thức (34.14) bằng

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_i \partial P_k}$$

Điều đó có nghĩa là cả hai định thức chỉ khác nhau bởi phép biến đổi hàng thành cột và ngược lại. Do vậy, chúng bằng nhau, vì thế tỷ số (34.14) bằng 1, điều ta phải chứng minh.

Bây giờ ta tưởng tượng là, mỗi điểm của phần đã cho của không gian pha biến đổi theo thời gian và thoả mãn phương trình chuyển động của hệ cơ học đang xét. Tất cả phần đã cho cũng biến đổi như thế. Khi đó thể tích của nó vẫn không biến đổi:

$$\int d\Gamma = \text{const} \tag{34.15}$$

Điều khẳng định này (gọi là định lý Liouville) được trực tiếp suy ra từ tính chất bất biến của thể tích pha trong các phép biến đổi chính tắc. Định lý này là một cơ sở để xây dựng vật lý thống kê kinh điển và lý thuyết thống kê các quá trình không cân bằng.

§35. PHƯƠNG TRÌNH HAMILTON - JACOBI

Khi phát biểu nguyên lý tác dụng tối thiểu chúng ta đã xem xét tích phân:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt \tag{35.1}$$

lấy theo quỹ đạo giữa hai vị trí cho trước $q^{(1)}$ và $q^{(2)}$ mà hệ cơ học chiếm giữ ở hai thời điểm cho trước t_1 và t_2.

Khi thực hiện phép biến phân tích phân tác dụng S, những giá trị của tích phân đó đã được so sánh với nhau đối với các quỹ đạo gần nhau và cùng có điểm đầu và điểm cuối $q^{(1)}$ và $q^{(2)}$. Chỉ có một trong các quỹ đạo đó tương ứng với chuyển động thật - đó là quỹ đạo, tương ứng với nó tích phân tác dụng S có giá trị tối thiểu.

Bây giờ chúng ta xét khái niệm tích phân tác dụng ở góc độ khác. Cụ thể là xem S như là đại lượng đặc trưng cho chuyển động theo các quỹ đạo thật và so sánh các giá trị mà nó nhận được cho các quỹ đạo có cùng điểm đầu là $q(t_1) = q^{(1)}$ nhưng ở thời điểm t_2 thì qua các vị trí khác nhau. Nói cách khác chúng ta sẽ xem tích phân tác dụng S cho các quỹ đạo thật như là hàm của các toạ độ ở cận trên của quá trình tích phân.

Như chúng ta đã biết ở chương đầu, sự thay đổi của tích phân tác dụng S khi chuyển từ quỹ đạo này sang quỹ đạo khác sẽ là:

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta q\,\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q\,dt \qquad (35.2)$$

Vì ở đây ta xét các quỹ đạo thật của chuyển động cho nên chúng phải thoả mãn các phương trình Lagrange, do vậy biểu thức trong ngoặc của số hạng thứ hai của (35.2) phải bằng không.

Ở số hạng đầu của (35.2), biên dưới $\delta q(t_1) = 0$, còn biên trên ta ký hiệu cho đơn giản là $\delta q(t_2) = \delta q$.

Chú ý rằng: $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p$, ta có biểu thức sau đối với hệ cơ học có bậc tự do là s:

$$\delta S = \sum_i p_i\,\delta q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, s) \qquad (35.3)$$

Từ biểu thức này ta suy ra rằng đạo hàm riêng của S theo toạ độ sẽ bằng xung lượng:

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i \tag{35.4}$$

Một cách tương tự, tích phân tác dụng có thể xem như một hàm phụ thuộc tường minh vào thời gian, và xét các quỹ đạo bắt đầu ở thời điểm t_1 ở vị trí cho trước $q^{(1)}$, nhưng kết thúc ở vị trí $q^{(2)}$ cho trước ở những thời điểm $t = t_2$ khác nhau. Hiểu theo cách đó thì đạo hàm của tích phân tác dụng S theo thời gian $\frac{dS}{dt}$ có thể tìm bằng cách biến phân tương ứng hàm S.

Theo chính định nghĩa của tích phân tác dụng, thì đạo hàm toàn phần theo thời gian của S dọc theo quỹ đạo là:

$$\frac{dS}{dt} = L \tag{35.5}$$

Mặt khác, xem S như hàm của toạ độ và thời gian trong ý nghĩa như đã nói ở trên ta có:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i \tag{35.6}$$

thay (35.4) vào (35.6) ta được:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i \tag{35.7}$$

Thay (35.5) vào biểu thức trên ta có:

$$L = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i \quad \text{hay}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_i p_i \dot{q}_i = -H(p_i, q_i, t) \tag{35.8}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(p_i, q_i, t)$$

Từ các biểu thức (35.4) và (35.8) ta tính được vi phân toàn phần của S (S được xem như là hàm toạ độ và thời gian) như sau:

$$dS = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial S}{\partial t} dt = \qquad (35.9)$$

$$= \sum_i p_i \, dq_i - H dt$$

và tích phân tác dụng S sẽ bằng:

$$S = \int \left(\sum_i p_i \, dq_i - H dt \right) \qquad (35.10)$$

Trong trường hợp riêng, nếu hàm H(p, q) không phụ thuộc tường minh vào thời gian, như vậy năng lượng sẽ bảo toàn, thì ta có thể thay H(p,q) bởi hằng số E và khi đó sự phụ thuộc của S vào thời gian sẽ dẫn đến số hạng - Et:

$$S = \int \sum_i p_i \, dq_i - Et = S_0(q) - Et \qquad (35.11)$$

Ở đó $S_0(q) = \int \sum_i p_i \, dq_i$ được gọi là tích phân tác dụng rút gọn.

Hàm S(q, t) thoả mãn phương trình vi phân mà chúng ta sẽ nhận được nếu thay $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$ vào phương trình (35.8) :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, q_1, q_2, \ldots, q_s, t \right) = 0 \qquad (35.12)$$

Phương trình này được gọi là phương trình Hamilton - Jacobi.

Như vậy để cho một hạt chuyển động trong trường ngoài U (x, y, z, t), phương trình Hamilton - Jacobi có dạng.

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right]+U(x,y,z,t)=0 \quad (35.13)$$

Chú ý rằng phương trình Hamilton - Jacobi sẽ có dạng đơn giản nhất, nếu hàm Hamilton H(p, q) không phụ thuộc tường minh vào thời gian. Đặt (35.11) vào (35.12) ta có:

$$H\left(\frac{\partial S_o}{\partial q_1},\frac{\partial S_o}{\partial q_2},\ldots\ldots\ldots\frac{\partial S_o}{\partial q_s},q_1,q_2,\ldots\ldots q_s\right)=E \qquad (35.14)$$

Cùng với phương trình Lagrange và phương trình chính tắc, phương trình Hamilton - Jacobi cũng là một phương trình cơ bản của một phương pháp tổng quát nào đó dùng để tích phân những phương trình chuyển động.

Phần 2

CƠ HỌC TƯƠNG ĐỐI TÍNH - LÝ THUYẾT TƯƠNN ĐỐI HẸP

Chương 7

NGUYÊN LÝ TƯƠNG ĐỐI EINSTEIN VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LORENTZ

§36. NGUYÊN LÝ TƯƠNG ĐỐI EINSTEIN

Cơ sở của lý thuyết tương đối chính là hai tiên đề của Einstein.

Tất cả các định luật của tự nhiên đều như nhau trong tất cả các hệ quy chiếu quán tính. Nói cách khác, các phương trình mô tả các định luật của tự nhiên đều bất biến khi ta làm phép biến đổi toạ độ và thời gian từ hệ quy chiếu quán tính này sang hệ quy chiếu quán tính khác.

Vận tốc ánh sáng trong chân không là vận tốc không đổi C và không phụ thuộc vào sự chuyển động của vật nguồn phát xạ ra ánh sáng.

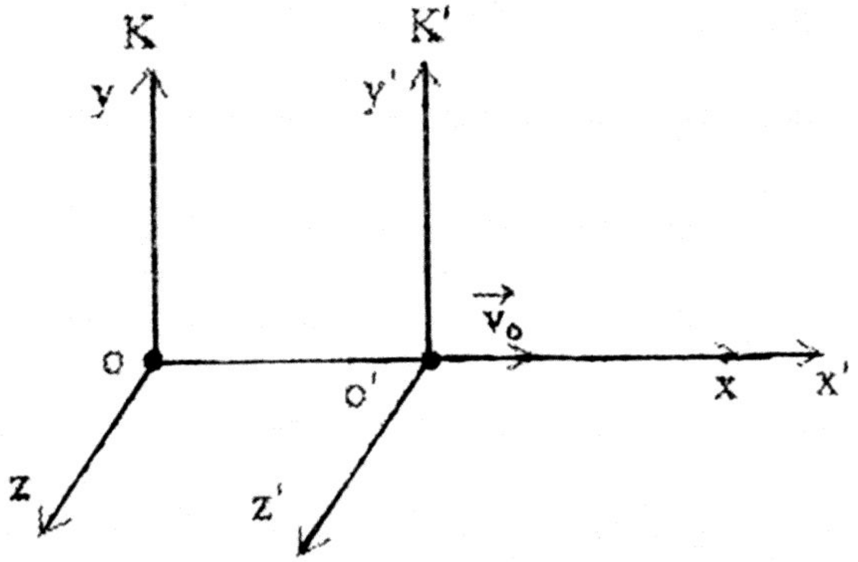
Như ta đã biết, cơ học kinh điển Newton xuất phát từ giả thiết về sự truyền tương tác tức thời từ vật này sang vật khác. Điều này được thể hiện là tương tác giữa các vật được mô tả bởi thế năng tương tác U (r_1, r_2, ...) phụ thuộc vào toạ độ của các vật. Bằng cách mô tả như vậy, ta giả thiết rằng sự thay đổi vị trí của một hạt đã tác động trực tiếp lên các hạt khác một cách tức thời.

Trong thực tế, thực nghiệm đã chỉ ra rằng các tương tác tức thời không tồn tại trong thiên nhiên. Nếu có sự tương tác làm thay đổi vị trí của một hạt thì sự tác động của hạt tương tác với nó sẽ xảy ra sau một khoảng thời gian cần thiết để tương tác truyền đi một quãng đường bằng khoảng cách giữa hai hạt.

Như vậy cần phải chấp nhận sự tồn tại một vận tốc giới hạn của quá trình tương tác. Từ thực nghiệm cho thấy vận tốc giới hạn đó là vận tốc ánh sáng trong chân không C.

Ta nhận thấy phép biến đổi cộng vận tốc của Galilée trong cơ học kinh điển không thoả mãn tiên đề thứ hai của Einstein.

Để chứng minh điều này ta đi xét hai hệ quy chiếu quán tính K và K'. Hệ quy chiếu K' chuyển động tương đối với hệ quy chiếu quán tính K với vận (Hình vẽ 17)



Hình vẽ 17

tốc không đổi $\vec{v}_0$ (hình vẽ 17): Các trục toạ độ của K và K' ở đây là $y \parallel y'$, $z \parallel z'$, x' và x cùng hướng với vận tốc $\vec{v}_0$.

Thời điểm gốc tính thời gian trong hai hệ quy chiếu quán tính bắt đầu từ thời điểm khi hai gốc toạ độ của hai hệ trùng nhau.

Ta giả sử rằng ở thời điểm $t = t' = 0$, từ điểm trùng của hai gốc toạ độ của hai hệ ta phát ra một tín hiệu ánh sáng truyền theo mọi hướng.

Đến thời điểm t tín hiệu trong hệ quy chiếu quán tính K sẽ đến những điểm cách gốc toạ độ 0 một khoảng là $l = ct$ và toạ độ của những điểm đó thoả mãn phương trình:

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \tag{36.1}$$

Hoàn toàn tương tự, đến thời điểm t' tín hiệu trong hệ quy chiếu quán tính K' sẽ đến các điểm của mặt cầu bán kính ct' và toạ độ của những điểm đó thoả mãn phương trình:

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0 \tag{36.2}$$

Phương trình (36.1) và (36.2) có dạng như nhau.

Nếu ta sử dụng phép biến đổi Galilée:

$$\begin{aligned} x &= x' + v_0 t' \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned} \tag{36.3}$$

và thay (36.3) vào (36.1) thì ta thấy kết quả không trùng với (36.2). Như vậy một lần nữa ta đi đến kết luận là các phép biến đổi Galilée không phù hợp với tiên đề hằng số ánh sáng.

Ngoài ra, các phương trình sóng điện từ Maxwell cũng không bất biến đối với phép biến đổi Galilée.

Như vậy cơ học phi tương đối tính bị bế tắc và cần phải được chính xác hoá sao cho các phương trình cơ học và các phương trình điện động lực học phải bất biến đối với một phép biến đổi chung khi chuyển từ hệ quy chiếu quán tính này sang hệ quy chiếu quán tính khác. Sự đòi hỏi trên làm xuất hiện cơ học tương đối tính dựa trên hai tiên đề của Einstein.

§37. KHOẢNG VÀ THỜI GIAN RIÊNG CỦA VẬT

Một sự kiện xảy ra với một hạt nào đó được đặc trưng bởi vị trí nơi sự kiện xảy ra (x, y, z) và thời gian t khi sự kiện xảy ra.

Nếu ta đưa vào không gian bốn chiều x, y, z, t (hoặc một đại lượng tỷ lệ với thời gian) thì sự kiện được đặc trưng bởi một điểm của không gian bốn chiều đó.

Chúng ta đi xét hai sự kiện: một trong hai sự kiện đó là sự kiện phát ra tín hiệu ánh sáng từ điểm x_1, y_1, z_1 ở thời điểm t_1. Còn sự kiện thứ hai là sự kiện tín hiệu ánh sáng đến điểm x_2, y_2, z_2 ở thời điểm t_2.

Giữa các toạ độ và thời gian của hai sự kiện đó có biểu thức sau:

$$c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = 0 \quad (37.1)$$

Đại lượng $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_{1,2}^2$ là bình phương khoảng cách giữa hai điểm trong không gian ba chiều thông thường.

Tương tự như vậy chúng ta có thể gọi khoảng cách giữa hai điểm của không gian bốn chiều hay khoảng giữa hai sự kiện như sau:

Khoảng giữa hai sự kiện được gọi là đại lượng $s_{1,2}$ mà bình phương của nó được xác định bởi công thức sau:

$$\begin{aligned} s_{1,2}^2 &= c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = \\ &= c^2 (t_2 - t_1)^2 - l_{1,2}^2 \end{aligned} \quad (37.2)$$

Để cho hai sự kiện vô cùng gần nhau thì bình phương của khoảng là:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2 \quad (37.3)$$

Như vậy đối với hai sự kiện: phát ra và đến của tín hiệu ánh sáng thì

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2 = 0 \quad (37.4)$$

Từ tiên đề hằng số của vận tốc ánh sáng ta suy ra đẳng thức (37.1) đúng với mọi quy chiếu quán tính và suy ra nếu khoảng bằng 0 ở hệ quy chiếu quán tính K thì nó sẽ bằng 0 ở bất kỳ hệ quy chiếu quán tính K' khác. Như vậy khoảng giữa hai sự kiện phát ra và đến của tín hiệu ánh sáng bằng không đồng thời trong tất cả các hệ quy chiếu quán tính.

Từ những nhận định trên ta suy ra rằng khoảng Δs giữa các sự kiện trong hệ quy chiếu quán tính K liên quan với khoảng $\Delta s'$ giữa các sự kiện đó trong hệ quy chiếu quán tính K' bởi biểu thức sau:

$$\Delta s' = a\,\Delta s \quad (37.5)$$

ở đó a là một số nào đó.

Do tính bình đẳng giữa hai hệ quy chiếu quán tính K và K' nên ta có thể viết:

$$\Delta s = a\,\Delta s' \quad (37.6)$$

ở đó a có giá trị như ở (37.5).

Nhân (37.5) với (37.6) ta được:

$$\Delta s'\,\Delta s = a^2\,\Delta s\,\Delta s' \Rightarrow a^2 = 1 \text{ và } a = \pm 1$$

Do dấu của khoảng trong mọi hệ quy chiếu quán tính phải như nhau nên ta phải loại a = -1.

Như vậy chúng ta đi đến kết luận là khoảng giữa hai sự kiện là một bất biến.

$$\Delta s' = \Delta s \quad (37.7)$$

Dựa trên tính chất bất biến của khoảng chúng ta có thể viết:

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta l'^2 \quad (37.8)$$

Bây giờ chúng ta xem xét một hạt nào đó chuyển động đều với vận tốc $\vec{}$ tương đối với hệ quy chiếu quán tính K. Giả sử đối với hạt đó xảy ra hai sự kiện cách nhau một khoảng thời gian là dt trong hệ quy chiếu quán tính K. Chúng ta đưa vào hệ quy chiếu quán tính K' mà tương đối với nó hạt đứng yên. Tronghệ quy chiếu quán tính K' này khoảng thời gian giữa hai sự kiện đang xét sẽ là:

$$dt' = \frac{ds}{c} \text{ (vì } ds^2 = c^2 dt'^2 - dl'^2 \text{ và } dl' = 0) \qquad (37.9)$$

Ta dễ dàng thấy rằng khoảng thời gian dt' được đo bằng đồng hồ chuyển động tương đối với K cùng với hạt. Thời gian được tính theo đồng hồ chuyển động cùng với vật được gọi là thời gian riêng của vật đó. Ta ký hiệu thời gian riêng là τ và có thể viết:

$$d\tau = \frac{ds}{c} \qquad (37.10)$$

Vì ds là bất biến, c cũng là bất biến cho nên thời gian riêng của vật $d\tau$ cũng là bất biến.

Bây giờ chúng ta đi tìm mối liên hệ giữa thời gian riêng $d\tau$ với thời gian dt được xác định bởi đồng hồ của hệ quy chiếu K.

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \frac{\sqrt{c^2 dt^2 - dl^2}}{c} =$$

$$= \frac{\sqrt{dt^2 \ (c^2 - dl^2 / dt^2)}}{c} = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$\frac{dl}{dt}$ là vận tốc của hạt chuyển động tương đối với K ta ký hiệu là v.

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (37.11)$$

Từ công thức (37.11) ta kết luận rằng, thời gian riêng của hạt nhỏ hơn khoảng thời gian tương ứng hệ "bất động" K.

Công thức (37.11) nhận được cho trường hợp chuyển động đều của hạt. Tuy nhiên, nó cũng đúng cho trường hợp chuyển động không đều. Do vậy để cho một khoảng thời gian hữu hạn chúng ta có thể viết biểu thức:

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}\, dt \qquad (37.12)$$

$v = v(t)$ là vận tốc của vật chuyển động không đều.

§38. KHÔNG GIAN MINKOVSKI

Khác với quan niệm không gian và thời gian $R^3 \times R$ của vật lý kinh điển phi tương đối tính, trong đó thời gian được xem là tuyệt đối, trong vật lý kinh điển tương đối tính, không gian và thời gian quan niệm là một không gian bốn chiều, ký hiệu là R^{3+1}, trong đó mọi véc tơ đều có bốn thành phần:

$$V = (V^0, \vec{V}), \quad V \in R^{3+1} \qquad (38.1)$$

với V^0 gọi là thành phần thời gian của V, còn ba thành phần của véc tơ ba chiều $\vec{V}$ là các thành phần không gian của V.

Nói riêng, véc tơ toạ độ có dạng:

$$X = (x^0, \vec{r}) = (ct, \vec{r}) \qquad (38.2)$$

Các véc tơ của không gian R^{3+1} được gọi là các véc tơ bốn chiều.

Trong không gian R^{3+1}, người ta phân biệt hai loại thành phần của véc tơ:

Các loại thành phần thứ nhất có dạng:

$$V^{\mu} = (V^0, V^i), \quad \vec{V} = (V^i), \quad i = 1, 2, 3; \mu = 0, 1, 2, 3 \tag{38.3}$$

gọi là các thành phần phản biến của véc tơ V.

Các loại thành phần loại hai theo định nghĩa có dạng sau:

$$V_{\mu} = (V_0, V_i), \quad i = 1, 2, 3; \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \tag{38.4}$$

gọi là các thành phần hiệp biến của véc tơ V.

Giữa hai loại véc tơ trên ta có hệ thức:

$$V_0 = V^0, \quad V_i = -V^i, \quad i = 1, 2, 3 \tag{38.5}$$

Nếu đưa vào ma trận

$$g = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mu, \nu = 0,1,2,3 \tag{38.6}$$

$$g_{00} = 1, \ g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \ g_{\mu\nu} = 0 \text{ khi } \mu \neq \nu$$

thì (38.5) được gọi viết dưới dạng sau:

$$V_{\mu} = \sum_{\nu} g_{\mu\nu} V^{\nu} \tag{38.7}$$

Nếu dùng ma trận ngược $(g^{\mu\nu})$ của ma trận $(g_{\mu\nu})$ với

$$\sum_{\nu} g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}, \quad g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0,1,2,3 \tag{38.8}$$

thì (38.5) cũng lại có thể viết dưới dạng:

$$V^{\mu} = \sum_{\nu} g^{\mu\nu} V_{\nu} \tag{38.9}$$

Ta lưu ý rằng các tổng ở các đẳng thức (38.7), (38.8) có chứa các chỉ số lặp lại hai lần. Để đơn giản hóa, với những tổng như thế, từ nay về sau ta bỏ dấu Σ. Thành thử, theo quy ước này các đẳng thức (38.7), (38.9) có thể viết gọn lại như sau:

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu \,, \; V^\mu = g^{\mu\nu} V_\nu \tag{38.10}$$

Về mặt hình thức có thể chứng tỏ rằng các lượng $\partial_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$, $\partial^\mu = \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$ tương ứng là những thành phần hiệp biến và phản biến của một véc tơ bốn chiều nào đó gọi là véc tơ građiên bốn chiều.

Bây giờ ta đưa vào khái niệm tích vô hướng trong không gian bốn chiều R^{3+1} nói trên. Cho hai véc tơ bốn chiều A và B, lượng

$$\langle A\,,B \rangle \equiv A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu \tag{38.11}$$

gọi là tích vô hướng của véc tơ A, B. Tích vô hướng (38.11) còn có dạng cụ thể như sau:

$$\begin{aligned}\langle A\,,B \rangle &= A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3 = \\ &= A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3\end{aligned} \tag{38.12}$$

Giữa tích vô hướng trong không gian R^{3+1} được định nghĩa ở trên và khái niệm tích vô hướng trong không gian Euclid thông thường có gì giống nhau và khác nhau? Trước hết ta thấy rằng các tính chất sau đây là những tính chung:

$$\langle A, B + C \rangle = \langle A, B \rangle + \langle A, C \rangle \tag{38.13}$$

$$\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle \tag{38.14}$$

$$\langle \alpha A, B \rangle = \langle A, \alpha B \rangle = \alpha \langle A, B \rangle \tag{38.15}$$

$\alpha \in \mathbb{C}$.

Sự khác nhau giữa các tích vô hướng nói trên là ở chỗ trong không gian Euclid thông thường thì tích vô hướng có tính chất xác định dương, còn trong không gian R^{3+1} thì theo (38.12) ta có:

$$\langle A\,,A \rangle = A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 - A_3^2 = A_0^2 - \vec{A}^2 \tag{38.16}$$

Lượng này có thể có dấu dương hoặc dấu âm, tức là không có tính chất xác định dương. Vì các lý do đó, không gian R^{3+1}, ở đó thiết lập tích vô hướng (38.11), gọi là không gian giả Euclid. Người ta còn gọi không gian này là không gian Minkovski.

Trong không gian Minkovski R^{3+1} (không gian giả Euclid)

Nếu $\langle A, A\rangle > 0$ thì véc tơ A gọi là đồng dạng thời gian, còn

Nếu $\langle A, A\rangle < 0$ thì véc tơ A gọi là đồng dạng không gian.

Theo định nghĩa (38.11) thì bình phương của khoảng sẽ được viết như sau:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^{02} - d\vec{l}^{\,2} = c^2 dt^2 - d\vec{l}^{\,2} = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = \\ &= g^{\mu\nu} dx_{\mu} dx_{\nu} = dx^{\mu} dx_{\mu} \end{aligned} \tag{38.17}$$

Trong không gian giả Euclid (không gian Minkovski) R^{3+1}, khái niệm khoảng có vị trí tương đương như vị trí của chiều dài trong không gian Euclid. Theo (38.17), khái niệm khoảng được xác định bởi các lượng $(g^{\mu\nu})$ hay $(g_{\mu\nu})$. Thành thử các lượng đó tương ứng gọi là mêtric phản biến và mêtric hiệp biến của không gian R^{3+1}.

Với không gian tuyến tính nói trên có thiết lập một tích vô hướng, vấn đề quan trọng là nghiên cứu các ánh xạ có liên quan đến tích vô hướng đó, đặc biệt là các ánh xạ bảo toàn tích vô hướng, và đây chính là điểm chủ yếu, từ đó suy ra được nhiều ý nghĩa của không gian giả Euclid đang xét. Quả vậy, ý nghĩa của bất biến cơ bản.

$$\Delta s^2 = \text{inv}\ ,\ ds^2 = \text{inv} \tag{38.18}$$

đề ra ở §37 khi nói đến nguyên lý tương đối Einstein, là ở chỗ đặt vấn đề tìm tập hợp tất cả các phép biến đổi tuyến tính L của không gian giả Euclid R^{3+1} có tính chất bảo toàn các tích vô hướng sau:

$$\langle LX, LX\rangle = \langle X, X\rangle = \text{inv}$$

$$\langle LdX, LdX \rangle = \langle dX, dX \rangle = inv$$

Ta sẽ thấy ở mục sau đó chính là các phép biến đổi Lorentz.

§39. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI LORENTZ

Ở §37 chúng ta đã biết khoảng Δs giữa hai điểm của không gian bốn chiều là một bất biến có nghĩa là nó như giá trị tuyệt đối của một véc tơ của không gian bốn chiều. Nếu đưa vào véc tơ toạ độ

$x^{\mu} = (x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z)$ thì bình phương của khoảng sẽ có dạng:

$$\Delta s^2 = (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2 = c^2\ (\Delta t)^2 - (\Delta \vec{l}\ )^2 \qquad (39.1)$$

Đặt câu hỏi: Phải dùng phép biến đổi toạ độ và thời gian như thế nào, để khoảng là một bất biến khi chuyển từ hệ quy chiếu này sang hệ quy chiếu khác.

Như ta đã biết, khi chuyển sang hệ toạ độ khác, các véc tơ bốn chiều sẽ biến đổi theo quy luật tuyến tính:

$$x^{\mu'} = \alpha^{\mu}_{\nu}\, x^{\nu} \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \qquad (39.2)$$

Phép biến đổi ngược ký hiệu là:

$$x^{\mu} = \overline{\alpha}^{\mu}_{\nu}\, x^{\nu'} \quad \mu, \nu = 0,1,2,3 \qquad (39.3)$$

Ở đó $\overline{\alpha}^{\mu}_{\nu}$ là các hệ số của phép biến đổi ngược.

Để bình phương của một véc tơ bốn chiều là bất biến thì phải có điều kiện sau:

$$g_{\mu\nu}\, x^{\mu}\, x^{\nu} = g_{\mu\nu}\, x^{\mu'}\, x^{\nu'} \qquad (39.4)$$

Thay (39.2) vào (39.4) ta được:

$g_{\mu\nu}\, x^{\mu}\, x^{\nu} = g_{\mu\nu}\, \alpha^{\mu}_{\rho}\, x^{\rho}\, \alpha^{\nu}_{\sigma}\, x^{\sigma} =$ (thay đổi vị trí của các chỉ số câm $\mu \leftrightarrow \rho$ và $\nu \leftrightarrow \sigma$) $= x^{\mu}\, x^{\nu}\, g_{\rho\sigma}\, \alpha^{\rho}_{\mu}\, \alpha^{\sigma}_{\nu}$

Từ đẳng thức này ta suy ra điều kiện sau:

$$g_{\rho\sigma}\alpha^{\rho}_{\mu}\alpha^{\sigma}_{\nu} = g_{\mu\nu} \tag{39.5}$$

Vì $g_{\rho\sigma} \neq 0$ chỉ khi $\rho = \sigma$ do vậy (39.5) có thể được viết lại đơn giản như sau:

$$g_{\rho\rho}\alpha^{\rho}_{\mu}\alpha^{\rho}_{\nu} = g_{\mu\nu} \tag{39.6}$$

Để cho $\mu = \nu = 0$ thì điều kiện (39.6) sẽ là:

$$(\alpha^{0}_{0})^2 - (\alpha^{0}_{1})^2 - (\alpha^{0}_{2})^2 - (\alpha^{0}_{3})^2 = 1 \tag{39.7}$$

Để cho $\mu = 1,\ \nu = 2$ thì điều kiện (39.6) sẽ là:

$$(\alpha^{0}_{1}\ \alpha^{0}_{2}) - (\alpha^{1}_{1}.\alpha^{1}_{2}) - (\alpha^{2}_{1}\ \alpha^{2}_{2}) - (\alpha^{3}_{1}\ \alpha^{3}_{2}) = 0 \tag{39.8}$$

Một điều hiển nhiên là các hệ số của phép biến đổi ngược $\overline{\alpha}^{\mu}_{\nu}$ cũng sẽ thoả mãn điều kiện tương tự như (39.6).

Bây giờ ta đi tìm mối liên hệ giữa các hệ số α^{μ}_{ν} và $\overline{\alpha}^{\mu}_{\nu}$. Sử dụng các công thức (39.2) , (39.3) ta có:

$$x^{\mu} = \overline{\alpha}^{\mu}_{\rho}x^{\rho'} = \overline{\alpha}^{\mu}_{\rho}\alpha^{\rho}_{\nu}x^{\nu} = x^{\nu}\overline{\alpha}^{\mu}_{\rho}\alpha^{\rho}_{\nu} \tag{39.9}$$

Mặt khác ta lại có:

$$x^{\mu} = x^{\nu}\delta^{\mu}_{\nu} \tag{39.10}$$

Từ (39.9) và (39.10) ta suy ra:

$$\overline{\alpha}^{\mu}_{\rho}\alpha^{\rho}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \tag{39.11}$$

Chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng hệ các phương trình (39.11) sẽ được thoả mãn nếu ta chọn

$$\overline{\alpha}^{0}_{0} = \alpha^{0}_{0}\ ;\ \overline{\alpha}^{0}_{i} = -\alpha^{i}_{0}\ ;\ \overline{\alpha}^{i}_{k} = \alpha^{k}_{i}\ ;\ i,k = 1,2,3 \tag{39.12}$$

Đúng vậy, khi $\mu = \nu = 0$ thì (39.11) sẽ có dạng:

$$\overline{\alpha}^{0}_{\rho}\alpha^{\rho}_{0} = 1 \quad \text{hay} \quad \overline{\alpha}^{0}_{0}\alpha^{0}_{0} + \overline{\alpha}^{0}_{1}\alpha^{1}_{0} + \overline{\alpha}^{0}_{2}\alpha^{2}_{0} + \overline{\alpha}^{0}_{3}\alpha^{3}_{0} = 1$$

Nếu ta thay (39.12) vào vế trái của biểu thức trên và sử dụng (39.7) ta sẽ chứng minh được vế trái đó quả thực bằng 1.

$$(\alpha^0_0)^2 - (\alpha^1_0)^2 - (\alpha^2_0)^2 - (\alpha^3_0)^2 = 1$$

Khi $\mu = 1$, $\nu = 2$ thì vế trái của (39.11) có dạng:

$$\overline{\alpha}^1_\rho \alpha^\rho_2 = \overline{\alpha}^1_0 \alpha^0_2 + \overline{\alpha}^1_1 \alpha^1_2 + \overline{\alpha}^1_2 \alpha^2_2 + \overline{\alpha}^1_3 \alpha^3_2$$

Nếu thay (39.12) vào biểu thức trên và sử dụng (39.8) ta được:

$$\overline{\alpha}^1_0 \alpha^0_2 + \overline{\alpha}^1_1 \alpha^1_2 + \overline{\alpha}^1_2 \alpha^2_2 + \overline{\alpha}^1_3 \alpha^3_2 =$$

$$= -(\alpha^0_1 \alpha^0_2) + (\alpha^1_1 \alpha^1_2) + (\alpha^2_1 \alpha^2_2) + (\alpha^3_1 \alpha^3_2) = 0$$

Các đẳng thức (39.12) có thể viết gọn lại trong một công thức sau:

$$\overline{\alpha}^\mu_\nu g^\mu_\mu = \alpha^\nu_\mu g^\nu_\nu \qquad (39.13)$$

Đúng vậy, khi $\mu = \nu = 0$ thì $g^\nu_\mu = g^\nu_\nu$ vì vậy $\overline{\alpha}^0_0 = \alpha^0_0$

Khi $\mu = 0$, $\nu = i \neq 0$ hoặc $\nu = 0$, $\mu = i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$

thì $g^0_0 = -g^i_i$ vì vậy $\overline{\alpha}^0_i = -\overline{\alpha}^i_0$, $\overline{\alpha}^i_0 = -\alpha^0_i$

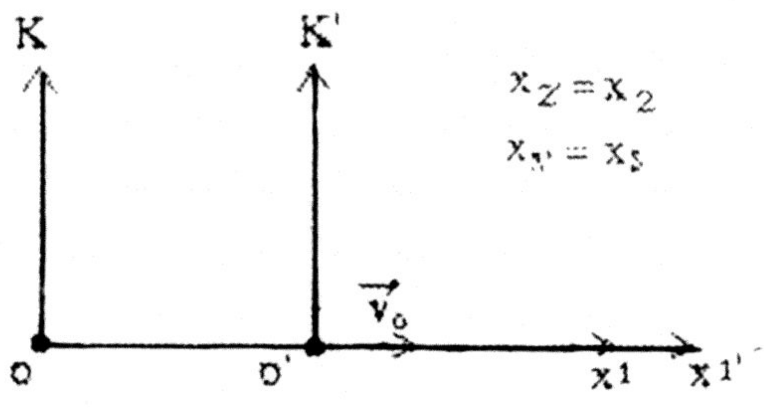
Khi $\mu = i \neq 0$, $\nu = k \neq 0$, $i, k = 1, 2, 3$ thì

$g^i_i = g^k_k$ vì vậy $\overline{\alpha}^k_i = \alpha^i_k$

Trong lý thuyết tương đối hẹp, thông thường người ta xét quá trình chuyển từ hệ quy chiếu quán tính K sang hệ quy chiếu quán tính K', chuyển động thẳng đều tương đối với K với vận tốc $\vec{v}_0$ dọc theo trục x như hình vẽ 18.

Khi đó ma trận của phép biến đổi các thành phần của véc tơ bán kính bốn chiều sẽ có dạng sau:

$$\left(\alpha^\mu_\nu\right) = \begin{pmatrix} \alpha^0_0 & \alpha^0_1 & 0 & 0 \\ \alpha^1_0 & \alpha^1_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (39.14)$$



Hình vẽ 18

Bốn hệ số khác không ở trên không phải là độc lập tuyến tính.

Để cho $\mu = \nu = 0$ ta đã có công thức (39.7). Thay (39.14) vào (39.7) ta được:

$$\left(\alpha^0_0\right)^2 - \left(\alpha^1_0\right)^2 = 1 \quad (39.15)$$

Đối với phép biến đổi ngược cũng có hệ thức tương tự (39.15)

$$\left(\bar{\alpha}^0_0\right)^2 - \left(\bar{\alpha}^1_0\right)^2 = 1 \quad (39.16)$$

Thay (39.12) vào (39.16) ta được:

$$\left(\alpha^0_0\right)^2 - \left(-\alpha^0_1\right)^2 = \left(\alpha^0_0\right)^2 - \left(\alpha^0_1\right)^2 = 1 \quad (39.17)$$

Bây giờ ta lại viết công thức (39.6) để cho trường hợp khi $\mu = 0$ và $\nu = 1$ ta có:

$$\alpha^0_0\alpha^0_1 - \alpha^1_0\alpha^1_1 - \alpha^2_0\alpha^2_1 - \alpha^3_0\alpha^3_1 = 0$$

Thay (39.14) vào đẳng thức trên ta được:

$$\alpha^0_0\alpha^0_1 - \alpha^1_0\alpha^1_1 = 0 \quad (39.18)$$

từ (39.15) và (39.17) ta suy ra:

$$(\alpha^1_0)^2 = (\alpha^0_1)^2 \Rightarrow \alpha^1_0 = \pm\alpha^0_1 \quad (39.19)$$

Từ (39.19) và (39.18) ta suy ra hai trường hợp sau:

$$\alpha^0_0 = \alpha^1_1 \quad \text{nếu} \quad \alpha^0_1 = \alpha^1_0$$

$$\alpha^0_0 = -\alpha^1_1 \quad \text{nếu} \quad \alpha^0_1 = -\alpha^1_0$$

Ta biết trong trường hợp giới hạn khi K' ≡ K (vận tốc chuyển động của K' tương đối với K bằng 0) thì ma trận của phép biến đổi phải là ma trận đơn vị $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Do vậy ta phải loại trường hợp thứ hai và chỉ lấy trường hợp thứ nhất:

$\alpha^0_0 = \alpha^1_1$, $\alpha^0_1 = \alpha^1_0$. Có nghĩa là ma trận của phép biến đổi sẽ là :

$$\left(\alpha^\mu_\nu\right) = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{39.20}$$

Ở đó $\alpha^0_0 = \alpha^1_1 \equiv \alpha_0$, $\alpha^0_1 = \alpha^1_0 \equiv \alpha_1$

Ma trận (39.20) chỉ có một hệ số độc lập tuyến tính thôi vì hai hệ số trên phải thoả mãn công thức (39.17):

$$(\alpha^0_0)^2 - (\alpha^0_1)^2 = \left(\alpha_0\right)^2 - \left(\alpha_1\right)^2 = 1 \tag{39.21}$$

Sử dụng công thức (39.12) ta sẽ nhận được ma trận của phép biến đổi ngược:

$$\left(\bar{\alpha}^\mu_\nu\right) = \begin{pmatrix} \alpha_0 & -\alpha_1 & 0 & 0 \\ -\alpha_1 & \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{39.22}$$

Như vậy phép biến đổi các thành phần của véc tơ bán kính bốn chiều sẽ là:

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \qquad (39.23)$$

hay là

$$\begin{aligned} x^{0'} &= \alpha_0 x^0 + \alpha_1 x^1 = \alpha_0 ct + \alpha_1 x \\ x^{1'} &= \alpha_1 x^0 + \alpha_0 x^1 = \alpha_1 ct + \alpha_0 x \end{aligned} \qquad (39.24)$$

$$x^{2'} = x^2$$

$$x^{3'} = x^3$$

Bây giờ ta viết phép biến đổi (39.24) cho điểm gốc toạ độ 0' của hệ K': $x^{1'} = 0$, $x^1 = v_0 t$.

$$0 = \alpha_1 ct + \alpha_0 v_0 t \Rightarrow \alpha_1 = -\alpha_0 \frac{v_0}{c} \qquad (39.25)$$

Thay (39.25) vào (39.21) ta có:

$$(\alpha_0)^2 - (\alpha_0)^2 \frac{v_0^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \qquad (39.26)$$

và từ (39.25) , (39.26) ta suy ra:

$$\alpha_1 = \frac{-\frac{v_0}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \qquad (39.27)$$

Ký hiệu $\beta = \frac{v_0}{c}$ thay (39.26) . (39.27) vào (39.23) ta thu được các phép biến đổi sau:

$$
\begin{aligned}
x^{0'} &= \frac{x^0 - \beta x^1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
x^{1'} &= \frac{-\beta x^0 + x^1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
x^{2'} &= x^2 \\
x^{3'} &= x^3
\end{aligned}
\qquad (39.28)
$$

Các phép biến đổi ngược sẽ là:

$$
\begin{aligned}
x^{0} &= \frac{x^{0'} + \beta x^{1'}}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
x^{1} &= \frac{\beta x^{0'} + x^{1'}}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
x^{2} &= x^{2'} \\
x^{3} &= x^{3'}
\end{aligned}
\qquad (39.29)
$$

Nếu thay $x^0 = ct$, $x^1 = x$. $x^2 = y$, $x^3 = z$ vào (39.28) và (39.29) ta được:

$$
\begin{aligned}
t' &= \frac{t - \frac{v_0}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
x' &= \frac{-v_0 t + x}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
y' &= y \\
z' &= z
\end{aligned}
\qquad (39.30)
$$

$$t = \frac{t' + \frac{v_0}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$x = \frac{v_0 t' + x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (39.31)$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

Các phép biến đổi (39.28) , (39.29) , (39.30) , (39.31) được gọi là các phép biến đổi Lorentz.

Trong trường hợp khi $v_0 << c$ thì tỷ số $\beta = \frac{v_0}{c}$ có thể bỏ qua và các phép biến đổi Lorentz khi đó sẽ trùng với các phép biến đổi Galilee.

Từ các phép biến đổi Lorentz ta suy ra công thức biến đổi độ dài khi chuyển từ hệ quy chiếu quán tính này sang hệ quy chiếu quán tính khác như sau:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (39.32)$$

l_0 Là độ dài riêng của vật trong hệ quy chiếu quán tính mà tương đối với nó vật đứng yên.

l Là độ dài của vật trong hệ quy chiếu quán tính mà tương đối với nó vật chuyển động với vận tốc v .

Bây giờ chúng ta tìm các phép biến đổi các thành phần của véc tơ vận tốc của hạt

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} \;,\quad v'_y = \frac{dy'}{dt'} \;,\quad v'_z = \frac{dz'}{dt'} \qquad (39.33)$$

Lấy vi phân (39.30) ta có:

$$
\begin{aligned}
dt' &= \frac{dt - \dfrac{v_0}{c^2}dx}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
dx' &= \frac{-v_0\,dt + dx}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
dy' &= dy \\
dz' &= dz
\end{aligned}
\qquad (39.34)
$$

Thay (39.34) vào (39.33) ta thu được:

$$
\begin{aligned}
v'_x &= \frac{-v_0 + v_x}{1 - \dfrac{v_0}{c^2}v_x} \\
v'_y &= \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{v_0}{c^2}v_x} \\
v'_z &= \frac{v_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{v_0}{c^2}v_x}
\end{aligned}
\qquad (39.35)
$$

Chương 8

CÁC PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG TƯƠNG ĐỐI TÍNH

§40. VẬN TỐC BỐN CHIỀU, GIA TỐC BỐN CHIỀU

Như chúng ta thấy dl và dt không phải là các bất biến. Tập hợp bốn đại lượng $\frac{dx^{\mu}}{dt}$ không có tính chất của véc tơ bốn chiều vì dt không phải là bất biến và $\frac{dx^{\mu}}{dt}\frac{dx_{\mu}}{dt}$ không bảo toàn giá trị đối với phép biến đổi Lorentz khi chuyển từ hệ quy chiếu quán tính này sang hệ quy chiếu quán tính khác.

Tuy nhiên, ta nhận thấy thời gian riêng của hạt $d\tau = \frac{ds}{c}$ lại là bất biến, do vậy các đại lượng.

$$u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} = c\,\frac{dx^{\mu}}{ds} \tag{40.1}$$

có các tính chất của một véc tơ bốn chiều và được gọi là vận tốc bốn chiều của hạt.

Tương tự ta gọi véc tơ bốn chiều với các thành phần

$$W^{\mu} = \frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} = \frac{du^{\mu}}{d\tau} = c\,\frac{du^{\mu}}{ds} \tag{40.2}$$

là gia tốc bốn chiều của hạt.

Ta đã biết $\quad dx^{\mu} = (c\,dt\,, dx\,, dy\,, dz)$

$$d\tau = dt\sqrt{1-\beta^2}\,,\ \beta = \frac{v^2}{c^2}\,.$$

do vậy vận tốc bốn chiều được viết cụ thể như sau:

$$u^{\mu} = \left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,,\ \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \tag{40.3}$$

Ở đó $\vec{v}$ là véc tơ vận tốc ba chiều bình thường của hạt có các thành phần $(v_x\,, v_y\,, v_z)$.

Trong trường hợp khi $v << c$ thì $\frac{v^2}{c^2}$ có thể bỏ qua và các thành phần không gian của véc tơ vận tốc bốn chiều $\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \to \vec{v}$

Từ (40. 3) ta nhận được công thức sau:

$$u^{\mu}u_{\mu} = \frac{c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = c^2 \tag{40.4}$$

§41. ĐỘNG HỌC TƯƠNG ĐỐI TÍNH

Chúng ta đã biết các phương trình Newton bất biến đối với các phép biến đổi Galilée, nhưng không bất biến đối với các phép biến đổi Lorentz. Vì vậy để thoả mãn được nguyên lý tương đối của Einstein, định luật thứ hai của Newton cần phải được thay thế bởi định luật tổng quát hơn.

Ta thấy rằng khi β tiến tới 0 (có nghĩa là khi vận tốc của hạt v nhỏ hơn rất nhiều so với vận tốc ánh sáng trong chân không c) các phép biến đổi Lorentz chuyển qua các phép biến đổi Galilée. Do vậy, cần phải yêu cầu các phương trình chuyển động tổng quát có bất biến tương đối tính khi v << c phải quay về được các phương trình kinh điển Newton:

$$\frac{d}{dt}(mv^i) = F^i \;;\; i = 1,2,3 \qquad (41.1)$$

Sự tổng quát hoá các phương trình (40.1) được thực hiện một cách suy rộng tự nhiên bởi một biểu thức tương tự (41.1) như sau:

$$\frac{d}{d\tau}(mu^\mu) = K^\mu \;,\; \mu = 0,1,2,3 \qquad (41.2)$$

ở đó τ là thời gian riêng của hạt.

m là khối lượng của hạt (đại lượng bất biến mô tả tính chất quán tính của hạt)

u^μ là các thành phần của vận tốc bốn chiều.

K^μ là véc tơ bốn chiều và được gọi là lực Minkovski.

Các đại lượng K^μ phải được xác định sao cho khi v << c thì các thành phần không gian của phương trình(41.2) phải được chuyển thành phương trình (41.1) và cũng tương tự như vậy trong trường hợp này các thành phần không gian của vận tốc bốn chiều sẽ chuyển thành vận tốc thông thường $\vec{v}$.

Ta đã biết $d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

và $u^{\mu} = (u^0, u^i) = \left(\dfrac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} ; \dfrac{v^i}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \right)$ (41.3)

Sử dụng (41.3) ta biểu diễn phương trình (41.2) dưới dạng sau:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \frac{mc}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = K^0 \qquad (41.4)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \frac{mv^i}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = K^i \;.\; i = 1,2,3 \qquad (41.5)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{mc}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = K^0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (41.6)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{mv^i}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = K^i \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \qquad i = 1,2,3 \qquad (41.7)$$

Nếu ta xác định các thành phần không gian của lực Minkovski K^i sao cho chúng liên hệ với các thành phần của lực thông thường ba chiều F^i theo biểu thức sau:

$$F^i = K^i \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (41.8)$$

thì ta thấy rằng, trong trường hợp khi $v << c$ (41.7) sẽ quay lại thành các phương trình Newton (41.1).

Để xác định thành phần thời gian của lực Minkovski K chúng ta nhân phương trình (41.2) với vận tốc bốn chiều u_μ:

$$K^\mu u_\mu = m\frac{du^\mu}{d\tau}u_\mu = mW^\mu u_\mu \tag{41.9}$$

(ở đây m là bất biến cho nên ta đã đưa ra ngoài dấu đạo hàm).

Lấy đạo hàm theo τ đẳng thức (40.4) ta được:

$\frac{d}{d\tau}(u^\mu u_\mu) = 0$ Từ đó suy ra:

$$\frac{du^\mu}{d\tau}u_\mu + u^\mu\frac{du_\mu}{d\tau} = W^\mu u_\mu + u^\mu W_\mu = 0 \tag{41.10}$$

$$\Rightarrow W^\mu u_\mu = 0$$

Từ (41.9) . (41.10) ta suy ra phương trình sau:

$$K^\mu u_\mu = K^0 u_0 - K^i u_i = 0, \qquad i = 1,2,3 \tag{41.11}$$

Thay (41.3) . (41.8) vào (41.11) ta được:

$$K^0\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{F^i v_i}{1-\frac{v^2}{c^2}} = 0$$

$$K_0 = \frac{F^i v_i}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\vec{F}.\vec{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{41.12}$$

Kết quả ta thu được các thành phần của lực Minkovski:

$$K^\mu = \left(K^0 = \frac{\vec{F}.\vec{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\ K^i = \frac{F^i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right),\ i = 1, 2, 3 \tag{41.13}$$

Tích vô hướng của hai véc tơ ba chiều $\vec{F}.\vec{v}$ cho ta công của lực $\vec{F}$ sản ra trong một đơn vị thời gian trên hạt. Công này lại bằng tốc độ thay đổi năng lượng của hạt $\frac{dE}{dt}$. Như vậy đối với K^0 ta có thể viết lại như sau:

$$K^0 = \frac{1}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dE}{dt} \tag{41.14}$$

ở đó E là năng lượng của hạt.

Như vậy chúng ta đã thiết lập được phương trình bất biến tương đối tính tổng quát của động học của hạt. Đó là phương trình (41.2) với lực Minkovski (41.13).

Các thành phần không gian của phương trình (41.2) đã được viết dưới dạng (41.7) , (41.8) và khi $v << c$ thì chúng quay lại thành các phương trình Newton.

Còn các thành phần thời gian của phương trình (41.2) có thể viết dưới dạng sau:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = K^0\sqrt{1 - v^2/c^2} \overset{(41.14)}{=} \frac{1}{c}\frac{dE}{dt} \tag{41.15}$$

Từ (41.15) ta suy ra biểu thức tương đối tính cho năng lượng của hạt:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{41.16}$$

§42. XUNG LƯỢNG BỐN CHIỀU (VÉC TƠ NĂNG XUNG LƯỢNG)

Trong cơ học kinh điển xung lượng của hạt là véc tơ ba chiều với các thành phần

$$p_i^{kd} = mv_i, \quad i = 1, 2, 3 \tag{42.1}$$

Tương tự, xung lượng bốn chiều được định nghĩa là véc tơ bốn chiều với các thành phần sau:

$$p^\mu = m u^\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \tag{42.2}$$

ở đó u^μ là vận tốc bốn chiều

Thay $u^\mu = \left(\frac{c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{v^i}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right)$ vào (42.2) ta được:

$$p^\mu = \left(p^0 = \frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, p^i = \frac{mv^i}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) \tag{42.3}$$

Ta dễ dàng thấy khi $v << c$ thì $p^i = \frac{mv^i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ -----> mv^i (xung lượng kinh điển). Vì vậy, ta có cơ sở để chấp nhận biểu thức tương đối tính của xung lượng.

$$p^i = \frac{mv^i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{42.4}$$

Còn thành phần thời gian của xung lượng bốn chiều, nhờ công thức (41.16) có thể viết lại như sau:

$$p^0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E}{c} \qquad (42.5)$$

Kết quả ta thu được xung lượng bốn chiều của hạt tương đối tính là:

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = \left(\frac{E}{c}, \frac{mv^i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right), \quad i = 1, 2, 3 \quad (42.6)$$

ở đó E là năng lượng của hạt tương đối tính. Véc tơ xung lượng bốn chiều đôi khi còn được gọi là véc tơ năng xung lượng.

Bây giờ ta đi tìm bình phương của xung lượng bốn chiều. Từ (42.6) ta có:

$$p^\mu p_\mu = p^0 p_0 - p^i p_i = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \qquad (42.7)$$

Mặt khác ta có:

$$p^\mu p_\mu = mu^\mu mu_\mu = m^2 u^\mu u_\mu = m^2 c^2 \qquad (42.8)$$

Từ (42.7), (42.8) ta được:

$$E^2 = c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4 \qquad (42.9)$$

Biểu thức (42.9) cho ta mối liên hệ chặt chẽ giữa năng lượng E, xung lượng p và khối lượng m của hạt.

Nếu thay $\vec{p}$ từ công thức (42.6) vào (42.9) ta được:

$$E^2 = c^2 \frac{m^2 v^2}{1 - v^2/c^2} + m^2 c^4 = \frac{m^2 c^4}{1 - v^2/c^2} \text{ hay}$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (42.10)$$

Ở đây năng lượng không chứa thế năng của hạt trong trường ngoài.

Đối với hạt đứng yên (khi $v = 0$) thì năng lượng của hạt sẽ là $E_0 = m c^2$.

§43. TÍCH PHÂN TÁC DỤNG ĐỐI VỚI HẠT TƯƠNG ĐỐI TÍNH

Chúng ta đi tìm tích phân tác dụng cho hạt tự do. Tích phân tác dụng cần phải bất biến đối với phép biến đổi Lorentz. Do vậy nó cần được chọn từ các vô hướng, trong đó vô hướng phải có dạng vi phân bậc nhất. Một vô hướng duy nhất của dạng đó mà có thể thiết đặt tương ứng với hạt tự do là đại lượng tỷ lệ với khoảng ds. Ký hiệu hệ số tỷ lệ là α, chúng ta sẽ nhận được để cho tích phân tác dụng của hạt tự do biểu thức sau:

$$S = \int_1^2 \alpha ds = \int_1^2 \alpha \sqrt{c^2 dt^2 - dl^2} = \int_1^2 \alpha c \sqrt{1 - v^2/c^2}\, dt \qquad (43.1)$$

ở đó $v = \dfrac{dl}{dt}$ là vận tốc của hạt tự do.

So sánh (43.1) với biểu thức $S = \int_1^2 L dt$ ta suy ra hàm Lagrange của hạt tự do tương đối tính là:

$$L = \alpha c \sqrt{1 - v^2/c^2} \qquad (43.2)$$

Trong giới hạn kinh điển khi $v \ll c$ thì hàm Lagrange (43.2) cần phải quay về được biểu thức:

$$L = \frac{1}{2} m v^2 \qquad (43.3)$$

Ta đi phân tích (43.2) thành chuỗi luỹ thừa theo (v/c) và bỏ qua các số hạng nhỏ bậc cao:

$$L = \alpha c\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx \alpha c\left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = \alpha c - \frac{\alpha v^2}{2c}$$

Theo lý luận ở mục nguyên lý tác dụng tối thiểu của chương I, số hạng αc có thể bỏ qua, do vậy $L \approx -\alpha\frac{v^2}{2c}$. Để trong trường hợp kinh điển hàm Lagrange L có thể quay về được dạng (42.3) thì ta cần đặt $\alpha = -mc$.

Kết quả ta thu được hàm Lagrange của hạt tự do tương đối tính:

$$L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{43.4}$$

Biết hàm Lagrange, ta có thể tính được xung lượng và năng lượng của hạt tự do tương đối tính:

$$p = \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{43.5}$$

$$E = pv - L = \frac{mv^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + mc^2\sqrt{1-v^2/c^2} = \frac{mv^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{43.6}$$

Như vậy là ta đã đi đến các kết quả như đã nhận được ở mục trước để cho p và E.

Bây giờ chúng ta lại tiếp tục xem xét biểu thức tích phân tác dụng (43.1).

$$S = \int_1^2 \alpha ds = -mc\int_1^2 ds \tag{43.7}$$

Quỹ đạo thật của hạt được xác định bởi điều kiện

$$\delta S = 0 \tag{43.8}$$

Ta đi thực hiện phép biến phân tích phân tác dụng

$$\delta S = -mc\delta\int_1^2 ds = -mc\int_1^2 \delta(ds) \tag{43.9}$$

Ta đã biết khoảng $ds = \sqrt{dx^\mu dx_\mu}$ do vậy

$$\delta(ds) = \delta\left(\sqrt{dx^\mu dx_\mu}\right) = \frac{2dx_\mu \delta(dx^\mu)}{2\sqrt{dx^\mu dx_\mu}} \tag{43.10}$$

Thay (43.10) vào (43.9) ta được:

$$\delta S = -mc\int_1^2 \frac{dx_\mu \delta(dx^\mu)}{ds}$$

vì $\frac{dx_\mu}{ds} = \frac{dx_\mu}{cd\tau} = \frac{u_\mu}{c}$ và $\delta(dx^\mu) = d(\delta x^\mu)$ cho nên:

$$\begin{aligned} \delta S &= -m\int_1^2 u_\mu d(\delta x^\mu) = \\ &= -mu_\mu \delta x^\mu \Big|_1^2 + m\int_1^2 \delta x^\mu \frac{du_\mu}{d\tau} d\tau \end{aligned} \tag{43.11}$$

Ở đây ta đã biểu diễn

$du_\mu = \frac{du_\mu}{d\tau} d\tau$, τ là thời gian riêng của hạt.

Như chúng ta đã biết, để tìm các phương trình chuyển động, các quỹ đạo khác nhau có chung điểm đầu và điểm cuối được so sánh với nhau, có nghĩa là $(\delta x^\mu)_1 = (\delta x^\mu)_2 = 0$.

Quỹ đạo thật được xác định từ điều kiện sau:

$$\delta S = m\int_1^2 \delta x^\mu \frac{du_\mu}{d\tau} d\tau = 0 \tag{43.12}$$

Để (43.12) đúng với mọi δx^μ thì ta phải có phương trình sau:

$$\frac{du_\mu}{d\tau} = 0 \tag{43.13}$$

Phương trình (43.13) có nghĩa là vận tốc bốn chiều của hạt tự do tương đối tính là không đổi.

Nếu ta xét tích phân tác dụng như là một hàm của tọa độ của cận trên của quĩ đạo như đã làm ở chương I (So sánh các quỹ đạo thật có chung điểm đầu nhưng kết thúc ở những điểm khác nhau) thì $\frac{du_\mu}{d\tau} = 0$ và từ (43.11) ta suy ra:

$$\delta S = - mu_\mu (\delta x^\mu)_2 \tag{43.14}$$

vì $(\delta x^\mu)_1 = 0$. Nếu ký hiệu $(\delta x^\mu)_2 = \delta x^\mu$ và lưu ý là $mu_\mu = p_\mu$ ta sẽ được:

$$\delta S = - p_\mu \delta x^\mu \cdot \tag{43.15}$$

Từ công thức (43.15) ta suy ra được các thành phần hiệp biến của xung lượng bốn chiều:

$$p_\mu = -\frac{\partial S}{\partial x^\mu} \tag{43.16}$$

Ở mục trước ta đã chứng minh được đẳng thức (43.8):

$$\begin{aligned} &p_\mu p^\mu = m^2c^2 \text{ hay} \\ &p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = m^2c^2 \end{aligned} \tag{43.17}$$

Thay (43.16) vào (43.17) ta được phương trình tương đối tính Hamilton - Jacobi.

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = m^2c^2 \tag{43.18}$$

hay

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = m^2c^2 \tag{43.19}$$

Để nhận được phương trình tương đối tính Hamilton - Jacobi trên, ta đã sử dụng tích phân tác dụng S, khác với tích phân tác dụng kinh điển S'.

Điều này dễ dàng nhận thấy vì năng lượng liên hệ với tích phân tác dụng theo biểu thức sau:

$$p_0 = \frac{E}{c} = -\frac{\partial S}{c\partial t} \Rightarrow E = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

Mặt khác ta đã biết năng lượng kinh điển E' khác năng lượng tương đối tính bởi số hạng mc^2.

$$(E = E' + mc^2)$$

Kết quả ta thu được:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\partial S'}{\partial t} + mc^2 \text{ hay}$$

$$S = S' - mc^2 t \tag{43.20}$$

Thay (43.20) vào (43.19) ta nhận được phương trình đối với S':

$$\frac{1}{2mc^2}\left(\frac{\partial S'}{\partial t}\right)^2 - \frac{\partial S'}{\partial t} - \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial z}\right)^2\right] = 0$$

mà trong giới hạn kinh điển khi c ----> ∞ nó quay trở về phương trình Hamilton - Jacobi kinh điển đối với hạt tự do.

§44. PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE TỔNG QUÁT, TENSƠ NĂNG XUNG LƯỢNG

Trong mục này chúng ta sẽ thực hiện một sự tổng quát hoá quan trọng biểu thức của tích phân tác dụng.

Trong dạng tổng quát đó, biểu thức của tích phân tác dụng sẽ sử dụng được không những chỉ cho các hệ cơ học mà còn sử dụng được cho trường điện từ và các hệ vật lý khác.

Từ trước tới nay ta đã viết tích phân tác dụng:

$$S=\int_1^2 L(q_i,\dot{q}_i,t)dt \qquad (44.1)$$

ở đó L là hàm Lagrange

q_i các toạ độ suy rộng

$\dot{q}_i$ các vận tốc suy rộng.

Khi chúng ta viết các phương trình trong dạng bốn chiều chúng ta đã làm việc với bốn biến bình đẳng x^0, x^1, x^2, x^3 và chúng được đưa vào các phương trình dưới dạng như nhau.

Bây giờ chúng ta đi tổng quát hoá và biểu diễn tích phân tác dụng dưới dạng sau:

$$S=\frac{1}{c}\int L^*\left(q_a,\dot{q}_{av},x^0,x^1,x^2,x^3\right)dx^0dx^1dx^2dx^3 \qquad (44.2)$$

ở đó q_a là tập hợp các đại lượng q_1, q_2, ... xác định trạng thái của hệ (q_a các tham số của hệ). Số các tham số đó có thể là bất kỳ, nói riêng có thể lớn vô cùng.

$\dot{q}_{av}$ là tập hợp các đạo hàm riêng của các tham số q_a theo toạ độ x^v.

$$\dot{q}_{av}=\frac{\partial q_a}{\partial x^v} \quad a=1,2,....$$

$$v=0,1,2,3 \qquad (44.3)$$

Hệ số $\frac{1}{c}$ được đưa vào để cho thuận tiện.

Các đại lượng q_a, $\dot{q}_{av}$ được xem như là các hàm của các toạ độ x^0, x^1, x^2, x^3. Trường hợp riêng q_a, $\dot{q}_{av}$ chỉ phụ thuộc vào x^0, có nghĩa là $q_a=q_a(t)$, $\dot{q}_{av}=\dot{q}_{av}(t)$.

Ta biết rằng $\frac{\partial^2 q_a}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = \frac{\partial^2 q_a}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$, cho nên ta được:

$$\frac{\partial \dot{q}_{a\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \dot{q}_{a\mu}}{\partial x^\nu} \tag{44.4}$$

Để thiết lập sự tương ứng giữa (44.2) và (44.1) chúng ta lưu ý yếu tố thể tích bốn chiều dV^* liên quan với yếu tố thể tích ba chiều dV bởi biểu thức sau:

$$dV^* = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = cdtdV \tag{44.5}$$

Thay (44.5) vào (44.2) ta có:

$$S = \int L^* dtdV = \int_1^2 dt \int_V L^* dV \tag{44.6}$$

So sánh (44.6) với (44.1) ta được:

$$L = \int_V L^* dV \tag{44.7}$$

Như vậy L^* chính là mật độ của hàm Lagrange L của hệ đang xét.

Đối với hệ vật lý kín, khi L^* không phụ thuộc tường minh vào x^0, x^1, x^2, x^3 thì tích phân tác dụng sẽ có dạng:

$$S = \frac{1}{c} \int L^*(q_a, \dot{q}_{a\nu})\, dV^* \tag{44.8}$$

Bây giờ chúng ta tìm phương trình chuyển động cho hệ kín, có nghĩa là $S = \frac{1}{c}\int_V L^*(q_a, \dot{q}_{a\nu}) dV^*$. Ta biến phân S và cho $\delta S = 0$

$$\delta S = \frac{1}{c} \int \left(\sum_a \frac{\partial L^*}{\partial q_a} \delta q_a + \sum_{a\nu} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}} \delta \dot{q}_{a\nu} \right) dV^* \tag{44.9}$$

Thay $\delta\dot{q}_{a\nu} = \delta\frac{\partial q_a}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}(\delta q_a)$ vào (44.9) ta được:

$$\delta S = \frac{1}{c}\int\left(\sum_a \frac{\partial L^*}{\partial q_a}\delta q_a + \sum_{a\nu}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}(\delta q_a)\right)dV^* \quad (44.10)$$

Số hạng thứ hai trong ngoặc vuông của (44.10) có thể viết dưới dạng sau:

$$\sum_{a\nu}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}(\delta q_a) = \sum_{a\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}}\delta q_a\right) - \sum_{a\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}}\right)\delta q_a \quad (44.11)$$

Thay (44.11) vào (44.10) ta có:

$$\delta S = \frac{1}{c}\int\left[\sum_a \frac{\partial L^*}{\partial q_a}\delta q_a - \sum_{a\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}}\right)\delta q_a + \sum_{a\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}}\delta q_a\right)\right]dV^* \quad (44.12)$$

Sử dụng định lý Oxtrogradski - Gauss mở rộng, ta đi tính tích phân số hạng thứ ba của (44.12):

$$\int_{V^*}\left[\sum_{a\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}}\delta q_a\right)\right]dV^* = \oint\sum_\nu\left(\sum_a \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}}\delta q_a\right)dS^*_\nu \quad (44.13)$$

ở đó S^* là mặt bốn chiều kín bao thể tích bốn chiều V^*.

Trên mặt biên của thể tích bốn chiều có điều kiện $\delta q_a = 0$. Do vậy ta suy ra tích phân (44.13) bằng 0.

Như vậy điều kiện $\delta S = 0$ được viết tường minh như sau:

$$\delta S = \frac{1}{c}\int \sum_a \left[\frac{\partial L^*}{\partial q_a} - \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial L^*}{\partial q_{a\nu}}\right]\delta q_a dV^* = 0 \qquad (44.14)$$

Để biểu thức này đúng với mọi δq_a thì từ (44.14) ta thu được các phương trình Lagrange tổng quát sau:

$$\frac{\partial L^*}{\partial q_a} - \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial L^*}{\partial q_{a\nu}} = 0 \qquad (44.15)$$

ở đó a = 1, 2, 3, ...

ν = 0, 1, 2, 3.

Từ (44.15) ta nhận thấy: trong trường hợp q_a chỉ phụ thuộc vào x^0 (có nghĩa là chỉ phụ thuộc vào thời gian) thì phương trình Lagrange tổng quát (44.15) sẽ quay trở lại phương trình Lagrange bình thường.

$$\frac{\partial L}{\partial q_a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\right) = 0$$

Bây giờ ta nhân (44.15) với $\dot{q}_{a\mu}$ và thực hiện lấy tổng theo a ta được:

$$\sum_a \frac{\partial L^*}{\partial q_a}\dot{q}_{a\mu} = \sum_{a,\nu} \dot{q}_{a\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}} \qquad (44.16)$$

Biểu thức (44.16) có thể viết như sau:

$$\sum_a \frac{\partial L^*}{\partial q_a}\dot{q}_{a\mu} = \sum_{a,\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\dot{q}_{a\mu}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}}\right) - \sum_{a,\nu}\frac{\partial L^*}{\partial q_{a\nu}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\dot{q}_{a\mu}$$

(44.17)

Ta thay $\dot{q}_{a\mu} = \dfrac{\partial q_a}{\partial x^\mu}; \dfrac{\partial \dot{q}_{a\mu}}{\partial x^\nu} = \dfrac{\partial q_{a\nu}}{\partial x^\mu}$

vào ta được:

$$\sum_a \frac{\partial L^*}{\partial q_a}\frac{\partial q_a}{\partial x^\mu} = \sum_{a,\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\dot{q}_{a\mu}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}}\right) - \sum_a \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a,\nu}}\frac{\partial \dot{q}_{a,\nu}}{\partial x^\mu}$$

hay là:

$$\sum_{a,\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\dot{q}_{a\mu}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}}\right) = \sum_a \frac{\partial L^*}{\partial q_a}\frac{\partial q_a}{\partial x^\mu} + \sum_{a,\nu}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a,\nu}}\frac{\partial \dot{q}_{a,\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial L^*}{\partial x^\mu} \tag{44.18}$$

Vế phải của (44.18) có thể viết lại dưới dạng sau:

$$\frac{\partial L^*}{\partial x^\mu} = \sum_\nu \delta_\mu^\nu \frac{\partial L^*}{\partial x^\nu} = \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\delta_\mu^\nu L^*\right) \tag{44.19}$$

Từ (44.18) , (44.19) ta suy ra:

$$\sum_{a,\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\dot{q}_{a\mu}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a,\nu}}\right) = \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\delta_\mu^\nu L^*\right) \text{ hay}$$

$$\sum_\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left[\sum_a \dot{q}_{a\mu}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a,\nu}} - \left(\delta_\mu^\nu L^*\right)\right] = 0 \tag{44.20}$$

Biểu thức trong ngoặc vuông của (44.20) có các tính chất của tensơ bốn chiều hạng hai. Ta ký hiệu nó bởi $\widetilde{T}_\mu^\nu$.

$$\widetilde{T}_\mu^\nu = \sum_a \dot{q}_{a\mu}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}} - \delta_\mu^\nu L^* \tag{44.21}$$

Thay (44.21) vào (44.20) ta được:

$$\sum_a \frac{\partial}{\partial x^\nu}\widetilde{T}_\mu^\nu = 0. \qquad \nu,\mu = 0,1,2,3 \tag{44.22}$$

Tensơ $\widetilde{T}_\mu^\nu$ xác định không đơn trị. Một tensơ bất kỳ có dạng:

$$T_\mu^\nu = \widetilde{T}_\mu^\nu + \sum_\rho \frac{\partial Q_\mu^{\nu\rho}}{\partial x^\rho} \qquad (44.23)$$

ở đó $Q_\mu^{\nu\rho}$ là tensơ phản đối xứng theo chỉ số ν và ρ.

($Q_\mu^{\nu\rho} = -Q_\mu^{\rho\nu}$) sẽ thoả mãn phương trình (44.22).

Đúng vậy, do tính chất phản đối xứng $Q_\mu^{\nu\rho} = -Q_\mu^{\rho\nu}$ ta suy ra:

$$\frac{\partial^2 Q_\mu^{\nu\rho}}{\partial x^\nu \partial x^\rho} = -\frac{\partial^2 Q_\mu^{\rho\nu}}{\partial x^\rho \partial x^\nu} \text{ do vậy } \frac{\partial^2 Q_\mu^{\nu\rho}}{\partial x^\nu \partial x^\rho} = 0$$

Như vậy là:

$$\sum_\nu \frac{\partial T_\mu^\nu}{\partial x^\nu} = 0 \qquad (44.24)$$

Bằng cách chọn $Q_\mu^{\nu\rho}$ thích hợp ta luôn luôn có thể xây dựng được tensơ dạng (44.23) có tính chất đối xứng:

$$T_\mu^\nu = T_\nu^\mu \qquad (44.25)$$

Tensơ đối xứng T_μ^ν thoả mãn phương trình (44.24) được gọi là tensơ năng xung lượng của hệ vật lý.

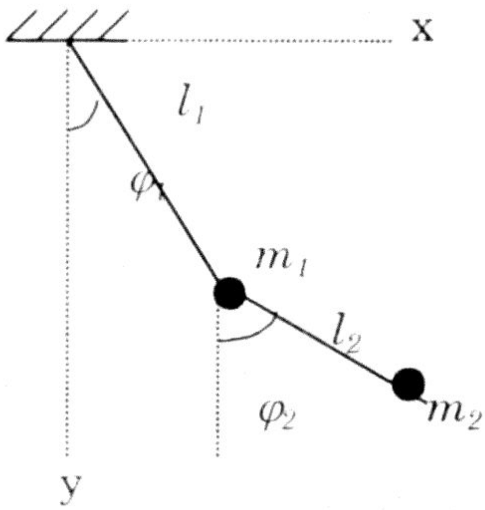
Phần 3

CÁC BÀI TẬP

Chương 1

Bài tập 1:

Tìm hàm Lagrange của con lắc phẳng kép (Hình vẽ 19), nằm trong trọng trường đồng nhất (gia tốc trọng trường - g).



Hình vẽ 19

Giải:

- Hệ con lắc phẳng kép có số bậc tự do bằng 2.
- Chọn φ_1 và φ_2 làm các toạ độ suy rộng

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2, U_1 = - m_1 g l_1 \cos\varphi_1$$

$$x_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2$$

$$y_2 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2$$

$$T_2 = \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_2}{2}\left[l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2\right]$$

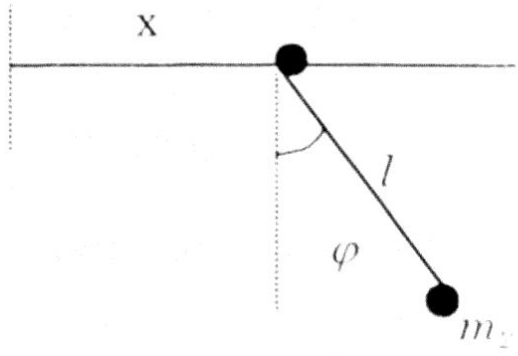
Kết quả ta thu được:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) +$$

$$+ (m_1 + m_2) g l_1 \cos\varphi_1 + m_2 g l_2 \cos\varphi_2$$

Bài tập 2:

Tìm hàm Lagrange của con lắc phẳng có khối lượng m_2, điểm treo của nó (với khối lượng m_1) có thể thực hiện chuyển động theo phương nằm ngang (Hình vẽ 20)



Hình vẽ 20

Giải:

- Hệ này có số bậc tự do bằng 2.

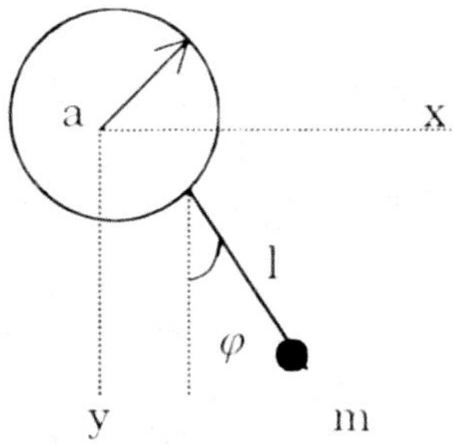
- Chọn x và φ làm các toạ độ suy rộng

Kết quả:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi) + m_2 g l\cos\varphi$$

Bài tập 3:

Tìm hàm Lagrange của con lắc phẳng, điểm treo của con lắc chuyển động đều theo đường tròn thẳng đứng với tần số γ (Hình vẽ 21).



Hình vẽ 21

Giải:

- Hệ này có số bậc tự do là một.

- Chọn φ làm toạ độ suy rộng.

- Các toạ độ của chất điểm m:

$$x = a\cos\gamma t + l\sin\varphi$$

$$y = -a\sin\gamma t + l\cos\varphi$$

Hàm Lagrange của hệ là:

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mla\gamma^2\sin(\varphi - \gamma t) + mg\,l\cos\varphi$$

Ở đây ta đã bỏ các số hạng chỉ phụ thuộc vào thời gian, và đã loại đạo hàm toàn phần theo thời gian từ $mal\gamma\cos(\varphi - \gamma t)$.

Bài tập 4:

Tìm hàm Lagrange của con lắc phẳng, điểm treo của con lắc:

a) Thực hiện dao động theo phương nằm ngang theo quy luật $a\cos\gamma t$.

b) Thực hiện dao động theo phương thẳng đứng theo quy luật $a\cos\gamma t$.

Giải:

a) Các toạ độ của chất điểm m:

$$x = a\cos\gamma t + l\sin\varphi$$

$$y = l\cos\varphi$$

Hàm Lagrrange (sau khi loại các đạo hàm toàn phần)

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mla\gamma^2\cos\gamma t\sin\varphi + mgl\cos\varphi$$

b) Tương tự như phần a ta thu được:

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mla\gamma^2\cos\gamma t\cos\varphi + mgl\cos\varphi$$

Bài tập 5:

Chứng minh rằng dạng phương trình Lagrange không thay đổi nếu ta thay đổi biến số q_i - các toạ độ suy rộng của hệ:

$$q_i = q_i(Q_1, Q_2, \ldots\ldots Q_s, t) \quad i = 1, 2, \ldots s$$

Giải:

Khi thực hiện phép biến đổi biến số

$$q_i = q_i(Q_1, Q_2, \ldots\ldots Q_s, t) \quad i = 1, 2, \ldots s$$

$$\overline{L}(Q,\dot{Q},t) \qquad = L\left[q,\dot{q}(Q,\dot{Q},t)\right] = L\left(q,\frac{\partial q}{\partial Q}\dot{Q}+\frac{\partial q}{\partial t},t\right)$$

Do đó

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\overline{L}}{\partial\dot{Q}} = \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\frac{d}{dt}\frac{\partial q}{\partial Q}$$

$$\frac{\partial\overline{L}}{\partial Q} = \frac{\partial L}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial Q} + \frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\frac{\partial\dot{q}}{\partial Q} \quad \text{và} \quad \frac{\partial\dot{q}}{\partial Q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial q}{\partial Q}$$

Do vậy

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\overline{L}}{\partial\dot{Q}}\right) - \frac{\partial\overline{L}}{\partial Q} = \frac{\partial q}{\partial Q}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}\right)$$

Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

Chương 2

Bài tập 6:

Tìm các biểu thức của các thành phần Descartes và giá trị tuyệt đối của mômen xung lượng trong toạ độ trụ r, φ, z.

Kết quả:

$$M_x = m\sin\varphi(r\dot{z} - z\dot{r}) - mrz\dot{\varphi}\cos\varphi$$
$$M_y = m\cos\varphi(z\dot{r} - r\dot{z}) - mrz\dot{\varphi}\sin\varphi$$
$$M_z = mr^2\dot{\varphi}$$
$$M^2 = m^2r^2\dot{\varphi}^2(r^2+z^2) + m^2(r\dot{z} - z\dot{r})^2$$

Bài tập 7:

Tìm các biểu thức của các thành phần Descartes và giá trị tuyệt đối của mômen xung lượng trong toạ độ cầu r, θ, φ.

Kết quả:

$$M_x = -mr^2(\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\cos\varphi)$$

$$M_y = mr^2(\dot{\theta}\cos\varphi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\sin\varphi)$$

$$M_z = mr^2\sin^2\theta.\dot{\varphi}$$

$$M^2 = m^2r^4(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta.\dot{\varphi}^2)$$

Bài tập 8:

Một hạt có khối lượng m chuyển động với vận tốc $\vec{v}_1$ từ nửa không gian, trong đó hạt có thế năng không đổi U_1 sang nửa không gian, trong đó hạt có thế năng không đổi U_2. Xác định sự thay đổi hướng chuyển động của hạt.

Giải:

Thế năng không phụ thuộc vào các toạ độ dọc theo các trục song song với mặt phẳng biên giữa hai nửa không gian. Do vậy hình chiếu của xung lượng của hạt lên mặt phẳng đó được bảo toàn.

Nếu ta ký hiệu θ_1, θ_2 là các góc giữa pháp tuyến của mặt phẳng biên với các vận tốc $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$ (các vận tốc của hạt trước và sau khi chuyển động qua mặt biên) thì chúng ta được:

$$v_1\sin\theta_1 = v_2\sin\theta_2$$

Mối liên hệ giữa v_1 và v_2 được xác định từ định luật bảo toàn năng lượng và kết quả là:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \sqrt{1 + \frac{2}{mv_1^2}(U_1 - U_2)}$$

Chương 3

Bài tập 9:

Xác định chu kỳ dao động phụ thuộc vào năng lượng khi hạt có khối lượng m chuyển động trong trường có thế năng $U = A|x|^n$

Kết quả:

$$T=2\sqrt{2m}\int_0^{(E/A)^{1/n}}\frac{dx}{\sqrt{E-Ax^n}}=\frac{2\sqrt{2m}\,E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}}{A^{1/n}}\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{1-y^n}}$$

ở đó $y=\left(\frac{A}{E}\right)^{1/n}x$

Đặt $y^n = u$, tích phân trên sẽ là tích phân Euler và nó được biểu diễn qua hàm Γ. Kết quả là:

$$T=\frac{2\sqrt{2\pi m}\,\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{nA^{1/n}\,\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)}E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}$$

Bài tập 10:

Xác định chu kỳ dao động phụ thuộc vào năng lượng khi hạt có khối lượng m chuyển động trong trường có thế năng:

a) $U=-\frac{U_0}{ch^2\alpha x}, -U_0<E<0$

b) $U=U_0 tg^2\alpha x$

Kết quả:

a) $T=\frac{\pi\sqrt{2m}}{\alpha\sqrt{|E|}}$

b) $T=\frac{\pi\sqrt{2m}}{\alpha\sqrt{E+U_0}}$

Bài tập 11:

Tìm sự phụ thuộc của các toạ độ của hạt vào thời gian khi hạt chuyển động theo quỹ đạo Parabol trong trường có thế năng $U=\frac{-\alpha}{r}$ với năng lượng E = 0.

Giải:

$$t=\int\frac{rdr}{\sqrt{\frac{2\alpha}{m}r-\frac{M^2}{m^2}}}$$

Đặt $r=\frac{M^2}{2m\alpha}(1+\eta^2)=\frac{p}{2}(1+\eta^2)$ vào tích phân ta được biểu diễn tham số của sự phụ thuộc r vào thời gian t.

$$r=\frac{p}{2}(1+\eta^2),t=\sqrt{\frac{mp^3}{\alpha}}\frac{\eta}{2}\left(1+\frac{\eta^2}{3}\right)$$

$$x=\frac{p}{2}(1-\eta^2),y=p\eta$$

tham số η nhận các giá trị chạy từ $-\infty$ đến $+\infty$.

Bài tập 12:

Chứng minh rằng khi hạt chuyển động trong trường $U=\frac{\alpha}{r}$ (với dấu bất kỳ của α) sẽ tồn tại một tích phân chuyển động $\vec{N}=\left[\vec{v}\times\vec{M}\right]+\frac{\alpha\vec{r}}{r}=\text{const}$.

Giải:

$$\dot{\vec{N}}=\left[\dot{\vec{v}}\times\dot{\vec{M}}\right]+\frac{\alpha\vec{v}}{r}-\frac{\alpha\vec{r}(\vec{v}.\vec{r})}{r^3}$$

Thay $\vec{M}=m\left[\vec{r}\times\vec{v}\right]$ vào biểu thức trên ta được

$$\dot{\vec{N}}=m\vec{r}\,(\vec{v}.\dot{\vec{v}})-m\vec{v}(\vec{r}.\dot{\vec{v}})+\frac{\alpha\vec{v}}{r}-\frac{\alpha\vec{r}(\vec{v}.\vec{r})}{r^3}$$

Ta có phương trình chuyển động $m\dot{\vec{v}}=\frac{\alpha\vec{r}}{r^3}$ do vậy $\dot{\vec{N}}=0$

Bài tập 13:

Biểu diễn các vận tốc của hai hạt sau khi va chạm của hạt chuyển động (m_1) với hạt bất động (m_2) qua các góc lệch của chúng trong hệ toạ độ phòng thí nghiệm.

Giải: Từ hình vẽ 11 chúng ta có

$$p'_2 = 2OB\cos\theta_2 \text{ hay } v'_2 = 2v\frac{m}{m_2}\cos\theta_2$$

$p'_1 = AC$. Đối với p'_1 ta có phương trình:

$OC^2 = AO^2 + p'^2_1 - 2AO.p'_1\cos\theta_1$ hay là

$$\left(\frac{v'_1}{v}\right)^2 - \frac{2m}{m_2}\frac{v_1}{v}\cos\theta_1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 0$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{v'_1}{v} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\cos\theta_1 \pm \frac{1}{m_1 + m_2}\sqrt{m_2^2 - m_1^2\sin^2\theta_1}$$

Khi $m_1 > m_2$ thì trước dấu căn có dấu + và -

Khi $m_2 > m_1$ thì trước dấu căn chỉ có dấu +

Bài tập 14:

Xác định tỷ số giữa các thời gian chuyển động của các hạt có khối lượng khác nhau dọc theo các quỹ đạo giống nhau trong cùng một thế năng như nhau.

Kết quả:

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{m'}{m}}$$

Bài tập 15:

Xác định tiết diện hiệu dụng của sự rơi của các hạt có khối lượng m_1 lên mặt của vật hình cầu có khối lượng m_2 và bán kính R. Các hạt trên hút nhau theo định luật Newton.

Giải:

Điều kiện rơi là $r_{min} < r$, ở đó r_{min} là khoảng cách từ điểm gần nhất của quỹ đạo tới tâm của vật cầu. Giá trị khả dĩ lớn nhất của ρ được xác định bởi điều kiện $r_{min} = R$, điều này dẫn đến việc giải phương trình $U_{eff}(R) = E$ hay là:

$$\frac{m_1 v_\infty^2 \rho_{max}^2}{2R^2} - \frac{\alpha}{R} = \frac{m_1 v_\infty^2}{2}$$

ở đó $\alpha = \gamma m_1 m_2$ (γ - hằng số tương tác hấp dẫn)

Nếu ta coi $m_2 \gg m_1$ thì ta có thể đặt $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \approx m_1$.

Từ đẳng thức trên ta suy ra ρ_{max}^2 và kết quả là:

$$\sigma = \pi R^2 \left(1 + \frac{2\gamma m_2}{R v_\infty^2}\right)$$

Bài tập 16:

Tìm tiết diện hiệu dụng của tán xạ của hạt khối lượng m trong trường có thế năng $U = \frac{\alpha}{r^2}$ $(\alpha > 0)$.

Giải:

Góc lệch χ bằng:

$$\chi = \pi \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\alpha}{m\rho^2 v_\infty^2}}}\right]$$

Tiết diện hiệu dụng

$$d\sigma = \frac{2\pi^2 \alpha}{m v_\infty^2} \frac{\pi - \chi}{\chi^2 (2\pi - \chi)^2} \frac{d\Omega}{\sin\chi}$$

Bài tập 17:

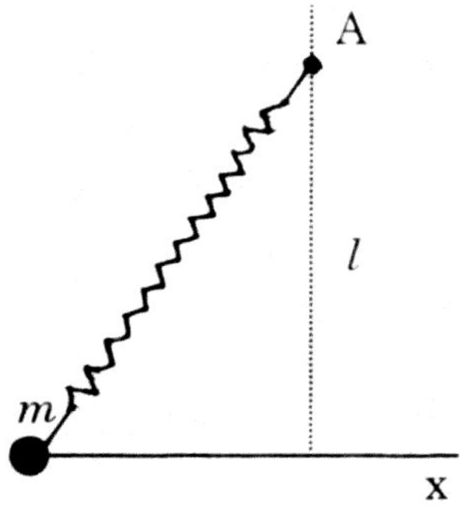
Biểu diễn biên độ và pha ban đầu của dao động qua các giá trị ban đầu x_0 và v_0 của toạ độ và vận tốc.

Kết quả:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \quad \tan g\alpha = -\frac{v_0}{\omega x_0}$$

Bài tập 18:

Tìm tần số dao động của chất điểm có khối lượng m, có khả năng chuyển động dọc theo đường thẳng và được gắn vào lò xo. Đầu kia của lò xo được gắn chặt tại điểm A (Hình vẽ 22) cách đường thẳng một khoảng l. Lò xo có độ dài là l và được căng với lực F.



(Hình vẽ 22)

Giải:

$U = F\,\delta l$ là thế năng của lò xo.

Khi $x \ll l$ thì độ giãn của lò xo δl là:

$$\delta l = \sqrt{l^2 + x^2} - l \approx \frac{x^2}{2l}$$

Vì động năng là $\frac{m\dot{x}^2}{2}$ cho nên ta tính được $\omega = \sqrt{\frac{F}{ml}}$

Bài tập 19:

Xác định các dao động cưỡng bức của hệ dưới tác động của lực F (t), nếu ở thời điểm ban đầu t = 0 hệ đứng yên ở vị trí cân bằng ($x = 0$, $\dot{x} = 0$) cho các trường hợp sau:

a) $F = const = F_0$

b) $F = at$

c) $F = F_0 e^{-\alpha t}$

d) $F = F_0 e^{-\alpha t} \cos \beta t$

Kết quả:

a) $x = \dfrac{F_0}{m\omega^2}(1 - \cos\omega t)$

b) $x = \dfrac{a}{m\omega^3}(\omega t - \sin\omega t)$

c) $x = \dfrac{F_0}{m(\omega^2 + \alpha^2)}\left(e^{-\alpha t} - \cos\omega t + \dfrac{\alpha}{\omega}\sin\omega t\right)$

d) $x = \dfrac{F_0}{m\left[\left(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2\right)^2 + 4\alpha^2\beta^2\right]}\left\{-\left(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2\right)\cos\omega t + \right.$

$$\left. + \frac{\alpha}{\omega}\left(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2\right)\sin\omega t + e^{-\alpha t}\left[\left(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2\right)\cos\beta t - 2\alpha\beta\sin\beta t\right]\right\}$$

Bài tập 20:

Xác định các dao động nhỏ của con lắc phẳng kép (Hình vẽ 2)

Giải:

Để cho các dao động nhỏ ($\varphi_1 << 1$, $\varphi_2 << 1$) hàm Lagrange đã tìm được ở bài tập 1 sẽ có dạng:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 -$$

$$- \frac{m_1 + m_2}{2} g l_1 \varphi_1^2 - \frac{m_2}{2} g l_2 \varphi_2^2$$

Phương trình chuyển động

$$(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2 + (m_1 + m_2) g \varphi_1 = 0$$
$$l_1 \ddot{\varphi}_1 + l_2 \ddot{\varphi}_2 + g\varphi_2 = 0$$
$$\varphi_1 = A_1 e^{i\omega t}$$
$$\varphi_2 = A_2 e^{i\omega t}$$

Thay φ_1 . φ_2 vào hai phương trình trên ta được:

$$A_1 (m_1 + m_2)(g - l_1 \omega^2) - A_2 \omega^2 m_2 l_2 = 0$$
$$-A_1 l_1 \omega^2 + A_2 (g - l_2 \omega^2) = 0$$

Nghiệm của phương trình đặc trưng

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{2m_1 l_1 l_2} \{(m_1 + m_2)(l_1 + l_2) \pm$$
$$\pm \sqrt{(m_1 + m_2)\left[(m_1 + m_2)(l_1 + l_2)^2 - 4m_1 l_1 l_2\right]}\}$$

Khi m_1 -----> ∞ thì các tần số tiến tới $\sqrt{\frac{g}{l_1}}$ và $\sqrt{\frac{g}{l_2}}$ tương ứng với các dao động độc lập của hai con lắc.

Bài tập 21:

Xác định dao động cưỡng bức dưới tác dụng của lực $f = f_0 e^{\alpha t} \cos\gamma t$ khi có ma sát.

Giải:

Giải phương trình chuyển động trong dạng phức

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_0}{m} e^{\alpha t + i\gamma t}$$

sau đó tách phần thực của nghiệm. Ta thu được kết quả:

$$x = b\, e^{\alpha t} \cos(\gamma t + \delta) \text{ ở đó}$$

$$b = \frac{f_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 + \alpha^2 - \gamma^2 + 2\alpha\lambda\right)^2 + 4\gamma^2(\alpha+\lambda)^2}}$$

$$tg\delta = -\frac{2\gamma(\alpha+\lambda)}{\omega_0^2 - \gamma^2 + \alpha^2 + 2\alpha\lambda}$$

Chương 5

Bài tập 22:

Tìm động năng của hình trụ (bán kính R) lăn trên mặt phẳng. Khối lượng của hình trụ được phân bố theo thể tích của nó sao cho một trong các trục quán tính chính song song với trục của hình trụ và cách trục của hình trụ một khoảng là a; mômen quán tính tương đối với trục quán tính chính này là I.

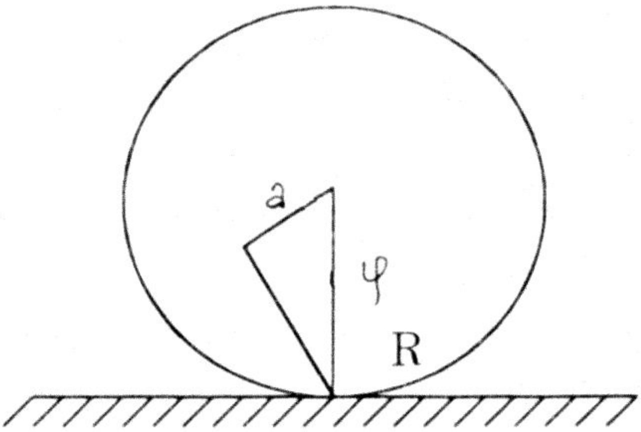
Giải:

Chuyển động của hình trụ trong từng thời điểm có thể được xem như phép quay xung quanh trục tức thời trùng với đường tiếp xúc của hình trụ với mặt phẳng bất động.

Vận tốc góc của sự quay đó là $\dot{\varphi}$

(Vận tốc góc quay xung quanh các trục song song là như nhau). Tâm quán tính nằm cách trục tức thời một khoảng là $\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi}$ và vì vậy vận tốc của nó sẽ là:

$$V = \dot{\varphi}\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi}\,.$$



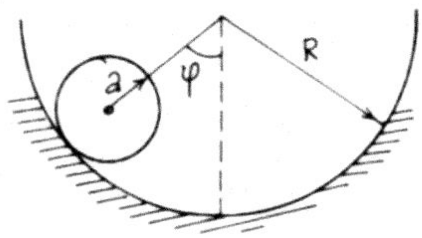
Hình vẽ 23

Động năng toàn phần:

$$T = \frac{\mu}{2}(a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi)\dot{\varphi}^2 + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2$$

Bài tập 23:

Tìm động năng của hình trụ đồng nhất bán kính a, lăn theo mặt trong của hình trụ bán kính R (Hình vẽ 24)



Hình vẽ 24

Giải:

Tâm quán tính của hình trụ lăn nằm trên trục và vận tốc của nó là:

$$V = \dot{\varphi}(R - a)$$

Vận tốc góc được tính như vận tốc góc của phép quay xung quanh trục tức thời trùng với đường tiếp xúc của các hình trụ. Nó bằng:

$$\Omega = \frac{V}{a} = \dot{\varphi}\frac{R-a}{a}$$

Nếu I là mômen quán tính tương đối với trục của hình trụ thì:

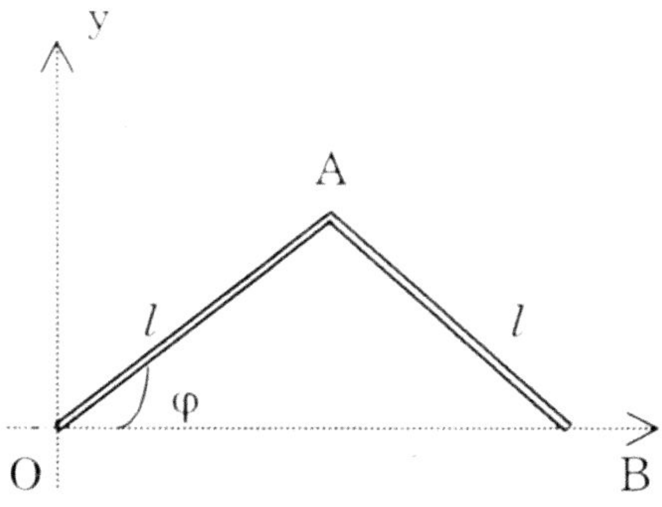
$$T = \frac{\mu}{2}(R-a)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{I}{2}\frac{(R-a)^2}{a^2}\dot{\varphi}^2$$

Bài tập 24:

Tìm động năng của hệ được mô tả trên hình vẽ 25: OA và AB là những thanh mỏng đồng nhất có độ dài là l và được nối với nhau bởi khớp cầu tại điểm A. Thanh OA quay (trong mặt phẳng của hình vẽ) xung quanh điểm O, còn đầu B của thanh AB trượt theo trục ox.

Giải:

Vận tốc của tâm quán tính của thanh OA là $\frac{l\dot{\varphi}}{2}$ ở đó φ là góc $A\hat{O}B$ vì vậy động năng của thanh OA



Hình vẽ 25

$$T_1 = \frac{\mu l^2}{8}\dot{\varphi}^2 + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2$$

μ - là khối lượng của một thanh.

Các toạ độ Descartes của tâm qúan tính của thanh AB là:

$$x = \frac{3l}{2}\cos\varphi, y = \frac{l}{2}\sin\varphi$$

Vì vận tốc góc quay của thanh đó cũng bằng $\dot{\varphi}$ cho nên động năng của nó là:

$$T_2 = \frac{\mu}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{\mu l^2}{8}(1 + 8\sin^2\varphi)\dot{\varphi}^2 + \frac{I\dot{\varphi}^2}{2}$$

Động năng toàn phần của hệ

$$T = T_1 + T_2$$

<u>**Bài tập 25:**</u>

Tìm sự lệch khỏi phương thẳng đứng của chuyển động rơi tự do của vật do sự quay của trái đất.

Giải:

Trong trọng trường U = - mgr. Bỏ qua số hạng chứa bình phương Ω trong phương trình (31.14), ta sẽ nhận được phương trình chuyển động dưới dạng:

$$\dot{\vec{v}} = 2\left[\vec{v} \times \vec{\Omega}\right] + \vec{g} \qquad (1)$$

Giải phương trình này bằng phương pháp gần đúng liên tiếp. Để làm điều đó ta giả thiết $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

ở đó $\vec{v}_1$ là nghiệm của phương trình $\dot{\vec{v}}_1 = g$ có nghĩa là $\vec{v}_1 = \vec{g}t + \vec{v}_0$. Đặt $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ vào phương trình (1) ta được:

$$\dot{\vec{v}}_2 = 2\left[\vec{v}_1 \times \vec{\Omega}\right] = 2t\left[\vec{g} \times \vec{\Omega}\right] + 2\left[\vec{v}_0 \times \vec{\Omega}\right]$$

Tích phân theo t biểu thức $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ ta có:

$$\vec{r} = \vec{h} + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\left[\vec{g} \times \vec{\Omega}\right] + t^2\left[\vec{v}_0 \times \vec{\Omega}\right] \qquad (2)$$

Ở đó $\vec{h}$ - véc tơ vị trí ban đầu của vật.

Chọn trục z theo phương thẳng đứng lên trên, trục x theo kinh tuyến tới cực, khi đó

$$g_x = g_y = 0 \qquad g_z = -g$$

$$\Omega_x = \Omega\cos\lambda \ , \Omega_y = 0 \ , \ \Omega_z = \Omega\sin\lambda$$

λ là vĩ độ (để xác định ta giả thiết là vĩ độ bắc).

Thay các đại lượng trên vào phương trình (2), $\vec{v}_0 = 0$, ta sẽ nhận được:

$$x = 0, \ y = -\frac{1}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} g\Omega\cos\lambda$$

Giá trị âm của y tương ứng với sự lệch về hướng đông.

Chương 6

Bài tập 26:

Tìm hàm Hamilton cho một chất điểm m trong hệ toạ độ Descartes, hệ toạ độ trụ và hệ toạ độ cầu.

Kết quả:

Trong hệ toạ độ Descartes (x, y, z)

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + U(x,y,z)$$

Trong toạ độ trụ (x, y, z)

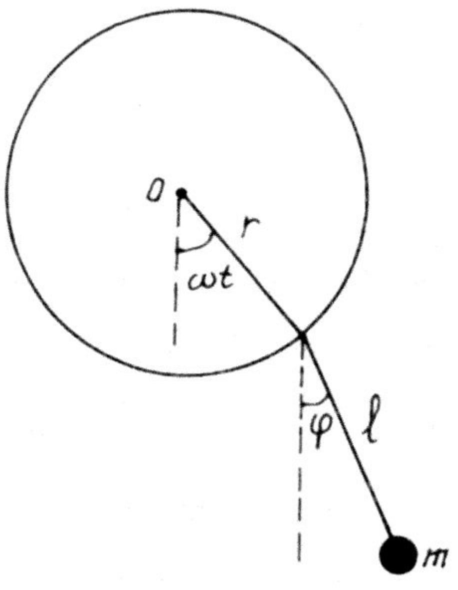
$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2\right) + U(r,\varphi,z)$$

Trong hệ toạ độ cầu (r, θ, φ)

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\theta}\right) + U(r,\theta,\varphi)$$

Bài tập 27:

Tìm hàm Hamilton của một con lắc toán học có chiều dài l và điểm treo của con lắc chuyển động theo một vòng tròn thẳng đứng có bán kính r với vận tốc góc không đổi ω (Hình vẽ 26)



Hình vẽ 26

Giải:

$x = r\sin\omega t + l\sin\varphi$

$y = r\cos\omega t + l\cos\varphi$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) =$$

$$= \frac{m}{2}\left[(r\omega\cos\omega t + l\dot{\varphi}\cos\varphi)^2 + (-r\omega\sin\omega t - l\dot{\varphi}\sin\varphi)^2\right] =$$

$$= \frac{m}{2}\left[r^2\omega^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2r\omega l\dot{\varphi}\cos(\varphi - \omega t)\right]$$

$$U = -mgl\cos\varphi$$

$$L = T - U, \; p = ml\dot{\varphi} + m\omega r l\cos(\varphi - \omega t)$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p}{ml^2} - \cos(\varphi - \omega t)\frac{\omega r}{l}$$

$$H = \dot{\varphi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - L = \frac{1}{2} ml^2\dot{\varphi}^2 - \omega^2 r^2 - mgl\cos\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} ml^2\left[\frac{p}{ml^2} - \frac{\omega r}{l}\cos(\varphi - \omega t)\right]^2 - \omega^2 r^2 - mgl\cos\varphi$$

Bài tập 28:

Tìm hàm Hamilton của hạt trong hệ toạ độ quay đều.

Kết quả:

$$H = \frac{p^2}{2m} - \vec{\Omega}\left[\vec{r} \times \vec{p}\right] + U$$

Bài tập 29:

Cho một hệ hạt gồm một hạt có khối lượng M_0 và n hạt có khối lượng m. Dùng hệ tâm quán tính của n + 1 hạt trên, chứng tỏ rằng hàm Lagrange có dạng:

$$L = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i^2 - \frac{m^2}{2M}\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i\right)^2 - U$$

với M là khối lượng của toàn hệ và $\vec{v}_i = \dfrac{d\vec{r}_i}{dt}$

$\vec{r}_i = \vec{R}_i - \vec{R}_0$ ở đó $\vec{R}_i$ là véc tơ bán kính của hạt thứ i, $\vec{R}_0$ là véc tơ bán kính của hạt M_0. Từ kết quả trên, tìm hàm Hamilton

Kết quả:

$$H = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i^2 + \frac{1}{2M}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)^2 + U$$

Bài tập 30:

Xác định Móc Poisson của các thành phần Descartes của xung lượng và mômen xung lượng $\vec{M}=[\vec{r}\times\vec{p}]$ của chất điểm.

Kết quả:

$$\{M_x, p_y\}=-p_z$$
$$\{M_x, p_x\}=0$$
$$\{M_x, p_z\}=p_y$$

Các Móc Poisson còn lại có thể nhận được từ các biểu thức trên bằng sự giao hoán tuần hoàn các chỉ số x, y, z.

Bài tập 31:

Xác định các Móc Poisson của các thành phần của véc tơ mômen xung lượng.

Kết quả:

$$\{M_x, M_y\}=-M_z$$
$$\{M_y, M_z\}=-M_x$$
$$\{M_z, M_x\}=-M_y$$

Chương VII

Bài tập 32:

Một đèn chớp điện tử ở cách một quan sát viên 30 km. Đèn phát ra một chớp sáng và được quan sát viên nhìn thấy vào lúc 13 giờ. Xác định thời điểm thực của biến cố đó.

Giải:

$$\Delta t=\frac{\Delta s}{c}=\frac{3.10^3\,m}{3.10^8\,m/s}=10^{-4}s$$

Do đó đèn đã phát sáng vào lúc 13 giờ kém 10^{-4} giây.

Bài tập 33:

Một tên lửa cần đạt tới vận tốc bao nhiêu để độ dài của nó bằng 99% độ dài riêng?

Giải:

Theo biểu thức về hiệu ứng co ngắn:

$$\frac{L}{L_0} = 0.99 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow v = 0.141c$$

Bài tập 34:

Thời gian sống trung bình của một hạt μ - mêdôn là 6.10^{-6}s khi vận tốc của nó là 0,95c. Tính thời gian sống trung bình của hạt trong hệ quy chiếu mà ở đó hạt đứng yên.

Giải:

Nếu hạt đứng yên trong hệ quy chiếu thì thời gian đo được là thời gian riêng

$$\Delta t_0 = \Delta t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 6.10^{-6}\mathrm{s}\sqrt{1-(0{,}95)^2} = 1{,}87.10^{-6}\mathrm{s}$$

Bài tập 35: Một máy bay chuyển động với vận tốc 600m/s đối với mặt đất. Cần bao nhiêu thời gian cho máy bay đó bay để đồng hồ máy bay chậm đi 2.10^{-6}s so với đồng hồ trên mặt đất?

Giải:

$$\Delta t_{\text{mặt đất}} = \frac{\Delta t_{\text{may bay}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t_{\text{may bay}}}{\sqrt{1-\left(\frac{6.10^2\,\mathrm{m/s}}{3.10^8\,\mathrm{m/s}}\right)^2}} \approx \frac{\Delta t_{\text{may bay}}}{1-2.10^{-12}}$$

$$2.10^{-12}\,\Delta t_{\text{mặt đất}} \approx \Delta t_{\text{mặt đất}} - \Delta t_{\text{máy bay}} = 2.10^{-6}\,\mathrm{s}$$

$$\Delta t_{\text{mặt đất}} \approx 10^6\,\mathrm{s} = 11{,}6 \text{ ngày đêm.}$$

Kết quả này chứng tỏ rõ ràng rằng các hiệu ứng tương đối tính yếu đối với các vận tốc thông thường.

Bài tập 36:

Một quan sát viên O phát hiện hai biến cố có các khoảng cách không gian và thời gian lần lượt là $3{,}6 \cdot 10^8$m và 2s. Tìm khoảng thời gian riêng giữa hai biến cố đó.

Giải:

Khoảng thời gian riêng của hai biến cố sẽ là khoảng thời gian giữa hai biến cố đo được bởi quan sát viên O' chuyển động tương đối với O, nếu như hai biến cố đó xảy ra tại cùng một điểm (đối với O'). Nếu A và B là hai biến cố đó, theo các công thức của phép biến đổi Lorentz

$$x'_B - x'_A = \frac{(x_B - x_A) - v(t_B - t_A)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$0 = \frac{3{,}6.10^8\,m - v.2s}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow v = 1{,}8.10^8\,m/s = 0{,}6c$$

Bằng cách trừ hai biến đổi Lorentz ta nhận được khoảng thời gian riêng

$$t'_B - t'_A = \frac{(t_B - t_A) - \frac{v}{c^2}(x_B - x_A)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} =$$

$$= \frac{2s - \frac{0{,}6.3{,}6.10^8\,m/s}{3.10^8\,m/s}}{\sqrt{1 - (0{,}6)^2}} = 1{,}6s$$

Bài tập 37:

Một hạt chuyển động với vận tốc 0,8c và tạo với trục x một góc 30° đối với một quan sát viên O. Xác định vận tốc của hạt đối với một quan sát viên O' chuyển động dọc theo trục chung x - x' với vận tốc - 0,6c.

Giải: Đối với quan sát viên O, ta có:

$$u_x = 0{,}8c\cos 30^\circ = 0{,}693c$$

$$u_y = 0{,}8c\sin 30^\circ = 0{,}400c$$

Đối với quan sát viên O', theo phép biến đổi Lorentz các vận tốc:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} = \frac{0{,}693c - (-0{,}6c)}{1 - \frac{(0{,}6c)}{c^2}(0{,}693c)} = 0{,}913c$$

Vận tốc của hạt đo bởi quan sát viên O' là:

$$u'_y = \frac{u_y\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \left(\frac{v}{c^2}\right)u_x} = \frac{(0{,}4c)\sqrt{1 - (0{,}6)^2}}{1 - \frac{(-0{,}6c)}{c^2}(0{,}693c)} = 0{,}226c$$

Vận tốc của hạt đo bởi quan sát viên O' là:

$$u' = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y} = \sqrt{(0{,}913c)^2 + (0{,}226c)^2} = 0{,}941c$$

Gọi ϕ' là góc giữa vận tốc đó và trục x' ta có:

$$tg\phi' = \frac{u'_y}{u'_x} = \frac{0{,}226c}{0{,}913c} = 0{,}248 \text{ và } \phi' = 13{,}9^\circ$$

Chương VIII

Bài tập 38:

Khối lượng nghỉ của electron là $9{,}109.10^{-31}$kg. Tính năng lượng nghỉ của electron bằng Jun và bằng electron - vôn.

Giải:

Ta có:

$E_0 = m_0 c^2 = (9.109.10^{-31}kg)(2,998.10^8 m/s) = 8.187.10^{-14}J$ và

$$\left(8.187.10^{-14}J\right)\left(\frac{1eV}{1.602.10^{-19}J}\right)\left(\frac{1MeV}{10^6 eV}\right) = 0,511MeV$$

Bài tập 39:

Tính vận tốc của electron với động năng 2 MeV.

Giải: Động năng của electron là:

$$T = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2$$

$$2MeV = \frac{0,511MeV}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 0,511MeV \Rightarrow v = 0,98c$$

Bài tập 40:

Vận tốc của một hạt phải bằng bao nhiêu phần vận tốc ánh sáng để động năng của hạt bằng hai lần năng lượng nghỉ của nó?

Giải:

$$T = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 = 2m_0c^2 \text{ hay}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 3 \Rightarrow v = 0,943c$$

Bài tập 41:

Một electron đứng yên được gia tốc đến vận tốc 0,5c. Tính độ biến thiên năng lượng của nó.

Giải: Biến thiên năng lượng bằng:

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 = \frac{0{,}511\text{MeV}}{\sqrt{1 - (0{,}5)^2}} - 0{,}511\text{MeV} = 0{,}079\text{MeV}$$

Bài tập 42:

Tính xung lượng của một electron với vận tốc 0,8c.

Giải:

$$p = mv = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\frac{v}{c^2} = \frac{0{,}511\text{MeV}}{\sqrt{1 - (0{,}8)^2}}\left(\frac{0{,}8}{c}\right) = 0{,}681\frac{\text{MeV}}{c}$$

PHỤ LỤC

I. PHÉP TÍNH BIẾN PHÂN

1. Khái niệm phiếm hàm

Như chúng ta đã biết, nếu để cho từng số x từ một tập X nào đó, ta có một số y tương ứng từ tập hợp Y thì đó là việc thiết lập hàm số y = y(x).

Như vậy hàm số là thiết lập sự tương ứng:

Số ------> Số

Nếu tương ứng với từng hàm y(x) từ một lớp hàm nào đó ta có tương ứng một số ϕ, thì ta nói rằng phiếm hàm $\phi\,[y(x)]$ được thiết lập.

Như vậy phiếm hàm thiết lập sự tương ứng:

Hàm số (hay đường cong) -------> Số

ở đây hàm số (hay đường cong) đóng vai trò của biến số.

Tương tự như việc hàm số có thể có nhiều biến số, đối với phiếm hàm cũng tồn tại những phiếm hàm phụ thuộc vào nhiều hàm số.

Những phiếm hàm thoả mãn các điều kiện:

$$\phi\,[c\,y(x)] = c\,\phi\,[y(x)] \quad (\text{c là hằng số})$$

$$\phi\,[y_1(x) + y_2(x)] = \phi\,[y_1(x)] + \phi\,[y_2(x)] \qquad (I.1)$$

được gọi là những phiếm hàm tuyến tính.

Những phiếm hàm phụ thuộc vào nhiều hàm số có thể là phiếm hàm tuyến tính đối với một số hàm số nào đó và là phi tuyến tính đối với các hàm số khác.

Mục tiêu của phép tính biến phân là thiết lập các phương pháp tìm các giá trị cực trị (cực đại, cực tiểu) của các phiếm hàm. Nhiệm vụ này hầu như giống (tương tự) như nhiệm vụ tìm cực trị của hàm số thông thường.

2. Biến phân phiếm hàm

Chúng ta chọn từ lớp các hàm số đang xét một hàm $\tilde{y}(x)$ (dấu ngã ở đây để phân biệt hàm được chọn với các hàm khác của lớp các hàm). Sau đó chúng ta chọn từ lớp các hàm đó một hàm khác y(x). Hiệu giữa hai hàm này được gọi là biến phân của hàm $\tilde{y}(x)$ và được ký hiệu là $\delta y(x)$ hay ngắn gọn là δy. Như vậy biến phân của hàm được xác định bởi biểu thức sau:

$$\delta y = y(x) - \tilde{y}(x) \qquad (I.2)$$

Biến phân của hàm số ở đây tương tự như số gia đối số Δx (hay dx) của hàm thông thường $\Delta x = x - \tilde{x}$.

Biến phân δy của hàm số $\tilde{y}(x)$ tất nhiên là hàm số của x. Do vậy đạo hàm biểu thức (I.2) theo x ta có:

$$(\delta y)' = y'(x) - \tilde{y}'(x) \qquad (I.3)$$

Vế phải của biểu thức (I.3) là biến phân của hàm $y'(x)$ cho nên ta có biểu thức sau:

$$(\delta y)' = \delta y' \qquad (I.4)$$

(Đạo hàm của biến phân bằng biến phân của đạo hàm)

Như chúng ta đã biết vi phân của hàm khả vi được định nghĩa là phần chính tuyến tính trong khai triển của số gia hàm số:

$$\Delta y = y'(\tilde{x})\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x \qquad (I.5)$$

ở đó ε là đại lượng vô cùng nhỏ và tiến tới 0 cùng với Δx (có nghĩa là $\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$). Phần chính tuyến tính của (I.5): dy = y'(x) Δx = y'(x) dx được gọi là vi phân của hàm.

Phiếm hàm được gọi là liên tục nếu tương ứng với sự thay đổi nhỏ của hàm (δy nhỏ) thì phiếm hàm có sự thay đổi nhỏ. Để cho các phiếm hàm liên tục chúng ta có thể đưa vào đại lượng tương tự như vi phân của hàm thông thường.

Số gia của phiếm hàm $\Delta\phi = \phi[y(x) + \delta y] - \phi[y(x)]$ là đại lượng phụ thuộc vào hai hàm: y(x) và δy, cho nên nó cũng là phiếm hàm. Phiếm hàm Δϕ này nói chung sẽ là không tuyến tính. Nếu phiếm hàm $\Delta\phi[y(x)]$ có thể biểu diễn dưới dạng tổng của phiếm hàm tuyến tính đối với δy

$F_{tt\ theo\ \delta y}[y(x), \delta y]$ và đại lượng vô cùng nhỏ bậc cao hơn một so với $|\delta y|_{max}$ thì phần chính tuyến tính theo δy của số gia của phiếm hàm được gọi là biến phân của phiếm hàm. Như vậy là:

$$\Delta\phi[y(x)] = \delta\phi[y(x)] + \varepsilon(\delta y)\,|\delta y|_{max}$$

ở đó $\lim_{\delta y \to 0} \varepsilon(\delta y) = 0$, còn

$\delta\phi[y(x)] = F_{tt\ theo\ \delta y}[y(x), \delta y]$ được gọi là biến phân của phiếm hàm ϕ.

Biến phân của phiếm hàm, như ta thấy, được định nghĩa tương tự như định nghĩa vi phân của hàm thông thường.

3. Điều kiện cần để phiếm hàm có cực trị

Một lần nữa ta lại bắt đầu từ những khái niệm tương tự từ môn toán giải tích. Chúng ta nói hàm $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ có cực trị ở điểm $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots \tilde{x}_n)$ nếu như số gia của hàm này

$\Delta f = f(x_1, x_2, \ldots x_n) - f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots \tilde{x}_n)$ chỉ có một dấu đối với tất cả các điểm $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ nằm ở lân cận của điểm

$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$. Khi $\Delta f \leq 0$ thì tại điểm $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ hàm có giá trị cực đại và khi $\Delta f \geq 0$ thì hàm có giá trị cực tiểu.

Trong toán giải tích đã chứng minh được rằng, điều kiện cần để hàm có cực trị là:

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0 \qquad (I.7)$$

Hoàn toàn tương tự chúng ta nói phiếm hàm $\phi\,[y(x)]$ đạt cực trị khi $y = \tilde{y}(x)$, nếu số gia của phiếm hàm $\Delta\phi = \phi[y(x)] - \phi[\tilde{y}(x)]$ chỉ có một dấu đối với tất cả các đường cong $y(x)$ nằm đủ gần đường cong $\tilde{y}(x)$. Khi $\Delta\phi \leq 0$ thì phiếm hàm có giá trị cực đại và khi $\Delta\phi \geq 0$ thì phiếm hàm có giá trị cực tiểu.

Điều kiện cần để phiếm hàm có cực trị khi $y = \tilde{y}(x)$ sẽ là biến phân của phiếm hàm bằng không khi $y = \tilde{y}(x)$.

$$\delta\phi = F_{\text{tt theo } \delta y}\,[\tilde{y}(x), \delta y] = 0 \qquad (I.8)$$

4. Một bài toán đơn giản của phép tính biến phân.

Tìm cực trị của phiếm hàm có dạng:

$$\phi[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} f\,[x, y(x), y'(x)]dx \qquad (I.9)$$

Các điểm biên của các đường cong đang xem xét được gắn chặt cố định và để cho tất cả các đường cong đó ta đều có:

$$y\,(x_1) = y_1 \quad , \; y\,(x_2) = y_2 \qquad (I.10)$$

Số gia của phiếm hàm (I.9) bằng:

$$\Delta\phi = \int_{x_1}^{x_2} f\,[x, y+\delta y, y'+\delta y']dx - \int_{x_1}^{x_2} f[x, y, y']dx$$

Chúng ta phân tích hàm dưới dấu tích phân của số hạng thứ nhất thành chuỗi luỹ thừa của các đại lượng nhỏ δy và $\delta y'$. Kết quả chúng ta nhận được:

$$\Delta\phi = \int_{x_1}^{x_2}\left\{ f\left[x,y,y'\right] + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' + \varepsilon(\delta y,\delta y')\right\} dx -$$

$$-\int_{x_1}^{x_2} f\left[x,y,y'\right] dx$$

ở đó $\varepsilon(\delta y\ ,\ \delta y')$ chứa các số hạng nhỏ bậc cao hơn một so với δy và $\delta y'$. Biểu thức trên được giản ước và viết lại như sau:

$$\Delta\phi = \int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right\} dx + \int_{x_1}^{x_2}\varepsilon(\delta y,\delta y')dx \qquad (I.11)$$

Chúng ta lấy tích phân từng phần số hạng thứ hai của tích phân đầu. Để làm điều đó ta biểu diễn nó dưới dạng sau:

$$J = \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\,dx = \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial y'}(\delta y)'\,dx$$

Ký hiệu $\frac{\partial f}{\partial y'} = u; (\delta y')dx = dv$ và sử dụng công thức

$\int udv = uv - \int vdu$, chúng ta sẽ được:

$$J = \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial y'}(\delta y)'dx = \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y dx$$

Vì các điểm biên của các đường cong đang xét được gắn cố định cho nên biến phân δy ở các điểm biên đó bằng 0:

$\delta y\ (x_1) = \delta y\ (x_2) = 0$ và ta được

$$J = -\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y dx \qquad (I.12)$$

Đặt (I.12) vào (I.11) và đưa δy ra ngoài dấu ngoặc:

$$\Delta\phi = \int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right\}\delta y dx + \int_{x_1}^{x_2}\varepsilon(\delta y,\delta y')dx$$

Phần chính tuyến tính theo δy của $\Delta\phi$ là tích phân thứ nhất. Theo định nghĩa thì tích phân này chính là biến phân của phiếm hàm ϕ. Như vậy biến phân của phiếm hàm ϕ có dạng:

$$\delta\phi = \int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right\}\delta y dx$$

Điều kiện cần để phiếm hàm ϕ có cực trị là:

$$\delta\phi = \int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right\}\delta y dx = 0 \qquad (I.13)$$

Đẳng thức này đúng với mọi δy do vậy biểu thức trong dấu ngoặc phải bằng 0:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \qquad (I.14)$$

Phương trình (I.14) được gọi là phương trình Euler. Nó chính là điều kiện cần để phiếm hàm dạng (I.9) có cực trị.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Л.Г.Гречко. В. и.Сугуакв, О.ф. Томасевич, А.М. федорченко. 1984. Сборнин задач по Теоретичекой физике. Издательство Высщая Школа.
2. Л. Д. Ландау, Е.М. Лифщиц. 1973 Механика. Издательство наука. Москва. 208с.
3. Л. Д. Ландау, Е.М. Лифщиц. 1967 Теория поля. Издательство наука. Москва. 460с.
4. И.В.Савельев. 1975. Основы Теоретичекой физики, Том 1. Издательство наука. Москва. 416с.
5. А. Зйнщтейн. 1965. физика и реальность. Издательство наука. Москва. 360с.
6. Nguyễn Hữu Mình. 1997. Cơ học lý thuyết - Nhà xuất bản ĐHQG Hà Nội. 324 trang.
7. Nguyễn Hữu Mình. 1996. Bài tập vật lý lý thuyết tập 1. NXB ĐHQG Hà Nội. 288 trang.
8. Ronald Gautreau - William Savin. 1997. Vật lý hiện đại (lý thuyết và bài tập). NXBGD. Hà Nội. 489 trang. (sách dịch).
9. A.X Kompanheetx. 1980. Giáo trình vật lý lý thuyết. Tập 1. Các định luật cơ bản. NXBĐH & THCN. NXBMIR. Hà Nội - Maxcơva. 485 trang. (sách dịch).

10. Nguyễn Hoàng Phương. 1977. Vật lý lý thuyết, cơ học - NXB ĐH&THCN. Hà Nội. 424 trang.

11. Nguyễn Hoàng Phương. 1998. Nhập môn cơ học lượng tử, cơ sở và phương pháp (tích hợp Toán - Lý - Hoá). NXB GD. Hà Nội. 772 trang.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội

Điện thoại: (04) 9715012; (04) 7685236. Fax: (04) 9714899

E-mail: nxb@vnu.edu.vn

★ ★ ★

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: PHẠM THÀNH HƯNG

Chịu trách nhiệm nội dung:

Hội đồng nghiệm thu giáo trình

Trường ĐHKHTN – Đại học Quốc gia Hà Nội

Người nhận xét: GS. TSKH. TRẦN HỮU PHÁT

PGS. TSKH. NGUYỄN VĂN HÙNG

GS. TSKH. NGUYỄN XUÂN HÃN

GS. TS. NGUYỄN QUANG BÁU

Biên tập: TRẦN VĂN TRẢN

Biên tập tái bản: NGUYỄN THẾ HIỆN

Trình bày bìa: NGỌC ANH

CƠ HỌC LÝ THUYẾT

Mã số: 1K - 02051 - 02204

In 1000 cuốn, khổ 14,5 x 20,5 tại Nhà in Đại học Quốc gia Hà Nội

Số xuất bản: 76/113/XB - QLXB, ngày 10/2/2004. Số trích ngang: 98 KH/XB

In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2004.