

PGS.TS. PHAN HỒNG LIÊN (Chủ biên)  
TS. LÂM VĂN HÙNG – TS. NGUYỄN TRUNG KIÊN

# TUYỂN TẬP CÁC BÀI TẬP VẬT LÝ ĐẠI CƯƠNG

*Dùng cho các trường Đại học có các chuyên ngành  
Vật lý, Vật lý – Kỹ sư và Vật lý – Kỹ thuật*

TẬP MỘT: **CƠ HỌC, NHIỆT HỌC  
VÀ VẬT LÝ PHÂN TỬ**

*(Tái bản lần thứ nhất)*

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM



## Lời nói đầu

Bộ sách này là Tuyển tập các bài tập Vật lý đại cương dùng cho các trường Đại học có các chuyên ngành về Vật lý, Vật lý – Kỹ sư và Vật lý – Kỹ thuật. Bộ sách được biên soạn theo chương trình của các trường Đại học trong nước và các nước tiên tiến, mà tiêu biểu là các trường Đại học Liên bang Nga. Các bài tập trong bộ sách này là những bài tập tiêu biểu được lựa chọn trong “**Tuyển tập các Bài tập Vật lý đại cương**” do nhóm tác giả V.A. Ovtrinkin, D.A. Daikin, S.M. Kozel, V.G. Leiman, G.R. Lokshin và E.R. Prut biên soạn và một số bài tập khác.

Đây là những bài tập rất có giá trị cả về lý thuyết và thực tiễn, đã được đưa vào chương trình giảng dạy cho nhiều trường Đại học Tổng hợp Kỹ thuật của Liên bang Nga và cho nhiều thế hệ sinh viên, cũng như học sinh các khối chuyên Lý của Việt Nam.

Vì vậy, chúng tôi quyết định cố gắng công bố Tuyển tập này nhằm mục đích cao nhất là chuyển tới đồng nghiệp và các bạn sinh viên quan tâm đến Vật lý Kỹ thuật một tài liệu mới, có tính hệ thống để hỗ trợ cho việc nghiên cứu và học tập.

Bộ sách này gồm ba tập:

Tập I: Cơ học, Nhiệt học và Vật lý phân tử;

Tập II: Điện Từ và Quang học;

Tập III: Vật lý nguyên tử và hạt nhân, cấu trúc của vật chất.

Nhóm biên soạn xin chân thành cảm ơn nhà báo, dịch giả Phạm Văn Thiều – Hội Vật lý Việt Nam đã đóng góp nhiều ý kiến quý báu cho bộ sách.

Lần đầu tiên xuất bản, chắc chắn sẽ không tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được ý kiến đóng góp của độc giả để lần xuất bản sau sách được tốt hơn. Mọi ý kiến xin gửi về: Công ty Cổ phần Sách Đại học – Dạy nghề, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 25 Hà Thuyên – Hà Nội.

**Nhóm biên soạn**



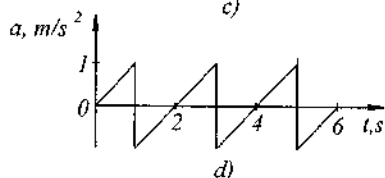
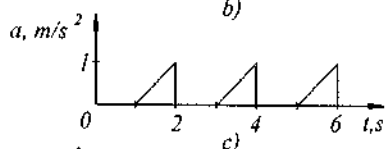
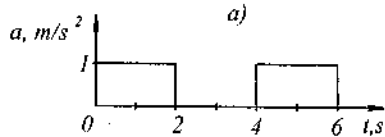
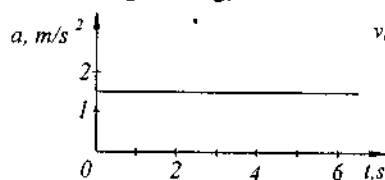


# ĐỀ BÀI

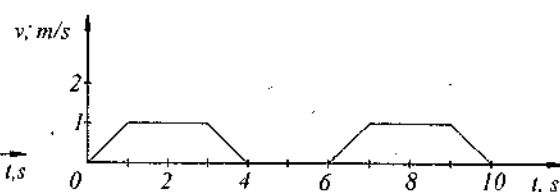
## Phần 1 CƠ HỌC

### §1. ĐỘNG HỌC CHẤT ĐIỂM

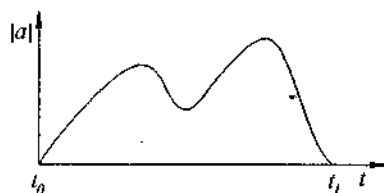
**1.1.** Vẽ đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của vận tốc các vật vào thời gian, nếu đồ thị gia tốc  $a$  của chúng có dạng như trên hình 1 (vận tốc ban đầu của các vật đều bằng không)<sup>1</sup>.



Hình 1



Hình 2



Hình 3

**1.2.** Vẽ đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của quãng đường và gia tốc của một vật vào thời gian, nếu vận tốc là hàm thời gian và cho trên hình 2 (xem chú thích bài tập 1.1).

<sup>1</sup> Ở các đồ thị trên ta đã giả thiết rằng gia tốc trong một số thời điểm nào đó biến đổi đột ngột. Chúng ta làm thế cốt để đơn giản. Thực tế gia tốc có thể biến đổi rất nhanh nhưng không thể biến đổi đột ngột, bởi vì chúng là các hàm liên tục của thời gian. Khi gia tốc biến đổi đột ngột thì đồ thị của vận tốc bị gãy khúc. Ta giả thiết cũng tương tự đối với bài 1.2.

**1.3.** Trên hình 3 biểu diễn đồ thị sự phụ thuộc của độ lớn gia tốc  $a$  vào thời gian  $t$  của một vật chuyển động thẳng. Xác định thời gian  $t_x$  ứng với giá trị lớn nhất của độ lớn vận tốc của vật.

**1.4.** Một phân đội súng cối đóng ở chân núi có độ dốc  $45^\circ$  so với phương ngang. Cần đặt nòng súng hợp với phương nằm ngang một góc  $\alpha$  bằng bao nhiêu để quả đạn đạt được độ cao cực đại? Bỏ qua sức cản của không khí.

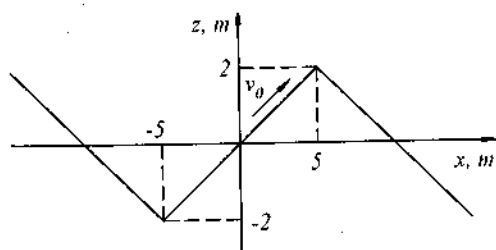
**1.5.** Cần ném một viên đá từ đỉnh núi có độ dốc  $45^\circ$  với một góc  $\alpha$  bằng bao nhiêu so với phương nằm ngang để viên đá rơi xuống sườn dốc được xa nhất?

**1.6.** Một vận động viên đẩy tạ sau khi lấy đà. Giả thiết tại thời điểm ném vận tốc của tạ so với người ném bằng độ lớn vận tốc chạy đà. Tìm góc  $\alpha$  mà người đó cần phải ném để quãng đường đi được của tạ là lớn nhất. Bỏ qua chiều cao của vận động viên.

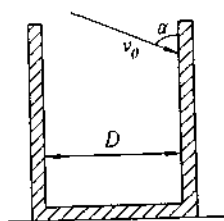
**1.7.** Một vật chuyển động trên đường có dạng như hình 4. Tại thời điểm  $t = 0$  vật ở tại điểm  $x = 0, z = 0$  và có vận tốc  $v = v_0$ . Vẽ quỹ đạo chuyển

động của vật trong mặt phẳng pha với các trục tọa độ  $z, \frac{dz}{dt}$ . Vận tốc  $v_0$

nhận hai giá trị sau:  $(v_0)_1 = 5 \text{ m/s}, (v_0)_2 = 7 \text{ m/s}$ .



Hình 4



Hình 5

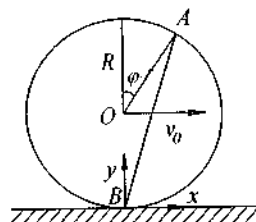
**1.8.** Người ta ném một hòn bi vào một bình hình trụ lớn có đường kính trong bằng  $D$  (H. 5). Hỏi với các giá trị nào của  $v_0$  và  $\alpha$  thì quỹ đạo đi lên của hòn bi sau khi va chạm với đáy sẽ đối xứng với quỹ đạo đi xuống của nó và hòn bi không bắn ra ngoài bình trụ. Tìm số lần va chạm của hòn bi với bình trụ trong một chu kỳ chuyển động của nó trong bình trụ. Tất cả các va chạm giả thiết là đàn hồi tuyệt đối.

**1.9.** Xác định vận tốc của bóng Mặt Trăng trên bề mặt Trái Đất trong thời gian nhật thực toàn phần, nếu nó được quan sát trên xích đạo. Để đơn giản giả thiết rằng Mặt Trăng, Trái Đất và Mặt Trời cùng nằm trong một mặt phẳng và trục của Trái Đất vuông góc với mặt phẳng đó. Giả thiết vận tốc ánh sáng rất lớn so với các vận tốc còn lại. Bán kính quỹ đạo Mặt Trăng

$$R_{MT} = 3,8 \cdot 10^5 \text{ km}.$$

**1.10.** Trên biển tại xích đạo có một tảng đá cao thẳng đứng. Hỏi bóng của bề mặt Trái Đất trên tảng đá sẽ chuyển động như thế nào khi Mặt Trời lặn? Tìm gia tốc của chuyển động đó? Bán kính Trái Đất bằng 6400 km. Sau thời gian bao lâu thì bóng này di chuyển từ chân tảng đá lên đến đỉnh, nếu chiều cao tảng đá  $h = 1 \text{ km}$ ?

**1.11.** Một bánh xe bán kính  $R$  lăn không trượt trên đường ngang với vận tốc  $v_0$  (H. 6). Tìm thành phần nằm ngang  $v_x$  và thẳng đứng  $v_y$  của vận tốc dài của một điểm bất kỳ trên vành bánh xe và độ lớn của vận tốc toàn phần tại điểm này. Tìm góc  $\alpha$  giữa vectơ vận tốc toàn phần của các điểm với chiều chuyển động tịnh tiến của trục bánh xe. Hãy chứng minh rằng chiều của vận tốc toàn phần của một điểm  $A$  tùy ý trên vành bánh xe luôn vuông góc với đường thẳng  $AB$  và đi qua điểm cao nhất của bánh xe. Chỉ ra rằng đối với điểm  $A$  thì  $v_p = |BA|\omega$ . Vẽ đồ thị phân bố vận tốc của tất cả các điểm nằm trên đường kính thẳng đứng (tại một thời điểm đã cho) của bánh xe lăn không trượt. Biểu diễn tất cả các đại lượng cần tìm qua  $v_0$ ,  $R$  và góc  $\varphi$  giữa bán kính thẳng đứng với đường thẳng qua tâm  $O$  và điểm đang xét  $A$ .



Hình 6

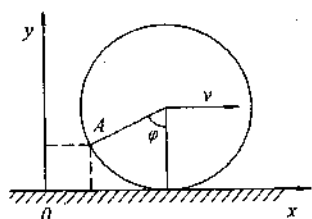
*Hướng dẫn.* Chuyển động của các điểm trên đai bánh xe có thể xem như kết quả của hai chuyển động: chuyển động tịnh tiến với vận tốc  $v_0$  của trục bánh xe và chuyển động quay quanh trục. Đối với các điểm này, khi lăn không trượt, độ lớn của vectơ vận tốc của chuyển động tịnh tiến và vận tốc dài của chuyển động quay bằng nhau.

**1.12.** Một bánh xe bán kính  $R$  lăn đều không trượt theo đường nằm ngang với vận tốc  $\vec{v}$ . Tìm tọa độ  $x$  và  $y$  của một điểm  $A$  bất kỳ trên vành bánh xe, biểu diễn chúng dưới dạng hàm của thời gian  $t$  hoặc của góc quay  $\varphi$ , giả thiết rằng tại thời điểm  $t = 0$ ,  $\varphi = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$  (H. 7). Trên cơ sở các biểu thức tìm được của  $x$  và  $y$  hãy vẽ đồ thị quỹ đạo chuyển động của một điểm trên vành xe.

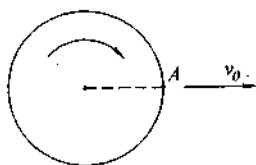
**1.13\*.** Một ô tô có các bánh xe bán kính  $R$  chuyển động với vận tốc  $v$  theo đường nằm ngang, và  $v^2 > Rg$ , trong đó  $g$  là gia tốc rơi tự do. Hỏi bùn đất bị văng khỏi bánh xe sẽ bay được đến độ cao cực đại  $h$  bằng bao nhiêu? Hãy chỉ ra điểm trên lốp xe mà bùn đất văng ra từ đó đạt độ cao lớn nhất khi xe chạy với vận tốc  $v$  cho trước. Bỏ qua sức cản của không khí.

**1.14.** Một bánh xe bán kính  $R$  chuyển động theo phương ngang với vận tốc  $v_0$  và quay với vận tốc góc  $\omega$ . Điểm  $A$  trên vành bánh xe (H. 8) vẽ trong

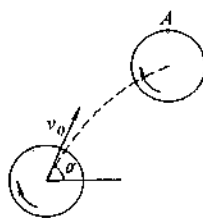
không gian một quỹ đạo. Tìm bán kính cong  $\rho$  của quỹ đạo tại thời điểm khi điểm đó nằm cùng độ cao với tâm bánh xe.



Hình 7



Hình 8



Hình 9

**1.15.** Một đĩa tròn bán kính  $R$  quay quanh trục của nó với vận tốc  $\omega$ , sau đó bị văng lên dưới một góc  $\alpha$  so với phương ngang với vận tốc  $v_0$ . Điểm  $A$  trên vành đĩa vẽ trong không gian một quỹ đạo (H. 9). Tìm bán kính cong  $\rho$  của quỹ đạo tại thời điểm đĩa đạt độ cao cực đại và điểm  $A$  khi đó cũng là điểm nằm cao nhất của bánh xe.

**1.16.** Một đĩa tròn nằm ngang quay với vận tốc góc  $\omega_1$  quanh trục thẳng đứng. Trên đĩa này, cách trục quay một khoảng  $R$  đặt đĩa thứ hai cũng có trục thẳng đứng. Đĩa thứ hai quay quanh trục của nó cùng chiều với đĩa thứ nhất với vận tốc góc  $\omega_2$ . Tìm vị trí của trục tức thời, sao cho chuyển động quay của đĩa thứ hai quanh nó tương đương với hai chuyển động quay  $\omega_1$  và  $\omega_2$  mô tả trên đây mà nó tham gia. Đĩa thứ hai quay quanh trục tức thời với vận tốc góc  $\omega$  bằng bao nhiêu?

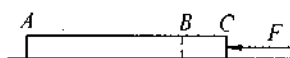
**1.17.** Chuyển động quay của động cơ ô tô được truyền cho các bánh chủ động qua bộ vi sai – thiết bị mà nhờ nó mỗi bánh chủ động có thể quay với vận tốc riêng. Tại sao phải có bộ vi sai? Tại sao không thể nối cứng hai bánh chủ động với trục truyền chuyển động trực tiếp từ động cơ?

**1.18.** Trên cơ sở những kiến thức về chuyển động của ô tô theo đường cong được nêu trong bài trước, hãy tính vận tốc của các bánh ô tô trên một đoạn đường vòng. Ô tô có khoảng cách hai bánh trước hoặc sau rộng  $1,2\text{m}$ , bán kính các bánh  $r = 30\text{cm}$ , chuyển động theo một đoạn đường vòng với bán kính cong  $R = 50\text{m}$ . Vận tốc tâm ô tô là  $36\text{km/h}$ . Tìm vận tốc dài  $v_{\text{in}}$  của các bánh bên trong và  $v_{\text{ex}}$  của các bánh bên ngoài (đối với tâm cong của đường).

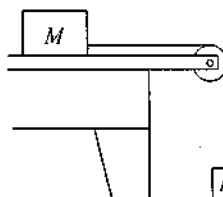
## §2. ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT ĐIỂM. TĨNH HỌC

**2.1.** Trên mặt bàn nhẵn nằm ngang có một thanh đồng chất  $AC$  khối lượng  $m$  và chiều dài  $l$  (H. 10). Người ta tác dụng một lực không đổi  $F$  lên đầu bên

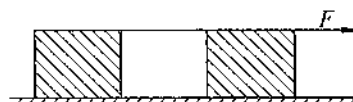
phải của nó. Hỏi đoạn thanh được chia theo tỉ lệ  $AB = \frac{4l}{5}$  sẽ tác dụng lên đoạn còn lại  $BC$  một lực  $F_1$  bằng bao nhiêu?



Hình 10



Hình 11

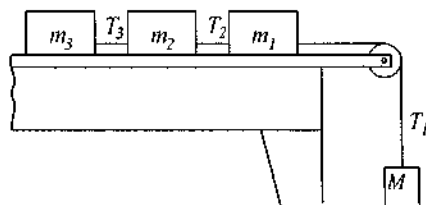


Hình 12

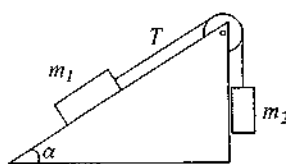
**2.2.** Trên mặt phẳng nhẵn nằm ngang có một vật khối lượng  $M$  (H. 11). Một vật khác khối lượng  $m$  được treo trên một sợi dây nối với vật  $M$  qua một ròng rọc. Tìm gia tốc của các vật và lực căng của dây. Bỏ qua ma sát của vật  $M$  với mặt phẳng, của dây với ròng rọc và bỏ qua khối lượng sợi dây và ròng rọc.

**2.3.** Hai vật giống nhau nằm trên mặt bàn nhẵn lý tưởng, được nối với nhau bằng sợi dây có dạng đường thẳng (H. 12). Sợi dây có thể chịu được lực căng không lớn hơn 20N. Hỏi phải đặt một lực ngang  $F$  bằng bao nhiêu lên một vật để dây bị đứt? Lực cần thiết để làm đứt dây có thay đổi không nếu giữa bàn với các vật có ma sát và hệ số ma sát đối với cả hai vật là như nhau?

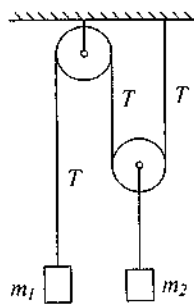
**2.4.** Trên mặt phẳng ngang nhẵn lý tưởng người ta đặt ba vật khối lượng  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  được nối với nhau bằng các dây và nối với vật có khối lượng  $M$  qua một ròng rọc (H. 13). Tìm gia tốc  $a$  của hệ. Tìm lực căng của tất cả các dây. Bỏ qua ma sát của ròng rọc, bỏ qua khối lượng của ròng rọc và của các dây.



Hình 13



Hình 14

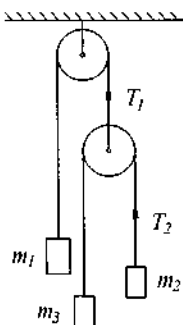


Hình 15

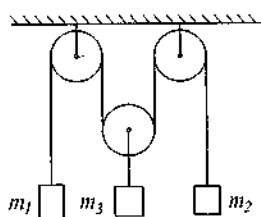
**2.5.** Trên một mặt phẳng nghiêng nhẵn lý tưởng người ta đặt một vật khối lượng  $m_1$  và nối nó với một vật khối lượng  $m_2$  bằng một sợi dây qua ròng rọc ở cạnh trên của mặt phẳng nghiêng (H. 14). Các vật sẽ chuyển động với gia tốc  $a$  bằng bao nhiêu? Lực căng  $T$  của dây bằng bao nhiêu? Mặt phẳng nghiêng hợp với phương nằm ngang một góc  $\alpha$ .

2.6. Tìm gia tốc  $a_1$  và  $a_2$  của các vật khối lượng  $m_1$  và  $m_2$  và tìm lực căng  $T$  của dây trong hệ được cho trên hình 15. Bỏ qua khối lượng các ròng rọc và dây.

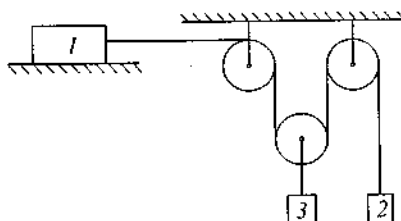
2.7. Tìm gia tốc của vật  $m_1$  và các lực căng  $T_1$ ,  $T_2$  của dây trong hệ được cho trên hình 16. Bỏ qua khối lượng của các ròng rọc và dây, bỏ qua ma sát.



Hình 16



Hình 17



Hình 18

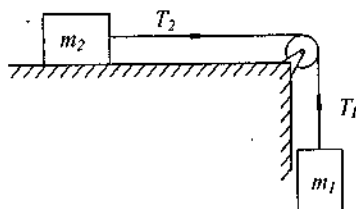
2.8. Ba vật được treo trên ròng rọc (H. 17). Hai ròng rọc ở hai bên được treo cố định, còn ròng rọc ở giữa có thể chuyển động được. Giả thiết cho trước các khối lượng  $m_1$  và  $m_2$ . Xác định khối lượng  $m_3$  để ròng rọc ở giữa đứng yên. Bỏ qua ma sát và khối lượng của dây và của ròng rọc.

2.9. Hai vật được treo trên ròng rọc, vật thứ ba nằm trên mặt phẳng ngang (H. 18). Hai ròng rọc ở hai bên được treo cố định, ròng rọc ở giữa có thể dịch chuyển được. Giả thiết cho trước  $m_1$  và  $m_2$ . Tìm khối lượng  $m_3$  để vật thứ ba đứng yên. Bỏ qua ma sát và khối lượng của dây và của ròng rọc.

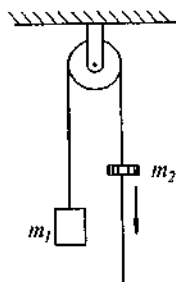
2.10. Hai vật được nối với nhau bằng một sợi dây không giãn, đồng chất có chiều dài  $l$  (H. 19). Khối lượng của các vật  $m_1 = m$ ,  $m_2 = \frac{2m}{3}$ , của dây

$m_d = \frac{m}{3}$ . Hỏi độ dài của đoạn dây thẳng đứng  $x_1$  bằng bao nhiêu để các lực

do dây tác dụng lên các vật sẽ bằng nhau? Các lực này bằng bao nhiêu? Gia tốc của hệ khi đó bằng bao nhiêu?



Hình 19



Hình 20

**2.11.** Một sợi dây được vắt qua một ròng rọc nhẹ có thể quay không ma sát. Một đầu dây được buộc vào vật khối lượng  $m_1$ . Ở đầu kia của dây có một vật khối lượng  $m_2$  trượt với gia tốc  $a_2$  không đổi so với dây (H. 20). Tìm gia tốc  $a_1$  của vật  $m_1$  và lực ma sát  $R$  của vật  $m_2$  với dây. Bỏ qua khối lượng của dây.

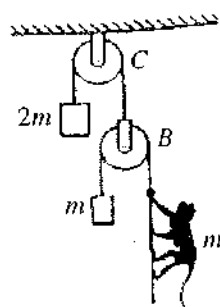
**2.12.** Một hòn đá khối lượng  $m$  nằm trên một mặt phẳng ngang cách mép vực một khoảng  $L$ . Một sợi dây buộc vào hòn đá và đầu tự do thả xuống vực qua một mẫu nhẵn. Một con khỉ khối lượng  $m$  bám theo dây và leo lên. Hỏi con khỉ phải leo với gia tốc không đổi (so với mặt đất) bằng bao nhiêu để có thể kịp trèo lên mặt phẳng ngang trước khi hòn đá rơi xuống vực? Khoảng cách ban đầu từ con khỉ đến mẫu là  $H < \frac{M}{m}L$ . Hệ số ma sát của hòn đá lên

mặt phẳng là  $k$ .

**2.13.** Qua một ròng rọc có trục nằm ngang, người ta vắt một sợi dây không dẫn dài  $l$ . Hai đầu sợi dây có hai con khỉ đu và cùng cách ròng rọc một khoảng  $\frac{l}{2}$ . Hai con khỉ đồng thời leo ngược lên trên, một con leo với vận tốc

$v$ , còn con kia leo với vận tốc  $2v$ . Hỏi sau khoảng thời gian bao lâu thì mỗi con leo tới ròng rọc? Bỏ qua khối lượng ròng rọc và sợi dây. Khối lượng hai con khỉ bằng nhau.

**2.14.** Một con khỉ khối lượng  $m$  được cân bằng với một đối trọng trên ròng rọc động  $B$  (H. 21). Ròng rọc  $B$  được cân bằng bằng một vật khối lượng  $2m$  qua ròng rọc cố định  $C$ . Lúc đầu hệ đứng yên, vật  $2m$  sẽ chuyển động lên với vận tốc bằng bao nhiêu nếu khỉ bắt đầu thu dây với vận tốc  $v$  (đối với nó)? Bỏ qua khối lượng ròng rọc.



Hình 21

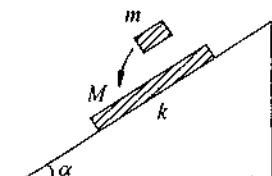
**2.15.** Trên bàn có một tấm khối lượng  $M = 1 \text{ kg}$  và trên tấm đặt một vật khối lượng  $m = 2 \text{ kg}$ . Hỏi cần phải tác dụng lên tấm một lực bằng bao nhiêu để kéo tấm tuột ra khỏi vật trên nó? Hệ số ma sát giữa vật và tấm là 0,25, giữa tấm và bàn là 0,5.

**2.16.** Một vật khối lượng  $m$  nằm trên một tấm khối lượng  $M$ . Hệ số ma sát giữa tấm và vật là  $k_1$ , giữa tấm và nền là  $k_2$ . Người ta tác dụng lên tấm một lực theo phương ngang và tấm bắt đầu chuyển động với vận tốc ban đầu bằng  $v_0$ . Xác định thời gian đến khi vật ngừng trượt trên tấm.

**2.17.** Một vật khối lượng  $m$  nằm trên một tấm khối lượng  $M$ . Hệ số ma sát giữa tấm và vật bằng  $k$ . Người ta tác dụng lên vật một lực theo phương ngang

làm vật bắt đầu chuyển động với vận tốc ban đầu  $v_0$ . Xác định thời gian đến khi vật ngừng trượt trên tấm. Bỏ qua ma sát giữa tấm với nền.

**2.18.** Trên mặt phẳng nghiêng tạo với phương ngang một góc  $\alpha$  có một tấm khối lượng  $M$  đang trượt có gia tốc (H.22). Hệ số ma sát của tấm với mặt phẳng nghiêng bằng  $k$ . Người ta đặt lên tấm một vật khối lượng  $m$ . Vật  $m$  trượt không ma sát trên tấm. Hỏi khối lượng nhỏ nhất của vật  $m_{\min}$  phải bằng bao nhiêu để chuyển động của tấm trên mặt phẳng nghiêng là chuyển động đều?



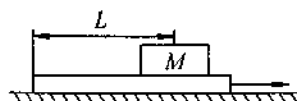
Hình 22

**2.19.** Trên một mặt phẳng nghiêng với góc nghiêng  $\alpha$  có hai vật chồng lên nhau đang cùng trượt. Vật ở dưới có khối lượng  $m_1$ , vật nằm trên có khối lượng  $m_2$ . Hệ số ma sát của vật dưới với mặt phẳng nghiêng bằng  $k_1$ , còn hệ số ma sát giữa hai vật bằng  $k_2$ , trong đó  $k_1 > k_2$ . Vật trên có chuyển động đối với vật dưới không và gia tốc của hai vật bằng bao nhiêu? Kết quả sẽ thay đổi như thế nào nếu  $k_1 < k_2 < \tan \alpha$ ?

**2.20.** Một đĩa phẳng khối lượng  $M$  nằm trên một tấm ván mỏng cách một đầu của nó một khoảng  $L$  (H. 23) Người ta kéo tấm ván với một vận tốc lớn không đổi ra khỏi đĩa làm cho đĩa không kịp dịch chuyển theo. Tìm sự phụ thuộc của quãng đường đĩa đi được vào thời gian nó trượt trên bàn. Đĩa trượt được tổng khoảng cách bằng bao nhiêu? Giả thiết lực ma sát giữa đĩa và tấm, giữa đĩa và mặt bàn tỷ lệ thuận với vận tốc và hệ số tỷ lệ là  $\gamma$ .

**2.21.** Ôtô nghiêng một góc  $\alpha$  bằng bao nhiêu khi hãm phanh (H. 24)? Biết khối tâm của ô tô nằm cách đều giữa bánh sau và bánh trước và ở độ cao  $h = 0,4$  m so với mặt đất. Hệ số ma sát  $k = 0,8$ , khoảng cách giữa hai trục  $l = 5h$ . Độ cứng của các lò xo nâng là giống nhau và khi ô tô đứng yên trên mặt phẳng ngang thì độ nén của chúng  $\Delta = 10$  cm.

**2.22.** Khi hãm phanh bằng cả bốn bánh quãng đường ô tô đi được là  $S_0$ . Tìm quãng đường hãm của ô tô này khi chỉ phanh bằng hai bánh sau và chỉ bằng hai bánh trước. Hệ số ma sát trượt  $k = 0,8$ , khối tâm ô tô nằm cách đều các bánh trước và bánh sau ở độ cao  $h = \frac{l}{4}$ ,  $l$  là khoảng cách giữa hai trục.



Hình 23



Hình 24

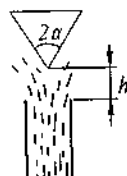


Hình 25



**2.23.** Một thanh dầm đồng chất có chiều dài  $l$ , khối lượng  $M$ , được vận chuyển trên hai xe lết ngấn (H. 25). Hỏi lực kéo tác dụng lên thanh bằng bao nhiêu để nó chuyển động đều theo phương ngang? Hệ số ma sát của xe lết trước là  $k_1$ , sau là  $k_2$ . Lực kéo nằm ngang và đặt vào thanh ở độ cao  $h$  so với mặt đất. Bỏ qua khối lượng xe lết.

**2.24.** Một vật hình nón bằng nhôm có khối lượng  $m = 10 \text{ g}$  và góc ở đỉnh  $2\alpha = 60^\circ$  nằm lơ lửng trên một dòng nước phụt thẳng đứng từ vòi phun nước với vận tốc  $v = 3,5 \text{ m/s}$ . Đường kính vòi phun  $d = 3 \text{ cm}$  (H. 26). Bỏ qua sức cản của không khí, giả thiết tiết diện của dòng nước ở đỉnh vật hình nón không đổi, xác định độ cao  $h$  mà vật hình nón nằm cách vòi phun.



Hình 26

**2.25.** Thuyền buồm chạy đạt vận tốc  $v_0$ . Hỏi vận tốc của thuyền trong nước lặng sẽ giảm như thế nào theo thời gian nếu hạ buồm, biết rằng sức cản của nước có thể coi là tỷ lệ với bình phương vận tốc? Thuyền sẽ chuyển động được trong bao lâu? Nó sẽ đi được quãng đường bằng bao nhiêu cho đến khi dừng?

**2.26.** Trả lời các câu hỏi đặt ra trong bài trước với giả thiết sức cản chuyển động của nước tỷ lệ với bậc nhất của vận tốc.

**2.27.** Giả thiết lực cản của nước tỷ lệ bậc nhất với vận tốc của thuyền. Hỏi vận tốc của thuyền sau khi hạ buồm sẽ phụ thuộc vào quãng đường đi được như thế nào?

**2.28.** Một vận động viên nhảy dù thực hiện một cú nhảy mở dù chậm. Trước khi mở dù anh ta rơi với vận tốc  $60 \text{ m/s}$ , sau khi mở dù hạ xuống đất với vận tốc  $4 \text{ m/s}$ . Hỏi lực căng cực đại  $T$  của dây dù bằng bao nhiêu nếu dù mở tức thời? Khối lượng của vận động viên là  $80 \text{ kg}$ , lực cản của không khí với dù giả thiết tỷ lệ thuận với bình phương vận tốc. Coi khối lượng dù và dây dù rất nhỏ so với khối lượng người nhảy.

**2.29.** Hai quả cầu rơi trong không khí. Biết rằng cả hai đều đặc và làm từ cùng một chất liệu, nhưng đường kính quả này lớn gấp đôi quả kia. Hỏi tỷ lệ vận tốc của hai quả cầu bằng bao nhiêu khi đã chuyển động ổn lập (chuyển động đều)? Giả thiết lực cản của không khí tỷ lệ thuận với tiết diện ngang và bình phương vận tốc của vật.

**2.30.** Vận tốc của một vật chuyển động thẳng đứng lên trên với vận tốc ban đầu  $v_0$  sẽ thay đổi như thế nào nếu giả thiết rằng lực cản của không khí tỷ lệ thuận với vận tốc của vật?

**2.31.** Người ta bắn một vật thẳng đứng lên trên trong môi trường nhớt. Lực ma sát nhớt tỷ lệ với vận tốc của vật. Tính thời gian  $t_1$  để vật lên đến độ cao cực đại và so sánh với thời gian  $t_2$  khi không có ma sát. Vận tốc ban đầu của vật trong cả hai trường hợp là như nhau.

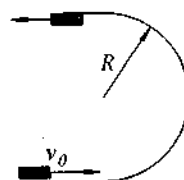
2.32. Từ bệ phóng tên lửa trên cao người ta phóng một quả đạn lên thẳng đứng với vận tốc  $v_0 = 600 \text{ m/s}$ . Lực cản của không khí  $\vec{F} = -k\vec{v}$ . Xác định độ cao cực đại của quả đạn và thời gian nó đạt đến độ cao ấy, biết rằng khi quả đạn rơi từ độ cao ấy thì vận tốc cuối cùng đạt được  $v_1 = 100 \text{ m/s}$ .

2.33. Từ một đám mây đứng yên có hai giọt nước rơi cách nhau  $\tau$  giây. Hỏi khoảng cách giữa chúng thay đổi như thế nào theo thời gian? Giải bài toán cho hai trường hợp:

- 1) giả thiết không có lực cản của không khí,
- 2) lực cản không khí tỷ lệ thuận với vận tốc của các giọt nước.

2.34. Từ trên buồm của một chiếc thuyền đang chạy ngoài đại dương với vận tốc 10 hải lý mỗi giờ (18km/h), một hoàng tử đánh rơi viên ngọc trai khối lượng  $m = 1 \text{ g}$  xuống nước. Hỏi viên ngọc trai sẽ rơi xuống đáy cách vị trí nó rơi vào nước bao nhiêu, nếu lực cản của nước đối với chuyển động của viên ngọc  $\vec{F} = -\beta\vec{V}$ ,  $\beta = 10^{-4} \text{ kg/s}$ ?

2.35. Một vật trượt theo mặt phẳng nhẵn nằm ngang với vận tốc  $v_0$  và chuyển động theo phương tiếp tuyến một tường chắn có dạng nửa đường tròn (H. 27). Xác định thời gian mà vật đi qua tường này. Bán kính tường  $R$ , hệ số ma sát trượt của vật và thành tường là  $k$ . Bỏ qua ma sát của vật với mặt phẳng ngang, kích thước của vật rất nhỏ so với  $R$ .



Hình 27

2.36. Hệ số ma sát trượt tối thiểu  $k$  giữa lốp ô tô và đường nhựa phải bằng bao nhiêu để ô tô có thể đi qua đoạn đường vòng có bán kính cong  $R = 200 \text{ m}$  với vận tốc  $v = 100 \text{ km/h}$ ?

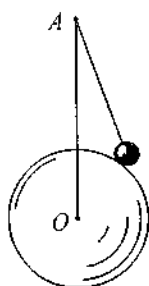
2.37\*. Một ô tô chuyển động với vận tốc không đổi theo một đoạn đường ngoằn ngoèo nằm ngang. Giả thiết đường có dạng hình sin (với chu kỳ  $l = 628 \text{ m}$ , biên độ  $A = 50 \text{ m}$ ). Tìm vận tốc tối đa để ô tô có thể đi theo đường mà không bị trượt. Hệ số ma sát giữa mặt đường và các bánh ô tô là  $\mu = 0,2$ .

2.38. Một người đi xe đạp theo đường tròn bán kính  $R$  và nghiêng vào trong sao cho góc giữa mặt phẳng xe và mặt đất bằng  $\alpha$ . Tìm vận tốc xe đạp.

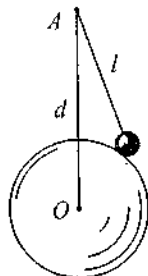
2.39. Máy bay thực hiện một cú lượn, nó chuyển động theo vòng tròn với vận tốc không đổi  $v$  trên cùng một độ cao. Xác định bán kính vòng lượn, nếu mặt phẳng cánh máy bay nghiêng với phương ngang một góc  $\alpha$  không đổi.

2.40. Một vận động viên ném búa tới khoảng cách  $L = 70 \text{ m}$  theo quỹ đạo tối ưu (đi được xa nhất với vận tốc ban đầu cho trước). Hỏi lực tác dụng lên vận động viên khi tăng tốc cho búa bằng bao nhiêu? Trọng lượng búa 50N.

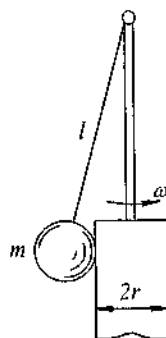
Vận động viên quay lấy đà theo đường tròn bán kính  $R = 2\text{ m}$ . Bỏ qua sức cản của không khí.



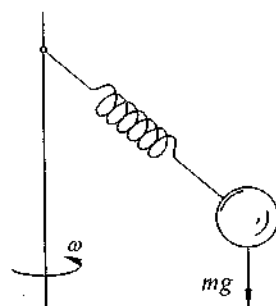
Hình 28



Hình 29



Hình 30



Hình 31

**2.41.** Một quả cầu nhỏ được treo trên sợi dây dài  $l$  và nằm trên mặt cầu nhẵn bán kính  $R$ . Khoảng cách từ điểm treo đến tâm mặt cầu bằng  $d$  (H. 29). Tính lực căng của dây và phản lực của mặt cầu lên quả cầu khi quả cầu đứng yên. Xác định vận tốc  $v$  cần truyền cho quả cầu theo hướng vuông góc với mặt phẳng hình vẽ để phản lực của mặt cầu bằng không. Giả thiết quả cầu là một chất điểm, sợi dây không trọng lượng và không dẫn.

**2.42.** Một quả cầu bán kính  $R$  treo trên sợi dây dài  $l$  và tiếp xúc với một khối trụ đứng đường kính  $2r$  đặt trên trục một máy quay ly tâm (H. 30). Hỏi vận tốc góc  $\omega$  của máy quay ly tâm bằng bao nhiêu thì quả cầu không gây áp lực lên thành khối trụ?

**2.43\*.** Một quả cầu khối lượng  $m$  treo trên một lò xo lý tưởng có độ cứng  $k$  và độ dài ban đầu  $l_0$  trên tâm của máy ly tâm (H. 31). Sau đó, quả cầu bắt đầu chuyển động cùng với máy ly tâm với vận tốc góc  $\omega$ . Hỏi lò xo khi đó hợp với phương thẳng đứng một góc  $\alpha$  bằng bao nhiêu?

**2.44.** Tại bề mặt bên trong của một cái phễu hình nón với góc ở đỉnh bằng  $2\alpha$ , trên độ cao  $h$  so với đỉnh có một vật nhỏ (H. 32). Hệ số ma sát giữa vật và bề mặt phễu bằng  $k$ . Tìm vận tốc góc tối thiểu của phễu quay quanh trục thẳng đứng để vật đứng yên trong phễu.

**2.45.** Một vòng kim loại treo trên một sợi dây được nối với trục của máy ly tâm (H. 33) và quay đều với vận tốc góc  $\omega$ . Sợi dây tạo thành góc  $\alpha$  với trục quay. Tìm khoảng cách  $x$  từ tâm vòng đến trục quay.

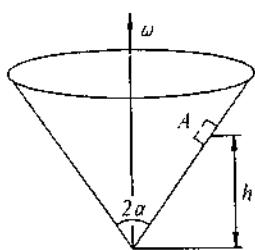
**2.46.** Một sợi dây được cuốn vào cột chôn trên mặt đất. Một đầu sợi dây được kéo với lực  $F = 10000\text{ N}$ . Cần phải tác dụng vào đầu dây còn lại một lực bằng bao nhiêu để nó không bị tuột khỏi cột? Hệ số ma sát của dây và

cột  $k = \frac{1}{\pi}$ . Dây cuốn quanh cột hai vòng.

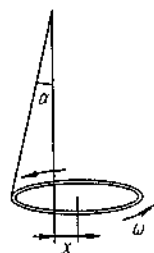
2.47. Một sợi dây được vắt qua một khúc gỗ tròn. Hai đầu sợi dây được buộc vào hai vật khối lượng  $m_1$  và  $m_2$ . Giả thiết hệ số ma sát của dây và khúc gỗ là  $k$ . Tìm điều kiện để hai vật đứng yên. Tìm gia tốc  $a$  của hệ nếu điều kiện cân bằng bị phá vỡ.

2.48. Các hạt nhân  $^{252}\text{Cf}$  bị phân chia tự phát thành hai phần (thành hai mảnh) và kèm theo sự phát ra các neutron. Các mảnh hạt nhân được đếm bằng hai bộ đếm (H.34)  $C_1$  và  $C_2$  nằm trên khoảng cách  $d_1$  và  $d_2$  so với nguồn sinh mảnh hạt nhân. Bỏ qua sự phát xạ neutron. Hỏi với tỷ lệ khối lượng  $\frac{m_1}{m_2}$  của các mảnh bằng bao nhiêu thì hiệu thời gian bay của các mảnh

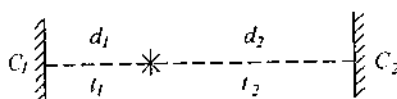
$\Delta t = t_2 - t_1$  sẽ là nhỏ nhất?



Hình 32



Hình 33



Hình 34

2.49. Trên mặt bàn nhẵn nằm ngang có một lò xo độ cứng  $k$  và độ dài ban đầu là  $l_0$ . Khối lượng lò xo là  $M$ . Một đầu lò xo nối với vật khối lượng  $m$ , đầu còn lại được kéo bằng lực  $F$ . Xác định độ dẫn tương đối của lò xo, giả thiết độ cứng của lò xo đủ lớn để độ dẫn của lò xo ở bất kỳ tiết diện nào cũng luôn nhỏ không đáng kể so với chiều dài ban đầu của nó.

2.50. Bàn đọc báo được làm dưới dạng hình tam giác đều (H. 35). Các đỉnh của nó được lắp chân. Nếu ở tâm bàn đặt một quả cân khối lượng  $M$  thì các chân sẽ gãy. Hỏi tại các điểm nào trên chiếc bàn này có thể đặt quả cân nặng  $\frac{M}{2}$ ?

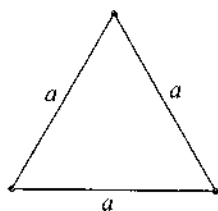
2.51. Một vận động viên tennis tăng bóng bằng vợt sao cho quả bóng luôn nảy lên cùng độ cao  $h = 1\text{ m}$  (tính từ độ cao của vợt). Tìm vận tốc của vợt ngay trước khi chạm bóng nếu biết hệ số phục hồi  $k_h$  khi bóng rơi trên vợt

đứng yên (tức là tỷ số giữa hai độ cao liên tiếp  $\frac{h_n}{h_{n-1}}$ ) là 0,9.

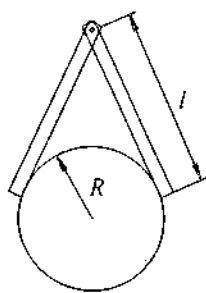
2.52. Người ta định giữ khúc gỗ khối lượng  $m$ , bán kính  $R$  bằng hai tấm gỗ khối lượng  $M$ , chiều dài  $l$  và khớp với nhau bằng bản lề (H. 36). Hỏi với các

giá trị nào của hệ số ma sát giữa khúc gỗ và các tấm thì điều đó có thể thực hiện được?

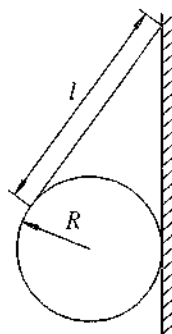
**2.53.** Người ta cố giữ một cuộn dây bán kính  $R$  áp vào tường bằng chính dây quấn trên cuộn được gỡ ra một đoạn dài  $l$  (H. 37). Hỏi với các giá trị nào của hệ số ma sát giữa cuộn dây và tường thì điều kiện đó có thể thực hiện được?



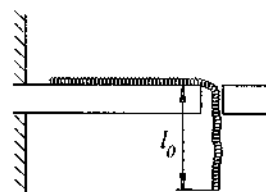
Hình 35



Hình 36



Hình 37



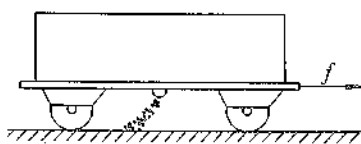
Hình 38

**2.54.** Một đầu dây chấu đặt trên một tấm rộng được thả xuống qua một lỗ khoan trên tấm (H. 38). Hỏi phần cuối của chấu sẽ trượt khỏi tấm với vận tốc  $v$  bằng bao nhiêu, nếu biết độ dài của chấu là  $l$  và độ dài phần treo lơ lửng tại thời điểm bắt đầu chuyển động là  $l_0$ ? Tìm sự phụ thuộc của độ dài phần treo lơ lửng trên tấm vào thời gian. Bỏ qua ma sát giữa dây chấu và tấm.

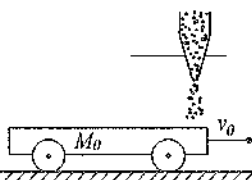
### §3. CHUYỂN ĐỘNG CỦA CÁC VẬT CÓ KHỐI LƯỢNG THAY ĐỔI

**3.1.** Tìm biểu thức tính gia tốc và vận tốc của một toa tàu chịu tác dụng của một lực nằm ngang không đổi  $f$  (H. 39), nếu trên toa có chứa cát và bị chảy qua một lỗ trên sàn toa. Mỗi giây chảy mất một khối lượng cát là  $\Delta m$ , tại thời điểm  $t = 0$ , vận tốc của toa  $v = 0$  và tổng khối lượng toa và cát là  $M$ .

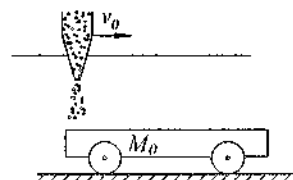
**3.2.** Một toa tàu dài  $L$  trượt không ma sát với vận tốc  $v_0$  (H. 40). Tại thời điểm  $t = 0$  nó đến chỗ nhận cát, cát được phun với vận tốc  $\mu$  [kg/s]. Lượng cát trên toa tàu bằng bao nhiêu khi nó đi qua vị trí nhận cát? Khối lượng của toa là  $M_0$ .



Hình 39



Hình 40

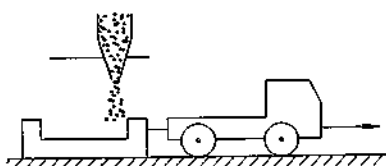


Hình 41

3.3. Phễu rót cát chuyển động với vận tốc  $v_0$  phía trên đường ray (H. 41). Trên đường ray có một toa tàu dài  $L$ , nặng  $M_0$ . Khi phễu bắt đầu đến cạnh toa người ta mở phễu và cát chảy xuống với vận tốc  $\alpha$  [kg/s]. Xác định vận tốc toa tàu tại thời điểm khi phễu bắt đầu vượt qua nó. Bỏ qua ma sát.

3.4. Quặng được rót từ phễu xuống một toa đang trượt không ma sát trên ray. Vận tốc ban đầu của toa  $v_0$ , khối lượng toa rỗng là  $m_0$ , chiều dài của toa là  $L$ , khối lượng quặng chất lên toa là  $m_1$ . Quặng chảy từ phễu theo cách sao cho nó tạo thành lớp có độ dày không đổi trên toa. Tìm thời gian rót quặng lên toa  $T$ .

3.5. Đầu máy kéo một xe lết dài  $l = 10$  m, khối lượng 50 tấn bằng “một sợi dây” (H. 42), với vận tốc không đổi  $v = 5$  km/h. Khi  $t = 0$  cạnh phía trước của xe lết tới dưới phễu rót cát. Cát được rót với vận tốc  $\mu = 100$  kg/s, đồng thời đầu máy vẫn tiếp tục kéo xe với vận tốc như ban đầu. Trước khi rót cát độ căng của dây nhỏ hơn 2 lần so với độ căng làm nó đứt. Liệu dây có đứt trong thời gian rót cát không, nếu hệ số ma sát  $k = 10^{-3}$ ?

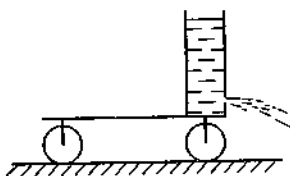


Hình 42

3.6. Trong một phút mình, người ta đề nghị chất than lên toa đang chạy bằng cách cho chảy từ trên phễu xuống. Cần phải kéo toa với một lực bằng bao nhiêu nếu nó được chất lên 10 tấn than sau 2 giây, và trong thời gian đó nó chuyển động đều được một khoảng 10m? Bỏ qua ma sát khi toa chuyển động.

3.7. Một chiếc tàu kéo xà lan khối lượng  $M_0 = 50$  tấn với vận tốc không đổi  $v = 5$  km/h. Khi đó, lực căng của cáp nhỏ hơn hai lần so với lực căng làm đứt dây. Tại  $t = 0$  xà lan bị thủng và nước chảy vào với vận tốc  $\mu = 100$  kg/s. Hỏi sau khoảng thời gian bằng bao nhiêu thì cáp bị đứt nếu tàu kéo tiếp tục kéo xà lan với vận tốc như ban đầu? Giả thiết rằng lực cản của nước tăng tỷ lệ với khối lượng xà lan vì khi nước vào thì lực cản mặt trước tăng lên; hệ số tỷ lệ  $\alpha = 10^{-3}$ .

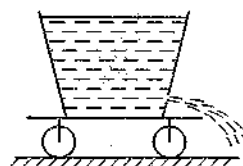
3.8. Trên mép một xe kéo có khối lượng lớn (H. 43) đang đứng yên trong mặt phẳng ngang, người ta đặt cố định một bình hình trụ bán kính  $r$ , chiều cao  $H$ . Phần dưới của bình có một lỗ không lớn có nắp đáy. Bình được đổ đầy chất lỏng khối lượng riêng  $\rho$ . Tại thời điểm  $t = 0$  người ta tháo nắp lỗ. Tìm vận tốc lớn nhất mà xe có thể đạt được, giả thiết rằng  $H \gg r$  và  $M \gg \pi r^2 \rho H$ , trong đó  $M$  là khối lượng của xe và bình chứa. Giải thích ý nghĩa



Hình 43

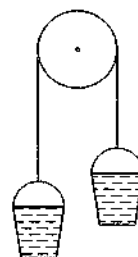
các điều kiện trên. Bỏ qua ma sát trong các ổ bi của xe, ma sát lăn và ma sát trong chất lỏng.

**3.9.** Một bình hình nón chứa đầy nước có thể chuyển động không ma sát dọc theo đường ray nằm ngang. Gắn đáy của bình (H. 44) có khoét một lỗ nhỏ có nắp. Nếu tháo nắp thì dòng chất lỏng sẽ phun ra. Xác định vận tốc của bình sau khi mở nắp, khi mà toàn bộ chất lỏng đã chảy ra hết. Độ cao ban đầu của chất lỏng  $h_0$ . Khối lượng của bình so với khối lượng chất lỏng trong suốt thời gian chảy là không đáng kể. Tại thời điểm gần cuối trước khi chất lỏng chảy ra hết, điều kiện nhỏ không đáng kể của khối lượng bình so với khối lượng chất lỏng không còn đúng nữa, vậy điều đó sẽ ảnh hưởng thế nào đến kết quả bài toán?



Hình 44

**3.10.** Hai xô đựng nước được treo trên hai đầu của một sợi dây vắt qua ròng rọc (H. 45). Khối lượng của một xô là  $M_0$ , của xô còn lại  $M_0 + \Delta m$ . Tại thời điểm ban đầu người ta truyền cho xô nhẹ hơn một vận tốc  $v_0$  hướng xuống dưới. Cũng tại thời điểm đó trời bắt đầu mưa, vì thế khối lượng mỗi xô đều tăng lên với tốc độ không đổi. Hỏi sau thời gian bao nhiêu lâu thì vận tốc các xô sẽ bằng không? Bỏ qua ma sát, khối lượng của dây và của ròng rọc.



Hình 45

**3.11.** Một tàu vũ trụ khởi hành với khối lượng ban đầu  $m_0$  và vận tốc ban đầu bằng không trong không gian không có trọng trường. Khối lượng của tàu thay đổi theo thời gian theo quy luật  $m = m_0 \exp(-\lambda t)$ , vận tốc của nhiên liệu cháy so với tàu không đổi và bằng  $u$ . Tàu đi được khoảng cách  $x$  bằng bao nhiêu, khi khối lượng của nó giảm 1000 lần?

**3.12.** Khi quan sát tàu vũ trụ bay qua Trái Đất các nhà thiên văn trên mặt đất xác định được rằng vận tốc của nó biến thiên theo quy luật  $v = -v_0 \ln(1 - \nu t)$ . Hỏi khối lượng tàu phụ thuộc như thế nào vào thời gian, nếu giả thiết vận tốc phụt khí của tàu không đổi? Bỏ qua tác dụng của trọng lực.

**3.13.** Để công kích mục tiêu người ta phóng tên lửa từ máy bay. Máy bay bay ngang ở độ cao  $H = 8 \text{ km}$  với vận tốc  $v_0 = 300 \text{ m/s}$ . Khối lượng tên lửa

biến đổi theo quy luật  $m(t) = m_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$  và giảm  $e$  lần cho đến khi bay

tới mục tiêu. Vận tốc phụt khí đối với tên lửa  $u = 1000 \text{ m/s}$ , thân tên lửa nằm ngang trong thời gian bay. Hỏi khoảng cách  $L$  từ mục tiêu tới vị trí máy bay tại thời điểm phóng bằng bao nhiêu? Bỏ qua lực cản của không khí.

**3.14.** Người ta phóng đồng thời hai quả tên lửa có khối lượng mỗi quả  $m_0$  trong không gian tự do - nơi có thể bỏ qua trọng lực. Tên lửa thứ nhất chuyển động với độ tiêu hao nhiên liệu không đổi bằng  $\mu$ , tên lửa thứ hai với gia tốc không đổi bằng  $a$ . Xác định tỷ số giữa khối lượng và vận tốc của chúng khi khối lượng tên lửa thứ nhất giảm hai lần. Vận tốc phụt khí tương đối của hai tên lửa như nhau, không đổi và bằng  $u$ .

**3.15.** Một tên lửa khối lượng  $m_0$  được phóng trong không gian tự do, nơi có thể bỏ qua trọng lực. Trong khoảng thời gian  $\tau$  tên lửa chuyển động với độ tiêu hao nhiên liệu không đổi và bằng  $\mu$  thì khối lượng của nó giảm hai lần. Sau đó, tên lửa chuyển động cũng trong khoảng thời gian  $\tau$  với gia tốc không đổi  $a$ . Xác định khối lượng và vận tốc tên lửa tại thời điểm  $t = 2\tau$ , nếu vận tốc phụt khí đối với tên lửa là không đổi và bằng  $u$ .

**3.16\*.** Tìm mối liên hệ giữa khối lượng tên lửa  $m(t)$ , vận tốc nó đạt được  $v(t)$  và thời gian  $t$ , nếu tên lửa chuyển động thẳng đứng lên trên trong trọng trường của Trái Đất. Vận tốc dòng khí đối với tên lửa bằng  $u$  và giả thiết  $u$  không đổi. Bỏ qua sức cản của không khí và sự thay đổi của gia tốc rơi tự do. Tên lửa phải phụt một lượng khí  $\mu(t)$  mỗi giây bằng bao nhiêu để nó đứng yên so với Trái Đất?

**3.17.** Khối lượng tên lửa (gồm cả nhiên liệu) thay đổi theo thời gian theo quy luật nào để tên lửa khi làm việc luôn đứng yên so với Trái Đất, nếu vận tốc phụt khí  $u$  không đổi so với tên lửa? Xác định thời gian để tổng khối lượng của tên lửa giảm hai lần và thời gian để tên lửa sử dụng hết nhiên liệu dự trữ, nếu biết khối lượng tên lửa không kể nhiên liệu  $m_1 = 1000$  kg, khối lượng nhiên liệu  $m_2 = 9000$  kg. Vận tốc phụt khí  $u = 2$  km/s.

**3.18.** Từ trạm phóng tên lửa trong trọng trường của Trái Đất, một tên lửa chuyển động lên trên với gia tốc ban đầu  $a_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$ . Vận tốc phụt khí so với tên lửa  $u = 2000$  m/s. Hỏi gia tốc và vận tốc tên lửa bằng bao nhiêu sau khoảng  $\tau = 50$  s chuyển động lên trên, nếu bỏ qua sức cản của không khí? Biết rằng sự tiêu hao nhiên liệu trong một giây không đổi.

**3.19.** Khi phóng thẳng đứng từ bề mặt Trái Đất với vận tốc không đổi  $v = 5$  km/s tên lửa đạt độ cao  $h = 2 \cdot R_{\text{TD}}$ . Khối lượng tên lửa giảm bao nhiêu % nếu vận tốc phụt khí so với tên lửa là  $u = 2$  km/s. Bán kính Trái Đất  $R_{\text{TD}} = 6400$  km. Bỏ qua ma sát với không khí.

**3.20.** Sự tiêu hao nhiên liệu  $\mu(t)$  phải thay đổi theo quy luật nào để trong trọng trường có gia tốc không đổi  $g$ , tên lửa bay thẳng đứng lên trên với gia tốc không đổi  $a$ ? Vận tốc phụt khí so với tên lửa là không đổi và bằng  $u$ .



3.21. Một tên lửa bay thẳng đứng trong trọng trường của Trái Đất. Trong khoảng thời gian  $T$  vận tốc phụt khí đối với tên lửa giảm từ giá trị  $u$  đến  $\frac{u}{2}$ .

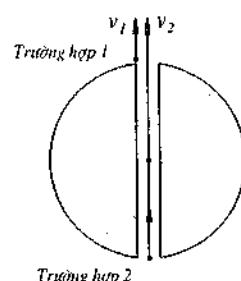
Xác định khoảng thời gian  $T$ , nếu trong khoảng thời gian đó khối lượng tên lửa giảm còn một nửa, nhưng vận tốc của nó vẫn được giữ không đổi. Giả thiết trọng trường là đều.

3.22. Để tàu vũ trụ có nhà du hành hạ cánh thẳng đứng nhẹ nhàng, người ta sử dụng các động cơ hãm phản lực với vận tốc phụt khí đối với con tàu có trị số không đổi và bằng  $u = 1000 \text{ m/s}$ . Tàu hạ xuống với gia tốc không đổi bằng  $3g$ . Tính độ cao  $H$  để bắt đầu bật động cơ nếu nhiên liệu tiêu hao bằng 33% khối lượng ban đầu. Bỏ qua sức cản không khí và sự phụ thuộc của  $g$  vào chiều cao.

3.23. Một trạm vũ trụ chuyển động với vận tốc  $v_0 = 2,1 \text{ km/s}$  theo hướng tới tâm Mặt Trăng. Để hạ cánh nhẹ (mềm) xuống Mặt Trăng người ta bật một động cơ trong khoảng  $\tau = 60 \text{ s}$ , động cơ phụt khí với vận tốc  $u = 2 \text{ km/s}$  đối với trạm và theo hướng vận tốc của trạm. Kết thúc quá trình hãm, vận tốc của trạm giảm gần tới không. Hỏi khối lượng của trạm trong khoảng thời gian đó giảm bao nhiêu lần nếu quá trình hãm được thực hiện ở gần bề mặt

Mặt Trăng, nơi có thể coi gia tốc rơi tự do là không đổi và bằng  $\frac{g}{6}$  (với  $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ ).

3.24. Tìm vận tốc các tên lửa được bắn thẳng đứng trong trường hợp phóng bình thường và trong trường hợp phóng qua một hầm tường tượng khoét dọc theo đường kính Trái Đất (H.46). Tên lửa thứ hai ban đầu rơi tự do đến tâm Trái Đất, sau đó động cơ bắt đầu làm việc. Đối với cả hai tên lửa, thời gian đốt nhiên liệu đều nhỏ, vận tốc khí phụt đối với tên lửa  $v_0 = 2,7 \text{ km/s}$ , tỷ lệ khối lượng cuối so với khối



Hình 46

lượng khí phóng  $\frac{M_l}{M_0} = \frac{1}{20}$ . Coi Trái Đất là một

khối cầu đồng chất.

3.25. Một tên lửa hai tầng gồm có hai tên lửa giống nhau với cùng tỷ lệ khối lượng nhiên liệu  $M_{nl}$  so với khối lượng các kết cấu  $M_k$  và bằng

$\alpha_0 = \frac{M_{nl}}{M_k} = 10$ . Hỏi với giá trị nào của  $\alpha$  thì tên lửa một tầng cũng đạt

được vận tốc như tên lửa hai tầng? Vận tốc khí phụt đối với các tên lửa là như nhau.

**3.26.** Vận tốc cực đại đạt được bằng tên lửa hai tầng trong không gian vũ trụ lớn hơn bao nhiêu lần so với trường hợp sử dụng tên lửa một tầng? Khối lượng tầng thứ hai của tên lửa hai tầng  $\frac{M_2}{M_1} = \alpha = 0,1$  so với khối lượng tầng một, tỷ lệ khối lượng nhiên liệu so với khối lượng toàn phần trong tất cả các trường hợp là  $\frac{M_{nl}}{M} = k = 0,9$ . Vận tốc phụt khí đối với các tên lửa trong cả hai loại tên lửa trên là bằng nhau và bằng  $u = 2000 \text{ m/s}$ .

**3.27.** Tỷ lệ giữa khối lượng tên lửa khi phóng và khối lượng kết cấu của nó  $\frac{m_0}{m_k}$  bằng bao nhiêu khi tên lửa tăng tốc thẳng đứng từ bề mặt Trái Đất đến vận tốc vũ trụ cấp I  $v_1 = 7,8 \text{ km/s}$ ? Khối lượng kết cấu tên lửa khi đó bằng bao nhiêu? Thời gian động cơ làm việc  $T = 12$  phút, vận tốc phụt khí tương đối  $u = 3 \text{ km/s}$ , tốc độ tiêu hao năng lượng  $\mu = 300 \text{ kg/s}$ . Giả thiết gia tốc rơi tự do bằng  $10 \text{ m/s}^2$  và không phụ thuộc vào độ cao so với bề mặt Trái Đất. Bỏ qua sức cản không khí.

**3.28.** Một tàu vũ trụ chuyển động với vận tốc không đổi  $v$ . Để thay đổi hướng bay của nó, người ta bật động cơ phụt đồng khí với vận tốc đối với tàu bằng  $u$  về phía vuông góc với quỹ đạo chuyển động của tàu. Xác định góc xoay  $\alpha$  của vectơ vận tốc tàu, nếu khối lượng ban đầu của nó là  $m_0$ , khối lượng cuối là  $m$ , vận tốc  $u$  không đổi.

**3.29.** Một tên lửa khối lượng  $M_0 = 10 \text{ kg}$  được phóng từ đỉnh núi có độ cao  $h = 2 \text{ km}$  sao cho trong suốt thời gian bay, khí được phụt ra theo phương ngang. Bỏ qua sức cản của không khí, tính động năng của tên lửa khi va chạm vào mặt đất. Vận tốc phụt khí đối với tàu là  $u = 300 \text{ m/s}$ , tốc độ tiêu hao năng lượng  $\mu = 0,3 \text{ kg/s}$ .

**3.30.** Một tên lửa được phóng từ đỉnh núi cao và luôn bay ngang với gia tốc  $a$ . Hỏi luồng khí phản lực có hướng lệch với phương ngang một góc bằng bao nhiêu? Bỏ qua sức cản của không khí.

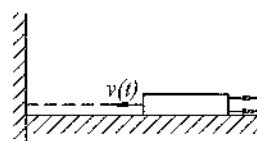
**3.31.** Xác định hiệu suất của tên lửa, tức là tỷ số giữa động năng  $K$  mà tên lửa thu được với năng lượng  $Q$  do đốt nhiên liệu. Biết vận tốc mà tên lửa nhận được là  $v = 9 \text{ km/s}$ . Biết năng suất tỏa nhiệt của nhiên liệu là  $q = 4000 \text{ kcal/kg}$ , vận tốc phụt của khí đốt so với tên lửa  $u = 3 \text{ km/s}$ .

**3.32.** Tên lửa chuyển động thẳng đứng dưới tác dụng của phản lực. Tại thời điểm ban đầu tên lửa đứng yên, khi đó khối lượng của nó là  $m_0$ . Vận tốc khí phụt tương đối không đổi và bằng  $u$ . Bỏ qua tác dụng của ngoại lực.

1) Với giá trị nào của vận tốc thì động năng mà tên lửa nhận được sẽ lớn nhất?

2) Khối lượng tên lửa phải bằng bao nhiêu để động lượng mà nó nhận được sẽ lớn nhất?

3.33. Trên mặt phẳng nhẵn nằm ngang có một quả tên lửa – đồ chơi nằm cách bức tường thẳng đứng một khoảng nào đó (H. 47). Từ trạng thái đứng yên, tên lửa bắt đầu chuyển động vuông góc với tường và về phía tường. Sau khoảng thời gian  $T_1$  diễn ra sự va chạm đàn hồi tuyệt đối của tên lửa với tường. Khi đó tên lửa không thay đổi hướng của nó đối với tường. Sau khi va chạm một khoảng thời gian tối thiểu  $T_2$  nào thì vận tốc tên lửa bằng không? Giả thiết vận tốc khí phụt ra so với tên lửa không đổi, khối lượng tên lửa biến thiên theo quy luật  $m(t) = m_0 - \alpha t$ . Thời gian va chạm với tường rất nhỏ so với  $T_1$ . Giải bài toán với  $m_0 = 1 \text{ kg}$ ,  $\alpha = 0,01 \text{ kg/s}$ ,  $T_1 = 10 \text{ s}$ .

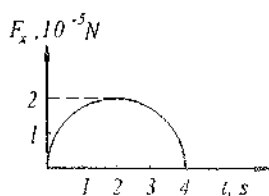


Hình 47

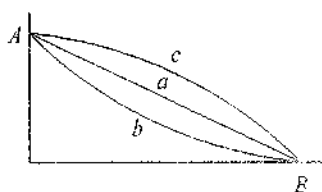
3.34. Xác định vận tốc mà mô hình tên lửa nước đạt được, trong đó nước được phun ra qua một lỗ nhỏ bằng một bơm dưới áp suất của lò xo có độ cứng  $k$ . Chiều dài khoang chứa nước  $l$ , khối lượng nước trong khoang  $m$ , khối lượng tên lửa  $M \gg m$ . Khi hết nước trong khoang, lò xo ở trạng thái không bị nén.

## § 4. CÔNG, NĂNG LƯỢNG, ĐỘNG LƯỢNG. ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN ĐỘNG LƯỢNG VÀ NĂNG LƯỢNG. SỰ VA CHẠM

4.1. Đồ thị của lực  $F_x(t)$  tác dụng lên một hạt khối lượng  $1 \text{ g}$  có dạng nửa đường tròn (H. 48). Tìm độ biến thiên vận tốc  $\Delta v_x$  do lực này gây ra. Tính công của lực này, nếu vận tốc ban đầu  $v_{ox} = 4 \text{ cm/s}$ . Tại sao công lại phụ thuộc vào vận tốc ban đầu?



Hình 48



Hình 49

4.2. Xe trượt tuyết có thể trượt từ đỉnh núi, từ điểm  $A$  đến điểm  $B$  theo các đường  $AaB$ ,  $AbB$ ,  $AcB$  (H. 49). Hỏi trong trường hợp nào thì xe đến điểm  $B$  với vận tốc lớn hơn? Giả thiết rằng lực ma sát tác dụng lên xe tỷ lệ với áp lực vuông góc của xe lên mặt phẳng trượt.

4.3. Ta có thể nhận được một công có ích bằng bao nhiêu nếu cho một vật khối lượng  $m$  trượt từ đỉnh đồi có chiều dài đáy  $L$ , chiều cao  $H$ , hệ số ma sát giữa vật và bề mặt đồi là  $k$ ? Góc nghiêng giữa bề mặt sườn đồi với mặt phẳng nằm ngang có thể thay đổi, nhưng dấu của nó không đổi.

4.4. Ôtô "Jiguli" có thể chạy với vận tốc  $v = 50 \text{ km/h}$  lên dốc có độ nghiêng lớn nhất là  $\alpha = 16^\circ$ . Khi chạy trên đường bằng với cùng bề mặt đường và cùng vận tốc như trên thì công suất tiêu hao của động cơ là  $N = 20$  sức ngựa (1 sức ngựa bằng 736W, còn gọi là 1 mã lực). Tìm công suất lớn nhất của động cơ, nếu khối lượng của ô tô là 1200kg.

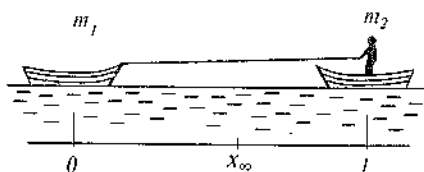
4.5. Xác định lực tác dụng của súng tiểu liên lên vai người bắn, nếu giả thiết rằng lực tác dụng từ phía súng không đổi và làm dịch chuyển vai người bắn một khoảng  $S = 1,5 \text{ cm}$ , đạn qua khối nòng tức thời. Khối lượng súng 5kg, khối lượng viên đạn 10g, vận tốc viên đạn khi ra khỏi nòng  $v = 500 \text{ m/s}$ .

4.6. Từ một súng đại bác có thể dịch chuyển tự do theo mặt phẳng nghiêng và đã đi được một đoạn  $l$ , người ta bắn một phát đạn theo phương ngang. Vận tốc  $v$  của quả đạn phải bằng bao nhiêu để sau khi bắn, súng đại bác đứng yên? Biểu diễn vận tốc phải tìm  $v$  qua khối lượng quả đạn  $m$ , khối lượng súng đại bác  $M$  và góc nghiêng  $\alpha$  của mặt phẳng nghiêng so với phương ngang. Chú ý rằng  $m \ll M$ .

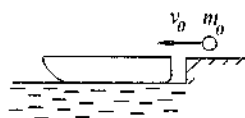
4.7\*. Một quả đạn nổ thành hai mảnh như nhau tại điểm cao nhất của quỹ đạo ở độ cao  $h = 19,6 \text{ m}$ . Một giây sau khi nổ, một mảnh rơi xuống đất ngay dưới chỗ nổ. Hỏi mảnh thứ hai rơi cách chỗ bắn một khoảng  $S_2$  bằng bao nhiêu, nếu mảnh thứ nhất rơi cách chỗ bắn  $S_1 = 1000 \text{ m}$ ? Bỏ qua sức cản của không khí.

4.8. Ba chiếc thuyền có khối lượng như nhau và bằng  $m$  đi nối đuôi nhau với cùng vận tốc  $v$ . Từ chiếc thuyền giữa, người ta ném đồng thời lên thuyền trước và thuyền sau các vật có khối lượng  $m_1$  với vận tốc  $u$  so với thuyền. Hỏi vận tốc các thuyền sau khi ném bằng bao nhiêu?

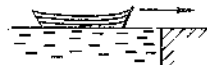
4.9\*. Một người đứng trên một chiếc thuyền kéo chiếc thuyền thứ hai bằng dây cho đến khi chúng chạm nhau và giữ chúng cùng nhau (H. 50). Hai thuyền sẽ đứng ở đâu nếu chúng bị dừng lại do ma sát của nước? Ma sát của nước và thuyền giả thiết tỷ lệ với vận tốc của chúng và như nhau đối với cả hai thuyền. Khối lượng thuyền lần lượt là  $m_1$  và  $m_2$ , khoảng cách ban đầu giữa các khối tâm của chúng là  $l$ .



Hình 50



Hình 51



Hình 52

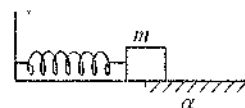
**4.10.** Hai thuyền đi song song và ngược chiều nhau. Khi hai thuyền ngang nhau, từ mỗi thuyền ném qua nhau một bao nặng 50kg, do đó mà thuyền thứ nhất dừng lại, thuyền thứ hai tiếp tục chuyển động với vận tốc 8,5m/s theo hướng ban đầu. Hỏi vận tốc của các thuyền trước khi ném tải cho nhau bằng bao nhiêu, nếu khối lượng các thuyền bao gồm cả tải lần lượt là 500kg và 1 tấn?

**4.11.** Từ trên bờ, dọc theo xà lan, người ta ném lên nó một vật khối lượng  $m_0$  với vận tốc ngang là  $v_0$  (H. 51). Tìm vận tốc của xà lan cùng với vật sau khi ném và quãng đường  $S$  mà vật đi được dọc theo bề mặt xà lan (so với xà lan) nếu khối lượng xà lan là  $m$ , hệ số ma sát giữa vật và bề mặt xà lan là  $k$ .

**4.12.** Một chiếc thuyền chiều dài  $L_0$  chạy lên bãi cát do quán tính và dừng lại do ma sát khi một nửa của nó nằm trên bãi cát (H. 52). Hỏi vận tốc ban đầu của thuyền  $v$  bằng bao nhiêu? Hệ số ma sát bằng  $k$ .

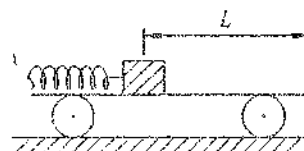
**4.13.** Sau khi va vào một tảng băng khối lượng  $M$ , tàu phá băng đã làm tảng băng chuyển động với vận tốc  $v$ . Giả thiết áp lực của tàu lên tảng băng tăng đều khi nó áp gần tảng băng và giảm đều khi chúng tách xa nhau. Tìm áp lực cực đại của tảng băng lên thành tàu, nếu thời gian va chạm của chúng là  $\tau$ .

**4.14.** Một vật khối lượng  $m$  nằm ở vị trí cân bằng được nối với lò xo, mặt bên phải vật là nhám (hệ số ma sát là  $\alpha$ ), còn mặt bên trái là nhẵn (hệ số ma sát bằng 0) (H. 53). Hỏi phải dịch chuyển vật  $m$  từ vị trí cân bằng về bên trái bao nhiêu để sau một lần dao động nó sẽ dừng lại ở vị trí cân bằng? Độ cứng của lò xo là  $k$ .



Hình 53

**4.15.** Trên xe lết khối lượng  $M$  có gắn một lò xo độ cứng  $k$ , đặt ở trạng thái nén, một đầu tiếp xúc với vật khối lượng  $m$  (H. 54). Lò xo bị nén một đoạn  $x_0$  so với vị trí cân bằng, khoảng cách từ  $m$  đến mép bên phải của xe là  $L$  (độ dài lò xo khi không bị nén nhỏ hơn  $L$ ). Khi người ta buông lò xo, nó đẩy vật  $m$  bay ra khỏi xe lết. Hỏi vận tốc  $v$  của vật khi nó trượt khỏi xe lết bằng bao nhiêu? Hệ số ma sát của vật và xe lết là  $\alpha$ , bỏ qua ma sát của xe lết với mặt phẳng ngang.



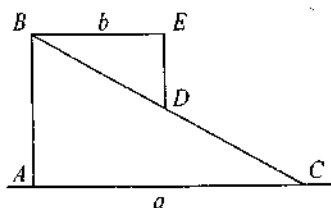
Hình 54

**4.16.** Một chiếc thuyền khối lượng  $M$  và một người ở trên thuyền khối lượng  $m$  đứng yên trong nước lặng. Người đó bắt đầu đi dọc theo thuyền với vận tốc  $\vec{u}$  so với thuyền. Người đó sẽ đi với vận tốc  $\vec{w}$  bao nhiêu so với nước? Thuyền sẽ chuyển động với vận tốc  $\vec{v}$  bằng bao nhiêu? Bỏ qua sức cản của nước với thuyền.

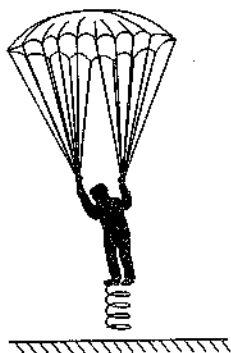
**4.17.** Hai người cùng khối lượng  $m$ , đứng đối diện ở hai đầu một chiếc thuyền, ném cho nhau quả bóng khối lượng  $\Delta m$ . Vận tốc quả bóng so với nước là  $\vec{u}$ . Tìm vận tốc chuyển động  $\vec{v}$  của thuyền trong thời gian quả bóng bay từ đầu này thuyền tới đầu kia. Tìm độ dịch chuyển  $\vec{S}_1$  của thuyền và độ dịch chuyển  $\vec{S}_2$  của bóng so với nước sau mỗi lần bóng bay dọc theo thuyền, nếu chiều dài quãng đường của bóng dọc theo thuyền bằng  $l$ .

**4.18.** Trên một nêm có dạng tam diện vuông  $ABC$  khối lượng  $M$  nằm trên mặt phẳng ngang nhẵn tuyệt đối, người ta đặt nêm  $BED$  đồng dạng nhưng nhỏ hơn có khối lượng  $m$  (H. 55). Hỏi nêm lớn dịch chuyển về bên trái một khoảng  $x$  bằng bao nhiêu khi nêm nhỏ trượt xuống dưới đến vị trí sao cho điểm  $D$  trùng với điểm  $C$ ? Chiều dài các cạnh góc vuông  $AC$  và  $BE$  lần lượt là  $a$  và  $b$ .

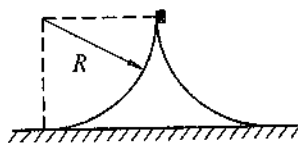
**4.19\*.** Trên mũi của một chiếc thuyền dài  $l$  có một người đứng cầm quả tạ khối lượng  $m$  ở độ cao  $h$ . Khối lượng thuyền và người là  $M$ . Người đó ném quả tạ theo phương ngang, dọc theo thuyền. Hỏi anh ta phải truyền cho quả tạ một vận tốc  $v$  bằng bao nhiêu để quả tạ rơi đúng ở đuôi thuyền? Bỏ qua sức cản của nước với thuyền.



Hình 55



Hình 56



Hình 57

**4.20.** Một vận động viên thể dục dụng cụ rơi từ độ cao  $H = 12$  m xuống một lưới đàn hồi. Hỏi lưới tác dụng lên người vận động viên đó một lực lớn hơn trọng lượng của anh ta bao nhiêu lần, nếu chỉ do trọng lượng của vận động viên độ võng của lưới là  $a = 1$  m?

**4.21.** Khi tiếp đất, người nhảy dù triệt tiêu vận tốc bằng cách ngồi xổm, chân co hết cỡ. Có thể giảm diện tích dù bao nhiêu lần nếu dưới chân người đó lắp

thêm một bộ giảm chấn phụ (H. 56). Giả thiết độ nén của lò xo giảm chấn là  $L_{lx}$ , bằng chiều cao gối xồm của người đó  $L_c$ , còn lực nén cực đại của lò xo  $k_{lx} \cdot L_{lx}$  bằng ứng lực  $F_c$  không đổi của chân người đó. Giả thiết rằng khi hạ có giảm chấn, ban đầu lò xo sẽ bị nén trước, sau khi nén cực đại thì chân người nhảy dù bắt đầu co lại, sức cản của không khí với dù giả thiết tỉ lệ với diện tích của nó.

4.22. Hai mặt nhẵn của một nêm đồng chất nằm trên mặt phẳng có dạng  $\frac{1}{4}$

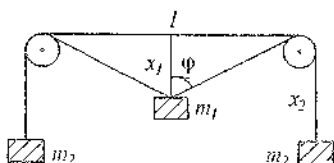
đường tròn bán kính  $R = 1\text{ m}$  (H. 57). Từ đỉnh nêm, một vật nhỏ có khối lượng bằng khối lượng nêm trượt xuống với vận tốc ban đầu bằng không. Hỏi hai vật sẽ dịch chuyển theo phương ngang một đoạn bằng bao nhiêu khi vật trượt dừng lại? Hệ số ma sát giữa vật trượt và mặt phẳng ngang là  $k = 0,2$ , còn giữa nêm và mặt phẳng ngang có thể bỏ qua.

4.23. Một con lắc toán học độ dài  $l$  treo trên sợi chỉ mềm, không dẫn, được truyền với vận tốc ngang  $v_0$  tại thời điểm ban đầu. Xác định độ cao cực đại  $h$  của nó nếu  $\sqrt{5lg} > v_0 > \sqrt{2lg}$ . Quả nặng của con lắc sẽ chuyển động theo quỹ đạo nào sau khi nó lên đến độ cao cực đại  $h$  trên đường tròn? Xác định độ cao cực đại  $H$  đạt được trong chuyển động này của quả cầu.

4.24. Một hệ cơ học (H. 58) nằm ở vị trí cân bằng trong trọng trường. Khoảng cách giữa các trục của ròng rọc bằng  $l$ , còn tỷ lệ khối lượng của các vật  $\frac{m_1}{m_2} = \sqrt{2}$ . Người ta truyền cho vật ở giữa một vận tốc hướng xuống

dưới, sau đó nó chuyển động xuống và lại chuyển động lên trên. Cần phải truyền cho vật ở giữa vận tốc hướng xuống dưới bằng bao nhiêu để khi chuyển động lên, nó đạt độ cao ngang với đường nối hai trục ròng rọc? Sau khi truyền vận tốc, vật đi xuống dưới một khoảng bằng bao nhiêu? Bỏ qua kích thước, khối lượng và ma sát của ròng rọc. Giả thiết dây không dẫn và không trọng lượng.

4.25. Hai bánh puli nằm ở cùng độ cao, nối với nhau bởi dây curoa, bánh thứ nhất là bánh chủ động (H. 59). Trường hợp nào, khi các bánh quay cùng chiều hay quay ngược chiều kim đồng hồ thì công suất tới hạn có thể truyền bằng dây curoa với số vòng quay nhất định sẽ lớn hơn?



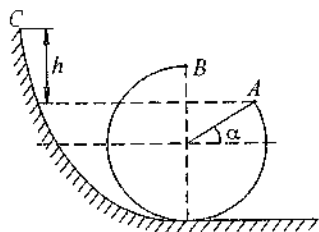
Hình 58



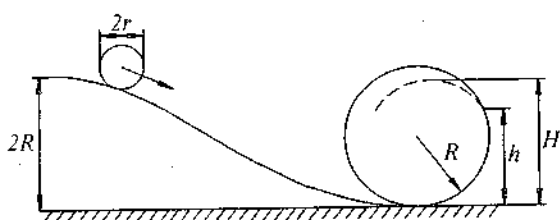
Hình 59

4.26. Một vật bắt đầu chuyển động từ đỉnh của một bán cầu nhẵn bán kính  $R$  với vận tốc ngang  $v_0$ . Hỏi tại độ cao nào thì nó tách ra khỏi mặt bán cầu?

4.27. Từ điểm  $C$ , một vật nhỏ không có vận tốc ban đầu, trượt xuống theo lòng máng nhẵn có dạng một vòng lộn có một chỗ khuyết (H. 60). Hỏi với những độ cao ban đầu nào (so với điểm  $A$ ) thì vật sau khi đạt tới điểm này sẽ bay thấp hơn điểm cao nhất  $B$  của vòng, tức là có thể rơi ngược lại vào lòng máng?



Hình 60



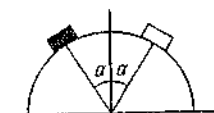
Hình 61

4.28. Một viên bi nhỏ chuyển động lên trên theo bề mặt nhẵn của một quả cầu đứng yên bán kính  $R$ . Khi bắt đầu chuyển động lên thì vận tốc  $v_0$  của viên bi tạo một góc  $\varphi_0$  so với mặt phẳng ngang. Tại độ cao nào thì viên bi tách ra khỏi quả cầu? Giả thiết rằng  $v_0^2 > Rg$ .

4.29. Từ độ cao  $2R$  một viên bi lăn không trượt theo lòng máng (H. 61). Máng có đoạn vòng, bán kính  $R$ . Tại độ cao  $h$  nào thì viên bi bán kính  $r \ll R$  sẽ tách khỏi máng? Sau khi tách khỏi máng, nó bay đạt độ cao  $H$  bằng bao nhiêu?

4.30. Trên một vòng dây thép bán kính  $R$  có đeo một nhẫn nhỏ. Hệ số ma sát của nhẫn và dây  $k = \frac{1}{4\pi}$ . Tại thời điểm  $t = 0$ , người ta truyền cho nhẫn một vận tốc  $v_0 = 10 \text{ m/s}$  so với vòng dây. Giả thiết vòng dây là cố định, xác định vận tốc của nhẫn sau khi chuyển động hai vòng quanh vòng dây. Bỏ qua tác dụng của trọng lực.

4.31. Trên mặt phẳng ngang có đặt một bán cầu khối lượng  $M = 200 \text{ g}$ . Từ đỉnh của bán cầu, người ta thả không ma sát về hai phía ngược nhau hai vật  $m_1 = 20 \text{ g}$  và  $m_2 = 15 \text{ g}$  với vận tốc ban đầu bằng không. Do ma sát giữa bán cầu và mặt phẳng ngang, chuyển động của bán cầu chỉ bắt đầu từ khi góc  $\alpha = 10^\circ$  (H. 62). Tìm hệ số ma sát.



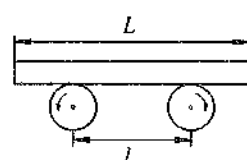
Hình 62



**4.32.** Một người đứng trên mặt đất co đầu gối hạ trọng tâm xuống 50cm rồi nhảy mạnh nâng trọng tâm lên 60cm so với vị trí bình thường. Nếu làm tương tự thì ở trên Mặt Trăng người đó nhảy cao được bao nhiêu? Bán kính Mặt Trăng  $R_{MT} \approx 0,275 R_{TD}$ , khối lượng riêng của Mặt Trăng  $\rho_{MT} \approx 0,6 \rho_{TD}$ . Khi nhảy đột ngột thì trọng lực ít ảnh hưởng đến vận tốc. Bỏ qua sức cản của khí quyển Trái Đất và Mặt Trăng.

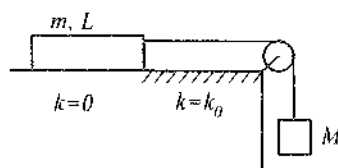
**4.33.** Một cầu thủ bóng đá ghi bàn từ quả phạt 11m chính xác ngay dưới xà ngang. Năng lượng tối thiểu phải truyền cho quả bóng khi đó bằng bao nhiêu? Bóng phải bay lên dưới một góc bằng bao nhiêu? Giả thiết chiều cao cột gôn  $h = 2,5$  m, khối lượng quả bóng 0,5kg.

**4.34.** Một tấm đồng chất dài  $L$  nằm ngang trên hai bánh đỡ hình trụ quay ngược chiều nhau (H. 63). Các bánh đỡ có hướng quay sao cho điểm trên cùng của các trụ chuyển động về hai phía ngược nhau tính từ tâm của hệ, còn trục của các trụ đứng yên. Vì bị va chạm nên tấm bị lệch khỏi vị trí cân bằng. Sau đó tấm sẽ chuyển động thế nào? Tìm vận tốc  $v$  mà tấm có được tại thời điểm khi một đầu của nó trượt khỏi bánh đỡ, nếu  $L = 2l = 4$  m. Hệ số ma sát giữa tấm và các bánh đỡ  $k = 0,5$ .



Hình 63

**4.35.** Một vật khối lượng  $M$  được nối với một tấm đồng chất khối lượng  $m$ , dài  $L$  nằm trên một mặt phẳng ngang qua một ròng rọc có khối lượng không đáng kể bằng một dây nhẹ, không giãn (H. 64). Tại thời điểm ban đầu tấm nằm trên phần mặt phẳng nhẵn (hệ số ma sát  $k = 0$ ) sao cho khi bắt đầu chuyển động thì nó đi vào vùng nhám (hệ số ma sát  $k = k_0$ ). Xác định vận tốc của tấm khi nó nằm hoàn toàn trên bề mặt nhám.

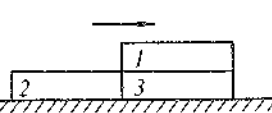


Hình 64

**4.36.** Vật 1 nằm trên vật 2 giống hệt nó (H. 65). Cả hai vật trượt như toàn bộ theo mặt nằm ngang nhẵn với vận tốc  $v_0$  và va chạm với một vật thứ ba giống chúng đang đứng yên. Va chạm của vật 2 vào vật 3 là va chạm tuyệt đối không đàn hồi, hai vật 2 và 3 dính vào nhau, (H. 65). Hỏi chiều dài  $l$  của các vật bằng bao nhiêu, biết rằng vật 1 ngừng chuyển động so với vật 2, 3 do ma sát sau khi nó dịch chuyển hoàn toàn từ vật 2 sang vật 3? Hệ số ma sát giữa vật 1 và vật 3 là  $k$ . Bỏ qua ma sát giữa các vật với bề mặt ngang và giữa vật 1 với 2.

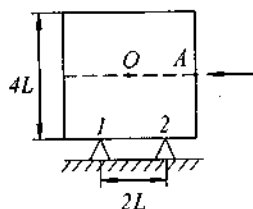


Hình 65



Hình 66

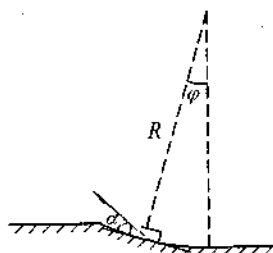
4.37. Một khối lập phương khối lượng  $M$ , chiều dài cạnh  $4L$  nằm ngang trên hai gối đỡ 1 và 2 sao cho tâm  $O$  của nó nằm chính giữa hai gối, khoảng cách giữa hai gối là  $2L$ . Khi tác dụng lên khối lập phương một lực nằm ngang tại điểm  $A$  (H.66) khối lập phương dịch chuyển với vận tốc không đổi cho đến khi cạnh bên phải của nó tới gối 2. Hệ số ma sát trên các gối khác nhau và bằng  $k_1$  và  $k_2 = 3k_1$ . Tìm công đã được thực hiện.



Hình 66

4.38. Sườn dốc chuyển đều thành bề mặt ngang có dạng (mặt cắt) là  $\frac{1}{12}$  đường tròn bán kính  $R$  (H. 67).

Hỏi phải bỏ ra một công tối thiểu bằng bao nhiêu để đẩy lên dốc một xe trượt chở đồ với tổng khối lượng là  $m$ ? Lúc đầu xe ở dưới chân dốc, người ta kéo nó bằng một sợi dây tạo một góc  $\alpha$  không đổi so với hướng của vận tốc. Hệ số ma sát giữa dốc và xe trượt là  $k$ .



Hình 67

*Hướng dẫn.* Lấy góc  $\varphi$  làm biến số để tính tích phân.

4.39. Một quả cầu nặng bán kính  $R$  nằm trên mặt phẳng ngang, trên đỉnh cầu có một vật nhỏ đứng yên. Người ta tác dụng một lực vào quả cầu làm nó chuyển động với vận tốc  $v$ . Hỏi vật nhỏ sẽ lên được đến độ cao bao nhiêu sau khi nảy đàn hồi từ mặt phẳng ngang? Bỏ qua ma sát và sức cản của không khí.

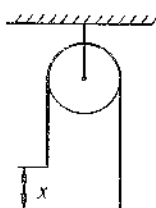
4.40. Để kéo dây cung, người bắn cung cần bỏ ra một lực  $F_1 = 800$  N. Trước khi bắn, người đó giữ mũi tên bằng một lực  $F_2 = 200$  N. Xác định cự ly cực đại của mục tiêu nằm ở độ cao bằng chiều cao người bắn cung. Khối lượng mũi tên  $m = 50$  g. Dây cung là một dây nhẹ không dẫn chiều dài  $l_0 = 1,5$  m. Bỏ qua sự thay đổi độ biến dạng của cung trong quá trình bắn.

4.41. Một cậu bé bắn bằng nỏ cao su. Cậu ta kéo dây thun dài gấp đôi tới lực căng  $F_0 = 10$  N. Xác định vận tốc của viên đá khối lượng  $m = 10$  g, nếu chiều dài sợi dây cao su  $2l = 20$  cm, khối lượng của dây  $M = 30$  g.

4.42. Một dây xích khối lượng  $m = 0,5$  kg, dài  $l = 65$  cm treo trên sợi chỉ. Một đầu xích tiếp xúc với mặt bàn. Sau khi đốt sợi chỉ, dây xích rơi xuống bàn và truyền toàn bộ động lượng của nó cho bàn. Tìm động lượng này.

4.43\*. Một đoạn dây cáp treo thẳng đứng, đầu dưới của dây cáp chạm vào mặt bàn nằm ngang. Hãy chứng minh rằng nếu thả đầu trên của đoạn dây cáp thì tại thời điểm bất kỳ khi dây cáp rơi, áp lực của nó lên bàn sẽ lớn gấp ba lần trọng lượng của đoạn dây cáp đã nằm trên bàn.

4.44. Một dây nặng đồng chất chiều dài  $l$  vắt qua một ròng rọc có khối lượng không đáng kể (H. 68). Hãy xác định vận tốc của dây phụ thuộc vào khoảng cách  $x$  giữa hai đầu của nó, nếu tại thời điểm ban đầu nó bằng  $\Delta l$  (khi đó dây đứng yên).



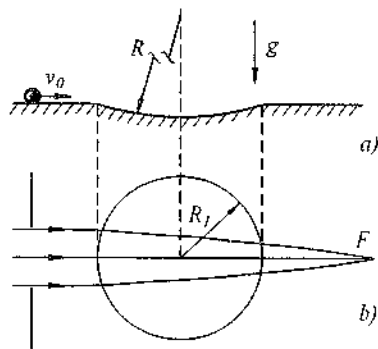
Hình 68

4.45. Một hòn bi rơi thẳng đứng xuống mặt một nêm tạo một góc  $45^\circ$  so với phương ngang. Xác định quỹ đạo chuyển động của hòn bi sau khi va chạm với nêm. Biết rằng bề mặt của nêm nhẵn và va chạm là đàn hồi tuyệt đối.

4.46. Trên mặt phẳng nghiêng có một hộp đựng cát, hệ số ma sát của hộp với bề mặt bằng  $\tan \alpha$ ,  $\alpha$  là góc nghiêng của bề mặt. Một vật rơi thẳng đứng từ phía trên vào hộp và nằm lại trong đó. Sau khi vật rơi vào hộp, hộp có chuyển động không?

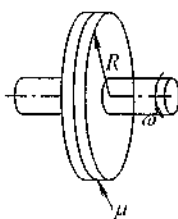
4.47. Trên mặt phẳng nghiêng một góc  $\alpha$  so với phương ngang, có một vật chuyển động. Khi vận tốc của vật bằng  $V$ , một hòn bi đất cùng khối lượng với vật, rơi vào vật với vận tốc  $v$  và dính vào vật. Xác định thời gian  $\tau$  từ thời điểm va chạm đến khi vật và hòn bi dừng lại. Hệ số ma sát bằng  $k$ . Với giá trị nào của  $k$  thì xảy ra hiện tượng trên?

4.48. Nếu cho một dòng các viên bi nhỏ chuyển động không ma sát với vận tốc  $v_0$  đi qua một vết lõm hình cầu, thì trong những điều kiện nhất định, hệ sẽ có tác dụng hội tụ (H. 69). Coi dòng các viên bi bị chặn rất mạnh (độ rộng của dòng rất nhỏ so với  $R_1$ ), xác định vị trí tiêu điểm  $F$  của hệ. Giả thiết rằng, bán kính vết lõm  $R_1 = 5 \text{ cm}$  trên mặt cắt ngang (b) rất nhỏ so với bán kính hình cầu  $R = 150 \text{ cm}$ , còn  $v_0 = 30 \text{ cm/s}$ .

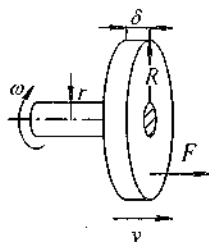


Hình 69

4.49. Đĩa chủ động của một bộ ly hợp ma sát quay với vận tốc góc  $\omega$  và được ép vào đĩa bị động bằng một lực  $F$  (H. 70). Hỏi nhờ bộ ly hợp này có thể truyền được công suất lớn nhất  $N_{\max}$  bằng bao nhiêu, nếu bán kính các đĩa bằng  $R$  và hệ số ma sát  $\mu$ ?



Hình 70



Hình 71

4.50. Một đĩa bán kính  $R$ , chiều dày  $\delta$  được đặt vào trục bán kính  $r$  sao cho nó gây ra trên một đơn vị diện tích bề mặt tiếp xúc một áp suất  $P$  (H. 71). Hệ số ma sát của các mặt tiếp xúc là  $\mu$ . Hỏi khi đĩa chuyển động với vận tốc  $v$  cần phải đặt vào đĩa một lực  $F$  bằng

bao nhiêu để tháo đĩa ra khỏi trục đang quay với vận tốc góc  $\omega$ ? Lực đó khác bao nhiêu lần so với lực tháo đĩa khi trục đứng yên? (Trục quay đối với đĩa, còn đĩa chuyển động tịnh tiến).

**4.51\*.** Một hòn bi đàn hồi tuyệt đối, chuyển động lên xuống trong trọng trường và va chạm với sàn theo các định luật va chạm đàn hồi. Tìm mối liên hệ giữa các giá trị trung bình theo thời gian của động năng  $\bar{K}$  và thế năng  $\bar{U}$  của hòn bi.

**4.52.** Lực hạt nhân được xác định bởi tương tác giữa các hạt nuclôn (các proton và neutron). Thế năng tương tác của hai nuclôn cách nhau  $r$  với độ chính xác cao có thể biểu diễn bằng công thức do nhà vật lý Nhật Bản Yukawa đưa ra:  $U(r) = -U_0 \frac{r_0}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_0}\right)$ , trong đó  $U_0 \approx 50 \text{ MeV}$ , còn

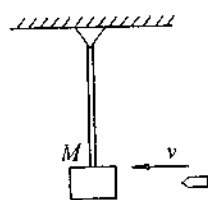
$r_0 \approx 1,5 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ . Tìm biểu thức tính lực tương tác  $F(r)$  tương ứng. Tại khoảng cách  $r_1$  nào lực sẽ giảm xuống chỉ còn 1% giá trị mà nó có tại  $r = r_0$ ?

**4.53.** Con lắc thử đạn là con lắc sử dụng để xác định vận tốc của viên đạn. Nguyên lý hoạt động của nó như sau: viên đạn có vận tốc cần đo đập vào quả lắc (H. 72). Nếu biết điều kiện va chạm, khối lượng viên đạn và con lắc thì có thể tính được vận tốc viên đạn trước khi va chạm theo góc lệch  $\alpha$  của con lắc. Khối lượng con lắc là  $M$  và khối lượng viên đạn  $m$  cho trước, có thể coi con lắc như con lắc toán học có chiều dài  $l$ . Hãy chỉ ra cách tính trong các trường hợp:

- 1) viên đạn nằm trong quả lắc sau khi va chạm;
- 2) viên đạn bật lại phía sau với vận tốc  $v'$ ;
- 3) viên đạn rơi xuống dưới, mất hết vận tốc.

**4.54.** Hai con lắc có dạng các hòn bi khối lượng  $m_1$  và  $m_2$  khác nhau được treo tự do trên các sợi chỉ có độ dài khác nhau  $l_1$  và  $l_2$  sao cho hai hòn bi tiếp xúc với nhau. Con lắc thứ nhất được kéo lên một góc  $\alpha$  trong mặt phẳng các sợi chỉ và thả ra. Hai con lắc va chạm xuyên tâm với nhau. Sau khi va chạm, các con lắc bị lệch các góc  $\alpha_1$  và  $\alpha_2$  bằng bao nhiêu so với phương thẳng đứng? Giả thiết các góc đều nhỏ, va chạm đàn hồi tuyệt đối?

**4.55.** Trên lò xo độ cứng  $k$  có treo một đĩa cân trọng lượng  $P_1$  và một quả cân trọng lượng  $P_2$ . Một hòn bi bằng đất khối lượng  $m$  và không đàn hồi (nhưng không dính) từ phía dưới đập vào đáy đĩa cân. Tìm vận tốc  $v_0$  của



Hình 72

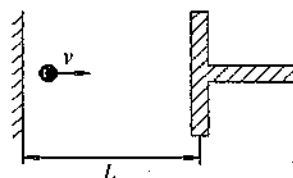
hòn bi trước khi va chạm, biết rằng sau va chạm khi đĩa cân chuyển động áp lực nhỏ nhất của quả cân lên đĩa là  $\frac{P_2}{2}$ .

**4.56.** Một vật khối lượng  $m$  có vận tốc  $v$  hợp với pháp tuyến của tường một góc  $\alpha$ , bay đập vào tường. Tìm động lượng  $P$  mà tường nhận được. Va chạm là đàn hồi tuyệt đối.

**4.57.** Tìm độ biến thiên của động năng  $\Delta K$  và động lượng  $\Delta p$  của một vật đang chuyển động với vận tốc  $v$ , khi nó va chạm đàn hồi vào một tấm chắn cũng đang chuyển động cùng hướng với vận tốc không đổi  $u < v$ . Với tỷ lệ nào giữa vận tốc  $v$  của vật và vận tốc  $u$  của tấm chắn thì vật sẽ ngừng chuyển động?

**4.58.** Chùm nguyên tử heli (mật độ nguyên tử trong chùm  $n = 10^{15}$  nguyên tử/cm<sup>3</sup>, năng lượng  $E = 1 \text{ keV}$ , tiết diện của chùm  $S = 0,1 \text{ cm}^2$ ) bay tới vuông góc với tấm chắn “gương” khối lượng  $M = 1 \text{ g}$ , đang chuyển động về phía chùm với vận tốc ban đầu  $u_0 = 10 \text{ cm/s}$ . Hỏi sau khoảng thời gian  $t$  bằng bao nhiêu thì tấm chắn dừng lại?

**4.59.** Một hòn bi nhỏ chuyển động với vận tốc  $v$  trong khoảng không giữa bức tường cố định và piton lớn nằm cách tường một khoảng  $L$  (H. 73). Va chạm giữa viên bi với piton và tường là va chạm đàn hồi. Hãy tìm bất biến đoạn nhiệt của chuyển động, tức là tìm một hàm dạng  $f(v, L)$  luôn không đổi khi piton chuyển động từ từ.



Hình 73

**4.60.** Hai hòn bi đàn hồi lý tưởng có khối lượng  $m_1$  và  $m_2$ , chuyển động dọc theo cùng một đường thẳng với vận tốc  $v_1$  và  $v_2$ . Trong thời gian va chạm, các hòn bi bắt đầu bị biến dạng và một phần động năng chuyển thành thế năng biến dạng. Sau đó, sự biến dạng giảm dần và thế năng dự trữ lại chuyển thành động năng. Tìm giá trị của thế năng biến dạng  $P$  tại thời điểm khi nó đạt cực đại.

**4.61.** Hai quả cầu khối lượng  $m_1$  và  $m_2$  bay tới gặp nhau và va chạm không đàn hồi với nhau. Biết rằng, động năng của một quả lớn gấp 20 lần động năng quả còn lại. Với các điều kiện nào thì sau khi va chạm hai quả cầu sẽ chuyển động theo chiều chuyển động của quả cầu có năng lượng nhỏ hơn?

**4.62.** Một quả khúc côn cầu khối lượng  $m$  trượt trên băng, va vào một quả khác khối lượng  $3m$  đang đứng yên. Giả thiết sự va chạm là đàn hồi và xuyên tâm. Xác định khoảng cách  $S$  mà hai quả văng ra nếu vận tốc quả thứ nhất trước khi va chạm bằng  $v$ , hệ số ma sát giữa các quả khúc côn cầu và mặt băng là  $k$ .

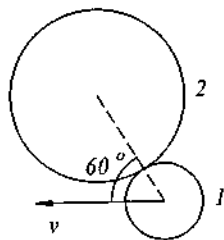
**4.63.** Một viên đạn khối lượng  $m$ , bay theo phương ngang với vận tốc  $v$ , xuyên qua một quả cầu bằng gỗ nằm trong nước và tiếp tục chuyển động theo phương cũ với vận tốc  $v/2$ . Sau va chạm, quả cầu di chuyển được một đoạn bằng bao nhiêu? Biết rằng lực cản của nước tỷ lệ với vận tốc quả cầu:  $F = \alpha v_c$ .

**4.64.** Hai vật cùng khối lượng va chạm với nhau, một vật trước đó đứng yên. Khi va chạm, một phần của vật đang chuyển động dính vào vật đứng yên, phần còn lại dừng lại. Với tỷ lệ giữa khối lượng phần bị dính với tổng khối lượng của vật bằng bao nhiêu thì 25% năng lượng chuyển hoá thành nhiệt năng?

**4.65.** Theo thuyết của H. Hetz (1882) khi các quả cầu va chạm đàn hồi thì lực tương tác giữa chúng tỷ lệ thuận với độ biến dạng của chúng theo lũy thừa  $3/2$ , tức là  $F = kx^{3/2}$ . Xét trường hợp va chạm trực diện của hai quả cầu có cùng bán kính và hằng số đàn hồi  $k$ , nhưng có khối lượng khác nhau tương ứng bằng  $m$  và  $\frac{m}{3}$ . Các vận tốc ban đầu là  $v_0$  và  $-v_0$ . Xác định độ

biến dạng cực đại  $x_{\max}$  của các quả cầu.

**4.66.** Quả cầu 1 bay với vận tốc  $v$  va chạm vào quả cầu 2 đang đứng yên có khối lượng lớn gấp ba lần quả cầu chuyển động (H. 74). Tìm vận tốc của các quả cầu sau va chạm, nếu tại thời điểm va chạm góc giữa đường nối tâm các quả cầu và vận tốc  $\vec{v}$  bằng  $60^\circ$ . Va chạm là đàn hồi tuyệt đối. Bỏ qua ma sát.



Hình 74

**4.67\*.** Một hạt đang chuyển động, va chạm vào một hạt đứng yên có cùng khối lượng. Chứng minh rằng sau khi va chạm, nếu không phải là va chạm trực diện thì các hạt sẽ bay theo hướng vuông góc với nhau. Các hạt sẽ chuyển động thế nào sau va chạm trực diện?

**4.68.** Hai proton, mỗi hạt mang năng lượng  $E = 0,5 \text{ MeV}$  bay về phía nhau và va chạm trực diện với nhau. Chúng có thể đến gần nhau đến mức nào nếu chỉ tính đến tương tác tĩnh điện giữa chúng?

**4.69.** Hạt  $\alpha$  với động năng  $E_0 = 4 \text{ MeV}$  chuyển động về phía một proton đang đứng yên. Xác định khoảng cách nhỏ nhất giữa chúng tại thời điểm chúng gần nhau nhất và gia tốc  $a_p$  và  $a_\alpha$  của chúng trong thời gian va chạm. Giả thiết va chạm là xuyên tâm.

**4.70.** Khi bắn phá hạt nhân heli bằng các hạt  $\alpha$  mang năng lượng  $1 \text{ MeV}$  người ta phát hiện ra rằng, hạt  $\alpha$  bị lệch một góc  $60^\circ$  so với hướng bay ban đầu của nó. Giả thiết va chạm là đàn hồi. Xác định năng lượng của hạt  $\alpha$  và năng lượng giật lùi của hạt nhân.

4.71. Hạt  $\alpha$  đang bay với vận tốc  $v_0$ , va chạm đàn hồi với một hạt nhân đang đứng yên và tiếp tục chuyển động dưới một góc  $90^\circ$  so với hướng ban đầu. Với tỷ lệ nào giữa khối lượng  $m$  của hạt  $\alpha$  và khối lượng  $M$  của hạt nhân thì điều đó xảy ra? Xác định vận tốc  $v$  của hạt  $\alpha$  và vận tốc  $V$  của hạt nhân sau va chạm. Xác định góc  $\theta$  giữa hướng của vận tốc hạt nhân và hướng  $v_0$ .

4.72. Xác định động lượng giật lùi của hạt nhân  $^{57}\text{Fe}$  khi bức xạ lượng tử  $\gamma$  với năng lượng 14,4 keV.

4.73. Hai hạt có khối lượng lần lượt là  $m_1$  và  $m_2$  ( $m_1 > m_2$ ) chuyển động ngược chiều nhau, dọc theo một đường thẳng với cùng vận tốc. Sau khi va chạm đàn hồi với nhau, hạt nặng hơn bị lệch so với hướng ban đầu của nó một góc  $\alpha = 30^\circ$  trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm hoặc lệch góc  $\beta = 60^\circ$  trong hệ quy chiếu khối tâm. Xác định tỷ số  $\frac{m_1}{m_2}$ .

4.74. Hai hạt giống nhau, va chạm đàn hồi với nhau, trong đó một hạt ban đầu đứng yên. Hạt bay tới bị lệch một góc  $\theta$  so với hướng chuyển động ban đầu của nó. Xác định góc tán xạ  $\gamma$  của hạt này trong hệ quy chiếu khối tâm.

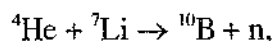
4.75. Xác định phần năng lượng  $\alpha$  mà proton mất đi khi nó tán xạ đàn hồi dưới góc  $180^\circ$  trên proton, neutron, hạt nhân heli và hạt nhân cacbon.

4.76\*. Góc tán xạ cực đại của hạt  $\alpha$  và neutron bằng bao nhiêu khi chúng tán xạ đàn hồi trên hydro?

4.77. Một hạt nhân có khối lượng  $m$  và động năng  $E$ , va chạm vào một hạt nhân khác đang đứng yên. Sau va chạm, xảy ra phản ứng hạt nhân, kết quả là tạo ra hai hạt khối lượng  $m_1$  và  $m_2$ , phản ứng thu một lượng năng lượng là  $Q$ . Hỏi với các điều kiện nào thì vận tốc của các hạt được tạo thành sẽ cùng hướng hoặc ngược hướng với vận tốc của hạt nhân tới?

4.78. Phản ứng hạt nhân  ${}^7\text{Li} + p \rightarrow {}^7\text{Be} + n$  (liti đứng yên) có năng lượng ngưỡng là  $E_n = 1,88 \text{ MeV}$ , tức là phản ứng chỉ xảy ra khi năng lượng proton bằng hoặc lớn hơn  $E_n$ . Với năng lượng  $E_p$  nào của proton bắn phá trong phản ứng trên thì các neutron có thể bay ngược lại từ bia liti?

4.79. Tính giá trị nhỏ nhất của động năng  $K_\alpha$  của các hạt  $\alpha$  cần để xảy ra phản ứng

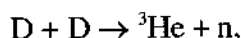


nếu phản ứng trên thu năng lượng  $Q = 2,85 \text{ MeV}$  (hạt liti đứng yên).

4.80. Các hạt nhân deuteri và triti bay tới gặp nhau, sao cho khối tâm của hệ hai hạt này luôn đứng yên. Tổng động năng của hai hạt là  $K = 150 \text{ keV}$ .

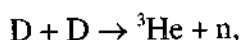
Cần phải gia tốc hạt nhân đơteri đến năng lượng nào để khi hạt nhân triti đứng yên ta vẫn thu được kết quả phản ứng tương tự?

4.81. Các hạt nhân đơteri với năng lượng  $E_D = 0,17 \text{ MeV}$  chuyển động ngược chiều nhau. Khi chúng va chạm nhau thì xảy ra phản ứng



năng lượng toả ra do phản ứng bằng  $E$ . Xác định  $E$ , nếu neutron mang theo năng lượng  $E_n = 2,7 \text{ MeV}$ .

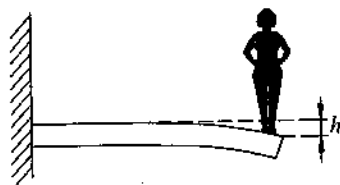
4.82. Hạt nhân đơteri với năng lượng  $E_D = 3,25 \text{ MeV}$  va chạm với một hạt nhân đơteri khác đang đứng yên. Khi va chạm xảy ra phản ứng



và toả ra năng lượng bằng  $E$ . Xác định  $E$  nếu trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm  ${}^3\text{He}$  đứng yên.

## §5. DAO ĐỘNG ĐIỀU HOÀ CỦA CHẤT ĐIỂM

5.1. Dưới tác dụng của trọng lượng vận động viên nhảy cầu, cầu đàn hồi bị võng  $h = 0,5 \text{ m}$ . Bỏ qua khối lượng cầu, tìm chu kỳ dao động nhỏ của hệ quanh vị trí cân bằng (H. 75).



Hình 75

5.2. Chu kỳ dao động nhỏ của một quả cầu treo trên lò xo bằng  $T = 0,5 \text{ s}$ . Bỏ qua khối lượng của lò xo, tìm độ dẫn của lò xo dưới tác dụng của trọng lượng quả cầu.

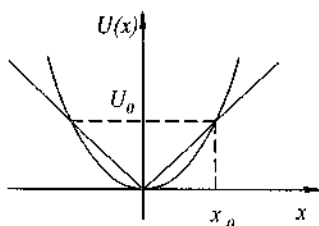
5.3. Một viên bi nhỏ khối lượng  $m$  bay theo phương ngang với vận tốc  $v$  đập vào một lưới đàn hồi căng thẳng đứng. Giả thiết độ biến dạng của lưới tỷ lệ với lực tác dụng lên nó với hệ số tỷ lệ  $k$ , tìm khoảng thời gian  $t$  mà sau đó biến dạng đạt cực đại.

5.4. Một chất điểm thực hiện dao động một chiều trong giếng thế năng hình tam giác  $U(x) \propto |x|$  với chu kỳ  $T_0$  (H. 76). Tìm chu kỳ dao động điều hoà  $T$  của chất điểm này trong giếng thế năng parabol  $U(x) \propto x^2$ , nếu thế năng cực đại của chất điểm và biên độ dao động trong hai trường hợp là như nhau.

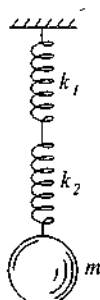
5.5. Một hòn bi khối lượng  $m$ , treo trên hai lò xo mắc nối tiếp với nhau có các hệ số đàn hồi là  $k_1$  và  $k_2$  (H. 77). Xác định chu kỳ dao động thẳng đứng.

5.6. Một tấm ván thực hiện dao động điều hoà theo phương ngang với chu kỳ  $T = 5 \text{ s}$ . Vật nằm trên nó bắt đầu trượt khi biên độ dao động đạt tới giá trị  $A = 0,6 \text{ m}$ . Hỏi hệ số ma sát nghỉ  $k$  giữa vật và tấm bằng bao nhiêu?

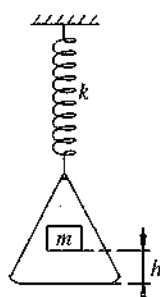




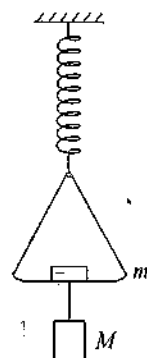
Hình 76



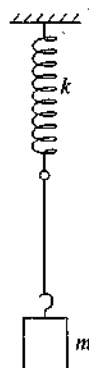
Hình 77



Hình 78



Hình 79



Hình 80

5.7. Từ độ cao  $h$  một vật khối lượng  $m$  rơi vào một đĩa cân treo trên lò xo (H. 78), không nảy lên so với đĩa. Đĩa bắt đầu dao động. Hệ số đàn hồi của lò xo bằng  $k$ . Xác định biên độ dao động  $A$  (khối lượng đĩa cân và khối lượng lò xo nhỏ không đáng kể so với khối lượng vật).

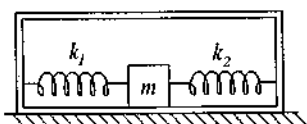
5.8\*. Trên đĩa cân to của cân lò xo có đặt một vật nhỏ (H. 79). Khối lượng đĩa cân bằng  $m$ , khối lượng của vật trong đĩa nhỏ không đáng kể. Dưới đáy đĩa có treo một vật lớn khối lượng  $M$ . Cả hệ nằm trong trạng thái cân bằng. Với tỷ lệ nào giữa  $M$  và  $m$  thì vật nhỏ trong đĩa sẽ nảy lên sau khi tháo bỏ vật  $M$ ?

5.9. Bộc một sợi dây có treo một vật khối lượng  $m = 1 \text{ kg}$  vào một lò xo (H. 80). Kéo vật xuống dưới, sau đó thả ra, vật thực hiện dao động. Có thể kéo vật xuống một khoảng  $x$  bằng bao nhiêu để khi dao động sợi dây luôn căng? Hệ số cứng của lò xo  $k = 0,5 \text{ N/cm}$ .

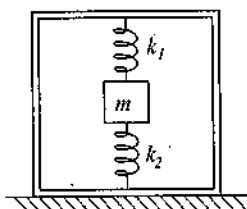
5.10. Một vật khối lượng  $m$  dao động không ma sát bên trong một hộp khối lượng  $M$  đặt trên mặt bàn nằm ngang. Vật được nối với hai lò xo có độ cứng  $k_1$  và  $k_2$ , hai đầu của hai lò xo được nối với hai thành hộp (H. 81). Với biên độ dao động của vật bằng bao nhiêu thì hộp bắt đầu chuyển động trên mặt bàn, nếu hệ số ma sát giữa hộp và mặt bàn là  $\mu$ ?

5.11. Vật khối lượng  $m$  dao động thẳng đứng bên trong một hộp khối lượng  $M$  đặt trên mặt bàn nằm ngang. Vật được nối với hai lò xo có độ cứng  $k_1$  và  $k_2$ , hai đầu còn lại của hai lò xo được nối với hai thành trên và dưới của hộp (H. 82). Hỏi với giá trị nào của biên độ dao động thì hộp bắt đầu bật nhảy trên mặt bàn?

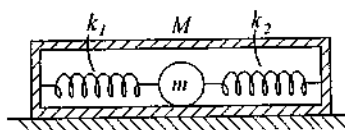
5.12. Vật khối lượng  $m$  được nối với các thành của hộp khối lượng  $M$  bằng hai lò xo (có độ cứng là  $k_1$  và  $k_2$ ) và có thể thực hiện dao động nhỏ khi trượt không ma sát trên đáy hộp (H. 83). Xác định chu kỳ dao động nếu bỏ qua ma sát giữa hộp và mặt bàn. Biết rằng ở trạng thái cân bằng các lò xo không dẫn.



Hình 81

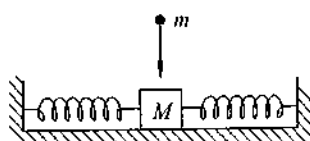


Hình 82



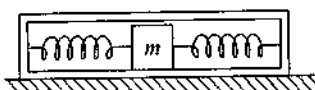
Hình 83

**5.13.** Một vật khối lượng  $M$  nằm trên mặt bàn nhẵn lý tưởng và được nối với hai thành đỡ qua hai lò xo có độ cứng khác nhau. Vật dao động quanh vị trí cân bằng (H.84). Tại thời điểm khi vật đi qua vị trí cân bằng, từ trên cao một cục đất khối lượng  $m$  rơi xuống và dính vào vật. Hỏi chu kỳ và biên độ dao động thay đổi bao nhiêu lần?



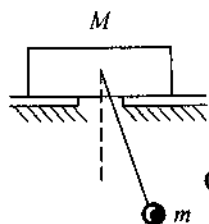
Hình 84

**5.14.** Một vật khối lượng  $m$ , dao động không ma sát bên trong hộp khối lượng  $M$  nằm trên mặt bàn nhẵn. Vật được nối với hai lò xo giống nhau, hai đầu còn lại của hai lò xo được nối với hai thành bên của hộp (H. 85). Lúc đầu hộp được giữ chặt, sau đó thả ra và nó có thể di chuyển tự do trên mặt bàn. Xác định tỷ số giữa các tần số dao động trong hai trường hợp này.

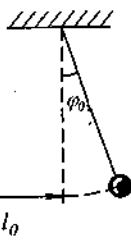


Hình 85

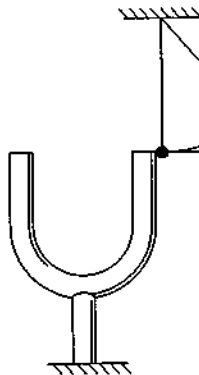
**5.15.** Trên mặt bàn nhẵn có đặt một vật khối lượng  $M$ , vật được nối với một con lắc toán học, gồm một thanh không trọng lượng và một chất điểm khối lượng  $m$  gắn ở cuối thanh (H. 86). Trục quay của con lắc đi qua tâm của vật  $M$ . Trường hợp thứ nhất vật  $M$  được giữ cố định trên bàn, trường hợp thứ hai người ta buông ra để nó có thể di chuyển tự do trên bàn. Xác định tỷ lệ của các tần số dao động nhỏ trong hai trường hợp này.



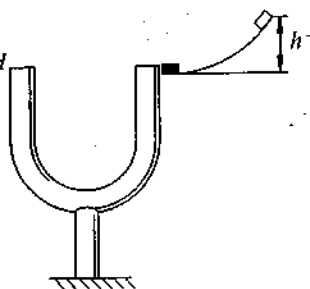
Hình 86



Hình 87



Hình 88



Hình 89

**5.16.** Một quả cầu khối lượng  $m$ , diện tích  $Q$  được treo trên một sợi chỉ nhẹ có chiều dài  $L$ . Trên cùng độ cao với quả cầu, cách nó một khoảng  $l_0$  người

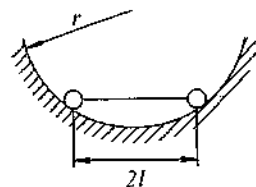
ta đặt một quả cầu khác cố định, có cùng điện tích. Xác định góc lệch  $\varphi_0$  so với phương thẳng đứng của quả cầu thứ nhất (H. 87). Tìm chu kỳ dao động nhỏ của nó. Giả thiết rằng lực tĩnh điện không lớn lắm so với trọng lực.

**5.17.** Để xác định biên độ dao động của nhánh âm thoa, Viện sĩ A.F. Iôphê đã đưa lại gần nó một quả cầu thép nhỏ treo trên sợi chỉ cho đến khi nó tiếp xúc với nhánh âm thoa (H. 88). Hỏi biên độ dao động  $A$  của nhánh âm thoa bằng bao nhiêu, nếu độ cao cực đại của quả cầu đạt được trong nhiều lần thí nghiệm là  $H$ ? Tần số dao động của nhánh âm thoa là  $\nu$ . Khối lượng của quả cầu rất nhỏ so với khối lượng âm thoa.

**5.18.** Một vòng đệm bằng thép trượt trên dốc từ độ cao  $h$  và va chạm đàn hồi vào nhánh âm thoa (H. 89). Sau một lần bật ra, vòng đệm có thể bị đẩy lên độ cao cực đại  $H$  bằng bao nhiêu, nếu biên độ dao động của nhánh âm thoa là  $A$ , tần số dao động của âm thoa là  $\nu$ ? Giả thiết khối lượng của âm thoa lớn hơn rất nhiều khối lượng của vật. Bỏ qua ma sát.

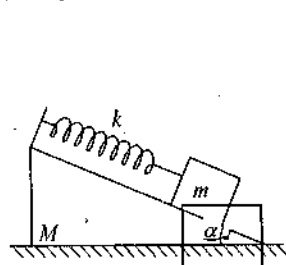
**5.19.** Một quả tạ đôi dài  $2l$  trượt không ma sát trên mặt cầu bán kính  $r$  (H. 90). Quả tạ có dạng hai chất điểm nối với nhau bằng một thanh không trọng lượng. Tính chu kỳ dao động nhỏ khi nó chuyển động:

- theo phương vuông góc với mặt phẳng hình vẽ,
- trong mặt phẳng hình vẽ.

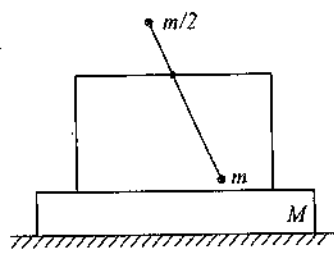


Hình 90

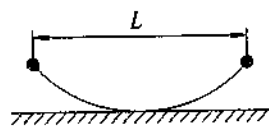
**5.20.** Trên mặt phẳng nhẵn nằm ngang đặt một nêm có tiết diện thẳng là tam giác vuông, có góc nghiêng là  $\alpha = 30^\circ$ . Trên mặt nghiêng của nêm (cũng nhẵn) có một khối lập phương nối với đỉnh nêm bằng một lò xo, trục lò xo song song với mặt nghiêng (H. 91). Khối lượng của nêm là  $M$ , của khối lập phương là  $m$ , độ cứng của lò xo  $k$ . Tìm chu kỳ dao động nhỏ của hệ, giả thiết  $M = 3m$ .



Hình 91



Hình 92



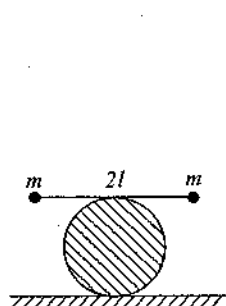
Hình 93

**5.21.** Một con lắc có hai quả cầu nhỏ nối với nhau bằng một thanh dài  $l$ . Khối lượng các quả cầu là  $m$  và  $\frac{m}{2}$ , trục quay của con lắc nằm cách quả cầu nhẹ một khoảng  $\frac{l}{3}$  (H. 92). Con lắc lắp trên một tấm khối lượng  $M = 3m$ ,

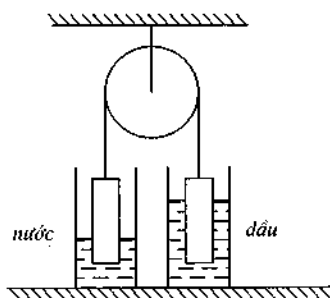
tám có thể trượt không ma sát trên mặt phẳng nằm ngang. Xác định chu kỳ dao động nhỏ của con lắc.

5.22. Hai chất điểm cùng khối lượng được đặt đối xứng nhau trên một miếng mặt trụ không khối lượng (H. 93). Tìm tần số dao động nhỏ của hệ. Bán kính mặt trụ là  $R$ , khoảng cách giữa hai chất điểm là  $L$ . Bỏ qua sự trượt của mặt trụ.

5.23. Trên một khối trụ nhám đứng yên, bán kính  $R$  (H. 94) có đặt (vuông góc với đường sinh của khối trụ) một thanh không trọng lượng dài  $2l$  với hai quả cầu nhỏ khối lượng  $m$  ở hai đầu. Tìm chu kỳ dao động nhỏ của thanh.



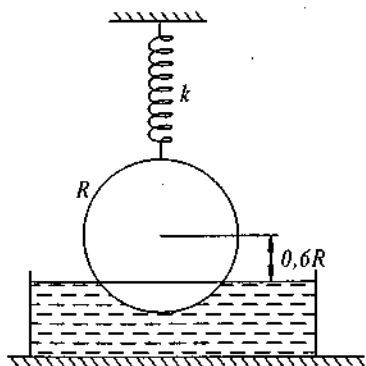
Hình 94



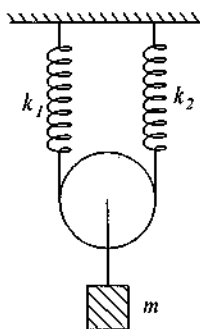
Hình 95

5.24. Người ta vắt một sợi dây nhẹ, không dẫn qua một ròng rọc cố định, hai đầu dây có treo hai quả cân bằng sắt giống nhau hình trụ cao  $h$ . Các quả cân được nhúng một phần vào nước và dầu đựng trong hai cốc lớn đặt trên bàn (H. 95). Tại thời điểm ban đầu, hệ nằm trong trạng thái cân bằng. Tìm chu kỳ dao động nhỏ. Cho trước tỷ trọng của dầu là  $\rho_d$ , của sắt là  $\rho_s$  và của nước là  $\rho_n$ .

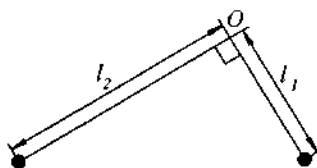
5.25. Quả cầu sắt bán kính  $R$  (H. 96) treo trên một lò xo độ cứng  $k$ , được nhúng một phần vào chậu lớn chứa thủy ngân đặt trên bàn, sao cho ở vị trí cân bằng, tâm quả cầu cách mặt chất lỏng một khoảng  $0,6R$ . Tìm chu kỳ dao động nhỏ của quả cầu theo phương thẳng đứng. Cho trước tỷ trọng của sắt là  $\rho_s$  và của thủy ngân là  $\rho_t$ .



Hình 96



Hình 97



Hình 98

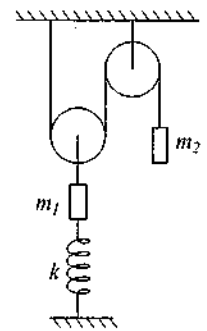
5.26. Tìm chu kỳ dao động của vật treo trên một ròng rọc có khối lượng không đáng kể và hai lò xo với độ cứng là  $k_1$  và  $k_2$  (H. 97). Tìm biên độ cực đại  $A$  của dao động khi nó vẫn còn là dao động điều hòa.

5.27. Một cậu bé đứng trên chiếc cân lò xo, ném quả bóng khối lượng  $m$  thẳng đứng lên trên, sau đó bắt lại. Biết rằng, trong thời gian bóng bay cân thực hiện  $n$  dao động. Xác định biên độ các dao động của cân sau khi cậu bé bắt lại quả bóng. Độ cứng lò xo của cân bằng  $k$ , khối lượng cả đĩa cân và cậu bé là  $M$ .

5.28. Hai quả cầu nặng giống nhau, treo trên trục nằm ngang nhờ một thanh giằng nhẹ gấp khúc một góc  $90^\circ$ , chiều dài các nhánh là  $l_1$  và  $l_2$  (H. 98). Xác định tần số dao động nhỏ của hệ trong mặt phẳng vuông góc với trục.

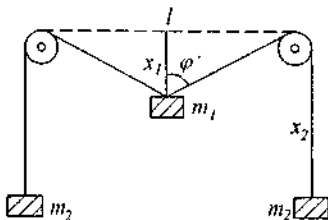
5.29. Bánh xe đạp bán kính  $R$ , bị cắt đi một đoạn ứng với góc ở tâm là  $\alpha$ , được treo trên một trục ngang đi qua tâm bánh xe. Xác định tần số dao động của bánh xe trong mặt phẳng vuông góc với trục. Giả thiết toàn bộ khối lượng của bánh xe tập trung trên vành xe.

5.30. Một cơ cấu gồm một dây không dẫn, hai ròng rọc, hai vật nặng và lò xo có độ cứng  $k$  (H. 99). Tìm chu kỳ dao động nhỏ của hệ. Với biên độ dao động nào của vật  $m_1$  thì đôi lúc dây sẽ mất sức căng? Bỏ qua khối lượng của dây và của ròng rọc.

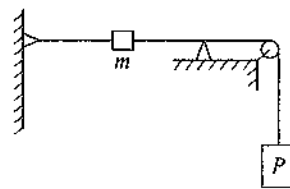


Hình 99

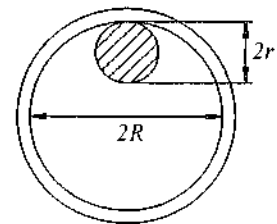
5.31\*. Tìm tần số dao động nhỏ riêng xung quanh vị trí cân bằng bên của hệ (H. 100). Sợi dây không dẫn và không trọng lượng, các ròng rọc không trọng lượng và không có ma sát trong trục.



Hình 100



Hình 101

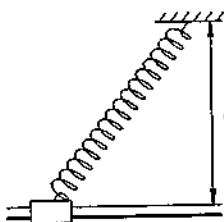


Hình 102

5.33. Xác định chu kỳ dao động nhỏ của một vòng mảnh khối lượng  $M$ , bán kính  $R$ , lồng vào một khối trụ cố định nằm ngang bán kính  $r$  (H. 102). Vòng không trượt.

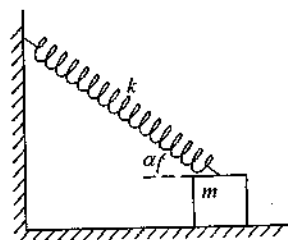
5.34. Buồng thang máy hạ xuống đều với vận tốc  $v_0$ . Liệu có thể xảy ra và trong điều kiện nào, do tang trống quấn dây cáp bị kẹt đột ngột, tại những thời điểm nhất định xuất hiện trạng thái không trọng lượng trong buồng thang máy? Giả thiết, dưới tác dụng của trọng lực thang máy, độ giãn của phần dây cáp không bị quấn nhỏ so với chiều dài dây cáp ở trạng thái tự nhiên, và bằng  $\Delta l = 10 \text{ cm}$ .

5.35. Một khớp nối nhỏ khối lượng  $m$  có thể trượt không ma sát trên một thanh nằm ngang. Khớp được nối với lò xo, đầu còn lại của lò xo gắn cố định vào một điểm cách thanh một khoảng  $l$ , dài hơn chiều dài của lò xo khi không giãn (H. 103). Khi có chiều dài  $l$  lò xo bị kéo giãn bởi lực  $F$ . Xác định chu kỳ dao động của khớp.



Hình 103

5.36. Tìm chu kỳ dao động nhỏ của một vật, trượt không ma sát trên mặt phẳng nằm ngang (H. 104). Tại vị trí cân bằng, lò xo có độ cứng  $k$  tạo một góc  $\alpha$  so với phương nằm ngang. Giả thiết chiều dài của lò xo đủ lớn sao cho trong quá trình dao động góc  $\alpha$  luôn không đổi. Với những giá trị nào của biên độ thì vật không bị bật lên? Khối lượng vật là  $m$ .



Hình 104

5.37. Tìm tần số dao động nhỏ của quả cầu khối lượng  $m$  treo trên lò xo, nếu lực căng của lò xo tỷ lệ với bình phương độ giãn của nó, tức là  $F = k(l - l_0)^2$ , trong đó  $l_0$  là chiều dài lò xo ở trạng thái không tải.

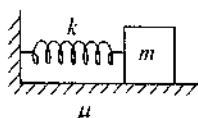
5.38. Hai quả cầu tự do có khối lượng  $m_1$  và  $m_2$  được nối với nhau bằng lò xo có hệ số đàn hồi là  $k$ . Xác định chu kỳ dao động của hai quả cầu xung quanh khối tâm của hệ khi kéo giãn lò xo.

5.39. Hai vật giống nhau có khối lượng  $m$  được nối với nhau bằng lò xo có độ cứng  $k$ . Các vật đứng yên trên mặt bàn nhẵn, tại thời điểm ban đầu một vật nằm gần tường và lò xo bị nén một đoạn  $a$ . Mô tả chuyển động của mỗi vật sau khi thôi nén lò xo.

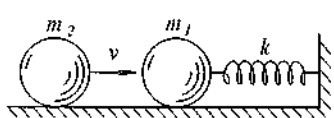
5.40. Một vật khối lượng  $m$  thực hiện dao động theo phương nằm ngang qua lò xo độ cứng  $k$  nối với tường thẳng đứng (H. 105). Hệ số ma sát giữa vật và mặt phẳng nằm ngang là  $\mu$ . Tại thời điểm khi lò xo giãn hết cỡ, người ta truyền cho vật một năng lượng, sao cho vật đạt vận tốc  $v_0$  hướng về phía tường. Tìm vận tốc  $v_0$  nếu dao động là dừng và độ giãn cực đại của lò xo là  $l$ .

Giả thiết  $l > \frac{\mu mg}{k}$ .

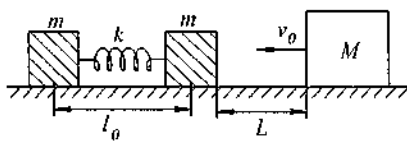
**5.41.** Trên mặt bàn nhẵn nằm ngang có đặt một quả cầu khối lượng  $m_1$ , được nối với lò xo độ cứng  $k$ . Đầu còn lại của lò xo được gắn cố định (H. 106). Người ta cho quả cầu khác khối lượng  $m_2$  (nhỏ hơn  $m_1$ ) có vận tốc  $v$  va chạm trực diện với quả cầu  $m_1$ . Quả cầu  $m_2$  sẽ chuyển động về phía nào sau va chạm? Xác định biên độ dao động của quả cầu  $m_1$  sau va chạm.



Hình 105



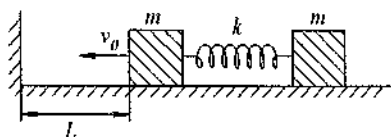
Hình 106



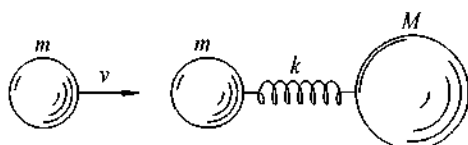
Hình 107

**5.42.** Trên mặt phẳng nằm ngang có đặt một hệ gồm hai vật cùng khối lượng  $m$  cách nhau một khoảng  $l_0$ , được nối với nhau bằng lò xo độ cứng  $k$  ở trạng thái không bị nén (H. 107). Bên phải chúng có một vật nặng khối lượng  $M \gg m$  đang trượt với vận tốc  $v_0$ . Tại thời điểm ban đầu  $t = 0$ , vật  $M$  nằm cách vật bên phải một khoảng  $L$ . Sau khoảng thời gian nào, khối tâm của hệ sẽ cách vật  $M$  một khoảng như ở thời điểm  $t = 0$ ? Giả thiết sự va chạm với vật  $M$  xảy ra tức thời và đàn hồi tuyệt đối.

**5.43.** Có hai vật cùng khối lượng  $m$ , nối với nhau bằng lò xo có độ cứng  $k$  ở trạng thái không bị nén, trượt trên tấm nhẵn không ma sát với vận tốc  $v_0$  (H. 108). Tại thời điểm  $t = 0$ , vật bên trái cách tường thẳng đứng một khoảng  $L$  theo hướng mà hai vật cùng trượt. Hỏi sau bao lâu, khối tâm của chúng có vị trí trùng với vị trí của nó ở thời điểm  $t = 0$ ? Giả thiết, va chạm với tường là tức thời và đàn hồi tuyệt đối.



Hình 108

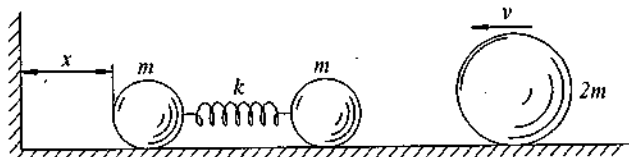


Hình 109

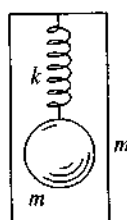
**5.44.** Một hệ gồm hai quả cầu khối lượng  $m$  và  $M$ , được nối với nhau bằng lò xo không trọng lượng có hệ số đàn hồi  $k$  (H. 109). Quả cầu thứ ba có khối lượng  $m$ , chuyển động dọc theo trục lò xo với vận tốc  $v$  và va chạm đàn hồi với quả cầu  $m$  của hệ. Coi các quả cầu là cứng tuyệt đối, tìm động năng  $K$  của hệ sau va chạm như một thể thống nhất, tìm nội năng  $E_n$  của hệ và biên độ dao động  $A$  của một quả cầu so với quả còn lại. Trước khi va chạm hệ đứng yên, lò xo không bị biến dạng. Những quả cầu nào có thể xem như cứng tuyệt đối?

**5.45.** Trên mặt phẳng nhẵn nằm ngang có hai vật nhỏ, được nối với nhau bằng lò xo không trọng lượng có hệ số đàn hồi  $k$  (H. 110). Một vật thứ ba có khối lượng  $2m$ , chuyển động dọc theo chiều lò xo với vận tốc  $v$  đến va vào một vật của hệ. Khi đó, các vật va chạm dính vào nhau. Sau khi thực hiện hết hai dao động nhỏ, hệ mới được tạo thành sẽ va chạm với tường. Xác định khoảng cách  $x$  nhỏ nhất ban đầu của hệ so với tường.

**5.46.** Bên trong hình trụ khối lượng  $m$  người ta treo một vật có cùng khối lượng vào lò xo có độ cứng  $k$  (H. 111). Ban đầu hình trụ đứng yên. Tại một thời điểm nào đó người ta buông hình trụ ra, nó bắt đầu rơi tự do từ trên xuống dọc theo trục của nó. Hỏi hình trụ đi được quãng đường bằng bao nhiêu trong thời gian vật thực hiện được 1,5 dao động?



Hình 110



Hình 111

**5.47.** Một vật khối lượng  $m_1$ , được buộc vào sợi chỉ gắn với trần nhà. Vật thứ hai khối lượng  $m_2$  treo vào vật  $m_1$  qua một lò xo dài  $l$ . Tại thời điểm  $t = 0$ , người ta cắt sợi chỉ và hai vật bắt đầu rơi xuống. Tìm khoảng cách  $x_1$  và  $x_2$  từ hai vật đến trần nhà theo thời gian. Ở trạng thái chưa bị dãn, độ dài lò xo bằng  $l_0$ .

**5.48.** Một hệ gồm hai quả cầu cùng khối lượng, được nối với nhau bằng một lò xo không trọng lượng, bay vào tường với động năng  $K_0$ . Lò xo luôn vuông góc với tường và ở trạng thái ban đầu, dao động của nó không được kích thích. Va chạm của quả cầu vào tường là không đàn hồi tuyệt đối. Tìm động năng  $K$  và năng lượng dao động  $E_{dd}$  của hệ sau khi bật nảy ra. Bỏ qua trọng lực.

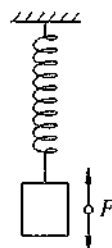
**5.49.** Dưới tác dụng của lực chuẩn đàn hồi  $F = -kx$ , một chất điểm (ví dụ quả cầu trên lò xo) thực hiện các dao động dọc theo trục  $X$  quanh vị trí cân bằng. Hãy chứng tỏ rằng, giá trị trung bình theo thời gian của động năng và thế năng trong các dao động này là bằng nhau.

**5.50.** Đồng hồ quả lắc khi đặt trên bàn chỉ đúng thời gian. Đồng hồ sẽ chạy thế nào nếu đặt nó trên một cái phao đang nổi tự do? Khối lượng  $M$  của đồng hồ và phao lớn gấp  $10^3$  lần khối lượng  $m$  của con lắc.



5.51. Một vật treo trên lò xo có chu kỳ dao động riêng  $\frac{1}{2}$  s

(H. 112). Một lực hình sin với biên độ  $F = 10^{-3}$  N có phương thẳng đứng và lực ma sát tác dụng lên vật. Xác định biên độ  $F_{ms}$  của lực ma sát và hệ số ma sát (lực ma sát tỷ lệ với vận tốc của chuyển động), nếu biên độ dao động khi cộng hưởng là  $A_{ch} = 5$  cm.



Hình 112

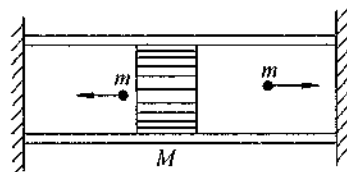
5.52. Một hệ thực hiện dao động cưỡng bức dưới tác dụng của ngoại lực biến thiên điều hoà. Hãy chứng minh rằng nếu các điều kiện khác là như nhau thì công của ngoại lực trong một chu kỳ sẽ đạt cực đại khi xảy ra cộng hưởng.

5.53. Một hệ gồm hai vật cùng khối lượng  $m$  nối với nhau bằng lò xo độ cứng  $k$ . Lực điều hoà có biên độ  $f_0$  hướng dọc theo lò xo tác dụng lên một vật của hệ. Tìm biên độ dao động của lò xo, nếu tần số lực cưỡng bức gấp hai lần tần số riêng của hệ.

5.54. Xác định thời gian va chạm  $\tau$  của quả bóng khí va đập nhẹ vào tường. Tính bằng số với khối lượng quả bóng  $m = 0,5$  kg, bán kính  $R = 10$  cm và áp suất  $P = 10^5$  Pa.

5.55. Một hạt khối lượng  $m$  chuyển động trong trường lực xuyên tâm theo quỹ đạo tròn bán kính  $r_0$ ; thế năng của hạt  $P = -\alpha m r^{-n}$ . Tìm điều kiện bền của chuyển động đối với các dao động nhỏ hướng tâm, tức là điều kiện để khi lệch không nhiều so với  $r_0$  hạt bắt đầu dao động quanh quỹ đạo tròn.

5.56. Một piton khối lượng  $M$  có thể chuyển động không ma sát trong xi lanh. Các quả cầu nhẹ khối lượng  $m \ll M$  dao động giữa piton và các thành xi lanh (H. 113). Tại vị trí cân bằng của piton nằm chính giữa xi lanh, tần số va chạm của mỗi quả cầu vào piton là  $\nu$ . Tìm tần số  $f \ll \nu$  của dao động nhỏ, chậm của piton. Giả thiết chuyển động của các quả cầu là một chiều và các va chạm là đàn hồi tuyệt đối.



Hình 113

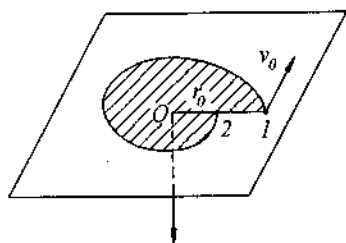
## §6. MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG.

### ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG

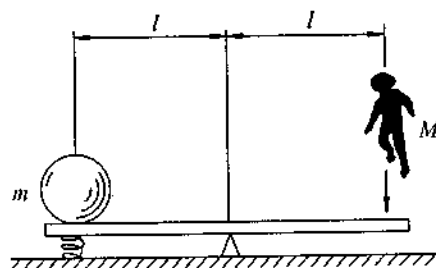
6.1. Một vật nhỏ buộc vào một sợi chỉ luồn qua một lỗ nhỏ  $O$  trên mặt bàn nhẵn nằm ngang. Vật chuyển động đều với vận tốc  $v_0$  và cách lỗ một

khoảng  $r_0$  (H.114) Tại thời điểm  $t_0$  người ta kéo từ từ sợi chỉ qua lỗ nhỏ, và trong thời gian  $\tau$ , vật chuyển động được một vòng và vẽ lên hình gạch chéo trên hình vẽ. Tìm diện tích của nó. Hãy chứng minh rằng nếu kéo sợi chỉ chậm so với chu kỳ quay của vật, thì tỷ số  $\frac{E}{\omega}$  sẽ không đổi, trong đó  $E$  là năng lượng của vật,  $\omega$  là tần số quay.

**6.2.** Cầu nhảy dùng rạp xiếc có dạng một tấm ván nằm ngang có bản lề giữ ở giữa. Diễn viên xiếc nhảy từ độ cao khá lớn lên một đầu của tấm ván. Khi đó, anh hề đứng ở đầu kia của ván sẽ bật lên không trung. Hỏi diễn viên xiếc phải nhảy xuống ván ở khoảng cách  $l_1$  nào, tính từ bản lề để anh hề bay lên cao nhất? Khối lượng diễn viên xiếc là  $m_1$ , khối lượng anh hề là  $m_2$ . Khoảng cách từ anh hề đến bản lề là  $l_2$ . Giả thiết tấm ván không trọng lượng.



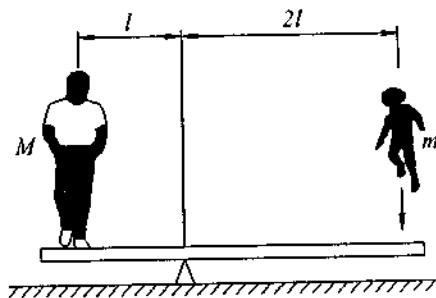
Hình 114



Hình 115

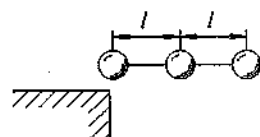
**6.3.** Một tấm ván cứng, dài  $2l = 4$  m có thể quay tự do quanh trục nằm ngang nằm ở giữa ván. Một đầu ván nối với sàn nhà qua một lò xo cứng (độ cao gối đỡ nhỏ hơn nhiều so với chiều dài của ván). Ở đầu có lò xo người ta đặt một quả cầu khối lượng  $m = 10$  kg. Một cậu bé khối lượng  $M = 30$  kg nhảy xuống đầu còn lại từ độ cao  $h = 1,5$  m (H. 115). Khi cậu bé chạm vào tấm ván gây ra lực làm tấm ván quay, quả cầu bắn lên không trung và không rơi lại tấm ván. Xác định độ cao  $x$  mà cậu bé bị bật lên do sức căng của lò xo. Bỏ qua khối lượng tấm ván.

**6.4.** Một tấm ván cứng, dài, có thể quay tự do quanh một trục, chia ván làm hai phần theo tỷ lệ 1:2 (H. 116). Một cậu bé nặng  $m = 40$  kg, nhảy từ độ cao  $h = 1,5$  m xuống đầu dài của tấm ván. Một người đàn ông nặng  $M = 80$  kg đứng ở đầu kia của ván. Sau cú nhảy của cậu bé, người đàn ông bị bắn lên độ cao  $x$  bằng bao nhiêu? Bỏ qua khối lượng của tấm ván. Ván nằm không cao lắm so với sàn nhà.



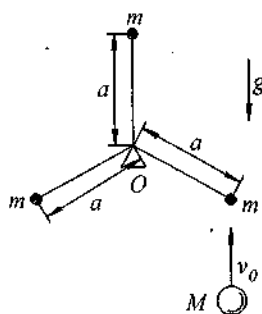
Hình 116

6.5. Một hệ nằm ngang, gồm ba quả cầu nhỏ giống nhau, được nối với nhau bằng một que cứng không trọng lượng, độ dài  $l$ . Hệ rơi với vận tốc không đổi  $v_0$  và quả cầu bên trái va vào gờ của một bề mặt nằm ngang (H.117). Xác định vận tốc góc  $\omega$  của hệ ngay sau khi va chạm, coi va chạm là đàn hồi tuyệt đối.

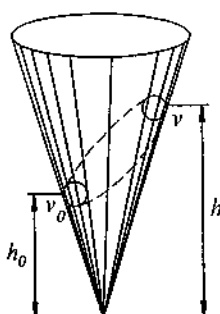


Hình 117

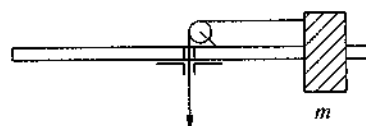
6.6. Một chong chóng gồm ba vật giống nhau khối lượng  $m$  nằm trên ba đỉnh của một tam giác đều và được nối với tâm  $O$  của tam giác bằng các que cứng không trọng lượng dài  $a$  (H. 118). Trục  $O$  nằm ngang, bỏ qua ma sát trong trục. Tại thời điểm ban đầu, chong chóng đứng yên và hướng như hình vẽ. Một viên đất nặn khối lượng  $M = 3m$  chuyển động với vận tốc  $v_0$  bay tới, va vào vật ngoài cùng bên phải và dính vào nó. Hỏi chong chóng sẽ quay với vận tốc góc  $\omega_x$  bằng bao nhiêu sau khi tại điểm có vận tốc cực đại, viên đất nặn lại tách rời khỏi vật? Biết rằng trước khi viên đất rơi ra, chong chóng chưa quay quá một vòng.



Hình 118



Hình 119



Hình 120

6.7\*. Trong trò chơi “những bước khổng lồ”, một người chuyển động theo quỹ đạo khép kín sao cho độ cao mà anh ta đạt được so với vị trí cân bằng thay đổi trong khoảng từ  $h_{\min}$  đến  $h_{\max}$ . Xác định vận tốc lớn nhất và nhỏ nhất của người đó trong chuyển động trên, nếu chiều dài sợi dây mà người đó bám để đi là  $l$ .

6.8. Một quả cầu nhỏ trượt không ma sát theo bề mặt bên trong của một phễu hình nón thẳng đứng (H. 119). Tại thời điểm ban đầu, quả cầu ở độ cao  $h_0$  và vận tốc nằm ngang  $v_0$ . Tìm  $v_0$ , nếu biết rằng, khi tiếp tục chuyển động, quả cầu lên-đến độ cao  $h$ , sau đó bắt đầu hạ xuống. Tìm vận tốc  $v$  của quả cầu tại điểm cao nhất.

6.9. Một thanh nhẹ quay với vận tốc góc  $\omega_0$  theo quán tính quanh trục vuông góc với nó và đi qua trung điểm. Một vật nặng, khối lượng  $m$  có thể chuyển động không ma sát dọc theo thanh và được giữ nhờ một dây không giãn vắt qua ròng rọc (H. 120). Xác định quy luật biến đổi vận tốc góc của

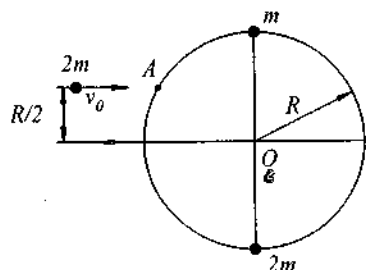
hệ tùy theo mức độ kéo vật lại gần trục quay, quy luật biến đổi lực căng của dây và công kéo vật từ bán kính  $R_0$  đến bán kính  $\frac{R_0}{2}$ .

**6.10.** Một hình trụ bán kính  $r$ , quay quanh trục của nó với vận tốc góc  $\omega$ . Một quả cầu nhỏ treo trên sợi chỉ không đàn dài  $l \gg r$ , đầu kia của sợi chỉ buộc vào một đầu hình trụ và quay cùng với hình trụ. Người ta đột ngột dừng hình trụ lại. Sau một khoảng thời gian bằng bao nhiêu thì sợi chỉ quấn trên trụ?

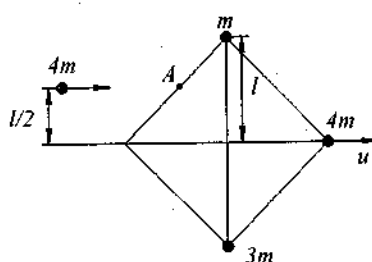
**6.11.** Một hạt khối lượng  $m$ , chuyển động dưới tác dụng của lực đàn hồi xuyên tâm  $\vec{F} = -k\vec{r}$ . Tìm tần số góc  $\omega$  của hạt. Hãy chứng minh rằng hạt chuyển động theo quỹ đạo elip, biểu diễn diện tích elip qua mômen động lượng  $l$  của hạt và tần số  $\omega$ . Tìm tỷ số giữa giá trị trung bình của thế năng và động năng của hạt. Độ cứng  $k$  phải thay đổi như thế nào để diện tích elip tăng lên hai lần? Khi đó  $\omega$  thay đổi như thế nào?

**6.12.** Một hệ gồm hai quả cầu nặng, gắn chặt vào một vòng dây đang chuyển động tịnh tiến không quay trên một bề mặt nhẵn nằm ngang (H. 121). Khối lượng các quả cầu là  $m$  và  $2m$ , bán kính vòng dây  $R$ . Một quả cầu bằng đất khối lượng  $2m$  có vận tốc  $v_0$  chuyển động ngược chiều về phía hệ,  $v_0$  song song với vectơ vận tốc của hệ. Quả cầu đất va vào vòng dây và dính luôn vào vòng tại điểm A ở khoảng cách  $\frac{R}{2}$  tính từ đường kính mà hệ chuyển động

dọc theo nó trước khi va chạm. Bỏ qua khối lượng của vòng dây và ma sát với bề mặt nằm ngang, tìm vận tốc góc  $\Omega$  của hệ sau va chạm và vận tốc  $u$  của vòng nếu biết rằng tâm quán tính của hệ chuyển động về phía ngược lại với cùng vận tốc  $u$ .



Hình 121



Hình 122

**6.13.** Một khung dây cứng hình vuông, chuyển động tịnh tiến không quay với vận tốc  $u$  trên mặt phẳng nhẵn, nằm ngang. Trên ba đỉnh của hình người ta gắn ba quả cầu khối lượng  $m$ ,  $4m$  và  $3m$  (H. 122). Chiều dài đường chéo hình vuông là  $2l$ . Một quả cầu bằng đất nặng khối lượng  $4m$  đuổi theo hệ. Va

chạm không đàn hồi xảy ra tại điểm A, cách một khoảng  $\frac{l}{2}$  so với đường chéo mà hệ chuyển động dọc theo nó trước khi va chạm. Biết rằng tâm quán tính của cả hệ có vận tốc  $2u$ . Bỏ qua ma sát và khối lượng khung, xác định vận tốc góc  $\Omega$  của hệ.

**6.14.** Một dây xích nặng, không dẫn, vắt qua ba ròng rọc không trọng lượng, bán kính mỗi ròng rọc là  $r$ . Các trục của ròng rọc song song với nhau và ban đầu được đặt tại ba đỉnh của một tam giác đều cạnh  $a$ , còn xích chuyển động với vận tốc dài  $v_1$ . Sau đó, người ta dịch chuyển các trục ròng rọc sao cho chúng cùng nằm trên một mặt phẳng, còn xích có dạng dây xích máy cày. Hỏi vận tốc dài của xích  $v_2$  bằng bao nhiêu sau khi dịch chuyển? Bỏ qua ma sát.

## §7. LỰC HẤP DẪN

**7.1.** Liệu nhà du hành vũ trụ sau khi nhảy có thoát khỏi lực hút của một tiểu hành tinh khối lượng bằng khối lượng của vệ tinh Fobos của Hỏa tinh? Biết tiểu hành tinh có khối lượng  $M = 1,1 \cdot 10^{16}$  kg và bán kính  $R = 11,1$  km?

**7.2.** Một tên lửa cùng với nhà du hành vũ trụ rời khỏi bề mặt Trái Đất và chuyển động thẳng đứng lên trên, sao cho trong suốt thời gian chuyển động nhà du hành luôn phải chịu mức quá tải  $n = 2$ . Sau khi vận tốc tên lửa bằng vận tốc vũ trụ cấp I, người ta ngắt các động cơ. Hỏi tên lửa có thoát ra khỏi giới hạn Trái Đất không hay là lại rơi xuống đất? Mức quá tải  $n$  là tỷ số  $n = \frac{P - P_0}{P_0}$ , trong đó  $P_0$  là trọng lượng nhà du hành vũ trụ ở trên Trái Đất,

$P$  là trọng lượng nhà du hành vũ trụ trong khi bay.

**7.3.** Một tên lửa cùng với nhà du hành vũ trụ rời khỏi bề mặt Trái Đất và chuyển động thẳng đứng lên trên, sao cho trong suốt thời gian chuyển động nhà du hành luôn phải chịu mức quá tải  $n = 3$ . Sau khi tên lửa đạt độ cao bằng bán kính Trái Đất  $R_{\text{TD}}$  so với mặt đất, người ta ngắt động cơ. Hỏi tên lửa có thoát khỏi giới hạn Trái Đất không hay là lại rơi xuống đất?

**7.4\*.** Tìm thế năng của vật (điểm) khối lượng  $m$  tại các khoảng cách  $R$  khác nhau tính từ tâm Trái Đất. Giả thiết thế năng ở xa vô cực bằng không.

**7.5.** Hai vật có cùng khối lượng  $M$ , chuyển động về phía nhau từ xa vô cực, theo quỹ đạo song song cách nhau một khoảng  $l$ . Vận tốc ban đầu của hai vật bằng nhau và bằng  $v_0$ . Xác định khoảng cách tối thiểu  $r_{\text{min}}$  giữa hai vật nếu có tính đến lực hấp dẫn giữa chúng.

7.6. Theo định luật III Kepler, tỷ số giữa lập phương bán kính lớn  $a$  của quỹ đạo elip và bình phương chu kỳ quay  $T$  của hành tinh là một đại lượng không đổi đối với tất cả các hành tinh của hệ Mặt Trời. Tỷ số này được gọi là hằng số Kepler và kí hiệu là  $K$ . Định luật III Kepler hoàn toàn chính xác khi khối lượng hành tinh rất nhỏ so với khối lượng Mặt Trời  $M$ . Tìm biểu thức của hằng số Kepler.

7.7\*. Định luật III Kepler sẽ thay đổi thế nào nếu như không bỏ qua khối lượng  $m$  của hành tinh so với khối lượng  $M$  của Mặt Trời?

7.8. Theo một số dự báo, xu hướng ấm lên của Trái Đất đe dọa làm tan băng ở Bắc và Nam cực. Xác định xem ngày của Trái Đất sẽ thay đổi như thế nào nếu mực nước của đại dương tăng lên 40 m?

7.9. Xác định chu kỳ quay của một vệ tinh gần của sao neutron (pulsar) có mật độ khối lượng riêng bằng mật độ của hạt nhân. Biết rằng khối lượng của neutron  $m = 1,7 \cdot 10^{-24}$  g, còn bán kính  $r$  của nó giả thiết bằng  $1,3 \cdot 10^{-13}$  cm.

7.10. Năm của Trái Đất sẽ thay đổi thế nào nếu như khối lượng Trái Đất tăng lên và bằng khối lượng Mặt Trời, còn khoảng cách giữa chúng không đổi?

7.11. Tìm khoảng cách giữa hai ngôi sao trong một hệ sao đôi nếu tổng khối lượng  $M_1 + M_2$  của chúng bằng hai lần khối lượng Mặt Trời  $M_0$  và các sao quay theo quỹ đạo tròn, xung quanh khối tâm với chu kỳ  $T = 2T_0$ , trong đó  $T_0$  là thời gian một năm của Trái Đất. Khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời  $R_0 = 1,5 \cdot 10^8$  km.

7.12. Một hệ sao đôi gồm một sao là sao kiểu Mặt Trời có khối lượng  $M_1 = 2 \cdot 10^{33}$  g, còn sao kia là kiểu sao neutron bán kính  $R_N = 1,4$  km, quay với chu kỳ  $T = 5$  ngày. Xác định khoảng cách  $R$  giữa hai sao đó. Mật độ vật chất của sao neutron giả thiết bằng mật độ vật chất hạt nhân  $R_{hm} = 1,3 \cdot 10^{-13} A^{1/3}$  cm, trong đó  $A$  là khối lượng nguyên tử tương đối của vật chất cấu thành ngôi sao.

7.13. Khoảng cách nhỏ nhất giữa hai sao đang quay đối với nhau của một hệ sao đôi bằng  $r_1$ . Vận tốc tương đối của chúng tại vị trí này bằng  $v_1$ . Tổng khối lượng của sao đôi bằng  $M$ . Tính khoảng cách  $r_2$  giữa các sao và vận tốc tương đối  $v_2$  của chúng khi hai sao ở xa nhau nhất. Với giá trị nhỏ nhất nào của vận tốc tương đối  $v_1$  thì hệ sao đôi sẽ bị tan rã?

7.14. Chất điểm khối lượng  $m$  tương tác với một tâm cố định. Thế năng là

$$U = \frac{a}{r} + br. \text{ Ở thời điểm ban đầu, chất điểm nằm ở khoảng cách}$$

$$r_0 = 2\sqrt{\frac{b}{a}} \text{ tính từ tâm và không có vận tốc. Tìm:}$$

- 1) Khoảng cách nhỏ nhất  $r_{\min}$  mà chất điểm có thể tiến lại gần tâm;
- 2) Vị trí cân bằng bên của chất điểm;
- 3) Lực tác dụng lên chất điểm ở vị trí  $r_0$  và  $r_{\min}$ ;
- 4) Vận tốc vũ trụ cấp I khi chất điểm chuyển động quanh tâm.

**7.15.** Các dữ liệu thiên văn cho thấy, ngày trên Trái Đất sau mỗi năm dài ra một khoảng chừng  $\Delta T = 2 \cdot 10^{-5}$  s. Điều đó là do ma sát thủy triều trong hệ Trái Đất – Mặt Trăng. Hỏi khoảng cách trung bình giữa Trái Đất và Mặt Trăng sẽ thay đổi như thế nào mỗi năm vì nguyên nhân trên? Để đơn giản, giả thiết rằng trục Trái Đất vuông góc với mặt phẳng quỹ đạo của Mặt

Trăng. Coi Mặt Trăng là chất điểm có khối lượng  $M_{MT} = \frac{M_{TD}}{81}$ , khoảng cách trung bình giữa Trái Đất và Mặt Trăng bằng 60 lần bán kính Trái Đất

$R_{TD}$ , mômen quán tính của Trái Đất bằng  $\frac{M_{TD} R_{TD}^2}{3}$ .

**7.16.** Giả thiết rằng sau vụ nổ, một tiểu hành tinh chuyển động theo quỹ đạo tròn quanh Mặt Trời vỡ làm hai mảnh cùng khối lượng. Một mảnh sau khi nổ dừng lại, còn mảnh kia tiếp tục chuyển động. Mảnh đó sẽ chuyển động theo quỹ đạo nào: Elip, hyperbol hay parabol?

**7.17.** Trong điều kiện của bài tập 7.16, cả hai mảnh chuyển động theo hai hướng vuông góc với nhau với cùng vận tốc. Chúng sẽ chuyển động theo những quỹ đạo nào?

**7.18\*.** Một hành tinh quay quanh Mặt Trời theo quỹ đạo elip. Không cần tích phân các phương trình chuyển động, chỉ sử dụng các định luật bảo toàn năng lượng và mômen động lượng, tìm biểu thức tính độ dài trục lớn  $2a$  của elip này.

**7.19\*.** Sao chổi chuyển động quanh Mặt Trời theo một nhánh của hyperbol. Không cần tích phân các phương trình chuyển động, chỉ sử dụng các định luật bảo toàn năng lượng và mômen động lượng, tìm khoảng cách  $2a$  giữa các đỉnh của hai nhánh của hyperbol.

**7.20\*.** Chứng minh rằng nếu hành tinh chuyển động theo quỹ đạo elip, thì giá trị trung bình theo thời gian của năng lượng toàn phần và động năng liên hệ với nhau bởi hệ thức:  $\overline{K} = -\overline{E}$ .

**7.21.** Chứng minh rằng nếu hành tinh chuyển động theo quỹ đạo tròn, thì năng lượng toàn phần và động năng liên hệ với nhau bởi hệ thức:  $K = -E$ .

**7.22.** Phải truyền cho vệ tinh nhân tạo trên bề mặt Trái Đất một vận tốc là bao nhiêu để đưa nó lên quỹ đạo elip cách tâm Trái Đất: ở điểm cận địa

$r_1 = \frac{31R}{30}$ , ở điểm viễn địa  $r_2 = \frac{33R}{30}$  ( $R$  là bán kính Trái Đất)?

7.23. Một vệ tinh nhân tạo của Trái Đất được đưa lên quỹ đạo với khoảng cách lớn nhất từ bề mặt Trái Đất  $h_{\max} = 1300 \text{ km}$  và nhỏ nhất  $h_{\min} = 292 \text{ km}$ . Sau một khoảng thời gian, chu kỳ quay của vệ tinh giảm  $\Delta T = 3 \text{ phút}$ . Xác định độ tiêu hao năng lượng toàn phần ban đầu  $\frac{\Delta E}{E}$  của vệ tinh nhân tạo để chống lại lực ma sát tính đến thời điểm này? Bán kính Trái Đất  $R = 6370 \text{ km}$ .

7.24. Tính khối lượng Trái Đất khi sử dụng các thông số sau về quỹ đạo của vệ tinh nhân tạo Liên Xô "Cosmos - 380": Chu kỳ quay của vệ tinh (quy chiếu theo các ngôi sao)  $T = 102,2 \text{ phút}$ , khoảng cách đến bề mặt Trái Đất ở điểm cận địa là  $210 \text{ km}$ , ở điểm viễn địa là  $1548 \text{ km}$ . Coi Trái Đất là hình cầu có bán kính  $6371 \text{ km}$ .

7.25. Chu kỳ quay trung bình của con tàu vũ trụ Liên Xô "Phương Đông" chở I.U.A. Gagarin lần đầu tiên bay vòng quanh Trái Đất ngày 12/4/1961 là  $T_1 = 89,2 \text{ phút}$  trên chiều cao trung bình so với bề mặt Trái Đất  $h = 254 \text{ km}$ . Vệ tinh gần nhất của Hoả tinh - Fobos - quay quanh Hoả tinh với chu kỳ  $T_2 = 7 \text{ h } 39 \text{ phút}$  và cách tâm Hoả tinh trung bình là  $R_2 = 9350 \text{ km}$ . Xác định tỷ số khối lượng giữa Hoả tinh và Trái Đất  $\frac{M_2}{M_1}$ , nếu đường kính trung

bình của Trái Đất là  $R = 6370 \text{ km}$ .

7.26. Tìm bán kính quỹ đạo  $R$  của vệ tinh "địa tĩnh" (vệ tinh "địa tĩnh" là vệ tinh chuyển động theo quỹ đạo tròn quanh Trái Đất sao cho thời gian quay một vòng của nó là 24h). Vệ tinh "địa tĩnh" chuyển động trong mặt phẳng xích đạo theo chiều quay của Trái Đất sẽ đứng yên so với Trái Đất. Biểu diễn  $R$  theo bán kính Trái Đất  $R_0$ , vận tốc góc  $\omega$  của Trái Đất và gia tốc rơi tự do  $g$  tại bề mặt của nó.

7.27. Một vệ tinh nhân tạo quay quanh Trái Đất theo quỹ đạo elip với vận tốc  $v_1 = 8 \text{ km/s}$  ở điểm cận địa và  $v_2 = 7 \text{ km/s}$  ở điểm viễn địa. Xác định độ dài trục lớn  $2a$  của quỹ đạo vệ tinh. Bán kính Trái Đất  $R_{\text{TD}} = 6400 \text{ km}$ .

7.28. Một vệ tinh nhân tạo quay quanh Trái Đất theo quỹ đạo elip. Tại các điểm giao của elip với trục nhỏ, vận tốc vệ tinh  $v = 7,5 \text{ km/s}$ . Xác định độ dài  $2a$  của trục lớn elip.

7.29\*. Từ một điểm cao tưởng tượng nằm bên trên cực của Trái Đất, người ta bắn ra hai viên đạn có cùng vận tốc  $v_0$ . Vận tốc ban đầu của viên đạn thứ nhất có hướng sao cho viên đạn chuyển động theo hướng bán kính Trái Đất, vận tốc ban đầu của viên đạn thứ hai vuông góc với bán kính Trái Đất và nó chuyển động theo quỹ đạo elip. Viên đạn nào sẽ bay được xa hơn? Tìm tỷ số



$\frac{R_1}{R_2}$  giữa hai quãng đường xa nhất có thể đi được của hai viên đạn kể từ tâm

Trái Đất. Vận tốc  $v_0 > \sqrt{gR_0} = v_{tr}$ , trong đó  $v_{tr}$  là vận tốc chuyển động của vệ tinh Trái Đất theo quỹ đạo tròn (lý thuyết) với bán kính Trái Đất là  $R_0$ . Bỏ qua sức cản của không khí đối với chuyển động của các viên đạn và giả định rằng viên đạn chỉ chịu tác dụng của trường hấp dẫn Trái Đất.

7.30. Từ một sân bay trên xích đạo, người ta phóng lên hai vệ tinh theo quỹ đạo elip: vệ tinh thứ nhất theo hướng quay của Trái Đất, vệ tinh thứ hai theo hướng ngược lại. Vệ tinh nào bay xa tâm Trái Đất hơn ( $R_1$  hay  $R_2$ ), nếu biết rằng vận tốc ban đầu theo phương ngang so với Trái Đất của hai vệ tinh là như nhau và bằng  $v_0 = 10 \text{ km/s}$ ? Biểu diễn các khoảng cách  $R_1$  và  $R_2$  theo bán kính Trái Đất  $R_0$ .

7.31. Từ cực Bắc và cực Nam của Trái Đất đồng thời phóng hai tên lửa với cùng vận tốc ban đầu  $v_0 = 10 \text{ km/s}$  theo phương ngang, hướng ngược nhau. Khi đó, quỹ đạo elip của chúng nằm trên cùng một mặt phẳng. Tính khoảng cách xa nhất giữa hai tên lửa.

7.32\*. Tàu vũ trụ chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo elip. Ở vị trí nào và phải thay đổi hướng vận tốc của tàu vũ trụ một góc bao nhiêu (không thay đổi độ lớn) để nó chuyển động theo quỹ đạo tròn?

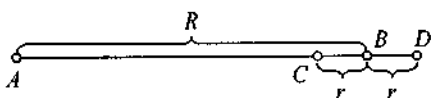
7.33. Tàu vũ trụ chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo elip. Ở điểm giao của elip với trục nhỏ, người ta bật động cơ. Cần phải thay đổi vận tốc của tàu như thế nào để nó chuyển động theo quỹ đạo parabol?

7.34. Khoảng cách lớn nhất từ sao chổi Halley đến Mặt Trời  $h = 35,4$  đơn vị thiên văn, khoảng cách nhỏ nhất  $l = 0,59$  đơn vị thiên văn (đơn vị thiên văn tính bằng khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời). Vận tốc dài của sao chổi  $v_1 = 0,91 \text{ km/s}$  ở điểm xa nhất so với Mặt Trời (điểm viễn nhật). Vận tốc dài của sao chổi  $v_2$  ở điểm gần Mặt Trời nhất (điểm cận nhật) bằng bao nhiêu?

7.35. Năm 1978 người ta phát hiện ra vệ tinh Haron của Diêm vương tinh. Diêm vương tinh và Charon quay quanh khối tâm chung theo quỹ đạo tròn, khoảng cách giữa chúng là  $R = 19640 \text{ km}$ , chu kỳ quay  $T = 6,4$  ngày. Hỏi tổng khối lượng của Diêm vương tinh – Charon bằng bao nhiêu lần khối lượng Trái Đất? Bán kính Trái Đất là  $R = 6400 \text{ km}$  và gia tốc rơi tự do trên bề mặt Trái Đất coi như đã biết.

7.36\*. Bốn vật A, B, C, D (H. 123), có thể xem như chất điểm quay quanh một tâm nào đó và luôn nằm trên một đường thẳng, đồng thời khoảng cách

giữa chúng không đổi. Giữa các vật có tác dụng lực hấp dẫn theo định luật vạn vật hấp dẫn của Niuton. Vật  $C$  và  $D$  có khối lượng như nhau và rất nhỏ so với khối lượng của các vật  $A$  và  $B$ , còn khoảng cách  $r \ll R$ . Hỏi có những lực nào từ phía vật  $B$  tác dụng lên  $C$  và  $D$  để cho khoảng cách giữa các vật là không đổi?



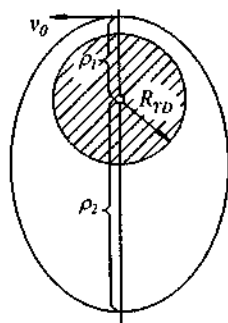
Hình 123

7.37. Tàu vũ trụ “Apôlo” quay quanh Mặt Trăng theo quỹ đạo elip với khoảng cách lớn nhất từ bề mặt Mặt Trăng (điểm viễn địa) 312km và nhỏ nhất (điểm cận địa) 112km. Cần phải thay đổi vận tốc tàu vũ trụ thế nào để đưa nó lên quỹ đạo tròn có chiều cao cách bề mặt Mặt Trăng là 112km, nếu chỉ bật động cơ một thời gian ngắn khi tàu ở điểm cận địa? (Bán kính trung bình Mặt Trăng  $R = 1738$  km, gia tốc rơi tự do trên bề mặt của nó là  $g = 162 \text{ cm/s}^2$ ).

7.38. Từ vệ tinh nhân tạo đang chuyển động theo quỹ đạo tròn với vận tốc  $v_0$ , người ta bắn theo hướng làm với phương chuyển động một góc  $120^\circ$ . Vận tốc viên đạn so với vệ tinh phải bằng bao nhiêu để viên đạn đi ra xa vô cực?

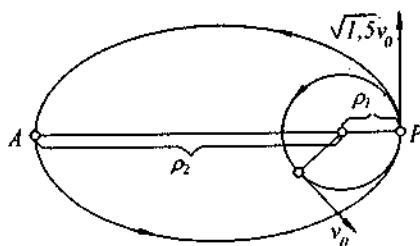
7.39. Vệ tinh nhân tạo của Trái Đất quay theo quỹ đạo tròn bán kính  $R$ , chu kỳ  $T_1$ . Ở một thời điểm nào đó, người ta bật động cơ phản lực trong một khoảng thời gian rất ngắn làm vận tốc vệ tinh tăng lên  $\alpha$  lần và vệ tinh bắt đầu chuyển động theo quỹ đạo elip. Động cơ tạo gia tốc cho vệ tinh theo hướng chuyển động trong suốt thời gian động cơ bật. Xác định khoảng cách lớn nhất giữa vệ tinh với tâm Trái Đất mà nó đạt được sau khi ngắt động cơ. Tìm chu kỳ quay  $T_2$  của vệ tinh theo quỹ đạo elip mới.

7.40\*. Một vệ tinh được đưa lên bằng “tên lửa mang” theo phương thẳng đứng đến điểm cao nhất  $R = 1,25R_{\text{TD}}$  ( $R_{\text{TD}}$  là bán kính Trái Đất) tính từ tâm Trái Đất. Ở điểm cao nhất tên lửa truyền cho vệ tinh nhân tạo một vận tốc ngang bằng vận tốc vũ trụ cấp I:  $v_0 = v_1$  và đưa nó vào quỹ đạo elip (H. 124). Xác định khoảng cách lớn nhất và nhỏ nhất của vệ tinh tới tâm Trái Đất.



Hình 124

7.41\*. Một vệ tinh nhẹ của Trái Đất quay theo quỹ đạo tròn với vận tốc dài  $v_0$ . Bộ phận tên lửa làm tăng giá trị tuyệt đối của vận tốc này lên  $\sqrt{1,5}$  lần và vệ tinh chuyển sang quỹ đạo elip (H. 125). Vệ tinh đi qua điểm xa nhất  $A$  của quỹ đạo,



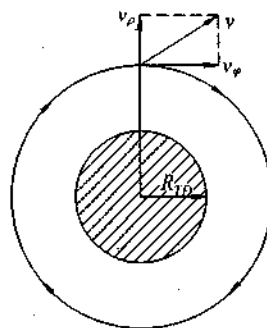
Hình 125

tính từ tâm Trái Đất (điểm viễn địa) với vận tốc bằng bao nhiêu? Bỏ qua sức cản của khí quyển.

7.42\*. Vệ tinh Trái Đất quay theo quỹ đạo tròn bán kính  $R \approx R_{TD}$  (vệ tinh thấp) chuyển sang quỹ đạo elip với trục lớn  $2a = 4R_{TD}$  ( $R_{TD}$  là bán kính Trái Đất). Chu kỳ quay của vệ tinh sẽ tăng lên bao nhiêu lần? Bỏ qua sức cản của khí quyển.

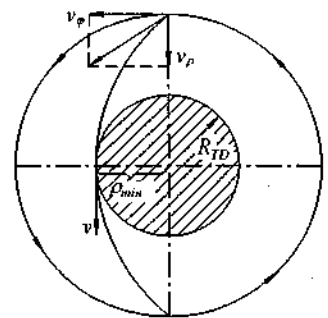
7.43\*. Một vệ tinh đang quay theo quỹ đạo tròn bán kính  $R = \frac{3R_{TD}}{2}$  ( $R_{TD}$  là bán kính Trái Đất) thì nhận được một động lượng theo hướng bán kính, động lượng này cho nó một vận tốc bổ sung là  $v_p$  hướng từ tâm Trái Đất theo bán kính (H.126).

Giá trị nhỏ nhất của vận tốc bổ sung bằng bao nhiêu để vệ tinh ra khỏi trường hấp dẫn của Trái Đất?



Hình 126

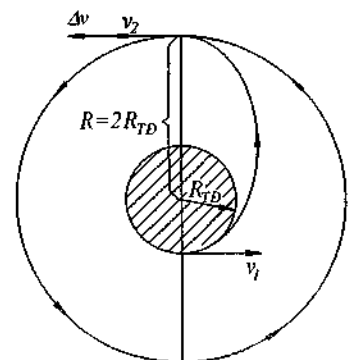
7.44\*. Một vệ tinh đang chuyển động theo quỹ đạo tròn bán kính  $R = 2R_{TD}$  ( $R_{TD}$  là bán kính Trái Đất), thì nhận được một động lượng



Hình 127

theo hướng bán kính, động lượng này cho nó một vận tốc bổ sung là  $v_p$  hướng vào tâm Trái Đất và bằng vận tốc  $v_0$  trên quỹ đạo tròn (H. 127). Hỏi khoảng cách nhỏ nhất  $\rho_{min}$  từ vệ tinh đến tâm Trái Đất là bao nhiêu và vận tốc  $v$  của nó tại điểm này bằng bao nhiêu? Bỏ qua sức cản khí quyển.

7.45\*. Vệ tinh được phóng lên quỹ đạo tròn theo hai giai đoạn: thoát đầu từ bề mặt Trái Đất nó được truyền theo một vận tốc ngang và đưa lên quỹ đạo elip có điểm cận địa trùng với điểm phóng (H. 128), còn điểm viễn địa trùng với điểm trên quỹ đạo tròn. Ở điểm viễn địa, bộ phận tên lửa làm tăng vận tốc vệ tinh và đưa nó vào quỹ đạo tròn. Hỏi vận tốc phóng ban đầu  $v_1$  và độ gia tăng vận tốc  $\Delta v$  ở điểm viễn địa bằng bao nhiêu để đưa vệ tinh vào quỹ đạo tròn có bán kính  $R = 2R_{TD}$  ( $R_{TD}$  là bán kính Trái Đất)? Bỏ qua sức cản khí quyển.



Hình 128

7.46. Một trạm quỹ đạo cùng với con tàu vũ trụ chuyển động theo quỹ đạo tròn sát Mặt Trăng, bán kính quỹ đạo bằng hai lần bán kính Mặt Trăng. Tàu rời khỏi trạm theo hướng chuyển động của nó với vận tốc tương đối bằng nửa vận tốc ban đầu của trạm quỹ đạo. Hỏi tỷ lệ giữa khối lượng tàu vũ trụ và trạm  $\frac{m_t}{m_{tr}}$  bằng bao nhiêu để trạm không rơi xuống Mặt Trăng?

7.47. Từ một vệ tinh đang chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo tròn bán kính  $R_0$ , người ta bắn một hộp theo hướng tới tâm Trái Đất. Cần phải truyền cho hộp vận tốc tối thiểu  $v_{\min}$  theo hướng tới tâm Trái Đất bằng bao nhiêu để nó khi chuyển động sang quỹ đạo elip thì sẽ tiếp xúc với Trái Đất? Bán kính Trái Đất là  $R_{TD}$ , bỏ qua sức cản khí quyển.

7.48. Một trạm vũ trụ chuyển động quanh Mặt Trăng, theo quỹ đạo elip với khoảng cách nhỏ nhất và lớn nhất đến bề mặt Mặt Trăng tương ứng là  $2R$  và  $4R$ , trong đó  $R$  là bán kính Mặt Trăng. Khi trạm vũ trụ nằm ở điểm gần Mặt Trăng nhất, người ta phóng tên lửa theo hướng tiếp tuyến với quỹ đạo của trạm. Xác định giới hạn có thể thay đổi của vận tốc phóng tương đối  $u$  của tên lửa so với trạm để trạm tiếp tục tồn tại (tức là không rơi xuống Mặt Trăng hoặc bay ra xa vô tận). Khối lượng trạm vũ trụ lớn gấp ba lần khối lượng tên lửa, gia tốc rơi tự do trên bề mặt Mặt Trăng là  $g$ .

7.49. Một tên lửa khối lượng  $m = 10$  tấn chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo elip. Khoảng cách từ tên lửa đến tâm Trái Đất ở điểm viễn địa  $r_1 = 11000$  km, còn ở điểm cận địa  $r_2 = 6600$  km. Tại điểm viễn địa, tên lửa bị nổ và vỡ làm hai mảnh có khối lượng là  $m_1$  và  $m_2$ . Mảnh khối lượng  $m_2$  rơi thẳng đứng xuống Trái Đất, còn mảnh khối lượng  $m_1$  chuyển sang quỹ đạo tròn. Tìm các giá trị  $m_1$  và  $m_2$ . Bỏ qua khối lượng khí sinh ra trong quá trình nổ.

7.50. Từ một trạm vũ trụ đang quay quanh Trái Đất theo quỹ đạo elip, tại điểm giao của quỹ đạo với trục nhỏ người ta phóng một tên lửa. Cần phải truyền cho tên lửa một vận tốc bổ sung nhỏ nhất  $v_{\min}$  bằng bao nhiêu để quỹ đạo chuyển động của nó là parabol? Trục lớn quỹ đạo của trạm vũ trụ là  $2,5 \cdot 10^4$  km.

7.51. Sao chổi Brux thuộc họ Mộc tinh, tức là khoảng cách lớn nhất đến Mặt Trời bằng bán kính quỹ đạo Mộc tinh. Khoảng cách nhỏ nhất từ sao chổi đến Mặt Trời bằng bán kính quỹ đạo tròn của tiểu hành tinh Vengri. Biết rằng, chu kỳ quay quanh Mặt Trời của sao chổi Brux  $T = 6,8$  năm và của Mộc tinh  $T_1 = 11,86$  năm, xác định chu kỳ quay  $T_2$  của Vengri?

**7.52.** Trong giai đoạn đầu của chuyến bay, tàu vũ trụ “VEGA” bay vào vùng lân cận của Kim tinh. Ra khỏi trường hấp dẫn của Trái Đất, nó chuyển động theo quỹ đạo elip với điểm viễn nhật nằm trên quỹ đạo Trái Đất và điểm cận nhật nằm trên quỹ đạo Kim tinh. Tính vận tốc tương đối của con tàu so với Kim tinh khi nó bay vào vùng lân cận Kim tinh. Biết rằng vận tốc quỹ đạo của Trái Đất  $V_0 = 29,8 \text{ km/s}$  và tỷ số bán kính quỹ đạo Kim tinh và Trái Đất là  $k = 0,723$ . Cả hai quỹ đạo đều coi như tròn.

**7.53.** Tàu vũ trụ thực hiện chuyến bay từ Trái Đất đến Hoả tinh theo quỹ đạo tối ưu – quỹ đạo elip tiếp xúc với quỹ đạo Trái Đất và Hoả tinh (quỹ đạo các hành tinh được coi là tròn). Tìm vận tốc tương đối của tàu và Hoả tinh khi chúng đến gần nhau. Bỏ qua lực hấp dẫn giữa Trái Đất và Hoả tinh, chỉ tính lực hấp dẫn của Mặt Trời. Vận tốc Trái Đất trên quỹ đạo là  $V_0 = 29,8 \text{ km/s}$ , bán kính quỹ đạo Hoả tinh lớn hơn bán kính quỹ đạo Trái Đất  $k = 1,524$  lần.

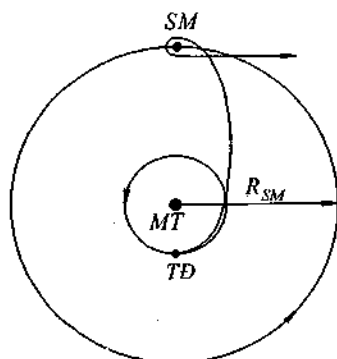
**7.54.** Một thiên thạch lớn có khối lượng  $m = 10^6$  tấn, bay hướng vào tâm Trái Đất. Để tránh thảm họa, người ta bắn một tên lửa mang bom khinh khí trúng vào thiên thạch theo phương pháp tuyến với quỹ đạo và nổ. Giả thiết khi bom nổ, một phần của thiên thạch có khối lượng bằng  $\alpha = 10^{-3}$  khối lượng thiên thạch bắn ra vuông góc với quỹ đạo và toàn bộ năng lượng bom chuyển thành động năng của vật chấn văng ra. Tính khoảng cách  $R_0$  từ Trái Đất đến điểm mà tên lửa phải gặp thiên thạch, để thiên thạch bay qua cách bề mặt Trái Đất một khoảng bằng bán kính Trái Đất  $R_{\text{TD}} = 6400 \text{ km}$ . Vận tốc của thiên thạch ở vô cùng bằng không, va chạm là xuyên tâm, đương lượng trotyl của bom khinh khí  $W = 10 \text{ Mt}$  (Megatone), năng lượng nổ 1 kg trotyl là 4,2 MJ.

**7.55.** Một vệ tinh chuyển động theo quỹ đạo tròn bán kính  $R$ . Để chuyển sang một quỹ đạo khác người ta truyền thêm cho nó một vận tốc, bằng giá trị tuyệt đối của vận tốc vệ tinh trên quỹ đạo bán kính  $R$  và có phương lệch  $60^\circ$  so với phương của vận tốc ban đầu. Xác định sự thay đổi vận tốc  $\Delta v$  ở khoảng cách  $2R$  cần truyền cho vệ tinh để nó chuyển động theo quỹ đạo tròn với bán kính  $2R$ . Cho khối lượng vệ tinh là  $M$ .

**7.56.** Hai vệ tinh A và B cách nhau 45km, chuyển động trên cùng một quỹ đạo tròn gần Trái Đất. Để ghép nối, các vệ tinh cần phải xích lại gần nhau trong khi vẫn tiếp tục bay theo quỹ đạo chung. Hỏi cần phải bật động cơ của vệ tinh B bay phía sau trong thời gian ngắn theo một trình tự đơn giản nhất nào để nó đuổi kịp vệ tinh kia. Biết rằng các động cơ hướng theo phương tiếp tuyến với quỹ đạo và mỗi lần bật động cơ vận tốc vệ tinh B tăng thêm một lượng  $\Delta v$  không vượt quá 8km/h.

**7.57.** Một tàu vũ trụ được bắn lên theo quỹ đạo tiếp tuyến với quỹ đạo Trái Đất và quỹ đạo Mộc tinh. Khi bay đến điểm nằm trên quỹ đạo Mộc tinh, nó

bay một vòng quanh Mộc tinh theo quỹ đạo tròn giống như vệ tinh của hành tinh này và sau đó bay đi xa (H. 129). Xác định khoảng cách lớn nhất từ Mặt Trời mà tàu có thể bay xa được. Coi Mộc tinh là chất điểm, bán kính quỹ đạo Trái Đất  $R_{TD} = 150 \cdot 10^6$  km. Bán kính quỹ đạo Mộc tinh lớn hơn 5 lần bán kính quỹ đạo Trái Đất.



Hình 129

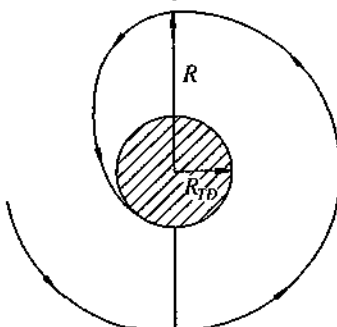
7.58. Một hành tinh quay quanh một ngôi sao theo quỹ đạo tròn, bán kính của quỹ đạo lớn hơn kích thước của sao. Chu kỳ quay là  $T$ . Xác định thời gian rơi tự do của một vật xuống ngôi sao từ độ cao bằng bán kính quỹ đạo. Tính thời gian này đối với hệ Trái Đất – Mặt Trời.

7.59. Hai mảnh nhỏ cùng khối lượng chuyển động tương đối với nhau theo quỹ đạo tròn với chu kỳ  $T$  dưới tác dụng lực hấp dẫn. Tại một thời điểm nào đó, chuyển động đột ngột dừng lại và các mảnh bắt đầu rơi về phía nhau. Tính thời gian cho đến khi chúng va chạm nhau.

7.60. Xác định vận tốc cần bổ sung tức thời  $\Delta v$  cho một vệ tinh của Trái Đất đang quay ở quỹ đạo rất cao để nó đến được Hoả tinh. Coi quỹ đạo của Trái Đất và của Hoả tinh là tròn, đường kính quỹ đạo Trái Đất bằng  $3 \cdot 10^8$  km, đường kính quỹ đạo Hoả tinh lớn hơn đường kính quỹ đạo Trái Đất 1,52 lần.

7.61. Một vệ tinh bay theo quỹ đạo tròn ở độ cao  $H = 100$  km cách bề mặt một hành tinh. Hỏi khối lượng riêng  $\rho$  của khí quyển hành tinh trên quỹ đạo đó bằng bao nhiêu để sau thời gian bay một vòng, độ cao quỹ đạo giảm đi 0,1%? Bán kính hành tinh  $R_0 = 10^4$  km, bán kính vệ tinh  $r = 1,5$  m, khối lượng vệ tinh  $m = 2$  tấn. Va chạm của các phân tử khí vào vệ tinh coi như không đàn hồi.

7.62\*. Một vệ tinh nhẹ đang quay theo quỹ đạo tròn bán kính  $R = 2R_{TD}$  ( $R_{TD}$  là bán kính Trái Đất), chuyển sang quỹ đạo hạ cánh elip, tiếp xúc với bề mặt Trái Đất tại điểm nằm trên đường kính đối ngược với điểm bắt đầu hạ (H. 130). Tính thời gian vệ tinh hạ cánh theo quỹ đạo elip. Bỏ qua lực cản của không khí.



Hình 130

7.63. Trên một vệ tinh đang chuyển động theo quỹ đạo tròn ở độ cao cách bề mặt Trái Đất 0,04 bán kính Trái Đất, người ta bật động cơ hãm. Vận tốc vệ tinh giảm nhưng không thay đổi hướng. Tính độ giảm vận tốc nhỏ nhất để vệ tinh chuyển sang quỹ đạo elip và hạ xuống Trái Đất. Bỏ

qua sức cản của không khí. Thời gian làm việc của động cơ giả thiết là rất nhỏ so với chu kỳ quay của vệ tinh quanh Trái Đất.

7.64. Một tàu vũ trụ chuyển động quanh Trái Đất trên quỹ đạo tròn ở độ cao cách bề mặt Trái Đất là 500km. Để bay vào các tầng khí quyển dày đặc, tàu phải chuyển sang quỹ đạo elip với khoảng cách nhỏ nhất là 150km. Tính lượng nhiên liệu  $\Delta M$  cần phải tiêu hao để hãm tàu, nếu coi vận tốc khí thoát ra từ ống phụt đối với tàu là 2000 m/s? Để điều khiển quá trình chuyển quỹ đạo người ta bật động cơ trong một thời gian ngắn; khối lượng ban đầu của tàu là 5 tấn. Coi khí thoát ra từ động cơ hãm hướng theo chiều chuyển động của tàu vũ trụ.

7.65. Xác định vận tốc ban đầu của các thiên thạch  $v_\infty$ , nếu khoảng ngắm lớn nhất khi chúng đang rơi xuống Trái Đất bằng  $l$  ( $l > R$ ,  $R$  là bán kính Trái Đất). Tính  $v_\infty$  khi  $l = 2R$ . (Khoảng ngắm là chiều dài đoạn thẳng hạ vuông góc từ tâm Trái Đất đến hướng ban đầu của tiếp tuyến với quỹ đạo thiên thạch, khi nó ở vô cực).

7.66. Một tàu vũ trụ tiến đến gần Mặt Trăng theo quỹ đạo parabol gần như tiếp xúc với bề mặt Mặt Trăng. Để chuyển sang quỹ đạo tròn sát Mặt Trăng, ở thời điểm gần Mặt Trăng nhất người ta mở động cơ hãm, khí được phun ra với vận tốc  $u = 4$  km/s so với tàu theo hướng chuyển động của tàu. Khối lượng nhiên liệu cháy dùng cho việc hãm chiếm một phần bao nhiêu so với tổng khối lượng của hệ? Bán kính trung bình Mặt Trăng  $R = 1738$  km, gia tốc rơi tự do trên bề mặt Mặt Trăng  $g = 162 \text{ cm/s}^2$ .

7.67. Trái Đất va vào đầu của một sao chổi được tạo bởi một đám thiên thạch đường kính 50 000km. Phần nào của đám thiên thạch rơi xuống Trái Đất nếu vận tốc tương đối giữa Trái Đất và sao chổi là 2,8 km/s. Bán kính Trái Đất bằng 6400km.

7.68. Từ sâu thăm vũ trụ, một đám thiên thạch chuyển động hướng về phía một thiên thể cô lập, có khối lượng và kích thước giống như Trái Đất, vận tốc của thiên thạch  $v = 5$  km/s so với thiên thể. Kích thước ngang của đám mây thiên thạch lớn hơn nhiều so với đường kính thiên thể, còn chiều dài của nó (theo chiều chuyển động)  $h = 1000$  km, mật độ trung bình của đám thiên thạch  $n = 0,1 \text{ km}^{-3}$ , tâm của nó chuyển động theo hướng tới của tâm thiên thể. Tính số thiên thạch rơi vào thiên thể.

7.69. Một thiên thể hình cầu có khối lượng  $M$  và bán kính  $r$ , bằng khối lượng và bán kính Trái Đất. Khi chuyển động với vận tốc  $v_0 = 11,2$  km/s, thiên thể xuyên qua đám mây bụi vũ trụ có khối lượng riêng trung bình  $\rho = 10^{-4} \text{ kg/m}^3$  và độ dày theo dọc theo phương chuyển động  $h = 10^9$  m, thiên thể hút các hạt bụi mà nó gặp trên đường đi. Tìm độ gia tăng khối lượng của thiên thể khi nó đi qua đám mây.

7.70. Một vệ tinh có khối lượng  $m_0 = 1$  tấn, chuyển động theo quỹ đạo tròn ở độ cao  $h = 320$  km so với Trái Đất. Một vật khối lượng  $m = 10$  kg bay vuông góc với quỹ đạo của vệ tinh (theo hướng từ tâm Trái Đất), sau khi va chạm với vệ tinh, nó bị dính vào vệ tinh. Hỏi với vận tốc của vật bằng bao nhiêu thì vệ tinh sẽ rơi xuống Trái Đất?

7.71. Một vệ tinh có khối lượng  $m_0 = 1$  tấn, chuyển động theo quỹ đạo tròn ở độ cao  $h = 320$  km so với Trái Đất. Một vật chuyển động cùng trên quỹ đạo đó nhưng ngược chiều, sau khi va chạm nó bị dính vào vệ tinh. Hỏi khối lượng của vật tối thiểu phải bằng bao nhiêu để sau va chạm, vệ tinh rơi xuống Trái Đất?

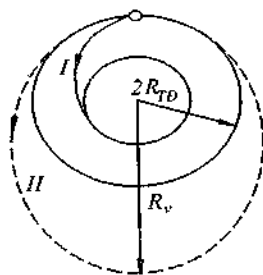
7.72. Một vệ tinh bay theo quỹ đạo tròn cách không xa bề mặt Trái Đất. Khối lượng vệ tinh  $M = 50$  kg. Một thiên thạch siêu nhỏ khối lượng  $m = 0,1$  g bay về phía tâm Trái Đất với vận tốc  $v = 80$  km/s đã va chạm và dính vào vệ tinh. Coi va chạm là xuyên tâm, tính hiệu khoảng cách  $R_{\max} - R_{\min}$  từ tâm Trái Đất đến điểm viễn địa và điểm cận địa của quỹ đạo mới của vệ tinh.

7.73. Một vệ tinh bay theo quỹ đạo tròn gần Trái Đất. Khối lượng vệ tinh  $M = 100$  kg. Một thiên thạch siêu nhỏ khối lượng  $m = 0,1$  g bay ngược chiều vệ tinh với vận tốc  $v = 80$  km/s, va chạm và dính vào vệ tinh. Xác định hiệu khoảng cách từ tâm Trái Đất đến điểm viễn địa và điểm cận địa của quỹ đạo mới của vệ tinh.

7.74. Vào thời điểm đưa vệ tinh nhân tạo của Trái Đất lên quỹ đạo tròn định trước, độ lớn vận tốc vệ tinh bị lệch 10% so với tính toán, nhưng hướng không thay đổi. Tính tỷ số bán trục nhỏ và bán trục lớn  $\frac{b}{a}$  của quỹ đạo elip thực tế.

7.75. Vào thời điểm đưa vệ tinh nhân tạo của Trái Đất lên quỹ đạo tròn định trước, hướng vận tốc bị lệch so với tính toán một góc  $\delta$ . Tính tỷ số bán trục nhỏ và bán trục lớn  $\frac{b}{a}$  của quỹ đạo elip thực tế.

7.76. Một vệ tinh chuyển động theo quỹ đạo tròn cách tâm Trái Đất  $2R_{\text{TB}}$ . Tại thời điểm nào đó, lò xo rập nối cực mạnh tách vệ tinh làm hai khoang như nhau. Một khoang rơi xuống đất, điểm viễn địa của quỹ đạo (I) của khoang này nằm tại điểm vệ tinh tách khoang, còn điểm cận địa nằm trên bề mặt Trái Đất (H. 131). Tính khoảng cách từ tâm Trái Đất đến điểm viễn địa của quỹ đạo (II) của khoang thứ hai.



Hình 131

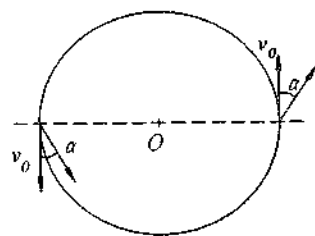


7.77. Xác định lượng nhiên liệu dự trữ tối thiểu cần thiết để tên lửa hạ cánh nhẹ nhàng xuống Mặt Trăng. Biết rằng động cơ hãm được bật lên trong thời gian  $\tau$  ở độ cao cách bề mặt Mặt Trăng rất nhỏ so với bán kính Mặt Trăng  $R_{MT}$ . Coi vận tốc ở vô cùng có giá trị nhỏ hơn nhiều so với vận tốc  $v_0$  ở độ cao bắt đầu hãm và vận tốc  $v_0$  của tên lửa có được chỉ do lực hút Mặt Trăng. Cho vận tốc khí phụt đối với tên lửa là  $u$ , khối lượng của tên lửa không có nhiên liệu là  $M_0$ .

7.78. Hai vật giống nhau bay theo quỹ đạo tròn quanh khối tâm chung, dưới tác dụng của lực hấp dẫn. Tại một thời điểm nào đó, các vectơ vận tốc của hai vật đột ngột quay trong mặt phẳng quỹ đạo về các phía khác nhau với cùng góc quay  $\alpha = 30^\circ$ , nhưng độ lớn vận tốc không đổi (H. 132). Tìm tỷ số

khoảng cách lớn nhất và nhỏ nhất  $\frac{l_{\max}}{l_{\min}}$  giữa

hai vật trong chuyển động tự do tiếp theo.



Hình 132

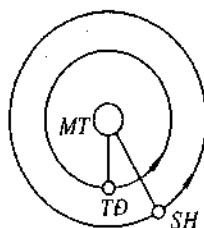
7.79. Tìm tỷ số khối lượng phóng  $\frac{m}{m_i}$  của các tên lửa mang thiết bị vũ trụ

đối với hai phương án bay tới vùng sát Mặt Trời. Trong cả hai trường hợp, ban đầu người ta phóng các tầng cuối của tên lửa lên quỹ đạo cao, tròn, xung quanh mặt trời. Sau đó, trong phương án thứ nhất người ta bật động cơ một lần và vận tốc tên lửa so với Mặt Trời giảm để nó đi đến gần Mặt Trời. Trong phương án thứ hai người ta bật động cơ hai lần, khi bật lần thứ nhất vận tốc đối với Mặt Trời tăng lên sao cho tên lửa ở điểm viễn nhật cách xa Mặt Trời 10 đơn vị thiên văn (tức là xa hơn Thổ tinh); khi bật động cơ lần hai (ở điểm viễn nhật của quỹ đạo mới) thì tên lửa bị hãm, sau đó nó cũng tới gần Mặt Trời. Tìm tỷ số giữa thời gian kéo dài của các phương án bay trên (đến thời điểm ở gần Mặt Trời). Để đơn giản, có thể bỏ qua kích thước hữu hạn của Mặt Trời, tức là coi Mặt Trời là một chất điểm và bỏ qua tác dụng của các hành tinh khác. Vận tốc phụt khí so với tên lửa bằng 3000m/s.

7.80. Trái Đất gần Mặt Trời nhất vào ngày 1/1, khi đó khoảng cách giữa chúng là  $R_1 = 147$  triệu km, còn ngày 1/7 khoảng cách là  $R_2 = 152$  triệu km. Góc lệch của trục Trái Đất so với mặt phẳng hoàng đạo  $\theta = 66,5^\circ$ . Hãy xác định hiệu độ dài  $\delta T$  của các ngày trên. Bỏ qua sự khác nhau giữa ngày đông chí và ngày hạ chí (ngày 22/12 và ngày 22/6).

7.81. Trong tiểu thuyết 'Aelita' của A.Tolstoi chuyến bay của tên lửa lên Hỏa tinh bắt đầu ở thời điểm khi Mặt Trời, Trái Đất và Hỏa tinh nằm trên

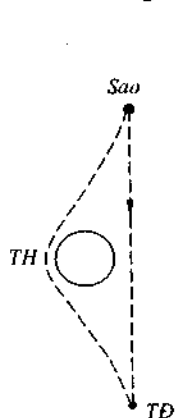
một đường thẳng. Thực tế cần phóng tên lửa từ Trái Đất góc tạo bởi với Trái Đất – Mặt Trời – Hoả tinh bằng bao nhiêu (H. 133) để tiêu hao nhiên liệu là nhỏ nhất khi động cơ làm việc trong thời gian ngắn? Coi quỹ đạo Trái Đất và Hoả tinh là tròn và nằm trên cùng một mặt phẳng, bỏ qua lực hấp dẫn giữa tên lửa và các hành tinh khi cất cánh. Chu kỳ quay Hoả tinh là 1,88 năm.



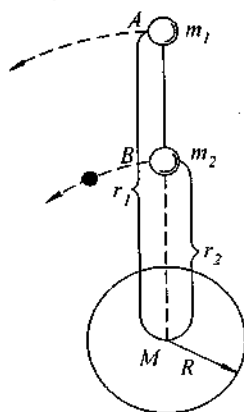
Hình 133

**7.82.** Góc tạo bởi Hoả tinh – Mặt Trời – Trái Đất (H. 133) cần phải bằng bao nhiêu, để tên lửa bay từ Hoả tinh xuống Trái Đất có lợi về năng lượng nhất khi động cơ làm việc trong thời gian ngắn? Để đơn giản trong tính toán, coi quỹ đạo Trái Đất và Hoả tinh là tròn và nằm trên cùng một mặt phẳng, bỏ qua lực hấp dẫn giữa tên lửa và các hành tinh khi bay. Bán kính quỹ đạo Hoả tinh bằng 1,5 đơn vị thiên văn (1 đơn vị thiên văn bằng  $1,496 \cdot 10^{11}$  m).

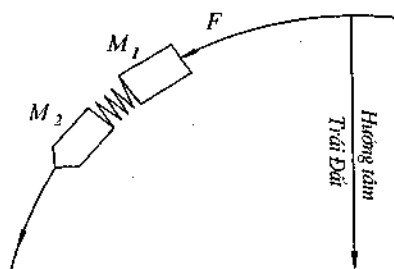
**7.83.** Năm 1979, khi phát hiện được hai quasar “sinh đôi” với các đặc trưng phổ tuyệt đối giống nhau, người ta cho rằng đó là sao và ảnh của nó – ảnh ảo được tạo bởi một Thiên hà xa xôi nằm giữa sao và Trái Đất (H. 134). Khoảng cách góc giữa các quasar “sinh đôi” bằng  $6''$ . Với chú ý rằng độ lệch tia sáng gần Mặt Trời bằng  $1,75''$ , xác định khối lượng của Thiên hà theo đơn vị khối lượng Mặt Trời (bằng bao nhiêu lần khối lượng Mặt Trời?). Giả thiết bán kính Thiên hà bằng  $2 \cdot 10^5$  năm ánh sáng, bán kính Mặt Trời  $7 \cdot 10^5$  km.



Hình 134



Hình 135



Hình 136

**7.85.** Một tàu vũ trụ xuyên hành tinh gồm hai khoang nhỏ A và B có khối lượng tương ứng là  $m_1$  và  $m_2$ . Các khoang được nối với nhau bằng một

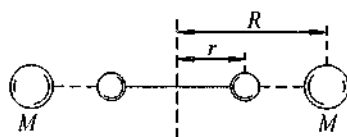
hành lang dài, nhẹ và cứng. Tàu chuyển động theo quỹ đạo tròn, quanh một hành tinh nhỏ khối lượng  $M$  và bán kính  $R$  sao cho đường thẳng  $AB$  luôn đi qua tâm hành tinh (H.135). Bán kính quỹ đạo khoang  $A$  và  $B$  tương ứng bằng  $r_1 = 4R$  và  $r_2 = 2R$ . Tại một thời điểm nào đó, các khoang bị tách ra khỏi hành lang nối. Tìm khoảng cách tách rời xa nhất của hai khoang  $A$  và  $B$  so với bề mặt hành tinh nhỏ khi chúng chuyển động độc lập. Coi  $m_1 = m_2 \ll M$ .

7.86. Một vệ tinh của Trái Đất gồm hai phần có khối lượng  $M_1$  và  $M_2$ , được nối với nhau bằng một kết cấu đàn hồi có độ dài  $x_0$ , hệ số đàn hồi  $k$  (H. 136). Để chuyển sang quỹ đạo mới, người ta bật động cơ với lực đẩy không đổi  $F$  tác dụng vào phần  $M_1$ , kết quả là xuất hiện dao động của hệ. Vào thời điểm nào và cần thay đổi lực đẩy như thế nào để khử các dao động đó? Khi đó, khoảng cách giữa  $M_1$  và  $M_2$  thay đổi như thế nào?

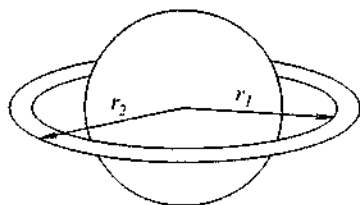
7.87. Trạm quỹ đạo quay quanh một hành tinh với chu kỳ  $T_0 = 1,5h$ , trạm gồm hai khoang giống nhau, được nối với nhau bằng một đoạn cáp chiều dài 100m. Tìm vị trí cân bằng của hệ so với đường thẳng đi qua bán kính hành tinh và chu kỳ dao động quanh vị trí đó.

7.88. Xác định lực tác dụng lên đoạn dây cáp có độ dài  $l = 100$  m trên đó có nhà du hành vũ trụ khi ở xa Trái Đất nhất. Vệ tinh chuyển động theo quỹ đạo tròn cách tâm Trái Đất  $2R_{\text{TD}}$ . Khối lượng nhà du hành vũ trụ  $m = 100$  kg, nhỏ hơn khối lượng vệ tinh nhiều lần, bán kính Trái Đất  $R_{\text{TD}} = 6400$  km.

7.89. Hai viên bi nhỏ được gắn vào hai đầu của một thanh nan hoa nhẹ chiều dài  $2r = 10$  cm. Nan hoa được treo bằng một sợi dây không đàn hồi ở giữa và có thể quay tự do trong mặt phẳng ngang. Nan hoa nằm giữa hai quả cầu cố định, khối lượng mỗi quả  $M = 1$  kg (H. 137). Khoảng cách giữa tâm hai quả cầu  $2R = 20$  cm. Tìm chu kỳ dao động nhỏ của nan hoa. Hằng số hấp dẫn  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$ .



Hình 137



Hình 138

7.90. Theo một trong các thuyết về sự hình thành vệ tinh của các hành tinh, chúng có thể được tạo thành từ vật chất, đầu tiên được tập trung trong các vành, quay xung quanh hành tinh (H. 138).

Giả sử vành bụi dưới dạng đĩa mỏng có bán kính ngoài  $r_2$  và bán kính trong  $r_1$ , có cùng mật độ trung bình, biến đổi thành một vệ tinh nhỏ, có thể bỏ qua chuyển động quay riêng. Tìm bán kính  $R$  của quỹ đạo tròn của vệ tinh.

**7.91.** Hai sao quay theo các quỹ đạo tròn quanh khối tâm chung, dưới tác dụng của lực hấp dẫn. Khối lượng các sao tương ứng bằng  $M_{10} = \frac{M_0}{2}$  và

$M_{20} = M_0$ . Sự phun vật chất trên một trong hai sao dẫn đến hình thành “nhánh” giữa chúng và vật chất di chuyển theo nhánh đó. Xác định sự thay đổi tương đối của chu kỳ quay  $\frac{\Delta T}{T}$  của sao đôi và của khoảng cách  $\frac{\Delta a}{a}$

giữa chúng, nếu khối lượng sao giảm một lượng  $\Delta m = 10^{-2} M_0$ . Vật chất sẽ di chuyển từ sao nào, nếu khoảng cách giữa chúng tăng lên? Vì mật độ vật chất tập trung chủ yếu ở tâm của chúng nên mômen quán tính của các sao là nhỏ, và có thể bỏ qua chuyển động quay riêng của chúng.

**7.92.** Bốn chất điểm khối lượng  $M$  được phân bố ở bốn đỉnh của một hình vuông. Tại thời điểm ban đầu, vận tốc của tất cả các chất điểm bằng nhau về độ lớn và hướng theo phương tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp hình vuông bán kính  $R$ . Các chất điểm chuyển động dưới tác dụng của lực hấp dẫn giữa chúng. Biết rằng, trong quá trình chuyển động đó, khoảng cách nhỏ nhất từ tâm đường tròn đến một trong các chất điểm bằng  $r$ . Mô tả chuyển động của các chất điểm và tìm các thông số của chuyển động đó.

**7.93.** Một quả cầu nhỏ khối lượng  $m$ , có vận tốc ở vô cùng bằng  $v_0$ , bay xuyên qua quả cầu khối lượng  $M$  và bán kính  $R$ , trong đó có khoan sẵn một kênh dọc theo đường kính và trùng với hướng chuyển động quả cầu nhỏ. Chú ý đến lực hấp dẫn giữa các quả cầu, hãy xác định vận tốc tương đối của chúng tại thời điểm khi quả cầu nhỏ bay qua tâm quả cầu lớn. Coi vận tốc ban đầu của quả cầu lớn bằng không.

**7.94.** Quan sát sự bùng sáng của một sao siêu mới vào năm 1987 người ta thấy nó giống như quá trình hình thành một hạt nhân có số khối lượng  $A_s = 10^{57}$  (sao neutron) từ các nguyên tử nhỏ, tính năng lượng hấp dẫn  $W_T$  được giải phóng. Lấy bán kính hạt nhân  $R = 1,3 \cdot 10^{-13} A^{1/3}$  cm.

**7.95\*.** Bỏ qua sức cản của khí quyển, tìm công tối thiểu cần tiêu hao để đưa khối lượng 1 kg từ Trái Đất lên Mặt Trăng. Bán kính Trái Đất là 6400 km, bán kính Mặt Trăng là 1740 km; gia tốc rơi tự do trên Mặt Trăng gây ra bởi lực hút riêng của nó bằng  $g_{MT} = 0,16 g_{TD}$ , trong đó  $g_{TD} = 9,8 \text{ m/s}^2$  là gia tốc rơi tự do trên bề mặt Trái Đất. Bỏ qua ảnh hưởng của Mặt Trời và của các hành tinh khác.

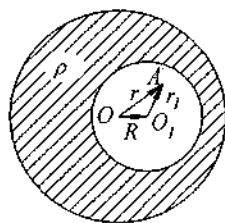
**7.96\*.** Tính gần đúng vận tốc vũ trụ cấp III, giả thiết rằng tên lửa vượt ra khỏi vùng tác dụng của trường hấp dẫn của Trái Đất dưới một góc  $\theta$  so với hướng của quỹ đạo chuyển động của Trái Đất quanh Mặt Trời. Coi như ngoài Trái Đất và Mặt Trời, tên lửa không chịu tác động của bất kỳ vật nào khác. (Vận tốc vũ trụ cấp III là vận tốc tối thiểu so với Trái Đất cần truyền cho tên lửa để nó vĩnh viễn thoát ra khỏi giới hạn của hệ Mặt Trời (đi xa ra vô cực).

**7.97\*.** Tính gần đúng vận tốc vũ trụ cấp IV, là vận tốc tối thiểu truyền cho tên lửa ở bề mặt Trái Đất để nó có thể bay tới một điểm cho trước trên Mặt Trời. Bán kính góc trung bình của Mặt Trời  $\alpha = 4,65 \cdot 10^{-3}$  rad. Giả sử Trái Đất chuyển động xung quanh Mặt Trời theo quỹ đạo tròn với vận tốc  $v = 29,8$  km/s. Tính vận tốc vũ trụ cấp IV trong trường hợp riêng, khi tên lửa rơi xuống Mặt Trời theo hướng bán kính (tức là đường kéo dài của quỹ đạo đi qua tâm Mặt Trời).

**7.98.** Tìm một điểm nằm trên đường thẳng nối Trái Đất và Mặt Trăng, mà tại đó cường độ tổng hợp  $g$  của trường hấp dẫn gây bởi Mặt Trời và Mặt Trăng bằng 0. Biết khối lượng Trái Đất xấp xỉ bằng 81 lần khối lượng Mặt Trăng, khoảng cách trung bình giữa chúng là 384000 km.

**7.99\*.** Tính năng lượng hấp dẫn  $U$  của một quả cầu đồng chất khối lượng riêng  $\rho$ , bán kính  $R$ .

**7.100\*.** Trong quả cầu đặc đồng chất với khối lượng riêng  $\rho$  người ta khoét một hốc hình cầu có tâm  $O_1$  lệch so với tâm quả cầu  $O$  (H. 139). Tìm trường hấp dẫn trong hốc đó.



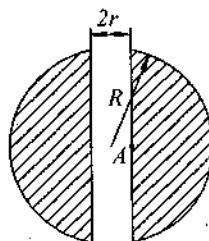
Hình 139

**7.101.** Giả sử có một giếng hẹp xuyên từ bề mặt đến tâm Trái Đất và một vật từ vô cùng rơi vào giếng và tới tâm Trái Đất. Vận tốc của vật ở tâm Trái Đất là bao nhiêu nếu coi Trái Đất là khối cầu đồng chất?

**7.102.** Hai vật nặng giống nhau, nối với nhau bằng lò xo, rơi vào đường hầm thẳng, đi xuyên qua tâm nối liền hai điểm đối diện của Trái Đất. Khi đó lò xo bị nén nhẹ. Hỏi cần đo chiều dài lò xo với độ chính xác tương đối nào để phát hiện được độ nén ấy? Biết rằng, tỷ số chu kỳ dao động của các vật so với tâm Trái Đất  $T_{TD}$  và chu kỳ dao động tương đối của chúng  $T$  bằng  $10^3$ . Coi Trái Đất là một khối cầu đồng chất không quay.

**7.103.** Giả sử có một cái giếng xuyên qua Trái Đất theo đường kính của nó. Tìm quy luật chuyển động của một vật rơi vào giếng này, có tính đến sự thay đổi gia tốc rơi tự do trong lòng Trái Đất. Bỏ qua ma sát với thành giếng và sức cản của không khí.

**7.104.** Người ta đục một lỗ bán kính  $r$  xuyên qua tâm một quả cầu bán kính  $R$  có khối lượng riêng  $\rho$  (H. 140). Tìm cường độ trọng trường tại điểm  $A$  trên hình vẽ, nếu  $r \ll R$ .



Hình 140

**7.105.** Bên trong một quả cầu cố định bán kính  $R$  với mật độ vật chất đồng nhất có một lỗ hình cầu. Khoảng cách giữa tâm cầu và tâm lỗ là  $a$ . Tính chu kỳ dao động nhỏ của con lắc toán học trong lỗ, nếu chu kỳ dao động của con lắc đó trên bề mặt quả cầu khi không có lỗ là  $T_0$ . Chiều dài con lắc nhỏ hơn nhiều so với bán kính quả cầu.

**7.106.** Coi Trái Đất là một quả cầu đồng nhất bán kính  $R$  và khối lượng riêng  $\rho$ , tìm sự phụ thuộc của áp suất hấp dẫn vào khoảng cách đến tâm Trái Đất. Đánh giá áp suất tại tâm Trái Đất, biết  $R = 6400$  km,  $\rho = 5,5$  g/cm<sup>3</sup>.

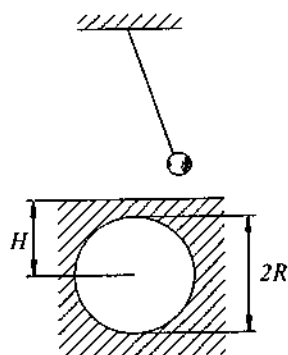
**7.107.** Giả sử trong một lỗ xuyên qua tâm hành tinh người ta đo được gia tốc rơi tự do  $g$  là một hàm của bán kính, kí hiệu  $g(r)$ . Xác định sự phụ thuộc của mật độ  $\rho(r)$  khi biết  $g(r)$ , coi mật độ phân bố đối xứng cầu.

**7.108.** Tính hiệu tương đối giữa hai chu kỳ dao động  $\frac{\Delta T}{T}$  của cùng một con

lắc lúc đầu đặt trên đỉnh tháp, và sau đó ở dưới hầm sâu. Chiều cao của tháp so với mực nước biển  $h = 500$  m, độ sâu của hầm  $H = 2$  km. Coi Trái Đất là quả cầu đồng tính bán kính  $R = 6400$  km. Bỏ qua ảnh hưởng lực hấp dẫn của tháp.

**7.109.** Người ta đặt một con lắc toán học trên bề mặt Trái Đất phía trên đường hầm tàu điện ngầm. Đường hầm nằm độ sâu  $H = 15$  m và có đường kính  $2R = 10$  m. Lấy khối lượng riêng trung bình của đất là  $\rho = 2$  g/cm<sup>3</sup>, tính sự thay đổi tương đối

chu kỳ dao động  $\frac{\Delta T}{T}$  của con lắc gây ra bởi đường hầm (H. 141).



Hình 141

**7.110.** Người ta đưa ra giả thiết dùng lực hút Trái Đất để tạo ra chuyển động của tàu hỏa khi nối điểm xuất phát và điểm đến bằng một đường hầm thẳng trong lòng đất. Coi khối lượng riêng Trái Đất không thay đổi và bỏ qua ma sát, tính thời gian tàu đi trong đường hầm (không có động cơ).

**7.111.** Một thiên thạch kim loại hình cầu bán kính  $R = 2$  km nằm ngay dưới đáy đại dương vùng tam giác "Bermuda". Chiều sâu đại dương  $H = 6$  km.

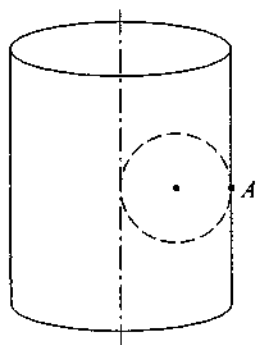
Tính độ võng của bề mặt đại dương ở vị trí đó. Khối lượng riêng đất ở đáy là  $2,5 \text{ g/cm}^3$ , khối lượng riêng thiên thạch  $7,5 \text{ g/cm}^3$ .

**7.112.** Theo một trong các mô hình về cấu tạo Trái Đất, khối lượng riêng thay đổi tuyến tính từ tâm  $\rho_1 = 12 \text{ g/cm}^3$  đến bề mặt  $\rho_2 = 3 \text{ g/cm}^3$ . Coi Trái Đất hình cầu bán kính  $R_{\text{TD}} = 6400 \text{ km}$ , hỏi tại khoảng cách nào tính từ tâm Trái Đất thì gia tốc rơi tự do  $g$  lớn nhất và  $g_{\text{max}}$  lớn hơn  $g$  trên bề mặt Trái Đất bao nhiêu lần?

**7.113.** Trong một lớp phẳng đồng nhất có một kênh nhỏ vuông góc với mặt phẳng của lớp. Một vật nhỏ chuyển động không ma sát trong kênh đó dưới tác dụng của lực hấp dẫn. Tính chu kỳ dao động của nó so với vị trí cân bằng, có thể cho giá trị hằng số hấp dẫn và khối lượng riêng của lớp chất tùy ý bằng số.

**7.114.** Trong một hình trụ dài bán kính  $R$  làm bằng vật liệu có khối lượng riêng  $\rho$  có một hốc hình cầu bán kính  $\frac{R}{2}$ , tâm hốc nằm cách trục hình trụ một

khoảng  $\frac{R}{2}$ . Xác định cường độ trường hấp dẫn tại điểm A (H. 142).

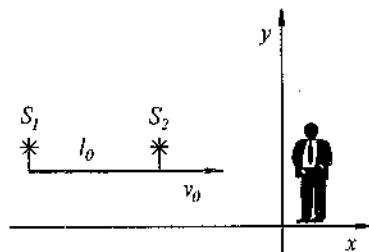


Hình 142

## §8. THUYẾT TƯƠNG ĐỐI

**8.1.** Một tàu vũ trụ với vận tốc không đổi  $V = (24/25)c$  chuyển động về phía tâm Trái Đất. Hỏi tàu đi được khoảng cách bao nhiêu trong hệ quy chiếu gắn với Trái Đất trong khoảng thời gian  $\Delta t' = 7 \text{ s}$  tính theo đồng hồ trên tàu? Bỏ qua chuyển động quay của Trái Đất quanh trục và quanh quỹ đạo của nó.

**8.2.** Một nhà du hành vũ trụ đứng trên tàu vũ trụ không được chiếu sáng đang chuyển động đối với Trái Đất với vận tốc gần bằng vận tốc ánh sáng. Cách nhà du hành vũ trụ không xa có đặt một chiếc gương sao cho đường nối gương với nhà du hành song song với vận tốc của tàu vũ trụ. Hỏi nhà du hành vũ trụ có nhìn thấy ảnh của mình trong gương sau khi bật nguồn sáng bên cạnh anh ta không (câu đố của Anhtan)?



Hình 143

**8.3.** Một thanh có chiều dài  $l_0$ . Ở hai đầu của thanh người ta gắn hai chiếc đèn  $S_1$  và  $S_2$ . Thanh chuyển động với vận tốc  $v_0$  về phía một người quan sát đứng yên (H. 143). Đèn  $S_1$  phát sáng trước  $S_2$  sao cho hai chớp sáng đến người quan sát cùng một lúc. Tại thời điểm phát sáng các đèn  $S_1$  và  $S_2$  nằm tại các điểm  $x_1$  và  $x_2$  tương ứng. Hỏi khoảng cách giữa hai đèn  $x_1 - x_2$  mà người quan sát đo được bằng bao nhiêu? (Nó sẽ có dạng một thanh sáng khi quan sát bằng mắt hoặc bằng máy ảnh).

**8.4.** Hai thanh thẳng có chiều dài mỗi thanh là  $l_0$ , chuyển động với vận tốc tương đối tính (tức là có vận tốc gần bằng vận tốc ánh sáng) về phía nhau và song song với trục  $x$ . Người quan sát gắn với một trong hai thanh ấy thấy rằng không thời gian giữa hai lần trùng nhau của các đầu trái và đầu phải của hai thanh bằng  $\tau$ . Vận tốc tương đối của các thanh bằng bao nhiêu?

**8.5.** Một tàu vũ trụ chuyển động với vận tốc  $v = 1000 \text{ km/s}$  đến ngôi sao gần nhất nằm ở khoảng cách  $L = 4,3$  năm ánh sáng. Sau khi đến sao đó tàu lại quay trở lại. Đồng hồ trên tàu sẽ chậm so với đồng hồ trên Trái Đất khi nó trở về bằng bao nhiêu?

*Chú thích.* Do vận tốc của tàu lớn có thể bỏ qua chuyển động của ngôi sao so với Mặt Trời

**8.6.** Một tàu vũ trụ bay với vận tốc  $V = 0,6c$  từ một trạm rada vũ trụ đến trạm rada vũ trụ khác. Tại thời điểm khi nó nằm ở chính giữa hai trạm, mỗi trạm đều phát về phía tàu một xung ánh sáng. Hỏi khoảng thời gian trên tàu giữa hai lần thu các xung này là bao nhiêu? Biết khoảng cách giữa hai trạm là hai tháng ánh sáng.

**8.7.** Một tàu vũ trụ đang bay về hướng Trái Đất phát ra hai xung ngắn liên tiếp cách nhau một khoảng  $\tau_1 = 1$  phút. Sau khi phản xạ từ Trái Đất hai tia này trở lại tàu vũ trụ sau thời gian  $T = 1,5$  tháng. Khi đó khoảng thời gian nhận hai tia là  $\tau_2 = 15 \text{ s}$ . Tìm khoảng thời gian  $T_{TD}$  trên Trái Đất kể từ khi nhận được xung đầu tiên đến khi tàu vũ trụ bay về tới Trái Đất. Xác định vận tốc của tàu. Các khoảng thời gian  $\tau_1, \tau_2, T$  được ghi theo thời gian của tàu.

**8.8.** Hai tàu vũ trụ đã tắt động cơ chuyển động đến gặp nhau. Trên một tàu ở mũi và đuôi đồng thời bật đèn tín hiệu sau mỗi giây. Trên tàu ngược chiều, cứ nửa giây người ta lại quan sát được hai chớp sáng cách nhau  $\tau' = 1 \mu\text{s}$ . Tìm chiều dài tàu thứ nhất và vận tốc xích lại gần nhau của hai con tàu.

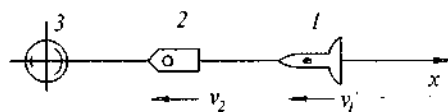
**8.9.** Hai tàu vũ trụ đã tắt động cơ chuyển động đến gặp nhau. Tín hiệu của hệ thống định vị trên tàu bị phản xạ từ tàu đối diện với tần số  $k = 9$  lần lớn hơn tần số tín hiệu phát đi. Biết rằng tàu vũ trụ ngược chiều bay qua hệ



thống thu trên tàu đầu hết  $\tau = 1 \mu s$ . Tìm chiều dài riêng  $l_0$  của tàu đi ngược chiều.

**8.10.** Nhà tiến bộ Komop (nhân vật trong phim Strugatskikho) thực hiện chuyến du hành giữa các vì sao trên tàu vũ trụ. Trong ngày mà ông ta tròn 30 tuổi và tàu vũ trụ nằm gần hành tinh Pandor, ông ta gửi về Trái Đất một tín hiệu ánh sáng. Trái Đất nhận được tín hiệu này sau 12,5 năm. Khi Komop tròn 45 tuổi, tàu vũ trụ lại có mặt gần Pandor và Komop nhận được tín hiệu phản xạ từ Trái Đất. Tìm vận tốc  $v_0$  của tàu vũ trụ. Đồng hồ trên tàu vũ trụ và trên Trái Đất tại thời điểm phát tia ánh sáng được đồng bộ hoá. Bỏ qua vận tốc tương đối của Trái Đất so với hành tinh Pandor.

**8.11\*.** Hai tàu vũ trụ 1 và 2 bay hướng về phía Trái Đất dọc theo một đường thẳng với vận tốc như nhau  $v = 0,6c$  (H. 144). Tại một thời điểm nào đó, các tàu và Trái Đất gửi cho nhau các xung ánh sáng ngắn (tàu 1 gửi cho tàu 2 và Trái Đất, tàu 2 gửi cho tàu 1 và Trái Đất, Trái Đất gửi cho tàu 1 và 2). Biết rằng các tín hiệu được phát đi đồng thời trong hệ quy chiếu gắn với Trái Đất. Sau đó thấy rằng thời gian giữa hai lần nhận xung theo đồng hồ trên tàu 1 là  $\tau_1 = 1s$ , trên tàu 2 là  $\tau_2 = 0$ . Hỏi thời gian  $\tau_3$  giữa các lần nhận xung trên Trái Đất bằng bao nhiêu?



Hình 144.

**8.12.** Hai tàu vũ trụ 1 và 2 bay hướng về phía Trái Đất dọc theo một đường thẳng (H. 144). Tại một thời điểm nào đó các tàu và Trái Đất gửi cho nhau các xung ánh sáng ngắn (tàu 1 gửi cho tàu 2 và Trái Đất, tàu 2 gửi cho tàu 1 và Trái Đất, Trái Đất gửi cho tàu 1 và 2). Biết rằng các tín hiệu được phát đi đồng thời trong hệ quy chiếu gắn với Trái Đất. Sau đó thấy rằng thời gian giữa hai lần nhận xung theo đồng hồ trên tàu 1 là  $\tau_1 = 5s$  (vận tốc tàu này  $v = 0,6c$ ) trên tàu 2 là  $\tau_2 = 0$ . Hỏi thời gian  $\tau_3$  giữa các lần nhận xung trên Trái Đất bằng bao nhiêu nếu hai tàu đến Trái Đất đồng thời?

**8.13\*.** Từ gốc hệ quy chiếu  $K$  sau mỗi khoảng thời gian  $T$  (theo đồng hồ  $K$ ) phát các xung ánh sáng ngắn dọc theo trục  $x$ . Tìm khoảng thời gian mà các xung này sẽ đến chỗ người quan sát trong hệ tọa độ  $K'$ , có tính đến tính tương đối của các khoảng thời gian giữa các sự kiện. Xét các trường hợp người quan sát và nguồn phát chuyển động ra xa nhau và chuyển động lại gần nhau. Khi chuyển từ chu kỳ sang tần số, tìm công thức tương đối tính của hiệu ứng Dopple dọc.

**8.14\*.** Một thanh có chiều dài riêng  $l_0$  đứng yên trong hệ quy chiếu  $K'$ , nó nằm tạo với trục  $x'$  một góc  $\varphi'$ . Thanh này tạo với trục  $x$  trong hệ quy chiếu  $K$  một góc bằng bao nhiêu? Chiều dài của thanh trong hệ  $K$  bằng bao nhiêu?

**8.15\*.** Có thể dùng máy ảnh để ghi lại sự co Lorentz trong biến dạng của một vật bay qua điểm chụp với vận tốc tương đối tính không? Xét trường hợp vật hình lập phương và hình cầu bay cách xa điểm chụp.

**8.16\*.** Tìm vận tốc của hạt (điện tích  $e$ , khối lượng  $m$ ) bay qua vùng có hiệu điện thế  $U$  không vận tốc ban đầu. Tìm biểu thức tới hạn cho vận tốc:

1) đối với trường hợp cổ điển ( $v \ll c$ );

2) đối với trường hợp siêu tương đối ( $v \approx c$ ).

**8.17\*.** Động năng tương đối tính  $K$ , phải chiếm tỷ lệ bao nhiêu so với năng lượng nghỉ của hạt, sao cho khi sử dụng biểu thức phi tương đối sai số tương đối của động năng là 1%? Tìm năng lượng tương ứng đối với proton và electron.

**8.18.** Biểu diễn động lượng tương đối tính của một hạt khối lượng  $m$  qua động năng tương đối tính của nó.

**8.19.** Năm 1963, trong các tia vũ trụ người ta phát hiện được các proton với năng lượng rất lớn, cỡ  $10^{20}$  eV. Giả thiết rằng nó được sinh ra ở ngoài biên giới của Thiên hà chúng ta cách Trái Đất  $10^5$  năm ánh sáng và năng lượng toàn phần của nó tăng tuyến tính liên tục theo thời gian bắt đầu từ năng lượng nghỉ 1 GeV. Hỏi proton đi mất bao nhiêu thời gian theo “đồng hồ riêng” của nó.

**8.20.** Trên máy gia tốc tuyến tính ở Stanford (USA) các electron được gia tốc từ năng lượng nghỉ 0,5 MeV đến 40 GeV trong một ống thẳng dài  $l_0 = 3$  km. Coi quá trình gia tốc electron diễn ra đều dọc theo ống (tức là năng lượng toàn phần của nó tăng tỷ lệ với chiều dài ống), hỏi electron “cảm thấy” chiều dài của ống bằng bao nhiêu?

**8.21.** Một số nhà nghiên cứu mới đây đã ghi được sự bay đến của các hạt trong tia vũ trụ tới từ nguồn Thiên nga X-3 nằm cách Mặt Trời  $\tau = 40$  nghìn năm ánh sáng. Trong số các hạt trung hoà vẫn giữ được hướng đến nguồn khi bay, người ta nghiên cứu hạt neutron (năng lượng nghỉ  $m_0 c^2 = 940$  MeV). Biết rằng neutron phân rã với thời gian sống trung bình  $\tau_0 = 940$  s. Xác định năng lượng neutron đủ để nó đến được Trái Đất.

**8.22.** Từ trên một tàu vũ trụ đang bay về Trái Đất với vận tốc  $v = 0,6c$  người ta thực hiện chương trình truyền hình trực tiếp cho phép quan sát trên màn hình tivi mặt các đồng hồ của tàu. Kim giây trên màn hình quay bao nhiêu vòng trong một phút thời gian của Trái Đất?

**8.23.** Cứ mỗi giây từ Trái Đất người ta lại phát tín hiệu thời gian chuẩn tới con tàu vũ trụ đang bay lên với vận tốc  $v = 0,8c$ . Khoảng thời gian giữa hai lần liên tiếp phát tín hiệu theo đồng hồ của tàu bằng bao nhiêu?

động lượng của hạt  $D^0$  – meson. Xác định khối lượng, vận tốc và thời gian tồn tại của  $D^0$  – meson. Giả thiết kaon và pion là các hạt siêu tương đối.

8.41. Khi huỷ phản hạt prôtôn dừng trong hydro lỏng sinh ra ba hạt pion

$$\bar{p} + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0.$$

Xác định khối lượng mỗi hạt nếu một hạt trong số chúng có năng lượng lớn nhất có thể.

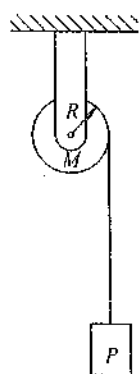
## §9. CHUYỂN ĐỘNG PHẪNG CỦA VẬT RẮN

9.1. Tính mômen quán tính  $I_x$  của một hình nón tròn xoay đối với trục đối xứng  $Ox$  của nó; cho bán kính đáy là  $R$  và chiều cao là  $L$ . Tính mômen quán tính  $I_z$  của hình nón trên đối với trục  $Oz$  vuông góc với trục  $Ox$ . Điểm  $O$  là đỉnh của hình nón.

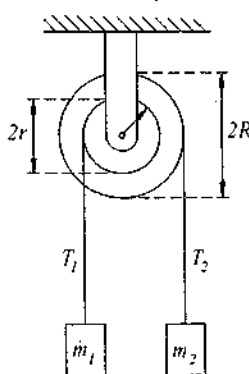
9.2. Người ta vắt qua ròng rọc hình trụ bán kính  $r$ , khối lượng  $M$  một sợi dây không khối lượng, hai đầu buộc hai vật khối lượng  $m_1$  và  $m_2$ . Tìm gia tốc của các vật và lực căng của các dây trong hệ, có tính đến mômen quán tính  $I$  của ròng rọc với điều kiện dây không trượt theo ròng rọc. Xác định ứng suất trong giá treo ròng rọc.

9.3. Một hình trụ đồng chất khối lượng  $M$  và bán kính  $R$  (H. 145) quay không ma sát quanh một trục nằm ngang dưới tác dụng của trọng lực  $P$  của một vật nối với sợi dây nhẹ quấn trên khối trụ. Tìm góc quay  $\varphi$  của hình trụ theo thời gian, nếu tại  $t = 0$  thì  $\varphi = 0$ .

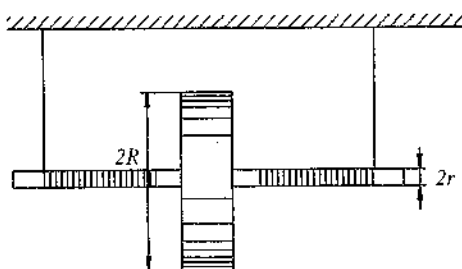
9.4. Trên ròng rọc hai nấc người ta quấn hai sợi dây theo hai chiều ngược nhau, hai đầu của hai dây nối với hai vật  $m_1$  và  $m_2$  (H. 146). Tìm gia tốc góc của ròng rọc và các lực căng  $T_1$  và  $T_2$  của các sợi dây, có tính đến mômen quán tính  $I$  của ròng rọc.



Hình 145



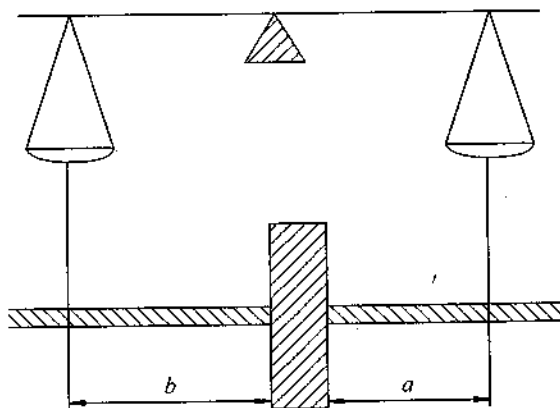
Hình 146



Hình 147

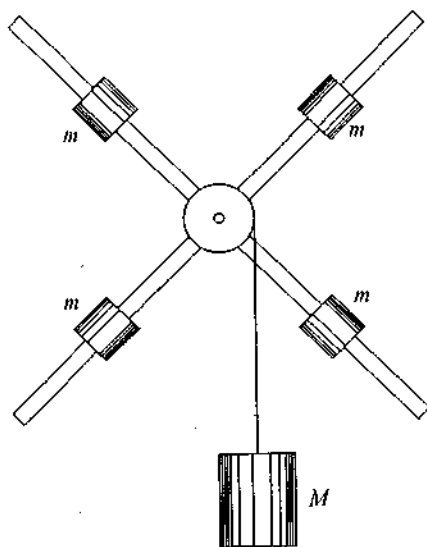
9.5. Sơ đồ một dụng cụ chứng minh (đĩa Maxwell) được cho trên hình 147. Một đĩa đặc bán kính  $R$ , khối lượng  $M$  được lắp chặt vào trục bán kính  $r$ . Trục và đĩa được làm bằng cùng một vật liệu, phần trục bên ngoài đĩa có khối lượng  $m$ . Thiết bị được treo trên giá bằng hai sợi dây cùng độ dài. Người ta quấn dây một cách đối xứng vào trục thành một dây, và nhờ thế mà đĩa được nâng lên. Sau đó người ta cho đĩa chuyển động tự do xuống dưới. Tìm gia tốc của đĩa khi đó.

9.6. Đĩa Maxwell treo trên hai đĩa cân (H. 148) sao cho khoảng cách từ đĩa đến các dây treo bằng  $a$  và  $b$ . Hệ cân bằng khi đĩa đứng yên. Cần phải đặt lên cân khối lượng bổ sung bằng bao nhiêu để nó vẫn cân bằng khi đĩa chuyển động? Khối lượng đĩa là  $m$ , bán kính của đĩa là  $R$  và bán kính trục là  $r$ . Bỏ qua khối lượng trục.



Hình 148

9.7. Người ta buộc một sợi dây nhỏ vào trục của cấu trúc chữ thập Oberbek (H.149). Đầu kia của sợi dây có treo một vật khối lượng  $M = 1\text{kg}$ . Vật được thả từ độ cao  $h = 1\text{m}$  đến vị trí thấp nhất, sau đó bắt đầu chuyển động lên trên. Tại vị trí thấp nhất vật “giật mạnh” dây, tức làm tăng lực căng dây. Tìm lực căng  $T$  của dây khi vật chuyển động lên và xuống. Xác định gần đúng lực căng  $T_g$  của dây khi bị “giật” trong thời gian giật. Bán kính puli  $r = 3\text{cm}$ . Trên các thanh của chữ thập có cố định bốn vật khối lượng mỗi vật  $m = 250\text{g}$  và cách trục một khoảng  $R = 30\text{cm}$ . Mômen quán tính của bánh puli và của các thanh không đáng kể so với mômen quán tính của các vật. Bỏ qua độ giãn của dây trong thời gian bị “giật mạnh”.



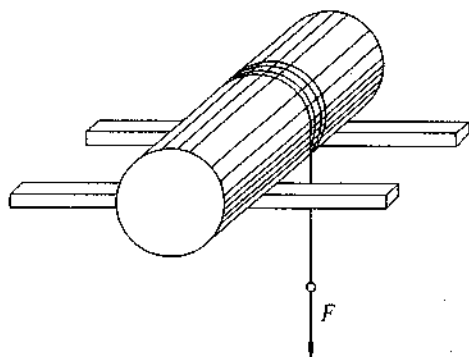
Hình 149

9.8\*. Trên một trục đứng yên nằm ngang có lắp một ròng rọc dạng hình trụ đặc khối lượng  $M$ . Người ta vắt một sợi dây không trọng lượng qua ròng rọc, hai đầu sợi dây có bám hai con khỉ mỗi con khối lượng  $m$ . Con khỉ thứ nhất

bắt đầu leo lên với gia tốc  $a$  so với dây. Hỏi con khỉ thứ hai sẽ chuyển động với gia tốc bằng bao nhiêu so với hệ quy chiếu đứng yên?

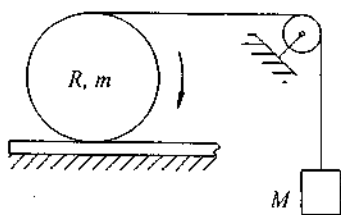
**9.9.** Trên một tang trống nặng quay quanh một trục nằm ngang có quán một dây nhẹ và mềm. Một con khỉ khối lượng  $M$  leo theo dây lên trên. Xác định gia tốc của nó đối với dây, nếu vận tốc của nó so với mặt đất không đổi. Mômen quán tính của tang trống là  $I$ , bán kính  $R$ .

**9.10\*.** Trên hai xà ngang song song có đặt một hình trụ bán kính  $R$ , khối lượng  $m$ , trên trụ có quấn dây. Người ta đặt một lực thẳng đứng  $F$  có độ lớn bằng nửa trọng lượng của hình trụ vào đầu dây ròng xuống (H. 150). Tìm gia tốc ngang của hình trụ và giá trị tối thiểu của hệ số ma sát giữa hình trụ và các xà để trụ lăn không trượt. Trục của trụ vuông góc với các xà, khối tâm của nó và lực  $F$  nằm trong mặt phẳng thẳng đứng đi qua trung điểm của khoảng cách giữa các xà.

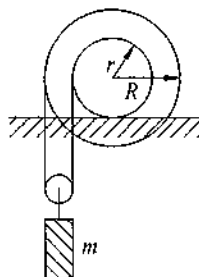


Hình 150

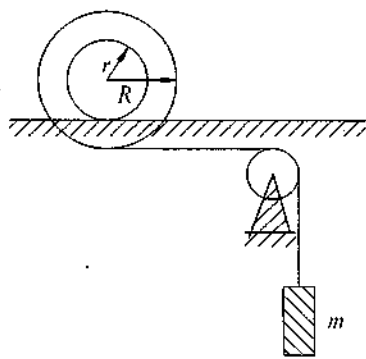
**9.11\*.** Một đầu của dây quấn trên hình trụ (xem điều kiện bài tập trước) được buộc với một vật khối lượng  $M$ . Dây được vắt qua một ròng rọc (H. 151). Xác định gia tốc của vật. Tìm điều kiện để hình trụ lăn kéo theo cả trượt. Bỏ qua khối lượng của dây, của ròng rọc và ma sát trong trục ròng rọc. Giả thiết rằng trong tất cả các trường hợp, chuyển động của hình trụ là chuyển động song phẳng.



Hình 151



Hình 152



Hình 153

**9.12.** Ròng rọc vi phân (khối lượng  $M$ , bán kính  $R$  và  $r = 0,5R$ ) được quấn dây (H. 152). Trên dây treo một ròng rọc không trọng lượng với một vật khối lượng  $m = 0,8M$ . Ròng rọc vi phân lăn không trượt theo đường ray

nằm ngang. Tìm gia tốc của vật và ròng rọc. Bán kính quán tính của ròng rọc  $r_{qt}$  liên hệ với  $R$  bằng biểu thức  $r_{qt}^2 = 0,3R^2$ .

**9.13.** Một hình trụ bán kính  $R$  có trục lõi ra hai phía với bán kính  $r$ . Trên trụ có quấn dây, dây vắt qua một ròng rọc cố định không trọng lượng, và nối với vật khối lượng  $m$ . Trục của trụ đặt trên đường ray nằm ngang (H. 153). Xác định gia tốc của hình trụ trong hai trường hợp sau:

- a) trụ lăn không trượt theo đường ray,
- b) không có ma sát giữa trục hình trụ và đường ray. Mômen quán tính của hình trụ cùng với trục là  $I$ , khối lượng là  $M$ .

**9.14.** Một rôto hình trụ thẳng đứng với mômen quán tính  $I$  quay dưới tác dụng của mômen lực  $M$ . Vận tốc góc của rôto  $\omega(t)$  sẽ thay đổi như thế nào nếu  $\omega(0) = 0$ ? Biết rằng mômen lực cản của không khí tỷ lệ với vận tốc góc với hệ số tỷ lệ  $k$ . Vận tốc góc của chuyển động sau khi đã ổn định bằng bao nhiêu?

**9.15.** Tìm mômen động lượng  $L$  của Trái Đất đối với trục cực của nó. Giả thiết Trái Đất có dạng cầu bán kính  $R = 6400\text{km}$ , khối lượng riêng  $\rho = 5,5\text{g/cm}^3$ .

**9.16.** Cần phải đặt vào Trái Đất một mômen lực bằng bao nhiêu để nó ngừng quay sau 100.000.000 năm (1 năm = 365,25 ngày)?

**9.17.** Người ta quấn dây lên một hình trụ đặc khối lượng  $m$ . Một đầu dây buộc vào trần thang máy đang chuyển động lên trên với gia tốc  $a$ . Tìm gia tốc của hình trụ so với thang máy và lực căng của dây.

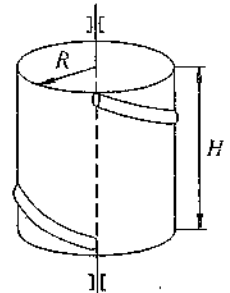
**9.18.** Một đồng xu khối lượng  $m$  và bán kính  $r$  đang quay trong mặt phẳng ngang quanh trục hình học của nó với vận tốc góc  $\omega$  thì rơi thẳng đứng lên một chiếc đĩa và “đính” vào đĩa làm cho đĩa quay quanh trục của nó. Mômen lực ma sát xuất hiện trong trục đĩa không đổi bằng  $M_0$ . Hỏi sau thời gian bao lâu thì đĩa dừng lại? Đĩa quay được số vòng  $N$  bằng bao nhiêu trước khi ngừng hẳn? Mômen quán tính của đĩa đối với trục hình học của nó là  $I_0$ . Khoảng cách giữa trục của đĩa và trục của đồng xu bằng  $d$ .

**9.19.** Một đĩa nằm ngang đang quay xung quanh trục hình học của nó với vận tốc góc  $\omega_1$  thì có một đĩa thứ hai cũng đang quay quanh trục đó với vận tốc  $\omega_2$  rơi vào nó. Mômen quán tính của các đĩa đối với trục nói trên lần lượt là  $I_1$  và  $I_2$ . Hai đĩa sau khi va chạm dính lại với nhau (nhờ các gai nhọn trên bề mặt của chúng). Hỏi động năng của cả hệ thay đổi như thế nào sau khi đĩa thứ hai rơi xuống? Giải thích sự thay đổi năng lượng này như thế nào? Hai trục hình học của chúng nằm trên một đường thẳng.

9.20. Một khối trụ đặc thấp, đồng chất bán kính  $r$  quay xung quanh trục của nó với vận tốc  $n$  [vòng/s] được đặt dựng đứng trên một mặt phẳng ngang. Khối trụ sẽ quay được bao nhiêu vòng trước khi nó dừng hẳn? Hệ số ma sát trượt giữa đáy trụ và bề mặt không phụ thuộc vào vận tốc quay và bằng  $k$ .

9.21. Người ta uốn theo thành của một khối trụ đứng khối lượng  $M$ , bán kính  $R$  và chiều cao  $H$  một ống thành một vòng xoắn (H.154). Một quả cầu khối lượng  $m$  có thể trượt không ma sát theo ống này. Khối trụ có thể quay quanh trục của nó. Quả cầu được thả vào lỗ ở đầu trên của ống không có vận tốc ban đầu. Tìm vận tốc của quả cầu khi thoát ra khỏi lỗ dưới của ống. Bỏ qua khối lượng của ống và ma sát trong trục quay. Giả thiết rằng

$$2\pi R = 2H, \text{ khối lượng của quả cầu } m = \frac{M}{4}.$$

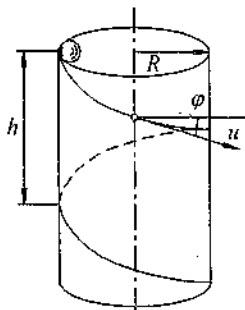


Hình 154

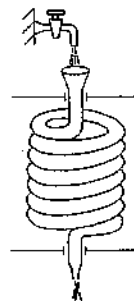
9.22\*. Một máng nhẹ được uốn thành hình xoắn thẳng đứng dạng trụ bán kính  $R$  và có thể quay tự do quanh trục đối xứng thẳng đứng (H. 155). Vòng

xoắn tạo với phương ngang một góc  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ . Một vật khối lượng  $m$  trượt

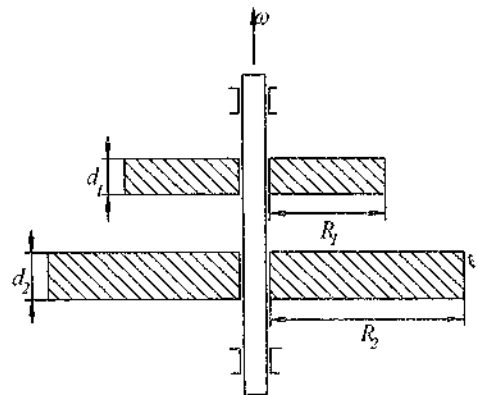
không ma sát theo lòng máng. Vận tốc của vật ở cuối máng, sau khi hạ tới độ cao  $h$ , bằng bao nhiêu nếu nó trượt không có vận tốc ban đầu? Giả thiết khối lượng của máng bằng khối lượng vật. Vận tốc  của máng bằng bao nhiêu?



Hình 155



Hình 156



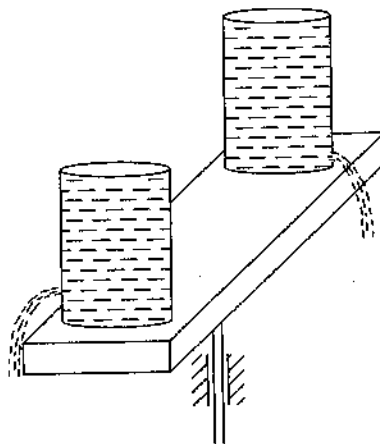
Hình 157

9.23. Người ra rót nước với lưu lượng  $\mu$  [g/s] qua một ống xoắn khít (H. 156) (theo chiều kim đồng hồ, nếu quan sát từ trên xuống) với  $N$  vòng, ống xoắn có thể quay tự do trên các ổ bi. Khối lượng ống xoắn là  $M$ , khối lượng nước trong nó là  $m_0$ . Hỏi ống xoắn chuyển động như thế nào? Với nước bị khoá lại. Ống xoắn còn quay được bao nhiêu vòng và về phía nào sau khi nước

chảy hết ra khỏi ống xoắn? Sau đó nó chuyển động như thế nào? Phân tích các trường hợp khi  $m_0 \ll M$  và  $m_0 \gg M$ .

**9.24.** Một đĩa thép bán kính  $R_1 = 10\text{cm}$  đang quay đều với vận tốc  $n = 1000$  vòng/phút thì được thả xuống một đĩa thép khác bán kính  $R_2 = 20\text{cm}$  (H. 157). Tính nhiệt lượng  $Q$  sinh ra trong thời gian hai đĩa trượt với nhau. Chiều dày các đĩa lần lượt là  $d_1 = 1\text{cm}$ ,  $d_2 = 2\text{cm}$ . Bỏ qua mômen quán tính của trục và ma sát trong các ổ bi. Khối lượng riêng của thép  $\rho = 7,8\text{g/cm}^3$ .

**9.25.** Trên hai đầu của một giá lớn có thể quay không ma sát quanh một trục thẳng đứng (H.158), người ta đặt cố định hai bình chứa hình trụ giống nhau bán kính  $r$ , chiều cao  $H$ . Ở phần dưới của mỗi bình có một lỗ không lớn. Các lỗ được bịt kín bằng nút. Hai bình được đổ đầy chất lỏng có khối lượng riêng  $\rho$ . Tại thời điểm  $t = 0$  người ta mở các nút. Tìm vận tốc góc lớn nhất mà giá nhận được, giả thiết  $H \gg r$  và  $I \gg 2\pi^2 H \rho l^2$ , trong đó  $I$  là mômen quán tính của giá cùng hai bình chứa đối với trục quay. Bỏ qua ma sát nội của chất lỏng. Khoảng cách giữa hai bình là  $2l$ .



Hình 158

**9.26.** Một hình trụ đứng bán kính  $r$  có thể quay quanh trục của nó. Mặt bên của hình trụ có rãnh chạy theo hình xoắn ốc và tạo một góc  $\varphi$  so với phương ngang. Đặt vào rãnh một viên bi khối lượng  $m$ , viên bi trượt không ma sát theo rãnh. Tìm chuyển động của hệ dưới tác dụng của trọng lực. Mômen quán tính của hình trụ đối với trục quay là  $I$ .

**9.27.** Một đỉnh ốc dẹt đứng chiều dài  $L$  có thể quay không ma sát quanh trục của nó. Tìm thời gian để đai ốc khối lượng  $m$  vận hết chốt, nếu nó bắt đầu chuyển động từ điểm cao nhất của chốt với vận tốc ban đầu bằng không. Bước ren bằng  $h$ , mômen quán tính của chốt là  $I_1$ , của đai ốc là  $I_2$ . Bỏ qua ma sát trong ren.

**9.28.** Một người khối lượng  $m$  đang đứng trên mép của một đĩa lớn nằm ngang bán kính  $R$ , mômen quán tính  $I$  đang quay tự do. Đĩa quay với vận tốc  $n$  [vòng/phút]. Vận tốc của đĩa thay đổi như thế nào nếu người đó di chuyển từ mép vào tâm đĩa? Năng lượng của hệ khi đó thay như thế nào? Có thể bỏ qua kích thước của người so với bán kính đĩa.



**8.24.** Xác định thời gian sống  $\tau$  của hạt muon  $\mu$  với năng lượng  $E = 10^9 \text{ eV}$  (trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm). Thời gian sống của hạt muon chậm (đứng yên) là  $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ , khối lượng của nó  $m = 206,7 m_e$  ( $m_e$  là khối lượng electron).

**8.25.** Một quả đạn khối lượng  $m_0 = 1000$  tấn được truyền cho vận tốc  $V$  theo hướng tiếp tuyến với quỹ đạo Trái Đất. Hiệu số giữa vận tốc ánh sáng  $c$  và vận tốc quả đạn  $V$  phải bằng bao nhiêu để Trái Đất bắt đầu chuyển động đối với Mặt Trời theo quỹ đạo parabol? Khối lượng Trái Đất  $M = 6 \cdot 10^{21}$  tấn, vận tốc chuyển động theo quỹ đạo  $v = 29,8 \text{ km/s}$ . So sánh động năng của quả đạn với động năng chuyển động theo quỹ đạo của Trái Đất.

**8.26.** Một quả đạn  $m_0 = 1$  tấn trên xích đạo được truyền cho vận tốc ngang  $v$  theo chiều quay của Trái Đất. Hiệu số giữa vận tốc ánh sáng và vận tốc quả đạn  $c - v$  bằng bao nhiêu để làm dừng chuyển động của Trái Đất quay quanh trục của nó? Bán kính Trái Đất  $R = 6370 \text{ km}$ , khối lượng  $M = 6 \cdot 10^{21}$  tấn. Mômen quán tính của Trái Đất đối với trục quay của nó, trong đó có tính đến sự không đồng nhất khối lượng riêng, được tính với độ chính xác cao bằng công thức  $\mathcal{J} = \frac{MR^2}{3}$ . So sánh động năng của quả đạn với động năng Trái Đất.

**8.27.** Cần phải truyền cho tàu vũ trụ khối lượng  $m = 10^4 \text{ kg}$  động năng  $K$  bằng bao nhiêu để đồng hồ của nó khi trở về Trái Đất chỉ thời gian bằng một nửa so với đồng hồ trên Trái Đất? Cần phải cho phản ứng bao nhiêu tấn urani  $M$  để có được lượng năng lượng đó? Biết rằng khi phân chia một nguyên tử urani sinh ra năng lượng  $170 \text{ MeV}$ . Với động năng đó thì vận tốc của tàu bằng bao nhiêu?

**8.28.** Một hạt có khối lượng  $m_2$  và động năng  $K_2$  bay đến đập vào hạt có khối lượng  $m_1$  đang đứng yên. Sau va chạm các hạt dính lại với nhau và chuyển động như một hạt. Tìm khối lượng  $M$  của hạt được tạo thành. Với những điều kiện nào thì khối lượng này xấp xỉ bằng tổng khối lượng hai hạt ban đầu? Tìm vận tốc  $v$  của hạt tạo thành.

**8.29.** Khi một hạt phân rã nó sinh ra hai hạt khối lượng  $m_1$  và  $m_2$ . Bằng thực nghiệm người ta biết được độ lớn động lượng  $p_1$  và  $p_2$  của các hạt và góc  $\theta$  giữa các hướng bay của chúng. Tìm khối lượng của hạt bị phân rã.

**8.30.** Một vật đứng yên khối lượng  $M$  phân rã thành hai vật khối lượng  $m_1$  và  $m_2$ . Tính động năng  $K_1$  và  $K_2$  của các vật được tạo thành.

8.31\*. Một hạt khối lượng  $m$  va chạm đàn hồi với một hạt đứng yên có cùng khối lượng. Tìm động năng  $K_1$  của hạt tán xạ sau va chạm theo động năng  $K_0$  của hạt tới ban đầu và góc tán xạ  $\theta_1$ .

8.32. Một hạt prôtôn tương đối tính có động năng  $K$  va chạm đàn hồi với một prôtôn đứng yên, kết quả là hai hạt chuyển động đối xứng với nhau đối với phương chuyển động của prôtôn tới. Tìm góc  $\theta$  giữa hướng bay của các prôtôn.

8.33. Hạt  $\pi^-$  meson tương đối tính (năng lượng nghỉ  $m_0c^2$ ) khi bay phân rã thành hai hạt phôtôn có năng lượng  $E_1$  và  $E_2$ . Tìm góc  $\theta$  giữa chiều bay của các phôtôn đó.

8.34. Hạt  $\pi^+$  meson đứng yên (năng lượng nghỉ  $m_\pi c^2 = 139,6 \text{ MeV}$ ) phân rã thành phản muyn  $\mu^+$  (năng lượng nghỉ  $m_\mu c^2 = 105,7 \text{ MeV}$ ) và hạt notrino  $\nu$  (năng lượng nghỉ bằng 0). Tìm động năng  $K_\mu$  và  $K_\nu$  của các hạt tạo thành.

8.35. Năm 1976 lần đầu tiên người ta phát hiện được phản hạt lamda-hyperon  $\bar{\Lambda}_c$  với năng lượng nghỉ  $M_{\bar{\Lambda}_c} c^2 = 2,26 \text{ GeV}$ . Hỏi động năng tối thiểu của các prôtôn được gia tốc bằng bao nhiêu để có thể quan sát được sự xuất hiện của cặp  $\Lambda_c \bar{\Lambda}_c$  khi chiếu chùm các prôtôn lên hydro lỏng?

8.36. Hạt piôn trung hòa (năng lượng nghỉ  $M_\pi c^2 = 0,135 \text{ GeV}$ ) khi bay phân rã thành hai lượng tử  $\gamma$  với năng lượng  $E_1 = 2,0 \text{ GeV}$  và  $E_2 = 3,2 \text{ GeV}$ . Tìm góc  $\varphi$  giữa hướng bay của các hạt  $\gamma$  này.

8.37. Hạt pion đứng yên ( $m_\pi = 273m_e$ ) phân rã thành hạt muyn ( $m_\mu = 207m_e$ ) và notrino. Tìm động năng và động lượng của chúng.

8.38. Tìm số lượng lớn nhất các hạt piôn có thể sinh ra khi một prôtôn năng lượng  $E = 17 \text{ GeV}$  va chạm với một prôtôn đứng yên.

8.39. Năm 1983 người ta tìm ra hạt boson  $Z^0$ . Khi phân tích sự phân rã của nó  $Z^0 \rightarrow \mu^+ + \mu^-$  người ta tìm thấy hai vết của các hạt muyn với động lượng  $p = 95 \text{ GeV}/c$  ( $c$  là vận tốc ánh sáng) và góc bay  $\theta = 70^\circ$ . Tìm vận tốc và khối lượng của boson  $Z^0$ .

8.40. Meson  $D^0$  phân rã “khi bay” thành  $K^-$  - meson (kaon) và  $\pi^+$  - meson (pion). Khoảng cách từ điểm nó sinh ra đến điểm phân rã là  $l = 1,05 \text{ mm}$ . động lượng của các hạt được sinh ra  $p_k = 3,6 \text{ GeV}/c$ ,  $p_\pi = 1,9 \text{ GeV}/c$  ( $c$  là vận tốc ánh sáng) và tạo các góc  $\theta_k = 13^\circ 30'$  và  $\theta_\pi = 27^\circ 50'$  so với chiều

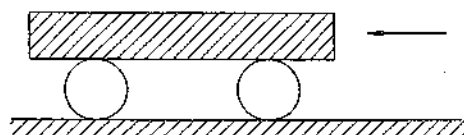
thuộc vào vận tốc), nhưng không có ma sát lăn. Sau khi qua ranh giới đó khối trụ chuyển động như thế nào? Động năng chuyển động tịnh tiến của khối trụ sẽ phân bố như thế nào?

9.38. Một chiếc vành bán kính  $r_0$  lăn không trượt từ đỉnh đồi có độ cao  $kr_0$ . Bỏ qua sự mất mát do ma sát, tìm vận tốc và gia tốc của các điểm A và B trên vành (H. 165).

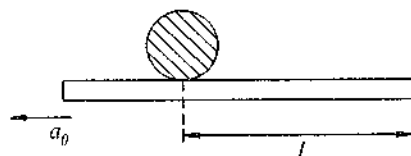
9.39. Một khối trụ đặc bán kính  $R = 10\text{cm}$ , trọng lượng  $P$  chuyển động quay quanh trục của nó với vận tốc góc  $n = 10$  [vòng/s]. Người ta đặt khối trụ đang quay này lên mặt phẳng ngang để nó tự chuyển động theo mặt phẳng. Hệ số ma sát trượt giữa khối trụ và mặt phẳng bằng 0,1. Sau khoảng thời gian  $T$  bằng bao nhiêu thì trụ sẽ lăn không trượt? Giả thiết ma sát trượt không phụ thuộc vào vận tốc, còn ma sát lăn bằng không. Gia tốc của khối trụ bằng bao nhiêu khi  $t > T$ ?

9.40. Người ta đặt một khối trụ đặc đồng chất khối lượng  $m_1$  đang quay với vận tốc góc  $\omega_0$  không có vận tốc tịnh tiến ban đầu lên một tấm ván dài khối lượng  $m_2$  nằm trên mặt phẳng nhẵn nằm ngang. Vận tốc ban đầu của tấm ván bằng không. Bỏ qua lực ma sát lăn, nhưng tính đến ma sát trượt giữa khối trụ và tấm ván, tìm vận tốc góc của khối trụ sau khi nó chỉ lăn thuần túy. Giả thiết tấm ván đủ dài để khối trụ lăn thuần túy trên nó trước khi trượt khỏi tấm ván.

9.41. Một tấm ván khối lượng  $M$  (H. 166) nằm trên hai con lăn hình trụ như nhau khối lượng mỗi con lăn là  $m$ . Người ta bắt đầu đẩy tấm ván theo phương ngang bằng lực  $F$ , hệ chuyển động sao cho tấm ván không trượt trên các con lăn và các con lăn không trượt trên bề mặt. Xác định gia tốc của ván.



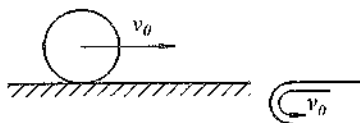
Hình 166



Hình 167

9.42. Trên một tấm ván nhám, cách đầu bên phải của nó một khoảng  $l$  có đặt một khối trụ đặc (H. 167). Người ta cho tấm ván chuyển động về bên trái với gia tốc  $a_0$ . Hỏi tâm khối trụ sẽ chuyển động so với tấm ván với vận tốc bằng bao nhiêu khi nó ở mép tấm ván? Chuyển động của khối trụ trên tấm ván là lăn không trượt.

9.43. Một quả cầu đặc bán kính  $R$ , khối lượng  $M$  lăn trên mặt phẳng ngang từ trái qua phải với vận tốc  $v_0$  và rơi vào băng truyền đang chuyển động ngược chiều với nó cũng với vận

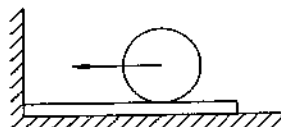


Hình 168

tốc  $v_0$  (H. 168). Xác định chiều và độ lớn của vận tốc tuyệt đối của quả cầu sau khi nó ngừng trượt.

**9.44.** Từ bánh xe ô tô đang chuyển động cái nắp chụp của bánh bị trượt ra và sau khi rơi xuống đường nó lăn không trượt. Với vận tốc nào của ô tô thì điều đó xảy ra? Bán kính bánh xe  $R = 40\text{cm}$ , cái chụp có thể xem như một chiếc đĩa đồng chất bán kính  $r = 20\text{cm}$ , hệ số ma sát giữa nó và mặt đường là  $k = 0,2$ .

**9.45.** Một tấm ván dài mảnh nằm trên một mặt bàn nhẵn đặt sát với tường nhẵn. Một khối trụ lăn không trượt trên tấm ván theo phương vuông góc với tường (H. 169). Khối trụ va chạm đàn hồi tuyệt đối với tường. Xác định phần của động năng ban đầu bị chuyển hoá thành nhiệt do ma sát giữa khối trụ và tấm ván đến thời điểm mà khối trụ lăn khỏi tấm ván. Khối lượng của khối trụ bằng nửa khối lượng tấm ván. Bỏ qua ma sát lăn.



Hình 169

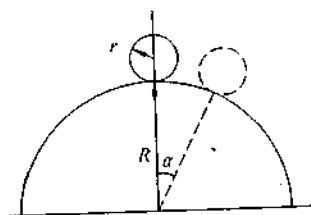
**9.46.** Một máy bay khối lượng  $M = 10^4\text{kg}$  thực hiện quá trình hạ cánh với vận tốc ban đầu là  $20\text{km/h}$ . Khi hạ cánh nó tiếp xúc với đường bằng hai bánh có thể quay tự do quanh trục của chúng. Trước khi hạ các bánh đứng yên. Bỏ qua sức cản của không khí, xác định vận tốc của máy bay tại thời điểm các bánh của nó bắt đầu lăn không trượt. Bán kính của mỗi bánh là  $r = 1\text{m}$ , mômen quán tính của bánh xe đối với trục quay của nó là  $I = 100\text{kg.m}^2$ .

**9.47.** Một khối trụ đặc khối lượng  $m$ , bán kính  $r$  đang quay với vận tốc góc  $\omega_0$  được đặt xuống mặt phẳng nằm ngang. Giữa khối trụ và mặt phẳng ngang xuất hiện lực ma sát nhớt, tỷ lệ với vận tốc của điểm thấp nhất của khối trụ. Bỏ qua ma sát khô và ma sát lăn, tìm vận tốc góc của khối trụ và vận tốc khối tâm khi  $t \rightarrow \infty$ . Xác định sự tiêu hao năng lượng do ma sát.

**9.48.** Một quả cầu đồng chất bán kính  $r$ , đang quay với vận tốc góc  $\omega_0$  được đặt xuống mặt phẳng ngang sao cho trục quay của nó nghiêng một góc  $\varphi$  so với phương thẳng đứng. Xác định vận tốc của quả cầu và vận tốc góc của nó ngay sau khi nó chỉ lăn không trượt. Bỏ qua ma sát lăn.

**9.49.** Trên một giá nằm ngang đang dao động xoắn với phương trình  $\varphi = \varphi_0 \sin \Omega t$  có đặt một đĩa bán kính  $R$ , có trục trùng với trục của giá. Hỏi biên độ dao động  $\varphi_{\max}$  bằng bao nhiêu thì đĩa bắt đầu trượt, nếu hệ số ma sát bằng  $k$ ?

**9.50.** Một khối trụ nhỏ bán kính  $r$  lăn từ một đỉnh khối trụ khác cố định bán kính  $R$  (H. 170), trục của các trụ song song với nhau. Hệ số ma sát giữa

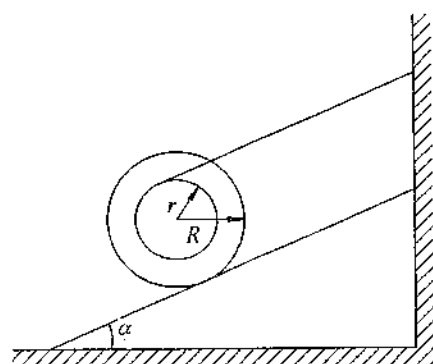


Hình 170

$R$ , hệ số ma sát  $k > \frac{D}{h}$ , trong đó  $D$  là đường kính hình trụ,  $h$  là chiều cao của nó (H. 161).

**9.33.** Trên mặt phẳng ngang có đặt một cuộn chỉ. Trục của cuộn chỉ sẽ chuyển động với gia tốc  $a$  bằng bao nhiêu nếu kéo sợi chỉ bằng một lực  $F$  (H. 162)? Cần phải kéo sợi chỉ thế nào để cuộn chỉ chuyển động về phía kéo? Cuộn chỉ chuyển động không trượt theo bề mặt. Tìm lực ma sát giữa cuộn chỉ và mặt bàn.

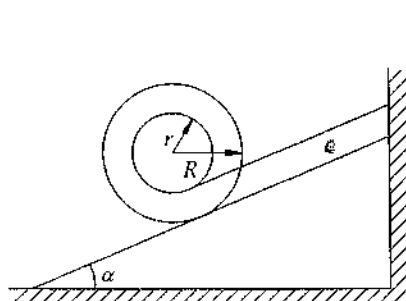
**9.34.** Một cuộn chỉ nằm trên mặt phẳng nghiêng. Đầu tự do của sợi chỉ buộc vào tường sao cho sợi chỉ song song với mặt phẳng nghiêng (H. 163). Xác định gia tốc của cuộn chỉ trên mặt phẳng nghiêng. Khối lượng cuộn chỉ là  $m$ , mômen quán tính của cuộn chỉ đối với trục của nó là  $I_0$ , hệ số ma sát của cuộn chỉ với mặt phẳng nghiêng là  $k$ .



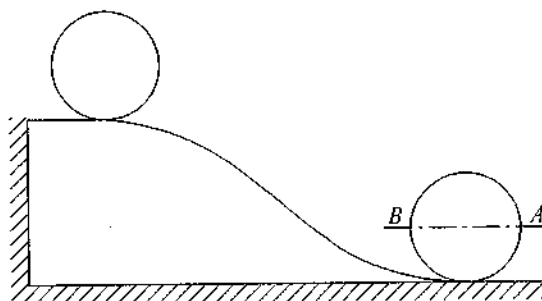
Hình 163

**9.35.** Xác định gia tốc của cuộn chỉ chuyển động trên mặt phẳng nghiêng trong các điều kiện của bài trước, nếu quấn chỉ trên cuộn như hình 164.

**9.36.** Một đĩa nằm ngang có thể quay quanh trục thẳng đứng được đỡ bằng các ổ bi. Cách tâm đĩa một khoảng  $R$  có đặt một khẩu đại bác được cố định chặt với đĩa. Người ta bắn đại bác theo phương ngang sao cho quả đạn sau khi bắn có vận tốc  $v$  và tạo một góc  $\alpha$  với đường nối tâm đĩa và khẩu đại bác tại thời điểm bắn. Sau khi bắn bao lâu đĩa sẽ dừng lại, nếu mômen hãm trong các ổ trục là  $M$ ? Khối lượng quả đạn là  $m$ .



Hình 164

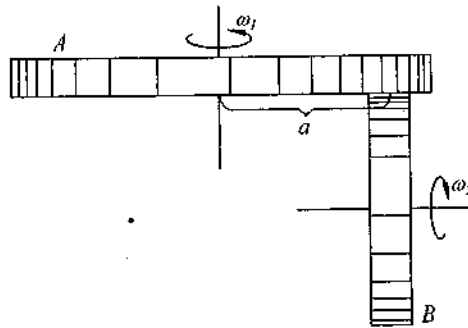


Hình 165

**9.37\*.** Một khối trụ đặc có trục nằm ngang trượt (không lăn) trên bề mặt nhẵn về phía vuông góc với trục của nó. Tại một thời điểm khối trụ tới ranh giới với bề mặt nhám và xuất hiện lực ma sát trượt không đổi (không phụ

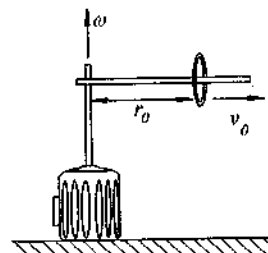
9.29. Trên một đĩa đồng chất nằm ngang khối lượng  $M$ , bán kính  $R$  đứng yên có một người khối lượng  $M$ . Đĩa có thể quay không ma sát quanh trục thẳng đứng đi qua tâm của nó. Tại một thời điểm bất kỳ người đó bắt đầu di chuyển. Đĩa sẽ chuyển động với vận tốc góc  $\omega$  nào, khi người đó di chuyển theo vòng tròn bán kính  $r$  đồng tâm với đĩa với vận tốc  $v$  so với đĩa?

9.30. Một đĩa đồng chất  $A$  khối lượng  $M_1$ , bán kính  $r_1$  (H. 159) đang quay với vận tốc góc  $\omega_0$  được cho tiếp xúc với đĩa  $B$  có trục quay vuông góc với trục của đĩa  $A$ . Khối lượng đĩa  $B$  là  $M_2$ , bán kính  $r_2$ , khoảng cách từ điểm tiếp xúc đến trục đĩa  $A$  là  $a$ . Tìm vận tốc góc ổn định  $\omega_1$  và  $\omega_2$  của các đĩa và sự mất mát năng lượng trong quá trình ổn định. Bỏ qua ma sát trong các trục và ma sát lăn.

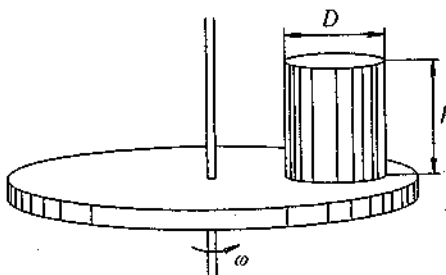


Hình 159

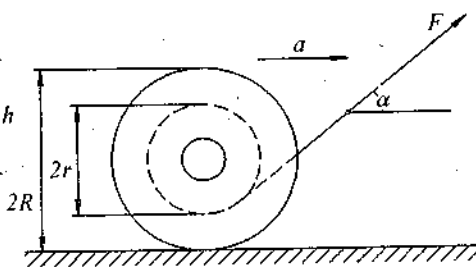
9.31. Trên một thanh nhỏ nằm ngang người ta lồng một chiếc vòng có thể di chuyển dọc theo thanh (H.160). Thanh chuyển động quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc  $\omega$  không đổi như một động cơ điện. Tại thời điểm ban đầu vòng cách trục quay một khoảng  $r_0$  và chuyển động ra xa trục với vận tốc  $\vec{v}_0$  so với thanh. Lực ma sát giữa vòng và thanh có độ lớn sao cho động cơ tiêu hao một công suất không đổi cho chuyển động của vòng. Hỏi tại khoảng cách nào tính từ trục quay thì vận tốc của vòng thay đổi hai lần?



Hình 160



Hình 161

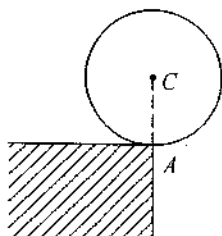


Hình 162

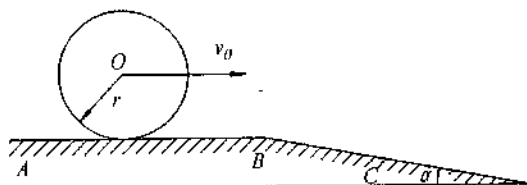
9.32. Trên một đĩa đang quay có đặt một vật hình trụ. Với vận tốc  $\omega$  nào thì vật văng khỏi đĩa? Cho biết khoảng cách giữa trục của đĩa và của hình trụ là

các khối trụ là  $k = 0,07$ . Từ góc  $\alpha$  bằng bao nhiêu thì khối trụ nhỏ bắt đầu trượt, nếu tại thời điểm ban đầu khối trụ nhỏ nằm ở vị trí cao nhất và không có vận tốc ban đầu?

**9.51.** Lúc đầu quả cầu nằm trên bàn sao cho tâm  $C$  của nó nằm trên phương thẳng đứng cùng với mép bàn, sau đó nó bắt đầu vừa rơi vừa quay quanh điểm  $A$  (H.171). Tìm hệ số ma sát trượt  $k$ , nếu quả cầu bắt đầu trượt sau khi quay một góc  $\varphi = 30^\circ$ .



Hình 171

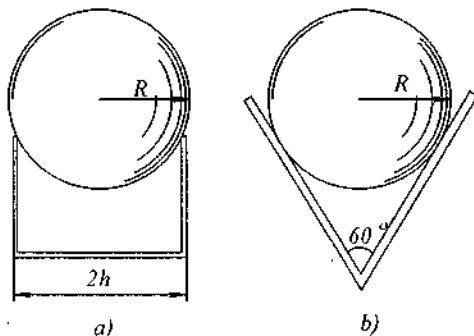


Hình 172

**9.52.** Một khúc gỗ bán kính  $r$  lăn không trượt trên mặt phẳng  $AB$  với vận tốc  $v_0$ . Từ mặt phẳng  $AB$  nó đi sang mặt phẳng nghiêng  $BC$  với góc nghiêng  $\alpha$  (H. 172). Với các giá trị nào của góc  $\alpha$  thì khúc gỗ sẽ chuyển sang mặt phẳng nghiêng một cách trơn tru (không nhảy)? Giả thiết hệ số ma sát trượt tại điểm  $B$  đủ lớn để khúc gỗ không trượt.

**9.53.** Một khối trụ đặc đồng chất lăn không trượt trên một mặt phẳng nghiêng có góc nghiêng với phương ngang là  $\alpha = 30^\circ$ . Khối lượng của khối trụ bằng 300g. Tìm độ lớn lực ma sát giữa khối trụ và mặt phẳng.

**9.54.** Xác định gia tốc  $a$  của tâm quả cầu lăn không trượt theo hai máng nghiêng, tạo với phương ngang một góc  $\alpha$ . Hình dạng mặt cắt của các máng được cho trên hình 173.



Hình 173

**9.55.** Một quả cầu bán kính  $r$  lăn trên mặt phẳng nghiêng so với phương ngang một góc  $\alpha$ . Bắt đầu từ góc  $\alpha$  bằng bao nhiêu thì quả cầu sẽ vừa lăn vừa trượt, nếu hệ số ma sát trượt với mặt phẳng nghiêng là  $k$ ?

**9.56\*.** Một khối trụ đặc đồng chất bán kính  $r$ , không vận tốc tịnh tiến đang quay với vận tốc góc  $\omega_0$  được đặt ở chân của một mặt phẳng nghiêng tạo với phương ngang một góc  $\alpha$ , khối trụ bắt đầu lăn lên dốc. Xác định thời gian đến khi khối trụ đạt tới vị trí cao nhất trên mặt phẳng nghiêng.

**9.57.** Trong bài tập trước giả thiết hệ số ma sát giữa khối trụ và mặt phẳng nghiêng được cho trước và không đổi. Hãy xác định:

- 1) gia tốc  $a_1$  của khối trụ khi nó vừa lăn vừa trượt;
- 2) khoảng thời gian  $t_1$ , mà sau đó khối trụ chỉ lăn không trượt;
- 3) độ cao  $H_1$  mà khối trụ đạt được trước khi chỉ lăn không trượt;
- 4) gia tốc  $a_2$  khi chỉ lăn thuần túy;
- 5) độ cao  $H_2$  mà nó đạt thêm khi chỉ lăn thuần túy;
- 6) tổng độ cao đạt được  $H$ ;
- 7) thời gian  $\bar{t}$  mà nó lăn ngược xuống.

Giả thiết  $k > \tan \alpha$ .

**9.58.** Tìm gia tốc  $a$  của tâm một quả cầu đồng chất lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng tạo với phương ngang một góc  $\alpha$ . Lực ma sát trượt giữa quả cầu và mặt phẳng nghiêng bằng bao nhiêu?

**9.59.** Một khối trụ đặc đồng chất đang quay với vận tốc góc  $\omega_0$  được đặt ở chân của mặt phẳng nghiêng tạo một góc  $\alpha$  so với phương ngang. Khối trụ bắt đầu lăn lên trên. Biết rằng thời gian khối trụ lên đến vị trí cao nhất bằng thời gian nó lăn ngược lại từ vị trí cao nhất đó đến chân mặt phẳng nghiêng. Tìm vận tốc góc của khối trụ khi nó vừa lăn ngược xuống đến chân mặt phẳng nghiêng. Xác định phần động năng ban đầu bị chuyển hoá thành nhiệt năng nếu khối trụ lăn không trượt. Khi nào năng lượng toàn phần giảm: lúc lên dốc hay xuống dốc?

**9.60.** Vận tốc khối tâm của khối trụ trong bài tập trước bằng bao nhiêu, nếu tại thời điểm ban đầu vận tốc góc của khối trụ bằng không, còn vận tốc tịnh tiến bằng  $v_0$  và hướng dọc theo mặt phẳng nghiêng? Tìm phần động năng ban đầu bị chuyển hoá thành nhiệt năng do ma sát.

**9.61.** Một khối trụ đồng chất khối lượng  $m$  lăn không trượt từ trên mặt phẳng nghiêng tạo với phương ngang một góc  $\alpha$ . Mặt phẳng nghiêng được đặt trong thang máy đang chuyển động với gia tốc  $a$ . Tìm độ lớn của lực ma sát và gia tốc của khối trụ so với thang máy.

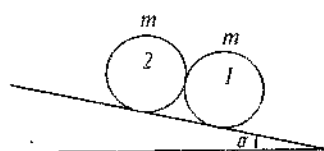
**9.62.** Một khối trụ đồng chất khối lượng  $m$ , bán kính  $R$  lăn không trượt từ mặt phẳng nghiêng của một nêm với góc nghiêng  $\varphi$  ở đáy. Nêm có khối lượng  $M$  và có thể trượt không ma sát trên mặt phẳng ngang. Vận tốc của khối trụ so với nêm ở cuối dốc là  $v$ . Tìm quãng đường mà khối trụ đi được trên mặt nêm.

**9.63.** Một khối trụ đặc bán kính  $r = 5\text{ cm}$  được đặt trên mặt phẳng nghiêng một góc  $45^\circ$  so với phương ngang. Tìm thời gian để khối trụ hạ được độ cao  $1\text{ m}$  và tìm vận tốc góc của khối trụ tại thời điểm này. Hệ số ma sát của khối



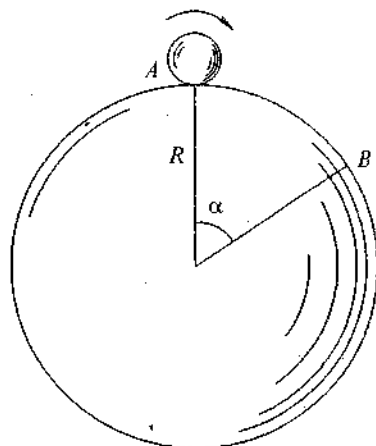
trụ với mặt phẳng nghiêng là  $k = 0,2$ , lực ma sát không phụ thuộc vào vận tốc trượt, bỏ qua ma sát lăn.

**9.64.** Từ trên một mặt phẳng nghiêng nhám tạo góc  $\alpha$  với phương ngang, có hai khối trụ cùng khối lượng  $m$  và cùng bán kính lăn không trượt xuống dưới (H. 174). Một khối trụ là đặc, một khối là rỗng, thành mỏng. Hệ số ma sát giữa các khối trụ là  $k$ . Phải đặt khối trụ rỗng trước hay sau khối trụ đặc để chúng cùng lăn với nhau? Tìm gia tốc  $a$  của các khối trụ và áp lực  $N$  của các khối trụ tác dụng lên nhau.



Hình 174

**9.65.** Một khối trụ rỗng bán kính  $R$  khối lượng  $M$ . Bên trong nó có đặt một khối trụ đặc khối lượng  $m$  và bán kính  $r = 0,5R$ . Trụ rỗng lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng tạo với phương ngang một góc  $\alpha$ . Khối trụ bên trong cũng lăn không trượt trên thành trụ ngoài. Vận tốc đầu của cả hai hình trụ đều bằng không. Xác định gia tốc của hệ.



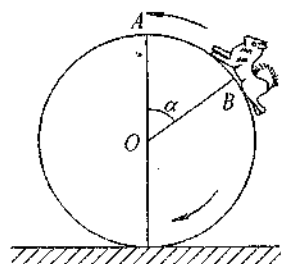
Hình 175

**9.66.** Một hòn bi bán kính  $r$  lăn không trượt và không có vận tốc ban đầu trên bề mặt cầu từ điểm cao nhất A (H. 175). Xác định điểm mà hòn bi sẽ rời khỏi mặt cầu và chuyển động do tác dụng của trọng lực.

**9.67.** Một hòn bi-a, bán kính nhỏ hơn bán kính  $R$  của (H. 61) lăn không trượt từ độ cao  $2R$  theo lòng máng. Ở độ cao  $h$  nào thì hòn bi-a rời khỏi máng? Nó đạt được độ cao  $H$  nào sau khi rời khỏi máng?

**9.68.** Người ta ném một chiếc vành bán kính  $R$  về phía trước với vận tốc  $v_0$ , đồng thời truyền cho nó một vận tốc góc  $\omega_0$ . Xác định giá trị nhỏ nhất của vận tốc góc  $\omega_{\min}$  để sau khi trượt vành sẽ lăn ngược trở lại. Tìm giá trị của vận tốc cuối cùng  $v$ , nếu  $\omega_0 > \omega_{\min}$ . Bỏ qua ma sát lăn.

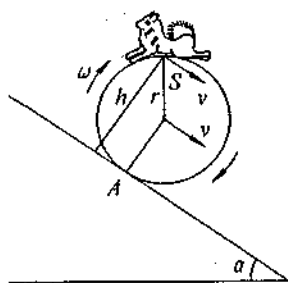
**9.69.** Trên bề mặt của một hình trụ rỗng lớn nằm trên mặt phẳng ngang có một con chó khối lượng  $m$  bắt đầu leo về phía điểm cao nhất A, và nó luôn ở cùng một khoảng cách so với điểm A (H. 176). Kết quả là hình trụ bắt đầu lăn không trượt trên mặt phẳng ngang, khối lượng hình trụ là  $M$ , góc AOB bằng  $\alpha$ . Hãy xác định: 1) gia tốc  $a$  của trục hình trụ;



Hình 176

2) lực ma sát  $F_{ms}$  giữa hình trụ và mặt phẳng trong thời gian lăn; 3) thời gian mà con chó có thể giữ được vị trí nói trên nếu công suất có ích lớn nhất mà nó có thể tạo ra bằng  $N_{max}$ . Vận tốc cực đại  $v_{max}$  của chuyển động tịnh tiến của hình trụ bằng bao nhiêu? (Công suất có ích ở đây là công suất mà con chó sinh ra để làm tăng động năng của hệ).

**9.70\*.** Một hình trụ lớn, rỗng khối lượng  $m$ , bán kính  $r$  lăn trên một mặt phẳng nghiêng tạo với phương ngang một góc  $\alpha$  (H. 177). Trên bề mặt của hình trụ có một con chó đang chạy, sao cho nó luôn giữ vị trí cao nhất của trụ. Gia tốc lăn  $a$  của hình trụ bằng bao nhiêu nếu khối lượng của chó là  $m_1$ .



Hình 177

**9.71.** Một quả cầu khối lượng  $m$  lăn không trượt và va vào một quả cầu đang đứng yên khối lượng  $M$ . Va chạm giữa chúng là va chạm đàn hồi xuyên tâm, bỏ qua ma sát giữa các quả cầu. Hỏi tỷ số khối

lượng  $x = \frac{M}{m}$  bằng bao nhiêu thì sau va chạm quả cầu  $m$  sẽ dừng lại?

Phần năng lượng nào của quả cầu đã chuyển hoá thành nhiệt năng? Bỏ qua ma sát lăn.

**9.72.** Cần phải chọc gậy vào quả bi-a như thế nào để lực ma sát giữa nó với lớp dạ trên mặt bàn làm nó chuyển động: 1) nhanh dần; b) chậm dần; c) đều? Giả thiết rằng gậy chọc ngang trong mặt phẳng thẳng đứng đi qua tâm cầu và điểm tiếp xúc của nó với mặt bàn.

**9.73.** Cần phải chọc gậy vào quả bi-a như thế nào để khi nó va vào quả bi-a khác (đang đứng yên) thì: 1) hai quả cùng chuyển động về phía trước, 2) quả thứ nhất dừng lại, quả thứ hai chuyển động về phía trước, 3) quả thứ hai chuyển động về phía trước, quả thứ nhất lăn ngược trở lại? Chiều và mặt phẳng chọc gậy giả thiết như bài trước.

**9.74.** Một quả cầu khối lượng  $m$ , bán kính  $r$  ở trên mặt bàn nằm ngang bị đập nhanh theo phương ngang, nó nhận được động lượng  $P$ . Vị trí va đập cao hơn so với tâm cầu một đoạn  $kr$  ( $k \leq 1$ ). Tìm động năng của chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay của quả cầu. Với giá trị nào của  $k$  thì quả cầu sẽ lăn không trượt?

**9.75.** Một hình trụ thành mỏng lăn không trượt với vận tốc  $v$  trên bề mặt nhám và va chạm đàn hồi tuyệt đối với một hình trụ tương tự đang đứng yên. Khi va chạm không xảy ra sự truyền chuyển động quay. Hỏi khoảng cách giữa các hình trụ là bao nhiêu khi chúng bắt đầu lăn không trượt? Hệ số ma sát trượt bằng  $k$ .

**9.76.** Hai hình trụ giống nhau có thành mỏng lăn đến gặp nhau với cùng vận tốc  $v$  và va chạm đàn hồi tuyệt đối với nhau. Khi va chạm không xảy ra sự

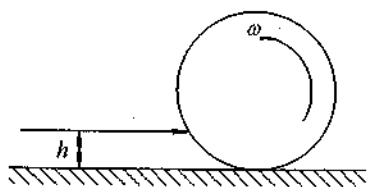
truyền chuyển động quay. Hỏi các hình trụ sẽ dừng cách nhau một khoảng bằng bao nhiêu? Hệ số ma sát trượt bằng  $k$ .

**9.77.** Trên mặt phẳng nằm ngang có một quả cầu gỗ khối lượng  $M$ . Một viên đạn chì bay theo phương ngang cắm vào quả cầu và nằm trong tâm quả cầu. Sau đó quả cầu bắt đầu lăn không trượt với vận tốc  $V$ . Xác định vận tốc ban đầu  $v_0$  của viên đạn. Kích thước viên đạn rất nhỏ so với bán kính quả cầu.

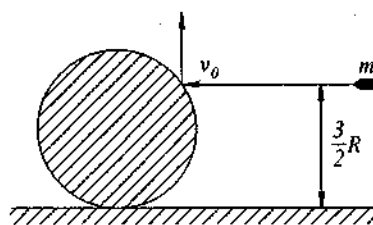
**9.78.** Một quả cầu lớn đồng nhất bằng chì khối lượng  $M$  nằm trên mặt phẳng ngang. Một viên đạn không lớn lắm khối lượng  $m$  bay từ nòng súng theo phương ngang với vận tốc  $v$  về phía tâm cầu. Sau đó viên đạn bị mắc trong quả cầu. Xác định vận tốc dài của quả cầu khi chuyển động của nó trở thành chuyển động lăn thuần túy. Khi xét chuyển động của quả cầu sau va chạm coi nó là đồng nhất, bỏ qua khối lượng viên đạn mắc trong nó. Bỏ qua ma sát lăn.

**9.79.** Một viên đạn khối lượng  $m$  bay theo phương ngang với vận tốc  $v_0$  bắn vào một quả cầu bằng gỗ khối lượng  $M$ , bán kính  $R$  đang đứng yên. Vị trí bắn của viên đạn thấp hơn tâm quả cầu một khoảng  $h$ . Viên đạn dính vào quả cầu. Tìm vận tốc ổn định  $v$  của quả cầu. Giả thiết  $m \ll M$ .

**9.80.** Trên một mặt bàn nhám một quả cầu bán kính  $R$  đang chuyển động quanh trục nằm ngang với vận tốc góc  $\omega_0$  thì được đẩy một lực ở độ cao  $h$  ( $h < R$ ) so với mặt bàn (H. 178), sao cho quả cầu nhận được vận tốc tịnh tiến  $v_0$  theo hướng vuông góc với trục quay. Hỏi với giá trị nào của vận tốc góc  $\omega_0$  thì quả cầu sẽ chuyển động ngược lại sau một thời gian kể từ khi bắt đầu chuyển động?



Hình 178



Hình 179

**9.81.** Một viên đạn khối lượng  $m$  đang bay theo phương ngang với vận tốc  $v_0$  bắn vào một quả cầu kim loại khối lượng  $M$ , bán kính  $R$  đang đứng yên trên mặt bàn nằm ngang. Viên đạn bắn vào quả cầu ở vị trí cao hơn tâm cầu

một khoảng  $\frac{R}{2}$  và bật thẳng đứng lên trên (H. 179). Sau một thời gian chuyển động của quả cầu chuyển thành chuyển động lăn đều với vận tốc  $v_0$ . Xác định vận tốc của viên đạn sau va chạm với quả cầu.

**9.82.** Một viên đạn khối lượng  $m$  bay với vận tốc  $v_0$  đồng thời quay quanh trục của nó với vận tốc góc  $\omega_0$  bắn vào một quả cầu khối lượng  $M$ , bán kính  $R$  đang nằm trên mặt bàn. Bán kính quán tính của viên đạn là  $r$ . Viên đạn bị mắc vào tâm quả cầu. Tìm năng lượng  $\Delta E$  mất đi khi viên đạn xuyên vào quả cầu. Trong thời gian đạn xuyên quả cầu không dịch chuyển.

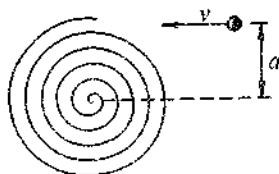
**9.83.** Một quả cầu đang lăn không trượt trên bàn bi-a với vận tốc  $v_0$  vuông góc với thành bàn và va vào thành bàn. Giả thiết va chạm là đàn hồi tuyệt đối, tìm vận tốc của quả cầu sau khi nảy bật lại tại thời điểm mà nó ngừng trượt.

**9.84.** Một quả cầu khối lượng  $M$ , bán kính  $R$  bay với vận tốc  $v_0$  và đập vào một quả cầu đang đứng yên khối lượng  $\frac{M}{2}$ , bán kính  $\frac{R}{2}$ . Khoảng cách giữa hướng chuyển động của tâm quả cầu thứ nhất và tâm quả cầu đứng yên là  $\frac{R}{2}$ . Sau va chạm hai quả cầu không bị biến dạng dính vào nhau và chuyển động như một khối. Xác định sự thay đổi động năng  $\Delta K$  do va chạm.

**9.85.** Quả cầu khối lượng  $M = 1000\text{g}$  đang ở trên mặt phẳng nằm ngang thì bị một viên đạn bay ngang với vận tốc đầu  $V_0 = 500\text{m/s}$  xuyên thủng theo đường kính. Sau va chạm quả cầu bắt đầu trượt theo mặt phẳng. Sau một khoảng thời gian, quả cầu chỉ có chuyển động lăn với vận tốc không đổi  $v = 3\text{m/s}$ . Xác định vận tốc  $V$  của viên đạn sau khi bay ra khỏi quả cầu, nếu khối lượng viên đạn  $m = 10\text{g}$ . Bỏ qua ma sát lăn.

**9.86.** Một đoạn ống có thành mỏng nằm trên mặt bàn. Đường kính ngoài của nó là  $D$ . Người ta tác dụng một lực theo phương ngang cách mặt bàn  $\frac{7D}{8}$  vào đoạn ống. Độ dài  $d$  của ống bằng bao nhiêu thì đoạn ống sẽ lăn không trượt sau khi có lực tác dụng?

**9.87.** Một quả cầu khối lượng  $m$  bay vào vòng xoắn ốc và dừng lại ở tâm của nó (H. 180). Tìm vận tốc góc của vòng xoắn sau khi quả cầu dừng lại. Vận tốc ban đầu của quả cầu là  $v$ , bán kính vòng xoắn là  $a$ , khối lượng của nó là  $M$ , mômen quán tính là  $I$ . Bỏ qua kích thước quả cầu. Vòng xoắn có thể chuyển động tự do trong không gian.

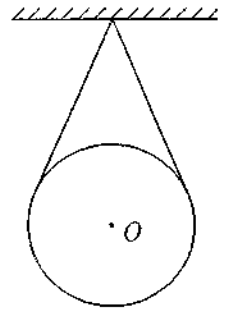


Hình 180

**9.88.** Một con lắc thử đạn được làm dưới dạng một thanh đồng chất dài  $L$ , khối lượng  $M$  được treo lên sao cho nó có thể lệch không ma sát về bất kỳ hướng nào quanh điểm treo cố định ở đầu trên của nó (khớp). Một viên đạn

có khối lượng  $m$ , bán kính  $r \ll L$ , có vận tốc ngang  $v$  và vận tốc góc  $\omega$  quanh trục viên đạn trùng hướng với  $v$ , được bắn vào đầu dưới của thanh và dính vào đó. Con lắc sẽ lệch so với phương vận tốc  $v$  một góc  $\varphi$  bằng bao nhiêu và độ góc cực đại  $\psi$  của nó bằng bao nhiêu? Có thể coi viên đạn như một khối trụ.

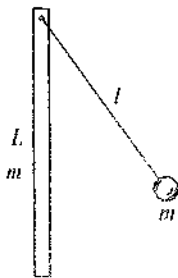
**9.89.** Một con lắc thử đạn có dạng trụ khối lượng  $M$ , bán kính  $R$  treo trên sợi chỉ không giãn (H. 181). Viên đạn có khối lượng  $m$  chuyển động với vận tốc  $v$  dọc theo trục khối trụ, xuyên vào và mắc ở tâm của nó. Viên đạn quay quanh trục dọc của nó với vận tốc  $\omega$ . Khoảng cách từ điểm treo đến tâm con lắc là  $L$ . Con lắc có thể di chuyển không ma sát về mọi hướng. Viên đạn có thể coi như một khối trụ đồng chất bán kính  $r$  ( $r \ll R$ ). Xác định chiều vận tốc của con lắc so với quỹ đạo viên đạn ngay sau khi viên đạn mắc vào nó. Giả thiết rằng trong thời gian viên đạn xuyên vào con lắc, con lắc không kịp lệch một khoảng đáng kể.



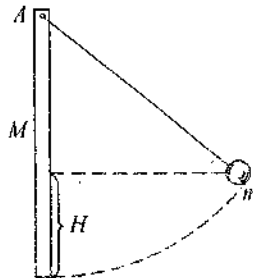
Hình 181

**9.90.** Một thanh nhỏ, nặng, đồng chất dài  $l$  được treo trên một trục ngang đi qua một đầu của nó. Phải truyền cho thanh vận tốc góc ban đầu bằng bao nhiêu để nó quay một góc  $90^\circ$ ?

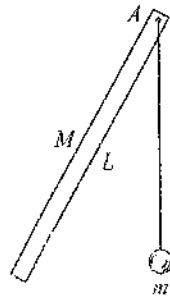
**9.91.** Một thanh nhỏ khối lượng  $m$ , dài  $L$  (H. 182) được treo một đầu trên trục ngang và có thể quay không ma sát quanh trục này. Treo một sợi chỉ dài  $l$  vào trục này, đầu kia sợi chỉ có treo một quả cầu có cùng khối lượng  $m$ . Người ta kéo quả cầu lệch một góc và thả ra. Với chiều dài  $l$  của sợi chỉ bằng bao nhiêu thì sau khi va chạm vào thanh quả cầu sẽ dừng lại? Coi va chạm là đàn hồi tuyệt đối.



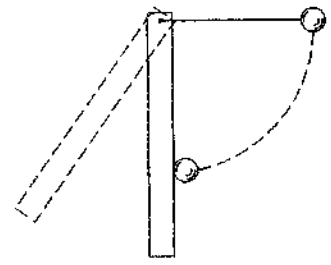
Hình 182



Hình 183



Hình 184



Hình 185

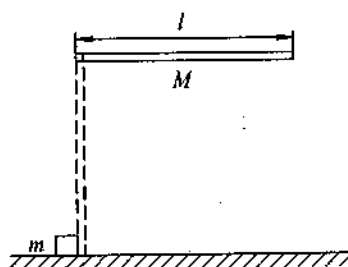
**9.92\*.** Một con lắc khối lượng  $m$  và một thanh khối lượng  $M$  (H. 183) được treo vào cùng điểm  $A$ , và chúng có thể dao động tự do quanh  $A$ . Chiều dài của dây con lắc bằng chiều dài của thanh. Con lắc được kéo lên tới độ cao  $H$  so với vị trí ban đầu. Sau đó người ta thả con lắc ra và nó va chạm không đàn

hồi với thanh. Con lắc và đầu dưới của thanh sẽ chuyển động như thế nào sau khi va chạm, và chúng sẽ đạt được độ cao bằng bao nhiêu?

**9.93.** Tại điểm treo chung A (H. 184) có treo một quả cầu trên một sợi chỉ dài  $l$  và một thanh đồng chất dài  $L$  lệch so với phương thẳng đứng một góc. Khi thanh trở về vị trí cân bằng nó va chạm đàn hồi với quả cầu. Với tỷ lệ nào giữa khối lượng  $M$  của thanh và khối lượng  $m$  của quả cầu thì sau khi xảy ra va chạm quả cầu và điểm va chạm của thanh sẽ chuyển động với cùng vận tốc nhưng theo hai hướng ngược nhau? Với tỷ lệ nào giữa  $M$  và  $m$  thì điều đó không xảy ra?

**9.94.** Một thanh nhỏ được treo một đầu và có thể quay không ma sát quanh trục nằm ngang. Người ta cũng treo trên trục này một sợi dây ngắn hơn chiều dài thanh, đầu kia sợi dây có treo một quả cầu có khối lượng bằng khối lượng thanh. Quả cầu được kéo lên vị trí sao cho sợi chỉ nằm ngang rồi thả ra (H. 185) Sau khi va chạm đàn hồi với thanh quả cầu dừng lại. Thanh đó lệch một góc cực đại bằng bao nhiêu?

**9.95\*.** Một thanh khối lượng  $M$  chiều dài  $l$  có thể quay tự do quanh một trục cố định nằm ngang đi qua một đầu thanh. Dưới tác dụng của trọng lực thanh di chuyển từ vị trí nằm ngang xuống vị trí thẳng đứng (H. 186). Khi đi qua vị trí thẳng đứng, đầu dưới của thanh va chạm đàn hồi với một vật nhỏ khối lượng  $m$  đang nằm trên mặt bàn nhẵn. Xác định vận tốc của vật sau va chạm.



Hình 186

**9.96.** Một thanh khối lượng  $M$  và chiều dài  $l$  được treo một đầu trên đỉnh. Một quả cầu khối lượng  $m$  đang chuyển động với vận tốc  $v$  hợp với thanh một góc  $\alpha$  bay đến đập vào thanh. Sau khi va chạm thanh lệch so với phương thẳng đứng một góc  $\varphi$  bằng bao nhiêu? Va chạm hoàn toàn không đàn hồi.

**9.97.** Một tấm ván đồng chất dài  $l$ , khối lượng  $M$  treo một đầu trên một bản lề. Người ta kéo tấm ván lệch một góc  $\varphi$  so với phương thẳng đứng và thả ra, tấm ván đập vào một quả cầu khối lượng  $m$  treo trên một sợi chỉ có chiều dài bằng chiều dài của nó. Va chạm là đàn hồi. Xác định góc lệch so với vị trí cân bằng của tấm ván và quả cầu sau va chạm.

**9.98.** Một quả cầu khối lượng  $m$  treo trên một sợi chỉ không giãn dài  $l$  được kéo lệch một góc nhỏ so với vị trí cân bằng. Người ta treo vào điểm treo quả cầu một đầu của thanh đồng chất dài  $l_1 = \frac{3l}{2}$ . Hỏi khối lượng  $m_1$  của thanh

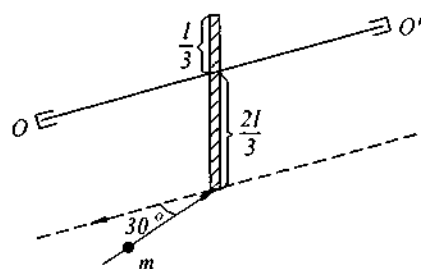
phải bằng bao nhiêu để sau khi va chạm quả cầu dừng lại? Va chạm là đàn hồi tuyệt đối. Thanh sẽ chuyển động như thế nào sau khi va chạm? Xác định chu kỳ dao động của quả cầu.

**9.99.** Một thanh đồng chất chiều dài  $l$  được treo một đầu lên trần nhà bằng một sợi dây rất ngắn. Thanh được kéo lệch một góc  $45^\circ$  so với phương thẳng đứng và truyền cho đầu dưới của nó một vận tốc  $v_0$  theo hướng vuông góc với mặt phẳng thẳng đứng chứa thanh khi lệch. Hỏi vận tốc  $v_{0\min}$  phải bằng bao nhiêu để sau đó thanh có thể chạm tới trần nhà?

**9.100.** Một tấm ván đồng chất treo thẳng đứng dài  $L = 1,5\text{m}$ , khối lượng  $M = 10\text{kg}$  có thể quay quanh một trục nằm ngang đi qua đầu trên của tấm. Một viên đạn đang bay ngang với vận tốc  $v_0 = 600\text{m/s}$  bắn vào đầu dưới của tấm ván. Viên đạn xuyên qua tấm ván và tiếp tục bay với vận tốc  $v$ . Xác định  $v$  nếu sau khi bị xuyên, tấm ván dao động với biên độ góc  $\alpha = 0,1\text{rad}$ . Khối lượng viên đạn  $m = 10\text{g}$ .

**9.101.** Vận động viên thể dục dụng cụ quay một vòng trên xà đơn khi đang đứng bằng hai tay, tức là quay thẳng người quanh xà dưới tác dụng của trọng lực. Xác định gần đúng tải trọng lớn nhất  $F$  trên hai tay, bỏ qua ma sát của hai bàn tay với xà.

**9.102.** Một thanh nhỏ đồng chất khối lượng  $M$ , chiều dài  $l$  có thể quay không ma sát quanh trục nằm ngang  $OO'$  phân thành thành hai phần với tỷ lệ 1:2. Đầu dưới của thanh va chạm đàn hồi với một quả cầu nhỏ khối lượng  $m$  đang bay trong mặt phẳng ngang và tạo với trục  $OO'$  một góc  $30^\circ$  (H.187). Với vận tốc  $v$  nào thì thanh (đứng yên trước khi va chạm) có thể quay được một vòng quanh trục, nếu sau khi va chạm vận tốc của quả cầu song song với trục  $OO'$ ? Thanh được cố định chặt vào trục và không thể trượt theo trục.

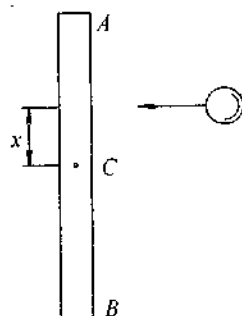


Hình 187

**9.103\*.** Có thể chém cây liễu bằng phần nào của kiếm để tay không cảm thấy bị va đập? Coi thanh kiếm như một thanh đồng chất.

**9.104.** Trên mặt bàn nhẵn nằm ngang có đặt một thanh đồng chất chiều dài  $l$ , thanh có thể chuyển động không ma sát trên mặt bàn (H. 188). Tại thời điểm ban đầu khi vận tốc của thanh bằng không, một quả cầu chuyển động trên mặt bàn vuông góc với thanh đập vào thanh. Quả cầu va chạm cách tâm của thanh một khoảng  $x$  bằng bao nhiêu để ngay sau khi va chạm, đầu  $A$  và  $B$  của thanh bắt đầu chuyển động với vận tốc  $v_A$  và  $v_B$  tương ứng? (vận tốc  $v_A$  và  $v_B$  coi là dương nếu chúng cùng hướng với vận tốc của quả cầu trước va chạm, là âm nếu ngược lại).

**9.105.** Trên mặt phẳng ngang nhẵn lý tưởng có đặt một thanh dài  $l$ , khối lượng  $M$ , thanh có thể trượt không ma sát trên bề mặt này (H. 188). Một quả cầu nhỏ khối lượng  $m$  chuyển động vuông góc với thanh và va vào thanh. Điểm va chạm cách trung điểm của thanh một khoảng  $x$  bằng bao nhiêu để quả cầu truyền hết động lượng của nó cho thanh? Va chạm là đàn hồi tuyệt đối. Với tỷ lệ nào giữa  $M$  và  $m$  thì điều đó xảy ra?



Hình 188

**9.106.** Một thanh khối lượng  $M$  nằm trên mặt bàn nhẵn nằm ngang. Một quả cầu bay vuông góc với thanh và song song mặt bàn với vận tốc  $v_0$  và vào một đầu của thanh. Giả thiết khối lượng quả cầu  $m$  nhỏ không đáng kể so với khối lượng thanh, xác định động năng của thanh  $K$  sau va chạm, nếu va chạm là đàn hồi tuyệt đối.

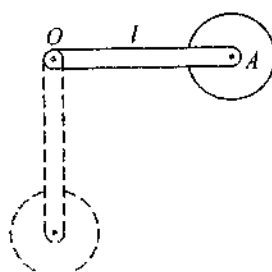
**9.107.** Một tấm ván khối lượng  $M$  nằm trên mặt bàn nhẵn nằm ngang. Một quả cầu bay vuông góc với tấm ván và đập vào tấm ván. Xác định động năng  $K$  chuyển hoá thành nội năng (nhiệt) của hệ, nếu điểm va chạm cách đầu tấm ván một khoảng bằng  $\frac{1}{4}$  chiều dài tấm. Khối lượng viên đạn không

đáng kể so với khối lượng tấm ván, bỏ qua chiều rộng của tấm.

**9.108.** Trên mặt bàn nhẵn có đặt một thanh đồng chất đàn hồi, khối lượng  $M$ . Một quả cầu đàn hồi nhỏ khối lượng  $m$  đang chuyển động với vận tốc  $v$  vuông góc với thanh và đập vào một đầu của thanh. Tìm năng lượng biến dạng của hệ tại thời điểm khi năng lượng này đạt cực đại. Bỏ qua ma sát giữa thanh và mặt bàn.

**9.109\*.** Trên mặt bàn nhẵn nằm ngang có đặt một thanh cứng đồng chất chiều dài  $l$ , khối lượng  $M$ . Một quả cầu khối lượng  $m$  đang chuyển động với vận tốc  $v_0$  vuông góc với thanh và đập vào một đầu của thanh. Giả thiết va chạm là đàn hồi và lực ma sát giữa mặt bàn và các vật nằm trên nó nhỏ không đáng kể, tính vận tốc góc của thanh sau va chạm.

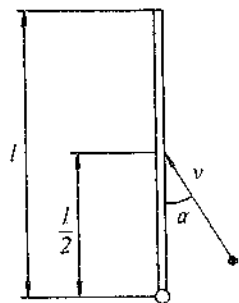
**9.110.** Một thanh nhẹ chiều dài  $l$  có thể quay tự do quanh trục nằm ngang  $O$  đi qua một đầu của thanh (H. 189). Đầu còn lại của thanh có lắp một trục  $A$ , trên trục  $A$  lắp một đĩa đồng chất bán kính  $r$ . Sau khi cố định đĩa vào trục  $A$  người ta đưa thanh lên đến vị trí nằm ngang và buông ra. Khi thanh đi qua vị trí cân bằng đĩa đột ngột được tháo chốt hãm sao cho nó có thể quay tự do quanh trục  $A$ . Xác định độ cao  $x$  mà đĩa đạt được trong chuyển động tiếp theo của hệ.



Hình 189



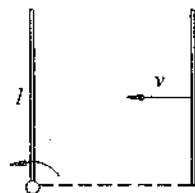
**9.111.** Một thanh mảnh đồng chất dài  $l = 0,3\text{m}$  nằm trên bề mặt nhám với hệ số ma sát  $k = 0,1$  (H. 190). Một đầu của thanh lắp vào một trục thẳng đứng, thanh có thể quay quanh trục này, ma sát trong trục không đáng kể. Tại thời điểm ban đầu, một vật nặng bằng thanh, kích thước nhỏ không đáng kể so với thanh trượt trên bề mặt với vận tốc  $v = 6\text{m/s}$  tới đập vào chính giữa thanh dưới một góc  $\alpha = 30^\circ$ . Va chạm là đàn hồi tuyệt đối. Hỏi thanh quay được bao nhiêu vòng thì dừng lại?



Hình 190

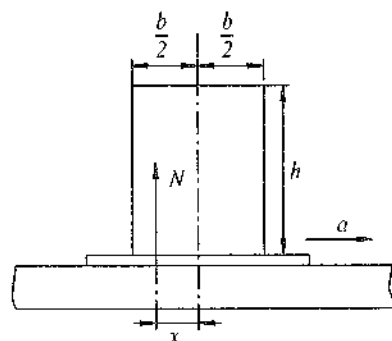
**9.112.** Trên mặt phẳng nhẵn nằm ngang có một thanh mảnh chiều dài  $l$ , nặng  $M$ , quay tự do với vận tốc góc  $\omega_0$  quanh một trục thẳng đứng đi qua một đầu của nó. Thanh va chạm đàn hồi với một quả cầu khối lượng  $m$  đang đứng yên và sau khi va chạm thanh dừng lại. Điểm va chạm nằm cách trục quay một khoảng  $x$ . Tìm mối liên hệ giữa các khối lượng  $M$ ,  $m$  và khoảng cách  $x$ . Tìm vận tốc  $v$  của quả cầu sau va chạm và vận tốc lớn nhất mà quả cầu có thể nhận được.

**9.113.** Một thanh mảnh đồng chất dài  $l = 0,3\text{m}$  nằm trên bề mặt nhám với hệ số ma sát  $k = 0,1$  (H. 191). Một đầu của thanh lắp vào trục thẳng đứng, thanh có thể quay quanh trục này, ma sát trong trục không đáng kể. Tại thời điểm ban đầu một thanh tương tự chuyển động tịnh tiến với vận tốc  $v = 3\text{m/s}$  tới đập vào thanh. Va chạm tuyệt đối không đàn hồi. Tại thời điểm va chạm các thanh song song với nhau. Sau  $n$  bằng bao nhiêu vòng thì chúng ngừng quay?



Hình 191

**9.114.** Chùm pháo hoa được hình thành khi cháy thuốc nhồi từ hai ống phóng buộc trên hai đầu của một cái sào có trục quay ở giữa. Xác định vận tốc góc lớn nhất có thể  $\omega_{\max}$  của chiếc sào dài  $2l$ , nặng  $M$ , nếu vận tốc phụt khí thuốc tương đối không đổi và bằng  $u$ . Khối lượng ban đầu của thuốc nhồi ở mỗi ống phóng là  $m_0$ , bỏ qua kích thước của chúng.



Hình 192

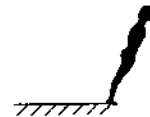
**9.115.** Một lăng kính chữ nhật đặt trên một tấm ván nhám đang nằm trên mặt bàn ngang (H.192). Hỏi phải dịch chuyển tấm ván với gia tốc tối thiểu  $a_{\min}$  bằng bao nhiêu để lăng kính đổ về phía sau (so với hướng chuyển động của tấm ván) qua cạnh sau phía dưới của lăng kính? Tìm phản lực

$N$  mà tấm ván tác dụng lên lăng kính khi nó chuyển động với gia tốc  $a$  và toạ độ điểm đặt  $x$  của nó. Giải bài toán trong các hệ quy chiếu gắn với tấm ván và gắn với bàn.

**9.116.** Một thanh mảnh, nhẵn có chiều dài  $2l = 2$  (m), khối lượng  $M = 30\text{kg}$  có thể quay không ma sát quanh một trục ngang đi qua tâm của nó. Tại thời điểm ban đầu thanh đứng yên và tạo một góc  $\varphi = 30^\circ$  với phương ngang, ở phía đầu thanh cao hơn người ta lồng vào một vòng nặng  $m = 1\text{kg}$ . Thanh bắt đầu quay và khi nó đi qua vị trí nằm ngang thì vòng nằm cách tâm thanh một khoảng  $0,5\text{m}$  và có vận tốc  $v_t = 3\text{m/s}$  hướng vào trục quay. Xác định vận tốc góc của thanh tại thời điểm trên.

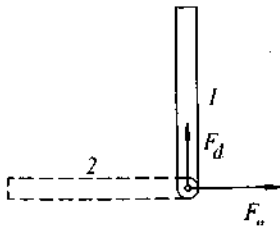
**9.117.** Xét xem người vận động viên sẽ quay bao nhiêu vòng khi rơi ở tư thế “nghiêm” (H. 193) từ cầu nhảy cao  $10\text{m}$ ?

**9.118.** Một cột thẳng đứng chiều cao  $l$  bị cưa ở chân, đổ xuống đất và quay quanh đầu dưới của nó. Xác định vận tốc dài của đầu trên của cột tại thời điểm nó chạm đất. Tại thời điểm này điểm nào của cột có vận tốc bằng vận tốc của vật rơi tự do từ độ cao bằng độ cao của điểm đó?

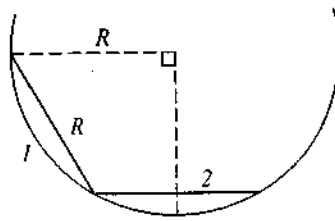


Hình 193

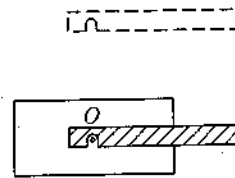
**9.119\*.** Một thanh đồng chất khối lượng  $m$ , dài  $l$  (H. 194) rơi không vận tốc đầu từ vị trí  $1$  thực hiện chuyển động quay quanh trục cố định nằm ngang  $O$ . Tìm thành phần nằm ngang  $F_n$  và thành phần thẳng đứng  $F_d$  của lực mà trục tác dụng lên thanh tại vị trí nằm ngang  $2$ .



Hình 194



Hình 195



Hình 196

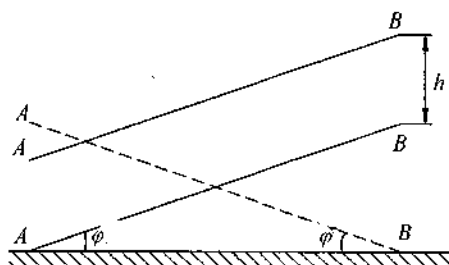
**9.120.** Một thanh đồng chất dài  $L$  khi rơi nó trượt một đầu trên mặt sàn nằm ngang nhẵn tuyệt đối. Tại thời điểm ban đầu thanh đứng yên ở vị trí đứng thẳng. Xác định vận tốc trọng tâm của thanh theo chiều cao của nó so với sàn.

**9.121.** Một thanh đồng chất dài  $R$ , nặng  $m$  trượt không ma sát theo mặt cầu bán kính  $R$  và luôn nằm trong mặt phẳng thẳng đứng chứa tâm mặt cầu (H.195). Tìm vận tốc trọng tâm của thanh tại thời điểm khi nó ở vị trí nằm ngang  $2$ , nếu nó trượt từ vị trí  $1$  không có vận tốc ban đầu.

**9.122.** Một thanh đang nằm ngang rơi từ độ cao  $h$  và va chạm đàn hồi một đầu vào cạnh bàn. Xác định vận tốc tâm quán tính của thanh ngay sau khi va chạm.

**9.123.** Một thanh cứng đồng chất khối lượng  $m$  rơi ở tư thế nằm ngang (H.196). Tại thời điểm khi đầu bên trái của nó mắc vào trục  $O$  cố định trên một tấm ván lớn, chuyển động tịnh tiến của thanh biến thành chuyển động quay. Trước thời điểm này, vận tốc rơi của thanh đạt giá trị  $v$ . Giả thiết va chạm xảy ra tức thời. Xác định sự tiêu hao năng lượng và động lượng của thanh khi va chạm.

**9.124.** Thanh  $AB$  có chiều dài  $l$  nghiêng so với phương ngang một góc  $\varphi$  rơi không quay từ độ cao  $h$  lên một bàn nằm ngang và va chạm đàn hồi vào mặt bàn, đầu tiên là đầu bên trái, tiếp theo là đầu bên phải (H. 197). Khi va đầu bên phải thanh lại tạo với phương ngang một góc  $\varphi$ . Tìm độ cao  $h$ . Với các giá trị nào của  $\varphi$  thì có thể xảy ra quá trình rơi như trên?



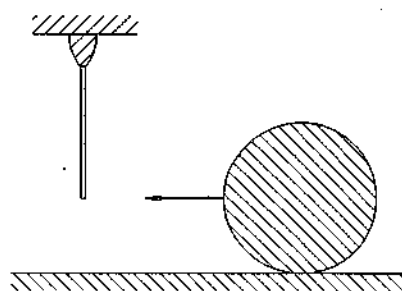
Hình 197

**9.125.** Một thanh mảnh dài  $2l$  quay đều với vận tốc  $\omega$  quanh trục đi qua tâm và vuông góc với thanh. Hãy chứng minh rằng lực căng  $T$  xuất hiện trong

thanh trong quá trình quay này thoả mãn phương trình  $\frac{dT}{dx} = -\rho\omega^2 x$ , trong

đó  $\rho$  là khối lượng riêng của thanh,  $x$  là khoảng cách đến trục quay. Tìm phân bố của lực căng trong thanh. Tại điểm nào của thanh lực căng là lớn nhất và nó bằng bao nhiêu? Hãy chứng tỏ rằng động năng lớn nhất có thể truyền cho thanh khi độ bền của vật liệu làm thanh không đổi chỉ phụ thuộc vào thể tích  $V$  của thanh, chứ không phụ thuộc vào khối lượng của nó. Tính động năng này đối với trường hợp  $V = 3 \cdot 10^4 \text{ cm}^3$ , nếu lực căng cực đại mà thanh có thể chịu được là  $T_{\max} = 10^5 \text{ N/cm}^2$ .

**9.126.** Một quả cầu đồng chất khối lượng  $m$ , bán kính  $R$  lăn không trượt trên mặt phẳng ngang với vận tốc  $v_0$  đến đập vào đầu một thanh dài  $L$  nặng  $10m$  treo trên một bản lề (H.198). Quả cầu và thanh sẽ chuyển động như thế nào sau va chạm? Sau một khoảng thời gian bằng bao nhiêu thì quả cầu chỉ lăn thuần túy? Vận tốc lăn khi đó bằng bao nhiêu? Giả thiết va chạm là đàn hồi và tức thời. Hệ số ma sát của quả cầu và mặt phẳng là  $k$ . Bỏ qua ma sát lăn.

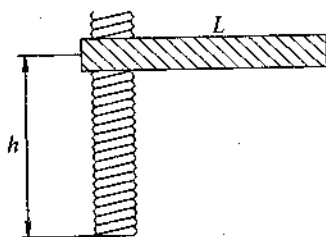


Hình 198

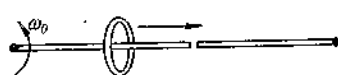
**9.127.** Một tấm ván đồng chất nằm ngang khối lượng  $M$ , chiều dài  $2l$  được giữ ở vị trí trọng tâm trên một bản lề. Một đầu của nó đặt trên lò xo có độ

cứng  $k$ . Một người khối lượng  $m$  nhảy từ độ cao  $H$  lên đầu này của tấm ván. Tìm độ nén cực đại  $x_{\max}$  của lò xo, giả thiết  $x_{\max} \ll l$ .

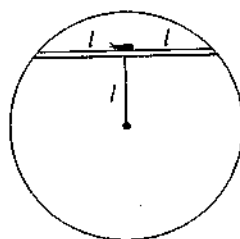
**9.128.** Một thanh đồng chất dài  $L$ , một đầu của thanh có lỗ ren và được lắp vào một trục vít cố định đặt thẳng đứng (H. 199). Thanh bắt đầu chuyển động không ma sát và không có vận tốc ban đầu để văng ra khỏi trục vít. Thanh sẽ chuyển động như thế nào sau khi văng ra khỏi trục vít, biết rằng sau khi văng khỏi chốt nó đi được một đoạn bằng  $h$ , bước ren rất nhỏ so với chiều dài thanh?



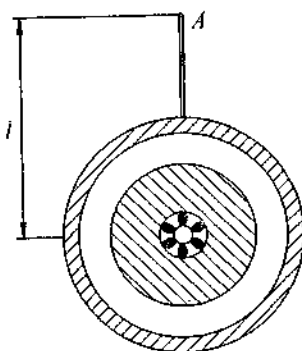
Hình 199



Hình 200



Hình 201



Hình 202

**9.130.** Một thanh mảnh nhẵn nằm ngang dài  $L = 1\text{m}$  quay xung quanh trục thẳng đứng đi qua một đầu của nó với vận tốc góc  $\omega_0 = 10\text{s}^{-1}$ . Tại thời điểm ban đầu trên thanh có lồng một chiếc vòng khối lượng  $m = 1\text{kg}$ .

Cách trục quay của thanh thứ nhất  $2\text{m}$  người ta đặt một trục thẳng đứng thứ hai đi qua một đầu của một thanh mảnh nhẵn nằm ngang khác dài  $1\text{m}$ , khối lượng  $M = 30\text{kg}$  đứng yên và có cùng độ cao so với thanh thứ nhất (H.200). Tại thời điểm khi hai thanh nằm trên một đường thẳng thì chiếc vòng trượt từ thanh thứ nhất sang thanh thứ hai. Xác định vận tốc góc của thanh thứ hai tại thời điểm khi chiếc vòng cách trục quay của nó  $0,5\text{m}$  (bỏ qua ma sát trong các trục).

**9.131.** Hai đầu của một thanh đồng nhất chiều dài  $2l$ , khối lượng  $m$  có thể chuyển động không ma sát theo viền bao của một chiếc đĩa đứng yên có

thành bên. Ở chính giữa thanh, cách tâm đĩa một khoảng  $l$  có một con cánh cam khối lượng  $\frac{2m}{3}$  (H. 201). Ban đầu cả hệ đứng yên sau đó con bọ bắt

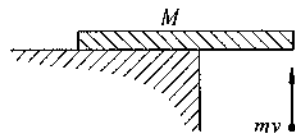
đầu chuyển động trên thanh với vận tốc không đổi so với thanh. Hỏi thanh xoay một góc  $\varphi$  bằng bao nhiêu khi con bọ bò đến cuối thanh?

**9.132.** Đầu trên của một thanh thẳng đứng không trọng lượng được lắp vào một trục nằm ngang, sao cho nó có thể quay tự do quanh trục này, đầu dưới của thanh được gắn cố định với một động cơ điện khối lượng  $M$  (H. 202). Cấu trúc động cơ đối xứng với trục quay của rôto. Rôto nằm ngang và cách điểm treo một khoảng  $l$ . Mômen quán tính của rôto và stato so với trục động cơ lần lượt là  $I_1$  và  $I_2$ . Cho một xung điện ngắn chạy qua động cơ làm động cơ đạt đến vận tốc  $\omega$  gần như tức thời. Bỏ qua ma sát ở các ổ bi của động cơ. Xác định độ cao lớn nhất  $H$  mà trục động cơ đạt được.

**9.133.** Một thanh chiều dài  $L$ , khối lượng  $M$  được lắp lên trần nhà bằng một bản lề. Người ta tác dụng nhanh một lực vào đầu dưới thanh, truyền cho thanh một động lượng  $p$  theo phương ngang. Xác định độ lớn và chiều của phản lực trên điểm treo.

**9.134.** Trên mặt bàn nằm ngang có đặt một thanh cứng chiều dài  $2l$ , khối lượng  $M$  (H. 203). Một đầu của thanh thừa ra ngoài cạnh bàn và nó va chạm không đàn hồi với một quả cầu nhỏ khối lượng

$m = \frac{M}{2}$  có vận tốc hướng lên trên và bằng  $v$ . Xác

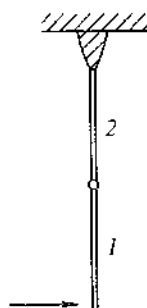


Hình 203

định xung của phản lực của mặt bàn trong thời gian xảy ra va chạm. Giả thiết rằng phản lực đặt ở đầu kia của thanh.

**9.135.** Hai thanh giống nhau nối với nhau bằng một khớp và treo trên trục nằm ngang đi qua đầu của thanh phía trên. Tác dụng vào đầu dưới của thanh phía dưới một lực theo phương ngang (H.204). Tìm tỷ số giữa vận tốc góc của các thanh sau khi tác dụng lực.

**9.136.** Hai thanh giống nhau nối với nhau bằng một khớp và đặt trên mặt bàn nhẵn nằm ngang. Tác dụng vào đầu của một trong hai thanh một lực vuông góc với trục các thanh (H. 205). Tìm tỷ số vận tốc góc của các thanh và tỷ số vận tốc các tâm quán tính của chúng sau va chạm.



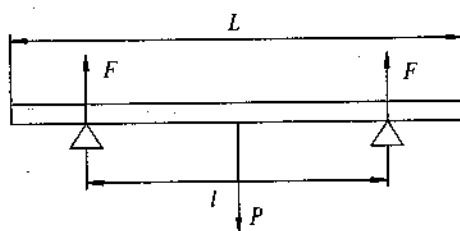
Hình 204

**9.137.** Một dầm cứng tuyệt đối đồng chất trọng lượng  $P$  và chiều dài  $L$  nằm trên hai gối tựa cứng tuyệt đối và đối xứng nhau, khoảng cách giữa hai gối là  $l$  (H.206). Người ta phá một gối tựa. Tìm giá trị ban đầu của áp lực  $F$  tác dụng lên gối tựa còn lại. Xét trường hợp riêng khi  $l = L$ . Tại sao khi phá một gối tựa lực  $F$  biến đổi nhảy vọt?

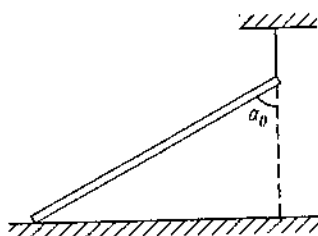
**9.138.** Một thanh mảnh đồng chất khối lượng  $m$ , chiều dài  $2l$  có một đầu được treo trên dây mảnh, sao cho đầu còn lại tiếp xúc với một mặt bàn nằm ngang (H.207). Góc  $\alpha_0 = \frac{\pi}{3}$ . Người ta đốt sợi dây. Áp lực của thanh lên mặt bàn thay đổi bao nhiêu lần ngay sau khi sợi dây đứt? Tìm vận tốc trọng tâm của thanh tại thời điểm thanh rơi tới mặt bàn.



Hình 205



Hình 206



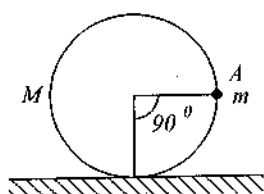
Hình 207

**9.139.** Một thanh mảnh đồng chất khối lượng  $m$ , chiều dài  $2l$  đặt dựng đứng trên một mặt phẳng nằm ngang. Người ta cho thanh đổ không vận tốc ban đầu. Tìm vận tốc trọng tâm và áp lực của thanh lên bề mặt tại thời điểm khi góc giữa thanh và phương thẳng đứng là  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ .

**9.140.** Một đĩa mỏng đồng chất khối lượng  $m$  đặt dựng đứng trên mặt phẳng nằm ngang. Người ta cho đĩa đổ xuống. Tìm áp lực của đĩa lên mặt phẳng ngang khi mặt phẳng của đĩa tạo với phương thẳng đứng một góc  $\alpha = 30^\circ$ .

**9.141.** Một vòng mảnh khối lượng  $M$  đặt dựng đứng trên mặt bàn nằm ngang và được cho đổ xuống. Tìm áp lực của vòng lên mặt bàn khi mặt phẳng của vòng tạo với phương thẳng đứng một góc  $\alpha = 60^\circ$ .

**9.142.** Người ta gắn vào một vành tròn khối lượng  $M$  đặt dựng đứng trên bàn một vật không lớn có khối lượng  $m = \frac{M}{3}$  tại điểm A (H. 208). Tìm giá trị lớn



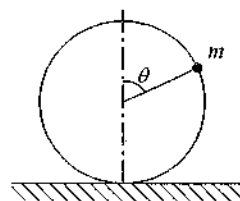
Hình 208

nhất của hệ số ma sát  $k$  giữa vành và mặt bàn để vành tròn bắt đầu lăn không trượt.

**9.143.** Ở phía trong của một vành mỏng khối lượng  $M$  bán kính  $R = 0,5\text{ m}$  có gắn một vật khối lượng  $m = \frac{M}{10}$ , kích thước của vật rất nhỏ so với  $R$ . Vành lăn không trượt trên mặt phẳng ngang. Khi vật ở vị trí thấp nhất vận

tốc  $v_0$  của tâm vành phải bằng bao nhiêu để khi vật đi qua vị trí cao nhất vành sẽ “nhảy lên”?

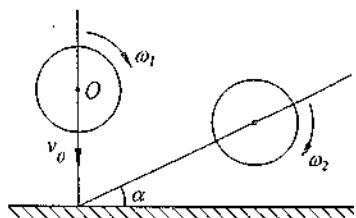
**9.144.** Trên mặt phẳng nhám nằm ngang có một vành cứng không trọng lượng. Trên vành có gắn một chất điểm  $m$ . Tại thời điểm ban đầu chất điểm nằm ở vị trí cao nhất của vành. Đẩy nhẹ đưa hệ ra khỏi vị trí cân bằng. Xác định sự phụ thuộc của áp lực vuông góc của vành lên mặt phẳng vào góc  $\theta$  (H. 209). Hệ số ma sát giữa mặt phẳng và vành bằng  $k$ .



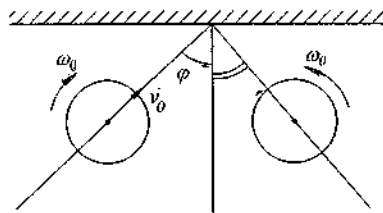
Hình 209

**9.145.** Một quả bóng rổ được xoay với vận tốc góc  $\omega_0$  và ném xuống sàn dưới một góc  $\alpha = 5,7^\circ$  so với phương thẳng đứng với vận tốc  $v_0 = 1,5 \text{ m/s}$ . Trục quay vuông góc với mặt phẳng rơi. Xác định vận tốc góc  $\omega_0$  sao cho quả bóng nảy ngược lại với cùng góc  $\alpha$ . Hệ số ma sát giữa quả bóng với sàn là  $k = 0,2$ , bán kính quả bóng  $R = 15 \text{ cm}$ . Giả thiết rằng toàn bộ khối lượng của quả bóng tập trung ở lớp mỏng ngoài cùng và bỏ qua sự biến dạng của bóng khi va chạm vào sàn.

**9.146.** Một quả cầu cao su bán kính  $R$  quay quanh trục nằm ngang với vận tốc góc  $\omega_1$  rơi thẳng đứng xuống một bề mặt nhám nằm ngang (H. 210). Ngay trước khi va chạm với nền, vận tốc tâm quả cầu bằng  $v_0$ . Giả thiết va chạm là đàn hồi, thời gian va chạm nhỏ, tìm góc  $\alpha$  nảy lên của quả cầu. Tìm vận tốc góc  $\omega_2$ . Hệ số ma sát trượt giữa quả cầu và bề mặt là  $k$ .



Hình 210



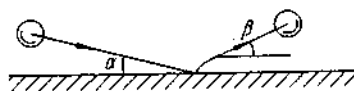
Hình 211

**9.147.** Một quả bi-a lăn không trượt trên mặt bàn với vận tốc  $v_0$  và va chạm đàn hồi với thành bàn. Giả thiết hệ số ma sát giữa quả bi-a và thành bàn là  $k$ , xác định góc bật của quả bi-a so với phương ngang. Bỏ qua tác dụng của trọng lực trong thời gian va chạm và bỏ qua ma sát lăn.

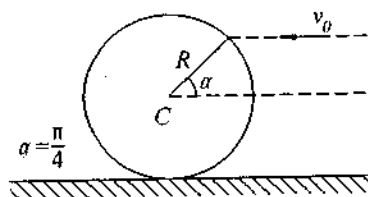
**9.148.** Một quả khúc côn cầu hình trụ, bán kính  $R$  quay quanh trục đối xứng của nó và trượt không ma sát trên mặt băng nằm ngang. Quả khúc côn cầu sẽ bật khỏi thành dụng đứng dưới một góc  $\psi$  bằng bao nhiêu (H. 211) nếu sau va chạm đàn hồi nó nhận được cùng vận tốc góc  $\omega_0$  nhưng hướng quay ngược lại? Hệ số ma sát  $k$  giữa quả khúc côn cầu và thành phải bằng bao

nhieu để điều đó có thể xảy ra? Giả thiết đã biết vận tốc của nó trước khi va chạm là  $v_0$ , vận tốc góc là  $\omega_0$  và góc mà nó bay đến đập vào thành là  $\varphi = 30^\circ$ . Để quá trình mô tả trên xảy ra, có cần phải có mối liên hệ nào đó giữa  $\omega$  và  $v_0$  không?

**9.149.** Một quả cầu đặc đồng chất lăn không trượt trên mặt phẳng ngang dưới một góc  $\alpha$  so với tường nhẵn thẳng đứng (H. 212). Quả cầu sẽ lăn dưới góc  $\beta$  bằng bao nhiêu sau va chạm đàn hồi với tường khi mà nó lại chỉ chuyển động lăn thuần túy không trượt? Bỏ qua mất mát do ma sát trong thời gian va chạm.

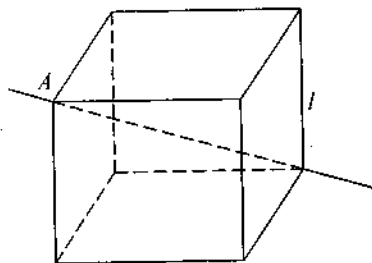


Hình 212

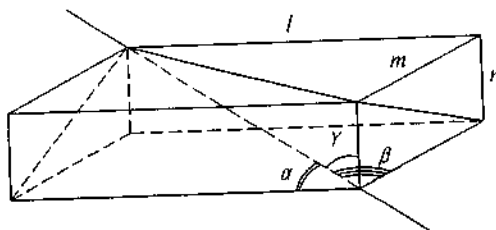


Hình 213

(H.213). Tỷ lệ khối lượng giữa vành và viên đạn là  $k = \frac{m_0}{m} = 1$ . Xác định vận tốc góc lớn nhất có thể của vành sau va chạm và nhiệt lượng toả ra trong trường hợp này (trên một đơn vị khối lượng của hệ).



Hình 214



Hình 215

**9.151\*.** Tìm các thông số của một elipxoit quán tính đối với điểm A nằm trên đỉnh của một hình lập phương đồng chất khối lượng  $M$ , cạnh  $l$  (H. 214).

**9.152\*.** Xác định mômen quán tính của hình hộp chữ nhật khối lượng  $M$  với chiều dài các cạnh là  $l, m, n$  (H. 215) đối với các đường chéo của nó.

## §10. DAO ĐỘNG CỦA VẬT RẮN. SÓNG

**10.1.** Một chiếc vòng làm từ dây mảnh thực hiện các dao động nhỏ như một con lắc xung quanh một trục nằm ngang. Trong trường hợp thứ nhất trục nằm trong mặt phẳng vòng (H. 216a), trong trường hợp thứ hai trục vuông



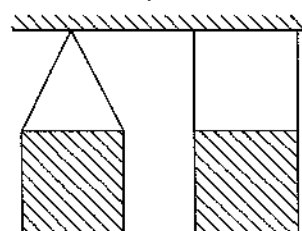
góc với vòng (H. 216b). Xác định tỷ số giữa các chu kỳ dao động  $T_1, T_2$  trong các trường hợp trên.

**10.2.** Ở cuối của thanh mảnh đồng chất dài  $l$  có khoét một lỗ nhỏ, qua lỗ đó người ta luồn một sợi dây thép kéo căng nằm ngang. Tìm chu kỳ dao động nhỏ của con lắc vật lý này trong các trường hợp sau:

- 1) khi con lắc dao động trong mặt phẳng thẳng đứng, vuông góc với dây;
- 2) khi nó dao động trong mặt phẳng thẳng đứng, song song với dây.

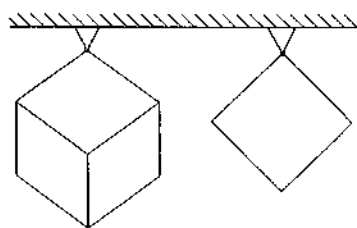
Trong trường hợp thứ hai điểm treo con lắc có thể trượt không ma sát trên dây. Tìm tỷ số giữa hai chu kỳ.

**10.3.** Hai tấm đồng chất giống nhau có dạng hình vuông được treo trên các sợi chỉ mảnh nhẹ bằng hai cách (H.217). Khoảng cách từ điểm treo đến cạnh trên cùng bằng cạnh hình vuông. Tìm tỷ số giữa các chu kỳ dao động nhỏ của các con lắc vật lý này trong mặt phẳng thẳng đứng trùng với mặt phẳng của tấm.

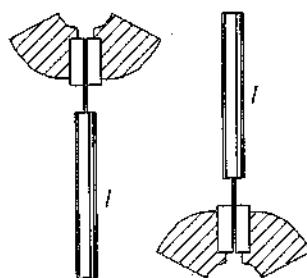


Hình 217

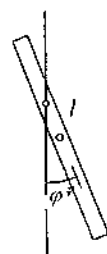
**10.4.** Hai khối lập phương đặc giống nhau được treo bằng hai cách: trong trường hợp thứ nhất dây treo mắc vào một đỉnh, trong trường hợp thứ hai – dây treo mắc vào trung điểm của một cạnh (H. 218). Chú ý đến các tính chất của elipxoit quán tính của khối lập phương, tìm tỷ số chu kỳ của các con lắc vật lý này trong trọng trường. Dao động diễn ra trong mặt phẳng hình vẽ.



Hình 218



Hình 219



Hình 220

**10.6.** Một đĩa đặc đồng chất bán kính  $r = 10\text{ cm}$  dao động quanh một trục nằm ngang vuông góc với mặt phẳng đĩa và đi qua cạnh của đĩa. Con lắc

toán học phải có chiều dài  $l$  bằng bao nhiêu để nó có chu kỳ dao động bằng với chu kỳ dao động của đĩa?

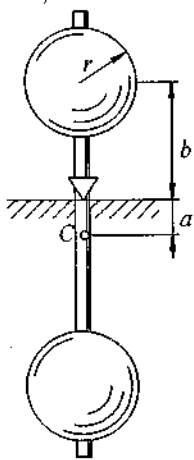
**10.7.** Một đĩa đồng chất bán kính  $R$  thực hiện các dao động nhỏ quanh trục nằm ngang vuông góc với mặt phẳng đĩa. Tính khoảng cách  $x$  giữa trọng tâm đĩa và trục treo để chu kỳ dao động là nhỏ nhất. Xác định độ lớn của chu kỳ nhỏ nhất  $T_{\min}$  này.

**10.8.** Cần phải treo thanh đồng nhất dài  $l$  (H. 220) tại điểm nào để tần số dao động của nó như một con lắc vật lý đạt cực đại? Tần số này bằng bao nhiêu?

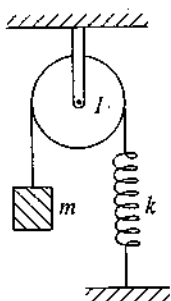
**10.9.** Con lắc vật lý tạo thành từ hai quả cầu nặng, giống nhau bán kính  $r = 5\text{cm}$  lắp trên một thanh nhẹ (H. 221). Trục của con lắc nằm dưới tâm quả cầu trên một khoảng  $b = 10\text{cm}$ . Với khoảng cách  $x$  nào giữa hai tâm của các quả cầu thì chu kỳ  $T$  của con lắc sẽ nhỏ nhất? Tìm chu kỳ này, biết chiều dài quy chuẩn của con lắc là  $l$  và khoảng cách giữa trục và khối tâm của con lắc là  $a$ .

**10.10.** Người ta vắt một sợi dây qua một ròng rọc cố định có mômen quán tính  $I$  và bán kính  $r$  (H. 222). Một đầu dây có treo vật khối lượng  $m$ , đầu kia buộc vào một lò xo, đầu dưới của lò xo gắn cố định. Tìm chu kỳ dao động của vật nếu hệ số đàn hồi của lò xo bằng  $k$  và sợi dây không thể trượt trên bề mặt ròng rọc.

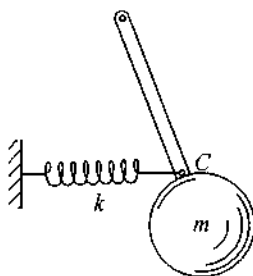
**10.11.** Tìm chu kỳ dao động nhỏ của một con lắc vật lý khối lượng  $m$ , khối tâm  $C$  của nó được nối với một lò xo nằm ngang có hệ số đàn hồi  $k$ . Đầu còn lại của lò xo được mắc cố định vào tường (H. 223). Mômen quán tính của con lắc đối với điểm treo bằng  $I$ , khoảng cách giữa điểm treo và khối tâm bằng  $a$ . Ở vị trí cân bằng lò xo không bị biến dạng.



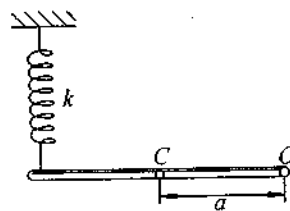
Hình 221



Hình 222



Hình 223



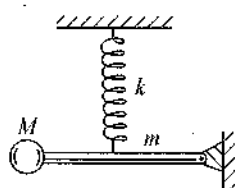
Hình 224

**10.12.** Hệ dao động gồm một thanh dài  $l$ , khối lượng  $m$ , có thể quay quanh trục  $O$  nằm ngang đi qua một đầu của thanh và vuông góc với thanh (H.224).

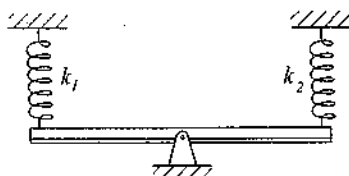
Đầu kia của thanh treo trên một lò xo có hệ số đàn hồi  $k$ . Khoảng cách giữa khối tâm  $C$  của thanh và trục quay là  $CO = a$ . Mômen quán tính của thanh đối với trục  $O$  là  $I$ . Tìm độ dãn  $x_0$  của lò xo (so với độ dài của nó khi không bị biến dạng) ở vị trí cân bằng, nếu ở vị trí cân bằng thanh nằm ngang. Xác định chu kỳ dao động nhỏ của thanh quanh vị trí cân bằng.

**10.13.** Một thanh đồng chất khối lượng  $m$ , dài  $l$ , đầu trên treo vào một khớp quay. Trung điểm của thanh nối với một lò xo nằm ngang có hệ số đàn hồi  $k$ . Ở vị trí cân bằng lò xo không bị biến dạng. Tìm chu kỳ dao động nhỏ của thanh trong mặt phẳng đi qua thanh và lò xo.

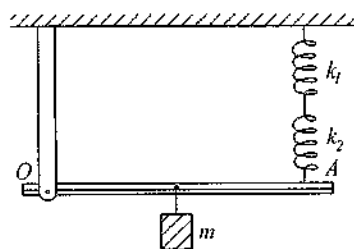
**10.14.** Một thanh cứng khối lượng  $m$  một đầu được gắn với chất điểm khối lượng  $M$ , thanh có thể quay quanh một trục nằm ngang đi qua đầu kia của nó (H. 225). Thanh được giữ bằng một lò xo độ cứng  $k$  tại trung điểm của nó. Tìm độ dãn  $x_0$  của lò xo (so với độ dài của nó khi không bị biến dạng) ở vị trí cân bằng, nếu ở vị trí cân bằng thanh nằm ngang. Xác định chu kỳ dao động nhỏ của thanh quanh vị trí cân bằng.



Hình 225



Hình 226



Hình 227

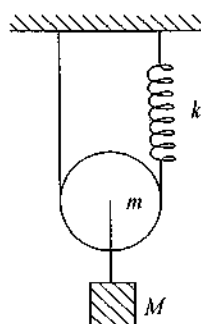
**10.15.** Thanh đồng chất chiều dài  $L$ , khối lượng  $M$  có thể quay quanh khớp nằm ở trung điểm của thanh (H. 226). Thanh được treo trần nhà bằng hai lò xo có độ cứng lần lượt là  $k_1, k_2$ . Tìm chu kỳ dao động của thanh.

**10.16.** Tìm chu kỳ dao động nhỏ của một hệ được cho trên hình 227. Khối lượng thanh đồng chất  $OA$  bằng  $M$ . Trên thanh có treo một vật khối lượng  $m$  tại trung điểm. Cuối thanh được treo trên hai lò xo mắc nối tiếp có các hệ số đàn hồi lần lượt là  $k_1$  và  $k_2$ .

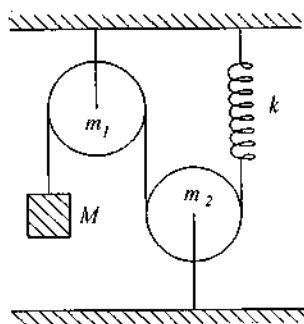
**10.17.** Một vật khối lượng  $M$  được buộc vào ròng rọc khối lượng  $m$  (H. 228). Ròng rọc được treo trên một sợi dây không giãn một đầu buộc trực tiếp vào trần nhà, đầu kia buộc qua một lò xo có độ cứng  $k$ . Xác định chu kỳ dao động nhỏ thẳng đứng của vật nếu sợi dây không trượt trên ròng rọc. Coi ròng rọc có dạng hình trụ.

**10.18.** Một sợi dây mảnh không giãn nối lò xo có độ cứng  $k$  với vật khối lượng  $M$  qua hai ròng rọc cố định (H. 229). Xác định chu kỳ dao động nhỏ thẳng đứng của vật, nếu sợi dây không trượt trên ròng rọc. Giả thiết các ròng

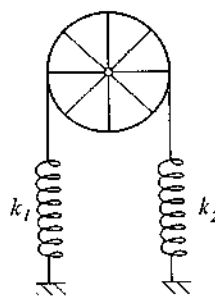
rọc có dạng hình trụ khối lượng  $m_1, m_2$ . Bỏ qua ma sát trong các trục. Bán kính các ròng rọc như nhau.



Hình 228



Hình 229

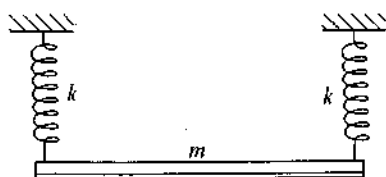


Hình 230

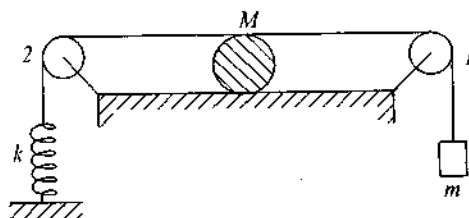
**10.19.** Người ta vắt qua ròng rọc một sợi dây không trọng lượng, hai đầu sợi dây nối với hai lò xo bị kéo dẫn với độ cứng cho trước  $k_1$  và  $k_2$  (H.230). Giả thiết dây không trượt trên ròng rọc, tìm chu kỳ dao động nhỏ của hệ. Ròng rọc có dạng một bánh xe với các nan hoa. Khối lượng vành xe là  $M$ , khối lượng tất cả các nan hoa là  $m$ . Độ dày vành xe và các nan hoa rất nhỏ so với bán kính vành.

**10.20.** Tìm tần số dao động nhỏ của một thanh đồng chất khối lượng  $m$  có hai đầu treo trên hai lò xo giống nhau có độ cứng  $k$ . Dao động xảy ra trong mặt phẳng hình vẽ (H. 231). Xét hai loại dao động sau:

- Thanh di chuyển song song với chính nó trong mặt phẳng thẳng đứng;
- Thanh quay quanh tâm quán tính cố định.



Hình 231

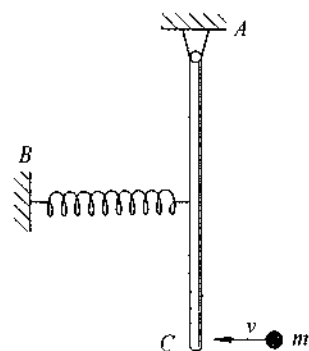


Hình 232

**10.21.** Xác định chu kỳ dao động nhỏ của một vật khối lượng  $m$  treo trên một dây không dẫn có khối lượng không đáng kể. Đầu kia của dây nối với một lò xo không trọng lượng có độ cứng bằng  $k$  (H. 232). Dây vắt qua một hệ hai ròng rọc 1, 2 và một khối trụ đặc khối lượng  $M$ . Hai ròng rọc 1, 2 được gắn cố định vào giá, khối trụ có thể lăn không trượt trên giá. Dây không trượt trên khối trụ. Bỏ qua ma sát trên các ròng rọc.

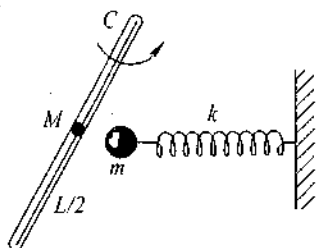
**10.22.** Một thanh cứng tuyệt đối chiều dài  $l$ , khối lượng  $M$  nằm trên mặt phẳng nhẵn nằm ngang và có thể quay tự do quanh trục đi qua đầu A của nó (H. 233). Thanh được nối với một điểm B cố định trên mặt phẳng bằng một

lò xo không trọng lượng có độ cứng  $k$  và vuông góc với thanh. Một quả cầu nhỏ chuyển động với vận tốc  $v$  vuông góc với thanh đến va chạm vào đầu  $C$  của thanh và dính vào thanh. Tìm biên độ dao động nhỏ của lò xo. Giả thiết rằng trong thời gian va chạm lò xo không biến dạng.

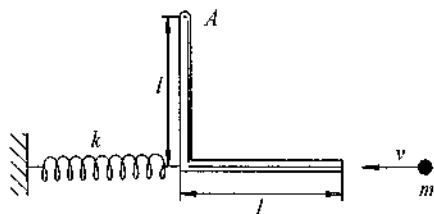


Hình 233

**10.23.** Một thanh nhỏ đồng chất chiều dài  $L$ , khối lượng  $M$  nằm trên mặt phẳng ngang và có thể quay quanh trục thẳng đứng đi qua đầu  $C$  của nó. Tại một thời điểm nào đó khi bắt đầu quay với vận tốc góc  $\omega_0$ , thanh va chạm không đàn hồi tại trọng tâm của nó với một quả cầu nhỏ khối lượng  $m$  và dính vào quả cầu (H. 234). Quả cầu gắn vào một lò xo không trọng lượng và không dẫn độ cứng  $k$ , nằm vuông góc với thanh tại thời điểm va chạm, đầu kia của lò xo được gắn cố định. Tìm biên độ dao động  $A$  của quả cầu khi bị dính vào thanh, giả thiết dao động là nhỏ. Bỏ qua ma sát của quả cầu và thanh với mặt phẳng và bỏ qua kích thước quả cầu.



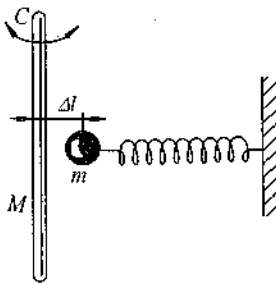
Hình 234



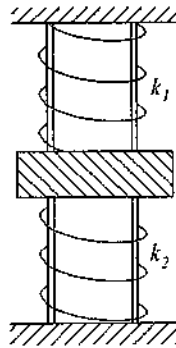
Hình 235

**10.24.** Hai thanh nhỏ mỗi thanh có khối lượng  $m$ , chiều dài  $l$  được hàn chặt tạo thành một góc vuông. Điểm nối hai thanh được gắn với một lò xo có độ cứng  $k$  (H.235). Hệ hai thanh có thể quay quanh trục thẳng đứng đi qua đầu  $A$  của một thanh. Một quả cầu nhỏ khối lượng  $m$ , chuyển động với vận tốc  $v$  hướng dọc theo thanh nằm ngang và lò xo đến va chạm và dính vào thanh này. Tìm biên độ góc  $\varphi_0$  và chu kỳ  $T$  của dao động sinh ra.

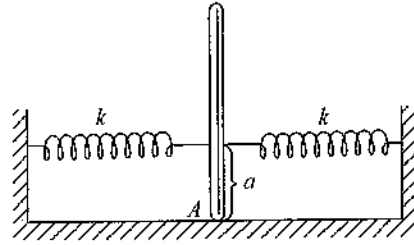
**10.25.** Một thanh nhỏ đồng nhất khối lượng  $M$  nằm trên mặt phẳng ngang và có thể quay quanh trục thẳng đứng đi qua đầu  $C$  của nó. Tâm của thanh tiếp xúc với một quả cầu nhỏ khối lượng  $m$  gắn vào một lò xo không trọng lượng và không dẫn, đầu kia của lò xo được gắn cố định. Người ta nén quả cầu và lò xo một đoạn nhỏ  $\Delta l$  (H. 236), sau đó quả cầu va chạm không đàn hồi với tâm thanh và dính vào nó. Tìm biên độ dao động  $A$  của quả cầu khi dính vào thanh, giả thiết dao động của nó là nhỏ. Bỏ qua ma sát của quả cầu và thanh với mặt phẳng và bỏ qua kích thước quả cầu.



Hình 236



Hình 237

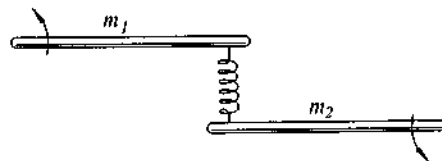


Hình 238

**10.26.** Trên một đỉnh ốc nhả tuyệt đối đường kính  $d$ , bước ren  $h$  có một đai ốc hình trụ khối lượng  $M$ , đường kính ngoài  $D$  (H. 237). Đai ốc được giữ bằng hai lò xo có độ cứng  $k_1, k_2$ . Khi đai ốc quay các đầu của lò xo có thể trượt tự do trên hai đáy của đai ốc. Tìm chu kỳ dao động của đai ốc.

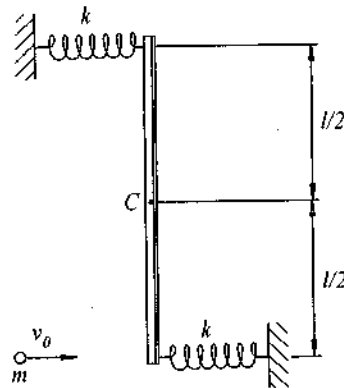
**10.27.** Một thanh nhỏ đồng chất khối lượng  $m$ , chiều dài  $l$  được giữ bằng một khớp tại đầu  $A$  và có thể dao động trong mặt phẳng đứng. Thanh được nối với hai lò xo giống nhau có độ cứng  $k$  tại một điểm cách điểm  $A$  một khoảng  $a$  (H. 238). Xác định chu kỳ dao động nhỏ của thanh trong mặt phẳng hình vẽ và tìm  $k$  để có thể xảy ra dao động.

**10.28.** Hai thanh nhỏ đồng chất cùng chiều dài, có khối lượng khác nhau  $m_1$  và  $m_2$  nằm song song với nhau trên một bề mặt nhẵn. Các thanh có thể quay không ma sát quanh các trục thẳng đứng, cố định nằm cách nhau một khoảng bằng hai lần chiều dài của thanh (H.239). Hai đầu còn lại của hai thanh nối với nhau bằng một lò xo không trọng lượng độ cứng  $k$ . Tìm chu kỳ dao động nhỏ của hệ.



Hình 239

**10.29.** Một viên đạn khối lượng  $m$ , vận tốc  $v_0$  bay tới đầu dưới của một thanh khối lượng  $m$ , dài  $l$  đang được giữ thẳng đứng nhờ trục nằm ngang  $C$  và hai lò xo độ cứng  $k$  (H.240). Tìm biên độ dao động góc của thanh nếu viên đạn dính vào nó.

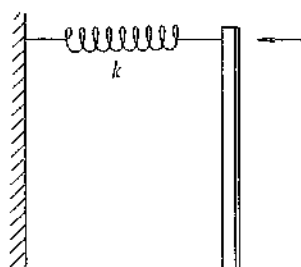


Hình 240

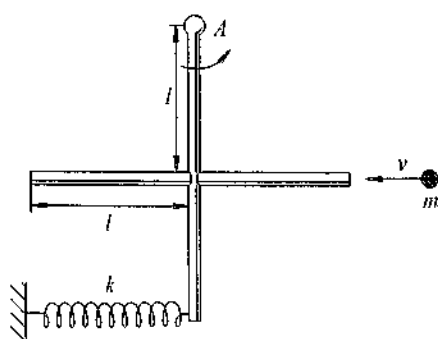
**10.30.** Một thanh khối lượng  $m$  nằm trên mặt bàn nhẵn nằm ngang và một đầu được gắn với tường bằng một lò xo độ cứng  $k$  (H. 241).

Người ta tác dụng một lực cũng vào đầu này của thanh. Tìm chu kỳ dao động nhỏ của thanh.

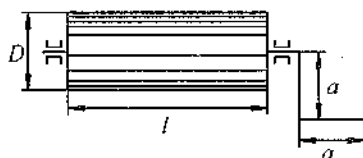
**10.31.** Hai thanh nhỏ có cùng chiều dài  $2l$  và khối lượng  $m$  được hàn chặt vuông góc với nhau tạo thành hình chữ thập (H. 242). Hệ chữ thập này nằm trên mặt bàn nhẵn nằm ngang và có thể quay quanh trục thẳng đứng đi qua đầu  $A$  của một thanh. Đầu kia của thanh này được giữ bằng một lò xo có độ cứng  $k$  như hình vẽ. Một quả cầu nhỏ khối lượng  $m$  bay với vận tốc  $v$  dọc theo trục của thanh thứ hai và đập vào đầu mút của thanh này. Xác định biên độ góc  $\varphi_0$  và chu kỳ dao động của hệ.



Hình 241



Hình 242



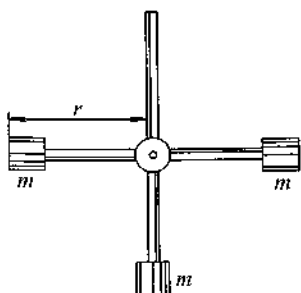
Hình 243

**10.32.** Xác định chu kỳ dao động nhỏ của một cái tồi nước giếng xung quanh vị trí cân bằng. Tời có dạng khối trụ gỗ (H. 243) với tay cầm được làm bằng một thanh sắt có khối lượng trên một đơn vị dài  $\mu = 2\text{kg/m}$ , bán kính thanh nhỏ không đáng kể so với bán kính tời. Các kích thước của tời:  $l = 1\text{m}$ ,  $D = 0,2\text{m}$ ,  $a = 0,3\text{m}$ . Khối lượng riêng của gỗ giả thiết là  $\rho = 700\text{kg/m}^3$ . Bỏ qua ma sát trong các ổ trục.

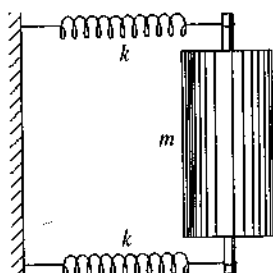
**10.33.** Khi thực hiện bài thí nghiệm trên con lắc chữ thập Oberbec (H. 244) và muốn xác định mômen quán tính của con lắc khi không có các vật nặng (tức là mômen của bánh puli và bốn nan hoa), một sinh viên đã tháo một vật khỏi một trong số bốn nan hoa, ba vật khác cố định ở đầu các nan hoa và đo chu kỳ  $T$  của dao động xoắn của con lắc và nhận được giá trị là  $2,1\text{s}$ . Mômen quán tính cần tìm  $I$  bằng bao nhiêu nếu độ dài mỗi nan hoa  $r = 30\text{cm}$ , còn khối lượng mỗi vật  $m = 100\text{g}$ ? Giả thiết các vật là các chất điểm và bỏ qua ma sát trong ổ trục.

**10.34.** Trên mặt phẳng ngang có đặt một hình trụ với mômen quán tính  $I$  (đối với trục của nó), khối lượng  $m$  và bán kính  $r$ . Trục của hình trụ được gắn vào hai lò xo nằm ngang giống nhau, các đầu còn lại của hai lò xo gắn cố định vào tường (H.245). Hệ số đàn hồi của mỗi lò xo là  $k$ ; các lò xo có thể

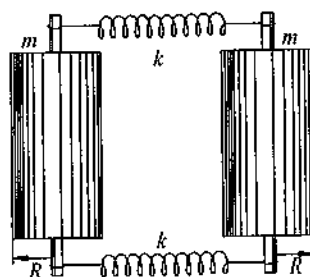
dãn hoặc nén. Tìm chu kỳ dao động của hình trụ xuất hiện khi kéo nó ra khỏi vị trí cân bằng và cho nó lăn không trượt trên mặt phẳng ngang.



Hình 244



Hình 245

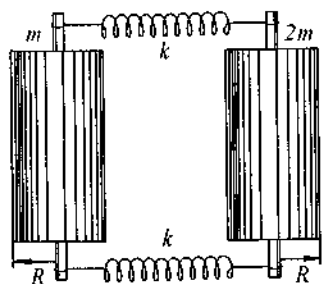


Hình 246

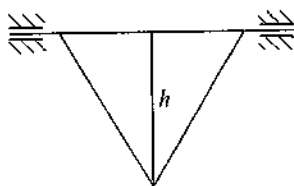
**10.35.** Hai hình trụ có cùng bán kính  $R$  và khối lượng  $m$  nằm trên mặt bàn ngang. Các hình trụ có phân bố khối lượng khác nhau theo bán kính. Mômen quán tính của các hình trụ đối với trục đối xứng là  $I_1 = \frac{mR^2}{2}$  và

$I_2 = \frac{mR^2}{4}$ . Các trục của hình trụ nối với nhau bằng hai lò xo không trọng lượng có cùng độ cứng  $k$  (H.246). Tại thời điểm ban đầu các lò xo dẫn đến độ dài  $l$ , còn các hình trụ đứng yên. Xác định chu kỳ dao động nhỏ và biên độ dao động của khối tâm, nếu các hình trụ lăn không trượt trên mặt bàn còn các lò xo có thể làm việc ở trạng thái nén hoặc dãn.

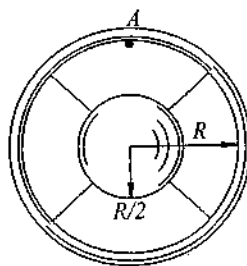
**10.36.** Hai khối trụ có cùng bán kính  $R$ , khối lượng  $m$  và  $2m$  nằm trên mặt bàn nằm ngang. Các khối trụ có phân bố khối lượng khác nhau theo bán kính. Mômen quán tính của các khối trụ đối với trục đối xứng bằng nhau và bằng  $I_1 = I_2 = \frac{mR^2}{2}$ . Các trục của khối trụ nối với nhau bằng hai lò xo không trọng lượng có cùng độ cứng  $k$  (H. 247). Tại thời điểm ban đầu các lò xo dẫn đến độ dài  $l$ , còn các khối trụ đứng yên. Xác định chu kỳ dao động nhỏ và biên độ dao động của khối tâm, nếu các khối trụ lăn không trượt trên mặt bàn còn các lò xo có thể làm việc ở trạng thái nén hoặc dãn



Hình 247



Hình 248



Hình 249



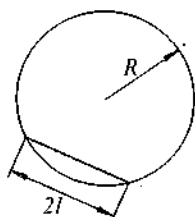
**10.37.** Một tấm đủ mỏng làm từ vật liệu đồng chất có dạng tam giác đều chiều cao  $h$  (H. 248). Tấm có thể quay quanh trục nằm ngang trùng với một cạnh của nó. Tìm chu kỳ dao động  $T$  của con lắc vật lý này.

**10.38.** Tại tâm một vành xe khối lượng  $m_1$ , bán kính  $R$  có đặt cố định một quả cầu đặc bán kính  $\frac{R}{2}$  và khối lượng  $m_2 = 2m_1$  nhờ các nan hoa nhẹ. Vành được treo trên một chiếc đinh  $A$  (H. 249). Tìm chu kỳ dao động nhỏ của hệ.

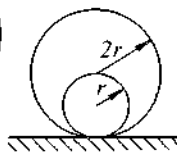
**10.39.** Một thanh đồng chất dài  $2l$  trượt theo đường tròn nhẵn dựng đứng bán kính  $R$  (H. 250). Tìm chu kỳ dao động nhỏ của thanh.

**10.40.** Một vành xe bán kính  $r$  được hàn vào một vành xe khác có cùng khối lượng nhưng bán kính bằng  $2r$ . Hệ được đặt thẳng đứng trên mặt bàn nằm ngang (H.251). Xác định chu kỳ dao động nhỏ của hệ.

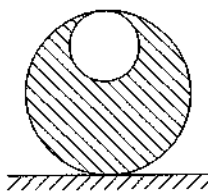
**10.41\*.** Trong một khối trụ đặc đồng chất bán kính  $R$  người ta khoét một lỗ hình trụ bán kính  $\frac{R}{2}$  với trục đi qua trung điểm bán kính của khối trụ đặc (H. 252). Xác định chu kỳ dao động nhỏ  $T$  xuất hiện khi đặt khối trụ trên mặt phẳng ngang và cho nó lăn không trượt trên mặt phẳng.



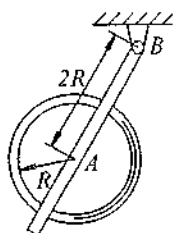
Hình 250



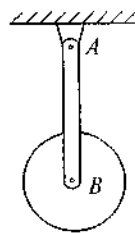
Hình 251



Hình 252



Hình 253



Hình 254

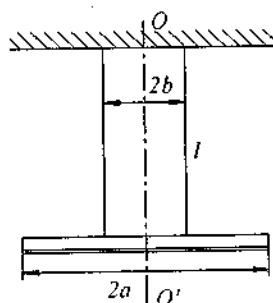
**10.42.** Một con lắc có dạng vành xe treo trên một thanh nhẹ. Tìm chu kỳ dao động của con lắc. Bán kính vành xe là  $R$ . Khoảng cách  $AB$  từ tâm vành xe đến điểm treo con lắc bằng  $2R$  (H. 253).

**10.43.** Ở cuối một thanh dài  $l$ , khối lượng  $m$  có lắp một đĩa bán kính  $R$ , khối lượng  $M$ . Xác định chu kỳ dao động của thanh quanh trục  $A$ , nếu đĩa có thể quay tự do quanh trục  $B$  đi qua tâm đĩa (H. 254).

**10.44.** Một que đồng chất được treo hai đầu trên hai sợi chỉ giống nhau dài  $L$ . Ở trạng thái cân bằng hai sợi chỉ song song với nhau. Tìm chu kỳ  $T$  của dao động xuất hiện khi xoay que một chút quanh trục thẳng đứng đi qua trung điểm của nó.

**10.45.** Một thanh nặng đồng chất dài  $2a$  treo đối xứng trên hai sợi chỉ không giãn dài  $l$  và cách nhau một khoảng  $2b$  (H. 255). Tìm chu kỳ dao động xoắn của hệ quanh trục thẳng đứng  $OO'$ .

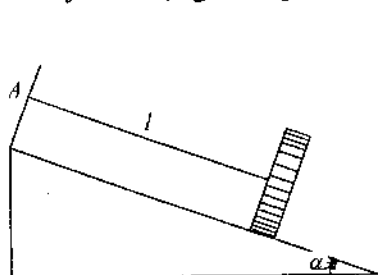
**10.46.** Một đĩa nhỏ lăn trên mặt phẳng nghiêng được buộc với điểm cố định  $A$  bằng một sợi dây không giãn như trên hình 256. Góc nghiêng của mặt phẳng là  $\alpha$ , chiều dài sợi dây là  $l$ . Đĩa lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng. Tìm chu kỳ dao động của đĩa. Bỏ qua ma sát lăn, độ dày của đĩa và mô đun xoắn của sợi dây.



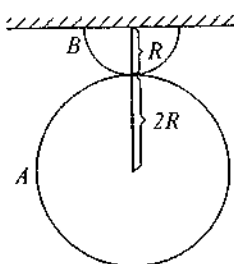
Hình 255

**10.47.** Một đĩa đồng chất khối lượng  $M$ , bán kính  $2R$  có thể thực hiện dao động khi lăn trên bề mặt của một khối trụ cố định  $B$  có bán kính  $R$  (H. 257). Biết rằng tâm của khối trụ và đĩa được giằng bằng một thanh khối lượng  $m$  sao cho khi đĩa lăn nó không bị trượt. Bỏ qua ma sát trong các ổ trục, tìm chu kỳ dao động.

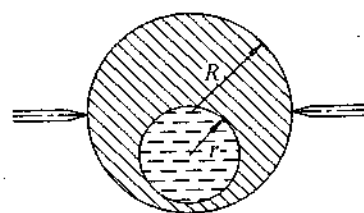
**10.48.** Trục của cánh cửa tủ tạo với phương thẳng đứng một góc  $\alpha$ . Độ rộng cánh tủ là  $b$ . Coi cánh tủ như một tấm mảnh đồng chất và bỏ qua ma sát, tìm chu kỳ dao động nhỏ quanh vị trí cân bằng.



Hình 256



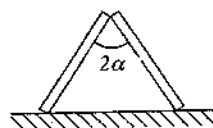
Hình 257



Hình 258

**10.49.** Trong một quả cầu đặc đồng chất bán kính  $R$  có một hốc hình cầu chứa đầy chất lỏng không nhớt bán kính  $r = 0,5R$ , tâm hốc này nằm cách tâm quả cầu một khoảng  $l = 0,4R$  (H. 258). Tìm chu kỳ dao động nhỏ của quả cầu đối với trục nằm ngang đi qua tâm của nó, giả thiết rằng tâm hốc cầu nằm trên bán kính vuông góc với trục quay và khối lượng riêng của chất lỏng lớn hơn sáu lần so với khối lượng riêng của vật liệu làm quả cầu.

**10.50.** Hai vành xe giống nhau, nhỏ, hẹp có khối lượng  $m$ , bán kính  $r$  gắn chặt với nhau tại một điểm, sao cho mặt phẳng của chúng tạo thành góc  $2\alpha$  (H. 259). Tìm chu kỳ dao động của hệ này trên mặt phẳng ngang. Bỏ qua ma sát.



Hình 259

**10.51.** Tìm tỷ số giữa các chu kỳ  $\frac{T_1}{T_2}$  của một hình nón

tròn xoay đồng chất có bán kính đáy bằng chiều cao của nó. Trong trường hợp thứ nhất đỉnh nón gắn với khớp quay, trong trường hợp thứ hai tâm đáy nón gắn với khớp quay. Trong cả hai trường hợp trục quay đều nằm ngang.

**10.52.** Tìm chu kỳ dao động xoắn của đĩa gắn chặt trên một trục kép gồm hai thanh khác nhau gắn nối tiếp nhau (H. 260). Đầu trên A của thanh được gắn cố định. Biết rằng nếu đĩa chỉ lắp trên thanh thứ nhất thì chu kỳ dao động bằng  $T_1$ , nếu chỉ gắn trên đĩa thứ hai thì chu kỳ dao động là  $T_2$ .

**10.53.** Một tấm vuông treo bốn góc lên trần nhà bằng bốn sợi dây song song với nhau, chiều dài mỗi sợi là  $l$ . Xác định chu kỳ dao động xoắn nhỏ của tấm xuất hiện khi quay tấm một góc nhỏ quanh trục thẳng đứng đi qua tâm nó.

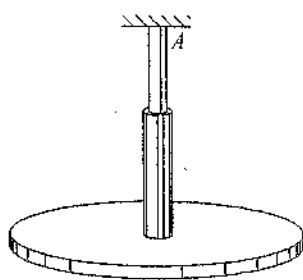
**10.54.** Đồng hồ bỏ túi sẽ chạy như thế nào nếu đặt chúng lên mặt bàn nằm ngang nhẵn tuyệt đối? Giả thiết rằng trục con lắc xoắn của đồng hồ đi qua tâm của đồng hồ, còn mômen quán tính của đồng hồ  $I_0$  lớn gấp 500 lần mômen quán tính của quả lắc.

**10.55.** Chu kỳ dao động của con lắc xoắn sẽ thay đổi bao nhiêu lần nếu đặt nó trên ghế Giucốpski sao cho trục quay của con lắc và của ghế trùng nhau? Mômen quán tính của con lắc  $I_0$  lớn gấp ba lần mômen quán tính của ghế  $I$ .

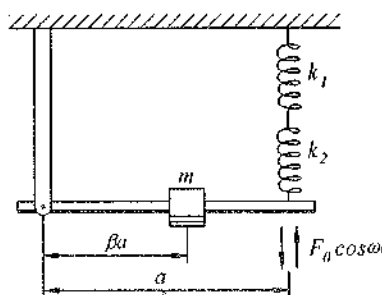
**10.56.** Tìm chu kỳ dao động xoắn của rôto động cơ phản lực không khí, nếu mômen quán tính của máy nén khí hướng trục là  $I_1$ , mômen của tuabin  $I_2$ , môđun xoắn của thanh nối chúng là  $f$ .

**10.57.** Một tấm đồng chất có dạng một tam giác đều, có các đỉnh được treo trên ba sợi dây có cùng chiều dài  $L$ . Ở trạng thái cân bằng tấm nằm ngang còn các sợi chỉ thẳng đứng. Tìm chu kỳ dao động xoắn của tấm quanh trục thẳng đứng (giả thiết mỗi sợi chỉ lệch một góc nhỏ so với phương thẳng đứng).

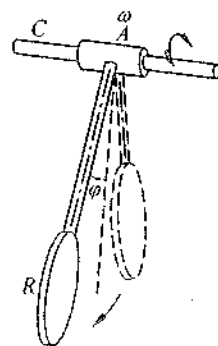
**10.58.** Một lực điều hoà  $F_0 \cos \omega t$  tác dụng lên đầu một thanh có chiều dài  $a$  của hệ cho trên hình 261. Tìm biên độ dao động ổn định nhỏ của đầu thanh này, nếu tần số  $\omega$  nhỏ bằng nửa tần số riêng của hệ. Thanh và hai lò xo  $k_1, k_2$  giả thiết không trọng lượng. Khối lượng của vật là  $m$ .



Hình 260



Hình 261



Hình 262

**10.59.** N.E. Giucopxki đã đưa ra một kết cấu hoàn hảo (không có mất mát) để treo con lắc, sơ đồ của nó được cho trên hình 262. Khớp nối A lắp trên

trục  $C$  gắn với con lắc  $B$ . Trục nằm ngang và quay đều với vận tốc góc  $\omega$ , con lắc thực hiện dao động trong mặt phẳng vuông góc với trục. Hãy chỉ ra rằng nếu vận tốc góc của trục đủ lớn và lực ma sát của khớp nối với trục không phụ thuộc vào vận tốc trượt thì sự mất mát năng lượng dao động trên giá treo sẽ không xảy ra. Vận tốc góc của trục phải lớn đến mức nào?

**10.60\*.** Tính chất dao động của con lắc trên sẽ thay đổi thế nào nếu lực ma sát giữa khớp nối với trục (H. 262) phụ thuộc vào vận tốc trượt của khớp nối trên trục? Tất cả các điều kiện khác của bài tập trước vẫn được giữ nguyên. Xét hai trường hợp sau:

- 1) Lực ma sát tăng khi vận tốc trượt tăng;
- 2) Lực ma sát giảm khi vận tốc trượt tăng.

**10.61.** Một viên đạn với vận tốc 660m/s bay qua cách người một khoảng 5m. Viên đạn ở cách người một khoảng bằng bao nhiêu khi người đó nghe thấy tiếng rít của nó?

**10.62.** Sợi dây đàn có chiều dài  $L$  bằng bao nhiêu, biết rằng khi cắt ngắn nó đi 10cm thì tần số dao động tăng lên 1,5 lần? Lực căng của dây không đổi.

**10.63.** Hai dây đàn có cùng chiều dài và độ căng. Chu kỳ dao động riêng của chúng sẽ khác nhau như thế nào nếu đường kính của một dây gấp đôi đường kính dây còn lại? Các dây được làm từ cùng một vật liệu.

**10.64.** Cần phải thay đổi độ căng của dây đàn thế nào để nó cho âm trầm hơn ba lần?

**10.65.** Dây đàn ngân với tần số 400Hz. Phải giữ ở vị trí nào và hãm chuyển động của dây đàn như thế nào để nó ngân với tần số: 1) 800Hz, 2) 1200Hz? Có thể giảm tần số âm của nó bằng cách đề lên dây đàn được không?

**10.66.** Hai sóng hình sin do hai nguồn phát ra. Tìm chuyển động của một hạt nằm cách hai nguồn các khoảng  $d_1$  và  $d_2$ , nếu sóng truyền tuân theo nguyên lý chồng chất, các nguồn dao động có cùng pha và cùng tần số và tại điểm đang xét, các phương dao động trùng nhau.

**10.67.** Biên độ dao động của áp suất sóng âm  $\Delta P = 10^{-3} \text{ N/cm}^2$  (âm to). Tìm năng thông lọt vào tai người trong 1s. Giả thiết diện tích tai người  $S = 4\text{cm}^2$  và tai đặt vuông góc với phương truyền sóng. Khối lượng riêng của không khí  $\rho = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$ , vận tốc âm thanh là 334m/s,

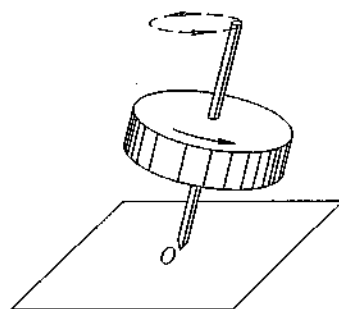
**10.68.** Một sóng âm phẳng có thể cho bằng biểu thức  $y = 0,05 \sin(1980t - 6x)$ , trong đó  $y$  là độ dịch chuyển của hạt theo phương truyền sóng tính bằng cm;  $t$  là thời gian tính bằng s;  $x$  là khoảng cách dọc theo trục truyền sóng tính bằng m. Tìm:

- 1) tần số dao động  $\nu$ ;

- 2) vận tốc truyền sóng  $c$ ;
- 3) bước sóng  $\lambda$ ;
- 4) biên độ dao động của vận tốc mỗi hạt  $u$ ;
- 5) biên độ dao động của áp suất  $\Delta P$ , nếu áp suất và thể tích  $v$  liên hệ với nhau bằng biểu thức  $Pv^{1,4} = \text{const}$ .

## §11. CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT RẮN TRONG KHÔNG GIAN. CON QUAY HỒI CHUYỂN

**11.1.** Một con quay đối xứng có trục nghiêng một góc  $\alpha$  so với phương thẳng đứng (H. 263). Con quay chuyển động tiến động đều dưới tác dụng của trọng lực. Điểm tựa  $O$  cố định. Xác định góc với phương thẳng đứng của trục con quay tác dụng lên bề mặt.



Hình 263

**11.2.** Con lắc định vị sử dụng làm thiết bị chỉ độ nghiêng cho máy bay được đặc trưng bởi các thông số sau: khối lượng bánh đà của con quay  $m = 5 \cdot 10^3$  g, mômen quán tính của bánh đà ứng

với trục con quay  $I_{//} = 8 \cdot 10^4$  g.cm<sup>2</sup>, khoảng

cách giữa điểm treo và tâm khối của bánh đà  $l = 0,25$  cm. Con quay quay 20000 vòng/phút. Khi máy bay chuyển động đều trục con lắc thẳng đứng. Sau đó trong khoảng thời gian  $\tau = 10$  s máy bay chuyển động với gia tốc ngang  $a = 1$  m/s<sup>2</sup>. Xác định góc  $\alpha$  mà trục của con lắc lệch với phương thẳng đứng trong thời gian máy bay tăng tốc.

**11.3.** Một thanh đồng chất dài  $l$  có một đầu được treo trên một trục nằm ngang lắp trên giá một máy ly tâm. Khi máy không quay vị trí của thanh trùng với trục của máy. Thanh sẽ lệch một góc bằng bao nhiêu khi máy quay với vận tốc góc  $\omega$ ?

**11.4.** Đánh giá cỡ độ lớn của mômen động lượng của bánh xe đạp đang đi với vận tốc 30 km/h. Cần phải đặt một mômen lực bằng bao nhiêu để quay ghi đồng 1 rad trong thời gian 1 s?

**11.5\*.** Cần phải bắn từ cực của Trái Đất một quả đạn  $m = 1000$  tấn với vận tốc  $v$  bằng bao nhiêu, để làm quay trục Trái Đất so với hệ "các ngôi sao đứng yên" một góc  $\alpha = 1^\circ$ ? Khối lượng Trái Đất  $M = 6 \cdot 10^{24}$  kg. Độ dài một độ kinh tuyến là  $l = 111$  km. Coi Trái Đất là một quả cầu đồng nhất.

**11.6.** Từ cực Bắc của Trái Đất người ta phóng một tên lửa theo phương tiếp tuyến với Trái Đất. Khi đó trục của Trái Đất sẽ xoay một góc bằng bao nhiêu? Khối lượng Trái Đất bằng  $6 \cdot 10^{24}$  kg. Bán kính Trái Đất 6400km. Khối lượng tên lửa 1000 tấn. Động cơ tên lửa chỉ làm việc khi phóng. Vận tốc phóng tên lửa là 15km/s.

**11.7.** Ở vùng Bắc cực có một thiên thạch rơi xuống Trái Đất dưới một góc  $45^\circ$  so với phương thẳng đứng. Khối lượng thiên thạch 1000 tấn, vận tốc của nó là 20km/s. Trục của Trái Đất sẽ lệch một góc bằng bao nhiêu sau khi va chạm với thiên thạch này? Khối lượng Trái Đất  $6 \cdot 10^{24}$  kg, bán kính của nó 6400km.

**11.8.** Một máy bay có vận tốc  $u = 300$ km/h lượn một vòng có bán kính  $R = 100$ m. Cánh quạt máy bay có mômen quán tính  $I = 7$ kg.m<sup>2</sup> quay với vận tốc  $N = 1600$ vòng/phút. Hỏi mômen lực hồi chuyển  $M$  do cánh quạt tác dụng lên trục bằng bao nhiêu?

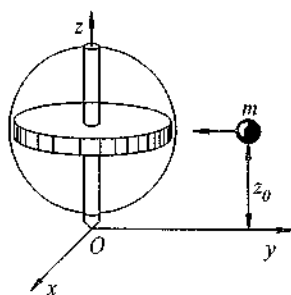
**11.9.** Chân vịt của một tàu phóng ngư lôi quay  $N = 750$ vòng/phút, khối lượng chân vịt và trục là  $m = 12$  tấn, bán kính quán tính  $\rho = 25$ cm. Tàu chuyển động theo cung tròn bán kính  $R = 600$ m với vận tốc  $v = 72$ km/h. Tìm áp lực hồi chuyển trong các ổ trục của chân vịt nếu khoảng cách giữa các ổ trục là  $a = 1$ m.

**11.10.** Xác định áp lực hồi chuyển lớn nhất của tuabin nhanh đặt trên tàu thủy. Tàu bị lắc dọc với biên độ  $9^\circ$  và chu kỳ 15s quanh trục vuông góc với trục rôto. Rôto của tuabin có khối lượng 3500kg, bán kính quán tính 0,6m quay với vận tốc 3000 vòng/phút. Khoảng cách giữa các ổ trục bằng 2m.

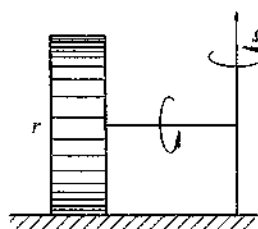
**11.11.** Một xe mô tô chạy theo bề mặt thẳng đứng bên trong của tường hình trụ. Để có thể chuyển động chính xác theo phương ngang người ta gắn vào xe mô tô một bánh đà có mômen quán tính  $I$  quay quanh một trục thẳng đứng khi mô tô đứng trên mặt đất. Khối lượng mô tô và người cascade là  $m$ , khối tâm nằm cách tường một khoảng  $h$  (bán kính tường hình trụ lớn hơn nhiều so với kích thước xe mô tô). Hỏi hệ số truyền chuyển động quay từ bánh xe tới bánh đà phải bằng bao nhiêu để mô tô có thể chuyển động mà các bánh không trượt và không mất độ cao? Bán kính các bánh xe  $r$ . Hệ số ma sát giữa các bánh xe và tường bằng  $k$ .

**11.12.** Một quả bóng đàn hồi có khối lượng  $m = 0,2$ kg, vận tốc  $v = 20$ m/s va chạm vào tâm của vỏ nhẵn đứng yên của một con quay có mômen động lượng  $L = L_z = 40$ kg.m<sup>2</sup>/s và có một điểm cố định  $x = y = z = 0$  (H. 264). Tọa độ điểm va chạm  $x_0 = 0$ ,  $z_0 = 0,2$ m. Trục con quay có vị trí nào sau va chạm?

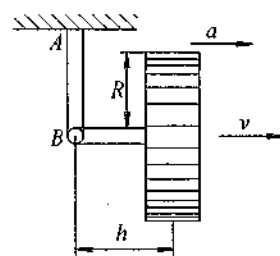
**11.13.** Một con quay đối xứng có trục nghiêng được đặt trên một mặt phẳng nằm ngang, điều kiện chuyển động tiến động đều dưới tác dụng của trọng lực. Điểm tỳ của con quay chuyển động trên mặt phẳng này theo một đường tròn với vận tốc không đổi. Tâm quán tính của con quay luôn giữ ở một độ cao nhất định cũng chuyển động với vận tốc không đổi quanh một đường tròn bán kính  $R$ . Phản lực  $F$  mà mặt phẳng tác dụng lên con quay tạo với phương thẳng đứng một góc  $\alpha$  bằng bao nhiêu? Con quay có dạng đĩa đồng chất bán kính  $r$  và quay quanh trục của nó với vận tốc  $\omega$ . Khoảng cách từ điểm tỳ đến tâm quán tính của con quay là  $l$ .



Hình 264



Hình 265



Hình 266

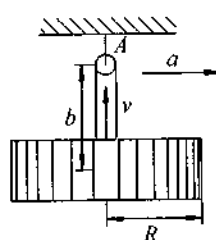
**11.14.** Hiệu ứng con quay được sử dụng trong các máy xay kiểu mâm. Một con lăn nặng hình trụ có thể quay quanh trục hình học của nó được cho quay quanh trục thẳng đứng (với vận tốc góc  $\Omega$ ) và lăn trên tấm lót nằm ngang (H. 265). Chuyển động quay này có thể xem như chuyển động cưỡng bức của con quay. Khi chuyển động cưỡng bức, áp lực của con lăn lên tấm lót tăng lên. Lực này tán và nghiền nhỏ các vật nằm trên tấm lót bên dưới con lăn. Tính áp lực toàn phần của con lăn trên tấm lót, nếu bán kính của con lăn  $r = 50$  cm, vận tốc làm việc 1 vòng/s.

**11.15.** Một đĩa tròn bán kính  $r$  quay xung quanh trục riêng của nó với vận tốc góc  $\omega$ , lăn không trượt ở vị trí nghiêng trên mặt phẳng ngang vẽ được một vòng tròn trong khoảng thời gian  $T$ . Xác định  $T$  và bán kính  $R$  của vòng tròn, nếu  $R \gg r$ , góc giữa mặt phẳng ngang và mặt phẳng đĩa bằng  $\alpha$ .

**11.16.** Thanh  $AB$  thẳng đứng gắn chặt với giá treo tại điểm  $A$ . Tại điểm  $B$  (H. 266) thanh được nối bằng một khớp quay với rôto của con quay (đĩa bán kính  $R = 2$  cm, quay với vận tốc góc 500 vòng/s). Khối tâm của rôto nằm cách điểm  $B$  một khoảng  $h = 2$  cm. Cả hệ nằm trong trọng trường của Trái Đất và được truyền cho một gia tốc ngang  $a = 3 \text{ m/s}^2$ , tại thời điểm truyền gia tốc các vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{v}$  song song với nhau. Xác định độ lớn và chiều vận tốc góc của chuyển động tiến động của con quay.

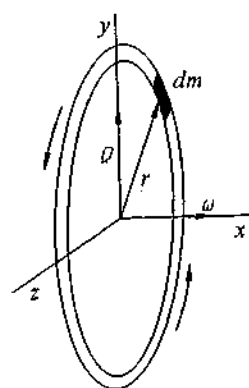
**11.17.** Rôto con quay (đĩa bán kính  $R = 2$  cm quay với vận tốc góc 30000 vòng/phút) được lắp với khớp quay tại điểm  $A$ . Khối tâm của rôto

nằm cách khớp một khoảng  $b = 2\text{cm}$  (H. 267). Hệ nằm trong trọng trường của Trái Đất và được truyền một gia tốc ngang  $a = 2\text{m/s}^2$ . Xác định độ lệch cực đại của trục con quay so với phương thẳng đứng và thời gian đến khi nó đạt vị trí này lần đầu tiên.



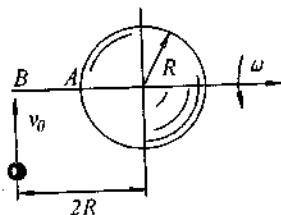
Hình 267

**11.18.** Từ trên ô tô đang chuyển động với vận tốc  $v$ , một chiếc bánh xe rơi xuống và lăn trên mặt đất. Người ta quan sát thấy bánh xe lăn được một vòng tròn bán kính  $R$ . Xác định góc nghiêng của bánh xe so với phương ngang. Khối lượng bánh xe là  $M$ . Giả thiết toàn bộ khối lượng bánh xe tập trung ở vành ngoài. Biết rằng  $R$  rất lớn so với bán kính bánh xe.



Hình 268

**11.19\*.** Có thể tìm được điều kiện để một con quay đối xứng chuyển động tiến động đều nếu sử dụng định lý Coriolis. Xét một vòng nhỏ quay đều trong mặt phẳng của nó với vận tốc góc  $\omega$  và tiến động quanh một trục cố định với vận tốc góc không đổi  $\Omega$  (H. 268). Cần phải tác dụng vào vòng các lực bằng bao nhiêu để giữ được sự tiến động đều này?



Hình 269

**11.20.** Một quả cầu bán kính  $R$  nối liền với một nan hoa  $AB$  khối lượng không đáng kể.  $AB$  nằm trên đường kéo dài của đường kính quả cầu. Quả cầu và nan hoa được cho quay quanh trục đi qua tâm của chúng đến vận tốc góc  $\omega$  (H.269). Một chất điểm vận tốc  $\vec{v}_0$  bay cách tâm cầu một khoảng  $2R$  đến và chạm đàn hồi tuyệt đối vào nan hoa. Vận tốc  $\vec{v}_0$  vuông góc với nan hoa và nằm trong mặt phẳng ngang đi qua tâm cầu (trong mặt phẳng hình vẽ). Sau va chạm chất điểm dừng lại, góc lệch lớn nhất của nan hoa so với mặt phẳng ngang là  $\varphi$ . Xác định  $\varphi$ , nếu  $\frac{R\omega}{v_0} = 50$ .

Bỏ qua lực ma sát. Chuyển động xảy ra trong không gian tự do.

**11.21.** Một quả cầu bán kính  $R$  nối liền với một nan hoa cứng  $AB$  khối lượng không đáng kể.  $AB$  nằm trên đường kéo dài của đường kính quả cầu. Quả cầu và nan hoa được cho quay quanh trục đi qua tâm của chúng đến vận tốc góc  $\omega$  (H.269). Một chất điểm vận tốc  $\vec{v}_0$  bay cách tâm cầu một khoảng  $2R$  đến và chạm đàn hồi tuyệt đối vào nan hoa. Vận tốc  $\vec{v}_0$  vuông góc với nan hoa và nằm trong mặt phẳng ngang đi qua tâm cầu (trong mặt phẳng hình



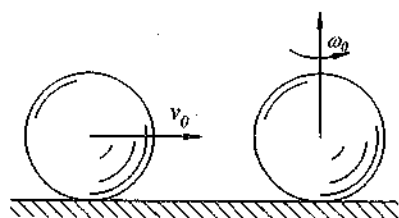
vẽ). Xác định tỷ số  $\frac{v_0}{R\omega}$ , nếu sau va chạm chất điểm đứng yên, góc lệch lớn nhất của nan hoa so với mặt phẳng ngang là  $90^\circ$ . Bỏ qua lực ma sát. Chuyển động xảy ra trong không gian tự do.

**11.22\*.** Một quả cầu đặc đồng chất nhẵn nằm trên mặt bàn nằm ngang quay nhanh quanh đường kính thẳng đứng của nó với vận tốc  $\omega_0$  (H. 270). Một quả cầu thứ hai giống hệt có vận tốc  $v_0$  tới và chạm vào nó. Va chạm là đàn hồi tuyệt đối và không có sự truyền chuyển động quay. Quả cầu thứ nhất bắt đầu chuyển động trượt trên mặt bàn. Hệ số ma sát trượt không phụ thuộc vào vận tốc. Tìm góc  $\alpha$  giữa trục quay tức thời của quả cầu thứ nhất với đường thẳng đứng tại thời điểm  $t$  bất kỳ, khi quả cầu vẫn chưa ngừng trượt. Tìm độ lớn của góc khi quả cầu này chuyển sang chỉ có lăn thuần túy. Bỏ qua ma sát quay và ma sát lăn. Xét trường hợp khi  $v_0$  và  $\omega_0$  liên hệ với nhau bằng hệ thức  $v_0 = \omega_0 R$ .

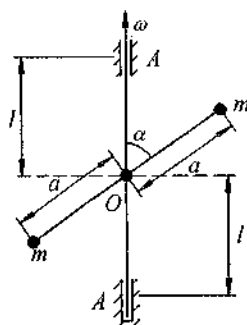
**11.23.** Hai chất điểm giống nhau khối lượng  $m$  quay quanh một trục cứng cố định trên xà với vận tốc góc không đổi  $\omega$  (H. 271). Trục và xà nặng không đáng kể. Tính và vẽ trên hình vị trí tức thời của vectơ mômen động lượng  $\vec{L}$  của hệ đối với điểm  $O$ .  $L$  có phụ thuộc vào cách chọn gốc quy chiếu không? Tìm lực  $F$  giữ trục trong các ổ trục  $A$  bằng các phương pháp sau:

a) từ những suy luận cơ bản;

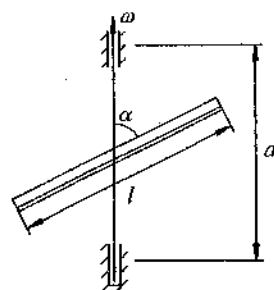
b) trước hết tìm mômen  $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$  của chúng.



Hình 270



Hình 271



Hình 272

**11.24.** Một thanh nhỏ có chiều dài  $l = 1\text{m}$ , khối lượng  $m = 10\text{kg}$  quay quanh một trục thẳng đứng đi qua tâm của nó với vận tốc  $n = 3000$  vòng/phút (H.272). Trục quay tạo với thanh một góc  $\alpha = 89,9^\circ$ . Những lực nào tác dụng lên ổ trục? Các ổ trục nằm đối xứng với thanh và cách nhau một đoạn  $a = 2\text{cm}$ .

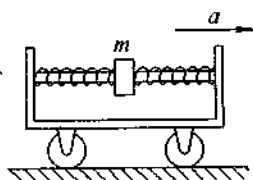
11.25. Một “vật rắn” tạo thành từ tám chất điểm  $m$  nằm trên các đỉnh của khối lập phương. Hãy chỉ ra rằng bất kỳ trục nào đi qua tâm quán tính của “vật” này đều là trục tự do.

## §12. HỆ QUY CHIỀU KHÔNG QUÁN TÍNH

12.1. Chu kỳ dao động nhỏ của một con lắc toán học chiều dài  $l$  sẽ bằng bao nhiêu nếu con lắc dao động trong toa tàu đang chuyển động theo phương ngang với gia tốc  $a$ ?

12.2. Trên một tên lửa đang cất cánh thẳng đứng với gia tốc  $a$ , người ta đặt một đồng hồ quả lắc. Đồng hồ sẽ đo khoảng thời gian  $T_1$  từ thời điểm cất cánh đến khi nó rơi xuống đất bằng bao nhiêu, nếu động cơ trong khi cất cánh đã hoạt động một thời gian  $T$  là đo được bằng đồng hồ trên Trái Đất?

12.3. Người ta lắp trên xe lăn một thanh nằm ngang, trên thanh có lồng một vật khối lượng  $m = 1\text{kg}$  có thể trượt không ma sát (H. 273). Người ta mắc vào vật này hai lò xo có hệ số đàn hồi chung là  $k = 1\text{N/cm}$ . Vật  $m$  sẽ chuyển động như thế nào so với xe lăn? Xét hai trường hợp sau:



Hình 273

- 1) Xe lăn nhận được gia tốc tăng chậm từ 0 đến giá trị  $a = 0,98\text{m/s}^2$ ;
- 2) Xe lăn tại thời điểm  $t = 0$  đột ngột nhận được gia tốc  $a$  và giữ giá trị không đổi. Bỏ qua ma sát.

12.4\*. Ở trạng thái cân bằng khối tâm của vật  $m$  và xe lăn mô tả trong bài tập trước cùng nằm trên một đường thẳng đứng (H. 273). Sẽ xuất hiện chuyển động như thế nào nếu kéo vật  $m$  ra khỏi vị trí cân bằng một đoạn  $l = 6\text{cm}$  và buộc với xe bằng một sợi dây, sau đó đốt sợi dây? Khối lượng xe không kể vật  $m$  là  $M = 5\text{kg}$ , bỏ qua khối lượng lò xo và ma sát.

12.5. Chuyển động quay của Trái Đất làm lệch quỹ đạo của các vật rơi tự do (không vận tốc ban đầu) so với dây dọi. Hỏi quỹ đạo lệch về phía nào và độ lệch này bằng bao nhiêu? Giải bài toán trong hệ quy chiếu gắn với Trái Đất.

12.6. Người ta bắn súng thẳng đứng lên trên (tức là song song với dây dọi). Vận tốc ban đầu của viên đạn  $v_0 = 100\text{m/s}$ , vị trí bắn có vĩ độ địa lý  $\varphi = 60^\circ$ . Chú ý đến chuyển động quay quanh trục của Trái Đất, xác định gần đúng xem viên đạn rơi lệch về phía Đông hay phía Tây bao nhiêu so với vị trí bắn. Bỏ qua sức cản của không khí.

**12.7.** Cần phải bắn viên đạn lệch một góc bao nhiêu so với phương thẳng đứng để viên đạn rơi xuống đúng chỗ bắn? Sử dụng các dữ liệu của bài trước.

**12.8.** Một quả đạn pháo chuyển động theo quỹ đạo bằng (tức là quỹ đạo có thể coi như đường thẳng nằm ngang). Vận tốc ngang của quả đạn  $v_0 = 900 \text{ m/s}$ . Quả đạn cần bắn trúng mục tiêu ở cự ly  $L = 18 \text{ km}$ . Bỏ qua sức cản của không khí, xác định độ lệch cạnh của quả đạn do chuyển động quay của Trái Đất. Độ lệch này có phụ thuộc vào phương bắn hay không? Vĩ độ của điểm bắn là  $\varphi = 60^\circ$  vĩ tuyến Bắc.

**12.9.** Từ một độ cao không lớn so với Trái Đất, trên đường xích đạo người ta bắn một quả đạn theo phương ngang về phía đông với vận tốc ban đầu  $v = 860 \text{ m/s}$ . Sự hạ thấp của quỹ đạo thay đổi thế nào sau một giây, nếu bắn về phía tây với cùng vận tốc đầu? Bỏ qua sức cản của không khí.

**12.10.** Người ta đặt thước ngắm của súng sao cho quả đạn sẽ trúng mục tiêu nếu Trái Đất không quay. Nếu bắn ngang về phía bắc tại vĩ độ  $45^\circ$  với cự ly  $2 \text{ km}$  thì quả đạn sẽ bị lệch về phía nào và lệch bao nhiêu? Vận tốc ban đầu của quả đạn là  $300 \text{ m/s}$ . Bán kính Trái Đất là  $6400 \text{ km}$ .

**12.11\*.** Chuyển động quay ngày đêm của Trái Đất là nguyên nhân làm lệch các quả đạn pháo và đạn súng so với phương bắn ban đầu theo mặt phẳng ngang. Tính độ lệch ngang  $x$  của viên đạn, nếu bắn trong mặt phẳng kinh tuyến theo phương ngang sau một giây. Vị trí bắn tại vĩ độ của Matxcova ( $55^\circ 45'$ ), vận tốc ban đầu  $1000 \text{ m/s}$ . Viên đạn lệch về phía nào nếu khi bắn súng được chỉnh về phương Nam. Bỏ qua sức cản của không khí. Giải bài tập trong hệ quy chiếu gắn với Trái Đất.

**12.12.** Tại  $60^\circ$  vĩ tuyến bắc một tàu hơi nước nặng  $100$  tấn chạy từ phía Nam lên phía bắc với vận tốc  $v = 72 \text{ km/h}$  theo đường ray dọc theo kinh tuyến. Tìm độ lớn và chiều của lực mà tàu tác dụng lên đường ray theo phương vuông góc với chiều tàu chạy.

**12.13.** Một tàu hơi nước đi về phương Đông dọc theo vĩ tuyến với vĩ độ địa lý  $\varphi = 60^\circ$ , vận tốc của tàu là  $v = 10 \text{ m/s}$ . Xác định trọng lượng  $P$  của vật trên tàu, nếu cân bằng cân lò xo, biết rằng khi đứng yên so với Trái Đất vật có trọng lượng là  $P_0$ .

**12.14\*.** Tại xích đạo người ta đặt một khẩu đại bác trên đường ray. Đường ray hướng từ Tây sang Đông, khẩu đại bác có thể di chuyển không ma sát trên ray. Người ta bắn thẳng đứng lên trên. Vận tốc  $v_0$  của súng sau khi bắn bằng bao nhiêu? hướng về phía nào? Khối lượng khẩu đại bác là  $M$ , khối lượng quả đạn là  $m$ , chiều dài nòng súng là  $l$ . Giả thiết quả đạn chuyển động trong nòng súng với gia tốc không đổi  $a$ .

**12.15\*.** Trên vùng cực của Trái Đất người ta đặt một khẩu đại bác có nòng súng nằm ngang hướng dọc theo kinh tuyến. Súng có thể quay quanh trục thẳng đứng đi qua khoả nòng. Hỏi súng sẽ quay với vận tốc góc bằng bao nhiêu so với Trái Đất sau khi bắn? Giả thiết rằng, tại thời điểm ban đầu quả đạn nằm trên trục quay và khi bắn chuyển động trong nòng súng với gia tốc không đổi  $a$ . Khối lượng súng ( $M=1000\text{kg}$ ) lớn hơn nhiều so với khối lượng quả đạn ( $m=10\text{kg}$ ). Chiều dài nòng súng rất lớn so với bán kính của nó.

**12.16\*.** Xạ thủ và bia nằm trên hai điểm đối xứng nhau qua tâm của một sàn quay đường kính  $D=20\text{m}$  đang quay đều quanh trục thẳng đứng với gia tốc góc  $\omega$ . Xạ thủ ngắm vào bia mà không lấy hiệu chỉnh theo chuyển động quay của sàn. Gia tốc góc của vòng ngựa gỗ  $\omega$  phải bằng bao nhiêu để trong các điều kiện trên xạ thủ vẫn bắn trúng mục tiêu, nếu tại thời điểm bắn vận tốc góc của sàn là  $\omega_0=1\text{rad/phút}$ , vận tốc viên đạn  $v_0=200\text{m/s}$ ? Giả thiết điều kiện bắn và xạ thủ là lý tưởng. Bỏ qua ảnh hưởng của lực hướng tâm.

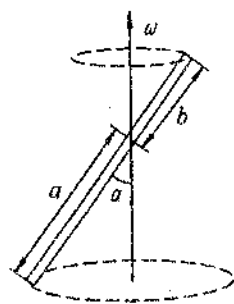
**12.17.** Đôi khi người ta có thể sử dụng một phòng quay quanh trục thẳng đứng như một trò giải trí. Sàn của phòng có dạng lõm. Trong thời gian phòng quay tất cả các vật và người đứng trên sàn này đều có cảm giác như đứng trên nền phẳng, vững và vuông góc với bề mặt của nó. Xác định hình dạng của sàn, nếu vận tốc góc của phòng là  $\omega$ .

**12.18.** Máy bay lượn một vòng tròn trên cùng một độ cao với vận tốc không đổi. Dây dọi đặt trong khoang máy bay sẽ có hướng như thế nào? Tìm chu kỳ dao động của con lắc toán học đặt trên máy bay, nếu chiều dài của nó là  $l$ , thân máy bay nghiêng với phương ngang một góc  $\alpha$ .

**12.19.** Máy bay bay trên một độ cao không đổi theo một vòng tròn bán kính  $R=25\text{km}$  với vận tốc không đổi  $v=250\text{m/s}$ . Trong khoang máy bay có đặt các đồng hồ quả lắc và đồng hồ dây cót. Đồng hồ quả lắc chỉ thời gian bay bằng bao nhiêu, nếu đồng hồ dây cót chỉ  $t=1\text{h}$ ? Giả thiết các đồng hồ là lý tưởng. Bỏ qua lực Coriolis.

**12.20.** Một thanh nhỏ chiều dài  $l$  quay quanh một đầu của nó và vẽ thành một hình nón tròn xoay (con lắc vật lý hình nón). Tìm chu kỳ dao động  $T$  theo góc  $\varphi$  giữa trục thanh và phương thẳng đứng.

**12.21\*.** Một thanh nhỏ chiều dài  $a+b$  được lắp bằng một bản lề vào điểm cách một đầu của nó một khoảng  $b$ . Thanh quay quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc  $\omega$  và vẽ thành một hình nón tròn xoay (H.274). Xác định góc lệch của thanh so với phương thẳng đứng.



Hình 274

**12.22.** Một xe điện bánh hơi khi quay đầu nó chuyển động theo vòng tròn bán kính  $R=30\text{m}$  với vận tốc  $v=14,4\text{km/h}$ . Một hành khách đi dọc theo

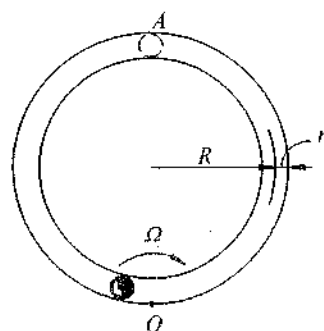
xe về phía buồng lái với vận tốc  $u = 2\text{m/s}$  so với xe. Xác định góc nghiêng của người đó so với phương thẳng đứng khi người đó đi đến giữa xe.

**12.23.** Một hành khách phải đi dọc theo xe về phía buồng lái với vận tốc  $v_0$  bằng bao nhiêu để có cảm giác không trọng lượng? Biết rằng ô tô đi qua đỉnh đồi có bán kính cong  $R = 42\text{m}$ . Vận tốc ô tô là  $u = 72\text{km/h}$ . Giả thiết người đó ở tâm xe.

**12.24.** Xe buýt chạy với vận tốc  $v = 30\text{km/h}$  trên một chiếc cầu lồi có bán kính cong ở điểm cao nhất  $r = 64\text{m}$ . Một hành khách đi trong khoang xe từ buồng lái ra phía sau với vận tốc  $v_0 = 2\text{m/s}$  so với xe. Khi ô tô đi qua điểm cao nhất của cầu thì người đó đi đến giữa xe. Người đó sẽ cảm thấy độ mất trọng lượng tương đối của anh ta ở thời điểm đó bằng bao nhiêu?

**12.25.** Bán kính lượn của một con sông phải bằng bao nhiêu để hai bờ bên phải và bên trái của nó bị xói mòn với cường độ như nhau? Vận tốc dòng chảy  $0,5\text{m/s}$ , vĩ độ của vùng đó là  $60^\circ$ .

**12.26.** Vòng “hu-la-húp” có dạng ống tôrôit (hình xuyên) rộng với các bán kính  $R$  và  $r \ll R$  như trên hình 275. Vòng quay trong mặt phẳng ngang quanh trục thẳng đứng  $O$  với vận tốc góc  $\Omega$ . Tại thời điểm ban đầu bên trong ống, ở gần với trục quay người ta đặt một hòn sỏi nhỏ, có thể trượt không ma sát trong lòng ống. Hòn sỏi có vận tốc bằng bao nhiêu khi nó chuyển động đến điểm  $A$ ? Vận tốc này đối với Trái Đất bằng bao nhiêu?



Hình 275

**12.27.** Một vận động viên xe đạp đi với vận tốc  $v_0$  dọc theo bán kính của một đĩa nằm ngang đang quay với vận tốc  $n$  vòng/phút. Xác định góc nghiêng và hướng nghiêng của người đó.

**12.28.** Một người đi với vận tốc tương đối, không đổi  $v = 1\text{m/s}$  dọc theo bán kính của một sân quay từ ngoài vào tâm, vòng ngựa gỗ đang quay đều với vận tốc  $\omega = 0,5\text{rad/s}$ . Người đó phải nghiêng như thế nào để khỏi ngã? Biểu diễn góc nghiêng theo khoảng cách  $R$  của người đó đến tâm sân và xác định bằng số khi  $R = 5\text{m}$ . Bỏ qua sự thay đổi độ cao của khối tâm trong thời gian chuyển động.

**12.29.** Ở tâm của một sân quay đang đứng yên có một người đang đứng. Người đó di chuyển với vận tốc đều ra mép sân theo chiều từ Đông sang Tây. Coi sân quay là đồng chất, xác định xem với tỷ lệ khối lượng giữa người và sân  $\frac{m}{M}$  bằng bao nhiêu thì sân sẽ nhận được vận tốc góc bằng một

phần tư vận tốc góc của chuyển động quay của Trái Đất quanh trục của nó?

Giả thiết rằng sàn quay ở vĩ độ  $\varphi = 30^\circ$ . Bỏ qua ma sát trong ổ trục của sàn.

**12.30.** Một bánh xe đạp bán kính  $R$  quay trong mặt phẳng nằm ngang xung quanh tâm của nó. Một quả cầu nhỏ có thể chuyển động không ma sát dọc theo nan hoa. Tại thời điểm ban đầu quả cầu nằm sát vành xe. Cần phải truyền cho quả cầu vận tốc ban đầu theo hướng bán kính bằng bao nhiêu để nó đi đến được trục quay? Vận tốc quay của bánh xe được giữ không đổi.

**12.31.** Một đoạn ống nằm ngang chiều dài  $l$  được cho quay quanh trục thẳng đứng đi qua một đầu của ống với vận tốc góc  $\omega$  không đổi. Ở chính giữa ống trước khi quay có một quả cầu nhỏ. Sau khoảng thời gian  $\tau$  bằng bao nhiêu thì nó sẽ bay ra khỏi ống? Bỏ qua ma sát.

**12.32.** Một người cần thực hiện một công bằng bao nhiêu để đi từ mép đến tâm của sàn quay đang quay đều với vận tốc  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ ? Bán kính sàn quay  $R = 5 \text{ m}$ , khối lượng của người  $m = 60 \text{ kg}$ . Công này có phụ thuộc vào hình dạng đường mà người đó đi hay không?

**12.33.** Trên mặt phẳng ngang có đặt một đoạn ống dài  $l$  có thể quay xung quanh trục thẳng đứng đi qua một đầu của nó. Sát với trục quay, bên trong ống có một vật nhỏ khối lượng  $m$ . Ống bắt đầu quay với vận tốc không đổi là  $\omega$ . Sau khi bắt đầu quay, vật  $m$  đi được một khoảng  $L$  bằng bao nhiêu trên bề mặt ngang? Hệ số ma sát giữa vật và bề mặt là  $k$ . Bỏ qua ma sát giữa vật và ống.

**12.34.** Một đĩa bán kính  $R$  có khoét một rãnh dọc theo đường kính. Vận tốc góc của đĩa là  $\omega$ . Tại thời điểm ban đầu người ta đặt một hòn bi trong rãnh sát với tâm quay. Hòn bi sẽ bắn ra khỏi đĩa với vận tốc bằng bao nhiêu và dưới một góc nào? Bỏ qua ma sát.

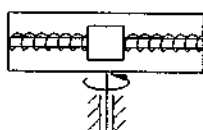
**12.35\*.** Trên một thanh nhẵn nằm ngang đang quay quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc không đổi  $\omega = 40\pi \text{ rad/s}$ , người ta cố định một vật lỏng qua thanh có khối lượng  $m = 100 \text{ g}$  ở gần trục quay. Tại một thời điểm nào đó, người ta tháo chốt hãm để vật trượt không ma sát trên thanh. Cần phải đặt vào thanh một mômen  $M$  bằng bao nhiêu để nó tiếp tục quay đều? Tìm khoảng cách  $x$  của vật đến trục quay tại thời điểm  $t$  bất kỳ. Tại thời điểm ban đầu trọng tâm của vật ở cách trục quay  $a = 2 \text{ cm}$ .

**12.36.** Một vật khối lượng  $m$  có thể trượt không ma sát trên một xà ngang. Người ta giữ hai vật bằng hai lò xo giống nhau có hệ số đàn hồi  $k$  (H. 276). Xà quay quanh trục thẳng đứng với vận tốc  $\omega_0$ . Người ta kéo vật ra khỏi vị trí cân bằng một khoảng  $l$  rồi thả ra. Vật sẽ chuyển động như thế nào?

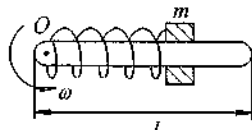
**12.37.** Một vật nhỏ khối lượng  $m$  lồng vào một thanh nhỏ, nhẵn chiều dài  $l$  đang quay trong mặt phẳng ngang với vận tốc  $\omega$  quanh trục đi qua điểm cố định  $O$  (H. 277). Trục  $O$  và vật  $m$  được nối với nhau bằng một lò xo độ cứng

$k$  và chiều dài  $a$  ( $a < l$ ) ở trạng thái không giãn. Xác định vị trí cân bằng của vật trên thanh, tìm chu kỳ dao động và vùng có các dao động này.

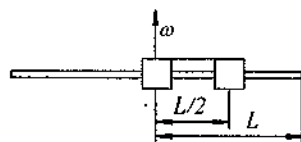
**12.38.** Hai vật có thể trượt tự do trên một xà nhẵn đang quay với vận tốc góc không đổi  $\omega$  trong mặt phẳng ngang. Hai vật được nối với nhau bằng một sợi chỉ nhẹ không giãn (H. 278). Đầu của xà cách trục quay một khoảng  $L$ . Tại thời điểm ban đầu một vật nằm trên trục quay, còn vật kia cách nó một khoảng là  $\frac{L}{2}$ . Vận tốc của vật ngoài so với Trái Đất bằng bao nhiêu?



Hình 276

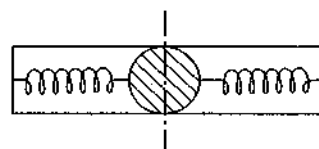


Hình 277



Hình 278

**12.39.** Trong một ống nhẵn tuyệt đối có một quả cầu nhỏ nối với hai đầu ống bằng hai lò xo giống nhau độ cứng  $k$  (H. 279). Quả cầu dao động với biên độ  $l_0$ . Người ta cho ống quay từ từ quanh trục vuông góc với ống và đi qua vị trí cân bằng của quả cầu. Xác định sự phụ thuộc của chu kỳ  $T$  và biên độ dao động  $l$  vào vận tốc góc  $\omega$  của ống.

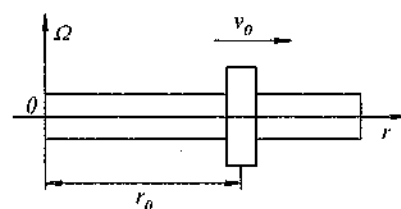


Hình 279

**12.40.** Một xà nhẵn dài đang quay quanh trục đi qua một đầu của nó trong mặt phẳng ngang với vận tốc góc  $\omega$ . Trên xà người ta lồng một vật khối lượng  $m$ , gắn với trục quay bằng một lò xo có lực đàn hồi  $F = k \left( \frac{x - x_0}{x_0} \right)^2$ ,

trong đó  $k$  là hằng số,  $x_0$  là chiều dài lò xo ở trạng thái tự do. Xác định chu kỳ dao động của vật  $m$  quanh vị trí cân bằng.

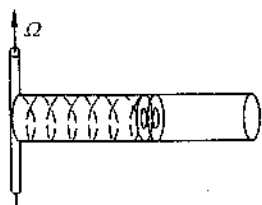
**12.41.** Trên một thanh ngang người ta lồng một vật nhỏ có thể trượt dọc theo thanh. Thanh chuyển động xung quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc  $\Omega$  (H. 280). Tại thời điểm ban đầu vật nằm cách trục quay một khoảng  $r_0$  và có vận tốc  $v_0$  hướng từ trục ra ngoài. Sau đó người ta



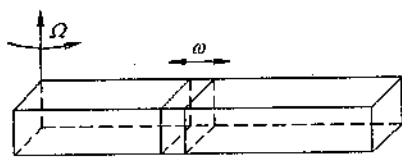
Hình 280

thấy vận tốc  $v$  của vật so với thanh tăng tuyến tính khi chuyển động ra xa trục quay  $v = \frac{v_0 r}{r_0}$ . Với hệ số ma sát nào giữa vật và thanh thì điều đó có thể xảy ra? Bỏ qua tác dụng của trọng lực.

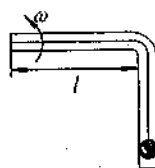
**12.42.** Một ống mỏng có một đầu được hàn chặt và vuông góc với một thanh thẳng đứng (H. 281). Bên trong ống có một vật nhỏ hình trụ được nối với đầu ống gắn với thanh thẳng đứng bằng một lò xo. Thanh quay cùng với ống quanh trục thẳng đứng đi qua tâm thanh với vận tốc góc không đổi  $\omega$ . Trong thời gian ống quay, vật hình trụ dao động. Đường kính của vật giả thiết bằng đường kính ống. Với giá trị nào của  $\omega$  thì lực mà vật tác dụng lên thành ống sẽ lớn nhất? Bỏ qua ma sát giữa lò xo, vật và thành ống. Tần số dao động của vật khi  $\omega = 0$  là  $\Omega$ . Giả thiết biên độ dao động không phụ thuộc vào  $\Omega$ .



Hình 281



Hình 282



Hình 283

**12.43.** Bên trong một ống tiết diện chữ nhật, hai mặt nằm ngang (H. 282), có một piton khối lượng  $m = 100\text{g}$  dao động điều hoà với tần số  $\omega = 5\text{rad/s}$  dưới tác dụng của áp suất không khí biến đổi tuần hoàn. Biên độ di chuyển của piton  $a = 30\text{cm}$ , hệ số ma sát của piton với các thành bên của ống  $k = 0,2$ . Công di chuyển piton trong một chu kỳ sẽ thay đổi như thế nào nếu cho ống quay quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc  $\Omega = 1\text{rad/s}$ ? Bỏ qua ma sát của piton với hai thành ngang của ống.

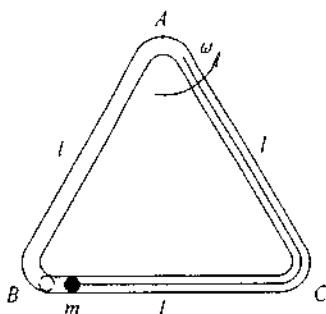
**12.44.** Một ống trụ dài  $2l$  được uốn thành một góc vuông. Ống quay với vận tốc góc không đổi trong mặt phẳng ngang như trên hình 283 (nhìn từ trên xuống). Nhờ một sợi dây nhẹ người ta kéo một quả cầu có đường kính bằng đường kính trong của ống ( $d_c \approx D_o$ ) có khối lượng  $m$  từ đầu dưới ống tới điểm uốn khúc với vận tốc không đổi  $v$ . Xác định công cần thực hiện khi đó. Bỏ qua ma sát giữa bề mặt ống và quả cầu.

**12.45.** Một ống trụ nhỏ dài  $3l$  được uốn thành hình tam giác đều. Ống quay với vận tốc không đổi  $\omega$  trong mặt phẳng ngang trùng với mặt phẳng tam giác (H.284, nhìn từ trên xuống), trục quay thẳng đứng và đi qua đỉnh A. Tại đỉnh B một quả cầu ( $d_c \approx D_o$ ) có khối lượng  $m$  di chuyển trong ống dọc theo cạnh BC nhờ một sợi chỉ nhẹ không giãn. Tìm công tối thiểu để quả cầu tới được C. Bỏ qua ma sát giữa thành ống và quả cầu.

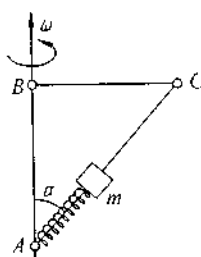
**12.46.** Một vành xe mảnh bán kính  $R$  nằm ngang quay với vận tốc góc  $\omega$  quanh một trục thẳng đứng đi qua một điểm nằm trên vành xe. Trên vành xe có lồng một vòng nhỏ, vòng có thể trượt tự do theo vành xe. Tìm chu kỳ dao động nhỏ của vòng quanh vị trí cân bằng.



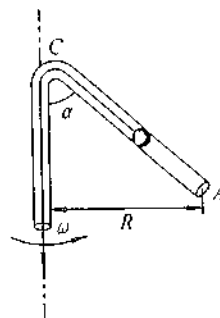
**12.47\*.** Người ta nối các thanh cứng thành một tam giác vuông cân và cho nó quay với vận tốc góc  $\omega$  không đổi quanh cạnh  $AB$  (H. 285). Trên cạnh huyền  $AC$  có lồng một vật khối lượng  $m$  có thể trượt không ma sát. Vật  $m$  được nối với đỉnh  $A$  bằng một lò xo có độ cứng  $k$ . Chiều dài lò xo ở trạng thái tự do là  $l$ . Với giá trị nào của  $\omega$  thì vật  $m$  sẽ cân bằng khi lò xo không bị biến dạng? Đây có phải là cân bằng bền không?



Hình 284



Hình 285



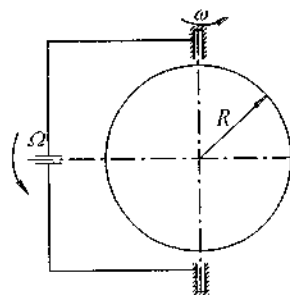
Hình 286

**12.48.** Một thanh đồng chất chiều dài  $l$  quay đều quanh một trục tự do vuông góc với thanh và đi qua tâm của thanh. Vận tốc góc lớn nhất  $\omega$  phải bằng bao nhiêu để thanh không bị gãy do ứng suất bên trong xuất hiện do chuyển động quay? Lực căng cực đại ứng với một đơn vị diện tích tiết diện ngang là  $T$ . Khối lượng riêng của thanh là  $\rho$ .

**12.49.** Một quả cầu nhỏ khối lượng  $m$  được kéo bằng một sợi chỉ bên trong ống với vận tốc  $v$  (H. 286). Ống được uốn tạo thành góc  $\alpha$  và quay quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc  $\omega$ . Xác định công sinh ra để chống lại lực ma sát trên đoạn  $AC$ , nếu hệ số ma sát giữa quả cầu và thành ống là  $k$  và  $\tan \alpha < \frac{\omega^2 R}{g}$ . Khoảng cách từ điểm  $A$  đến trục quay bằng  $R$ .

**12.50.** Một thanh nhỏ có chiều dài  $l = 1\text{m}$ , khối lượng  $m = 1\text{kg}$  quay trong mặt phẳng ngang với tần số  $\nu = 10\text{Hz}$  quanh một trục thẳng đứng. Trục quay đi qua trung điểm của thanh. Xác định giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của mômen lực làm lệch trục quay khỏi phương thẳng đứng nếu hệ được đặt trên xích đạo.

**12.51.** Một vành xe bán kính  $R$ , khối lượng  $m$  quay quanh trục thẳng đứng đi qua một đường kính của nó với vận tốc góc không đổi  $\omega$ . Các ổ bi của trục quay này lại đặt trên một giá đang quay với vận tốc  $\Omega$  quanh trục nằm ngang đi qua tâm vành xe (H. 287). Tính giá trị lớn nhất của mômen lực tác dụng lên các ổ bi.

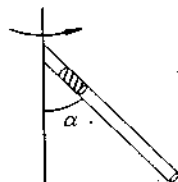


Hình 287

**12.52.** Để tạo trọng trường nhân tạo, người ta cho một tàu vũ trụ hình xuyên bán kính  $R = 100\text{ m}$  quay trong mặt phẳng của nó quanh trục đi qua tâm xuyên với vận tốc góc có độ lớn cho phép gây ra trọng lượng của vật như trên Trái Đất. Bên trong tàu (trong hình xuyên) người ta đặt một con lắc toán học và cho nó dao động trong mặt phẳng xuyên. Tìm tỷ số giữa hiệu lực căng cực đại và cực tiểu của sợi dây đối với trọng lượng của con lắc  $\frac{F_{\max} - F_{\min}}{mg}$  khi nó dao động với biên độ  $\varphi_{\max} = 0,05\text{ rad}$ . Lực Coriolis có

làm quay mặt phẳng dao động của con lắc không (như con lắc Fucô).

**12.53.** Một ống mảnh được hàn chặt một đầu vào một thanh nhỏ thẳng đứng và tạo với thanh một góc nhọn  $\alpha$  (H. 288). Thanh quay với vận tốc góc  $\omega$ . Bên trong ống có một vật hình trụ gắn với thanh bằng một lò xo nhẹ có độ cứng

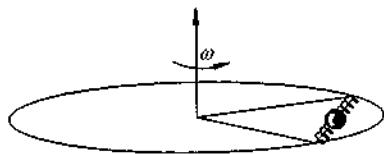


Hình 288

$k = m\omega^2$  ( $m$  là khối lượng vật hình trụ). Đường kính vật có thể coi như bằng đường kính của ống, còn độ dài của nó nhỏ hơn độ dài của ống. Vật dao động quanh vị trí cân bằng không ma sát với biên độ  $a$ . Xác định áp lực của vật lên thành ống tại thời điểm nó đi qua vị trí cân bằng.

**12.54.** Một ống mảnh được hàn chặt một đầu vào một thanh nhỏ thẳng đứng và tạo với thanh một góc nhọn  $\alpha$  (H. 288). Tại thời điểm ban đầu bên trong ống gắn thanh thẳng đứng có một vật hình trụ khối lượng  $m$ , chiều cao của hình trụ rất nhỏ so với chiều dài của ống. Giả thiết đường kính hình trụ bằng đường kính của ống. Thanh quay quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc không đổi, khi đó vật có thể chuyển động không ma sát trong ống. Xác định áp lực của vật lên thành ống tại thời điểm lực vuông góc với mặt phẳng tạo bởi ống và thanh.

**12.55.** Một tam giác cân tạo bởi ba thanh mảnh quay với vận tốc góc không đổi  $\omega = 4\text{ rad/s}$  trong mặt phẳng ngang (trùng với mặt phẳng tam giác) quanh trục thẳng đứng đi qua đỉnh của nó (H.289). Ở cạnh đáy của tam giác một quả cầu nhỏ khối lượng  $m = 0,2\text{ kg}$  được nối với hai đỉnh kề nhau bằng hai lò xo giống nhau mỗi chiếc có độ cứng  $k = 3,2\text{ N/m}$ . Tìm tần số dao động của quả cầu trên thanh. Bỏ qua ma sát.

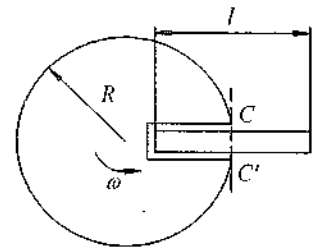


Hình 289

**12.56.** Một vật nhỏ khối lượng  $m$  quay với vận tốc góc ban đầu  $\Omega$  theo một đường tròn trên mặt phẳng nhẵn nằm ngang. Vật được nối với tâm đường tròn bằng một lò xo nhẹ có độ cứng  $k$ . Do một tương tác nhẹ nên cùng với chuyển động ban đầu xuất hiện dao động nhỏ. Tìm chu kỳ dao động đó.

**12.57.** Trên một đĩa nhẵn nằm ngang và đang quay người ta đặt một thanh đồng chất chiều dài  $L$ . Một trục thẳng đứng đi qua một đầu của thanh và song song với trục quay. Đĩa quay với vận tốc góc  $\omega$  không đổi. Xác định chu kỳ dao động của thanh, nếu khoảng cách giữa trục của đĩa và trục của thanh là  $R$ . Bỏ qua ma sát trong trục của thanh.

**12.58.** Trong khe của một đĩa bán kính  $R$  đang quay với vận tốc góc  $\omega$  có một thanh dài  $l$  có thể quay quanh trục  $CC'$  đi qua khối tâm của thanh và cố định trên mép đĩa như trên hình 290. Xác định chu kỳ dao động của thanh.

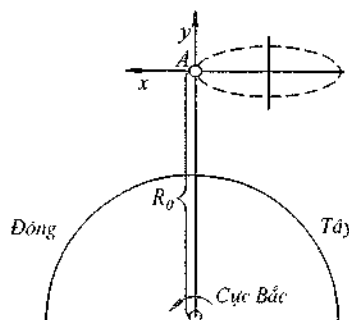


Hình 290

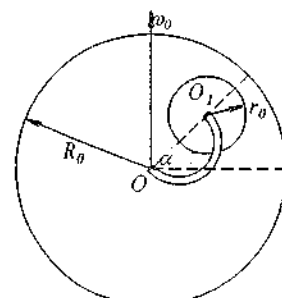
**12.59.** Nhà du hành vũ trụ E. Lêonop khi bước từ tàu ra khoảng không vũ trụ đã ném một nắp máy ảnh về phía tâm Trái Đất. Sau một thời gian ông ta thấy nó quay trở lại tàu. Mô tả chuyển động tuần hoàn của nắp so với tàu, xác định chu kỳ và các thông số của chuyển động tương đối. Giả thiết rằng tàu chuyển động theo quỹ đạo tròn bán kính  $R_0 = 7000 \text{ km}$ , bán kính Trái Đất là  $R_{\text{TD}} = 6400 \text{ km}$ , vận tốc ban đầu của nắp so với tàu  $v_0 = 0,5 \text{ m/s}$ .

**12.60.** Xác định vận tốc lớn nhất có thể truyền cho một vật nhỏ trong khoang của một vệ tinh đang quay quanh Trái Đất với chu kỳ 1,5h để vật không chạm vào thành vệ tinh trong thời gian vài giờ. Quỹ đạo chuyển động của vật có đặc trưng gì, nếu hướng lực ban đầu tác dụng lên nó nằm trong mặt phẳng quỹ đạo? Đường kính khoang của vệ tinh bằng 3m.

**12.61\*.** Một vệ tinh có quỹ đạo tròn nằm trong mặt phẳng xích đạo. Vệ tinh "treo" lơ lửng trên một điểm nào đó của bề mặt Trái Đất. Vệ tinh nhận được một xung truyền cho nó một vận tốc thẳng đứng nhỏ  $v_0$  (H. 291). Quỹ đạo chuyển động của vệ tinh sau đó như thế nào, nếu người quan sát đứng trên Trái Đất.



Hình 291



Hình 292

**12.62.** Giả sử người ta đào một đường hầm phẳng xích đạo tới tâm Trái Đất. Xác định kích thước tối thiểu của đường hầm để một vật có kích thước nhỏ

khi ném xuống có thể bay tới tâm Trái Đất mà không chạm vào thành đường hầm. Giả thiết khối lượng riêng của Trái Đất không đổi, bỏ qua sức cản của không khí.

**12.63.** Giả sử người ta khoan trong mặt phẳng xích đạo một đường hầm theo đường kính Trái Đất. Xác định áp lực  $F$  của một vật rơi từ bề mặt Trái Đất lên thành hầm tại thời điểm khi nó tới tâm Trái Đất. Giả thiết không có ma sát, khối lượng riêng của Trái Đất không đổi.

**12.64.** Gia tốc rơi tự do trong trường hấp dẫn trên bề mặt một quả cầu đồng chất bán kính  $R_0$  là  $g_0$ . Quả cầu quay với vận tốc góc lớn  $\omega_0$ . Bên trong quả cầu có một hốc hình cầu bán kính  $r_0$ , khoảng cách giữa tâm cầu và tâm hốc là  $OO_1 = a = 2r_0$ . Hai tâm  $O$  và  $O_1$  được nối với nhau bằng một đường ống, một chất điểm có thể chuyển động không ma sát trong ống đó. Tìm vận tốc của chất điểm tại điểm  $O_1$  nếu lúc đầu nó đứng yên gần tâm  $O$ . Góc  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  (H. 292).

**12.65.** Trên vĩ độ  $60^\circ$  người ta đào trong lòng đất một đường ray sâu 10m. Xác định hiệu điện thế xuất hiện ở hai đầu ray do chuyển động quay của Trái Đất. Khối lượng electron  $m_e \approx 10^{-27}$  g. Điện tích  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C. Coi các electron chuyển động trong kim loại là tự do.

**12.66.** Xác định gần đúng hiệu khoảng cách từ tâm Trái Đất đến mực nước biển ở trên vùng cực và trên xích đạo Trái Đất xuất hiện do chuyển động quay của Trái Đất.

**12.67.** Chứng minh rằng khi tìm tổng hợp lực quán tính ly tâm tác dụng lên một vật rắn trong hệ đang quay đều, khối lượng của vật có thể coi như tập trung ở tâm quán tính của nó.

**12.68.** Chứng minh rằng các lực ly tâm không tạo ra mômen tổng hợp đối với trục đi qua tâm quán tính và song song với trục quay.

**12.69.** Chuyển động của hệ các chất điểm (mà vật rắn là trường hợp riêng) được xét trong hệ tọa độ đang quay đều. Hãy chứng minh rằng tổng hợp lực quán tính Coriolis  $\vec{F}_c$  biểu diễn bằng công thức  $\vec{F}_c = 2m\vec{V} \times \vec{\Omega}$ , trong đó  $m$  là khối lượng toàn phần của hệ,  $\vec{V}$  là vận tốc tâm quán tính của hệ trong hệ quay,  $\vec{\Omega}$  là vận tốc góc của hệ tọa độ.

### §13. BIẾN DẠNG ĐÀN HỒI

13.1. Để chịu được trọng lượng của buồng thang máy đứng yên thì dây cáp thép phải có đường kính 9mm. Hỏi dây cáp phải có đường kính bằng bao nhiêu nếu buồng thang máy có gia tốc đạt tới 8g?

13.2. Thể tích của một thanh đàn hồi đồng chất chiều dài  $l$  thay đổi như thế nào dưới tác dụng của lực  $P$  nén hoặc kéo thanh theo chiều dài?

13.3. Một thanh sắt được treo một đầu sẽ dài ra bao nhiêu dưới tác dụng của trọng lượng của nó? Thể tích của nó khi đó sẽ thay đổi như thế nào?

13.4. Xác định độ giãn dài tương đối  $\frac{\Delta l}{l}$  của một thanh nhỏ được treo trên một đầu dưới tác dụng của trọng lượng của nó, nếu vận tốc âm thanh trong thanh nhỏ đó là  $v = 3140\text{m/s}$ . Độ dài ban đầu của thanh  $l_0 = 2\text{m}$ .

13.5. Một thanh tiết diện ngang  $S$  được kéo giãn bằng một lực  $F$  song song với trục của nó. Hỏi tiết diện trên có ứng suất tiếp tuyến cực đại  $\tau$  nghiêng so với trục một góc  $\alpha$  bằng bao nhiêu? Tìm ứng suất đó.

13.6. Một khối trụ bằng cao su có độ cao  $h$ , trọng lượng  $P$  và diện tích đáy  $S$  được đặt trên mặt phẳng ngang. Tìm năng lượng biến dạng đàn hồi của khối trụ xuất hiện do tác dụng của chính trọng lượng của nó. Năng lượng biến dạng đàn hồi thay đổi bao nhiêu lần nếu ở đáy trên của nó người ta đặt một khối trụ tương tự?

13.7. Một thanh cao su dày khi chưa bị biến dạng có chiều dài  $L = 12\text{cm}$ . Xác định độ biến thiên chiều dài của nó, nếu nó được giữ thẳng đứng ở tiết diện cách đầu trên của nó  $h = 4\text{cm}$ . Khối lượng riêng của cao su  $\rho = 1,2\text{g/cm}^3$ , suất Young  $E = 100\text{N/cm}^2$ .

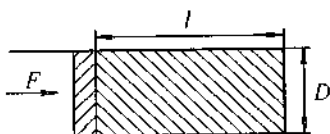
13.8. Một thanh bằng thép dài  $L = 30\text{cm}$ , dày  $d = 1\text{mm}$  được uốn thành một vòng tròn khép kín. Tìm sự phân bố giá trị lớn nhất của ứng suất trong thanh suất Young của thép  $E = 2 \cdot 10^{11}\text{Pa}$ .

13.9\*. Xác định sự thay đổi thể tích tương đối của một quả cầu rỗng bằng đồng thau bán kính  $R = 5\text{cm}$ , nếu nó được bơm đầy khí đến áp suất 11atm (áp suất bên ngoài là 1atm). Độ dày của vỏ cầu  $d = 1\text{mm}$ . Suất Young của đồng thau  $E = 10^7\text{N/cm}^2$ , hệ số Poatxông  $\mu = 0,3$ .

13.10. Tìm năng lượng đàn hồi được tích trong quả cầu bán kính  $R$  có môđun nén từ mọi phía là  $K$  và chịu áp lực  $P$  từ mọi phía.

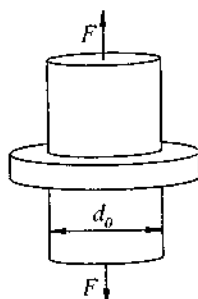
13.11. Xác định tần số dao động theo hướng bán kính của một ống thép thành mỏng bán kính  $R = 10\text{cm}$ . Suất Young của thép  $E = 10^7\text{N/cm}^2$ , khối lượng riêng  $\rho = 7,8\text{g/cm}^3$ .

**13.12.** Một miếng đệm tròn bằng cao su dài  $l$  có đường kính  $D$  được đặt vào một ống thép một đầu bịt kín có cùng đường kính (H. 293). Từ phía đầu ống hở người ta tác dụng lên miếng đệm một lực  $F$  phân bố đều theo tiết diện của nó. Hỏi chiều dài miếng đệm sẽ thay đổi như thế nào? Coi các tính chất đàn hồi của cao su coi như đã biết.



Hình 293

**13.13.** Trên một miếng đệm bằng cao su bán kính  $d_0$  đặt thẳng đứng, người ta lồng một vòng nhẹ bằng thép có đường kính nhỏ hơn một chút  $d < d_0$  (H. 294). Giả thiết cho trước suất Young và hệ số Poatxông  $\mu$  của cao su. Phải kéo miếng đệm bằng lực  $F$  nào thì vòng thép trượt xuống? Bỏ qua khối lượng của miếng đệm.



Hình 294

**13.14.** Xác định áp suất lớn nhất mà nước có thể gây ra khi đóng băng. Khối lượng riêng của nước đá  $\rho = 0,917 \text{ g/cm}^3$ , suất Young  $E = 2,8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$ , hệ số Poatxông  $\mu = 0,3$ .

**13.15.** Một khối lập phương chịu tác dụng của các lực trên hai mặt đối diện nhau. Khi đó sự thay đổi độ dài tương đối của cạnh của nó dọc theo chiều tác dụng của lực là  $\varepsilon = 10^{-4}$  và của thể tích  $\frac{\Delta V}{V} = 4 \cdot 10^{-5}$ . Xác định sự thay đổi thể tích tương đối của khối lượng lập phương này khi chịu áp lực  $P = 100 \text{ MPa}$  từ mọi phía. Suất Young  $E = 200 \text{ MPa}$ .

**13.16.** Hệ số nở dài của thép bằng  $12 \cdot 10^{-6} (\text{°C})^{-1}$ , suất Young  $E = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$ . Cần phải đặt một áp lực  $P$  bằng bao nhiêu lên hai đầu của một khối trụ bằng thép để chiều dài của nó không thay đổi khi nhiệt độ tăng lên  $100^\circ\text{C}$ ?

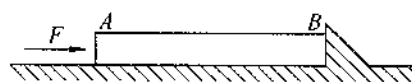
**13.17.** Khi đặt ray tàu điện người ta hàn chúng bằng các mối hàn. Ứng suất  $P$  xuất hiện trong các mối hàn này bằng bao nhiêu khi nhiệt độ dao động từ nhiệt độ mùa đông  $t_{2d} = -25^\circ\text{C}$  đến nhiệt độ mùa hè  $t_{2h} = 30^\circ\text{C}$ , nếu việc lắp đặt được tiến hành khi  $t_1 = 15^\circ\text{C}$ ? Đối với sắt, suất Young  $E = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$ , hệ số nở dài  $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5} (\text{°C})^{-1}$ .

**13.18.** Một tấm đồng được hàn giữa hai tấm thép có cùng diện tích nhưng mỏng bằng một nửa. Tìm hệ số nở dài hiệu dụng của hệ này, nếu biết hệ số

nở dài của đồng  $\alpha_d = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ , của thép  $\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ . Suất Young của thép lớn gấp đôi của đồng và bằng  $E_t = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$ .

**13.19.** Một tấm đồng được hàn giữa hai tấm thép có cùng kích thước. Tìm ứng suất xuất hiện trong đồng và thép nếu nung nóng hệ này từ  $20^\circ\text{C}$  đến  $70^\circ\text{C}$ . Các hằng số của đồng và của thép lấy từ bài tập trước.

**13.20\*.** Trên một mặt phẳng nhẵn nằm ngang người ta đặt một thanh  $AB$  làm bằng vật liệu đồng chất có khối lượng  $m$ , tiết diện  $S$  và chiều dài  $L$ , một đầu thanh tỳ vào



Hình 295

một cái mấu trên mặt phẳng (H. 295). Ở đầu kia của thanh người ta tác dụng một lực không đổi  $F$  phân bố đều theo tiết diện của thanh. Biết rằng khi đó chiều dài của thanh giảm một lượng

$\Delta L = \frac{1}{E} \frac{L}{S} F$ , trong đó  $E$  là suất Young. Nếu thanh không tỳ vào mấu thì nó

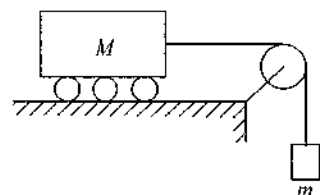
sẽ bị nén lại một lượng bằng bao nhiêu và ứng suất nén sẽ phân bố như thế nào? Các điều kiện khác giữ nguyên như ban đầu.

**13.21.** Một thanh đàn hồi khối lượng  $m$ , chiều dài  $l$  và tiết diện ngang  $S$  chuyển động dọc với gia tốc  $a$  (như nhau đối với mọi điểm của thanh). Tìm năng lượng biến dạng đàn hồi xuất hiện do chuyển động có gia tốc.

**13.22.** Từ bài tập trước thấy rằng trong một thanh chuyển động có gia tốc luôn tồn tại ứng suất. Vậy ứng suất có tồn tại trong thanh đang rơi tự do không?

**13.23.** Trên bề mặt ngang nhẵn tuyệt đối người ta đặt một thanh chiều dài  $l$  có tiết diện vuông cạnh  $a$  làm từ vật liệu đồng chất. Các hằng số của vật liệu cho trước. Từ một thời điểm xác định người ta tác dụng một lực  $F$  vào một đầu của thanh, lực  $F$  phân bố đều theo tiết diện. Khi đó chiều dài, thể tích, hình dạng của thanh thay đổi như thế nào?

**13.24.** Người ta vắt một sợi dây qua một ròng rọc được lắp cố định trên cạnh bàn. Đầu dưới của sợi dây có buộc một vật  $m = 1 \text{ kg}$ . Đầu kia kéo một khối trụ bằng cao su khối lượng  $M = 10 \text{ kg}$ , chiều dài  $L = 10 \text{ m}$  và tiết diện  $S = 10 \text{ cm}^2$ . Suất Young của cao su  $E = 10^2 \text{ N/cm}^2$ . Ma sát giữa các con lăn và mặt bàn không đáng kể (H. 296). Hỏi khối trụ sẽ bị kéo giãn bao nhiêu khi hệ chuyển động? Khối lượng ròng rọc  $\mu = 1 \text{ kg}$ . Ròng rọc có dạng trụ.



Hình 296

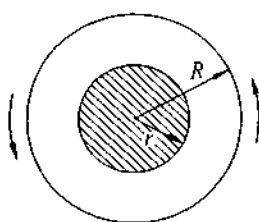
**13.25.** Thang máy khối lượng  $m = 1000 \text{ kg}$  hạ đều với vận tốc  $v_0 = 1 \text{ m/s}$ . Khi thang hạ được  $l = 10 \text{ m}$ , người ta chèn tời lại. Tính lực cực đại tác dụng

lên dây cáp do dùng đột ngột, nếu diện tích tiết diện ngang của cáp  $S = 20\text{cm}^2$ , suất Young của cáp  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{N/m}^2$  ( $l$  là chiều dài cáp khi chưa bị biến dạng). Bỏ qua sự thay đổi của tiết diện.

**13.26.** Một vật khối lượng  $M = 5000\text{kg}$  được thả đều bằng chảo và tời. Khi vật hạ được một đoạn  $l = 2\text{m}$ , tời bị kẹt và chảo đứt. Tìm vận tốc của vật khi chảo đứt, nếu giới hạn bền khi giãn của chảo  $T_g = 3,1 \cdot 10^9 \text{N/cm}^2$ , suất

Young  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{N/cm}^2$ , tiết diện ngang của chảo  $S = 5\text{cm}^2$  ( $l$  là chiều dài chảo khi không biến dạng). Bỏ qua sự thay đổi tiết diện.

**13.27.** Một đĩa đồng chất có khối lượng  $M$ , bán kính  $R$  quay xung quanh trục của nó với gia tốc  $\beta$  (H. 297). Lực gây nên gia tốc của đĩa phân bố đều theo vành đĩa. Tìm lực tiếp tuyến  $F$  tác dụng lên một đơn vị dài của đường tròn ngăn cách tưởng tượng một phần của đĩa bán kính  $r$  (được gạch chéo trên hình vẽ).

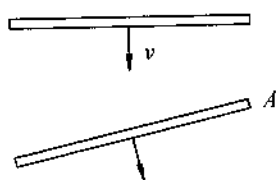


Hình 297

**13.28.** Một thanh đồng nhất nhỏ đàn hồi chiều dài  $L$ , khối lượng  $M$  và suất Young  $E$  quay đều với vận tốc góc  $\omega$  quanh trục vuông góc với thanh và đi qua một đầu của thanh. Tìm phân bố của ứng lực  $T$  trong thanh và độ giãn toàn phần  $\Delta L$ . Coi tiết diện ngang không đổi, độ giãn là nhỏ.

**13.29.** Một thanh đồng chất nhỏ đàn hồi quay trong mặt phẳng ngang quanh một trục đi qua một đầu của nó với vận tốc góc  $\omega$ . Tại một thời điểm nào đó thanh tuột khỏi trục quay. Khi đó độ giãn tương đối thay đổi bao nhiêu lần (tính theo chiều dài của thanh khi đứng yên)?

**13.30.** Một thanh nhỏ đồng chất (H. 298) chuyển động tự do trong mặt phẳng ngang với vận tốc  $\vec{v}$  vuông góc với chính nó và có độ lớn bằng  $0,2\%$  vận tốc truyền âm trong thanh  $v_a$ . Một đầu của thanh bị giữ tại trục thẳng đứng  $A$  và thanh quay không ma sát quanh  $A$ . Khi đó độ giãn tương đối của thanh bằng bao nhiêu?



Hình 298

**13.31.** Tại tâm của tiểu hành tinh Pallad (bán kính  $R = 290\text{km}$ , gia tốc trọng trường trên bề mặt tiểu hành tinh này  $g_0 = 0,17\text{m/s}^2$ ), người ta phát hiện ra các vỉa quặng quý. Các thợ khoan yêu cầu phải có đúng  $290\text{km}$  ống hợp kim Wonfram (khối lượng riêng  $19300 \text{kg/m}^3$ , suất Young  $E = 4 \cdot 10^{11} \text{Pa}$ ) tiết diện không đổi. Những người thợ khoan đã dự tính sẽ tiết kiệm được một đoạn ống dài bao nhiêu do ống giãn dưới tác dụng của trọng lực? Giả thiết



rằng ống có thể treo tự do không chạm vào thành lỗ, coi tiểu hành tinh Pallad là một quả cầu đồng chất không quay.

**13.32.** Trên tiểu hành tinh Vest (bán kính  $R = 280\text{km}$ , gia tốc trọng trường  $g_0 = 0,24\text{m/s}^2$ ), người ta quyết định đặt một trạm chuyển phát giữa các hành tinh. Thành phần chính của trạm là một ống hình trụ có chiều dài bằng bán kính tiểu hành tinh. Người ta chở đến Vest đúng  $280\text{km}$  ống titan. Ống sẽ thấp hơn độ cao theo thiết kế là bao nhiêu, khi nó lắp ở vị trí dựng đứng? Giả thiết Vest là quả cầu đồng nhất không quay. Khối lượng riêng của titan  $\rho = 4500\text{kg/m}^3$ , suất Young  $E = 1,12 \cdot 10^{11}\text{Pa}$ .

**13.33.** Trong một truyện khoa học viễn tưởng, một tàu vũ trụ đang bay gần sao neutron suýt bị phá huỷ do các ứng suất xuất hiện trong thân tàu. Xác định bán kính tối thiểu của quỹ đạo tàu vũ trụ  $R$ , nếu bán kính của thân tàu vũ trụ có dạng một quả cầu có thành mỏng  $r = 10\text{m}$ , ứng suất phá huỷ của vật liệu thân tàu là  $T_{ph} = 10^5\text{N/cm}^2$ , khối lượng của sao bằng khối lượng Mặt Trời  $M = 2 \cdot 10^{33}\text{g}$ . Khi đó vận tốc của tàu vũ trụ bằng bao nhiêu?

**13.34.** Hai thanh thép mảnh giống nhau, chiều dài  $l = 10\text{cm}$  ( $\rho = 7,8\text{g/cm}^3$ ,  $E = 2 \cdot 10^7\text{N/cm}^2$ ) và hai đầu mút vào nhau. Xét các sóng đàn hồi, xác định thời gian va chạm. Với các vận tốc nào thì sẽ xuất hiện các hiện tượng không đàn hồi, nếu giới hạn đàn hồi của thép  $T_{dh} = 200\text{N/mm}^2$ ?

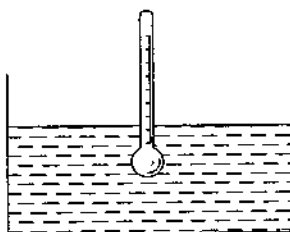
**13.35.** Hai thanh nhỏ giống nhau va chạm đồng trục với nhau. Trước va chạm thanh thứ nhất có vận tốc  $v$ , thanh còn lại đứng yên. Va chạm giữa các thanh là đàn hồi tuyệt đối. Xác định sự thay đổi độ dài tương đối lớn nhất có thể  $\frac{\Delta l}{l}$  của thanh trong thời gian va chạm, giả thiết cho trước khối lượng riêng của các thanh là  $\rho$ , suất Young là  $E$ .

**13.36.** Một sinh viên "ngịch ngợm" đang ở trong phòng thí nghiệm vật lý đã uốn cong chiếc thước bằng thép thành một vòng tròn kín. Cậu ta đã thực hiện một công bằng bao nhiêu? Chiều dài thước  $L = 1\text{m}$ , chiều rộng  $b = 6\text{cm}$ , chiều dày  $d = 1\text{mm}$ , suất Young  $E = 2 \cdot 10^{11}\text{N/m}^2$ .

## §14. ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT LỎNG

**14.1.** Một tỷ trọng kế dạng ống hình trụ đường kính  $D$  được thả trong chất lỏng có khối lượng riêng  $\rho$  (H. 299) và được đẩy nhẹ theo phương thẳng

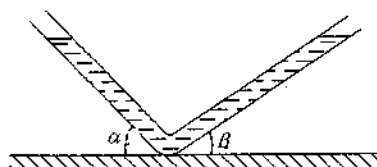
đứng. Tính chu kỳ dao động  $T$  của tỷ trọng kế theo phương thẳng đứng, nếu khối lượng của tỷ trọng kế là  $m$ . Bỏ qua chuyển động của chất lỏng và sức cản của nó lên tỷ trọng kế.



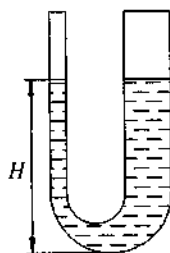
Hình 299

**14.2.** Rót chất lỏng vào một ống hình chữ  $U$  và đặt ống sao cho hai nhánh ống tạo với mặt phẳng nằm ngang góc  $\alpha$  và  $\beta$  (H. 300). Chiều cao cột chất lỏng trong ống là  $l$ . Đẩy chất lỏng trong ống khỏi vị trí cân bằng, mực chất lỏng trong ống sẽ dao động. Tìm chu kỳ dao động, bỏ qua lực mao dẫn và độ nhớt của chất lỏng.

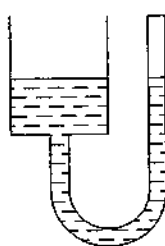
**14.3.** Một ống hình chữ  $U$  có các nhánh tiết diện khác nhau chứa chất lỏng với chiều cao  $H$  (H. 301). Tìm chu kỳ dao động của mực chất lỏng trong ống. Bỏ qua độ dính ướt của chất lỏng. Biết rằng đường kính của ống rất nhỏ so với chiều cao  $H$  của cột chất lỏng.



Hình 300



Hình 301



Hình 302

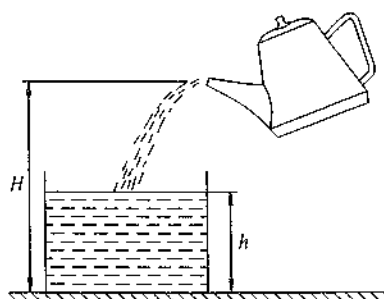
**14.4.** Một nhánh của ống hình chữ  $U$  được nối với một bình to có đáy phẳng (H.302). Trong ống và bình có chứa thủy ngân. Tìm chu kỳ dao động của mực thủy ngân trong ống, biết rằng tiết diện của ống rất nhỏ so với tiết diện của bình. Bỏ qua độ nhớt của chất lỏng. Chiều dài phần ống chứa thủy ngân là  $l$ .

**14.5\*.** Người ta rót nước từ ấm ở độ cao  $H$  vào một cốc hình trụ có tiết diện  $S$  (H.303). Tìm sự phụ thuộc của áp lực  $F$  lên đáy cốc theo thời gian, biết rằng cứ sau 1s lượng nước trong cốc tăng lên  $Q$  [ $\text{cm}^3$ ].

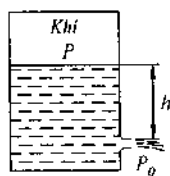
**14.6.** Rót một chất lỏng lý tưởng vào bình hình trụ, có diện tích đáy là  $S$ , độ cao cột nước là  $H$  (so với đáy bình). Đục một lỗ nhỏ diện tích  $\sigma$  ở đáy bình. Sau thời gian  $t$  bằng bao nhiêu thì mực chất lỏng trong bình tụt xuống độ cao  $h$ ? Sau thời gian  $T$  bằng bao nhiêu thì chất lỏng chảy hết khỏi bình ( $h = 0$ )?

**14.7.** Trên mặt bàn nằm ngang người ta đặt một bình hình trụ chứa nước. Mực nước trong bình là  $H$  so với mặt bàn. Cần đục lỗ trên thành bình ở độ cao  $h$  là bao nhiêu để dòng nước phụt ra đạt tới khoảng cách xa nhất trên mặt bàn? Xác định khoảng cách đó.

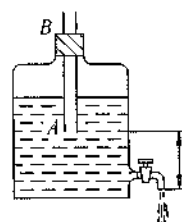
**14.8.** Xác định vận tốc phun  $v$  của chất lỏng lý tưởng không chịu nén đựng trong bình kín dưới áp suất  $P$  (H. 304) qua một lỗ nhỏ.



Hình 303



Hình 304

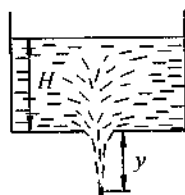


Hình 305

**14.9.** Để dòng chất lỏng chảy ra từ bình với vận tốc không đổi người ta sử dụng thiết bị như hình 305. Xác định vận tốc  $v$  của dòng chảy trong trường hợp này.

**14.10.** Khi thả thiết bị xuống biển bằng dây cáp, chiều sâu lớn nhất có thể hạ xuống bị hạn chế vì dây cáp có thể bị đứt do chính trọng lượng của nó. Có thể thả xuống độ sâu  $L$  bằng bao nhiêu một cỗ máy có khối lượng  $M = 5$  tấn và thể tích  $V = 4\text{m}^3$ , nếu như tiết diện của cáp trên mặt nước không thể vượt quá  $S_0 = 100\text{cm}^2$ ? Tiết diện của cáp cần thay đổi theo chiều sâu như thế nào? Có thể thả dây cáp có tiết diện không đổi xuống độ sâu lớn nhất  $H$  là bao nhiêu? Cáp được làm bằng thép. Cường độ lực căng lớn nhất cho phép của dây cáp là  $T = 200\text{N/mm}^2$ .

**14.11.** Người ta đổ nước vào bình tới độ cao  $H$  và đục một lỗ nhỏ bán kính  $r_0$  ở đáy bình. Tìm sự phụ thuộc của bán kính tia nước  $r(y)$  vào khoảng cách  $y$  tính từ đáy bình (H. 306).



Hình 306

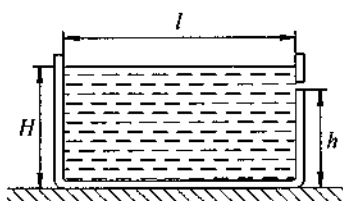
**14.12.** Một bình trụ có độ cao  $h$ , được thả vào nước, bình ngập xuống độ sâu  $h_0$ , ở đáy bình xuất hiện lỗ nhỏ diện tích

$\sigma$ . Sau thời gian  $t$  bằng bao nhiêu thì bình sẽ chìm?

**14.13.** Một chất lỏng không chịu nén chảy dưới tác dụng của trọng lực theo một ống hình nón nhỏ dần về phía dưới. Mực chất lỏng phía trên được giữ cố định ở độ cao  $h_0$  tính từ đỉnh hình nón. Ống hình nón bị cắt ở khoảng cách  $h_1 < h_0$  từ đỉnh hình nón. Tìm sự phân bố áp suất dọc theo ống và vẽ đồ thị của phân bố đó.

**14.14.** Trên một chiếc xe kéo người ta đặt một bình hình trụ chứa đầy nước. Chiều cao cột nước 1m. Đặt hai vòi với tiết diện  $10\text{cm}^2$  ở hai hướng đối diện theo phương chuyển động của xe tại các độ cao khác nhau  $h_1 = 25\text{cm}$  và  $h_2 = 50\text{cm}$  tính từ đáy bình. Cần tác dụng lên xe kéo một lực  $F$  bằng bao nhiêu theo phương ngang để nó giữ nguyên trạng thái đứng yên khi mở vòi?

**14.15.** Trên thành bình có một lỗ, mép dưới của lỗ ở độ cao  $h$  (H. 307). Xác định gia tốc  $a$  của bình theo phương ngang để chất lỏng trong bình không bị chảy ra ngoài qua lỗ, biết rằng khi bình đứng yên (khi đóng lỗ) chất lỏng ở độ cao  $H$ ?



Hình 307

**14.16.** Một bình hình trụ quay đều với vận tốc góc  $\omega$  quanh trục thẳng đứng  $Z$ . Xác định dạng bề mặt tự do của chất lỏng chứa trong bình.

**14.17.** Tìm sự phân bố áp suất  $p$  lên đáy bình dọc theo bán kính trong bài tập 14.16. Tìm áp suất lên thành bình ở gần đáy nếu  $\omega = 4$  vòng/s. Chiều cao cột nước trong bình ở trục là 10 cm. Bán kính bình là 10 cm.

**14.18\*.** Một bình hình trụ bán kính  $R$  chứa chất lỏng lý tưởng không chịu nén. Bình quay với vận tốc góc  $\omega$  quanh trục hình học thẳng đứng của nó. Xác định vận tốc dòng chất lỏng chảy qua lỗ nhỏ ở thành bình (vận tốc đối với bình) khi chuyển động của bình đã ổn định.

**14.19.** Trong một bình hình trụ không trọng lượng, bán kính  $R$  chứa  $m_0$  gam nước. Quay bình đạt đến vận tốc góc  $\omega_0$  rồi mở lỗ ở đáy bình gần trục quay. Sau một thời gian nước trong bình chảy ra hết, lúc đó vận tốc góc  $\omega_k$  là bao nhiêu?

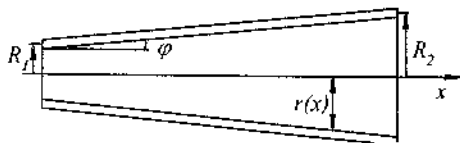
**14.20\*.** Xác định vận tốc dòng chảy dừng dọc theo trục và lưu lượng của chất lỏng không chịu nén giữa hai ống đồng trục có bán kính trong  $R_1$ , bán kính ngoài  $R_2$ , chiều dài  $l$ . (Lưu lượng chất lỏng là khối lượng chất lỏng chảy qua mặt cắt ngang của ống trong một đơn vị thời gian). Độ nhớt của chất lỏng là  $\eta$ .

**14.21.** Kéo một dây kim loại bán kính  $r_1 = 1\text{mm}$  với vận tốc không thay đổi  $v_0 = 10\text{cm/s}$  dọc theo trục ống có bán kính  $r_2 = 1\text{cm}$ . Trong ống chứa dây chất lỏng có độ nhớt  $\eta = 0,01P$ . Xác định lực ma sát  $f$  trên một đơn vị chiều dài dây kim loại. Tìm sự phân bố vận tốc chất lỏng dọc theo bán kính ống ( $1Pa.s = 10P$ ).

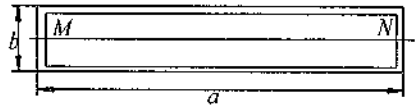
**14.22.** Chiều dài của một ống mao dẫn dựng đứng là  $L$ , bán kính  $R$ , chất lỏng trong ống mao dẫn có khối lượng riêng  $\rho$ , hệ số nhớt là  $\eta$ . Sau thời gian  $\tau$  bằng bao nhiêu thì chất lỏng chảy hết khỏi ống mao dẫn dưới tác dụng của trọng lực? Bỏ qua sức căng bề mặt của chất lỏng. Quá trình tăng tốc của chất lỏng coi như tức thời.

**14.23.** Một chất lỏng nhớt không chịu nén chảy theo một ống hình nón theo phương ngang. Hệ số ma sát nội của chất lỏng là  $\eta$  (H. 308). Giả sử góc  $\varphi$

rất nhỏ. Tính thể tích chất lỏng chảy qua ống trong một đơn vị thời gian khi độ chênh lệch áp suất ở hai đầu là không đổi và bằng  $\Delta P$ .



Hình 308



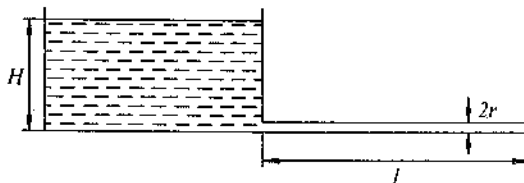
Hình 309

**14.24.** Ở đáy một bình đựng heli lỏng có khe rộng  $\delta = 10^{-4}$  cm, dài  $l = 5$  cm. Độ dày của đáy bình  $d = 0,5$  mm. Tìm vận tốc tối đa  $v_{\max}$  của heli trong khe đó và lưu lượng toàn phần chảy qua khe  $\frac{dM}{dt}$ , nếu chiều cao của cột heli so với đáy là  $h = 20$  cm. Trọng lượng riêng và độ nhớt của heli là  $\rho = 0,15 \text{ g/cm}^3$ ;  $\eta = 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ g/(cm.s)}$ .

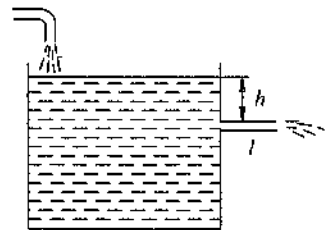
**14.25.** Nước chảy theo một ống dẹt chiều dài  $l = 1 \text{ m}$  dưới áp suất  $\Delta P = 1 \text{ atm}$ , chiều rộng của ống  $a = 1 \text{ cm}$ , chiều cao  $b = 0,1 \text{ mm}$ . Độ nhớt của nước  $\eta = 0,01 P$  (biết rằng  $1 \text{ Pa.s} = 10 P$ ). Xác định thể tích nước  $Q$  chảy theo ống trong một đơn vị thời gian.

**14.26.** Một chất nhớt chảy theo ống tiết diện chữ nhật, một chiều của tiết diện là  $a$  rất lớn so với chiều còn lại là  $b$  (H. 309). Hiệu áp suất giữa hai đầu ống không đổi, còn chuyển động là không xoáy. Lượng chất lỏng chảy trong ống trong 1s sẽ thay đổi như thế nào nếu chia ống bằng màng  $M-N$  ra hai phần bằng nhau?

**14.27.** Một bình có thành đồng chất với tiết diện  $S = 100 \text{ cm}^2$  được rót nước đến mức  $H = 10 \text{ cm}$  (H. 310). Ngay đáy bình có một ống dẫn đường kính  $2r = 2 \text{ mm}$  và chiều dài  $l = 1 \text{ m}$ . Ống dẫn mở ra không khí. Nước sẽ chảy ra khỏi bình theo hàm  $h = h(t)$  nào? Xác định thời gian nước chảy hết ra khỏi bình. Biết rằng độ nhớt của nước là  $\eta = 10^{-2} P$  ( $1 \text{ Pa.s} = 10 P$ ).



Hình 310

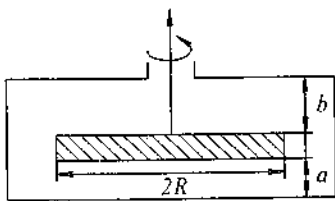


Hình 311

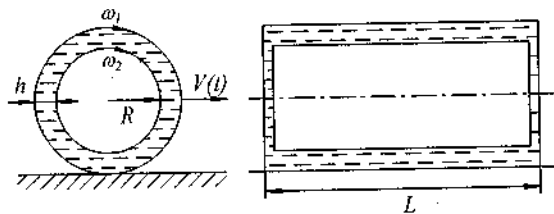
**14.28.** Do đóng vòi không chặt nên nước bị rò từ vòi với  $Q = 1 \text{ cm}^3/\text{s}$  vào một bình chứa nằm dưới vòi, sau đó nước từ bình chảy theo ống nằm ngang

chiều dài  $l = 20\text{cm}$  (H. 311). Ống chảy vào không khí. Xác định đường kính  $d$  của ống nếu mức nước cân bằng so với ống là  $h = 5\text{cm}$ . Biết rằng độ nhớt của nước  $\eta = 0,01P$  ( $1\text{Pa}\cdot\text{s} = 10P$ ).

**14.29.** Trong một hộp phẳng chứa đầy nước có một đĩa nằm ngang bán kính  $R = 20\text{cm}$  đang quay. Xác định công suất  $N$  cần thiết để quay đĩa với vận tốc  $n = 300\text{vòng/phút}$ , nếu đĩa nằm cách thành trên và thành dưới hộp lần lượt là  $b = 10\text{mm}$  và  $a = 5\text{mm}$  (H. 312). Bỏ qua hiệu ứng đối lưu hướng tâm của nước và các hiện tượng khác trên mép đĩa. Coi chuyển động của nước là không xoáy. Hệ số nhớt của nước là  $\eta = 10^{-1}\text{kg/m}\cdot\text{s}$ .



Hình 312



Hình 313

**14.30.** Trong một ống thành mỏng bán kính trong  $r_1$ , bán kính ngoài  $r_2$ , và chiều dài  $L$  có một chất lỏng với độ nhớt là  $\eta$  chảy qua mỗi giây một thể tích  $V$ . Bỏ qua sự thay đổi đường kính của ống, xác định độ dẫn ống dưới tác dụng của ma sát do chất lỏng gây nên. Suất Young của vật liệu làm ống là  $E$ .

**14.31.** Hai ống trụ dài (chiều dài  $L$ ) mỏng, đồng trục, có bán kính xấp xỉ nhau  $R$  và  $R + h$  ( $L \gg R$ ;  $R \gg h$ ), có cùng khối lượng  $m$  (H. 313). Hai trụ có thể quay độc lập quanh trục chung và tạo thành bình chứa giữa khe của hai trụ, khe này được chứa đầy dầu nhớt với hệ số nhớt là  $\eta$ . Ở thời điểm ban đầu  $t = 0$ , vận tốc góc của trụ bên trong  $\omega_2 = \omega_{20}$ , trụ ngoài đứng yên  $\omega_1 = 0$ . Bình được đặt không có vận tốc ban đầu trên một mặt phẳng nằm ngang và bắt đầu lăn không trượt. Xác định vận tốc trục của hệ  $v(t)$  và vận tốc góc của các trụ  $\omega_1(t)$  và  $\omega_2(t)$ , độ tiêu hao động năng của hệ

$\frac{K_D - K_c}{K_D}$  trong quá trình thiết lập trạng thái chuyển động cuối cùng khi

$t \rightarrow \infty$ . Bỏ qua các lực nhớt ở hai đầu trụ, khối lượng hai mặt đáy trụ và khối lượng của chất nhớt.

**14.32.** Hai bình đựng mật ong với độ nhớt  $\eta_m = 100P$  và dầu chung  $\eta_d = 10P$  có cùng kích thước ( $R \approx 10\text{cm}$ ) và khối lượng. Hai bình đặt cạnh nhau trên một bề mặt nằm ngang và cùng được truyền với vận tốc ban đầu  $v_0 = 1\text{m/s}$ . Tính khoảng cách giữa hai bình khi chuyển động của chúng trở

thành chuyển động đều. Bỏ qua khối lượng bình và ma sát lăn, trọng lượng riêng của mật và dầu chưng giả thiết khoảng  $1\text{g/cm}^3$  ( $1\text{Pa.s} = 10P$ ).

**14.33.** Trong bể người ta thử nghiệm một mẫu tàu có kích thước bằng 0,01 kích thước thực tế. Vận tốc thiết kế của tàu  $v = 36\text{km/h}$ . Tìm vận tốc  $u$  phải kéo mẫu tàu sao cho dạng sóng hấp dẫn giống như thực tế.

**14.34.** Một thuyền buồm chuyển động với vận tốc ban đầu  $v_0 = 4\text{m/s}$ . Giả thiết lực cản chuyển động của nước đối với tàu  $F_c = kv^2$ , thuyền chuyển động trong nước tĩnh, khối lượng thuyền xấp xỉ  $m \sim 100\text{kg}$ , chiều dài  $l \sim 3\text{m}$ , độ nhớt động của nước  $\nu = 0,01\text{cm}^2/\text{s}$ . Xác định thời gian chuyển động và quãng đường tàu đi được đến khi nó dừng lại sau khi hạ buồm. Giải bài toán theo hai giá trị của hệ số sức cản:  $k_1 = 2 \cdot 10^7 \text{kg/m}$  và  $k_2 = 1700\text{kg/m}$ . Giả thiết rằng chế độ chuyển động của tàu nằm trong giải số Reynold từ  $\text{Re} \gg 1$  đến  $\text{Re} \sim 1$ .

## Phần II

# NHIỆT HỌC VÀ VẬT LÝ PHÂN TỬ

### §1. KHÍ LÝ TƯỞNG. CÔNG, NHIỆT LƯỢNG, NỘI NĂNG. NGUYÊN LÝ THỨ NHẤT CỦA NHIỆT ĐỘNG HỌC. NHIỆT DUNG

**1.1.** Chứng minh rằng nếu ba đại lượng  $x, y, z$  liên hệ với nhau bằng phương trình  $f(x, y, z) = 0$  thì các đạo hàm của chúng  $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z, \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x, \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$  thoả

mãn biểu thức  $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$ .

**1.2.** Chứng minh rằng hệ số nở khối  $\alpha$ , hệ số nhiệt độ của áp suất  $\lambda$  và hệ số nén đẳng nhiệt  $\beta$  của một vật đồng tính và đẳng hướng liên hệ với nhau bởi hệ thức  $V_0 \alpha = P_0 V \lambda \beta$ , trong đó  $V_0, P_0$  là thể tích và áp suất của vật ở nhiệt độ  $0^\circ\text{C}$ .

**1.3.** Hệ số nở khối  $\alpha$  của thủy ngân ở  $0^\circ\text{C}$  và áp suất khí quyển bằng  $1,8 \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ . Hệ số nén  $\beta = 3,9 \cdot 10^{-6} \text{ atm}^{-1}$ . Tính hệ số nhiệt độ của áp suất  $\lambda$  của thủy ngân.

**1.4.** Cần phải tăng áp suất bên ngoài lên bao nhiêu để giữ thể tích của thủy ngân không đổi khi đun nóng nó từ  $0^\circ\text{C}$  đến  $10^\circ\text{C}$ ? (Xem bài trước.)

**1.5.** Tính các giá trị sau đây đối với khí lý tưởng: hệ số nở khối  $\alpha$ , hệ số nhiệt độ của áp suất  $\lambda$ , hệ số nén đẳng nhiệt  $\beta$ , suất đàn hồi khối đẳng nhiệt

$$K_T = -V \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T. \text{ (Xem bài 1.2)}$$

**1.6\*.** Con lắc bỏ chính được làm từ một ống niken nhỏ, dài, khối lượng không đáng kể, một phần của ống chứa thủy ngân. Hệ số nở dài của niken  $\alpha_1 = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ , hệ số nở khối của thủy ngân  $\alpha = 18 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ . Cần phải đổ vào ống một lượng thủy ngân bằng bao nhiêu (bao nhiêu phần của ống) để chu kỳ dao động của con lắc giữ nguyên khi nhiệt độ thay đổi? Để đơn giản ban đầu coi con lắc như con lắc toán học, tức coi tâm dao động của



nó trùng với khối tâm của thủy ngân, sau đó tính độ lệch giữa tâm dao động với khối tâm của thủy ngân.

**1.7.** Tìm khối lượng riêng  $\rho$  của nước biển ở độ sâu 5km, nếu trên mặt nước khối lượng riêng  $\rho_0 = 1,03 \text{ g/cm}^3$ , hệ số nén của nước trong giới hạn áp suất từ 1atm đến 500atm là  $\beta = 47,5 \cdot 10^{-6} \text{ atm}^{-1}$ .

**1.8.** Đèn điện dây tóc được chứa đầy nitơ ở áp suất 600mmHg. Dung tích của đèn là  $500 \text{ cm}^3$ . Hỏi bao nhiêu nước sẽ tràn vào trong đèn nếu làm vỡ đuôi đèn dưới nước ở áp suất khí quyển bình thường?

**1.9.** Ống nhỏ giọt hình trụ, chiều dài  $l$  được nhúng ngập một nửa trong bình thủy ngân. Ống được bít kín bằng ngón tay và đưa lên. Một phần thủy ngân chảy ra. Hỏi độ cao  $x$  của cột thủy ngân còn lại trong bình bằng bao nhiêu? Áp suất khí quyển là  $H$ .

**1.10.** Áp suất không khí trong khuỷu ống kín của một áp kế có độ cao  $l$  được cân bằng với cột thủy ngân có độ cao  $h$  ở áp suất khí quyển  $H_0$  và nhiệt độ tuyệt đối  $T_0$ . Áp suất không khí này sẽ cân bằng với cột thủy ngân cao  $h_1$  bằng bao nhiêu ở áp suất khí áp kế  $H_1$  và nhiệt độ  $T_1$ ?

**1.11.** Hai bình chứa không khí A và B được nối với nhau bằng một ống mao dẫn có van. Bình A được nhúng vào bồn nước ở nhiệt độ  $t_1 = 100^\circ \text{C}$ , còn bình B vào hỗn hợp làm lạnh với  $t_2 = -20^\circ \text{C}$ . Ban đầu van được khóa và áp suất không khí trong hai bình A và B lần lượt là  $P_1 = 400 \text{ mmHg}$ ,  $P_2 = 150 \text{ mmHg}$ . Tìm áp suất ổn định sau khi mở van nếu thể tích của bình A là  $V_1 = 250 \text{ cm}^3$ , của bình B là  $V_2 = 400 \text{ cm}^3$ .

**1.12.** Một khí cầu có thể tích  $V$  ( $\text{m}^3$ ) chứa đầy hydro ở nhiệt độ  $t_1 = 15^\circ \text{C}$ . Ở áp suất khí quyển không đổi, dưới tác dụng của ánh sáng mặt trời nhiệt độ của nó tăng lên đến  $t_2 = 37^\circ \text{C}$ , một lượng khí dư thoát ra khỏi van xả của khí cầu, chính vì thế khối lượng của khí cầu giảm một lượng  $M = 6,05 \text{ kg}$ . Khối lượng riêng của hydro  $\rho_0 = 8,9 \cdot 10^{-5} \text{ g/cm}^3$ . Xác định thể tích  $V$  của khí cầu.

**1.13.** Ống khói của một nhà máy cao  $l = 50 \text{ m}$  nhà khói ở nhiệt độ  $t_1 = 60^\circ \text{C}$ . Xác định áp suất tĩnh  $B$  gây ra lực hút trong ống. Nhiệt độ không khí  $t_2 = -10^\circ \text{C}$ . Khối lượng riêng của không khí  $\rho_0 = 1,29 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$ .

**1.14.** Một bình chứa hình cầu có thành mỏng, khối lượng  $M = 1\text{kg}$  được bơm đầy khí nitơ ở nhiệt độ  $T = 300\text{K}$ . Tìm lượng nitơ lớn nhất có thể bơm vào bình nếu ứng suất cho phép của thành bình là  $\sigma = 50\text{N/mm}^2$ . Khối lượng riêng của thép  $\rho_0 = 7,8\text{g/cm}^3$ .

**1.15.** Tìm số lần chuyển động  $n$  của piton để bơm hút khí một bình dung tích  $V$  từ áp suất  $P_1$  đến áp suất  $P_2$ , nếu thể tích một lần chuyển động của piton là  $v$ . Bỏ qua các khoảng trống vô ích.

**1.16.** Vận tốc hút khí trong bơm dầu đang quay là  $150\text{ cm}^3/\text{s}$ . Hỏi cần bao nhiêu thời gian để hút một bình  $5\text{l}$  từ áp suất khí quyển đến áp suất  $10^{-2}\text{ mmHg}$ ?

**1.17.** Một bình thể tích  $1\text{ lít}$  chứa đầy nước ở nhiệt độ  $27^\circ\text{C}$ . Áp suất trong bình  $P$  sẽ bằng bao nhiêu, nếu giả sử sự tương tác giữa các phân tử đột nhiên biến mất?

**1.18.**  $8\text{g}$  ôxy chiếm thể tích  $560\text{ lít}$ . Xác định áp suất của khí ôxy trong thể tích đó khi các nguyên tử ôxy đã bị ion hóa hoàn toàn ở nhiệt độ sau:

1)  $T = 820\text{K}$ ;

2)  $T = 10\text{keV}$ .

**1.19.** Khi nổ bom nguyên tử (uran) ở tâm nổ nhiệt độ lên tới  $T \approx 10\text{keV}$ . Giả thiết khối lượng riêng của uran ở tâm quả bom  $\rho = 20\text{g/cm}^3$ . Tìm áp suất bên trong quả bom ở nhiệt độ này. So sánh áp suất này với áp suất tại tâm Trái Đất, giả thiết rằng khối lượng riêng Trái Đất không đổi  $\rho_{\text{TD}} = 5,5\text{g/cm}^3$ . Bỏ qua áp suất bức xạ ánh sáng.

**1.20.** Ba bình chứa thể tích  $V_0, V_1, V_2$  chứa khí lý tưởng nối với nhau bằng các ống nhỏ (có bỏ qua thể tích của ống). Ban đầu ba bình có cùng nhiệt độ  $T_0$ , còn áp suất của chúng bằng  $P_0$ . Sau đó giữ nguyên nhiệt độ  $T_0$  của bình  $V_0$ , còn các bình  $V_1, V_2$  được đun nóng đến nhiệt độ  $T_1$  và  $T_2$  tương ứng. Tìm áp suất  $P$  trong các bình.

**1.21.** Xác định khối lượng không khí  $m$  nằm giữa hai lớp của cửa sổ ở áp suất khí quyển  $P$ . Giả thiết nhiệt độ giữa hai lớp của cửa sổ tăng theo hàm bậc nhất từ  $T_1$  đến  $T_2$  ( $T_2 > T_1$ ). Diện tích cửa sổ là  $S$ , khoảng cách giữa chúng là  $l$ .

**1.22.** Xác định kích thước xilanh của động cơ ô tô “Moskvich”. Khi nạp không khí từ bên ngoài và trộn với xăng phun vào, tạo thành hỗn hợp cháy thì hỗn hợp được làm nóng đến nhiệt độ  $\sim 80^\circ\text{C}$ . Tiêu hao nhiên liệu khi xe chạy với vận tốc  $60\text{km/h}$  (tốc độ của động cơ  $3000$  vòng/phút, động cơ bốn

xi lanh) là 8kg/100km. Nhiên liệu là hỗn hợp cacbonhydrô ( $C_nH_{2n}$ ) với khối lượng phân tử tương đối  $\sim 100$ , điểm sôi của nó  $\sim 80^\circ C$ .

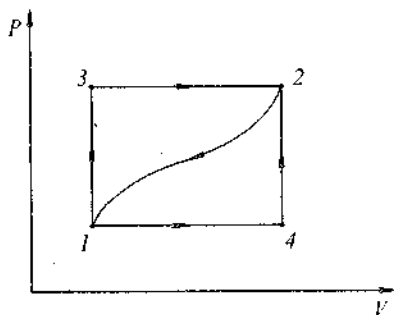
1.23. Một hỗn hợp các khí lý tưởng khác nhau với khối lượng  $M_1, M_2, M_3, \dots$  và khối lượng mol  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$  tương ứng. Hãy chứng minh rằng phương trình trạng thái của chúng có thể được viết dưới dạng  $PV = \frac{M}{\mu} RT$ ,

trong đó  $M = M_1 + M_2 + M_3 + \dots$  là tổng khối lượng của hỗn hợp, còn hằng số  $\mu$  đóng vai trò khối lượng mol trung bình. Tìm  $\mu$ .

1.24. Viên đạn chì phải có vận tốc bằng bao nhiêu để khi va chạm vào tấm thép nó bị nóng chảy? Nhiệt độ của viên đạn  $t_0 = 27^\circ C$ , nhiệt độ nóng chảy của chì  $t_1 = 327^\circ C$ , nhiệt nóng chảy riêng của chì  $q = 5 \text{ cal/g}$ , nhiệt dung riêng của chì  $c = 0,03 \text{ cal/(g} \cdot ^\circ C)$ .

1.25. Một bơm có công suất 0,5l/s bơm hơi nước từ một bình có chứa một phần nước. Nhiệt độ của bình được giữ không đổi bằng  $20^\circ C$ . Xác định nhiệt lượng cần cung cấp cho bình trong một giây. Áp suất hơi bão hòa và nhiệt hóa hơi riêng ở nhiệt độ nói trên lần lượt là  $P_0 = 18 \text{ mmHg}$ ,  $\lambda = 580 \text{ cal/g}$ . Giả thiết hơi trong bình chứa là hơi bão hòa và coi hơi bão hòa là khí lý tưởng.

1.26. Trên đồ thị  $PV$  trong hình 314 biểu diễn các quá trình thay đổi trạng thái thuận nghịch khác nhau của một hệ nhiệt động. Biết rằng khi hệ chuyển từ trạng thái 1 sang trạng thái 2 theo đường 1 - 3 - 2, nó nhận được nhiệt lượng  $Q_{132} = 80 \text{ J}$  và thực hiện một công  $A_{132} = 30 \text{ J}$ :



Hình 314

1) Hệ sẽ nhận được nhiệt lượng  $Q_{142}$  bằng bao nhiêu nếu nó chuyển từ trạng thái 1 đến trạng thái 2 theo đường 1 - 4 - 2, biết rằng khi đó nó thực hiện một công  $Q_{142} = 10 \text{ J}$ ?

2) Hệ từ trạng thái 2 trở về trạng thái 1 theo đường 2 - 1. Khi đó công bên ngoài thực hiện lên hệ bằng  $A_{21} = 20 \text{ J}$ . Nhiệt lượng  $Q_{21}$  mà hệ sinh ra trong quá trình này bằng bao nhiêu?

3) Tìm các nhiệt lượng  $Q_{14}$  và  $Q_{42}$  mà hệ nhận được trong các quá trình 1 - 4 và 4 - 2 nếu hiệu nội năng  $U_4 - U_1 = 40 \text{ J}$ .

**1.27.** Khi đốt cháy hoàn toàn một mol khí metan thành  $\text{CO}_2$  và  $\text{H}_2\text{O}$  toả ra nhiệt lượng  $Q_1 = 887\text{kJ}$ . Khi tạo thành một mol nước từ oxy và hydro toả ra nhiệt lượng  $Q_2 = 287\text{kJ}$ , còn khi đốt cháy hoàn toàn cacbon thành  $\text{CO}_2$  toả ra nhiệt lượng  $Q_3 = 407\text{kJ}$ . Xác định nhiệt lượng tạo thành một mol khí metan từ cacbon rắn và khí hydro.

**1.28.** Theo định luật Jun, nội năng của khí lý tưởng chỉ phụ thuộc vào nhiệt độ mà không phụ thuộc vào áp suất. Sử dụng định luật này và phương trình Clapayron, chứng minh rằng entalpi  $I \equiv U + PV$  của khí lý tưởng không phụ thuộc vào áp suất mà chỉ phụ thuộc vào nhiệt độ.

**1.29.** Chứng minh rằng nếu các sản phẩm ban đầu và cuối cùng của phản ứng là khí lý tưởng thì:

- 1) Hiệu ứng nhiệt của phản ứng khi thể tích không đổi không phụ thuộc vào thể tích của các khí sau phản ứng;
- 2) Hiệu ứng nhiệt của phản ứng khi áp suất không đổi không phụ thuộc vào áp suất của các khí.

**1.30.** Coi không khí như một khí lý tưởng, hãy chứng minh rằng khi sấy nóng không khí trong phòng thì nội năng của nó không đổi nếu áp suất bên ngoài không đổi.

**1.31.** Người ta bật lò sưởi trong phòng trong một thời gian nhất định. Khi đó nhiệt độ không khí trong phòng tăng từ  $t_1$  đến  $t_2$ , còn áp suất không đổi và bằng áp suất bên ngoài ngôi nhà. Giả thiết không khí là khí lý tưởng. Tìm nhiệt lượng  $Q$  đã tiêu hao để làm tăng nội năng của không khí trong phòng.

**1.32.** Cần một nhiệt lượng  $Q$  bằng bao nhiêu để sấy nóng  $1\text{m}^3$  không khí từ  $0$  đến  $1^\circ\text{C}$  khi thể tích không đổi và áp suất ban đầu  $P = 760\text{mmHg}$ ? Khối lượng riêng của không khí ở điều kiện tiêu chuẩn  $\rho_0 = 0,00129\text{g/cm}^3$ ,

$$c_P = 0,237 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot ^\circ\text{C}}, \quad \gamma = \frac{c_P}{c_V} = 1,41.$$

**1.33.** Nhiệt lượng  $Q$  sinh ra trong quá trình làm lạnh đẳng áp thuận nghịch một mol khí lý tưởng đơn nguyên tử bằng bao nhiêu, nếu trong quá trình nén này đã tốn một công  $A = 10\text{J}$ ?

**1.34.** Trong xilanh ở phía dưới piton không trọng lượng có chứa khí lý tưởng cân bằng với áp suất khí quyển. Người ta bắt đầu tác dụng lên piton một lực, kết quả là khí bị nén đẳng nhiệt và áp suất của nó tăng gấp hai lần. Thể tích ban đầu của khí là  $V_1 = 5$  lít. Tính công của ngoại lực và nhiệt lượng khí nhận được trong quá trình này.

**1.35.** Tìm độ biến thiên nội năng  $\Delta U$  của một lượng nitơ trong quá trình giãn nở gần đoạn nhiệt từ thể tích  $V_1 = 10 \text{ lít}$  ở áp suất tiêu chuẩn  $P_1$  đến thể tích  $V_2 = 320 \text{ lít}$ .

**1.36.** Một nguồn gồm các tụ điện có điện dung toàn phần  $C = 100 \mu\text{F}$  được nạp đến hiệu điện thế  $U = 300 \text{ V}$ , phóng điện qua khoảng không gian bên trong một bình khí có thể tích  $V = 10 \text{ cm}^3$ . Bình chứa đầy khí argon ở điều kiện tiêu chuẩn. Xác định sự thay đổi áp suất  $\Delta P$  trong bình.

**1.37.** Đối với khí argon  $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = 1,68$ . Xác định áp suất  $P_2$  nhận được sau khi giãn nở đoạn nhiệt từ thể tích  $V_1 = 1 \text{ lít}$  đến  $V_2 = 2 \text{ lít}$ , nếu áp suất ban đầu là  $P_1 = 1 \text{ atm}$ .

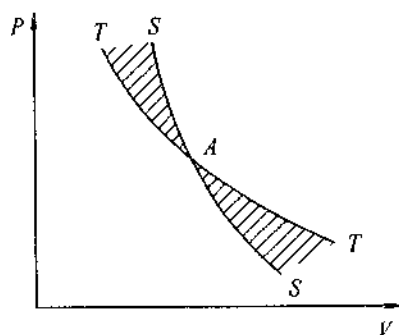
**1.38.** Quá trình polytropic là quá trình được diễn ra với nhiệt dung  $C$  không đổi. Đường biểu diễn quá trình polytropic được gọi là đường polytropic. Tìm phương trình đường polytropic của khí lý tưởng có nhiệt dung  $C_V$  không phụ thuộc vào nhiệt độ. Xét các trường hợp riêng sau:

- |                |                   |
|----------------|-------------------|
| 1) $C = C_V$ ; | 3) $C = 0$        |
| 2) $C = C_P$ ; | 4) $C = \infty$ . |

**1.39.** Với giá trị nào của hệ số polytropic  $n$  thì khí lý tưởng khi nén sẽ nóng lên, và với các giá trị nào thì lạnh đi?

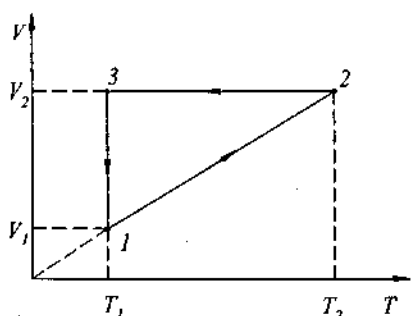
**1.40.** Trong một quá trình polytropic khí héli bị nén từ thể tích ban đầu 4 lít đến thể tích cuối 1 lít. Áp suất khí đó tăng từ 1 atm đến 8 atm. Tìm nhiệt dung  $C$  của khối khí héli, nếu nhiệt độ ban đầu của khối khí là 300 K.

**1.41.** Trên đồ thị  $PV$  (H. 315) qua một điểm  $A$  bất kỳ vẽ một đường đẳng nhiệt  $TT$  và một đường đoạn nhiệt  $SS$  dành cho khí lý tưởng có nhiệt dung  $C_V$  không phụ thuộc vào nhiệt độ. Hãy chỉ ra rằng đường đi qua  $A$  và nằm trong vùng gạch chéo sẽ ứng với nhiệt dung âm, còn đường polytropic đi qua điểm  $A$  và nằm ngoài vùng gạch chéo sẽ có nhiệt dung dương.

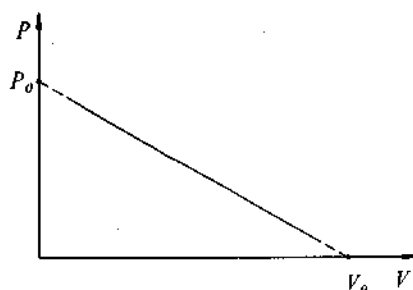


Hình 315

**1.42.** Tính công của một mol khí lý tưởng trong quá trình polytropic, nếu thể tích khí thay đổi từ giá trị ban đầu  $V_1$  đến giá trị cuối  $V_2$ . Xét các trường hợp riêng là các quá trình đẳng nhiệt và đoạn nhiệt.



Hình 316



Hình 317

1.43. Khí lý tưởng trong chu trình 1 – 2 – 3 – 1 (H. 316) thực hiện một công âm hay công dương? Công này bằng bao nhiêu đối với  $m$  gam nitơ? Biết

$$\text{rằng } \frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}.$$

1.44. Trong một xilanh cách nhiệt với môi trường ngoài có 8g heli ở nhiệt độ  $T_1 = 200\text{K}$ . Lượng chất tổng hợp làm xilanh và piston là 1 mol. Khí được nén

bằng quá trình thuận nghịch đến thể tích  $V_2 = \frac{V_1}{8}$ , nhưng trong quá trình

nén nhiệt độ của thành xilanh không kịp thay đổi, và chỉ sau đó toàn hệ mới đạt tới trạng thái cân bằng. Tìm nhiệt độ  $T$  của hệ ở trạng thái cân bằng.

1.45. 1) Nhiệt độ của khí lý tưởng tăng hay giảm khi nó giãn nở theo quy luật  $PV^2 = \text{const}$ ?

2) Nhiệt dung phân tử của khí trong quá trình này bằng bao nhiêu?

1.46. Giải bài toán 1.45 đối với khí lý tưởng giãn nở theo quy luật  $P^2V = \text{const}$ .

1.47. Tính nhiệt dung phân tử của khí lý tưởng đối với quá trình mà trong đó, áp suất  $P$  tỷ lệ với thể tích  $V$ . Nhiệt dung  $C_V$  của khí không phụ thuộc vào nhiệt độ.

1.48. Nhiệt dung phân tử của nitơ trong một quá trình nào đó là không đổi và bằng  $23,556 \frac{\text{J}}{\text{K.mol}}$ . Áp suất  $P$  của khí phụ thuộc vào nhiệt độ  $T$  như thế nào trong quá trình này?

1.49. Tính nhiệt dung phân tử  $C(V)$  của khí lý tưởng khi cho trước thông số  $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$  trong quá trình được biểu diễn bằng đồ thị (H. 317). Cho trước các giá trị  $P_0$ ,  $V_0$ . Xác định nhiệt độ cực đại mà khí đạt được trong quá trình

này. Hãy chỉ ra các quá trình polytropic mà đồ thị của nó trên giản đồ  $PV$  tiếp xúc với đường thẳng (H. 317) tại các điểm tương ứng với  $C(V)=0$  và  $C(V)=\infty$ . Vẽ đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc  $C(V)$ .

**1.50.** Trong hệ tọa độ  $(V, T)$  tìm phương trình của một quá trình của khí lý tưởng, trong đó nhiệt dung phân tử của khí thay đổi cùng với nhiệt độ theo quy luật tuyến tính  $C = C_0 + \alpha T$ , trong đó  $\alpha$  là hằng số nào đó. Xét trường hợp riêng  $C_0 = 0$ .

**1.51.** Trong hệ tọa độ  $(V, T)$  tìm phương trình của đường đoạn nhiệt của khí lý tưởng trong một vùng nhiệt độ mà nhiệt dung của khí thay đổi theo quy luật  $C_V = C_{V_0} + \alpha T^2$ , trong đó  $\alpha$  là hằng số nào đó.

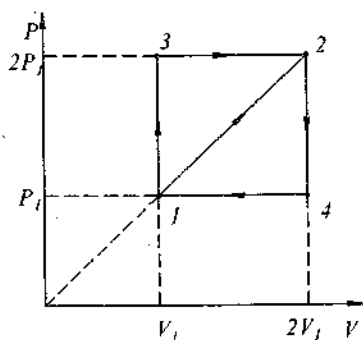
**1.52.** Đối với khí lý tưởng có hệ số đoạn nhiệt  $\gamma$  bất kỳ, tìm phương trình của một quá trình trong đó nhiệt dung phân tử  $C$  phụ thuộc vào nhiệt độ  $T$  theo quy luật  $C = \alpha T^2$ , trong đó  $\alpha$  là hằng số.

**1.53.** Một mol khí lý tưởng có nhiệt dung phân tử  $C_V = \frac{5R}{2}$  ba lần biến đổi thuận nghịch từ trạng thái 1 đến trạng thái 2 sau khi lần lượt thực hiện các quá trình 1-3-2, 1-4-2 và 1-2 (H. 318). Tìm nhiệt lượng  $Q_{123}$ ,  $Q_{142}$ ,  $Q_{12}$  mà khí nhận được trong mỗi quá trình. Tính nhiệt dung phân tử  $C_{12}$  của khí trong quá trình 1-2. Biểu diễn tất cả các kết quả thông qua hằng số khí  $R$  và nhiệt độ  $T_1$  của khí ở trạng thái 1.

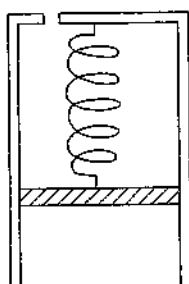
**1.54.** Một mol khí lý tưởng được đun nóng trong xilanh phía dưới piton, piton được giữ ở vị trí cân bằng bằng một lò xo tuân theo định luật Hook (H. 319). Thành xilanh và piton cách nhiệt, còn đáy xilanh dẫn nhiệt. Thể tích ban đầu của khí là  $V_0$ , khi đó lò xo không bị biến dạng,  $V_0$  được chọn sao cho  $P_0 S^2 = k V_0$ , trong đó  $P_0$  là áp suất khí quyển bên ngoài;  $S$  là diện tích piton,  $k$  là hệ số đàn hồi của lò xo. Tìm nhiệt dung của khí trong quá trình trên.

**1.55\*.** Các thành bên của xilanh  $AC$  và  $BD$ , nắp  $CD$  và piton  $MN$  được làm từ vật liệu không dẫn nhiệt. Đáy  $AB$  dẫn nhiệt (H. 320). Piton  $MN$  có thể chuyển động không ma sát trong xi lanh. Bên trên và bên dưới piton đều chứa 1 mol của cùng một khí lý tưởng với nhiệt dung phân tử khi thể tích không đổi  $C_V$  và hệ số đoạn nhiệt  $\gamma$ . Khí phía dưới được làm nóng (hoặc làm lạnh) chuẩn tĩnh, vì thế mà piton  $MN$  di chuyển trong xi lanh. Biểu diễn nhiệt dung  $C_1$  của khí phía dưới trong quá trình này qua các thể tích khí  $V_1$  và  $V_2$ . Nhiệt dung  $C_2$  của khí phía trên bằng bao nhiêu? Kết quả sẽ thay đổi

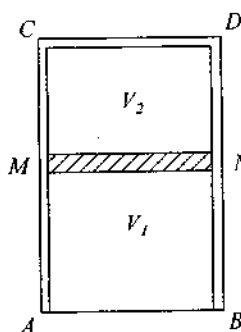
thể nào nếu nắp  $CD$  được làm bằng chất dẫn nhiệt, còn nhiệt độ khí phần trên của xilanh được giữ không đổi.



Hình 318



Hình 319



Hình 320

**1.56.** Một piston nhẹ có thể di chuyển tự do trong một xilanh thể tích  $2V_0$ . Ở mỗi phía của piston đều có một mol khí lý tưởng đơn nguyên tử. Tại thời điểm ban đầu nhiệt độ và áp suất khí cả bên trái và bên phải piston đều như nhau và bằng  $T_0$  và  $P_0$ . Sau đó khí bên trái được truyền nhiệt chuẩn tĩnh. Coi quá trình ở bên phải piston là đoạn nhiệt. Xác định nhiệt dung của quá trình trong khoang bên phải như là một hàm của  $V_2$ . Vẽ đồ thị sự phụ thuộc  $C_1(V_2)$ .

**1.57.** Một mol khí lý tưởng chứa trong xilanh kín ở nhiệt độ  $T_0 = 273,15\text{K}$  và áp suất  $P_0 = 1\text{atm}$ . Các thành bên của xilanh không dẫn nhiệt, còn hai đáy của nó dẫn nhiệt tốt. Xilanh và khí trong nó được chia thành hai phần bằng nhau bởi một piston có thể di chuyển tự do trong xilanh và không dẫn nhiệt. Một nửa của xilanh được nhúng vào nước đá đang tan, còn nửa kia được đun nóng đến nhiệt độ  $T = 373,15\text{K}$ . Xác định các thể tích  $V_0$ ,  $V_1$  ở hai phía của piston sau khi cân bằng được thiết lập. Tìm áp suất khí  $P$  và khối lượng nước đá tan. Nhiệt nóng chảy của nước đá  $q = 335\text{J/g}$ .

**1.58.** Một bình chứa cách nhiệt được chia thành hai phần bằng nhau bởi một vách ngăn không thấm. Một bên chứa khí lý tưởng, bên kia được hút đến chân không. Sau đó người ta bỏ vách ngăn ra và khí lấp đầy toàn bộ thể tích bình. Sau đó người ta hơ nóng khí để nó thực hiện hai quá trình liên tiếp: 1) Quá trình đẳng áp, kết quả là thể tích khí tăng lên 4 lần; 2) quá trình đẳng tích, kết quả là áp suất ban đầu được khôi phục. Trong cả hai quá trình khí đều nhận được nhiệt lượng như nhau. Xác định hệ số đoạn nhiệt  $\gamma$ .

**1.59.** Khí lý tưởng được nén trong một xilanh sao cho nhiệt lượng thoát ra môi trường xung quanh đúng bằng sự biến đổi nội năng của nó. Xác định công cần thiết để nén một mol khí khi thể tích khí thay đổi hai lần. Nhiệt dung trong quá trình này bằng bao nhiêu? Nhiệt độ ban đầu của khí là  $T_0$ .



**1.60.** Một xilanh cách nhiệt có thể tích  $2V_0$  chứa 2 mol khí lý tưởng được chia thành hai phần bằng nhau bằng một piton nhẹ không dẫn nhiệt có diện tích  $S$ . Người ta đun nóng một bên, khi đó piton di chuyển một khoảng  $h$ . Xác định nhiệt lượng tiêu thụ. Nhiệt độ ban đầu trong cả hai nửa bằng nhau và bằng  $T_0$ .

**1.61.** 20g heli chứa trong xilanh phía dưới pitông được biến đổi chuẩn tĩnh từ trạng thái 1 ( $P_1 = 4,1 \text{ atm}$ ,  $V_1 = 32$  lít) đến trạng thái 2 ( $P_2 = 15,5 \text{ atm}$ ,  $V_2 = 9$  lít). Heli đạt nhiệt độ cực đại bằng bao nhiêu trong quá trình này, nếu trên đồ thị sự phụ thuộc của  $P(V)$  là một đường thẳng?

**1.62.** Để tạo bể chứa dầu dưới lòng đất, trong khoang có thể tích ban đầu  $V_0$  người ta cho nổ, khi đó sinh ra năng lượng 4,2GJ. Các sản phẩm khí tạo thành sau khi nổ giãn nở đoạn nhiệt và trong một phần của giây hình thành bể chứa. Hỏi với thể tích khoang ban đầu bằng bao nhiêu thì thể tích bể chứa thu được sẽ là lớn nhất? Vụ nổ được tiến hành ở độ sâu  $H = 100 \text{ m}$ , khối lượng riêng của đất  $\rho = 3 \text{ g/cm}^3$ . Để đánh giá coi đất là chất lỏng không chịu nén, còn các sản phẩm sau khi nổ là khí hai nguyên tử.

**1.63.** Để xác định tỷ số nhiệt dung riêng  $c_P$  và  $c_V$  của khí người ta đo chu kỳ dao động nhỏ  $T_1$  của thủy ngân trong một ống thủy ngân hình chữ U không bịt hai đầu. Sau đó người ta gắn vào cả hai miệng ống hai quả cầu lớn rỗng bằng thủy tinh giống nhau có chứa khí cần nghiên cứu, khi đó chu kỳ dao động thay đổi và bằng  $T_2$ . Coi các quá trình nén giãn trong các quả cầu

là đoạn nhiệt, thiết lập công thức tính  $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$ . Thể tích mỗi quả cầu bằng

$V(\text{cm}^3)$ , áp suất khí trong các quả cầu ở trạng thái tĩnh bằng  $h(\text{mmHg})$ . Thể tích phần ống chứa thủy ngân rất nhỏ so với thể tích quả cầu.

**1.64.** Để nhận được khí ở áp suất và nhiệt độ siêu cao đôi khi người ta sử dụng thiết bị gồm một xilanh – nòng súng bịt kín một đầu và một piton – đạn bay vào xilanh từ đầu hở. Nếu gia công tốt xilanh và piton, thì khí rò qua khe hở giữa chúng rất ít. Do nhiệt độ của khí rất cao, khí nén dưới áp suất lớn vẫn có thể coi là khí lý tưởng. Xác định giới hạn nhiệt độ  $T$ , áp suất  $P$  và khối lượng riêng  $\rho$  của argon bị nén trong thiết bị trên nếu viên đạn có khối lượng  $m = 100 \text{ g}$  bay vào – nòng súng có thể tích  $V = 200 \text{ cm}^3$ , với vận tốc ban đầu  $v = 250 \text{ m/s}$ . Nhiệt độ và áp suất ban đầu tương ứng bằng  $T_0 = 300 \text{ K}$ ,  $P_0 = 1 \text{ atm}$ .

**1.65\*.** Để đo nhiệt dung của khí, người ta cho khí nóng cần đo đi qua ống kín loại xoắn ốc (ống ruột gà) nhúng trong nước của nhiệt lượng kế. Một đầu

ống được giữ áp suất  $P_1$  và nhiệt độ  $T_1$  không đổi. Ở đầu còn lại người ta giữ áp suất  $P_2$  và đo nhiệt độ  $T_2$ . Bằng cách đo độ tăng của nhiệt độ nước trong nhiệt lượng kế có thể xác định được nhiệt lượng khí tỏa ra. Chia giá trị nhận được cho độ giảm nhiệt độ và cho số mol khí đi qua, ta tìm được nhiệt dung phân tử của nó. Nhiệt dung đo được bằng phương pháp này là nhiệt dung nào?

**1.66.** Trong một xilanh thẳng đứng bịt kín đầu dưới có một piton có thể di chuyển không ma sát. Khối lượng  $M$  của piton rất lớn so với khối lượng khí nằm trong xi lanh, bên dưới nó. Ở trạng thái cân bằng khoảng cách giữa piton và đáy là  $l_0$ . Xác định chu kỳ của các dao động nhỏ xuất hiện khi kéo piton khỏi vị trí cân bằng. Giả thiết các dao động là đẳng nhiệt, còn khí là lý tưởng. Tiết diện ngang của xilanh bằng  $S$ , áp suất của khí quyển bằng  $P_0$ . Xét trường hợp tới hạn, khi  $P_0 = 0$ .

**1.67.** Giải bài toán trên với giả thiết rằng các dao động là đoạn nhiệt. Sự phụ thuộc của hệ số đoạn nhiệt  $\gamma$  vào nhiệt độ khí có ảnh hưởng đến kết quả không?

**1.68.** Hai bình có thể tích  $V_1$  và  $V_2$  chứa đầy các khí khác nhau được nối với nhau bằng một ống hình trụ có tiết diện ngang  $S$ . Trong ống có một piton khối lượng  $M$ . Ở trạng thái cân bằng áp suất các khí ở hai phần của piton là bằng nhau và bằng  $P_0$ . Tìm chu kỳ  $\tau$  của dao động xuất hiện khi kéo piton lệch khỏi vị trí cân bằng, với giả thiết rằng các quá trình nén và giãn khí là đoạn nhiệt. Hệ số đoạn nhiệt của các khí lần lượt là  $\gamma_1$  và  $\gamma_2$ . Thể tích của ống nối so với  $V_1$  và  $V_2$  không đáng kể. Bỏ qua ma sát giữa piton và thành ống.

**1.69\*.** Máy nén khí hai tầng nén đoạn nhiệt và chuẩn tĩnh một lượng khí lý tưởng có các nhiệt dung  $C_P$  và  $C_V$  không phụ thuộc vào nhiệt độ. Lúc đầu khí được nén từ áp suất  $P_0$  đến áp suất trung gian  $P_1$ . Sau đó khí nén với áp suất không đổi  $P_1$  được làm lạnh đến nhiệt độ ban đầu  $T_0$ . Cuối cùng khí được nén đến áp suất  $P_2$ . Với giá trị nào của áp suất trung gian  $P_1$  thì công toàn phần của máy nén khí là nhỏ nhất và bằng bao nhiêu? Cho trước các giá trị  $P_0$ ,  $P_1$  và thể tích khí ban đầu  $V_0$ . Tìm mối liên hệ giữa công nhỏ nhất  $A_{\min}$  với công  $A_1$  cần để nén khí tới cùng áp suất  $P_2$  khi sử dụng máy nén khí một tầng. Tìm mối liên hệ này đối với heli và không khí, nếu  $P_1 = 1 \text{ atm}$ ,  $P_2 = 200 \text{ atm}$ .

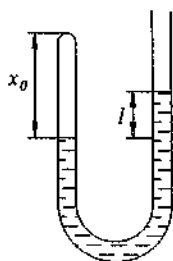
**1.70.** Máy nén khí hai tầng nén đoạn nhiệt và chuẩn tĩnh một lượng khí lý tưởng có các nhiệt dung  $C_P$  và  $C_V$  không phụ thuộc vào nhiệt độ. Lúc đầu

khí được nén từ thể tích  $V_0$  đến thể tích trung gian  $V_1$ . Sau đó khí nén với thể tích không đổi  $V_1$  được làm lạnh đến nhiệt độ ban đầu  $T_0$ . Cuối cùng khí được nén đến thể tích  $V_2$ . Với giá trị nào của thể tích trung gian  $V_1$  thì công toàn phần của máy nén khí nhỏ nhất và bằng bao nhiêu? Cho trước các giá trị  $V_0$ ,  $V_2$  và áp suất khí ban đầu  $P_0$ . Tìm mối liên hệ giữa công nhỏ nhất  $A_{\min}$  với công  $A_1$  cần để thực hiện quá trình nén tương tự khi sử dụng máy nén khí một tầng. Tìm mối liên hệ này đối với nitơ và argon, nếu  $\frac{V_0}{V_2} = 50$ .

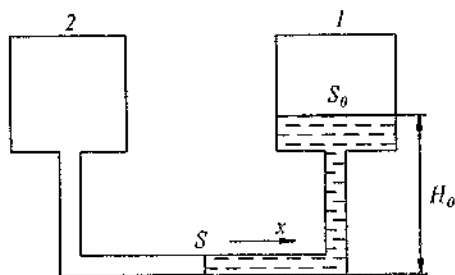
**1.71\*.** Khí lý tưởng được chứa bên trong lớp vỏ đàn tính đoạn nhiệt dưới áp suất  $P_1$ , nhiệt độ  $T_1$ . Xác định nhiệt độ  $T_2$  của khí được thiết lập sau khi áp suất bên ngoài đột ngột thay đổi đến giá trị  $P_2$ . So sánh sự thay đổi nhiệt độ trong quá trình này với sự thay đổi của nó nhận được nếu quá trình đoạn nhiệt diễn ra một cách chuẩn tĩnh.

**1.72.** Thủy ngân khối lượng  $m = 6,8\text{g}$  được rót vào ống hình chữ U (H. 321), có tiết diện  $S = 0,05\text{cm}^2$  được hàn kín một đầu sao cho hiệu độ cao của cột thủy ngân  $l = 2,5\text{cm}$ , còn chiều cao khoảng không khí ở đầu bịt là  $x_0 = 3,5\text{cm}$ . Tìm chu kỳ dao động của thủy ngân trong ống, giả thiết quá trình dao động là đoạn nhiệt.

**1.73.** M. V. Lômônôxốp đã phát minh ra thiết bị đo độ biến thiên của trọng trường (H. 322). Thiết bị gồm hai bình, mỗi bình có thể tích  $V = 100\text{cm}^3$  được nối với nhau bằng một ống mao dẫn tiết diện  $S = 0,001\text{cm}^2$ . Ban đầu ông tạo chân không trong bình 1, bình 2 chứa không khí ở áp suất khí quyển bình thường, khi đó thủy ngân nằm ở đoạn nằm ngang trong ống mao dẫn. Sau đó ông hàn kín hai bình. Tiết diện của bình  $S_0 = 25\text{cm}^2$ , nhiệt độ không đổi, khí trong hai bình là lý tưởng. Vị trí của thủy ngân trong ống thay đổi bao nhiêu khi  $\frac{\Delta g}{g} = 10^{-7}$ ?



Hình 321



Hình 322

1.74. Biểu diễn hệ số đoạn nhiệt  $\gamma$  của hỗn hợp một số khí lý tưởng qua các hệ số đoạn nhiệt  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$  và áp suất riêng  $P_1, P_2, \dots$  của các khí này.

1.75. Hỗn hợp khí hêli và hydro theo tỷ lệ  $\text{He}:\text{H}_2 = 2:1$  (tức là  $\frac{1}{3}$  hydro;  $\frac{2}{3}$  hêli tính theo khối lượng) ở áp suất  $P_1 = 8\text{atm}$ , nhiệt độ  $T_1 = 600\text{K}$  được giãn nở trong quá trình đoạn nhiệt thuận nghịch đến áp suất  $P_2 = 1\text{atm}$ . Xác định nhiệt độ của hỗn hợp sau khi giãn nở.

1.76. Trộn hỗn hợp  $m_1 = 4,032\text{g}$  hydro với  $m_2 = 32\text{g}$  ôxy. Nhiệt dung riêng của chúng lần lượt là  $c_{P1} = 3,50 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot ^\circ\text{C}}$  và  $c_{P2} = 0,218 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot ^\circ\text{C}}$ . Xác định độ

giảm nội năng  $\Delta U$  của hỗn hợp này khi làm lạnh chúng đến  $\Delta t = 20^\circ\text{C}$  ở thể tích không đổi. Đối với cả hai khí  $\gamma = 1,40$ .

1.77. Trong thể tích  $V_0$  ở nhiệt độ  $t = 0^\circ\text{C}$  có chứa  $\nu$  mol hydro và  $\frac{\nu}{2}$  mol

ôxy. Tìm biểu thức áp suất cực đại  $P$  của hơi nước ở cùng nhiệt độ  $t = 0^\circ\text{C}$  nhận được khi cho nổ hỗn hợp khí, nếu biết nhiệt dung phân tử của hơi nước bằng  $C$ , còn nhiệt lượng tạo thành một mol nước từ hydro và ôxy là  $Q$ .

1.78. Hỗn hợp khí với hệ số đoạn nhiệt  $\gamma$  đã biết chỉ cho phép làm nóng đến nhiệt độ lớn nhất  $T_{\text{max}}$ . Xác định số lần nén  $n$  cần thiết để tăng áp suất từ  $P_0$  đến  $P_1$ , nếu mỗi lần nén được tiến hành một cách đoạn nhiệt và sau mỗi lần nén khí được làm lạnh đến nhiệt độ ban đầu  $T_0$ . Xác định công toàn phần  $A$  trong cả quá trình nén nói trên.  $A$  tiến tới giá trị nào khi  $T_{\text{max}} \rightarrow T_0$ ?

1.79. Xác định nhiệt dung riêng của khí ôxy ở thể tích không đổi khi nó được làm nóng tới nhiệt độ rất cao (cỡ vài keV).

1.80. Tính theo thuyết cổ điển nhiệt dung riêng của hỗn hợp khí với thành phần mol như sau ở áp suất không đổi:

$\text{He} - 20\%$ ;  $\text{H}_2 - 30\%$ ;  $\text{CH}_4 - 50\%$ .

(thành phần mol chỉ tỷ lệ mol của một khí với tổng số mol của cả hỗn hợp).

1.81. Trong một điều kiện nào đó một phần các phân tử hydro phân ly thành các nguyên tử với hệ số phân ly là  $\alpha$  (tỷ số giữa số phân tử phân ly với tổng số phân tử ban đầu). Tìm nhiệt dung phân tử  $C_V$  của khí này khi  $\alpha = 0,25$ .

Nhiệt dung phân tử của nguyên tử hydro  $C_{V1} = 2,94\text{cal}/(\text{mol} \cdot ^\circ\text{C})$ , nhiệt dung phân tử của phân tử hydro  $C_{V2} = 4,9\text{cal}/(\text{mol} \cdot ^\circ\text{C})$

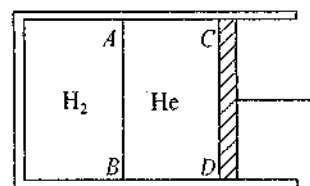
**1.82.** Áp suất hydro ở nhiệt độ  $T = 350\text{K}$  là  $1\text{mmHg}$ . Áp suất của khí bằng bao nhiêu nếu đun nóng đẳng tích nó đến nhiệt độ  $300\text{eV}$ ? Thế ion hoá của nguyên tử hydro bằng  $13,6\text{eV}$ .

**1.83.** Phần  $\alpha$  nào của các phân tử iốt thể khí ( $\text{I}_2$ ) phân ly thành các nguyên tử ở  $600^\circ\text{C}$ , nếu nhiệt dung riêng  $c_p$  đo được ở nhiệt độ này bằng  $0,14\text{J}/(\text{g}\cdot\text{K})$ ? Khối lượng nguyên tử tương đối của iốt là  $A = 126,9$ .

**1.84.** Trong một bình cách nhiệt thể tích  $V_0$  có  $N$  phân tử lưỡng nguyên tử. Áp suất của khí là  $P_0$ . Sau một thời gian tất cả các phân tử phân ly thành nguyên tử, mỗi phân tử khi phân ly toả ra một nhiệt lượng  $q$ . Xác định nhiệt độ và áp suất của khí sau khi các phân tử phân ly.

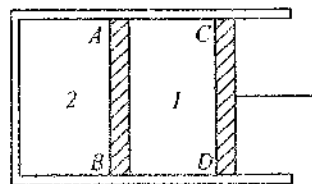
**1.85.** Trong một bình chứa cách nhiệt thể tích  $22,4\text{l}$  có một mol  $\text{CO}_2$  ở áp suất  $1\text{atm}$ . Dưới tác dụng của bức xạ bên ngoài, một nửa số phân tử  $\text{CO}_2$  phân ly thành các phân tử  $\text{CO}$  và  $\text{O}_2$ . Tìm năng lượng bức xạ chuyển hoá thành nhiệt năng, nếu khi đó áp suất trong bình tăng đến  $1,8\text{atm}$ .

**1.86.** Một xilanh cách nhiệt được phân chia thành hai phần bằng một vách ngăn cố định dẫn nhiệt  $AB$ , một phần chứa một mol khí hydro, phần còn lại chứa một mol khí heli (H. 323). Piton cách nhiệt  $CD$  di chuyển được nằm dưới áp suất bên ngoài không đổi  $P$ . Tại thời điểm ban đầu cả hai khí nằm ở trạng thái cân bằng, nhiệt độ của chúng khác nhau, còn áp suất của heli bằng áp suất bên ngoài  $P$ . Sau đó bắt đầu quá trình cân bằng nhiệt của các khí và piton  $CD$  chuyển động về bên phải. Đến thời điểm khi nhiệt độ của các khí bằng nhau và cân bằng được thiết lập, hệ thực hiện một công chống lại áp suất bên ngoài  $A = 42\text{J}$ . Xác định độ biến thiên nhiệt độ của hydro đến thời điểm này.



Hình 323

**1.87.** Một bình cách nhiệt được phân chia thành hai phần bằng một vách ngăn cố định dẫn nhiệt  $AB$ , một phần chứa một mol khí hydro, phần còn lại chứa một mol khí heli (H. 323). Trạng thái ban đầu của hệ là cân bằng, cả hai khí có cùng áp suất  $P_0$  và nhiệt độ  $T_0 = 293\text{K}$ . Sau đó người ta cho piton  $CD$  dịch chuyển đoạn nhiệt và chuẩn tĩnh, kết quả là thể tích heli tăng lên hai lần. Hỏi nhiệt độ của các khí sau quá trình giãn nở trên bằng bao nhiêu?



Hình 324

**1.88.** Trong xilanh phía dưới piton có hai khí lý tưởng khác nhau (mỗi khí một mol) được ngăn cách bằng một vách ngăn di động nhẹ dẫn nhiệt. Tìm biểu thức tính công di chuyển piton trong điều kiện không có sự trao đổi nhiệt với môi trường xung quanh. Chuyển động diễn ra chậm,

sao cho giữa các khí luôn giữ được sự cân bằng nhiệt theo thời gian. Nhiệt độ và thể tích ban đầu lần lượt là  $T_0$  và  $V_0$ , còn thể tích cuối là  $V$ .

**1.89.** Một ống dài có thành cách nhiệt được chia làm hai phần bằng piton  $AB$ , hai bên piton  $AB$  chứa các khí khác nhau (H. 324). Chiều dài ban đầu của các phần chứa khí 1 và 2 lần lượt là  $l_{01}$  và  $l_{02}$ . Người ta di chuyển nhanh nhưng chuẩn tĩnh piton thứ hai  $CD$  vào trong ống, khi đó piton  $AB$  cũng bắt đầu di chuyển. Người ta đánh dấu vị trí của piton  $AB$  khi nó dừng lại, sự trao đổi nhiệt giữa khí 1 và 2 chưa kịp xảy ra. Giả thiết  $l_1$  là chiều dài đoạn ống chứa khí 1 tại vị trí này,  $l_2$  là chiều dài tương ứng với khí 2.

Xác định tỷ số của các hệ số đoạn nhiệt Poatxông  $\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$ .

**1.90.** Để thu được phản ứng nhiệt hạch trong một bia là một quả cầu nhỏ bán kính  $r = 50\mu\text{m}$ , được chế tạo từ một hỗn hợp làm lạnh chứa cùng một lượng các nguyên tử đơteri và triti. Bia bị chiếu rất nhanh (trong khoảng  $\sim 10^{-11}\text{s}$ ) từ tất cả các phía bằng tia lade. Khi đó năng lượng mà đơteri hấp thụ bằng  $E = 100\text{J}$ . Xác định nhiệt độ của bia và áp suất bên trong nó ngay sau khi ngắt tia lade, giả thiết rằng bia chưa kịp phân huỷ. Khối lượng riêng của bia  $\rho = 0,2\text{g/cm}^3$ .

**1.91.** Để thu được phản ứng hạt nhân nhiệt hạch dây truyền trong đơteri nguyên chất, cần làm nóng nó đến nhiệt độ  $T \approx 10^9\text{K}$ . Trong số các phương pháp khác nhau để đạt nhiệt độ trên, người ta đề nghị sử dụng bức xạ lade công suất lớn. Bia đơteri được làm lạnh có dạng một quả cầu nhỏ bị chiếu bằng lade trong thời gian cực ngắn (cỡ  $\sim 10^{-11}\text{s}$ ) từ mọi phía. Trong thời gian chiếu lade quả cầu đơteri chưa kịp phân huỷ, đó là điều kiện cần để diễn ra phản ứng nhiệt hạch. Quả cầu đơteri bán kính  $r = 5\mu\text{m}$  phải hấp thụ một năng lượng  $E$  bằng bao nhiêu để đạt được nhiệt độ trên? Khối lượng riêng của bia  $\rho = 0,15\text{g/cm}^3$ .

**1.92.** Tìm môđun đoạn nhiệt của quá trình nén khí lý tưởng

$K_{ad} = -V \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_{ad}$  và so sánh nó với môđun đẳng nhiệt của quá trình nén

thể tích  $K_T = -V \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T$ .

**1.93\*.** Chứng minh rằng hệ số nén đoạn nhiệt và đẳng nhiệt của một chất đồng nhất về mặt vật lý và đẳng hướng liên hệ với nhau bằng hệ thức:

$$\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_{ad} = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T,$$

trong đó  $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ . Chứng minh rằng hệ thức trên là hệ quả chỉ của nguyên lý thứ nhất của nhiệt động học và của phương trình trạng thái (hàm phụ thuộc giữa  $P$ ,  $V$  và  $T$ ).

**1.94\*.** Chứng minh rằng đối với một vật bất kỳ đồng nhất về mặt vật lý ta có hệ thức:

$$(C_P - C_V) \frac{\partial^2 T}{\partial P \partial V} + \left( \frac{\partial C_P}{\partial P} \right)_V \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_P - \left( \frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_P \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_V = 1$$

Hệ thức này đúng với tất cả các nhiệt độ được xác định bằng thực nghiệm và về mặt nguyên tắc, có thể dùng để kiểm tra nguyên lý thứ nhất của nhiệt động học.

**1.95.** Khí tuân theo phương trình trạng thái Clapayron  $PV = RT$ . Tìm hiệu nhiệt dung  $C_P - C_V$  của nó, chỉ sử dụng nguyên lý thứ nhất của nhiệt động học. Giả thiết rằng nhiệt dung  $C_V$  và  $C_P$  phụ thuộc vào thể tích và áp suất tương ứng.

**1.96\*.** Một mol khí lý tưởng với nhiệt dung không đổi  $C_V$  được đặt trong xilanh có thành và piston cách nhiệt. Piston có thể chuyển động không ma sát trong xilanh. Piston nằm dưới áp suất không đổi bên ngoài  $P_1$ . Tại một thời điểm áp suất từ bên ngoài tăng hoặc giảm đột ngột đến giá trị  $P_2$ . (Điều đó có thể đạt được bằng cách bớt một phần tải hoặc đặt thêm tải mới lên piston). Kết quả là khí thay đổi đoạn nhiệt thể tích của nó. Tính nhiệt độ và thể tích của khí ngay sau khi cân bằng nhiệt động được thiết lập.

**1.97\*.** Trong bài trước, ngay sau khi trạng thái cân bằng được thiết lập, áp suất của khí lại thay đổi đột ngột đến giá trị ban đầu  $P_1$ . Tính nhiệt độ cuối  $T_3$  và thể tích cuối  $V_3$  của khí sau khi nó lại đạt đến trạng thái cân bằng nhiệt động. Hãy chứng tỏ rằng do cả hai quá trình đoạn nhiệt trên, nhiệt độ và thể tích khí đều tăng. Xét trường hợp đặc biệt, khi sự thay đổi áp suất  $P_2 - P_1$  nhỏ. Trong trường hợp này, xác định bậc thay đổi nhỏ của nhiệt độ  $T_3 - T_1$  và thể tích  $V_3 - V_1$ .

**1.98.** Khí nằm trong xilanh phía dưới piston được nén bằng cát. Thành xilanh và piston cách nhiệt. Người ta xúc từng nắm cát ra dần, khí giãn nở đoạn nhiệt. Sau đó lại cho khí nén đoạn nhiệt bằng cách đổ từng nắm cát lên piston. Sử dụng các kết quả của bài trước, hãy chứng tỏ rằng trong trường hợp giới hạn, khi khối lượng một nắm cát nhỏ, còn số lượng của chúng thì nhiều

vô cùng, khí trong quá trình nghịch đi qua một chuỗi các trạng thái cân bằng tương tự như chuỗi của quá trình thuận mà nó đi qua.

**1.99.** Nước chảy trong một ống cách nhiệt có áp suất ở hai đầu là 100atm. Nhiệt độ nước ở đầu vào là  $T_1 = 20^{\circ}\text{C}$ . Nhiệt độ của nước ở đầu ra tăng lên bao nhiêu? Bỏ qua tính chịu nén của nước.

## §2. VẬN TỐC ÂM THANH. CHUYỂN ĐỘNG CỦA CHẤT KHÍ<sup>1</sup>

**2.1.** Tìm sự gia tăng vận tốc âm thanh trong không khí khi làm nóng không khí từ 0 đến  $1^{\circ}\text{C}$ .

**2.2.** Vận tốc âm thanh trong không khí ở  $0^{\circ}\text{C}$  là 332m/s. Xác định vận tốc âm thanh trong khí hydro ở nhiệt độ trên. Khối lượng mol không khí giả thiết là  $\mu = 28,8\text{g/mol}$ .

**2.3.** Xác định tỷ số  $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ , nếu vận tốc âm thanh trong không khí ở  $0^{\circ}\text{C}$  và áp suất khí quyển  $P = 760\text{mmHg}$  có trị số  $v = 332\text{m/s}$  và khối lượng riêng của không khí  $\rho = 0,001292\text{g/cm}^3$ .

**2.4.** Tìm biểu thức tính vận tốc âm thanh trong hỗn hợp  $v_1, v_2, v_3, \dots$  mol các khí lý tưởng khác nhau ở nhiệt độ  $T$ .

**2.5.** Tính vận tốc âm thanh trong khí oxy ở nhiệt độ  $T = 1\text{keV}$ .

**2.6.** Bằng cách đo vận tốc âm thanh trong chất khí người ta có thể kiểm tra được độ sạch của nó. Cần phải đo vận tốc âm thanh trong heli với độ chính

xác  $\frac{\Delta v_{at}}{v_{at}}$  bằng bao nhiêu, để có thể phát hiện được tạp chất argon ( $\mu = 40$ ) với tỷ lệ 1% (theo lượng mol)?

**2.7.** Người ta thổi vào hai ống đàn organ cùng chiều dài: một ống thổi không khí ở nhiệt độ phòng  $T_0$ , còn ống kia thổi khí heli. Nhiệt độ  $T$  của khí heli phải bằng bao nhiêu để các âm của ống thứ hai cao hơn các âm tương ứng của ống thứ nhất một quãng tám (tỷ lệ tần số bằng hai). Giả thiết cho trước các hệ số đoạn nhiệt và khối lượng mol của các khí.

---

<sup>1</sup> Trong các bài tập về chuyển động của chất khí các lỗ “nhỏ” được hiểu là kích thước của lỗ sao cho sự chảy thoát của khí thành lớp (laminar), nhưng không được quá nhỏ để dòng khí là dòng phân tử.



**2.8.** Để cho các thợ lặn (các nhà nghiên cứu đáy đại dương) hô hấp người ta dùng hỗn hợp gồm 95% khí heli và 5% oxy (theo khối lượng). Hỏi các tần số đặc trưng của giọng nói thợ lặn thay đổi bao nhiêu lần trong hỗn hợp khí này (so với bình thường)? Giả thiết cho trước các hệ số đoạn nhiệt và khối lượng mol của các khí.

**2.9.** Xác định vận tốc âm thanh trong một đồng tuyết lở chuyển động theo dốc núi, giả thiết khối lượng riêng của đồng tuyết lở là  $\rho = 0,25 \text{ g/cm}^3$ . Kích thước các hạt tuyết rất nhỏ so với chiều dài bước sóng âm. Giữa các tinh thể nước không có ràng buộc cứng, chúng tách biệt nhau bằng các lớp không khí.

**2.10.** Tìm nhiệt độ cuối cùng  $T_2$  và giới hạn trên của vận tốc  $v$  của luồng tinh khí nhẹ  $\text{CO}_2$  phun từ vòi của một bình chứa vào không khí. Nhiệt độ khí  $\text{CO}_2$  trong bình chứa là  $T_1 = 300\text{K}$  và dưới áp suất  $P_1 = 10\text{atm}$ , nếu áp suất khí quyển  $P_2 = 1\text{atm}$ . Hệ số đoạn nhiệt của  $\text{CO}_2$  là  $\gamma = 1,30$ , nhiệt dung riêng  $c_p = 0,202 \text{ cal/(g}^\circ\text{C)}$ .

*Hướng dẫn.* Sử dụng phương trình Becnuli.

**2.11.** Không khí bị nén trong một bình lớn ở nhiệt độ  $T_1 = 273\text{K}$  được phun vào khí quyển qua một ống, ở đầu ống nó có vận tốc  $v = 400\text{m/s}$ . Tìm nhiệt độ  $T_2$  của không khí thoát ra ở cuối ống và áp suất  $P_1$  trong bình. Coi quá trình thoát khí là đoạn nhiệt.

**2.12.** Tìm nhiệt độ cuối cùng  $T_2$  và giới hạn trên của vận tốc  $v$  của luồng hơi nước nóng, phun ra từ bình chứa qua vòi phun vào khí quyển. Hơi nước trong bình ở nhiệt độ  $T_2 = 600\text{K}$ , áp suất  $P_1 = 5\text{atm}$ , áp suất không khí bên ngoài  $P_2 = 1\text{atm}$ . Hơi nước nóng được coi là khí lý tưởng có nhiệt dung phân tử  $C_p = 4R$ .

**2.13.** Giả thiết nhiệt độ cháy của nhiên liệu động cơ tên lửa là  $T = 3000\text{K}$ , khối lượng mol trung bình của sản phẩm cháy là  $\mu = 30\text{g/mol}$  và sự thoát khí cháy diễn ra đoạn nhiệt trong chân không. Khối lượng khí xuất phát của tên lửa một tầng  $M_0$  phải lớn hơn khối lượng cuối cùng  $M$  bao nhiêu lần để tên lửa đạt vận tốc vũ trụ cấp I  $v = 8\text{km/s}$ . Lấy nhiệt dung phân tử của các sản phẩm cháy bằng  $c_p = 8\text{cal/(mol}^\circ\text{C)}$ . Khi tính vận tốc tên lửa bỏ qua trọng lực và ma sát của không khí.

**2.14.** Khi tàu vũ trụ chứa hỗn hợp các khí amoniac và heli bằng nhau về khối lượng đang bay thì bị rò luồng khí. Vận tốc luồng khí thoát bằng bao nhiêu nếu nhiệt độ của nó  $T = 300\text{K}$ ?

**2.15.** Một bình có thành cách nhiệt chứa 5 mol khí lý tưởng ( $\gamma = \frac{4}{3}$ ) ở áp suất lớn hơn nhiều so với áp suất khí quyển khi nhiệt độ  $T_0 = 300\text{K}$ . Người ta tháo van và xả một mol khí ra ngoài. Sau đó đóng van lại. Tìm nhiệt độ cuối cùng của khí trong bình.

**2.16.** Hai bình giống nhau có thành cách nhiệt được ngăn với nhau bằng một van. Trong bình 1 chứa khí lý tưởng ở áp suất 20atm. Bình 2 được hút đến chân không sơ cấp. Sau khi mở van một lượng khí từ bình 1 phun vào bình 2. Sau đó người ta khoá van lại và đo được áp suất trong bình 2 là 320mmHg. Nhiệt độ ban đầu của khí trong bình 1 là 300K, hệ số đoạn nhiệt  $\gamma = 1,3$ . Tìm mật độ khí trong bình 2.

**2.17.** Xác định vận tốc lớn nhất mà khí đạt được khi xả đoạn nhiệt từ bình chứa có nhiệt độ tuyệt đối bằng  $T$ .

**2.18.** Tìm vận tốc xả khí lý tưởng đoạn nhiệt từ bình chứa qua một lỗ nhỏ vào chân không, nếu biết vận tốc âm thanh trong không khí bằng  $v_a$ .

**2.19\*.** Một vật (ví dụ như tàu vũ trụ) chuyển động trong khí lý tưởng với vận tốc  $v$ . Tại điểm nào trên bề mặt của vật nhiệt độ khí sẽ lớn nhất? Xác định nhiệt độ đó, nếu nhiệt độ khí xung quanh bằng  $T$ .

**2.20.** Đánh giá áp suất không khí ở điểm gần mũi tên lửa đang bay với vận tốc tương ứng với số Makhơ  $M = 5$ , nếu áp suất ở độ cao của tên lửa khoảng 0,3atm. Giả thiết quá trình nén khí là đoạn nhiệt và vận tốc của không khí so với tên lửa tại điểm gần mũi của tên lửa bằng không. Số Makhơ  $M = \frac{v_{tl}}{v_{at}}$ .

**2.21.** Xác định khoảng cách  $L$  còn nghe rõ tiếng sấm, nếu nó được tạo thành ở độ cao  $H = 4\text{km}$ . Nhiệt độ của khí quyển  $T$  giảm tuyến tính theo độ cao  $T = T_0 - \gamma z$ , trong đó nhiệt độ bề mặt trái đất  $T_0 = 300\text{K}$ ,  $\gamma = 10^{-2}\text{K/m}$ . Thành phần không khí không phụ thuộc vào độ cao và có thể coi là khí lý tưởng. Bỏ qua sự tán phát âm thanh do tính không đồng nhất của khí quyển, nguồn phát sinh sấm giả thiết là nguồn điểm.

### §3. CÁC CHU TRÌNH. TÍNH TOÁN CÔNG, NỘI NĂNG, CÁC HIỆU ỨNG NHIỆT VÀ HỆ SỐ HIỆU SUẤT

**3.1.** Về lý thuyết, tăng hệ số hiệu suất của động cơ Cárnot bằng cách nào có hiệu quả hơn: tăng nhiệt độ nguồn nóng  $T_1$  lên  $\Delta T$  và giữ nguyên nhiệt độ nguồn lạnh  $T_2$  hoặc giảm nhiệt độ nguồn lạnh  $T_2$  cùng một lượng  $\Delta T$  và giữ nguyên nhiệt độ nguồn nóng  $T_1$ ?

3.2. Động cơ nhiệt Căcnô có hệ số hiệu suất  $\eta = 40\%$  được sử dụng như một máy làm lạnh. Máy có thể chuyển nhiệt lượng  $Q$  bằng bao nhiêu từ nguồn lạnh đến nguồn nóng trong một chu kỳ, nếu mỗi chu trình làm việc nó được cấp một công  $A = 10 \text{ kJ}$ ?

3.3. Một mol khí lý tưởng đơn nguyên tử ( $\gamma = \frac{5}{3}$ ) thực hiện một chu trình

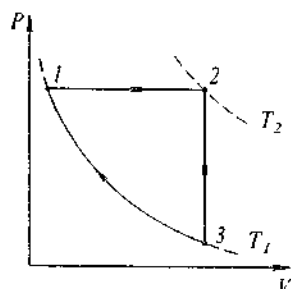
Căcnô trong động cơ nhiệt giữa hai bình nhiệt có nhiệt độ  $T_1 = 127^\circ \text{C}$  và  $T_2 = 27^\circ \text{C}$ . Thể tích nhỏ nhất của khí trong chu trình là  $V_1 = 5 \text{ l}$ , thể tích lớn nhất  $V_2 = 20 \text{ l}$ . Trong một chu trình động cơ này thực hiện một công bằng bao nhiêu? Nó nhận nhiệt lượng  $Q_1$  bằng bao nhiêu từ bình nóng trong một chu trình và nhả nhiệt lượng  $Q_2$  bằng bao nhiêu cho bình lạnh trong một chu trình?

3.4. Động cơ nhiệt Căcnô được sử dụng với vai trò máy lạnh để giữ một bình chứa ở nhiệt độ  $t_2 = -3^\circ \text{C}$ . Nhiệt độ bên ngoài là  $t_1 = 27^\circ \text{C}$ . Động cơ cần một công cơ học bằng bao nhiêu để thực hiện một chu trình, nếu vỏ bình mất nhiệt ra bên ngoài  $Q_2 = 900 \text{ cal}$ ?

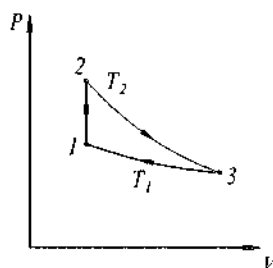
3.5. Tìm hệ số hiệu suất của chu trình tạo bởi hai quá trình đẳng nhiệt và hai quá trình đẳng áp. Giả thiết tác nhân là khí lý tưởng.

3.6. Tìm hệ số hiệu suất của chu trình với tác nhân là khí lý tưởng gồm hai đường đẳng nhiệt với nhiệt độ  $T_1$  và  $T_2$  và hai đường đẳng tích với các thể tích  $V_1$  và  $V_2$ . ( $T_1 > T_2$ ,  $V_1 > V_2$ ).

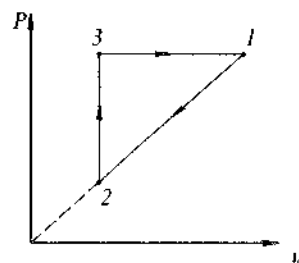
3.7. Trên hình 325 biểu diễn đồ thị một chu trình thuận nghịch của một mol khí lý tưởng trong một động cơ nhiệt nào đó. Tìm công  $A_{ik}$  của động cơ và nhiệt lượng  $Q_{ik}$  mà khí nhận được trong mỗi giai đoạn của chu trình. Tìm hệ số hiệu suất của chu trình, biểu diễn nó dưới dạng hàm của  $T_1$  và  $T_2$ . Quá trình 3-1 là đẳng nhiệt.



Hình 325



Hình 326

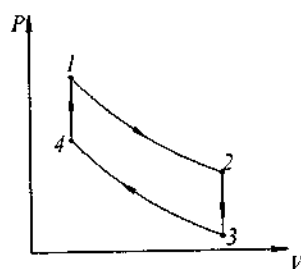


Hình 327

3.8. Một động cơ nhiệt với tác nhân là khí lý tưởng thực hiện một chu trình thuận nghịch gồm quá trình đẳng tích 1-2, đoạn nhiệt 2-3 và đẳng nhiệt 3-1 (H.326). Tìm nhiệt lượng mà tác nhân nhận được trong mỗi quá trình của chu trình. Tìm hiệu suất của động cơ dưới dạng hàm của nhiệt độ cực đại  $T_2$  và cực tiểu  $T_1$  mà khí đạt được trong chu trình này.

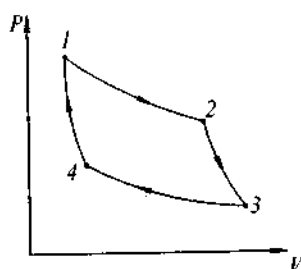
3.9. Tìm hiệu suất của chu trình thuận nghịch, được biểu diễn trên hình 327 dưới dạng hàm của nhiệt độ cực đại  $T_1$  và cực tiểu  $T_2$  của khí trong chu trình này. Động cơ thực hiện chu trình với tác nhân là khí lý tưởng. Tìm nhiệt lượng mà tác nhân nhận được trong mỗi giai đoạn của chu trình.

3.10. Tìm hiệu suất của chu trình nhiệt thuận nghịch Ôtô gồm hai quá trình đoạn nhiệt 1-2, 3-4 và hai quá trình đẳng tích 2-3, 4-1 (H. 328), nếu tác nhân là khí lý tưởng. Biểu diễn hiệu suất của chu trình thông qua nhiệt độ  $T_1$  và  $T_2$  tại các trạng thái 1 và 2.



Hình 328

3.11. Một chu trình nhiệt động thuận nghịch thực hiện với tác nhân là một mol khí lý tưởng, gồm hai quá trình đẳng nhiệt 1-2, 3-4 và hai quá trình polytropic 2-3, 4-1 với nhiệt dung của khí là  $C_0$  (H. 329). Tìm công mà khí thực hiện và nhiệt lượng mà nó nhận được trong tất cả các giai đoạn của chu trình. Tìm hiệu suất của động cơ nhiệt làm việc theo chu trình này.



Hình 329

3.12. Xác định hiệu suất của chu trình lần lượt đi qua các trạng thái 1)  $2P, V$ ; 2)  $2P, 8V$ ; 3)  $P, 4V$ ; 4)  $P, 2V$ . Tác nhân là khí lý tưởng đơn nguyên tử, tất cả các quá trình của chu trình là polytropic.

3.13. Xác định hiệu suất của chu trình lần lượt đi qua các trạng thái 1)  $8P, V$ ; 2)  $4P, 2V$ ; 3)  $2P, 2V$ ; 4)  $P, V$ . Tác nhân là khí lý tưởng đơn nguyên tử, tất cả các quá trình của chu trình là polytropic.

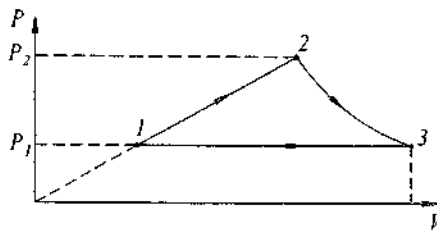
3.14. Một mol khí lý tưởng đơn nguyên tử ở áp suất  $P_1$  và thể tích  $V_1$  được nén đẳng áp đến thể tích  $V_2 = \frac{V_1}{4}$ , tiếp đó theo quá trình polytropic chuyển đến trạng thái  $P_3 = 8P_1$  và  $V_3 = \frac{V_1}{8}$ . Sau đó khí giãn đẳng áp đến thể tích

$V_4 = \frac{V_1}{4}$ . Cuối cùng khí theo đường polytropic trở về trạng thái ban đầu.

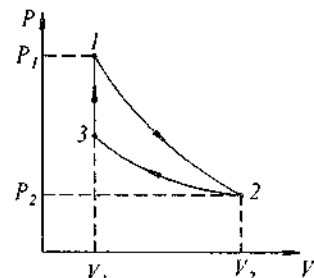
Tìm hiệu suất của chu trình.

**3.15.** Tìm hiệu suất của một chu trình gồm các quá trình polytropic 1-2 ( $P \propto V$ ), đoạn nhiệt 2-3 và đẳng áp 3-1, nếu tác nhân là khí lý tưởng đơn nguyên tử và tỷ số giữa áp suất lớn nhất và nhỏ nhất trong chu trình  $\frac{P_2}{P_1} = 2$  (H. 330).

**3.16.** Chu trình thực tế của động cơ đốt trong có thể thay thế bằng chu trình kín lý tưởng gồm hai đường đẳng áp với thể tích  $V_1$  và  $V_2$  và hai đường đoạn nhiệt. Hiệu suất của động cơ đó thay đổi bao nhiêu lần, nếu hệ số nén  $\alpha = \frac{V_1}{V_2}$  tăng từ 5 lên 10? Coi tác nhân là khí lý tưởng đa nguyên tử.



Hình 330



Hình 331

**3.17.** Tìm hiệu suất của chu trình (H. 331) gồm các quá trình polytropic 1-2, đẳng nhiệt 2-3, và đẳng tích 3-1. Tỷ lệ áp suất  $\frac{P_1}{P_2} = 8$ , tỷ lệ thể tích  $\frac{V_2}{V_1} = 2$ . Tác nhân là khí lý tưởng đơn nguyên tử.

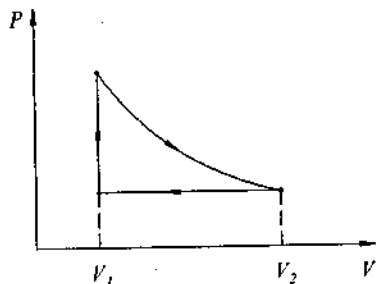
**3.18.** Chu trình làm việc của động cơ đốt trong có thể biểu diễn gần đúng bằng một đường đoạn nhiệt, một đường đẳng áp và một đường đẳng tích. Xác định suất tiêu hao nhiên liệu (kg/h) của động cơ trên một kW công suất có ích (H. 332). Biết rằng  $\frac{V_2}{V_1} = 8$ . Các sản phẩm nhiên liệu cháy có thể coi

là khí lý tưởng với hệ số đoạn nhiệt  $\gamma = \frac{4}{3}$ . Năng suất tỏa nhiệt của nhiên liệu là  $4 \cdot 10^7$  J/kg.

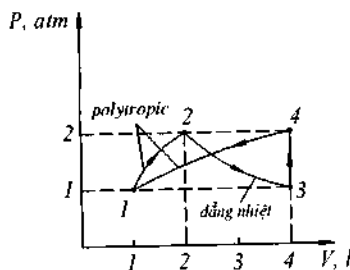
**3.19.** Khí lý tưởng lưỡng nguyên tử thực hiện chu trình được biểu diễn trên hình 333. Tìm giá trị của công toàn phần và tính hiệu suất của chu trình.

**3.20.** Một máy lạnh với tác nhân là khí lý tưởng đa nguyên tử làm việc theo chu trình gồm các quá trình giãn nở đoạn nhiệt, đun nóng đẳng tích và nén đẳng nhiệt (H. 334). Hệ số nén 1:4. Cần tiêu tốn một lượng điện năng bằng

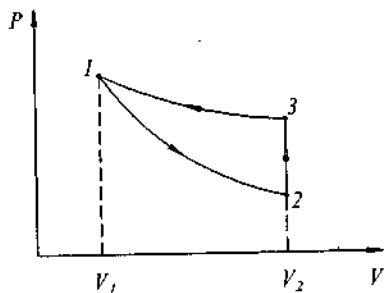
bao nhiêu để máy làm lạnh một lít nước từ  $t_1 = 25^0 C$  đến  $t_2 = 5^0 C$ ? Coi động cơ là lý tưởng, bỏ qua mất mát do truyền nhiệt cho buồng lạnh.



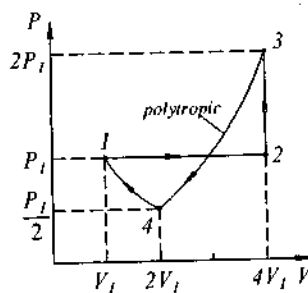
Hình 332



Hình 333



Hình 334



Hình 335

**3.21.** Một hệ nhiệt động có tác nhân là khí lý tưởng lưỡng nguyên tử thực hiện quá trình khép kín thuận nghịch được biểu diễn trên hình 335. Tìm hiệu suất chu trình, biết rằng tất cả các quá trình đều là polytropic; cụ thể 1-2 là đẳng áp, 2-3 là đẳng tích, 3-4 là polytropic, 4-1 là đẳng nhiệt.

**3.22.** Một mol khí lý tưởng đơn nguyên tử từ trạng thái ban đầu 1 với nhiệt độ 100K, giãn nở qua một tuabin vào một bình rỗng, chuyển sang trạng thái 2 và thực hiện một công. Quá trình biến đổi này diễn ra không thu và tỏa nhiệt. Sau đó khí được nén trong hai quá trình khi quay về trạng thái 1. Ban đầu khí được nén trong quá trình 2-3, khi áp suất là hàm bậc nhất của thể tích, và sau đó nén trong quá trình đoạn nhiệt chuẩn tĩnh 3-1. Tìm công do khí thực hiện khi giãn nở qua tuabin trong quá trình 1-2, nếu khi nén trong các quá trình 2-3-1 tốn một công là 1091J. Biết rằng  $T_2 = T_3$ ;  $V_2 = 2V_3$ .

**3.23.** Một mol khí lý tưởng đơn nguyên tử ở thể tích  $V_1$  và áp suất  $P_1$  giãn nở đẳng áp đến thể tích  $2V_1$ , sau đó nén trong quá trình polytropic đến thể tích  $\frac{V_1}{2}$  và áp suất  $\frac{P_1}{4}$ , tiếp theo là giãn nở đẳng nhiệt đến thể tích ban đầu  $V_1$ . Chu trình kết thúc khi tăng áp suất ở thể tích không đổi. Tìm hiệu suất của chu trình.

**3.24.** Một động cơ nhiệt lý tưởng làm việc theo chu trình lạnh giữa bình chứa nước sôi ( $100^{\circ}\text{C}$ ) và nước đá đang tan ( $0^{\circ}\text{C}$ ). Công tiêu thụ bằng bao nhiêu nếu trong bình nóng có 1kg nước hoá hơi? Lượng nước đá được tạo thành ở bình lạnh là bao nhiêu? Trong điều kiện các bình được giữ ở áp suất không đổi, nhiệt hoá hơi riêng của nước  $\lambda = 2260\text{kJ/kg}$ , nhiệt nóng chảy riêng của nước đá  $q = 335\text{kJ/kg}$ .

**3.25.** Tính công lớn nhất có thể nhận được từ động cơ nhiệt hoạt động tuần hoàn có nguồn nóng là  $m_1 = 1\text{kg}$  nước ở nhiệt độ ban đầu  $T_1 = 373\text{K}$ , nguồn lạnh là  $m_2 = 1\text{kg}$  nước đá ở nhiệt độ  $T_2 = 273\text{K}$ , tại thời điểm tất cả nước đá đang tan. Nhiệt độ của nước khi đó bằng bao nhiêu? Nhiệt nóng chảy riêng của nước đá  $q = 80\text{kcal/kg}$ . Bỏ qua sự phụ thuộc của nhiệt dung của nước vào nhiệt độ.

**3.26.** Tính công lớn nhất có thể nhận được từ động cơ nhiệt hoạt động tuần hoàn có nguồn nóng là  $m_1 = 1\text{kg}$  hơi bão hoà ở nhiệt độ ban đầu  $T_1 = 373\text{K}$ , nguồn lạnh là  $m_2 = 10\text{kg}$  nước đá ở nhiệt độ  $T_2 = 273\text{K}$ , tại thời điểm tất cả hơi nước ngưng tụ. Nhiệt độ của nước trong bình lạnh bằng bao nhiêu? Nhiệt hoá hơi riêng của nước (ở  $373\text{K}$ ) bằng  $\lambda = 539\text{kcal/kg}$ . Bỏ qua sự phụ thuộc của nhiệt dung của nước vào nhiệt độ.

**3.27.** Trong máy lạnh lý tưởng người ta làm đông nước trong khay đá, còn nhiệt lượng được truyền cho nước trong một bình có khối lượng nước  $M = 10\text{kg}$  ở nhiệt độ ban đầu  $t_1 = 20^{\circ}\text{C}$ . Bao nhiêu đá sẽ được tạo thành trong khay đá từ nước có nhiệt độ ban đầu  $t_0 = 0^{\circ}\text{C}$  trong khoảng thời gian khi nước trong bình được làm nóng đến  $t_2 = 100^{\circ}\text{C}$ ? Bỏ qua nhiệt dung của bình. Nhiệt nóng chảy riêng của nước đá  $q = 80\text{kcal/kg}$ . Bỏ qua sự phụ thuộc của nhiệt dung của nước vào nhiệt độ.

**3.28.** Một mol nước được làm lạnh từ  $25^{\circ}\text{C}$  đến  $0^{\circ}\text{C}$  và đóng băng. Tất cả nhiệt sinh ra được truyền cho một máy lạnh làm việc theo chu trình thuận nghịch và máy lại truyền cho một mol nước khác làm cho nhiệt độ của nó tăng lên từ  $25^{\circ}\text{C}$  đến  $100^{\circ}\text{C}$ . Xác định lượng nước hoá hơi và công mà máy lạnh đã thực hiện. Nhiệt hoá hơi riêng của nước ở  $100^{\circ}\text{C}$  là  $\lambda = 41\text{kJ/mol}$ , nhiệt nóng chảy riêng của nước đá ở  $0^{\circ}\text{C}$  là  $q = 6\text{kJ/mol}$ . Giả thiết nhiệt dung của nước không phụ thuộc vào nhiệt độ.

**3.29.** Nhiệt độ không đổi  $18^{\circ}\text{C}$  trong phòng được giữ bằng một lò sưởi điện công suất  $500\text{W}$ . Nhiệt độ ngoài trời là  $-21^{\circ}\text{C}$ . Để duy trì nhiệt độ này trong phòng có thể thay lò sưởi điện bằng một bơm nhiệt (động cơ nhiệt làm việc theo chu trình của máy lạnh). Bơm nhiệt sẽ tiêu thụ công suất điện năng tối thiểu bằng bao nhiêu để nó có hiệu suất lớn nhất có thể?

**3.30.** Để duy trì nhiệt độ không thay đổi trong phòng  $21^{\circ}\text{C}$  người ta sử dụng máy điều hoà nhiệt độ, nhiệt độ không khí ngoài trời là  $42^{\circ}\text{C}$ . Hỏi cần phải tăng công suất tiêu thụ điện năng của máy điều hoà nhiệt độ lên bao nhiêu, để sau khi bật trong phòng một bóng đèn công suất  $N = 150\text{W}$  thì nhiệt độ trong phòng vẫn giữ nguyên? Giả thiết máy điều hoà làm việc với hiệu suất lớn nhất có thể.

**3.31.** Một máy lạnh lý tưởng làm việc trong điều kiện khi nhiệt độ ngoài trời lớn gấp hai lần nhiệt độ trong khoang lạnh. Sau đó nhiệt độ ngoài trời tăng lên 10% trong khi nhiệt độ của khoang lạnh không đổi. Cần phải tăng công suất tiêu thụ của máy lạnh lên bao nhiêu để vận tốc tạo nước đá trong khoang lạnh được giữ nguyên?

**3.32.** Không khí chứa trong một bình kín cách nhiệt thể tích  $V = 100\text{m}^3$  là nguồn nóng của một máy lạnh lý tưởng, tiêu thụ công suất  $N = 100\text{W}$ . Nhiệt độ ban đầu của không khí  $T_{\text{kh}} = 300\text{K}$ , áp suất ban đầu  $P = 1\text{atm}$ . Nhiệt độ của buồng lạnh  $T_{\text{hl}} = 273\text{K}$ . Đánh giá thời gian máy lạnh phải hoạt động để nhiệt độ không khí trong thể tích  $V$  tăng lên  $\Delta T = 1\text{K}$ ?

**3.33.** Có  $\nu$  mol nước đá ở nhiệt độ  $t_0 = 0^{\circ}\text{C}$  và nhiệt độ môi trường xung quanh là  $T$ . Tìm công suất lớn nhất mà động cơ nhiệt lý tưởng có thể thực hiện được trong điều kiện trên.

**3.34.** Có thể thực hiện một công bằng bao nhiêu nếu có một tảng băng thể tích  $V = 1\text{km}^3$  làm nguồn lạnh và đại dương là nguồn nóng? Nhiệt nóng chảy riêng của nước đá  $q = 335\text{kJ/kg}$ , khối lượng riêng của nó  $\rho = 0,9\text{g/cm}^3$ .

**3.35.** Khí quyển của Trái Đất có thể xem như một động cơ nhiệt khổng lồ, trong đó vùng xích đạo đóng vai trò nguồn nóng, các vùng cực đóng vai trò nguồn lạnh, còn nguồn năng lượng là bức xạ Mặt Trời. Giả thiết luồng năng lượng toàn phần của Mặt Trời chiếu lên Trái Đất bằng  $1,7 \cdot 10^{17}\text{W}$ , còn hiệu suất của động cơ nhiệt nói trên nhỏ hơn một bậc so với hiệu suất cực đại có thể. Đánh giá công suất trung bình của gió trên  $1\text{km}^2$  bề mặt Trái Đất.

**3.36.** Xác định công suất lớn nhất có thể nhận được từ một thiết bị tuần hoàn sử dụng năng lượng nhiệt của đại dương tại vùng có vận tốc dòng chảy  $u \approx 0,1\text{m/s}$ . Giả thiết rằng, lớp bề mặt chiều sâu  $h \approx 1\text{km}$  có nhiệt dư  $\Delta T \approx 20\text{K}$ . Chiều rộng của thiết bị theo hướng vuông góc với dòng chảy,  $L \approx 1\text{km}$ .

**3.37.** Động cơ của máy lạnh lý tưởng phải thực hiện một công tối thiểu bằng bao nhiêu để khi nó làm việc trong môi trường có nhiệt độ  $T$ , nó làm lạnh  $\nu$  mol nước đến nhiệt độ  $t_0 \approx 0^{\circ}\text{C}$  và đóng băng hoàn toàn?



**3.38.** Tác nhân của một động cơ nhiệt thực hiện chu trình Cárnot giữa hai quá trình đẳng nhiệt có nhiệt độ  $T$  và  $T_1$ . Sự trao đổi nhiệt giữa nguồn nóng có nhiệt độ  $T_2 = 1250\text{K}$  với tác nhân khi  $T < T_2$  được thực hiện do sự truyền nhiệt theo quy luật  $a(T_2 - T)$ , trong đó  $a = 1\text{kW/K}$ . Sự trao đổi nhiệt giữa tác nhân với nguồn lạnh được thực hiện khi nhiệt độ nguồn lạnh  $T_1 = 200\text{K}$ . Giả thiết độ dài của các quá trình đẳng nhiệt là như nhau, còn độ dài của các quá trình đoạn nhiệt là vô cùng bé. Tìm nhiệt độ  $T$  để công suất động cơ đạt cực đại và tìm giá trị  $N_{\max}$  của nó.

**3.39.** Tác nhân của một động cơ nhiệt thực hiện chu trình Cárnot giữa hai quá trình đẳng nhiệt có nhiệt độ  $T$  và  $T_1$ . Sự trao đổi nhiệt giữa tác nhân và nguồn lạnh ở nhiệt độ  $T_2 = 200\text{K} < T$  được thực hiện bằng sự truyền nhiệt theo quy luật  $a(T - T_2)$ , trong đó  $a = 1\text{kW/K}$ . Sự trao đổi nhiệt giữa tác nhân và nguồn nóng diễn ra khi nhiệt độ nguồn nóng  $T_1 = 800\text{K}$ . Giả thiết độ dài của các quá trình đẳng nhiệt là như nhau, còn độ dài của các quá trình đoạn nhiệt là vô cùng bé. Tìm nhiệt độ  $T$  để công suất  $N$  của động cơ đạt cực đại và tìm giá trị  $N_{\max}$  của nó.

**3.40.** Xác định giá thành làm  $1\text{kg}$  đá trong tủ lạnh dân dụng với nhiệt độ của chất hoá hơi Freon  $-12^\circ\text{C}$  và bộ phận tỏa nhiệt  $+40^\circ\text{C}$ . Giả thiết giá  $1\text{kWh}$  điện đã biết.

**3.41\*.** Xét một chu trình Cárnot vô cùng nhỏ và sử dụng định lý Cárnot để chứng minh rằng, nội năng và nhiệt dung của một vật đẳng hướng và đồng nhất về phương diện vật lý thỏa mãn các hệ thức

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P; \quad \left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}\right)_V.$$

Sử dụng các hệ thức này và phương trình trạng thái của khí lý tưởng chứng minh rằng, nội năng và nhiệt dung của khí lý tưởng chỉ phụ thuộc vào nhiệt độ mà không phụ thuộc vào thể tích mà khối khí đó chiếm chỗ.

**3.42\*.** Entalpi hay là hàm nhiệt của một vật đẳng hướng và đồng nhất về mặt vật lý là hàm của trạng thái được xác định bởi  $I = U + PV$ . Xét một chu trình Cárnot vô cùng bé và áp dụng định lý Cárnot, hãy chứng minh rằng entalpi  $I$  và nhiệt dung  $C_P$  thỏa mãn các hệ thức:

$$\left(\frac{\partial I}{\partial P}\right)_T = V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P; \quad \left(\frac{\partial C_P}{\partial P}\right)_T = -T\left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_P.$$

## §4. ENTRÔPI. CÁC QUÁ TRÌNH THUẬN NGHỊCH VÀ KHÔNG THUẬN NGHỊCH

**4.1\*.** Ý tưởng lò sưởi động do Thomson phát minh (1952) như sau: Nhiên liệu được đốt cháy trong buồng đốt của động cơ nhiệt làm chạy máy lạnh. Máy lạnh lấy nhiệt từ nguồn tự nhiên (ví dụ nước dưới đáy ao, hồ, ...) và truyền cho nước trong hệ thống sưởi. Đồng thời nước trong hệ thống sưởi đồng thời đóng vai trò nguồn lạnh của động cơ nhiệt. Xác định nhiệt lượng lý thuyết (bỏ qua mất mát) mà căn nhà được sưởi ấm nhận được khi đốt 1kg than đá với các điều kiện cho sau đây: Năng suất toả nhiệt của than đá  $q = 8000 \text{ kcal/kg}$ ; nhiệt độ trong nồi hơi của máy hơi nước  $t_1 = 210^\circ \text{C}$ . Nhiệt độ nước trong hệ thống sưởi  $t_2 = 60^\circ \text{C}$ , nhiệt độ nước đáy hồ  $t_3 = 15^\circ \text{C}$ .

**4.2.** Người ta tăng áp suất bên ngoài tác dụng lên nước, đồng thời truyền hoặc thu nhiệt sao cho thể tích nước không đổi. Nước nóng lên hay lạnh đi nếu nhiệt độ ban đầu của nước:

- 1) nhỏ hơn  $4^\circ \text{C}$ ;
- 2) lớn hơn  $4^\circ \text{C}$ .

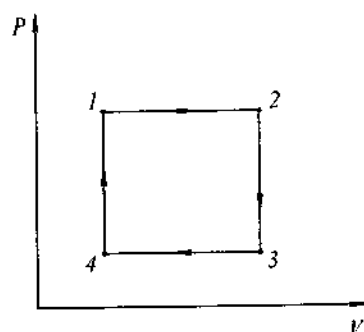
**4.3\*.** Động cơ nhiệt thực hiện một quá trình kín và trao đổi nhiệt với một số nguồn nhiệt (các nguồn nóng và các nguồn lạnh). Sử dụng bất đẳng thức Clausius, hãy chỉ ra rằng hiệu suất của động cơ này không thể lớn hơn giá trị

$$\frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max}}, \text{ trong đó } T_{\max}, T_{\min} \text{ là nhiệt độ lớn nhất và nhỏ nhất của các}$$

nguồn nhiệt mà động cơ thực hiện trao đổi nhiệt.

**4.4.** Có thể dùng nhiệt độ và entropi như các biến cơ bản đặc trưng cho trạng thái của vật. Biểu diễn chu trình Cárnot trên đồ thị có trục hoành là entropi, trục tung là nhiệt độ. Sử dụng đồ thị này để tính hiệu suất của chu trình.

**4.5.** Một chu trình gồm hai đường đẳng tích và hai đường đẳng áp (H. 336). Hãy chứng minh rằng đối với chất bất kỳ có các nhiệt dung không đổi  $C_V$  và  $C_P$  thì nhiệt độ tại các điểm 1, 2, 3, 4 liên hệ với nhau bởi hệ thức  $T_1 T_3 = T_2 T_4$ .



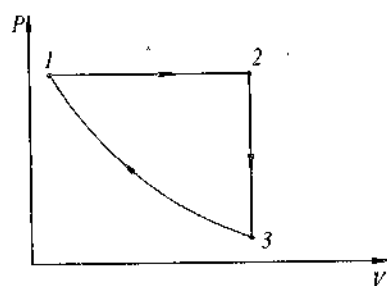
Hình 336

**4.6.** Một chu trình gồm các quá trình đẳng áp 1-2, đẳng tích 2-3 và đoạn nhiệt 3-1 (H. 337). Hãy chứng minh rằng đối với chất

bất kỳ có các nhiệt dung không đổi  $C_V$  và  $C_P$  thì nhiệt độ tại các điểm 1, 2, 3 liên hệ

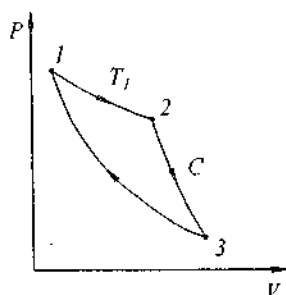
với nhau bởi hệ thức  $\frac{T_2}{T_3} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^\gamma$ , trong

đó  $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ .

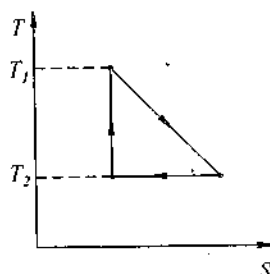


Hình 337

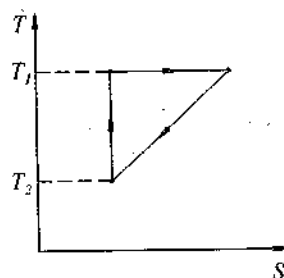
**4.7.** Xác định công của chu trình thực hiện bởi một chất bất kỳ và gồm các quá trình đẳng nhiệt 1-2, polytropic 2-3 và đoạn nhiệt 3-1 (H. 338). Biết rằng nhiệt dung của vật trong quá trình polytropic 2-3 bằng  $C$ , còn nhiệt độ trong quá trình đẳng nhiệt 1-2 và tại trạng thái 3 lần lượt bằng  $T_1$  và  $T_3$ .



Hình 338



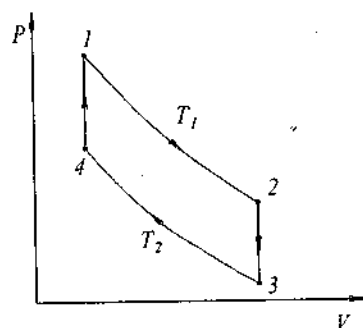
Hình 339



Hình 340

**4.8.** Các động cơ nhiệt với tác nhân là chất bất kỳ thực hiện các chu trình nhiệt động thuận nghịch được biểu diễn trên hình 339 và hình 340. Tính hiệu suất của các chu trình này qua nhiệt độ lớn nhất  $T_1$  và nhỏ nhất  $T_2$  của chất khí.

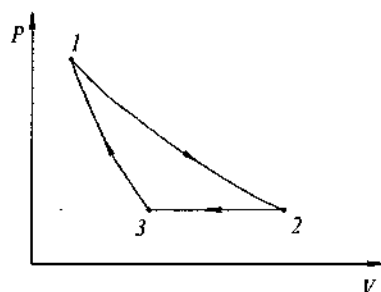
**4.9.** Một chu trình gồm hai quá trình đoạn nhiệt 1-2 và 3-4 với các nhiệt độ  $T_1$  và  $T_2$ , và hai quá trình đẳng tích 2-3, 4-1 (H. 341). Trong quá trình đẳng nhiệt với nhiệt độ  $T_1$  đã thu vào nhiệt lượng  $Q_1$ . Xác định công của chu trình, nếu nhiệt dung  $C_V$  của tác nhân chỉ phụ thuộc vào nhiệt độ chứ không phụ thuộc vào thể tích.



Hình 341

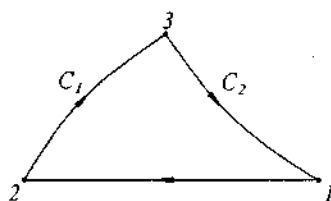
**4.10.** Một chu trình thuận nghịch gồm quá trình giãn nở đẳng nhiệt, quá trình nén đẳng tích và nén đoạn nhiệt (H. 342). Xác định hiệu suất của chu trình nếu tỷ số giữa nhiệt độ lớn nhất và nhiệt độ nhỏ nhất bằng  $\alpha$ . Phương trình trạng thái của tác nhân không được cho trước, nhưng biết rằng nội năng

chỉ phụ thuộc vào nhiệt độ. Nhiệt dung  $C_V$  và  $C_P$  là các đại lượng không đổi.



Hình 342

**4.11.** Hệ nhiệt động với tác nhân bất kỳ thực hiện một chu trình gồm quá trình giãn nở đẳng nhiệt ở nhiệt độ  $T_1$ , quá trình nén đẳng áp và nén đoạn nhiệt. Nhiệt độ tại điểm giao giữa quá trình đẳng tích và quá trình đoạn nhiệt là  $T_2$ . Nhiệt dung  $C_P$  trong quá trình đẳng áp không đổi. Tính công  $A$  mà hệ thực hiện trong chu trình này.



Hình 343

**4.12.** Hệ nhiệt động với tác nhân bất kỳ thực hiện một chu trình gồm các quá trình polytropic 2-3 và 3-1 và quá trình đoạn nhiệt 1-2 (H. 343). Nhiệt dung của hệ  $C_1$  và  $C_2$  trong các quá trình polytropic liên hệ với nhau bởi hệ thức  $C_2 = -C_1$ . Nhiệt độ tại các điểm giao của các đường

polytropic với đường đoạn nhiệt bằng  $T_1$  và  $T_2$ . Tính công  $A$  mà hệ thực hiện được trong quá trình kín nói trên.

**4.13\*.** Một hệ nhiệt động bất kỳ biến đổi chuẩn tĩnh từ trạng thái cân bằng 1 đến trạng thái cân bằng 2 bằng hai cách. Theo phương án thứ nhất hệ được làm lạnh đoạn nhiệt đến nhiệt  $T_0$ , sau đó nhận nhiệt đẳng nhiệt và cuối cùng, chuyển đoạn nhiệt sang trạng thái cân bằng 2. Theo phương án thứ hai, hệ chuyển trạng thái theo đường bất kỳ. Tuy nhiên trong mỗi đoạn của đường này hệ đều thu nhiệt, còn nhiệt độ của nó luôn lớn hơn  $T_0$ . Chứng minh rằng để chuyển hệ từ trạng thái cân bằng 1 sang trạng thái cân bằng 2 theo cách thứ nhất tiêu tốn ít nhiệt hơn theo cách thứ hai.

**4.14.** Một hệ nhiệt động bất kỳ biến đổi chuẩn tĩnh từ trạng thái cân bằng 1 đến trạng thái cân bằng 2 bằng hai cách. Trong trường hợp thứ nhất, ban đầu hệ biến đổi đẳng nhiệt ở nhiệt độ  $T_0$  đến một trạng thái trung gian nào đó và hấp thụ nhiệt, sau đó được làm lạnh đoạn nhiệt và chuyển sang trạng thái cân bằng 2. Trong trường hợp thứ hai hệ chuyển trạng thái theo đường bất kỳ. Tuy nhiên trong mỗi đoạn của đường này nó đều thu nhiệt, còn nhiệt độ của nó luôn thấp hơn  $T_0$ . Chứng minh rằng để chuyển hệ từ trạng thái cân bằng 1 sang trạng thái cân bằng 2 theo cách thứ nhất tiêu tốn nhiều nhiệt hơn theo cách thứ hai.

**4.15.** Chu trình thuận nghịch bao gồm chuỗi các quá trình giãn nở đoạn nhiệt, nén đẳng áp và đun nóng đẳng tích. Xác định hiệu suất, nếu độ biến

thiên lớn nhất của entropi của tác nhân trong chu trình so với nhiệt dung  $C_V$  là  $b = \frac{\Delta S_{\max}}{C_V} = 0,2$ . Phương trình trạng thái của tác nhân không được cho trước, nhưng biết rằng các nhiệt dung  $C_V$  và  $C_P$  không đổi và  $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{4}{3}$ .

**4.16.** Chu trình thuận nghịch bao gồm một chuỗi các quá trình giãn nở đoạn nhiệt, nén đẳng áp và đun nóng đẳng tích. Hãy xác định hiệu suất của chu trình nếu tỷ số giữa nhiệt độ lớn nhất và nhỏ nhất của tác nhân trong chu trình là  $a = 1,1$ . Phương trình trạng thái của tác nhân không được cho trước,

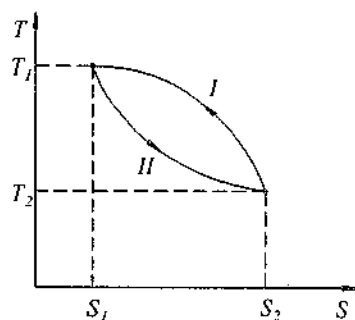
nhưng biết rằng các nhiệt dung  $C_V$  và  $C_P$  không đổi và  $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{4}{3}$ .

**4.17.** Một chu trình thuận nghịch với tác nhân bất kỳ bao gồm đun nóng polytropic, làm lạnh polytropic (cả hai quá trình đều diễn ra với sự gia tăng entropi) và khép kín bằng quá trình đẳng nhiệt. Xác định hiệu suất của chu trình, nếu tỷ số giữa các nhiệt độ tuyệt đối lớn nhất và nhỏ nhất trong chu trình là  $a = 1,2$ .

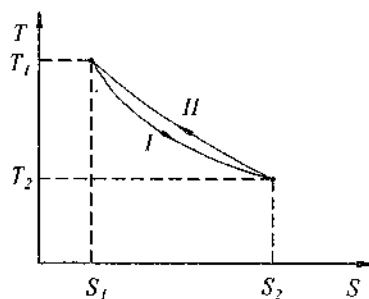
**4.18.** Chu trình dương thuận nghịch với tác nhân bất kỳ gồm các quá trình đoạn nhiệt, làm lạnh polytropic và được khép kín bằng một quá trình polytropic khác. Xác định hiệu suất của chu trình, nếu nhiệt độ tuyệt đối ở hai đầu đường của đoạn nhiệt và tại điểm giao của các đường polytropic tương ứng với tỷ lệ 1:2:1,5.

**4.19.** Một máy lạnh hoạt động theo chu trình thuận nghịch gồm hai nhánh (H. 344) quá trình I entropi giảm khi nhiệt độ tăng như hàm bậc nhất của bình phương nhiệt độ tuyệt đối và quá trình polytropic II. Không cho trước phương trình trạng thái của tác nhân. Xác định nhiệt lượng nhận được từ buồng lạnh khi tốn một công 1kJ, nếu tỷ số giữa nhiệt độ tuyệt đối lớn nhất và nhỏ nhất của tác nhân trong chu trình là  $a = 1,2$ .

**4.20.** Một máy làm lạnh hoạt động theo chu trình thuận nghịch gồm hai nhánh (H. 345) quá trình polytropic I và quá trình II, trong đó entropi của tác nhân giảm khi nhiệt độ



Hình 344



Hình 345

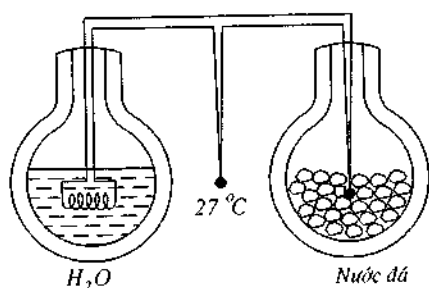
tăng như hàm bậc nhất của  $\sqrt{T}$ . Không cho trước phương trình trạng thái của tác nhân, xác định nhiệt lượng nhận được từ khoang lạnh khi tốn một công 1kJ, nếu tỷ số giữa nhiệt độ tuyệt đối lớn nhất và nhỏ nhất của tác nhân trong chu trình là  $\alpha = 1,1$ .

4.21. Một quá trình thuận nghịch khép kín chuyển hoá nhiệt thành công bao gồm: quá trình 1 – 2, trong đó nhiệt dung tăng tỷ lệ thuận với nhiệt độ từ giá trị  $C_1 = 20\text{J}/(\text{K}\cdot\text{mol})$  đến  $C_2 = 50\text{J}/(\text{K}\cdot\text{mol})$ ; quá trình đoạn nhiệt 2 – 3 và quá trình đẳng nhiệt 3 – 1. Tính hiệu suất của chu trình. Không cho trước phương trình trạng thái.

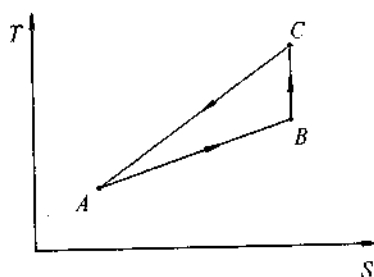
4.22. Một chu trình thuận nghịch gồm hai nhánh – quá trình polytropic I và quá trình II, trong đó entropi của tác nhân tăng tuyến tính theo nhiệt độ. Xác định nhiệt dung của quá trình polytropic I và hiệu suất của chu trình nếu nhiệt dung lớn nhất và nhỏ nhất trong quá trình II lần lượt bằng  $45\text{J}/(\text{K}\cdot\text{mol})$  và  $35\text{J}/(\text{K}\cdot\text{mol})$ . Không cho trước phương trình trạng thái của tác nhân.

4.23. Một chu trình thuận nghịch gồm quá trình polytropic I và quá trình II, trong đó entropi của tác nhân tăng tuyến tính theo nhiệt độ. Xác định hiệu suất của chu trình, nếu độ biến thiên cực đại entropi của tác nhân trong chu trình so với nhiệt dung trong quá trình polytropic (tức là  $\frac{\Delta S}{C_1}$ ) là  $a = \frac{1}{4}$ .

Không cho trước phương trình trạng thái và nhiệt dung trong quá trình polytropic.



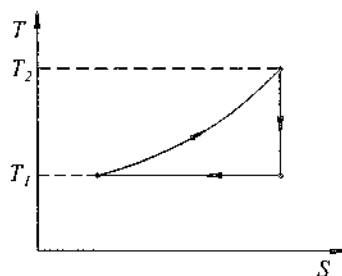
Hình 346



Hình 347

4.24. Ở một trong hai bình cách nhiệt có 1kg nước đá ở nhiệt độ  $0^\circ\text{C}$ , trong bình còn lại chứa 1kg nước ở  $0^\circ\text{C}$ . Nhúng vào bình chứa nước một sợi dây nung, nó làm khép kín mạch của cặp nhiệt điện (H. 346). Một đầu hàn của cặp nhiệt điện nhúng trong nước đá, đầu còn lại giữ ở nhiệt độ  $27^\circ\text{C}$ . Bỏ qua điện trở của dây dẫn và các mối hàn so với điện trở dây nung và bỏ qua độ dẫn nhiệt của các dây dẫn. Hỏi nước nóng lên bao nhiêu độ khi đá ở bình còn lại tan hết? Nhiệt dung riêng của nước  $c = 4,2\text{kJ}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$  và nhiệt nóng chảy của đá  $q = 335\text{kJ}/\text{kg}$  giả thiết không phụ thuộc vào nhiệt độ.

4.25. Trong hệ toạ độ  $T-S$  (H. 347) chu trình được biểu diễn bằng tam giác  $ABC$  có cạnh  $BC$  là đường đoạn nhiệt. Nhiệt độ tại các đỉnh của tam giác lần lượt là:  $T_A = 300\text{K}$ ,  $T_B = 399\text{K}$ ,  $T_C = 400\text{K}$ . Công bên ngoài tác dụng lên tác nhân  $A_H = 1\text{J}$ . Tính nhiệt lượng truyền cho bình lạnh, tức nhiệt lượng toả ra trên đoạn  $CA$ .



Hình 348

4.26. Tính hiệu suất của chu trình biểu diễn trên hình 348. Tất cả các quá trình là polytropic;  $T_2 = 2T_1$ . Không cho trước phương trình trạng thái.

4.27\*. Chứng minh rằng nếu tại tất cả các điểm trên đường đẳng nhiệt hệ số giãn nở nhiệt bằng không thì đường đẳng nhiệt đó trùng với đường đoạn nhiệt.

4.28. Trong chu trình Cárnot, người ta chọn nước ở  $4^\circ\text{C}$  làm nguồn lạnh. Do hệ số giãn nở nhiệt ở nhiệt độ này bằng 0, nên để thực hiện chu trình Cárnot không cần thiết phải truyền nhiệt cho nguồn lạnh (xem bài trước), tức là hiệu suất của chu trình bằng 1. Nhận định trên sai lầm ở điểm nào?

4.29. Động cơ nhiệt làm việc theo chu trình máy lạnh giữa bình chứa nước ở  $11^\circ\text{C}$  và khoang lạnh ở nhiệt độ  $-10^\circ\text{C}$ . Có thể lấy đi từ khoang lạnh một nhiệt lượng lớn nhất bằng bao nhiêu, nếu tốn một công bằng  $1\text{kJ}$ ? Khi đó entropi của bình chứa nước và khoang lạnh thay đổi như thế nào?

4.30. Hãy chỉ ra rằng đối với chất bất kỳ thì đường đoạn nhiệt chỉ cắt đường đẳng nhiệt tại một điểm.

4.31. Hãy chỉ ra rằng đối với chất có phương trình trạng thái bất kỳ thì hai đường polytropic chỉ có thể cắt nhau tại một điểm.

4.32\*. Ta có thể nhận được công lớn nhất bằng bao nhiêu từ một hệ hai vật được làm nóng đến các nhiệt độ tuyệt đối khác nhau  $T_{10}$  và  $T_{20}$  ( $T_{10} > T_{20}$ ), nếu sử dụng hai vật này với vai trò nguồn nóng và nguồn lạnh trong động cơ nhiệt? Nhiệt dung  $C_1$  và  $C_2$  của các vật giả thiết không phụ thuộc vào nhiệt độ. Tìm nhiệt độ cuối  $T$  của các vật khi trạng thái cân bằng nhiệt giữa chúng được thiết lập.

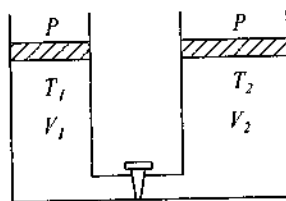
4.33\*. Xét trường hợp giới hạn của bài 4.32 khi nhiệt dung của nguồn lạnh  $C_2$  lớn vô cùng (vật nung nóng nhúng trong môi trường vô hạn có nhiệt độ  $T_{20}$  được giữ không đổi).

4.34. Xét một trường hợp giới hạn khác của bài 4.32 khi nhiệt dung của nguồn nóng  $C_1$  lớn vô cùng (vật lạnh nhúng trong môi trường nóng vô hạn có nhiệt độ  $T_{10}$  được giữ không đổi).

4.35. Có thể làm nóng một trong ba vật tự do không chịu nén có khối lượng như nhau tới nhiệt độ tối đa bằng bao nhiêu nếu ban đầu nhiệt độ của chúng là  $T_{10} = 600\text{K}$ ,  $T_{20} = 200\text{K}$ ,  $T_{30} = 600\text{K}$ ? Giả thiết không có sự trao đổi nhiệt môi trường ngoài và sự trao đổi nhiệt giữa ba vật được thực hiện bằng bất kỳ phương thức vật lý nào.

4.36. Trong một bình cách nhiệt thể tích không đổi có 1 mol không khí ở nhiệt độ  $T_0 = 300\text{K}$ . Tìm công tối thiểu để làm lạnh một nửa lượng khí trên đến nhiệt độ  $T_1 = \frac{T_0}{2}$ . Coi không khí là khí lý tưởng. Không tính đến nhiệt dung của thành bình. Nhiệt lượng toả ra của một nửa lượng khí này bằng bất kỳ cách nào cũng chỉ có thể truyền cho nửa lượng khí còn lại.

4.37. Hai xilanh chứa cùng một loại khí lý tưởng thông với nhau bằng một ống nhỏ; cả hai xilanh được đậy kín bằng pítông giữ khí ở áp suất không đổi 3atm (H.349). Lúc đầu hai xilanh được tách riêng, các giá trị thể tích và nhiệt độ của chúng bằng  $V_1 = 1\text{l}$ ,  $V_2 = 2\text{l}$ ,  $T_1 = 300\text{K}$ ,  $T_2 = 600\text{K}$ .

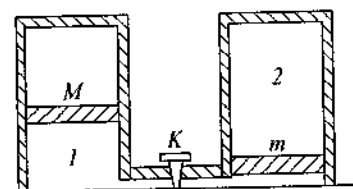


Hình 349

Sau khi mở van cho hai xilanh thông nhau diễn ra sự trao đổi nhiệt. Tìm nhiệt độ cuối, công thực hiện và độ biến thiên entropi. Biết rằng khí lý tưởng lưỡng nguyên tử, quá trình là đoạn nhiệt.

4.38. Khí được giãn nở đoạn nhiệt nhưng không cân bằng từ trạng thái cân bằng 1 ban đầu đến trạng thái cuối 2 cũng cân bằng. Khi đó khí thực hiện một công. Sau đó khí được nén chuẩn tĩnh đến trạng thái ban đầu 1: đầu tiên nén đẳng nhiệt, sau đó nén đoạn nhiệt. Công nén khí lớn hơn công do khí thực hiện khi giãn nở một lượng  $A = 20\text{J}$ . Nhiệt độ khí ở trạng thái 2 bằng  $250\text{K}$ . Tìm độ biến thiên entropi của khí khi chuyển từ trạng thái 1 đến trạng thái 2.

4.39. Hai bình cách nhiệt giống nhau được nối với nhau bằng một ống nhỏ ngắn, cách nhiệt có van K được khoá ở thời điểm ban đầu (H. 350). Trong bình 1 phía dưới pítông khối lượng M có chứa khí lý tưởng đơn nguyên tử có phân tử lượng  $\mu$  ở nhiệt độ  $T_0$ , còn trong bình 2 không có khí và pítông khối lượng  $m = \frac{M}{2}$  nằm ở đáy bình.



Hình 350

Phần thể tích giữa pítông và nắp bình của cả hai bình đều là chân không. Khi mở van K khí từ



bình 1 xả sang bình 2 và đẩy piston  $m$  chuyển động lên trên. Bỏ qua các lực ma sát. Tính nhiệt độ  $T$  của khí sau khi cân bằng được thiết lập. Piston trong bình 2 không nâng lên chạm nắp bình. Giả thiết  $\frac{\nu\mu}{M} = 0,1$ . Tính độ biến thiên entropi  $\Delta S$ .

**4.40.** Khí lý tưởng đơn nguyên tử nằm dưới piston trong một xilanh đoạn nhiệt. Khối lượng tải trên piston xác định áp suất khí, đột ngột được tăng lên hai lần. Hỏi entropi của một phân tử tăng lên bao nhiêu sau khi trạng thái cân bằng mới được thiết lập.

**4.41.** Trong một quá trình polytropic, áp suất và thể tích của một lượng oxy xác định thay đổi từ  $P_1 = 4\text{atm}$  và  $V_1 = 1\text{l}$  đến  $P_2 = 1\text{atm}$  và  $V_2 = 2\text{l}$ . Nhiệt độ tại thời điểm ban đầu của quá trình  $T_1 = 500\text{K}$ . Ôxi đã nhận từ môi trường ngoài nhiệt lượng bằng bao nhiêu? Entropi và nội năng của khí thay đổi đến mức nào?

**4.42.** Hai bình chứa mỗi bình có thể tích  $V = 1\text{l}$  được nối với nhau bằng một ống có van. Trong một bình có chứa hydro ở áp suất  $1\text{atm}$  và nhiệt độ  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ , trong bình thứ hai chứa heli ở áp suất  $3\text{atm}$  và nhiệt độ  $t_2 = 100^\circ\text{C}$ . Tìm độ biến thiên entropi của hệ sau khi mở van và đạt đến trạng thái cân bằng. Giả thiết các thành bình và ống cách nhiệt hoàn toàn với môi trường xung quanh.

**4.43\*.** Trong thể tích  $V_1 = 3\text{l}$  có  $\nu_1 = 0,5\text{mol}$  khí oxy, còn trong thể tích  $V_2 = 2\text{l}$  có  $\nu_2 = 0,5\text{mol}$  khí nitơ đều ở nhiệt độ  $T = 300\text{K}$ . Tìm công lớn nhất có thể sinh ra khi trộn đẳng nhiệt hai khí này trong thể tích tổng cộng  $V_1 + V_2$ .

**4.44.** Giải bài toán 4.43 với giả thiết quá trình trộn khí xảy ra đoạn nhiệt. Nhiệt độ ban đầu của khí  $T = 300\text{K}$ .

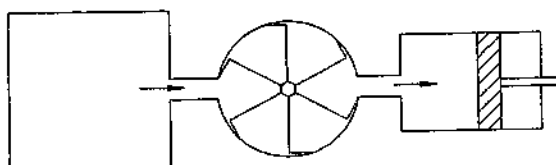
**4.45.** Một bình có các thành cách nhiệt thể tích  $2V$  được phân chia bằng piston dẫn nhiệt, sao cho tỷ lệ thể tích  $\frac{V_1}{V_2} = n$ . Trong mỗi phần của bình đều

chứa một mol khí lý tưởng có nhiệt dung  $C_V$  không phụ thuộc vào nhiệt độ. Sau khi thả piston ra, nó bắt đầu thực hiện dao động, dao động này tắt dần do ma sát trong của khí. Bỏ qua ma sát của piston vào thành bình. Tìm độ biến thiên entropi của khí trong quá trình này. Nhiệt độ ban đầu của khí ở cả hai phần của bình là như nhau.

4.46. Một bình có các thành cách nhiệt thể tích  $2V$  được chia thành hai phần bằng piston dẫn nhiệt. Trong mỗi phần của bình đều chứa một mol khí lý tưởng có nhiệt dung  $C_V$  không phụ thuộc vào nhiệt độ. Nhiệt độ ban đầu trong các thể tích bằng  $T_1$  và  $T_2$ . Sau khi thả piston ra, nó bắt đầu thực hiện dao động, dao động này tắt dần do ma sát trong của khí. Khi piston dừng hẳn nó chia bình thành hai phần theo tỷ lệ  $\frac{V_1}{V_2} = n$ . Bỏ qua ma sát của piston vào

thành bình. Tìm độ biến thiên entropi của khí trong quá trình này.

4.47. Một khí lý tưởng đơn nguyên tử có  $\nu = 10 \text{ mol}$  ở nhiệt độ  $T_1 = 300 \text{ K}$ , giãn nở đoạn nhiệt trong bình rộng qua một tuabin và thực hiện một công (không thuận nghịch) (H. 351). Sau khi trạng thái



Hình 351

cân bằng được thiết lập nhiệt độ của khí giảm xuống  $T = 200 \text{ K}$ . Sau đó khí được nén chuẩn tĩnh, lúc đầu nén đẳng nhiệt, sau đó nén đoạn nhiệt về trạng thái ban đầu. Khi nén tốn một công  $A = 15 \text{ kJ}$ . Tìm độ biến thiên entropi của khí khi giãn nở.

4.48. Một piston có thể dịch chuyển trong xilanh cứng cách nhiệt nằm ngang. Một bên của piston chứa  $\nu = 2 \text{ mol}$  mol khí lý tưởng lưỡng nguyên tử, bên kia là chân không. Giữa piston và đáy xilanh có lắp một lò xo. Tại thời điểm ban đầu piston bị giữ cố định, còn lò xo không biến dạng. Sau đó piston được thả tự do. Sau khi cân bằng được thiết lập, thể tích khí tăng lên  $n = 2$  lần. Xác định độ biến thiên entropi của khí. Bỏ qua ma sát, nhiệt dung của xi lanh, piston và lò xo. Giả thiết độ biến dạng của lò xo tuân theo định luật Hook.

4.49. Trong một xilanh cách nhiệt tiết diện ngang  $\sigma$  đặt thẳng đứng có một piston dẫn nhiệt khối lượng  $m$  được giữ sao cho nó chia xilanh thành hai phần bằng nhau. Trong mỗi phần đều chứa  $\nu$  mol cùng một loại khí lý tưởng ở áp suất  $P$  và nhiệt độ  $T$ . Gỡ chốt piston, dưới tác dụng của trọng lực nó chuyển động xuống dưới. Xác định độ biến thiên entropi  $\Delta S$  của hệ tại thời điểm cân bằng được thiết lập. Giả thiết  $P\sigma \gg mg$ .

4.50. Để đo tỷ số  $\frac{C_P}{C_V}$  bằng phương pháp Kleman – Dêzom, người ta cho

vào bình 1 mol không khí dưới áp suất  $P_1$  đang tăng, sau đó người ta mở nhanh van xả khí dư sao cho áp suất trong bình bằng áp suất khí quyển  $P_0$  rồi đóng van, và đo áp suất  $P_2$  được thiết lập trong bình sau khi nhiệt độ trong bình bằng nhiệt độ bên ngoài. Xác định độ biến thiên toàn phần

entrôpi của một mol không khí trong thí nghiệm trên. Áp suất  $P_1$  và  $P_2$  giả thiết gần với giá trị  $P_0$ .

**4.51.** Bên trong xilanh cách nhiệt với môi trường bên ngoài có một piton. Toàn bộ xilanh, piton được làm từ 1 mol chất rắn. Trong xilanh có chứa 8g heli ở nhiệt độ  $T_1 = 200\text{K}$ . Người ta nén chậm khí bằng piton tới thể tích

$V_2 = \frac{V_1}{8}$ , sao cho trong suốt quá trình nén nhiệt độ của khí và thành xilanh

luôn bằng nhau. Tìm nhiệt độ cuối và độ biến thiên entropi của hệ.

**4.52.** Tính độ biến thiên entropi trong quá trình chuyển hóa không cân bằng 1 mol nước lạnh thành đá. Nhiệt độ ban đầu và cuối cùng của hệ (nước và đá) như nhau và bằng  $t_1 = -10^0\text{C}$ . Nhiệt dung của nước và đá ở áp suất không đổi lần lượt bằng  $C_p^n = 75\text{J}/(\text{K}\cdot\text{mol})$ ;  $c_p^{\text{ice}} = 37,5\text{J}/(\text{K}\cdot\text{mol})$ . Nhiệt nóng chảy của một mol nước đá  $q = 6000\text{J/mol}$ .

**4.53.** Một lượng nước nóng  $M = 1\text{kg}$  ở áp suất  $P_0 = 760\text{mmHg}$  và có nhiệt độ  $T = 383\text{K}$ . Xác định độ biến thiên entropi của hệ khi biến đổi đoạn nhiệt không cân bằng sang trạng thái cân bằng gồm nước và hơi bão hòa ở nhiệt độ  $T_0 = 373\text{K}$  và áp suất  $P_0 = 760\text{mmHg}$ . Coi nhiệt dung riêng của nước không đổi và bằng  $c_p = 4,18\text{J}/(\text{g}\cdot\text{K})$ .

**4.54.** Hãy chứng tỏ rằng khi giãn nở chuẩn tĩnh đẳng áp một vật đồng nhất về mặt vật lý thì entropi của nó tăng nếu hệ số giãn nở nhiệt dương, và giảm nếu hệ số này âm.

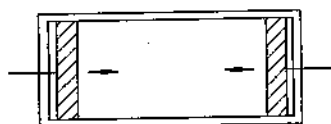
**4.55.** Hãy chứng tỏ rằng khi tăng áp suất chuẩn tĩnh lên một vật đồng nhất về mặt vật lý và giữ nguyên thể tích thì entropi của nó tăng nếu hệ số nhiệt của áp suất dương, và giảm nếu hệ số này âm.

**4.56.** Một xilanh cách nhiệt được chia thành hai phần bằng nhau bằng một piton có khối lượng không đáng kể. Ở một phía của piton chứa khí lý tưởng có khối lượng  $M$ , phân tử lượng  $\mu$  và các nhiệt dung phân tử  $C_V$  và  $C_P$  không phụ thuộc vào nhiệt độ, còn phía bên kia piton tạo thành chân không cao. Nhiệt độ và áp suất ban đầu của khí là  $T_0$  và  $P_0$ . Người ta thả piton chuyển động tự do để khí có thể lấp đầy thể tích xilanh. Sau đó người ta từ từ tăng áp suất lên piton và đưa chậm thể tích khí về giá trị ban đầu. Tìm độ biến thiên nội năng và entropi của khí trong quá trình này.

**4.57.** Tìm sự gia tăng entropi  $\Delta S$  của khí lý tưởng khối lượng  $M$ , chiếm thể tích  $V_1$  khi cho nó giãn nở vào chân không đến thể tích  $V_2$  (quá trình Gay-Lussac).

**4.58.** Tìm độ biến thiên nội năng và entropi của một mol khí lý tưởng khi giãn nở theo quá trình polytropic  $PV^n = \text{const}$  từ thể tích  $V_1$  đến  $V_2$ . Xét các trường hợp riêng là quá trình đẳng nhiệt và đoạn nhiệt. Tính các giá trị này đối với trường hợp  $n = 3$ ,  $V_1 = 1\text{l}$ ,  $V_2 = 3\text{l}$ ,  $P_1 = 20\text{atm}$ . Nhiệt lượng hấp thụ trong trường hợp này bằng bao nhiêu? Nhiệt độ trong suốt quá trình này có giá trị sao cho có thể lấy nhiệt dung phân tử  $C_V = \frac{3R}{2}$ .

**4.59.** Trong một ống kín thể tích  $V$  có chứa hỗn hợp hai lượng khí bằng nhau (H.352). Áp suất ban đầu bằng  $P$ . Ở hai đầu ống có hai piston, mỗi piston chỉ cho một loại khí đi qua. Khi dịch chuyển hai piston vào điểm giữa của ống thì hai khí được tách hoàn toàn. Tính công  $A$  thực hiện khi dịch chuyển



Hình 352

đẳng nhiệt các piston, và so sánh tỷ số  $\frac{A}{T}$  với độ biến thiên entropi.

**4.60.** Tìm độ biến thiên entropi  $\Delta S$  của 30g nước đá khi chuyển hoá thành hơi, nếu nhiệt độ ban đầu của nước đá  $-40^\circ\text{C}$ , còn nhiệt độ hơi nước  $100^\circ\text{C}$ . Các nhiệt dung của nước và của đá giả thiết không đổi, và tất cả các quá trình xảy ra ở áp suất khí quyển. Nhiệt dung riêng của nước đá  $c = 0,5\text{cal}/(\text{g}\cdot^\circ\text{C})$ .

**4.61.** Tìm độ biến thiên entropi tổng cộng  $\Delta S$  (của nước và sắt) khi nhúng 100g sắt nóng  $300^\circ\text{C}$  vào nước ở nhiệt độ  $15^\circ\text{C}$ . Nhiệt dung riêng của sắt  $c = 0,11\text{cal}/(\text{g}\cdot^\circ\text{C})$ .

**4.62.** Tìm entropi riêng  $s$  của một hệ không đồng nhất gồm chất lỏng và hơi bão hoà của nó. Giả thiết nhiệt dung của chất lỏng không phụ thuộc vào nhiệt độ.

**4.63\*.** Hai vật  $A$  và  $B$  đặt trong lớp vỏ cứng đoạn nhiệt được nung nóng đến các nhiệt độ khác nhau và được cho tiếp xúc nhiệt với nhau. Nhiệt lượng từ vật nóng hơn  $A$  truyền sang vật  $B$  cho đến khi nhiệt độ của cả hai vật bằng nhau. Hãy chứng minh rằng trong quá trình này entropi của hệ  $A + B$  tăng lên.

**4.64.** Tìm độ biến thiên entropi  $\Delta S$  của một chất khí đun nóng, nếu nhiệt dung riêng  $c$  của nó không đổi, còn hệ số nở khối bằng không.

**4.65.** Hai vật cùng khối lượng có nhiệt độ khác nhau  $T_1$  và  $T_2$  được cho tiếp xúc nhiệt với nhau. Giả thiết  $C_p = \text{const}$ . Tìm độ biến thiên entropi khi thiết lập cân bằng nhiệt ở  $P = \text{const}$ .

**4.66.** Tìm độ biến thiên entropi của một mol khí lý tưởng đơn nguyên tử khi nén polytropic đến một nửa thể tích ban đầu, nếu trong quá trình này độ biến thiên nội năng bằng một nửa công nén khí.

**4.67.** Tìm độ biến thiên entropi của một mol khí lý tưởng lưỡng nguyên tử khi giãn nở polytropic đến gấp đôi thể tích ban đầu, nếu trong quá trình này độ biến thiên nội năng bằng công của khí khi giãn nở.

**4.68.** Một bình được chia bằng vách ngăn thành hai phần bằng nhau, một phần là chân không, phần còn lại chứa 1 mol khí lý tưởng lưỡng nguyên tử. Sau khi bỏ vách ngăn khí lấp đều toàn bộ thể tích bình. Sau đó khí được nén chuẩn tĩnh về vị trí ban đầu bằng một piston cách nhiệt. Hỏi entropi và nhiệt độ của khí thay đổi như thế nào so với ban đầu?

**4.69.** Trong hai bình mỗi bình chứa một mol khí lý tưởng đơn nguyên tử khác nhau. Áp suất trong hai bình như nhau. Nhiệt độ trong bình thứ nhất là  $T_1$ , còn trong bình thứ hai là  $T_2$ . Entropi của hệ thay đổi bao nhiêu nếu hai bình được thông nhau? Kết quả thay đổi thế nào nếu hai khí giống nhau?

**4.70.** Trong hai bình mỗi bình chứa một mol khí lý tưởng khác nhau. Nhiệt độ trong hai bình như nhau. Áp suất trong bình thứ nhất là  $P_1$ , còn trong bình thứ hai là  $P_2$ . Entropi của hệ thay đổi bao nhiêu nếu thông hai bình với nhau? Kết quả thay đổi thế nào nếu hai khí giống nhau?

## §5. THỂ NHIỆT ĐỘNG

**5.1.** Trên cơ sở nguyên lý thứ hai của nhiệt động học, hãy chứng minh rằng nội năng của một lượng khí lý tưởng cho trước không phụ thuộc vào thể tích của nó mà là hàm chỉ của nhiệt độ (định luật Jun).

**5.2.** Trên cơ sở nguyên lý thứ hai của nhiệt động học, hãy chứng minh rằng entropi của một lượng khí lý tưởng cho trước không phụ thuộc vào áp suất của nó mà là hàm chỉ của nhiệt độ.

**5.3.** Tìm dạng tổng quát của phương trình trạng thái của một chất có nhiệt dung  $C_V$  không phụ thuộc vào thể tích, mà chỉ phụ thuộc vào nhiệt độ.

**5.4.** Tìm dạng tổng quát của phương trình trạng thái của một chất có nhiệt dung  $C_P$  không phụ thuộc vào áp suất, mà chỉ phụ thuộc vào nhiệt độ.

**5.5.** Ở nhiệt độ  $25^\circ\text{C}$  thể tích của một mol nước (đo bằng  $\text{cm}^3$ ) đối với áp suất từ 0 đến 1000atm được xác định bằng phương trình

$$V = a + bP + cP^2,$$

và trong khoảng áp suất này

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \alpha + \beta T,$$

trong đó các hệ số  $a = 18,066$ ,  $b = -7,15 \cdot 10^{-4}$ ,  $c = 4,6 \cdot 10^{-8}$ ,  $\alpha = 4,5 \cdot 10^{-3}$ ,  $\beta = 1,4 \cdot 10^{-6}$ . Xác định công  $A$  cần để nén một mol nước từ 0 đến 1000 atm ở  $25^\circ\text{C}$  và tìm độ biến thiên nội năng  $\Delta U$  của nó.

5.6. Sử dụng điều kiện rằng biểu thức  $X(x, y)dx + Y(x, y)dy$  là vi phân toàn chỉnh, chứng minh rằng phần tử công  $\delta A$  không thể là vi phân toàn chỉnh.

5.7. Chứng tỏ rằng nếu nội năng của một vật đồng nhất về mặt vật lý không phụ thuộc vào thể tích, mà chỉ phụ thuộc vào nhiệt độ, thì nó cũng không phụ thuộc vào áp suất. Điều đó cũng đúng cả đối với entalpi.

5.8. Như đã chứng minh trong nhiệt động học, điều kiện cần của tính ổn định của một chất đẳng hướng và đồng nhất về mặt vật lý là

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T < 0, C_V > 0.$$

Sử dụng điều kiện trên, hãy chứng minh rằng đối với chất bất kỳ  $C_P > 0$  và hơn nữa  $C_P > C_V$ .

5.9. Sử dụng phương pháp thế nhiệt động, tìm các đạo hàm

$$\left(\frac{\partial I}{\partial P}\right)_T; \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T; \left(\frac{\partial C_P}{\partial P}\right)_T.$$

5.10. Chứng minh hệ thức

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\frac{T}{C_V} \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V.$$

5.11. Cho trước phương trình trạng thái của một chất đẳng hướng và đồng nhất về mặt vật lý. Tìm hiệu nhiệt dung  $C_P - C_V$  đối với chất này.

5.12. Biểu diễn hiệu nhiệt dung riêng  $c_P - c_V$  của một chất đẳng hướng và đồng nhất về mặt vật lý thông qua hệ số giãn nở nhiệt  $\alpha = \frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ ,

môđun nén đẳng nhiệt từ mọi phía  $K = -V \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$  và khối lượng riêng  $\rho$  của chất đó.

5.13. Tìm hiệu nhiệt dung riêng  $c_P - c_V$  của nước và thủy ngân ở  $t = 0^\circ\text{C}$  ( $T = 273,15\text{K}$ ). Đối với nước  $\alpha = -6,10 \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1}$ ,  $k = 2 \cdot 10^9 \text{N/m}^2$ ,  $\rho = 10^3 \text{kg/m}^3$ . Đối với thủy ngân  $c_P = 140 \text{J/(kg.K)}$ ,  $\alpha = 1,81 \cdot 10^{-4} \text{K}^{-1}$ ,

$K = 2,6 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ ,  $\rho = 13,6 \cdot 10^6 \text{ kg/m}^3$ . Do nguyên nhân nào mà hiệu  $c_P - c_V$  của nước lại nhỏ (xem bài 5.12).

**5.14\*.** Một chất đẳng hướng và đồng nhất về mặt vật lý giãn nở (hoặc nén) đoạn nhiệt và chuẩn tĩnh từ áp suất  $P_1$  đến  $P_2$ . Tìm biến thiên nhiệt độ  $T_2 - T_1$  của chất đó trong quá trình trên.

**5.15.** Nước ở nhiệt độ  $0^\circ\text{C}$  và áp suất  $P = 100 \text{ atm}$  giãn nở đoạn nhiệt và chuẩn tĩnh đến áp suất khí quyển. Tìm độ biến thiên nhiệt độ của nước trong quá trình này, nếu hệ số nở khối của nước trong các điều kiện trên âm:  $\alpha = -6,10 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .

**5.16.** Thủy ngân ở nhiệt độ  $0^\circ\text{C}$  và áp suất  $P = 100 \text{ atm}$  giãn nở đoạn nhiệt và chuẩn tĩnh đến áp suất khí quyển. Tìm sự thay đổi nhiệt độ của thủy ngân trong quá trình này nếu hệ số nở khối của nó trong các điều kiện trên dương và bằng  $\alpha = 1,81 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ , nhiệt dung riêng của thủy ngân  $c_P = 0,033 \text{ cal/(g.}^\circ\text{C)}$ , khối lượng riêng  $\rho = 13,6 \text{ g/cm}^3$ .

**5.17.** Một dây sắt bán kính  $r = 1 \text{ mm}$  được kéo giãn chuẩn tĩnh và đoạn nhiệt ở nhiệt độ  $T = 273 \text{ K}$ . Giá trị ban đầu của lực kéo bằng 0, giá trị cuối  $F = 10 \text{ N}$ . Xác định độ biến thiên nhiệt độ  $\Delta T$  của dây. Hệ số nở dài của sắt  $\alpha_d = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ , nhiệt dung riêng của sắt  $c = 0,44 \text{ J/(g.}^\circ\text{C)}$ , khối lượng riêng  $\rho = 7,9 \text{ g/cm}^3$ .

**5.18.** Một sợi dây bằng bạc đường kính  $d = 1 \text{ mm}$  được kéo giãn đoạn nhiệt ở nhiệt độ phòng bằng một lực  $F = 10 \text{ N}$ . Giả thiết rằng nhiệt dung riêng của bạc  $c = 0,234 \text{ J/(g.K)}$ , khối lượng riêng  $\rho = 10 \text{ g/cm}^3$ , hệ số nở dài  $\alpha_d = 1,9 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ . Xác định độ biến thiên nhiệt độ của dây.

**5.19.** Đun nóng đẳng áp một mol chất lỏng từ  $27^\circ\text{C}$  đến  $29^\circ\text{C}$  làm tăng thể tích của nó thêm  $0,1 \text{ cm}^3$ ; sau đó tăng đẳng nhiệt áp suất lên  $20 \text{ kg/cm}^2$  làm cho thể tích trả về giá trị ban đầu. Tìm hiệu nhiệt dung phân tử  $C_P - C_V$ . Giả thiết rằng thể tích trong giới hạn này biến đổi bậc nhất cùng với áp suất và nhiệt độ. Tìm độ biến thiên entropi của chất lỏng trong quá trình đẳng nhiệt.

**5.20.** Khi nén đoạn nhiệt thủy ngân ở áp suất  $100 \text{ atm}$  thể tích của nó giảm  $0,035\%$ . Tính tỷ số nhiệt dung  $\frac{C_P}{C_V}$  nếu hệ số nén đẳng nhiệt của thủy ngân

$$\beta_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = 3,9 \cdot 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}.$$

**5.21.** Hệ số nở khối của nước đối dầu ở nhiệt độ  $4^{\circ}\text{C}$ , nó nhận giá trị âm trong khoảng  $0^{\circ}\text{C} < t < 4^{\circ}\text{C}$ . Chứng minh rằng trong khoảng nhiệt độ này khi nén đoạn nhiệt nước sẽ lạnh đi chứ không nóng lên như đối với nhiều chất lỏng khác và tất cả các khí.

**5.22.** Người ta nén đẳng nhiệt một kg thủy ngân ở nhiệt độ  $T = 300\text{ K}$  và làm tăng áp suất của nó từ 0 đến  $P = 10\text{ atm}$ . Tìm công  $A$  nén lên thủy ngân và nhiệt lượng  $Q$  mà thủy ngân nhận được nếu hệ số nén đẳng nhiệt của nó  $\beta_T = 4 \cdot 10^{-6}\text{ atm}^{-1}$ , hệ số giãn nở nhiệt  $\alpha = 2 \cdot 10^{-4}\text{ K}^{-1}$ . Khối lượng riêng của thủy ngân  $\rho = 13,6\text{ g/cm}^3$ .

**5.23.** Khi nén đoạn nhiệt một lượng chất lỏng, sự thay đổi thể tích tương đối của nó bằng 0,1%, còn nhiệt độ tăng thêm 1K. Tìm tỷ số  $\frac{C_P}{C_V}$  nếu hệ số giãn nở nhiệt của chất lỏng  $\alpha = 10^{-4}\text{ K}^{-1}$ . Khi đó áp suất trong chất lỏng thay đổi bao nhiêu nếu hệ số nén đẳng nhiệt của nó  $\beta_T = 10^{-4}\text{ atm}^{-1}$ ?

**5.24.** Trong một vỏ thép chứa có nước ở nhiệt độ  $t_0 = 0^{\circ}\text{C}$  và áp suất  $P = 1000\text{ atm}$ . Vỏ thép bỗng nhiên mất độ cứng và vì thế áp suất của nước giảm nhanh đoạn nhiệt còn 1atm. Tìm nhiệt độ cuối  $t$  của nước. Bỏ qua nhiệt dung của vỏ thép. Khối lượng riêng của nước đạt cực đại ở nhiệt độ  $t_m = 4^{\circ}\text{C}$ , hiệu khối lượng riêng ở  $4^{\circ}\text{C}$  và  $0^{\circ}\text{C}$  là  $\Delta\rho = 0,13\text{ mg/cm}^3$ .

**5.25\*.** Thực nghiệm cho thấy rằng dây chảo cao su dài ra khi lạnh (nếu độ căng của nó được giữ nguyên). Sử dụng điều đó để chứng minh rằng dây chảo sẽ nóng lên nếu kéo giãn đoạn nhiệt nó.

**5.26.** Kết quả đo đạc cho thấy lực căng của dây chảo bằng cao su có thể được xác định bằng biểu thức  $\tau = A(l) \cdot T$ , trong đó  $T$  là nhiệt độ tuyệt đối, còn hàm  $A(l)$  chỉ phụ thuộc vào chiều dài dây chảo ( $A > 0$ ). Hãy chứng tỏ rằng nội năng của dây chảo  $U$  không phụ thuộc vào chiều dài của nó, còn entropi giảm khi tăng đẳng nhiệt chiều dài.

**5.27.** Một lượng nước nào đó ở  $0,1^{\circ}\text{C}$  được cho vào máy nén. Xilanh của máy nén được cách nhiệt tốt. Khi nén lượng nước này người ta thấy rằng thể tích của nó giảm 0,5%. Hỏi nhiệt độ của nước thay đổi như thế nào? Biết rằng hệ số nén đẳng nhiệt của nước trong dải nhiệt độ này  $\beta_T = 5 \cdot 10^{-10}\text{ Pa}^{-1}$  và hệ số giãn nở nhiệt  $\alpha = -6 \cdot 10^{-5}\text{ K}^{-1}$ .

**5.28.** Khi nén đẳng nhiệt ( $T = 293\text{ K}$ ) một mol glyxêrin từ áp suất  $P_1 = 1\text{ atm}$  đến  $P_2 = 11\text{ atm}$  toả ra nhiệt lượng  $Q = 10\text{ J}$ . Khi nén đoạn nhiệt cũng lượng glyxêrin này lên cùng 10atm thì tốn một công  $A = 8,76\text{ mJ}$ . Khối lượng riêng



của glycerin  $\rho = 1,26 \text{ g/cm}^3$ . Phân tử lượng  $\mu = 92 \text{ g/mol}$ ,  $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = 1,1$ .

Xác định hệ số áp suất nhiệt của glycerin  $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$ , hệ số giãn nở nhiệt  $\alpha$  và hệ số nén đẳng nhiệt  $\beta_T$ .

5.29. Suất Young của một vật rắn phụ thuộc vào nhiệt độ theo quy luật đã biết  $E = E(T)$ . Xác định mật độ năng lượng  $u$  của vật xuất hiện do biến dạng dài  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ . Giả thiết rằng công đẳng nhiệt  $\frac{\varepsilon^2 E}{2}$  bao gồm cả phần cơ và phần nhiệt.

5.30. Khi nén đẳng nhiệt đồng ở nhiệt độ  $273 \text{ K}$  tồn tại áp suất  $P_0$  sao cho công tiêu thụ để tăng áp suất một lượng nhỏ  $\Delta P \ll P_0$  đúng bằng nhiệt lượng toả ra khi nén. Xác định áp suất  $P_0$  nếu trong khoảng áp suất  $[P_0; P_0 + \Delta P]$  hệ số nở khối  $\alpha = 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ , môđun nén đẳng nhiệt thể tích  $K = 1,3 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ .

5.31. Xác định tỷ số  $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$  của lantan (La) lỏng ở nhiệt độ  $T = 1250 \text{ K}$ . Ở nhiệt độ này vận tốc âm thanh  $v_a = 2 \text{ km/s}$ , nhiệt dung riêng đẳng áp  $c_p = 247 \text{ J/(kg.K)}$ , hệ số nở khối  $\alpha = 1,02 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ .

5.32. Năng lượng tự do  $\Psi$  của một mol chất nào đó được cho bởi biểu thức  $\Psi = -\frac{KT}{2} \ln(AT^3V^2)$ , trong đó  $A$  là hằng số. Tìm nhiệt dung  $C_P$  của chất này.

5.33. Thế nhiệt động  $\Phi$  của một mol chất nào đó được cho bởi biểu thức  $\Phi = -\frac{RT}{2} \ln \frac{AT^5}{P^2}$ , trong đó  $A$  là hằng số. Tìm nhiệt dung  $C_V$  của chất này.

5.34. Phương trình trạng thái của một hệ nhiệt động có dạng  $P = A(V)T^3$ . Tìm  $\left(\frac{\partial Q}{\partial V}\right)_T$  tại điểm  $P = 1 \text{ atm}$ ,  $T = 300 \text{ K}$ .

5.35. Phương trình trạng thái của một hệ nhiệt động có dạng  $P = A(V)T^3$ . Tìm  $\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T$  tại điểm  $P = 1 \text{ atm}$ ,  $T = 300 \text{ K}$ .

**5.36.** Áp suất của bức xạ điện từ khi cân bằng nhiệt với chất được cho bởi công thức  $P = \alpha T^4$ , trong đó  $\alpha$  là hằng số đã biết. Xác định năng lượng của bức xạ này trong thể tích  $V$  cho trước.

**5.37.** Một bình cách nhiệt được chia thành hai phần bằng nhau bởi một vách ngăn mỏng. Một phần chứa một mol khí lý tưởng ở nhiệt độ  $T_0$ , phần còn lại là chân không. Người ta tháo nhanh vách phân cách và khí lấp đầy thể tích bình. Xác định độ biến thiên năng lượng tự do của khí sau khi cân bằng nhiệt động được thiết lập.

**5.38.** Một trong những phương pháp tạo nhiệt độ rất thấp là ứng dụng sự phụ thuộc của các đại lượng nhiệt động của một số chất (các muối thuận từ) vào cảm ứng từ  $B$ . Trong từ trường không mạnh lắm, năng lượng tự do của muối có dạng  $\Psi = \Psi_0 - \frac{\alpha}{T} B^2$ . Xác định nhiệt lượng mà muối hấp thụ khi khử từ đẳng nhiệt từ  $B = B_0$  đến  $B = 0$  ở nhiệt độ  $T$ .

**5.39.** Tìm độ biến thiên entropi của bức xạ nhiệt cân bằng của một vật đen tuyệt đối khi giãn nở thể tích bức xạ từ  $V_1$  đến  $V_2$  ở nhiệt độ không đổi  $T$ .

Áp suất bức xạ  $P = \frac{\rho}{3}$  trong đó  $\rho$  [ $10^{-7}$  J/cm<sup>3</sup>] là mật độ năng lượng bức xạ.

**5.40.** Tìm công mà một vật đen tuyệt đối bức xạ nhiệt cân bằng thực hiện trong chu trình Cárnot. Áp suất bức xạ  $P = \frac{\rho}{3}$ , trong đó  $\rho = \alpha T^4$  là mật độ năng lượng bức xạ, còn  $\alpha$  là hằng số đã biết.

**5.41.** Vũ trụ có tuổi  $t \sim 10^{10}$  năm được lấp đầy bằng bức xạ Relikt cân bằng ở nhiệt độ  $T \approx 3$  K. Bắt đầu từ thời kỳ, khi nhiệt độ  $T_0 \sim 3000$  K và khi các nguyên tử trung hoà được tạo thành, bức xạ tương tác yếu với vật chất và giãn nở đoạn nhiệt cùng với vũ trụ. Xác định tuổi của vũ trụ cho đến khi hình thành các nguyên tử trung hoà. Giả thiết vận tốc giãn nở của vũ trụ là không đổi.

**5.42.** Phương trình trạng thái của một bức xạ nhiệt nằm trong hốc rỗng của một vật đun nóng đến nhiệt độ  $T$  (khí photon), có thể được viết dưới dạng  $\Psi = -AVT^4$ , trong đó  $\Psi$  là năng lượng tự do của "khí" này trong hốc thể tích  $V$ ,  $A$  là hằng số đã biết,  $A = \frac{\pi^2 k^2}{45 \hbar^3 c^3} = 2,52 \cdot 10^{-15}$  g/(cm.s<sup>2</sup>.K<sup>4</sup>),  $k$  là hằng số Boltzmann. Tìm nhiệt dung  $C_V$  của khí photon với áp suất

$P = 1 \text{ atm}$ , chiếm thể tích  $V = 1 \text{ l}$  và so sánh nó với nhiệt dung  $C_V^H$  của khí lý tưởng đơn nguyên tử với cùng các giá trị  $P, V, T$ .

**5.43.** Trong điều kiện bài 5.42, tìm nhiệt dung  $C_P$  và phương trình đường đoạn nhiệt của khí photon.

**5.44.** Áp suất hơi nước bão hoà ở nhiệt độ  $17^\circ\text{C}$  bằng  $0,02 \text{ atm}$ . Hơi nước chiếm thể tích  $10 \text{ lít}$ . Tìm độ biến thiên năng lượng tự do  $\Delta \Psi$  và entropi  $\Delta S$  của hệ khí nén đẳng nhiệt đến thể tích  $5 \text{ lít}$ . Hơi nước có thể coi là khí lý tưởng. Nhiệt hoá hơi riêng ở nhiệt độ này  $\lambda = 2460 \text{ kJ/kg}$ .

**5.45.** Một mol khí metan  $\text{CH}_4$  thực hiện một quá trình có nhiệt dung ở áp suất  $760 \text{ mmHg}$  (nhiệt độ  $0^\circ\text{C}$ ) bằng  $-8,4 \text{ J/(mol.K)}$ . Kết quả của quá trình này là nhiệt độ giảm đến  $-1^\circ\text{C}$ . Tìm công  $A$  do khí thực hiện và độ biến thiên của áp suất  $\Delta P$ , thể tích  $\Delta V$ , entropi  $\Delta S$ , entalpi  $\Delta I$ . Vẽ gần đúng đồ thị của quá trình (dưới dạng các đoạn thẳng) trên đồ thị  $P, V$ . Metan có thể coi là khí lý tưởng.

**5.46\*.** Theo lý thuyết nhiệt dung của Debai, năng lượng tự do của vật rắn ở nhiệt độ thấp được biểu diễn bởi công thức:

$$\Psi = U_0 - AT^4,$$

trong đó  $U_0$  là nội năng của vật ở nhiệt độ 0 tuyệt đối (năng lượng không), còn  $A$  là hệ số dương chỉ phụ thuộc vào thể tích  $V$ . Sử dụng công thức trên hãy chứng tỏ rằng ở nhiệt độ thấp tỷ số giữa hệ số nở khối  $\alpha$  của vật đối với nhiệt dung  $C_V$  không phụ thuộc vào nhiệt độ (định luật Gruneisen).

**5.47.** Trong quá trình Joule – Thomson entalpi của khí không thay đổi. Sử dụng kết luận trên, tìm biểu thức nhiệt động tổng quát đối với sự thay đổi nhiệt độ trong quá trình này (hiệu ứng Joule – Thomson).

**5.48.** Hãy chứng tỏ rằng hiệu ứng Joule – Thomson không đúng đối với khí lý tưởng ( $\Delta T = 0$ ).

**5.49.** Một trong những phương pháp tạo nhiệt độ thấp là làm lạnh khí khi cho nó giãn đoạn nhiệt qua một van (hiệu ứng Joule – Thomson). Một phương pháp khác là người ta làm lạnh khí khi cho nó giãn nở đoạn nhiệt thuận nghịch. Hãy chứng minh rằng, với cùng áp suất ban đầu  $P_1$  và áp suất cuối  $P_2$  ( $P_1 > P_2$ ), độ giảm nhiệt độ trong phương pháp thứ hai lớn hơn trong phương pháp thứ nhất.

**5.50\*.** Hãy chứng minh rằng trong quá trình Joule – Thomson entropi của khí tăng lên.

**5.51.** Một trong những quá trình địa chất là quá trình rò rỉ của nước qua các lỗ hổng của nham thạch từ các vùng có áp suất cao  $P = 1000 \text{ atm}$  sang vùng

có áp suất bằng áp suất khí quyển  $P_0$ . Đánh giá liều lượng nước bốc hơi  $x$ , nếu nhiệt độ ban đầu của nó  $t_0 = 90^\circ \text{C}$ . Bỏ qua sự trao đổi nhiệt với đá núi, biết nhiệt hóa hơi riêng  $\lambda = 2260 \text{ J/g}$ .

## §6. KHÍ THỰC. KHÍ VANDECVAN

6.1. Tìm biểu thức của áp suất, nhiệt độ và thể tích khí tại điểm tới hạn và thiết lập mối liên hệ giữa các đại lượng này, giả thiết rằng chất tuân theo phương trình VandecVan.

6.2. Viết phương trình VandecVan với các đại lượng quy chuẩn

$$\tau = \frac{T}{T_k}, \quad \pi = \frac{P}{P_k}, \quad \varphi = \frac{V}{V_k},$$

khí lấy đơn vị là nhiệt độ tới hạn, áp suất tới hạn và thể tích tới hạn của khí.

6.3. Nhiệt độ tới hạn của khí  $\text{CO}_2$  bằng  $31^\circ \text{C}$ , áp suất tới hạn là  $73 \text{ atm}$ . Xác định thể tích tới hạn  $V_k$  của một mol  $\text{CO}_2$ .

6.4. Tìm các hằng số của phương trình VandecVan đối với nitơ, nếu nhiệt độ tới hạn của nitơ  $T_k = -146,9^\circ \text{C}$ ,  $P_k = 33,55 \text{ atm}$ .

6.5. Tìm khối lượng riêng tới hạn của nước, nếu áp suất tới hạn  $P_k = 218,3 \text{ atm}$ , nhiệt độ tới hạn  $T_k = 647,3 \text{ K}$ , giả thiết rằng nước tuân theo phương trình VandecVan.

6.6. Giả thiết hằng số VandecVan  $a$  của nước bằng  $5,45 \cdot 10^6 \text{ atm} \cdot \text{cm}^6 / \text{mol}^2$ . Tìm áp suất trong  $P$  của nước.

6.7. Nếu nhiệt độ của khí thấp hơn nhiệt độ Boile thì khi nén đẳng nhiệt, tích  $PV$  của nó ban đầu giảm, đi qua điểm cực tiểu, và sau đó bắt đầu tăng. Nếu nhiệt độ của khí lớn hơn nhiệt độ Boile thì khi nén đẳng nhiệt, tích  $PV$  tăng đơn điệu. Hãy kiểm nghiệm lại điều đó và biểu diễn nhiệt độ Boile thông qua nhiệt độ tới hạn của khí tuân theo phương trình VandecVan.

6.8. Nhiệt độ tới hạn, áp suất tới hạn và khối lượng riêng tới hạn của hydro lần lượt bằng  $T_k = 33,24 \text{ K}$ ,  $P_k = 12,8 \text{ atm}$ ,  $\rho_k = 0,0310 \text{ g/cm}^3$ . Sử dụng các số liệu trên và giả thiết rằng hydro tuân theo phương trình VandecVan, tìm khối lượng phân tử  $\mu$  của hydro.

6.9. Khí quyển của sao Kim gần như chỉ toàn  $\text{CO}_2$ . Tìm áp suất trên bề mặt hành tinh nếu khối lượng riêng của khí  $\rho = 0,07 \text{ g/cm}^3$  và nhiệt độ của nó

$T = 750 \text{ K}$ . Khí tuân theo phương trình VandezVan với các giá trị tới hạn  $P_k = 73 \text{ atm}$ ,  $V_k = 94 \text{ cm}^3/\text{mol}$  và  $T_k = 304 \text{ K}$ . So sánh với áp suất khí lý tưởng ở cùng điều kiện.

6.10. Tìm biểu thức của hệ số nén đẳng nhiệt  $\beta_T$  của khí VandezVan.

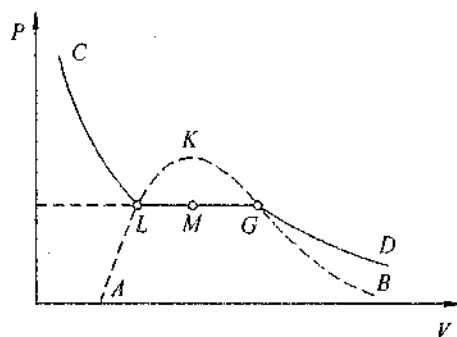
6.11. Tìm hệ số giãn nở nhiệt  $\alpha$  của khí VandezVan trong quá trình đẳng áp.

6.12\*. Trên hình 353 đường cong CLMGD biểu diễn một trong những đường đẳng nhiệt thực của một chất, đường đứt nét ALKGB phân ranh giới giữa vùng trạng thái một pha của chất đó với vùng hai pha. Hãy chứng tỏ rằng trong trạng thái được biểu diễn bởi điểm  $M$ , khối lượng pha lỏng và pha

khí tương ứng với  $\frac{m_l}{m_k} = \frac{MG}{ML}$  (quy tắc cánh tay đòn).

6.13. Nhiệt dung  $C_P$  của một chất trong trạng thái lưỡng pha biểu diễn bởi một điểm nằm phía dưới đường cong ALKGB bằng bao nhiêu (H. 353)?

6.14\*. Tìm sự phân bố khối lượng riêng trong trọng trường của một vật đồng nhất về mặt vật lý, tuân theo phương trình VandezVan tại lân cận điểm  $T_k$ .



Hình 353

6.15. Theo phát hiện đầu tiên của A.

G. Stöletov (1892), để đưa chất lỏng chứa trong một thể tích cho trước đến trạng thái tới hạn cần phải lấy một lượng chất lỏng hoàn toàn xác định. Xét ví dụ sau: Một bình thể tích  $V_1 = 15 \text{ cm}^3$  cần phải được đổ nước ở nhiệt  $T_1 = 18^\circ \text{C}$  với tính toán sao cho khi đun nóng nước trong bình này (đã hút khí và hàn kín) đến nhiệt độ tới hạn thì đạt tới áp suất tới hạn. Giả thiết rằng nước tuân theo phương trình trạng thái VandezVan, tìm thể tích nước cần phải đổ vào bình nếu biết rằng nhiệt độ tới hạn của nước  $T_k = 647,3 \text{ K}$ , áp suất tới hạn  $P_k = 218,3 \text{ atm}$ , phân tử lượng của nước  $\mu = 18 \text{ g}$ , khối lượng riêng ở  $18^\circ \text{C}$  là  $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ ?

6.16. Để thí nghiệm sự biến mất của mặt khum chất lỏng tại điểm tới hạn, người ta đổ đầy hỗn hợp chất lỏng đó và hơi của nó với khối lượng riêng trung bình  $\rho$  vào một ống ampul hình trụ chiều cao  $h_0$ . Độ lệch cho phép của  $\rho$  so với khối lượng riêng tới hạn  $\rho_k$  bằng bao nhiêu để trong quá trình

đun nóng ống ampul, mặt khum biến mất (mà không tiếp xúc với đáy ống hoặc nắp ống)?

**6.17.** Sau khi quan sát trạng thái tới hạn của một chất, người ta làm lạnh ống ampul đựng đầy ête. Trong quá trình làm lạnh người ta thấy rằng ở một nhiệt độ  $T$  nào đó thì chất lỏng với khối lượng riêng  $\rho = 1,9\rho_k$  chiếm đúng một nửa ống. Xác định nhiệt độ  $T$  đó. Nhiệt độ tới hạn của ête  $T_k = 467\text{ K}$ .

**6.18.** Người ta rót ête ở  $18^\circ\text{C}$  vào một ống ampul đã hút hết không khí và hàn kín lại. Hỏi cần phải đổ ête chiếm bao nhiêu phần của ống để sau khi đun nóng đến nhiệt độ tới hạn  $T_k = 467\text{ K}$  thì ête sẽ ở trạng thái tới hạn? Biết rằng  $P_k = 35,5\text{ atm}$ , khối lượng riêng của ête là  $\rho_l = 0,714\text{ g/cm}^3$ , áp suất hơi bão hòa  $P_{bh} = 400\text{ mmHg}$  (ở  $18^\circ\text{C}$ ). Giả thiết rằng có thể áp dụng mô hình khí VandecVan cho ête nói trên.

**6.19.** Coi nhiệt hoá hơi riêng  $\lambda$  như là công tiêu thụ để chống lại áp suất trong  $P_l$ , tìm sự phụ thuộc giữa  $P_l$ ,  $\lambda$  và khối lượng riêng  $\rho$ . Giả thiết chất lỏng tuân theo phương trình VandecVan.

**6.20.** Chứng minh rằng nhiệt dung  $C_V$  của khí tuân theo phương trình VandecVan không phụ thuộc vào thể tích, mà là hàm chỉ của nhiệt độ. Tìm biểu thức tính nội năng của khí VandecVan có nhiệt dung không phụ thuộc vào nhiệt độ.

**6.21.** Hai mol khí VandecVan ở nhiệt độ  $T$  chiếm thể tích  $V$ . Tìm công mà khí thực hiện khi giãn nở chuẩn tĩnh đẳng nhiệt đến thể tích  $2V$ . Giả thiết đã biết các hằng số  $a$ ,  $b$  của khí.

**6.22.** Một mol khí nitơ giãn nở vào chân không từ thể tích ban đầu  $1l$  đến thể tích cuối  $10l$ . Tìm độ giảm nhiệt độ  $\Delta T$  trong quá trình trên, nếu hằng số  $a$  trong phương trình VandecVan đối với nitơ bằng  $1,35 \cdot 10^6\text{ atm.cm}^6/\text{mol}^2$ .

**6.23.** Hai bình thể tích  $V_1$  và  $V_2$  được nối với nhau bằng một ống có van. Khi van khoá trong mỗi bình có chứa 1 mol của cùng một loại khí tuân theo phương trình VandecVan. Trước khi mở van nhiệt độ của khí ở hai bình là như nhau và bằng  $T$ . Hỏi nếu mở van thì khí sẽ nóng lên hay lạnh đi? Xác định áp suất khí sau khi mở van. Coi các thành bình và ống nối là cách nhiệt với bên ngoài, còn nhiệt dung riêng  $C_V$  không phụ thuộc vào nhiệt độ.

**6.24.** Hai bình thể tích  $V_1 = V_2 = V = 1l$  được nối với nhau bằng một ống có van. Trong bình  $V_1$  chứa không khí ở áp suất khí quyển, bình  $V_2$  được hút đến chân không. Giả thiết rằng không khí tuân theo phương trình VandecVan, các thành bình và ống cách nhiệt. Hỏi nhiệt độ của không khí

sẽ thay đổi bao nhiêu sau khi mở van? Nhiệt độ ban đầu  $T = 290\text{ K}$ , đối với không khí hằng số  $a = 1,35 \cdot 10^6 \text{ atm.cm}^6/\text{mol}^2$ .

**6.25.** Khí nitơ ở nhiệt độ tới hạn  $T_k = 126\text{ K}$  có thể tích tới hạn  $V_k = 92,1\text{ cm}^3/\text{mol}$ . Giả thiết rằng nitơ tuân theo phương trình VandezVan, tìm độ giảm nhiệt độ của 7g nitơ khi nó giãn nở vào chân không từ thể tích  $V_1 = 5\text{ l}$  đến  $V_2 = 50\text{ l}$ .

**6.26.** Cần phải truyền cho một mol khí VandezVan một nhiệt lượng bằng bao nhiêu để khi nó giãn nở trong chân không từ thể tích  $V_1$  đến thể tích  $V_2$  thì nhiệt độ của nó không đổi?

**6.27.** Cần phải truyền cho một mol khí VandezVan một nhiệt lượng bằng bao nhiêu để khi nó giãn nở trong chân không từ thể tích  $V_1$  đến thể tích  $V_2$  thì áp suất của nó không đổi và bằng  $P$ ?

**6.28.** Tìm hiệu  $C_P - C_V$  của một mol khí VandezVan.

**6.29.** Tìm biểu thức tính entropi của  $\nu$  mol khí VandezVan.

**6.30.** Tìm phương trình polytropic của khí VandezVan. Giả thiết rằng nhiệt dung  $C$  của nó không phụ thuộc vào nhiệt độ.

**6.31.** Hãy chứng tỏ rằng tại điểm tới hạn của một chất bất kỳ, hiệu  $C_P - C_V$ , thậm chí cả nhiệt dung  $C_P$  đều bằng vô cùng.

**6.32.** Hai mol khí VandezVan giãn nở đoạn nhiệt và chuẩn tĩnh từ nhiệt độ  $T_1$  và thể tích  $V_1$  đến thể tích  $V_2$ . Tìm công mà khí đã thực hiện. Coi các hằng số khí  $a$  và  $b$  đã biết. Nhiệt dung  $C_V$  của khí không phụ thuộc vào nhiệt độ.

**6.33.** Tìm phương trình của quá trình biến đổi một mol khí VandezVan, biết rằng trong quá trình đó nhiệt dung biến đổi theo quy luật  $C = kT^2$ , trong đó  $k$  là hằng số. Giả thiết  $C_V$  không phụ thuộc vào nhiệt độ.

**6.34.** Tìm phương trình của quá trình biến đổi một chất khí bất kỳ, biết rằng trong quá trình đó nhiệt dung biến đổi theo quy luật  $C = \alpha\sqrt{T}$ , trong đó  $\alpha$  là hằng số. Tìm phương trình của khí VandezVan như một trường hợp riêng của phương trình trên. Giả thiết đã biết các hằng số của khí VandezVan và nhiệt dung đẳng tích ( $C_V = \text{const}$ ) của nó.

**6.35.** Tìm phương trình của một quá trình biến đổi khí VandezVan, biết rằng trong quá trình đó nội năng của khí không đổi. Nhiệt dung phân tử của quá trình đó phụ thuộc như thế nào vào nhiệt độ  $T$ , nếu đã biết nhiệt dung phân tử  $C_V$ ?

**6.36.** Hai mol khí nitơ được nén đẳng nhiệt từ thể tích  $V$  (trong các điều kiện tiêu chuẩn) đến thể tích  $\frac{V}{10}$ . Nhiệt lượng toả ra trong quá trình trên bằng bao

nhiều? Giả thiết cho trước các hằng số VandecVan  $a$  và  $b$  đối với nitơ.

**6.37.** Một mol khí VandecVan giãn nở theo quá trình polytropic

$$(V - b)T = \text{const.}$$

Xác định độ biến thiên entropi của khí nếu nhiệt độ của nó biến thiên từ  $T_1$  đến  $T_2$ . Nhiệt dung  $C_V$  không đổi.

**6.38.** Tìm độ biến thiên entropi của một mol khí có các hằng số VandecVan  $a$  và  $b$  đã biết trong một quá trình đẳng nhiệt. Biết rằng sau quá trình này nội năng của khí tăng một lượng  $\Delta U$ . Thể tích khí ban đầu là  $V_0$ .

**6.39.** Tìm độ biến thiên entropi của một mol khí lưỡng nguyên tử VandecVan giãn nở theo quá trình polytropic

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b)^3 = \text{const.},$$

khí nhiệt độ biến đổi từ  $T_1 = 680\text{ K}$  đến  $T_2 = 250\text{ K}$ . Giả thiết  $C_V$  không phụ thuộc vào nhiệt độ.

**6.40.** Khí VandecVan ban đầu giãn nở vào chân không từ thể tích ban đầu  $V_0$  đến  $2V_0$ , sau đó nén đẳng nhiệt đến  $\frac{V_0}{2}$ . Tìm độ biến thiên entropi của một mol khí, nếu cho trước các hằng số  $a$  và  $b$ , còn nhiệt dung  $C_V$  không phụ thuộc vào nhiệt độ  $T$ . Nhiệt độ ban đầu của khí là  $T_0$ .

**6.41.** Khí VandecVan ban đầu nén đẳng nhiệt ở nhiệt độ  $T_0$  từ thể tích  $V_0$  đến thể tích  $\frac{V_0}{2}$ , sau đó giãn nở trong chân không đến thể tích  $2V_0$ . Tìm độ biến thiên entropi của một mol khí, nếu cho trước các hằng số  $a$  và  $b$ , còn nhiệt dung  $C_V$  không phụ thuộc vào nhiệt độ  $T$ .

**6.42.** Để nén đẳng nhiệt một mol khí VandecVan phải tốn một công  $A$ . Khi đó entropi của khí thay đổi về giá trị tuyệt đối một lượng  $\frac{R}{8}$ ,  $R$  là hằng số khí nói chung. Xác định nhiệt độ của quá trình này, nếu thể tích ban đầu bằng ba lần thể tích tới hạn. Giả thiết cho trước các hằng số VandecVan  $a$  và  $b$ .

**6.43.** Một bình cách nhiệt được chia thành hai phần có thể tích  $V$  như nhau bởi một vách ngăn cách nhiệt. Trong mỗi phần đều chứa một mol của cùng



một khí VandecVan, áp suất ở phần thứ nhất của hình bằng  $P_1$ , ở phần thứ hai bằng  $P_2$ . Sau khi tháo vách ngăn, áp suất được thiết lập trong bình bằng bao nhiêu? Cho trước các hằng số  $a, b$  và nhiệt dung  $C_V$ .

**6.44.** Một bình cách nhiệt được ngăn thành hai phần với các thể tích  $V_1$  và  $V_2$  ( $V_2 \gg V_1$ ) bằng một vách ngăn dẫn nhiệt. Trong ngăn thể tích  $V_1$  có chứa một mol khí VandecVan ở áp suất  $P_{10}$ , ngăn  $V_2$  không chứa khí. Sau đó người ta bỏ vách ngăn để một nửa khối lượng khí chuyển từ thể tích  $V_1$  sang thể tích  $V_2$ , và lại đặt vách ngăn vào vị trí cũ. Xác định áp suất  $P_2$  được thiết lập trong thể tích  $V_2$ , giả thiết khí trong thể tích  $V_2$  là khí lý tưởng. Cho trước các hằng số  $a, b$  và nhiệt dung  $C_V$ , bỏ qua nhiệt dung của vách ngăn.

**6.45.** Nén một mol khí nitơ ở nhiệt độ  $0^\circ\text{C}$  đến thể tích bằng  $1/2$ . Tìm độ biến thiên entropi của nó khi giãn nở không thu nhiệt và không sinh công đến áp suất khí quyển. Nhiệt độ tới hạn của nitơ bằng  $-147^\circ\text{C}$ , thể tích tới hạn  $0,092\text{l/mol}$ . Giả thiết rằng trong trạng thái nén, nitơ tuân theo phương trình VandecVan, còn trong trạng thái giãn nở nó có thể coi như khí lý tưởng. Giả thiết nhiệt dung  $C_V$  không phụ thuộc vào nhiệt độ.

**6.46.** Một bình cách nhiệt thể tích  $V_0$  được ngăn thành hai phần bằng nhau bằng một vách ngăn không thấm. Một ngăn chứa một mol khí VandecVan ở nhiệt  $T_0$ , ngăn còn lại là chân không. Người ta tháo nhanh vách ngăn và sau khi khí phân bố đều trong bình thì nén chuẩn tĩnh đến thể tích ban đầu bằng một piston cách nhiệt. Xác định độ biến thiên của entropi  $\Delta S$  và của nội năng  $\Delta U$  so với các giá trị ban đầu của chúng. Biết rằng đối với khí VandecVan hằng số  $a \neq 0$ , còn  $b = 0$ . Giả thiết  $C_V = \text{const}$ .

**6.47.** Một bình cách nhiệt thể tích  $V_0$  được ngăn thành hai phần bằng nhau bằng một vách ngăn không thấm. Một ngăn chứa một mol khí VandecVan ở nhiệt  $T_0$ , ngăn còn lại là chân không. Người ta tháo nhanh vách ngăn và sau khi khí phân bố đều trong bình thì nén chuẩn tĩnh đến thể tích ban đầu bằng một piston cách nhiệt. Xác định độ biến thiên của entropi  $\Delta S$  và của nội năng  $\Delta U$  so với các giá trị ban đầu của chúng. Biết rằng đối với khí VandecVan hằng số  $b \neq 0$ , còn  $a = 0$ . Giả thiết  $\frac{b}{V_0} \ll 1$  và  $C_V = \text{const}$ .

**6.48.** Một mol khí giãn nở chuẩn tĩnh và đoạn nhiệt từ thể tích ban đầu  $V_0$  đến thể tích  $V$ . Trong trường hợp nào thì sẽ làm lạnh khí nhiều hơn: khi khí

tuân theo phương trình VandecVan hay khí nó là khí lý tưởng? Nhiệt dung  $C_V$  của cả hai khí bằng nhau và không phụ thuộc vào nhiệt độ.

**6.49.** Một mol khí giãn nở chuẩn tĩnh và đoạn nhiệt từ áp suất ban đầu  $P_0$  và nhiệt độ  $T_0$  đến áp suất  $P$ . Giả thiết rằng khí tuân theo phương trình VandecVan với các hằng số  $a = 0$ ,  $b \neq 0$ . Tìm nhiệt độ cuối của khí, biết nhiệt dung  $C_V$  không phụ thuộc vào nhiệt độ. So sánh nhiệt độ cuối quá trình giãn nở của khí này với nhiệt độ mà khí lý tưởng cùng  $C_V$  có được trong quá trình tương tự.

**6.50.** Tìm nhiệt dung của khí VandecVan trong một quá trình biến đổi, trong đó nhiệt lượng truyền cho khí bằng độ giảm nội năng của nó. Nhiệt dung  $C_V$  và hằng số VandecVan  $a$  giả thiết đã biết.

**6.51\*.** Tìm biểu thức tính nhiệt hoá hơi  $\Lambda$  của một mol chất lỏng ở nhiệt độ  $T$  không đổi dưới áp suất hơi bão hoà của nó với giả thiết rằng, phương trình trạng thái của chất lỏng và hơi chính là phương trình VandecVan. Coi nhiệt độ  $T$ , thể tích mol của chất lỏng  $V_l$  và của hơi bão hoà  $V_h$  ở nhiệt độ này là đã biết.

**6.52.** Một mol ête ở trạng thái tới hạn giãn nở trong một bình chân không cách nhiệt sao cho thể tích của nó tăng  $N = 17$  lần. Giả thiết nhiệt dung của ête  $C_V = 3R$  và không phụ thuộc vào nhiệt độ. Xác định độ biến thiên entropi của ête trong quá trình này.

**6.53.** Trong quá trình giãn nở polytropic của một mol khí đa nguyên tử VandecVan (nhiệt dung của quá trình  $C = 4R$ ), entropi tăng lên  $\Delta S = R$ . Hỏi thể tích của khí tăng lên bao nhiêu lần, nếu thể tích ban đầu của nó bằng ba lần thể tích tới hạn?

**6.54.** Trong quá trình giãn nở polytropic của một mol khí đơn nguyên tử VandecVan từ thể tích tới hạn đến ba lần thể tích tới hạn, entropi của khí tăng lên  $\Delta S = 2R$ . Xác định nhiệt dung của quá trình polytropic.

**6.55.** Tính độ biến thiên năng lượng tự do của một kilômol khí VandecVan ( $a = 1,39 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot \text{m}^6/\text{kmol}^2$ ,  $b = 0,039 \text{ m}^3/\text{kmol}$ ) trong quá trình giãn nở đẳng nhiệt ( $T_0 = 300 \text{ K}$ ) từ  $V_0 = 0,05 \text{ m}^3$  đến  $V_1 = 0,1 \text{ m}^3$ .

**6.56.** Một ống kim loại bịt kín hai đầu chứa đầy heli ở điều kiện tiêu chuẩn. Có thể đo tần số cộng hưởng âm của ống này với độ chính xác bằng bao nhiêu để có thể phát hiện rằng khí không phải là lý tưởng? Giả thiết khí heli tuân theo phương trình VandecVan. Nhiệt độ tới hạn của heli  $T_k = 5,2 \text{ K}$ ,

còn đường kính của nguyên tử heli  $d \approx 2 \text{ \AA}$ .

**6.57.** Tìm vận tốc âm thanh trong khí VandecVan ở gần điểm tới hạn. Giả thiết các hằng số  $a$ ,  $b$  và phân tử lượng  $\mu$  của khí đã biết trước. Nhiệt dung  $C_V$  đã biết và không phụ thuộc vào nhiệt độ, quá trình biến đổi là đoạn nhiệt.

**6.58.** Tỷ số  $\frac{\beta_T}{\beta_S}$  của hệ số nén đẳng nhiệt  $\beta_T$  và hệ số nén đoạn nhiệt  $\beta_S$  của một mol khí đơn nguyên tử VandecVan ở nhiệt độ  $T = 50 \text{ K}$  và áp suất  $20 \text{ atm}$  bằng bao nhiêu? Giả thiết nhiệt dung  $C_V$  của khí đã cho cũng đúng bằng của khí lý tưởng, hằng số  $a = 0,0035 \text{ Pa} \cdot \text{m}^6 / \text{mol}^2$ .

**6.59.** Trong một trụ đứng, phía dưới piston khối lượng  $M$  và diện tích  $\sigma$  có chứa một mol khí VandecVan với các hằng số  $a$  và  $b$  đã biết. Tìm chu kỳ dao động nhỏ  $\tau$  của piston gần vị trí cân bằng, giả thiết quá trình nén và giãn khí là đẳng nhiệt, trong đó  $T = 2T_k$ . Thể tích cân bằng của khí trong điều kiện thí nghiệm bằng thể tích tới hạn.

**6.60.** Một mol héli có thể tích  $V = 0,1 \text{ l}$  ở nhiệt độ  $t = 0^\circ \text{C}$ . Giá trị đo được  $(\gamma - 1)$ , trong đó  $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$  trong điều kiện trên lớn hơn 3% so với giá trị  $(\gamma - 1)$  của khí héli loãng. Sử dụng mẫu khí VandecVan, tìm giá trị của hằng số  $a$  của héli, khi phân tích bỏ qua các số hạng bậc  $a^2$ ,  $ab$ ,  $b^2$ .

**6.61.** Tìm công của một động cơ làm việc theo chu trình gồm hai quá trình đẳng tích và hai quá trình đẳng nhiệt. Tác nhân là một mol khí VandecVan. Thể tích ban đầu  $V_1 = 5b$ , thể tích cuối  $V_2 = 6b$ , trong đó  $b$  là hằng số VandecVan. Nhiệt độ trong các quá trình đẳng nhiệt  $t_1 = 10^\circ \text{C}$ ,  $t_2 = 20^\circ \text{C}$ .

**6.62.** Tìm hiệu suất của chu trình gồm quá trình đoạn nhiệt, quá trình đẳng nhiệt (nhiệt độ  $T_1$ , thể tích giảm từ  $V_2$  đến  $V_1$ ) và quá trình đẳng tích (thể tích  $V_1$  nhiệt độ tăng từ  $T_1$  đến  $T_2$ ). Tác nhân là một mol khí VandecVan, các hằng số  $a$  và  $b$  đã biết, còn nhiệt dung  $C_V$  không phụ thuộc vào nhiệt độ.

**6.63.** Tìm hiệu suất động cơ nhiệt hoạt động theo chu trình gồm hai quá trình đẳng tích  $V$  và  $2V$  và hai quá trình đẳng áp  $P$  và  $2P$ . Tác nhân là khí VandecVan, các hằng số  $a$  và  $b$  đã biết. Giả thiết nhiệt dung  $C_V$  không đổi.

**6.64.** Xác định hiệu suất của chu trình gồm hai quá trình đẳng tích  $V_1$  và  $V_2$  và hai quá trình đoạn nhiệt. Tác nhân là khí VandecVan, các hằng số  $a$  và  $b$  cho trước, còn nhiệt dung  $C_V$  không phụ thuộc vào nhiệt độ.

**6.65.** Một bình cách nhiệt thể tích  $2l$  có các thành cứng được ngăn thành hai phần bằng một vách ngăn dẫn nhiệt di chuyển được. Cả hai ngăn đều chứa ôxy, ngăn bên trái chứa 5 mol, ngăn bên phải chứa 1 mol. Tại thời điểm ban đầu

vách ngăn được giữ ở chính giữa và chia bình thành hai phần bằng nhau, sau đó được thả tự do. Cần phải truyền cho khí hoặc thu của nó một nhiệt lượng  $Q$  bằng bao nhiêu để nhiệt độ của khí không đổi? Giả thiết ôxy tuân theo phương trình VandecVan với hằng số  $a = 1,3 \text{ atm.l}^2/\text{mol}^2$ .

**6.66.** Tìm công thức tính độ biến thiên nhiệt độ của khí trong hiệu ứng vi phân Joule – Thomson, giả thiết rằng khí tuân theo phương trình trạng thái VandecVan.

**6.67.** Xét trường hợp giới hạn của công thức đối với hiệu ứng Joule – Thomson (xem đáp số bài trước). Giả thiết khí loãng tới mức có thể bỏ qua các lũy thừa bậc 2 và bậc cao hơn của  $a$  và  $b$ . Chứng minh rằng với các nhiệt độ lớn hơn nhiệt độ  $T_{\text{đảo}}$  của hiệu ứng vi phân Joule – Thomson, khí khi giãn đoạn nhiệt vô cùng chậm sẽ nóng lên, còn khi nhiệt độ thấp hơn nhiệt độ đảo khí sẽ lạnh đi. Tìm biểu thức của  $T_{\text{đảo}}$  và thiết lập mối liên hệ giữa  $T_{\text{đảo}}$  với nhiệt độ tới hạn  $T_k$ .

**6.68.** Hãy chứng tỏ rằng khí tuân theo phương trình VandecVan với  $a = 0$  trong thí nghiệm Joule – Thomson bao giờ cũng nóng lên. Xác định độ tăng nhiệt độ trong quá trình giãn nở.

**6.69.** Hãy chứng tỏ rằng khí tuân theo phương trình VandecVan với  $b = 0$  trong thí nghiệm Joule – Thomson bao giờ cũng lạnh đi. Xác định độ giảm nhiệt độ trong quá trình giãn nở.

**6.70.** Với nhiệt độ  $T$  bằng bao nhiêu thì hêli trong thí nghiệm Joule – Thomson sẽ bắt đầu lạnh đi, nếu biết rằng nhiệt độ tới hạn của hêli  $T_k = 5,2 \text{ K}$ ? Giả thiết trạng thái của hêli được mô tả bằng phương trình VandecVan.

**6.71.** Giả thiết rằng khí tuân theo phương trình VandecVan, tìm phương trình của đường cong đảo, tức là đường cong trong mặt phẳng  $(V, T)$  mà khi đi qua nó hiệu ứng Joule – Thomson đổi dấu.

**6.72.** Sự giãn nở khí trong quá trình Joule – Thomson diễn ra từ trạng thái ban đầu  $(T, V)$  đến trạng thái rất loãng, khi đó khí có thể coi là lý tưởng. Nếu trạng thái ban đầu của khí được biểu diễn trên đồ thị  $(T, V)$  thì trên đồ thị này có thể dựng được một đường cong chia mặt phẳng  $(T, V)$  thành hai miền: một miền có các điểm ứng với  $\Delta T < 0$  (khí lạnh đi), và miền kia ứng với  $\Delta T > 0$  (khí nóng lên). Đường cong này gọi là đường đảo của hiệu ứng tích phân Joule – Thomson. Tìm phương trình của nó và vẽ các đường cong đảo đối với nitơ, hydro và hêli với giả thiết rằng các khí này tuân theo phương trình VandecVan.

**6.73.** Sự thay đổi nhiệt độ trong hiệu ứng Joule – Thomson khác bao nhiêu lần so với trong quá trình giãn nở thuận nghịch của khí VandecVan? Độ

giảm áp suất trong hai quá trình là như nhau và không quá lớn,  $\frac{T_k}{T} = 0,4$  và

$\frac{V_k}{V} = 0,09$ , trong đó  $T_k$  và  $V_k$  là nhiệt độ và thể tích tới hạn.

*Hướng dẫn.* Tìm hệ số giãn nở nhiệt  $\alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$  bằng cách lấy vi phân phương trình VandecVan.

**6.74\*.** Một bình cách nhiệt chứa khí hêli ở nhiệt độ  $T_0 = 10 \text{ K}$  (cao hơn điểm tới hạn). Khí thoát từ từ qua một ống mao dẫn cho đến khi áp suất trong bình  $P_1 = 1 \text{ atm}$ , còn nhiệt độ  $T_1 = 4,2 \text{ K}$  (điểm sôi của hêli ở áp suất tiêu chuẩn). Tìm áp suất ban đầu  $P$  của khí trong bình, nếu ở cuối quá trình trong bình chứa toàn hêli lỏng. Nhiệt hoá hơi của một mol hêli ở  $4,2 \text{ K}$  là  $\Lambda = 20 \text{ cal/mol}$ . Coi hêli như khí lý tưởng.

**6.75.** Khí lưỡng nguyên tử tuân theo phương trình VandecVan ở nhiệt độ  $300 \text{ K}$  được làm lạnh trong quá trình Joule – Thomson xuống  $0,024 \text{ K}$  khi áp suất giảm  $0,1 \text{ atm}$ . Tìm áp suất và thể tích tới hạn, nếu nhiệt độ tới hạn bằng  $-147^\circ \text{C}$ .

**6.76.** Khí argon giãn đoạn nhiệt từ áp suất  $P_1 = 100 \text{ atm}$  đến áp suất  $P_2 = 1 \text{ atm}$ . Giả thiết quá trình là ổn định, xác định nhiệt lượng  $Q$  cần cung cấp cho một mol khí để nhiệt độ của nó không đổi và bằng  $T = 300 \text{ K}$ . Coi argon là khí VandecVan với  $C_V = \text{const}$ ,  $b = 32,2 \text{ cm}^3/\text{mol}$  và nhiệt độ tới hạn  $T_k = 150,56 \text{ K}$ . Khi tính bỏ qua các lũy thừa bậc hai và các bậc cao hơn của  $a$  và  $b$ .

**6.77.** Xác định độ biến thiên nội năng của một mol khí thực tuân theo phương trình  $P = \frac{RT(V+b)}{V^2} \exp\left(-\frac{a}{RTV}\right)$  trong quá trình giãn nở đẳng nhiệt ở nhiệt độ  $T$  từ thể tích  $V_1$  đến  $V_2$ . Cho trước các hằng số  $a$  và  $b$ .

**6.78.** Xác định độ biến thiên entropi trong quá trình giãn nở đẳng nhiệt ( $T_0$ ) của một mol khí thực từ thể tích  $V_0$  đến  $V_0 + dV$ , nếu phương trình trạng thái của nó có dạng  $P = \frac{RT}{V-b} \exp\left(-\frac{a}{RTV}\right)$ . Cho trước các hằng số  $a$  và  $b$ .

**6.79.** Tìm độ biến thiên nhiệt dung  $\Delta C_V$  của một mol khí hêli trong quá trình giãn nở đẳng nhiệt từ thể tích  $V_1 = 0,5 \text{ l}$  đến thể tích  $V_2 = 1 \text{ l}$  ở nhiệt độ

$T = 10\text{ K}$ . Giả thiết khí tuân theo phương trình Bertlo:

$$\left(P + \frac{a}{TV^2}\right)(V - b) = RT, \text{ trong đó đối với heli } \frac{a}{R} = 1,9 \text{ l.K}^2/\text{mol}.$$

## §7. PHÂN BỐ MAXWELL<sup>1</sup>

7.1. Tìm tỷ số giữa số phân tử hydro  $n_1$  có vận tốc nằm trong khoảng từ 3000 đến 3010 m/s và số phân tử  $n_2$  có vận tốc nằm trong khoảng từ 1500 đến 1510 m/s, nếu nhiệt độ của hydro  $300^\circ\text{C}$ .

7.2. Xuất phát từ phân bố Maxwell, tìm trung bình bình phương của thành phần  $x$  của vận tốc các phân tử khí. Từ đó tìm động năng trung bình trên một bậc tự do của chuyển động tịnh tiến của phân tử khí.

7.3. Tìm vận tốc có xác suất lớn nhất  $v_m$ , vận tốc trung bình<sup>2</sup>  $\bar{v}$  và vận tốc toàn phương trung bình  $\bar{v}_{tp}$  của các phân tử clo ở nhiệt độ  $227^\circ\text{C}$ .

7.4. Ở nhiệt độ nào thì vận tốc toàn phương trung bình của các phân tử oxy bằng vận tốc toàn phương trung bình của các phân tử nitơ ở nhiệt độ  $100^\circ\text{C}$ ?

7.5. Hãy chứng minh rằng nếu coi vận tốc có xác suất lớn nhất là một đơn vị vận tốc của các phân tử khí, thì số phân tử có giá trị vận tốc tuyệt đối nằm trong khoảng  $v$  và  $v + dv$  sẽ không phụ thuộc vào nhiệt độ của khí.

7.6. Vận tốc trung bình của các phân tử khí lý tưởng trong quá trình nén hoặc giãn nở đoạn nhiệt phụ thuộc như thế nào vào áp suất?

7.7. Tìm biểu thức tính số phân tử khí trung bình  $dN$  có động năng nằm trong khoảng  $\varepsilon$  và  $\varepsilon + d\varepsilon$ .

7.8. Tìm giá trị có xác suất lớn nhất của động năng  $\varepsilon$  đối với chuyển động tịnh tiến của các phân tử khí, tức là giá trị  $\varepsilon_m$ , sao cho khi đó trong một khoảng năng lượng  $d\varepsilon$  cho trước, trong khí có số phân tử lớn nhất.

7.9. Với giá trị nào của nhiệt độ thì số phân tử nằm trong không gian có vận tốc trong khoảng cho trước  $(v, v + dv)$  là lớn nhất?

<sup>1</sup> Trong các bài tập ở chương này giả thiết rằng kích thước các lỗ và chiều dày của thành bình nhỏ so với chiều dài quãng đường tự do của phân tử khí. Ngoài ra trong tất cả các bài, trừ những bài có chú thích riêng, sự phân bố phân tử theo vận tốc là phân bố Maxwell.

<sup>2</sup> Trong tập sách này sử dụng hai cách ký hiệu giá trị trung bình tương tự nhau. Ví dụ  $\bar{v}^2 = \langle v^2 \rangle$ .

7.10\*. Tính vận tốc  $v_{1/2}$  của chuyển động nhiệt của một phân tử khí được xác định bởi điều kiện một nửa số phân tử chuyển động với vận tốc nhỏ hơn  $v_{1/2}$ , nửa còn lại chuyển động với vận tốc lớn hơn  $v_{1/2}$ .

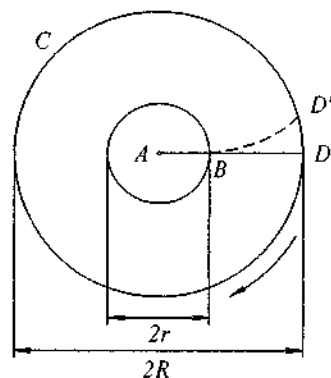
7.11. Tìm giá trị trung bình của đại lượng nghịch đảo vận tốc phân tử khí.

7.12\*. Tìm số phân tử trung bình có các thành phần vận tốc song song với một trục nào đó nằm trong khoảng  $(v_{//}, v_{//} + dv_{//})$  còn giá trị tuyệt đối của thành phần vuông góc nằm giữa  $v_{\perp}$  và  $v_{\perp} + dv_{\perp}$ .

7.13. Số lượng phân tử khí lý tưởng lưỡng nguyên tử thay đổi bao nhiêu lần trong khoảng nhỏ của các vận tốc  $\Delta v$  với tâm của khoảng là vận tốc có xác suất lớn nhất  $v_m$  ( $\Delta v \ll v_m$ ) trong một quá trình giãn nở đoạn nhiệt đến hai lần thể tích?

7.14. Trong diốt các electron do catốt nóng bứt ra bay vào điện trường cản của anốt. Chỉ có những electron đủ nhanh mới bay đến được anốt. Giả thiết rằng vận tốc chuyển động nhiệt của các electron phát ra từ catốt phân bố theo định luật Maxwell với nhiệt độ  $T = 1150 \text{ K}$ . Xác định lượng electron  $\alpha$  vượt qua điện thế cản: 1)  $U = 0,2 \text{ V}$ ; 2)  $U = 0,4 \text{ V}$ . Catốt có dạng một dây nhỏ thẳng dài căng dọc theo trục của anốt hình trụ.

7.15. Trên hình 354 biểu diễn mặt cắt theo phương ngang của thiết bị sử dụng trong thí nghiệm Stern để xác định vận tốc của các phân tử và nguyên tử. Tìm vận tốc của các nguyên tử bạc văng ra từ sợi dây ở tâm thiết bị, nếu khi  $n = 50$  vòng/s trên trụ ngoài độ lệch của vết của chùm phân tử khí thiết bị quay so với vết khi thiết bị đứng yên là  $\delta = 4,8 \text{ mm}$ . So sánh kết quả tính toán vận tốc của các nguyên tử bạc từ các số liệu đã cho với vận tốc này bằng cách sử dụng mối liên hệ giữa vận tốc toàn phương trung bình của các nguyên tử với nhiệt độ của khí. Nhiệt độ của sợi dây trong thí nghiệm Stern với các số liệu đã chỉ ra trên đây bằng  $1607^\circ \text{C}$  ( $1880 \text{ K}$ ),  $R = 10 \text{ cm}$ .



Hình 354

7.16. Các electron chuyển động trong một lớp mỏng trên bề mặt có thể xem như khí lý tưởng “hai chiều”. Tính đại lượng  $\alpha$  là tỷ số giữa vận tốc xác suất lớn nhất và vận tốc toàn phương trung bình của khí này.

7.17. Một nguồn điểm tĩnh nằm trong chân không phát ra liên tục và đẳng hướng các hạt khối lượng  $m$  có vận tốc phân bố theo định luật Maxwell tương ứng với nhiệt độ  $T$ . Giả thiết rằng khi bay đi các hạt không va chạm

với nhau. Tìm mật độ của chúng tại khoảng cách  $r$  tính từ nguồn. Nguồn phát ra  $v$  hạt trong một giây.

7.18. Tại tâm của một hình cầu bán kính  $R$  tại một thời điểm nào đó có  $N$  phân tử khí được tạo thành. Vận tốc của chúng phân bố theo quy luật Maxwell tương ứng với nhiệt độ  $T$ . Sau đó các phân tử bay đi không va chạm nhau và bám vào thành mặt cầu. Tìm mật độ  $j$  của dòng các phân tử gần mặt cầu dưới dạng hàm của thời gian. Xác định thời điểm  $t_0$  khi dòng cực đại, và tìm vận tốc  $v_0$  của các phân tử bay đến mặt cầu tại thời điểm đó.

7.19\*. Biểu diễn số phân tử  $Z$  va chạm vào một centimét vuông trên thành bình trong một giây, qua vận tốc trung bình của các phân tử khí nếu hàm phân bố của các phân tử theo vận tốc là đẳng hướng (tức là chỉ phụ thuộc vào giá trị tuyệt đối của vận tốc phân tử, chứ không phụ thuộc vào hướng). Xét trường hợp riêng của phân bố Maxwell.

7.20. Các electron chuyển động trong một lớp mỏng trên bề mặt có thể xem như khí lý tưởng "hai chiều". Tính tần số va chạm của các electron trên một đơn vị dài của chu vi đường biên của vùng chứa "khí" này. Giả thiết cho trước nhiệt độ  $T$ , mật độ các hạt trên bề mặt  $n$  và khối lượng electron  $m$ .

7.21. Viết biểu thức tính áp suất  $dP$  do các phân tử khí lý tưởng tác dụng lên thành bình, vận tốc các phân tử đó có độ lớn nằm trong khoảng  $v$  và  $v + dv$ . Tìm giá trị của vận tốc  $v_0$  để  $dP$  cực đại, nếu chiều rộng  $dv$  của khoảng vận tốc không đổi. Số lượng phân tử trong một đơn vị thể tích bằng  $n$ , nhiệt độ khí là  $T$ .

7.22. Viết biểu thức tính số phân tử trung bình  $dN$  của khí lý tưởng va đập vào một centimét vuông thành bình trong mỗi giây, vận tốc của các phân tử này có độ lớn nằm trong khoảng  $v$  và  $v + dv$ . Tìm giá trị của vận tốc  $v_0$  mà tại đó  $dN$  cực đại, nếu độ rộng của khoảng vận tốc  $dv$  không đổi. Số phân tử trong một đơn vị thể tích bằng  $n$ , nhiệt độ khí là  $T$ .

7.23. Tìm động năng toàn phần  $E$  của các phân tử khí đơn nguyên tử va đập vào một centimét vuông thành bình trong một đơn vị thời gian. Trước giải bài toán tổng quát với hàm phân bố đẳng hướng, sau đó ứng dụng kết quả cho trường hợp riêng của phân bố Maxwell.

7.24. Trong một bình chứa khí lý tưởng thành mỏng ở nhiệt độ  $T$  có một lỗ nhỏ, các phân tử bay qua lỗ nhỏ này vào chân không. Xác định giá trị động năng trung bình  $\bar{\epsilon}$  của một phân tử bay qua lỗ, với giả thiết rằng trong thời gian thí nghiệm sự thay đổi số các phân tử và nhiệt độ của khí trong bình không đáng kể.

7.25\*. Trong một bình thành mỏng thể tích  $V$  chứa khí lý tưởng. Thành bình được giữ ở nhiệt độ không đổi. Bình được đặt trong chân không. Mật độ phân tử khí  $n$  bên trong bình thay đổi theo thời gian như thế nào nếu khoét



một lỗ nhỏ diện tích  $S$  trên thành bình? Xác định thời gian  $t_{1/2}$  cho đến khi áp suất khí trong bình giảm một nửa. Giả thiết rằng sự giãn đoạn nhiệt khí diễn ra chậm đến mức nó gần như không phá vỡ trạng thái cân bằng trong toàn bình, trừ một vùng nhỏ gần lỗ. Coi nhiệt độ trong bình là không đổi và bằng nhiệt độ bên ngoài.

**7.26.** Một bình có thành mỏng được hút hết không khí, thành bình được giữ ở nhiệt độ không đổi. Bình được đặt trong môi trường khí lý tưởng được giữ ở cùng nhiệt độ và có mật độ phân tử không đổi  $n_0$ . Mật độ phân tử khí trong bình sẽ thay đổi theo thời gian như thế nào nếu người ta khoét một lỗ rất nhỏ trên thành bình?

**7.27.** Sau một khoảng thời gian bằng bao nhiêu thì áp suất không khí trong một bình đã hút hết khí, ở thành có khoét một lỗ có diện tích  $S = 10^{-6} \text{ cm}^2$  tăng từ  $P_1 = 10^{-4} \text{ mmHg}$  đến  $P_2 = 10^{-2} \text{ mmHg}$ , nếu áp suất bên ngoài  $P_0 = 760 \text{ mmHg}$ , còn nhiệt độ bằng  $20^\circ\text{C}$ ? Thể tích bình  $V = 1 \text{ l}$ . Sau bao lâu thì áp suất trong bình bằng một nửa áp suất khí quyển?

**7.28\*.** Một bình có màng ngăn được chia thành hai phần bằng nhau, mỗi phần có thể tích  $V$ . Trong một ngăn có chứa nitơ, ngăn còn lại chứa oxy ở cùng áp suất  $P$  và nhiệt độ  $T$ . Khí trong hai ngăn đều rất loãng (chiều dài trung bình của quãng đường tự do rất lớn so với kích thước bình). Tại thời điểm  $t = 0$ , người ta khoét một lỗ nhỏ diện tích  $S$  trên màng ngăn. Tìm áp suất trong hai ngăn của bình theo sự phụ thuộc vào thời gian. Giả thiết nhiệt độ của khí trong cả quá trình là không đổi. Biểu diễn kết quả theo các vận tốc trung bình của nitơ và oxy là  $\overline{v_n}$  và  $\overline{v_o}$ .

**7.29\*.** Một bình kín đã hút hết khí được đặt trong môi trường hỗn hợp của hai khí có tỷ lệ phân tử lượng 1:4, còn tỷ lệ mật độ (tức là số lượng phân tử trong một đơn vị thể tích) bằng  $\alpha$ . Hỗn hợp khí bên ngoài bình được giữ ở áp suất và nhiệt độ không đổi. Trên thành bình người ta khoét một lỗ nhỏ, qua lỗ này hai khí tràn rất chậm vào trong bình. Xác định giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của tỷ số mật độ giữa thành phần nặng và thành phần nhẹ của hỗn hợp khí tại các thời điểm khi đạt những giá trị này.

**7.30.** Một bình kín được hút hết khí đặt trong môi trường khí oxy được giữ ở nhiệt độ không đổi và áp suất  $P$  không cao. Trên thành bình có một lỗ nhỏ, khí oxy ở bên ngoài tràn qua lỗ vào trong bình. Sau một giờ áp suất trong bình tăng từ 0 đến  $\frac{P}{2}$ . Áp suất trong bình sẽ bằng bao nhiêu sau cùng một

khoảng thời gian đó, nếu sau khi hút hết khí bình được đưa vào môi trường khí hydro ở cùng nhiệt độ và áp suất?

**7.31\*.** Một bình thành mỏng thể tích  $V$  chứa đầy khí lý tưởng được giữ ở nhiệt độ không đổi  $T$ . Trên thành bình có lỗ nhỏ diện tích  $S$ . Các phân tử khí

lý tưởng bay qua lỗ vào chân không. Cần phải cấp cho bình một nhiệt lượng  $Q = Q(t)$  bằng bao nhiêu trong một đơn vị thời gian để giữ nhiệt độ trong bình không đổi?

**7.32\*.** Một bình thành mỏng được đặt trong chân không. Trên thành bình có một lỗ nhỏ, từ bên ngoài lỗ người ta cho bay vào bình một chùm phân tử đơn nguyên tử bay có cùng vận tốc  $v_0$  vuông góc với mặt phẳng lỗ. Mật độ phân tử trong bình bằng  $n_0$ . Tìm vận tốc  $\bar{v}$ , mật độ phân tử  $n$  và nhiệt độ  $T$  của khí trong bình ở trạng thái cân bằng.

**7.33.** Qua một lỗ nhỏ trên thành bình ở nhiệt độ  $T$  các phân tử bay vào chân không. Với giá trị nào của vận tốc  $v_0$  thì số phân tử bay qua lỗ trong một đơn vị thời gian trong khoảng vận tốc hẹp  $(v, v + dv)$  sẽ cực đại nếu độ rộng  $dv$  của khoảng không đổi? Vận tốc này liên hệ với vận tốc toàn phương trung bình như thế nào? Giả thiết rằng trong thời gian thí nghiệm số các phân tử và nhiệt độ khí trong bình thay đổi không đáng kể.

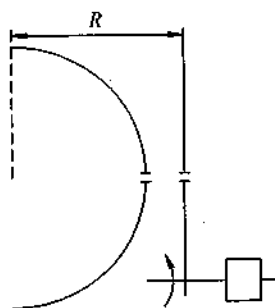
**7.34.** Qua một lỗ nhỏ trên thành bình ở nhiệt độ  $T$  các phân tử bay vào chân không. Với giá trị nào của vận tốc  $v_0$  thì động năng toàn phần của các phân tử bay qua lỗ trong một đơn vị thời gian trong khoảng vận tốc hẹp  $(v, v + dv)$  sẽ cực đại nếu độ rộng của khoảng  $dv$  không đổi? Vận tốc này liên hệ với vận tốc toàn phương trung bình như thế nào? Giả thiết rằng trong thời gian thí nghiệm số các phân tử và nhiệt độ khí trong bình thay đổi không đáng kể.

**7.35.** Trong một bình thành mỏng chứa khí lý tưởng ở áp suất  $P$  có một lỗ tròn nhỏ bán kính  $r$ , qua lỗ nhỏ đó các phân tử bay vào chân không. Cách lỗ một khoảng  $L$  có một đĩa tròn bán kính  $R$  ( $R \gg r$ ), sao cho mặt phẳng đĩa song song với mặt lỗ, còn tâm đĩa và tâm lỗ nằm trên một đường thẳng vuông góc với mặt lỗ. Xác định lực  $F$  tác dụng lên đĩa. Giả thiết rằng tất cả các hạt đều dính vào đĩa.

Hướng dẫn: 
$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-\gamma x^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^{n+1} \gamma^n} \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}.$$

**7.36.** Với tỷ lượng hạt bằng bao nhiêu thì chùm nguyên tử heli bay qua lỗ nhỏ trên thành bình có trị số vận tốc lớn hơn vận tốc vũ trụ cấp II? Khí trong bình có thể được coi là lý tưởng và trong trạng thái cân bằng nhiệt động ở nhiệt độ  $T = 300 \text{ K}$ .

**7.37.** Một đĩa có một lỗ khoét nhỏ đang quay trước một lỗ không lớn trên một bình chân không (H. 355). Tại thời điểm khi lỗ trên đĩa trùng với lỗ trên thành bình, bên trong bình cách đĩa một khoảng  $R$  có  $N$  phân tử khí được tạo thành, vận tốc của các phân tử này tuân theo phân bố Maxwell ở nhiệt độ  $T$ . Sau đó



Hình 355

các phân tử này bay đi không va chạm với nhau và dính vào thành bình và vào đĩa. Với vận tốc  $\omega$  của đĩa bằng bao nhiêu thì số phân tử bay qua lỗ trên đĩa khi nó trùng lần tiếp theo với lỗ trên bình sẽ lớn nhất? Tìm vận tốc các phân tử bay qua lỗ trên đĩa khi đó.

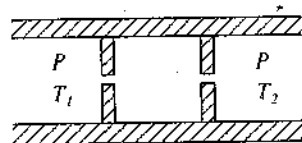
**7.38.** Ngoài những tên lửa có vòi phun tương đối rộng đảm bảo quá trình giãn đoạn nhiệt vô cùng chậm, về mặt nguyên tắc còn có loại tên lửa khác, trong đó khí phun qua tập hợp những lỗ nhỏ có kích thước phân tử rất nhỏ so với chiều dài quãng đường tự do. So sánh lực kéo của hai loại tên lửa trên khi chúng chuyển động trong chân không, nếu dùng tác nhân là khí đa nguyên tử. Nhiệt độ khí ban đầu và suất tiêu hao nhiên liệu trong hai trường hợp là như nhau.

**7.39.** Một bình chứa có thành mỏng, cách nhiệt đã hút hết khí được đặt trong môi trường gồm hỗn hợp khí oxy và héli ở nhiệt độ  $T_0$ , áp suất riêng phần của oxy và héli như nhau. Hai khí này chảy vào bình qua một lỗ nhỏ. Tìm nhiệt độ của hỗn hợp khí trong bình khi áp suất của nó nhỏ không đáng kể so với áp suất bên ngoài. Giả thiết sự cân bằng nhiệt đã kịp thiết lập.

**7.40.** Khí neon từ một bình cách nhiệt chảy vào chân không qua một lỗ nhỏ. Xác định nhiệt độ của khí khi trong bình còn lại một nửa số nguyên tử. Các điều kiện ban đầu của khí là điều kiện tiêu chuẩn. Bỏ qua nhiệt dung của bình.

**7.41.** Trong một bình cách nhiệt chứa không khí ở nhiệt độ ban đầu  $T_0$  và áp suất  $P_0$ . Trên thành bình có một lỗ nhỏ, không khí trong bình phun qua lỗ nhỏ này vào chân không. Nhiệt độ của không khí còn lại trong bình sẽ phụ thuộc như thế nào vào áp suất?

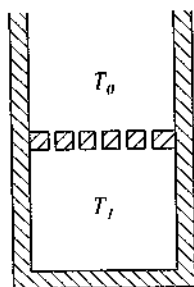
**7.42.** Một khoang trống cách nhiệt phân cách hai bình chứa cùng một loại khí. Nhiệt độ của khí trong một bình là  $T_1 = 200$  K, trong bình còn lại là  $T_2 = 800$  K. Áp suất trong cả hai bình bằng nhau  $P = 1$  atm. Khoang trống thông với hai bình bằng



Hình 356

các lỗ nhỏ (H. 356). Hai lỗ có kích thước như nhau. Tìm áp suất và nhiệt độ được thiết lập bên trong khoang trống.

**7.43.** Một xilanh hình trụ đặt thẳng đứng (H. 357) phân cách với bên ngoài bằng một piston khối lượng  $M = 1$  kg và diện tích  $S = 10\text{cm}^2$  có các lỗ rất nhỏ với tổng diện tích tiết diện  $\sigma = 0,01\text{cm}^2$ . Trong bình có chứa không khí với nhiệt độ luôn được giữ bằng  $T_1 = 400$  K. Độ cao của piston thay đổi như thế nào sau 10s, nếu nhiệt độ bên



Hình 357

$T_0 = 300\text{ K}$ ? Coi không khí là khí lý tưởng. Bỏ qua ma sát của piston vào thành xilanh. Coi quá trình là chuẩn tĩnh.

7.44. Khí lý tưởng đơn nguyên tử được chứa trong bình thể tích  $V$  có các thành cách nhiệt, trên thành bình có một lỗ nhỏ diện tích  $S$ , phun qua lỗ này các phân tử khí phun vào chân không. Giả thiết kích thước của lỗ nhỏ đến mức có thể coi trạng thái của khí trong bình tại thời điểm bất kỳ là cân bằng. Xác định quy luật thay đổi của nhiệt độ trong bình theo thời gian. Nhiệt độ ban đầu của khí là  $T_0$  và tất cả các thông số cần thiết của khí trong bình xem như đã biết. Bỏ qua nhiệt dung của thành bình. Kết quả thay đổi (một cách định tính) như thế nào nếu bình có thể dịch chuyển tự do?

7.45. Trong một bình kín có khí lý tưởng loãng ở áp suất  $P$ . Trên thành bình có khoét một lỗ nhỏ diện tích  $\sigma$ . Xác định phản lực  $F$  tác dụng lên bình khi khí phun qua lỗ.

7.46. Việc đo phổ vận tốc của các neutron chậm được thực hiện bằng cách sử dụng máy phát đơn sắc và một thiết bị tách sóng đặt ngay sau đó. Máy đơn sắc tạo các xung neutron có cùng độ dài với vận tốc trong khoảng  $(v, v + \Delta v)$ , trong đó độ rộng của khoảng  $\Delta v$  không đổi ( $\Delta v \ll v$ ). Các neutron được ghi bằng thiết bị tách sóng qua một lỗ có tiết diện  $\sigma \propto \frac{1}{v}$ . Giả thiết sự phân bố vận tốc của các neutron là phân bố Maxwell với vận tốc toàn phương trung bình  $\bar{v}_{tp} = 3\text{ km/s}$ . Tìm trị số của  $v$  để số neutron ghi được lớn nhất.

7.47. Người ta tách các đồng vị của uran  $^{238}\text{U}$  và  $^{235}\text{U}$  bằng cách cho uran florua thể khí vào máy ly tâm. Trên trục của máy ly tâm nồng độ của hai khí được giữ không đổi bằng nguồn bên ngoài. Vận tốc lớn nhất ở mép máy ly tâm là  $v = 500\text{ m/s}$ . Hỏi tỷ số nồng độ của các đồng vị uran thay đổi bao nhiêu lần nếu thí nghiệm không diễn ra ở nhiệt độ  $T_1 = 300\text{ K}$  mà ở  $T_2 = 600\text{ K}$ ?

7.48. Tỷ số giữa phân tử lượng các khí khác nhau có thể xác định theo vận tốc phun của chúng, tức là vận tốc phun từ bình qua lỗ nhỏ. Chứng minh rằng thời gian để một thể tích khí nào đó phun từ bình tỷ lệ với căn bậc hai của phân tử lượng của khí đó.

7.49. Một bình có màng ngăn có các lỗ nhỏ. Người ta bơm liên tục vào bình hỗn hợp khí  $\text{H}_2$  và  $\text{D}_2$  cùng một nồng độ phân tử (H.358). Giả thiết rằng quãng đường tự do của phân tử trong các lỗ lớn hơn kích thước ngang của lỗ.



Hình 358

Xác định tỷ số nồng độ  $\frac{n_D}{n_H}$  được thiết lập trong bình.

**7.50.** Xác định phân phân tử của khí lý tưởng sau khi va chạm vào thành bình trong khoảng thời gian xác định (ví dụ trong một giây) có động năng lớn hơn  $\varepsilon$ ?

**7.51\*.** Sợi dây wolfram mảnh bay hơi trong chân không ở nhiệt độ  $T = 2000\text{ K}$ , khối lượng của sợi dây giảm với vận tốc đo được là  $q = 1,14 \cdot 10^{-13} \text{ g/(s.cm}^2\text{)}$ . Tính áp suất hơi wolfram bão hoà ở nhiệt độ trên.

**7.52.** Vận tốc bay hơi tức thời của nước từ mỗi  $\text{cm}^2$  bề mặt sẽ bằng bao nhiêu nếu phía trên mặt nước là chân không, còn nhiệt độ của nước tại thời điểm đó bằng  $300\text{ K}$ ? Áp suất hơi bão hoà của nước ở nhiệt độ này là  $P = 27 \text{ mmHg}$ . So sánh giá trị tìm được với giá trị vận tốc hơi của nước ở điều kiện thường (tức là khi trên mặt nước là áp suất khí quyển) và giải thích sự khác nhau đó.

**7.53.** Trong một lò phản ứng hình cầu bán kính  $r = 1 \text{ m}$  diễn ra phản ứng hoá học giữa khí chứa trong bình và thành bình. Sản phẩm phản ứng có dạng bột được đưa liên tục ra khỏi lò. Chỉ có những phân tử có động năng  $E \geq E_n = 1 \text{ eV}$  mới có thể tham gia vào phản ứng, xác suất diễn ra phản ứng khi phân tử va vào thành bình là  $w = 10^{-3}$ . Hỏi cần phải đưa khí vào lò với vận tốc  $\frac{dM}{dt}$  bằng bao nhiêu để giữ áp suất trong lò không đổi  $P_0 = 10 \text{ atm}$ ?

Khối lượng mol phân tử của khí  $\mu = 40 \text{ g/mol}$ . Giả thiết ở gần thành lò các phân tử phân bố vận tốc theo quy luật Maxwell ở nhiệt độ  $T = 1160 \text{ K}$ .

**7.54.** Tìm độ biến thiên entropi của  $64\text{ g}$  ôxy, nếu sau một quá trình nào đó số lượng va chạm của các phân tử vào  $1\text{ cm}^2$  thành bình trong một giây tăng lên 4 lần, còn động năng toàn phần của các phân tử tăng lên 16 lần.

**7.55.** Số lượng va chạm của  $v$  phân tử khí vào  $1\text{ cm}^2$  thành bình trong một giây sẽ thay đổi như thế nào nếu thể tích của khí tăng đoạn nhiệt lên hai lần? Khí đã cho là khí lý tưởng lưỡng nguyên tử.

**7.56.** Tần số va chạm vào thành bình của các phân tử khí cacbonic thay đổi như thế nào nếu thể tích của nó tăng 10 lần trong quá trình polytropic với nhiệt dung bằng  $8,31\text{ J/(mol.K)}$ ?

**7.57.** Người ta cho nitor giãn nở theo một quá trình polytropic nào đó. Kết quả cho thấy tần số va chạm của các phân tử vào thành bình không đổi. Nhiệt dung trong quá trình này bằng bao nhiêu?

**7.58.** Động năng toàn phần của các phân tử khí lưỡng nguyên tử va chạm vào  $1\text{ cm}^2$  thành bình trong một giây thay đổi bao nhiêu lần, nếu thể tích khí tăng đoạn nhiệt lên hai lần?

7.59. Tìm độ biến thiên entropi của một mol khí lý tưởng đơn nguyên tử trong quá trình giãn nở đến thể tích gấp đôi. Số phân tử va chạm vào  $1\text{cm}^2$  thành bình trong quá trình giãn nở vẫn không thay đổi.

7.60. Tìm độ biến thiên entropi của một mol khí lý tưởng khi áp suất của nó tăng lên hai lần và động năng của các phân tử va đập vào  $1\text{cm}^2$  thành bình cũng tăng lên hai lần.

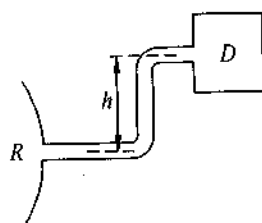
7.61. Trong một bình thể tích  $V$  có  $N$  phân tử khí ở nhiệt độ  $T$ . Khi va chạm vào thành bình mỗi phân tử có thể dính vào thành bình với xác suất  $\beta = \text{const} \ll 1$ , nếu năng lượng của nó nhỏ hơn  $E_0$ . Các phân tử có năng lượng lớn hơn  $E_0$  không dính vào thành bình. Xác định số phân tử khí  $n$  bám vào thành bình trong một đơn vị thời gian, nếu diện tích thành bình bằng  $S$ .

7.62. Các hạt có cùng khối lượng  $m$  và cùng xác suất có vận tốc  $v_x$  bất kỳ nằm trong khoảng  $(-v_0; +v_0)$ . Năng lượng của chúng có cùng xác suất không? Viết quy luật phân bố theo vận tốc  $d\omega_1(v_x)$  và theo năng lượng  $d\omega_2(\varepsilon)$ . Tìm  $\overline{v_x}$ ,  $\overline{|v_x|}$ ,  $\overline{v_x^2}$ .

7.63. Tìm sự phụ thuộc của số thiên thạch rơi xuống Trái Đất trong một đơn vị thời gian vào vận tốc ban đầu  $v_0$  của chúng. Mật độ trung bình của các thiên thạch trong không gian vũ trụ là  $n$ . Giả thiết vận tốc các thiên thạch nằm trong khoảng  $(v_{\min}, v_{\max})$ , còn hàm phân bố của chúng theo vận tốc

$$f(v) = \frac{1}{n} \frac{dn}{dv} \text{ không đổi. Khối lượng Trái Đất } M, \text{ bán kính } R.$$

7.64. Trong các lò phản ứng chạy bằng các neutron nhiệt có các neutron rất chậm (neutron siêu lạnh). Điểm đặc biệt của các neutron siêu lạnh chính là ở chỗ khi vận tốc của chúng  $v < v_b$  (thường vận tốc biên  $v_b \sim 10 \text{ m/s}$ ) các neutron dù tới thành là góc bất kỳ đều phản xạ đàn hồi. Để đưa các neutron siêu lạnh từ lò phản ứng ra, người ta sử dụng các ống rỗng – ống dẫn neutron. Trên hình 359 biểu diễn lò phản ứng  $R$ ,



Hình 359

ống dẫn neutron dạng đặc thù và ở cuối ống là thiết bị dò neutron  $D$ . Giả thiết rằng phổ neutron theo vận tốc trong lò phản ứng có dạng phân bố Maxwell. Tìm sự phụ thuộc của dòng neutron  $\Phi$  đi đến thiết bị dò  $D$  vào chiều cao  $h$  của ống dẫn sóng. Xác định độ cao  $H$  để khi đó dòng neutron biến mất.

7.65. Các neutron xuyên từ chân không vào phần lớn các chất là do chúng vượt qua một ngưỡng năng lượng xác định nào đó. Vì vậy trong một khoang kín các neutron đủ chậm (neutron nhiệt) bị “khóa” và có thể ngưng tụ lại.

Đánh giá tỷ lượng hạt  $\alpha$  từ chùm neutron nhiệt có phân bố vận tốc Maxwell sẽ bị “khóa” trong khoang bằng đồng? Góc trượt giới hạn  $\varphi$  khi phản xạ toàn phần đối với các neutron chuyển động với vận tốc nhiệt trung bình bằng 10 phút (1/6 độ). Va chạm của các neutron vào thành bình có thể xem như va chạm đàn hồi.

7.66. Trong một bình chân không thể tích  $V=1\text{ l}$  có các neutron siêu lạnh phản xạ từ thành bình với hệ số phản xạ xấp xỉ bằng 1. Trên thành bình có một lỗ diện tích  $S$  được dán bằng một màng mỏng trong suốt đối với các neutron siêu lạnh. Diện tích lỗ  $S$  bằng bao nhiêu, nếu biết rằng thời gian giữ các neutron trong bình chỉ nhỏ hơn hai lần so với tuổi thọ trung bình của các neutron tự do  $\tau=10^3\text{ s}$ ? Giả thiết vận tốc của tất cả các neutron siêu lạnh bằng nhau và bằng  $v=5\text{ m/s}$ .

## §8. PHÂN BỐ BOLTZMANN

8.1. Tính khối lượng của khí quyển Trái Đất.

8.2. Tìm tỷ số giữa khối lượng khí quyển  $m$  với khối lượng hành tinh  $M$ . Gia tốc hấp dẫn trên bề mặt hành tinh bằng  $g$ , áp suất khí quyển  $P_0$ . Tính tỷ số đó đối với Trái Đất.

8.3. Hệ thiên hà có thể xem như một đĩa đồng tính mỏng (lớp hình trụ). Bán kính đĩa  $R=10^{21}\text{ cm}$ , khối lượng  $M=10^{39}\text{ g}$ . Đĩa được bao bọc bằng khí quyển hydro có áp suất trên bề mặt đĩa gần trục của đĩa  $P_0=10^{-21}\text{ N/cm}^2$ .

Xác định khối lượng khí quyển  $m_{atm}$  nếu  $R \ll \frac{\gamma M}{kT_0/m_p}$ , trong đó  $m_p$  là

khối lượng proton,  $T_0$  là nhiệt độ tại điểm đo áp suất  $P_0$ .

8.4\*. Một bình cách nhiệt chứa khí lý tưởng được treo trên một sợi chỉ trong trọng trường. Do tác dụng của trọng lực mật độ khí ở dưới đáy bình lớn hơn ở phía trên. Người ta đốt sợi chỉ, bình khí rơi tự do. Giả thiết rằng trong thời gian rơi cân bằng nhiệt động kịp thiết lập. Xác định nhiệt độ cân bằng của khí được thiết lập trong bình khi rơi.

8.5. Sử dụng công thức Boltzmann tìm thế năng trung bình  $\overline{\varepsilon_{tn}}$  của một phân tử khí trong khí quyển Trái Đất, giả thiết khí quyển là đẳng nhiệt (với nhiệt độ  $T$ ), còn trọng trường là đồng nhất. Tính nhiệt dung  $C$  của khí trong các điều kiện trên.

8.6. Một bình kín hình trụ cách nhiệt chiều cao  $H$  chứa đầy khí được treo thẳng đứng trong trọng trường đồng nhất. Nhiệt độ khí tại mọi điểm trong bình như nhau và bằng  $T$ . Tìm thế năng trung bình  $\varepsilon_m$  của một phân tử khí.

8.7. Trong bình chứa hình trụ của bài trước người ta đổ vào một mol khí lý tưởng với khối lượng phân tử tương đối  $\mu$ . Tìm nhiệt dung của khí này, có tính đến ảnh hưởng của trọng trường và giả thiết  $\mu gH \ll RT$ .

8.8. Hỗn hợp của hai khí lý tưởng gồm  $N_1$  và  $N_2$  hạt với khối lượng  $m_1$  và  $m_2$  tương ứng được chứa trong bình trụ chiều cao  $h$  đặt trong trọng trường. Xác định vị trí khối tâm  $Z_c$  của hỗn hợp này, nếu nhiệt độ của hỗn hợp bằng  $T$ .

8.9. Tính xem ở đâu chứa nhiều không khí hơn: trong lớp dày 10cm gần bề mặt Trái Đất hay trong lớp dày 1km ở độ cao 100km. Giả thiết khí quyển đẳng nhiệt ở nhiệt độ  $T = 300K$ . Bỏ qua sự thay đổi gia tốc rơi tự do theo độ cao.

8.10. Ở gần bề mặt Trái Đất mật độ argon  $^{40}\text{Ar}$  chiếm 0,9%. Hỏi mật độ argon tại độ cao mà ở đó áp suất không khí giảm 10 lần bằng bao nhiêu, nếu như khí quyển cân bằng và đẳng nhiệt?

8.11. Một hành tinh có trọng lực trên bề mặt bằng trọng lực của Trái Đất. Khí quyển của nó tạo bởi khí nitơ và heli ( $\text{He} : \text{N}_2 = 7 : 1$ ). Tìm vận tốc âm thanh gần bề mặt hành tinh này. Coi khí quyển là đẳng nhiệt ở nhiệt độ  $T = 200K$ , bỏ qua sự phụ thuộc của gia tốc rơi tự do vào độ cao.

8.12. Trong một cột nước ở nhiệt độ  $20^\circ\text{C}$  có nổi các hạt nhựa hình cầu bán kính  $r = 2,1 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$ , khối lượng riêng các hạt bằng  $1,19 \text{ g/cm}^3$ . Khi hiệu các độ cao là  $1,1 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$  thì tỷ số nồng độ các hạt bằng 100:12. Tìm số Avôgadrô trên cơ sở các dữ liệu trên nếu biết hằng số khí  $R$ .

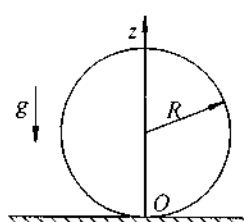
8.13. Để xác định số Avôgadrô, J. Perren đã đo sự phân bố theo độ cao của các hạt gômmihut lơ lửng trong nước. Ông thấy rằng tỷ số các hạt trong các lớp cách nhau một khoảng  $l = 30 \mu\text{m}$  là  $\alpha = 2,08$ . Khối lượng riêng của các hạt  $\rho = 1,194 \text{ g/cm}^3$ , của nước  $\rho_0 = 1 \text{ g/cm}^3$ . Bán kính của các hạt  $r = 0,212 \mu\text{m}$ . Trên cơ sở các dữ liệu đã cho tính số Avôgadrô  $N$ . Nhiệt độ của nước  $t = 18^\circ\text{C}$ .

8.14. Một bình hình cầu bán kính  $R$  chứa đầy khí lý tưởng được đặt trong vùng của trọng trường đồng nhất có gia tốc rơi tự do  $g$  (H. 360). Với nhiệt độ  $T$  của khí bằng bao nhiêu thì vị trí có xác suất lớn nhất của nguyên tử khí sẽ

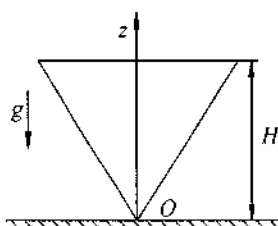


gần mặt phẳng ngang cách tâm của hình cầu một khoảng  $\frac{R}{2}$ ? Khối lượng phân tử khí là  $m_0$ .

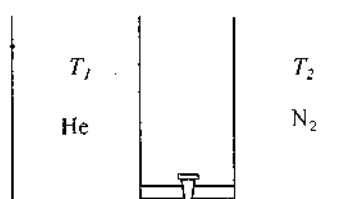
**8.15.** Một bình hình nón chiều cao  $H$  chứa đầy khí lý tưởng (H. 361). Gia tốc rơi tự do  $g$  song song với trục bình chứa và hướng về phía đỉnh nón. Với nhiệt độ  $T$  của khí bằng bao nhiêu thì vị trí có xác suất lớn nhất của nguyên tử khí sẽ gần mặt phẳng ngang ở độ cao  $\frac{H}{2}$ ? Khối lượng phân tử khí là  $m_0$ .



Hình 360



Hình 361



Hình 362

**8.16.** Ở nửa dưới của một bình chứa cách nhiệt hình trụ chiều cao  $H$ , phân cách với nửa trên bằng một màng ngăn, có chứa khí lý tưởng ở nhiệt độ  $T_0$ . Tìm nhiệt độ  $T$  của khí sau khi bỏ màng ngăn. Khối lượng phân tử của khí là  $\mu$ , nhiệt dung phân tử của nó  $C_V$ . Giả thiết rằng  $\frac{\mu g H}{RT_0} \ll 1$ .

**8.17.** Hai bình chứa đựng đứng cao vô hạn đặt trong trường hấp dẫn đồng nhất được thông với nhau ở dưới đáy bằng một ống có van (H. 362). Trong bình thứ nhất chứa một mol hêli ở nhiệt độ  $T_1$ , trong bình thứ hai chứa một mol nitơ ở nhiệt độ  $T_2$ . Người ta mở van, sau một khoảng thời gian đủ dài, trong các bình thiết lập một nhiệt độ  $T$  như nhau. Xác định nhiệt độ đó, coi sự cách nhiệt của các bình là lý tưởng.

**8.18.** Một tên lửa có dạng hình trụ chiều cao  $L$ , bên trong chứa khí với khối lượng các phân tử là  $m$ . Tên lửa chuyển động với gia tốc  $a$  theo hướng trục của trụ. Sau đó người ta ngắt động cơ tên lửa. Tìm sự thay đổi vị trí trọng tâm của khí trong tên lửa. Coi sự khác nhau về mật độ khí trong chuyển động có gia tốc của tên lửa là rất nhỏ.

**8.19.** Một tên lửa có cabin điều nhiệt hình trụ chiều cao  $h$ . Tên lửa chuyển động với gia tốc  $a$  theo hướng trục của trụ. Khối lượng không khí trong cabin bằng  $M$ . Sau khi tắt động cơ tên lửa, entropi của khí trong cabin thay đổi như thế nào? Không khí được coi như khí lý tưởng có khối lượng phân tử  $\mu$ . Giả thiết rằng  $\frac{\mu a h}{RT} \ll 1$ , trong đó  $T$  là nhiệt độ không khí trong cabin.

Xét hai trường hợp ngắt động cơ:

- 1) tức thời;
- 2) chuẩn tĩnh.

**8.20.** Tính thành phần vận tốc song song với bề mặt Trái Đất  $v_{//}$  của một phân tử, sao cho trung bình trong tất cả khí quyển Trái Đất chỉ có một phân tử có thành phần vận tốc song song lớn hơn  $v_{//}$ . Coi khí quyển là đẳng nhiệt, nằm trong trọng trường đồng nhất với  $T = 300\text{K}$ ,  $\mu = 29$ . Phân bố của các phân tử theo vận tốc là phân bố Maxwell.

**8.21.** Một bình chứa được ngăn thành hai nửa bởi một vách ngăn. Trong nửa thứ nhất chứa khí lý tưởng lưỡng nguyên tử, nửa thứ hai được hút hết khí. Tại một thời điểm nào đó người ta khoét một lỗ hổng lớn trên vách ngăn và khí phun từ ngăn thứ nhất sang ngăn thứ hai. Ngay sau đó lỗ được bít lại. Tìm nhiệt độ của khí ở ngăn thứ hai sau khi bít lỗ. Tính khối lượng khí ở nửa thứ hai. Nhiệt độ ban đầu của khí bằng  $T_0$ , áp suất  $P_0$ , diện tích lỗ  $S$ , thời gian khí phun qua lỗ  $\Delta t$ , khối lượng phân tử khí là  $\mu$ . Coi thành bình và vách ngăn là cách nhiệt và bỏ qua nhiệt dung của chúng.

**8.22.** Một bình kín được ngăn thành hai phần bằng nhau bởi một vách ngăn dựng đứng, phần trên của vách ngăn có một lỗ không lớn diện tích  $\sigma$ . Trong một ngăn có chứa nước đến miệng lỗ, trong ngăn còn lại nước thấp hơn miệng lỗ một khoảng  $H$ . Hệ được giữ ở nhiệt độ không đổi  $T$ . Giả thiết diện tích lỗ nhỏ đến mức sao cho trong mỗi ngăn nước đều ở trạng thái cân bằng với hơi. Xác định thời gian đến khi hiệu mức nước giảm hai lần. Hơi nước được coi gần đúng là khí lý tưởng; áp suất hơi bão hoà ở nhiệt độ  $T$  là  $P_0$ ; diện tích đáy mỗi ngăn của bình bằng  $S$ .

**8.23.** Một bình trụ bán kính  $R$ , chiều cao  $H$  chứa đầy khí đồng nhất về hoá học, quay đều trong trọng trường đồng nhất quanh trục của nó với vận tốc góc  $\omega$ . Tìm sự phân bố mật độ phân tử khí bên trong hình trụ, nếu trục của nó hướng thẳng đứng.

**8.24.** Để xác định khối lượng phân tử tương đối của các hạt keo, người ta nghiên cứu sự phân bố mật độ của chúng trong trường lực hướng tâm xuất hiện khi quay máy ly tâm. Tìm khối lượng phân tử tương đối  $\mu$  của các hạt keo, biết rằng tỷ số giữa mật độ của chúng tại các điểm cách trục máy ly tâm các khoảng  $r_1$  và  $r_2$  bằng  $\alpha$ . Khối lượng riêng của các hạt  $\rho$ , của dung môi là  $\rho_0$ . Vận tốc góc của máy ly tâm bằng  $\omega$ .

**8.25.** Nhiệt dung của khí quay tròn tăng lên bao nhiêu so với nhiệt dung của khí đứng yên? Khí argon có phân tử lượng  $\mu = 40\text{g/mol}$  chứa đầy trong xilanh bán kính  $a = 2,5\text{cm}$  và quay quanh trục của xilanh với vận tốc góc  $\omega = 2 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$  ở nhiệt độ  $T = 300\text{K}$ .

8.26. Một bình trụ bán kính  $r_0$  chứa đầy khí ở nhiệt độ  $T_0$  quay quanh trục của nó với vận tốc góc  $\omega$ , khi đó khối lượng riêng của khí gần trục quay bằng  $\rho_0$ . Người ta hãm chuyển động của bình. Xác định giá trị của khối lượng riêng  $\rho_1$  mới được thiết lập. Bỏ qua sự khác biệt về khối lượng riêng của khí tại các phần khác nhau của bình chứa.

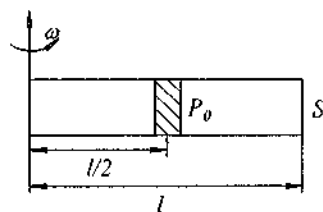
8.27. Bên trong một máy ly tâm bán kính 20cm đang quay đều có chứa ôxy. Tìm hiệu số tương đối giữa khối lượng riêng của khí ở gần thành và gần trục, nếu máy ly tâm quay 40 vòng/phút, nhiệt độ của khí  $T = 300\text{K}$ .

8.28. Người ta đo sự phân bố các phân tử prôtít trong dung dịch chứa trong máy ly tâm. Cách trục máy ly tâm một khoảng, cường độ lực hướng tâm có giá trị  $G = 100g$ , còn gradient mật độ tương đối tại điểm đó  $\alpha = \frac{1}{n} \frac{dn}{dr} = 10\text{cm}^{-1}$ .

Khối lượng riêng của prôtít  $\rho = 1,1\text{g/cm}^3$ , của dung môi  $\rho_0 = 0,9\text{g/cm}^3$ , nhiệt độ  $T = 20^\circ\text{C}$ . Tìm khối lượng mol của prôtít.

8.29. Một ống nằm ngang bịt kín hai đầu chứa đầy nitơ quay với vận tốc góc không đổi  $\omega$  quanh trục thẳng đứng. Trục quay cắt trục của ống tại điểm cách hai đầu ống các khoảng 10cm và 90cm. Tính trị số của  $\omega$  để áp suất nitơ tại hai đầu ống tỷ lệ với nhau theo tỷ số 2,72:1. Nhiệt độ của nitơ  $T = 300\text{K}$ .

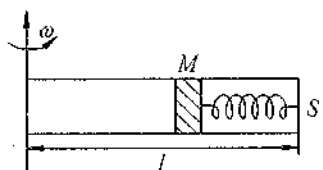
8.30. Một xilanh có chiều dài  $l$  và diện tích đáy  $S$  được chia thành hai phần bằng một piton mỏng di chuyển được sao cho phần bên trái của piton không chứa khí, phần bên phải chứa khí lý tưởng với phân tử lượng là  $\mu$ . Xilanh quay đều với vận tốc góc  $\omega$  quanh trục thẳng đứng đi qua đáy bên trái của nó, khi đó piton cách trục quay một



Hình 363

khoảng  $\frac{l}{2}$  (H. 363). Tìm sự phân bố áp suất ở bên phải piton. Khối lượng piton bằng  $M$ , nhiệt độ của khí bằng  $T$ , bỏ qua ma sát của piton vào thành xi lanh.

8.31. Một xilanh có chiều dài  $l$  và diện tích đáy  $S$  được chia thành hai phần bằng một piton di chuyển được sao cho phần bên phải của piton không chứa khí, phần bên trái chứa khí với phân tử lượng là  $\mu$ . Xilanh quay đều với vận tốc góc  $\omega$  quanh trục thẳng đứng đi qua đáy bên trái của



Hình 364

nó, khi đó piton cách trục quay một khoảng  $\frac{3l}{4}$

(H. 364). Tìm sự phân bố áp suất ở bên trái của piton, nếu ở trạng thái tĩnh áp suất khí bằng  $P_0$ , piton ở cách trục quay một khoảng  $\frac{l}{2}$ , lò xo không biến dạng và có chiều dài là  $l$ . Khối lượng piton bằng  $M$ , nhiệt độ của khí bằng  $T$ , bỏ qua ma sát của piton vào thành xilanh.

8.32. Trong một bình trụ cách nhiệt bán kính  $r$  có chứa một mol khí lý tưởng ở nhiệt độ  $T_0$ . Bình quay với vận tốc góc  $\omega$ . Sau đó bình bị hãm nhanh. Bỏ qua nhiệt dung của thành bình, tìm độ biến thiên entropi  $\Delta S$  của khí và độ biến thiên nhiệt độ  $\Delta T$  sau khi cân bằng được thiết lập. Để đơn giản tính toán giả thiết rằng vận tốc dài  $v$  của thành bình nhỏ hơn nhiều so với vận tốc âm thanh trong khí ( $v \ll v_{at}$ ), điều đó nghĩa là có thể bỏ qua sự phân bố không đều của mật độ khí theo bán kính. Biết khối lượng phân tử mol  $\mu$  và nhiệt dung  $C_V$  của khí.

8.33. Một xilanh rộng với bán kính trong  $a = 1\text{m}$  được chứa đầy hơi nước ở nhiệt độ  $t = 20^\circ\text{C}$  và áp suất  $P_0$  gần bằng áp suất hơi bão hoà  $P_{bh}$  ở cùng nhiệt độ, sao cho  $\frac{P_{bh} - P_0}{P_0} = \frac{\Delta P}{P_0} = 10^{-3}$ . Hỏi cần phải quay xilanh quanh

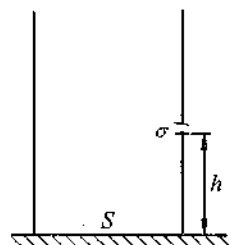
trục với vận tốc góc  $\Omega$  bằng bao nhiêu để trong các điều kiện đẳng nhiệt ở mặt trong của xilanh tạo thành một lớp nước?

8.34. Entropi của một mol khí lý tưởng chứa trong một bình tĩnh nhiệt hình trụ bán kính  $a$  thay đổi thế nào khi quay chậm bình quanh trục của nó với vận tốc góc  $\omega \ll \frac{1}{a} \sqrt{\frac{RT}{\mu}}$ , trong đó  $\mu$  là khối lượng phân tử của khí,  $T$  là nhiệt độ của khí.

8.35. Tìm mômen quán tính của một mol khí lý tưởng chứa trong xilanh bán kính  $R$  đang quay quanh trục của nó với vận tốc góc  $\omega$ . Khối lượng phân tử của khí là  $m$ , nhiệt độ của khí là  $T$ . Tính mômen quán tính khi  $T \rightarrow \infty$ .

8.36. Hai bình hình trụ giống nhau được đặt thẳng đứng cạnh bên nhau trong trọng trường và chúng chứa đầy khí với khối lượng phân tử lần lượt là  $\mu_1$  và  $\mu_2$ ;  $\mu_1 > \mu_2$ . Áp suất ở phần phía trên của hai ống bằng nhau và bằng  $P_0$ , nhiệt độ tại mọi điểm như nhau và bằng  $T$ . Ở độ sâu  $h$  (tính từ nắp) người ta cho hai bình thông nhau qua một ống tiết diện  $S$  có kích thước dài nhỏ hơn chiều dài quãng đường tự do của các phân tử. Xác định chiều dài và độ lớn của dòng năng lượng  $q$  giữa hai bình tại thời điểm ban đầu, giả thiết độ giảm áp tương đối theo chiều cao không lớn lắm.

**8.37.** Trong một bình chứa hình trụ cao vô hạn với diện tích đáy  $S$ , đặt trong trường hấp dẫn đồng nhất có một mol khí lý tưởng. Tại thời điểm  $t = 0$  trên thành trụ ở độ cao  $h$  người ta khoét một lỗ có tiết diện  $\sigma$  (H. 365). Xác định sự thay đổi theo thời gian của áp suất khí ở gần đáy bình. Coi nhiệt độ  $T$  của khí là không đổi, thành bình mỏng và áp suất bên ngoài bằng 0. Giả thiết chiều dài quãng đường tự do của các phân tử lớn hơn rất nhiều so với kích thước lỗ.



Hình 365

**8.38.** Sử dụng phân bố Boltzmann tìm thế năng

trung bình của các phân tử khí lý tưởng trong trường  $U(x) = ax^2; a > 0$ .

**8.39.** Tính năng lượng trung bình  $\bar{\varepsilon}$  của một mol khí gồm các phân tử có hai mức năng lượng gián đoạn là  $\varepsilon_1$  và  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ . Hãy chứng minh rằng ở nhiệt độ rất thấp, nhiệt dung của khí này bằng  $\frac{3R}{2}$ . Bỏ qua chuyển động quay của các phân tử. Để đơn giản cho việc viết các công thức, lấy  $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 2$ .

**8.40.** Năng lượng của một phân tử trong từ trường có thể nhận ba giá trị  $\varepsilon_0 = 0; \varepsilon_{1,2} = \pm \varepsilon$ . Xác định năng lượng tương tác  $E$  của một mol các phân tử trên ở nhiệt độ  $T = \frac{\varepsilon}{k}$  với từ trường,  $k$  là hằng số Boltzmann.

**8.41.** Xác định bán kính lớn nhất của một đám mây khí khi nó bị nén dưới tác dụng của các lực hấp dẫn. Đám mây không quay, khối lượng của nó  $M = 2 \cdot 10^{36} \text{ kg}$  và nhiệt độ  $T = 50 \text{ K}$ .

**8.42.** Đối với sóng xung kích trong khí lưỡng nguyên tử ban đầu nhiệt độ khí tăng nhanh từ  $T_0$  đến  $T_1$ . Sau đó các bậc tự do của dao động dần dần bị kích thích (thỏa mãn điều kiện  $kT_1 \gg \hbar\omega$ , trong đó  $\omega$  là tần số dao động riêng trong các phân tử). Quá trình cuối ("phục hồi dao động") diễn ra với áp suất gần như không đổi. Xác định độ biến thiên nhiệt độ và entropi của một mol khí trong quá trình này. Có thể bỏ qua sự trao đổi nhiệt với môi trường xung quanh.

**8.43.** Khí lý tưởng được đốt nóng tức thời từ nhiệt độ  $T_0$  đến  $T_1$ , sau đó diễn ra quá trình kích thích dần dần các bậc dao động tự do (thỏa mãn điều kiện  $kT_1 \gg \hbar\omega$ , trong đó  $\omega$  là tần số dao động riêng trong các phân tử). Giả thiết quá trình kích thích dao động diễn ra với thể tích không đổi. Xác định độ biến thiên nhiệt độ và entropi của một lượng khí  $M$  trong quá trình nói trên. Bỏ qua sự trao đổi nhiệt với môi trường xung quanh.

**8.44.** Lỗ trống trong tinh thể xuất hiện khi một nguyên tử bị bật khỏi nút mạng tinh thể. Khi làm lạnh nhanh tinh thể thì số lỗ trống tương ứng với trạng thái cân bằng nhiệt động ở nhiệt độ cao, gần như không thay đổi, tức là các lỗ trống có thể bị “đông lạnh”. Sau đó ở nhiệt độ thấp diễn ra quá trình thiết lập trạng thái cân bằng nhiệt động mới gọi là “ủ” các lỗ trống. Xác định sự thay đổi nhiệt độ của một vật mẫu bằng nhôm khi “ủ” đoạn nhiệt các lỗ trống bị “đông lạnh” do làm lạnh nhanh mẫu từ nhiệt độ nóng chảy của nhôm  $t_1 = 660^{\circ}\text{C}$  đến nhiệt độ phòng  $t_0$ . Nhiệt dung của nhôm có thể xác định theo phương pháp cổ điển. Năng lượng tạo thành các lỗ trống trong nhôm là  $\varepsilon = 0,75\text{eV}$ .

**8.45.** Xác định vận tốc góc toàn phương trung bình của các phân tử nitơ trong không khí ở điều kiện tiêu chuẩn. Khoảng cách giữa các hạt nhân trong phân tử nitơ  $\text{N}_2$  là  $r = 1,1\text{\AA}$ .

**8.46.** Tìm giá trị năng lượng trung bình  $\bar{\varepsilon}$  theo thuyết khí động học cổ điển đối với một bậc tự do của chuyển động quay một phân tử khí khi  $t = 27^{\circ}\text{C}$ . Tìm các giá trị trung bình bình phương của tần số quay của phân tử oxy trong các điều kiện trên. Mômen quán tính của phân tử oxy quanh trục vuông góc với trục đối xứng của nó là  $I_1 = 19,2 \cdot 10^{-40}\text{ g}\cdot\text{cm}^2$ .

**8.47.** Tìm tổng động năng  $K$  của chuyển động nhiệt của tất cả các phân tử oxy  $\text{O}_2$  chiếm thể tích  $V = 5,5\text{l}$  ở áp suất  $P = 2\text{atm}$ . Giả thiết nhiệt độ của khí thấp đến mức dao động của các nguyên tử trong phân tử chưa bị kích thích, còn chuyển động quay bị kích thích hoàn toàn.

**8.48.** Xác định năng lượng của chuyển động quay của các phân tử hydro  $\text{H}_2$  chứa trong bình có thể tích  $V = 1\text{l}$  ở áp suất  $P = 10^5\text{ Pa}$ . Giả thiết rằng các bậc tự do của chuyển động quay bị kích thích hoàn toàn.

**8.49.** Xác định năng lượng của chuyển động quay của khí mê tan  $\text{CH}_4$  chứa trong bình có thể tích  $V = 1\text{l}$  ở áp suất  $P = 10^5\text{ Pa}$ . Giả thiết rằng các bậc tự do của chuyển động quay bị kích thích hoàn toàn.

**8.50.** Động năng trung bình của chuyển động quay của các phân tử hydro bằng bao nhiêu, nếu ban đầu nó ở điều kiện tiêu chuẩn, sau đó được nén đoạn nhiệt 32 lần?

**8.51.** Tìm biểu thức tính entropi của hệ  $N$  electron không tương tác lẫn nhau được đặt trong từ trường cảm ứng từ  $\vec{B}$ . Mômen từ của electron  $\vec{\mu}$  có thể có hai hướng: hướng theo từ trường  $\vec{B}$  và hướng ngược với từ trường. Năng lượng theo hai hướng này khác nhau một lượng  $\Delta E = 2\mu V$ . Các electron cân bằng nhiệt với môi trường có nhiệt độ  $T$ . Xét trường hợp riêng khi  $kT \gg \Delta E$ .

8.52. Tìm giá trị trung bình của năng lượng dao động nhiệt của hai dao động tử khác nhau ở nhiệt độ  $T = 300\text{K}$ . Tần số dao động của các dao động tử  $\nu_1 = 10^{13}\text{Hz}$ ,  $\nu_2 = 10^{14}\text{Hz}$ . So sánh các giá trị thu được với các giá trị cổ điển tương ứng. Tìm nhiệt dung dao động  $C_V$  của một mol khí của các dao động tử trên đối với trường hợp  $\nu = 4,7 \cdot 10^{13}\text{Hz}$  (khí oxy  $\text{O}_2$ ).

## §9. SỰ THĂNG GIÁNG. Ý NGHĨA THỐNG KÊ CỦA ENTRÔPI

9.1\*. Cho  $f$  và  $g$  là các đại lượng vật lý bất kỳ, thăng giáng xung quanh các giá trị trung bình  $\bar{f}$  và  $\bar{g}$  của chúng, sao cho  $f = \bar{f} + \Delta f$ ,  $g = \bar{g} + \Delta g$ . Tìm giá trị trung bình của tích  $\overline{fg}$ .

9.2. Biểu diễn bình phương trung bình của thăng giáng  $\overline{\Delta f^2} = \overline{(f - \bar{f})^2}$  của đại lượng vật lý bất kỳ  $f$  qua  $\overline{f^2}$  và  $(\bar{f})^2$ .

9.3. Các đại lượng  $f$  và  $g$  được gọi là các đại lượng thống kê độc lập, nếu  $\overline{\Delta f \Delta g} = 0$ . Chứng minh rằng đối với các đại lượng thống kê độc lập thì  $\overline{fg} = \bar{f} \bar{g}$ .

9.4\*. Trong một bình kín thể tích  $V$  không chịu tác dụng của lực nào, có  $N$  phân tử khí lý tưởng. Xác định số lượng trung bình các phân tử và thăng giáng của nó trong thể tích  $v$  là một phần nhỏ của thể tích  $V$ .

9.5. Trong một bình chứa hình lập phương thể tích  $V = 1$  lít ở nhiệt độ phòng có  $N$  phân tử hydro. Tìm xác suất  $P$  xảy ra sự kiện tất cả các phân tử này sẽ tập trung ở một nửa của bình. Đánh giá đại lượng  $N$  để sự kiện trên có thể quan sát được một lần trong thời kỳ dài cỡ bằng tuổi của phân nhân thấy của thiên hà ( $T \sim 10^{10}$  năm).

9.6. Xác định thể tích  $V$  trong khí lý tưởng để trong thể tích này trung bình bình phương của thăng giáng số hạt  $\alpha = 10^{-6}$  so với số hạt trung bình trong thể tích này. Xác định số hạt trung bình  $\bar{n}$  trong thể tích này. Khí ở điều kiện tiêu chuẩn.

9.7. Trong khí lý tưởng lấy một thể tích  $V$  chứa  $N$  hạt. Áp suất  $P$  và nhiệt độ  $T$  của khí không đổi. Thăng giáng tương đối của khối lượng riêng trong thể tích này bằng bao nhiêu?

**9.8.** Xác định độ nhạy tới hạn  $\frac{\Delta T}{T}$  của nhiệt kế khí lý tưởng, trong đó nhiệt độ được đo trong thể tích khí ở áp suất không đổi. Lượng khí trong nhiệt kế bằng  $10^{-3}$  mol.

**9.9.** Trong một bình cách nhiệt có chứa một mol khí ôxy ở điều kiện tiêu chuẩn, người ta lấy một thể tích bằng  $10^{-6} \text{ cm}^3$ . Xác suất của trạng thái, trong đó nhiệt độ của thể tích này chênh lệch so với nhiệt độ trung bình  $10^{-3} \text{ K}$  (khí giữ nguyên số phân tử trong thể tích này), nhỏ hơn xác suất của trạng thái cân bằng bao nhiêu lần?

**9.10.** Xác định thể tích của heli để thăng giáng tương đối trung bình của nhiệt độ (khí giữ nguyên số phân tử trong thể tích này), bằng  $10^{-4}\%$ . Heli ở điều kiện tiêu chuẩn và tiếp xúc với bộ điều nhiệt.

**9.11.** Tìm tỷ số giữa xác suất thăng giáng nhiệt độ một lượng  $\Delta T = 0,1 \text{ K}$  của khí lý tưởng đơn nguyên tử trong thể tích  $v = 1 \mu\text{m}^3$  đối với xác suất của trạng thái cân bằng. Thể tích của khối khí  $V_0 = 25$  lít, nhiệt độ  $T_0 = 300 \text{ K}$ , áp suất  $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$ .

**9.12.** Trung bình của bình phương thăng giáng nhiệt độ  $\langle \Delta T^2 \rangle$  của khí lý tưởng đơn nguyên tử trong một thể tích nhỏ  $v$  thay đổi bao nhiêu lần nếu thể tích  $V$  của hệ tăng đoạn nhiệt lên 8 lần ( $v \ll V$ )?

**9.13.** Hai bình giống nhau chứa đầy khí ở điều kiện tiêu chuẩn được thông với nhau. Thể tích  $V$  của mỗi bình phải bằng bao nhiêu để xác suất của trạng thái có áp suất trong các bình thay đổi  $0,1\%$ , nhỏ hơn  $e^{100}$  so với xác suất của trạng thái ban đầu?

**9.14.** Một xilanh cách nhiệt chứa khí lý tưởng đơn nguyên tử được chia thành hai phần bằng nhau thể tích  $V_0$  bởi một piston kín, nặng, cách nhiệt. Xác định thăng giáng tương đối của mỗi thể tích này, nếu số hạt trong cả xilanh bằng  $N$ .

**9.15\*.** Một bình có  $N$  phân tử khí lý tưởng được ngăn thành hai phần thể tích  $V_1, V_2$  bằng một vách ngăn. Tìm xác suất để trong ngăn thứ nhất sẽ chứa  $N_1$  phân tử, trong ngăn thứ hai chứa  $N_2$  phân tử.

**9.16.** Khí hydro ở nhiệt độ  $T = 300 \text{ K}$  và áp suất  $P = 10^{-6} \text{ atm}$  phun từ một bình mỏng vào chân không qua một lỗ có diện tích  $S = 0,1 \text{ mm}^2$ . Sau những khoảng thời gian nhất định, người ta đo dòng toàn phần của các nguyên tử đi qua lỗ trong khoảng thời gian  $t = 10^{-3} \text{ s}$ . Giả thiết rằng áp suất trong bình không đổi. Xác định thăng giáng tương đối của dòng nguyên tử trên.



9.17. Chùm phân tử  $O_2$  bay vào chân không từ bình chứa ở áp suất  $P=10^{-7}$  atm, nhiệt độ  $T=300K$  qua một hệ hai khe liên tiếp cách nhau 1mm với kích thước mỗi khe  $1cm \times 2.10^{-2}cm$ . Xác định cường độ của chùm  $j$  (số hạt đi qua khe thứ hai trong một giây). Thăng giáng tương đối của số hạt trong một xung có độ dài  $\tau=10^{-3}s$  bằng bao nhiêu?

9.18. Chùm nguyên tử heli bay vào chân không từ bình chứa ở áp suất  $P=10^{-4}$  mmHg và  $T=300K$  qua một hệ gồm hai lỗ tròn đồng trục có  $d=0,2mm$ , cách nhau  $l=1cm$ . Xác định cường độ của chùm  $j$  (số hạt đi qua khe thứ hai trong một giây). Thăng giáng tương đối của số hạt trong một xung có độ dài  $\tau=10^{-3}s$  bằng bao nhiêu?

9.19\*. Hai bình giống nhau, được thông với nhau qua một lỗ, trong mỗi bình chứa một mol của cùng một khí lý tưởng ở các điều kiện giống nhau. Số phân tử  $n$  cần di chuyển từ một bình sang bình kia bằng bao nhiêu để trạng thái được sinh ra có xác suất nhỏ hơn  $\alpha = e$  lần xác suất trạng thái ban đầu?

9.20\*. Giải bài toán trên, bằng cách sử dụng công thức Boltzmann  $S = k \ln P$  và biểu thức nhiệt động đối với entropi của khí lý tưởng.

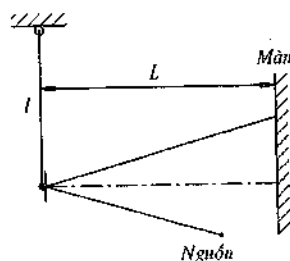
9.21\*. Tìm phân bố Gauss từ công thức Boltzmann  $S = k \ln P$ , bằng cách sử dụng biểu thức nhiệt động đối với entropi của khí lý tưởng.

9.22\*. Sự thăng giáng nhiệt của một thể tích nhỏ  $\langle (\Delta V^2)_T \rangle$  chứa đầy chất lỏng hoặc khí và đặt trong môi trường ngoài có nhiệt độ  $T$  không đổi có thể tính được bằng cách sau: Giả sử phần chất lỏng hoặc chất khí đang xét chứa trong xilanh có các thành dẫn nhiệt lý tưởng. Một trong các thành là piston có thể di chuyển không ma sát trong xilanh. Đối với chuyển động của piston có thể áp dụng định lý về sự phân bố đều của động năng theo các bậc tự do và như vậy, có thể tính được sự thăng giáng cần tìm. Hãy tiến hành theo cách tính trên.

9.23. Với khoảng cách  $L$  đến màn bằng bao nhiêu thì giá trị toàn phương trung bình của biên độ dao động của tia sáng phản xạ từ một chiếc gương nhỏ gắn trên con lắc toán học (H. 366); chiều dài con lắc  $l=10cm$ , khối lượng con lắc gồm cả gương  $m=0,1g$

sẽ bằng  $10^{-4}cm$ ? Nhiệt độ của môi trường bằng  $27^{\circ}C$ , mặt phẳng gương vuông góc với mặt phẳng dao động.

9.24. Một gương nhỏ treo trên một sợi chỉ bằng thạch anh có môđun xoắn  $D$ . Gương được chiếu sao cho chuyển động quay của nó do sự va chạm của các phân tử khí xung quanh gây ra có thể ghi được trên thang chia độ. Vị trí đứng yên của gương tương ứng với góc  $\varphi=0$ . Trung bình bình phương của



Hình 366

vận tốc góc  $\langle \dot{\varphi}^2 \rangle$  và trung bình bình phương của góc lệch  $\langle \varphi^2 \rangle$  thay đổi như thế nào, nếu mômen quán tính của gương, chiều dài và đường kính sợi chỉ tăng tương ứng  $\alpha$ ,  $\beta$  và  $\gamma$  lần? Giá trị của số Avôgađrô  $N$  đo được bằng bao nhiêu ở nhiệt độ  $T = 287\text{K}$ , nếu  $D = 9,43 \cdot 10^{-14} \text{N.cm}$ ,  $\langle \varphi^2 \rangle = 4,18 \cdot 10^{-6}$ ? (Các số liệu này được lấy từ các thí nghiệm của Herlaks và Kappler.)

9.25. Xác định thăng giáng tương đối của chiều dài quãng đường tự do, của các phân tử khí nếu quãng đường tự do trung bình của phân tử nhỏ hơn rất nhiều so với kích thước bình chứa.

9.26. Tế bào quang điện chân không trong chế độ bão hoà có độ nhạy sáng  $K = 0,12 \text{A/W}$ . Tìm thăng giáng tương đối  $\alpha$  của số electron bị bứt ra khi chiếu lên tế bào quang điện chùm ánh sáng có công suất  $\Phi = 1,3 \cdot 10^{-11} \text{W}$ .

Thời gian đo là  $\tau = 10^{-3} \text{s}$ .

9.27. Biết rằng cơ chế chuyển động nhiệt của cân lò xo xác định giới hạn độ nhạy của cân ở nhiệt độ  $T$  cho trước. Xác định khối lượng nhỏ nhất có thể cân được trong một lần cân bằng cân lò xo nói trên, cho biết hệ số cứng của lò xo bằng  $\alpha$ .

9.28. Tìm trung bình bình phương của thăng giáng thể tích tương đối của một giọt thủy ngân bán kính  $r = 0,01 \text{mm}$  trong không khí ở nhiệt độ

$T = 300\text{K}$ . Độ nén đẳng nhiệt của thủy ngân  $\beta_T = 3,9 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{atm}}$ .

9.29. Xác định thăng giáng tương đối của số lượng các hạt không khí trong thể tích nhỏ  $\Delta V$  dưới dạng hàm số của khoảng cách  $h$  tính từ bề mặt Trái Đất. Coi không khí là khí lý tưởng. Mật độ khí ở gần bề mặt Trái Đất bằng  $\rho_0$ , khối lượng phân tử  $\mu$ , nhiệt độ khí quyển không đổi và bằng  $T$ .

9.30. Một bình hình trụ quay quanh trục đối xứng với vận tốc góc không đổi  $\omega$ . Xác định thăng giáng tương đối của số lượng hạt khí lý tưởng trong thể tích nhỏ  $\Delta V$  dưới dạng hàm của khoảng cách  $r$  đến trục hình trụ. Khối lượng riêng của khí trên trục trụ là  $\rho_0$ , khối lượng phân tử  $\mu$ . Nhiệt độ của khí không đổi và bằng  $T$ . Bỏ qua trọng lực.

9.31. Tìm thăng giáng tương đối toàn phương trung bình của chiều cao cột chất lỏng trong ống mao dẫn nhúng trong một bình rộng có nhiệt độ không đổi. Khối lượng riêng của chất lỏng  $\rho$ , sức căng bề mặt  $\sigma$ , góc dính ướt  $\theta = 0$ . (Ở trạng thái cân bằng chiều cao cột chất lỏng nhỏ hơn chiều dài ống).

9.32. Tính thăng giáng tương đối toàn phương trung bình của thể tích bọt xà phòng bán kính  $r$ . Áp suất không khí bên ngoài bọt bằng  $P_0$ , hệ số sức căng mặt ngoài của màng xà phòng  $\sigma$ . Giả thiết khi thăng giáng bọt xà phòng giữ nguyên dạng hình cầu, nhiệt độ không khí trong nó không đổi và bằng nhiệt độ bên ngoài  $T$ .

**9.33.** Tìm thăng giáng tương đối toàn phương trung bình của thể tích  $V$  khí VandecVan trong điều kiện khi thể tích bằng thể tích tới hạn, còn nhiệt độ  $T$  lớn hơn nhiệt độ tới hạn  $T_k$  không nhiều.

**9.34.** Trong bình đựng nước có các hạt thủy ngân lơ lửng, các hạt này có thể dính vào thành bình. Xác định thời gian đến khi các hạt dính hết vào thành bình. Biết khối lượng các hạt thủy ngân là  $m$ , bán kính  $a$ . Với điều kiện nào thì trọng lượng sẽ ảnh hưởng quyết định tới quá trình?

**9.35.** Tìm biểu thức đối với thăng giáng tương đối trung bình của thế năng  $P$  của các dao động bên trong một phân tử lưỡng nguyên tử của khí lý tưởng và của một mol các phân tử khí này.

**9.36.** Tìm biểu thức tính thăng giáng khối lượng riêng của chất lỏng hoặc chất khí, xuất hiện do chuyển động nhiệt trong một thể tích nhỏ  $V$  tách tường tượng trong môi trường đang xét.

**9.37\*.** Tính thăng giáng động năng chuyển động tịnh tiến của một phân tử khí lý tưởng.

**9.38\*.** Phân hệ là một phần của một hệ lớn. Thăng giáng năng lượng và entanpi của phân hệ về mặt nguyên tắc có thể tính giống như ta đã tính trên đây đối với các phân tử khí lý tưởng (xem bài trước). Khác biệt là ở chỗ thay vì sử dụng phân bố Maxwell ta sử dụng dạng mở rộng của nó đối với phân hệ vĩ mô (phân bố Gibbs). Bằng cách đó có thể chỉ ra rằng thăng giáng nội năng và entanpi của phân hệ xác định bằng biểu thức:

$$\langle (\Delta U^2) \rangle_V = kT^2 C_V; \quad \langle (\Delta I^2) \rangle_P = kT^2 C_P$$

trong đó  $C_V$  và  $C_P$  là các nhiệt dung của phân hệ, các chỉ số  $V$  và  $P$  ký hiệu rằng trong công thức thứ nhất  $V$  không đổi, trong công thức thứ hai  $P$  không đổi. Sử dụng các công thức trên, tìm  $\langle (\Delta T^2) \rangle_V$ ,  $\langle (\Delta S^2) \rangle_V$ ,

$\langle (\Delta S^2) \rangle_P$ ,  $\langle (\Delta P^2) \rangle_T$ , và  $\langle (\Delta P^2) \rangle_S$  của phân hệ.

**9.39.** Tìm entropi của một mol tinh thể  $^{37}\text{Ar}$  ở nhiệt độ thấp. Hạt nhân  $^{37}\text{Ar}$  có spin  $3/2$ . Giả thiết rằng nhiệt độ đủ rất gần nhiệt độ tuyệt đối, vẫn đủ để đảm bảo sự hỗn loạn hoàn toàn theo mọi hướng.

## §10. CÁC HIỆN TƯỢNG VẬN CHUYỂN. SỰ DẪN NHIỆT. CHUYỂN ĐỘNG BROWN

**10.1.** Số va chạm  $z$  trung bình của một phân tử  $\text{CO}_2$  trong một giây ở áp suất và nhiệt độ tiêu chuẩn bằng bao nhiêu? Đường kính khí động của phân tử  $\text{CO}_2$  là  $d = 10^{-7} \text{ cm}$ .

**10.2.** Mỗi giây có bao nhiêu va chạm  $\nu$  giữa các phân tử  $O_2$  trong một  $1\text{ cm}^3$  khí oxy ở điều kiện tiêu chuẩn? Đường kính khí động của phân tử  $O_2$  là  $d = 3,1 \cdot 10^{-8}\text{ cm}$ .

**10.3.** Khí lý tưởng được đun nóng ở áp suất không đổi. Chiều dài quãng đường tự do  $\lambda$  và số va chạm  $z$  giữa các phân tử trong một giây thay đổi như thế nào khi nhiệt độ thay đổi?

**10.4.** Khí lý tưởng được nén đẳng nhiệt. Tìm sự phụ thuộc của quãng đường tự do  $\lambda$  và số va chạm  $z$  vào áp suất.

**10.5.** Khí lý tưởng được nén đoạn nhiệt. Tìm sự phụ thuộc của quãng đường tự do  $\lambda$  và số va chạm  $z$  vào áp suất.

**10.6.** Tìm nhiệt dung phân tử của một quá trình biến đổi của khí lý tưởng, trong đó số va chạm giữa các phân tử trong một đơn vị thể tích và một đơn vị thời gian là không đổi.

**10.7.** Số va chạm  $z$  của một phân tử trong một đơn vị thời gian và chiều dài quãng đường tự do  $\lambda$  thay đổi bao nhiêu lần nếu trong quá trình biến đổi, khi nhiệt dung của khí bằng  $C_p/2$  thì thể tích của khí tăng lên hai lần?

**10.8.** Chiều dài quãng đường tự do  $\lambda$  của một hạt trong hỗn hợp khí argon và neon thay đổi bao nhiêu lần, nếu nồng độ argon tăng lên hai lần còn nồng độ neon giảm hai lần? Nồng độ ban đầu của hai khí là như nhau. Tỷ số bán kính của argon và neon là 1,2. Hạt đang xét nhẹ hơn các nguyên tử của hỗn hợp, còn kích thước của nó thì nhỏ hơn rất nhiều so với kích thước các nguyên tử của hỗn hợp.

**10.9.** Xác định quãng đường của các hạt nhân nitơ siêu tương đối tính ( $v > 0$ ) trước tương tác hạt nhân trong buồng chứa hydro lỏng. Khối lượng riêng của hydro lỏng  $0,07\text{ g/cm}^3$ , còn bán kính các hạt nhân được cho bởi công thức  $R_A = 1,3 \cdot 10^{-13} \cdot A^{1/3}\text{ cm}$ , trong đó  $A$  là khối lượng nguyên tử tương đối.

**10.10.** Tìm giới hạn trên của áp suất  $P$  của hydro trong một bình có thể tích  $V = 1\text{ l}$ , trong đó chiều dài quãng đường tự do của phân tử lớn hơn kích thước bình. Đường kính khí động của phân tử hydro  $d = 2,2 \cdot 10^{-8}\text{ cm}$ , nhiệt độ  $T = 300\text{ K}$ .

**10.11.** Một thanh thép dài  $l = 20\text{ cm}$  với tiết diện ngang  $S = 3\text{ cm}^2$  được đun nóng từ một phía đến nhiệt độ  $t_1 = 300^\circ\text{ C}$ , phía còn lại được nhúng trong nước đá. Giả thiết rằng sự truyền nhiệt chỉ diễn ra dọc theo thanh (không mất mát qua các thành), tính khối lượng nước đá  $m$  tan ra trong thời gian  $\tau = 10$  phút. Độ dẫn nhiệt của thép  $\chi = 0,16 \frac{\text{cal}}{\text{s.cm.}^\circ\text{C}}$ .

**10.12.** Khoảng trống giữa hai trụ đồng trục bán kính  $R_1$  và  $R_2$  được đổ đầy chất đồng tính dẫn nhiệt. Tìm sự phân bố nhiệt độ trong khoảng không gian này, nếu nhiệt độ trụ bên trong là  $t_1$ , bên ngoài là  $t_2$ .

**10.13.** Tìm sự phân bố nhiệt độ trong khoảng trống giữa hai mặt cầu đồng tâm bán kính  $R_1$  và  $R_2$  được đổ đầy chất đồng tính dẫn nhiệt, nếu nhiệt độ các mặt cầu không đổi và bằng  $t_1, t_2$ .

**10.14\*.** Một quả cầu bằng uran bán kính  $R = 10\text{cm}$  đặt trong bình nước. Quả cầu được chiếu bằng chùm neutron. Sau các phản ứng phân rã hạt nhân uran, trong quả cầu sinh ra nhiệt lượng  $q = 100\text{W/cm}^3$ . Nhiệt độ của nước  $T_0 = 373\text{K}$ , độ dẫn nhiệt của uran  $\chi = 400\text{W/(m.K)}$ . Tìm sự phân bố tĩnh của nhiệt bên trong quả cầu và nhiệt độ tại tâm cầu.

**10.15.** Dòng điện không đổi chạy trong một dây dẫn đồng tính hình trụ. Xác định sự phân bố nhiệt độ tĩnh trong dây dẫn, nếu bề mặt của dây được giữ ở nhiệt độ không đổi  $T_0$ .

**10.16.** Để nhận được phản ứng nhiệt hạch hạt nhân tự duy trì trong đơteri (hoặc trong hỗn hợp đơteri và triti) cần làm nóng khối chất đến nhiệt độ cỡ  $\sim 10^8\text{K}$ . Ở nhiệt độ đó chất ở trạng thái plasma, tức là khí ion hóa hoàn toàn. Khi đó sự mất mát năng lượng do hiện tượng dẫn nhiệt tăng nhanh. Theo lý thuyết, độ dẫn nhiệt của plasma tỷ lệ với nhiệt độ tuyệt đối lũy thừa  $\frac{5}{2}$ , tức là  $\chi = aT^{5/2}$ , trong đó  $a \approx 10^{-6}$  đối với plasma, đơteri và triti trong

hệ Gauss. Người ta giữ nhiệt độ không đổi  $T = 10^8\text{K}$  trong một thể tích nhỏ có dạng hình cầu bán kính  $r_0 = 1\text{cm}$ . Bên ngoài quả cầu nhiệt độ giảm tương ứng với các định luật về dẫn nhiệt. Cần phải cung cấp cho thể tích này công suất  $W$  bằng bao nhiêu để bổ sung phần năng lượng mất đi do sự dẫn nhiệt? Nhiệt không cung cấp cho phần còn lại của plasma.

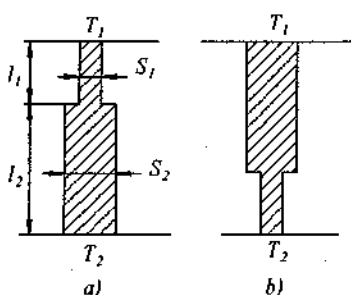
**10.17.** Người ta đặt vào ống nước một cặp nhiệt điện đồng – constantan, một mối hàn đặt trên trục ống, mối hàn còn lại đặt gần thành ống. Ống chịu tác dụng của bức xạ dài sóng mét, nước hấp thụ bức xạ đều trong toàn bộ thể tích. Khi đó trên mỗi cm chiều dài ống sinh ra công suất  $N = 0,01\text{W}$ . Tìm suất nhiệt điện động trong chế độ tĩnh, nếu độ nhạy của cặp nhiệt điện

$A = 40\mu\text{V/K}$ . Độ dẫn nhiệt của nước  $\chi = 6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{J}}{\text{cm.s.K}}$ . Bỏ qua sự đối lưu.

**10.18.** Một tấm hợp kim mỏng có chiều dày  $2a$  có điện dẫn suất  $\lambda$  không phụ thuộc vào nhiệt độ, còn độ dẫn nhiệt tỷ lệ với nhiệt độ tuyệt đối  $\chi = \alpha\lambda T$ , trong đó  $\alpha$  là hằng số đã biết (định luật Videnman France). Người

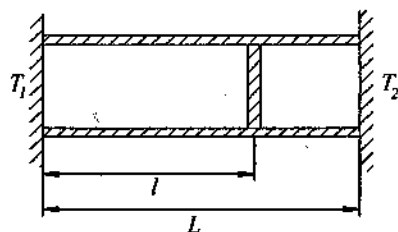
ta đặt vào hai đầu tấm kim loại dài  $l$  hiệu điện thế  $U_0$ . Bỏ qua các hiệu ứng cạnh, tìm sự phân bố nhiệt độ theo độ dày của tấm. Nhiệt độ trên các bề mặt của tấm bằng  $T_0$ .

**10.19.** Để giảm dòng nhiệt đi vào máy điều hòa qua thanh treo cơ khí, nhà thực nghiệm quyết định làm “khóa nhiệt” bằng thanh có một đầu hẹp ở phía có nhiệt độ cao (H. 367a). Tuy nhiên sau đó người ta khuyên anh ta quay ngược thanh treo lại, tức là thu hẹp ở đầu có nhiệt độ thấp nơi có hệ số dẫn nhiệt nhỏ hơn (H. 367b). Hãy chỉ ra rằng trên thực tế dòng nhiệt chuyển qua thanh trong hai trường hợp đều như nhau. Giả thiết cho trước sự phụ thuộc của hệ số dẫn nhiệt  $\chi$  vào nhiệt độ, chiều dài của tiết diện ngang phân mỏng và phần dày của thanh lần lượt là  $l_1, s_1$  và  $l_2, s_2$ , nhiệt độ hai đầu là  $T_1$  và  $T_2$ .



Hình 367

**10.20.** Một tấm đồng dày  $\Delta$  ở nhiệt độ  $T_D$  được nhúng vào nước có nhiệt độ  $T_0 = 0^\circ C > T_D$ . Tìm mối liên hệ giữa chiều dày lớp nước đóng băng và thời gian  $t$ . Giả thiết cho trước nhiệt dung riêng của đồng  $c$  và khối lượng riêng  $\rho_D$ ; khối lượng riêng của nước đá  $\rho_{ND}$ , hệ số dẫn nhiệt  $\chi$  và nhiệt nóng chảy riêng  $q$ . Độ dày lớp băng nhỏ đến mức nhiệt lượng làm thay đổi nhiệt độ của nước đá luôn rất nhỏ so với nhiệt lượng tạo thành lớp băng mới.



Hình 368

**10.21.** Một xilanh dài  $L$  có các thành bên không dẫn nhiệt, còn hai đáy dẫn nhiệt. Xilanh bị kẹp giữa hai nguồn nhiệt với nhiệt độ  $T_1$  và  $T_2$  (H.368). Bên trong xilanh có một piton mỏng dẫn nhiệt, hai phía của piton đều chứa một mol khí lỏng lý tưởng. Piton ở vị trí nào sau khi cân bằng được thiết lập? Coi độ dẫn nhiệt của khí tại mọi điểm của xilanh như nhau.

**10.22.** Người ta nhúng một thanh đồng hình chữ U tiết diện ngang  $S = 1\text{cm}^2$  vào hai bình đứng cạnh nhau. Mỗi bình được rót một lượng nước  $M = 900\text{g}$ . Nhiệt độ ban đầu của nước trong các bình là  $t_{10} = 65^\circ C$ ,  $t_{20} = 10,6^\circ C$ . Phần thanh đồng trong không khí dài  $l = 24\text{cm}$ . Sau khoảng thời gian bao lâu thì hiệu nhiệt độ giữa hai bình sẽ bằng  $t_1 - t_2 = 20^\circ C$ ? Giả thiết rằng sự

trao đổi nhiệt giữa hai bình chỉ thông qua thanh chữ  $U$ . Độ dẫn nhiệt của đồng  $\chi = 3,9 \text{ W}/(\text{K} \cdot \text{cm})$ .

**10.23.** Một bình chứa đầy nước được đặt trong lò. Khối lượng nước trong bình  $M = 1,2 \text{ kg}$ . Nhiệt độ các thành bình bên ngoài  $t_0 = 150^\circ \text{C}$ . Bề mặt nước được đun nóng có diện tích  $S = 300 \text{ cm}^2$ , chiều dày thành bình  $h = 1 \text{ cm}$ , hệ số dẫn nhiệt  $\chi = 0,008 \text{ W}/(\text{K} \cdot \text{cm})$ . Cần bao nhiêu thời gian để đun nước từ  $t_1 = 14^\circ \text{C}$  đến  $t_2 = 100^\circ \text{C}$ ?

**10.24.** Một giọt nước bán kính  $a = 0,2 \text{ cm}$  đang rơi trong không khí có nhiệt độ  $t_1 = 0^\circ \text{C}$  thì bay vào một lớp không khí có nhiệt độ  $t_2 = -10^\circ \text{C}$ . Tính thời gian  $\tau$  đến khi nó hóa đá. Nhiệt nóng chảy riêng của nước đá  $q = 335 \text{ J/g}$ , hệ số dẫn nhiệt của nước đá  $\chi = 0,022 \text{ W}/(\text{K} \cdot \text{cm})$ . Nhiệt lượng sinh ra khi làm lạnh nước đá có thể bỏ qua so với nhiệt lượng sinh ra khi nước đá đóng băng. Vì thế không cần phải phân biệt sự khác nhau giữa khối lượng riêng của nước đá và khối lượng riêng của nước. Giả thiết nhiệt độ bề mặt giọt nước luôn bằng nhiệt độ không khí bên ngoài.

**10.25.** Hai vật cách nhiệt 1 và 2 có độ dẫn nhiệt bằng vô cùng (ví dụ hai miếng kim loại) được nối với nhau bằng một thanh đồng nhất cách nhiệt chiều dài  $l$ , tiết diện ngang  $S$  và độ dẫn nhiệt  $\chi$ . Nhiệt dung của hai vật  $C_1$  và  $C_2$  rất lớn so với nhiệt dung của thanh. Tìm nhiệt độ  $T_1, T_2$  của hai vật tại thời điểm  $t$  bất kỳ, nếu tại  $t = 0$  nhiệt độ của chúng lần lượt là  $T_{10}$  và  $T_{20}$ . Tìm hiệu của các nhiệt độ trên và thời gian  $t_{1/2}$  khi hiệu nhiệt độ giảm hai lần.

**10.26\*.** Xác định chiều dày lớp băng tạo thành trong khoảng thời gian  $t$  cho trước trên bề mặt hồ lạnh. Giả thiết nhiệt độ  $T$  của không khí xung quanh luôn không đổi và bằng nhiệt độ bề mặt ngoài của băng ( $t < T_{no}$ , trong đó  $T_{no}$  là nhiệt độ nóng chảy của băng). Giải bài toán với  $t = -10^\circ \text{C}$ . Đối với nước đá  $\chi = 2,22 \cdot 10^{-2} \text{ J}/(\text{s} \cdot \text{cm} \cdot ^\circ \text{C})$ ;  $q = 3,35 \cdot 10^2 \text{ J/g}$ ;  $\rho = 0,9 \text{ g/cm}^3$ ;

**10.27\*.** Một cục nước đá hình cầu (với bán kính ban đầu  $R_0 = 1 \text{ cm}$ ) được nhúng trong một lượng nước lớn ở nhiệt độ  $10^\circ \text{C}$ . Giả thiết rằng sự truyền nhiệt trong chất lỏng chỉ do độ dẫn nhiệt của nó, xác định thời gian  $\tau$  đến khi đá tan hết. Độ dẫn nhiệt của nước  $\chi = 6 \cdot 10^{-3} \text{ J}/(\text{s} \cdot \text{cm} \cdot ^\circ \text{C})$ , nhiệt nóng chảy riêng của đá  $q = 335 \text{ J/g}$ .

**10.28.** Heli lỏng ở nhiệt độ  $T_1$  và áp suất hơi bão hòa  $P_1$  chảy trong một ống thạch anh hình trụ, bên ngoài là khí nitơ lỏng ở nhiệt độ  $T_2$ . Ở nhiệt độ thấp

như vậy độ dẫn nhiệt của thạch anh phụ thuộc vào nhiệt độ  $e = \alpha T^3$ . Đường kính bên trong của ống là  $R_1$ , bên ngoài là  $R_2$ . Có thể làm ống dẫn heli lỏng có lưu lượng  $q[\text{g/s}]$  với độ dài tối đa  $L$  bằng bao nhiêu nếu sự mất mát chất lỏng cho phép do bay hơi là 50%? Nhiệt hóa hơi riêng là  $\lambda$ .

**10.29.** Xác định độ sâu đóng băng của đất trên vĩ độ Matxcova trong suốt mùa đông không tuyết (xấp xỉ 120 ngày đêm). Giả thiết độ dẫn nhiệt của đất  $e \approx 1 \text{ W/(m.K)}$  nhiệt dung riêng của đất  $c \approx 10^6 \text{ J/(m}^3 \cdot \text{K)}$ .

**10.30.** Tìm sự phân bố nhiệt độ tĩnh trong khí lý tưởng giữa hai tấm phẳng song song rộng vô hạn đặt cách nhau một khoảng  $L$ . Nhiệt độ của các tấm là  $T_1$  và  $T_2$ , trong đó  $T_2 > T_1$  được giữ không đổi. Bỏ qua sự phụ thuộc vào nhiệt độ của tiết diện hiệu dụng do va chạm của các phân tử.

**10.31.** Dọc theo trục của một hình trụ dài chứa khí lý tưởng, người ta đặt một sợi dây dẫn mảnh bán kính  $r$  có dòng điện chạy qua. Khi đó dòng điện sinh ra công suất không đổi trên một đơn vị dài  $q[\text{W/m}]$ . Nhiệt độ  $T_0$  của trụ ngoài được giữ không đổi. Bán kính trụ  $R$ . Tìm hiệu nhiệt độ  $\Delta T$  giữa sợi dây và trụ, trong đó có tính đến sự phụ thuộc của hệ số dẫn nhiệt vào nhiệt độ. Ở nhiệt độ  $T_0$  độ dẫn nhiệt bằng  $\chi_0$ .

**10.32.** Mặt cầu bán kính  $R$  có nhiệt độ không đổi  $T_0$  được đặt trong môi trường vô hạn khí lý tưởng. Cách mặt cầu một khoảng lớn nhiệt độ của khí rất nhỏ so với  $T_0$ . Xác định công suất nhiệt  $q[\text{W}]$  cần cung cấp cho mặt cầu, trong đó có tính đến sự phụ thuộc của hệ số dẫn nhiệt của khí vào nhiệt độ. Ở nhiệt độ  $T_0$  độ dẫn nhiệt bằng  $\chi_0$ .

**10.33.** Một dây dẫn mảnh bằng kim loại có dòng điện chạy qua được căng dọc theo trục của một ống hình trụ dài thẳng đứng. Lúc đầu ống chứa không khí và sợi dây được nung nóng bằng dòng điện đến nhiệt  $830^\circ \text{C}$ . Sau đó (khi ngắt điện) ống chứa dây hydro ở áp suất khí quyển. Bỏ qua sự mất mát năng lượng do tia bức xạ, tính nhiệt độ  $t$  của sợi dây nếu cho dòng chạy qua nó với cùng công suất như trước đó. Tỷ số giữa các hệ số dẫn nhiệt của hydro và không khí bằng 5,8. Nhiệt độ thành ống có thể coi bằng nhiệt độ phòng ( $18^\circ \text{C}$ ).

**10.34.** Để đo độ dẫn nhiệt của nơtr người ta bơm đầy nó vào khoảng trống giữa hai trụ dài đồng trục có bán kính  $r_1 = 0,5 \text{ cm}$ ,  $r_2 = 2 \text{ cm}$ . Trụ bên trong được đun nóng đều bằng dây may xo có dòng điện  $i = 0,1 \text{ A}$  chạy qua. Điện trở dây may xo trên mỗi đơn vị dài của trụ  $R = 0,1 \Omega$ . Trụ bên ngoài được giữ ở nhiệt độ không đổi  $t_2 = 0^\circ \text{C}$ . Khi quá trình đã ổn định, nhiệt độ của trụ



bên trong là  $t_1 = 93^0 C$ . Tìm đường kính khí động  $d$  của phân tử nitơ. Áp suất khí rất nhỏ (cỡ vài chục mmHg) và vì thế, có thể bỏ qua sự đối lưu nhiệt.

**10.35.** Trong một bình hình trụ thể tích không đổi chứa khí lý tưởng ở nhiệt  $T_0$  và áp suất  $P_0$ . Thành xung quanh của bình cách nhiệt. Đáy bình được đun nóng đến nhiệt  $T = 4T_0$ , nhiệt độ nắp bình được giữ không đổi bằng  $T_0$ . Xác định áp suất được thiết lập trong bình. Hệ số dẫn nhiệt phụ thuộc vào nhiệt độ.

**10.36.** Trong một xilanh trụ phía dưới piston, có chứa một khí lý tưởng ở nhiệt  $T_0$ . Thành xung quanh của xilanh không dẫn nhiệt. Đáy xilanh được đun nóng tới nhiệt độ  $T = 9T_0$ , còn nhiệt độ piston được giữ không đổi bằng  $T_0$ . Thể tích ban đầu sẽ thay đổi bao nhiêu lần, sau khi thiết lập quá trình truyền nhiệt tĩnh? Hệ số dẫn nhiệt phụ thuộc vào nhiệt độ. Áp suất bên ngoài không đổi.

**10.37.** Với áp suất  $P$  bằng bao nhiêu thì trong không khí có thể truyền âm thanh với tần số  $\mu = 100\text{kHz}$  ở nhiệt độ  $T$ ?

**10.38.** Âm thanh tần số  $10^3 \text{ Hz}$  có thể truyền đến khoảng cách nào trong khí quyển tĩnh ở điều kiện tiêu chuẩn. Giả thiết rằng sự tắt dần của âm thanh chỉ do sự dẫn nhiệt gây ra.

**10.39.** Tìm độ dài của quãng đường tự do trung bình  $\lambda$  của phân tử oxy ở áp suất tiêu chuẩn, nếu hệ số khuếch tán của oxy ở áp suất trên và nhiệt độ  $0^0 C$  là  $D = 0,19\text{cm}^2 / s$ .

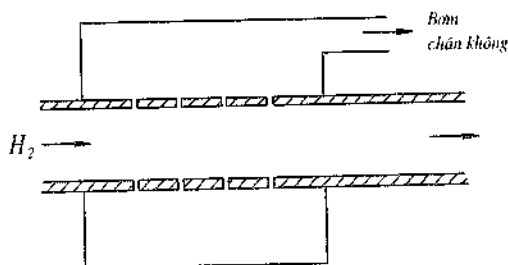
**10.40.** Trong quá trình giãn nở polytropic của khí lý tưởng hệ số khuếch tán của các phân tử khí không đổi. Xác định hệ số polytropic  $n$ .

**10.41.** Tìm độ biến thiên entropi của 64g khí oxy trong một quá trình biến đổi sao cho khi quá trình kết thúc, hệ số dẫn nhiệt tăng lên hai lần, còn hệ số khuếch tán không đổi.

**10.42.** Hệ số khuếch tán của các phân tử khí đơn nguyên tử thay đổi thế nào trong quá trình giãn nở đoạn nhiệt thể tích lên 8 lần?

**10.43.** Tìm nhiệt dung của quá trình polytropic trong đó hệ số khuếch tán trong khí lý tưởng giữ không đổi.

**10.44.** Khí hydro ở điều kiện tiêu chuẩn đi liên tục trong ống, trên



Hình 369

một đoạn ống ngắn khí khuếch tán qua những lỗ siêu nhỏ trên thành vào vùng hút của bơm (H. 369). Nồng độ deuteri trong khí được hút ra thay đổi bao nhiêu lần so với nồng độ ban đầu? (Nồng độ ban đầu là nồng độ tự nhiên và gần bằng  $2.10^{-2}\%$ )

**10.45.** Một bình chứa có dạng một quả bom hình cầu bán kính  $R_0$ , người ta gắn vào bình một ống bán kính  $r$ , chiều dài  $l$ . Ống được nối với khối phổ kế, còn bình chứa đầy khí. Nồng độ khí là  $n$ , nhiệt độ  $T$ , khối lượng mol  $\mu$ . Tiết diện hiệu dụng để phát tán các phân tử bằng  $\sigma$  sao cho  $(nr)^{-1} \gg \sigma \gg (nR_0)^{-1}$ . Bên trong quả bom, tại một thời điểm nào đó xuất hiện tập đồng vị của khí trong bình không khác nhau lắm về khối lượng. Sau khoảng thời gian bao nhiêu thì khối phổ kế có thể ghi được nó?

**10.46.** Trong khí quyển của khí A có một nguồn điểm của khí B sinh ra các nguyên tử có vận tốc chuyển động nhiệt và khuếch tán vào khí A. Chiều dài quãng đường tự do của khí B trong khí A bằng  $\lambda$ . Trung bình cứ sau  $n$  va chạm ( $n \gg 1$ ) các nguyên tử của khí B lại kết hợp với các nguyên tử khí A tạo thành các phân tử AB. Xác định trung bình của bình phương quãng đường đi được của các nguyên tử khí B tính từ nguồn điểm đến thời điểm tạo thành phân tử AB.

**10.47.** Quãng đường tự do của các phân tử  $H_2$  trong He ở điều kiện tiêu chuẩn xấp xỉ bằng  $3.10^{-5}$  cm. Tìm độ dịch chuyển trung bình bình phương  $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$  của các phân tử  $H_2$  trong He trong một giây; trong 100 giây. Kết quả thay đổi thế nào nếu:

- 1) Áp suất He tăng lên 4 lần;
- 2) Nhiệt độ của He tăng lên 4 lần;
- 3) Áp suất và nhiệt độ cùng tăng lên 4 lần.

**10.48.** Trong bình thể tích 1l chứa không khí ở điều kiện tiêu chuẩn. Tại một điểm người ta đưa vào các đồng vị phóng xạ của nitơ. Xác định thời gian để các đồng vị phóng xạ của nitơ phân bố đều trong bình.

**10.49.** Người ta mở một lọ nước hoa ở góc phòng. Một người ở trong phòng ngửi thấy nước hoa sau một phút. Nhiệt độ không khí trong phòng  $t_1 = 30^\circ C$ . Xác định thời gian để người đó ngửi thấy mùi nước hoa cũng tại chỗ đó trong phòng đó nếu nhiệt độ trong phòng giảm xuống  $t_2 = -30^\circ C$ .

**10.50.** Qua sự phát tán của các khí phóng xạ sau các vụ nổ hạt nhân, người ta thấy rằng nhờ có tính chảy xoáy mà thời gian khí phóng xạ trộn đều vào khí quyển Trái Đất mất gần một năm. Quá trình pha trộn do chảy rối trong

các điều kiện của khí quyển diễn ra nhanh hơn bao nhiêu lần so với quá trình khuếch tán phân tử?

**10.51.** Một nhà vật lý đang trí khi đi nghỉ phép đã bỏ quên trong phòng thí nghiệm một túi bằng cao su mỏng chứa khí hêli với thể tích gần 20l. Khi ông ta trở về khí hêli trong túi đã khuếch tán hết ra bên ngoài. Xác định độ biến thiên entropi của hêli. Biết rằng, trong không khí tự nhiên cứ một nguyên tử hêli thì có  $10^7$  phân tử khí khác. Cần phải bỏ ra một công tối thiểu bằng bao nhiêu để thu hêli lại trong túi?

**10.52.** Biết rằng quãng đường tự do trung bình của đơn ion argon – 40 trong một khí bằng  $10^{-5}$  cm. Tìm (gần đúng) vận tốc trôi trung bình  $v$  của ion argon trong khí đó dưới tác dụng của điện trường đều  $E = 300\text{V/cm}$ . Nhiệt độ của khí là nhiệt độ phòng.

**10.53.** Khi cho dòng điện chạy qua khí ion hoá một phần thì năng lượng của các ion lớn hơn năng lượng nhiệt của các nguyên tử trung hoà. Xác định cường độ điện trường để phần năng lượng của các ion bằng năng lượng nhiệt  $kT$ , nếu áp suất của khí  $P = 0,01\text{mmHg}$ , tiết diện hiệu dụng của sự phát tán các ion trên nguyên tử là  $\sigma = 5 \cdot 10^{-15} \text{cm}^2$ .

**10.54.** Xác định nhiệt độ của các electron đang chuyển động dưới tác dụng của điện trường có cường độ  $E = 100\text{V/cm}$  trong không khí ở điều kiện tiêu chuẩn. Mật độ electron rất nhỏ, tiết diện va chạm của chúng với các phân tử không khí  $\sigma \approx 5 \cdot 10^{-15} \text{cm}^2$ .

**10.55.** Khi các hạt mang điện tích di chuyển nhanh trong buồng Willson chứa đầy khí argon ở áp suất  $P = 1\text{atm}$  và hơi nước bão hoà, xảy ra quá trình tạo thành các ion argon. Các ion argon là tâm ngưng đọng hơi nước. Giả thiết chuyển động của các ion argon chỉ do khuếch tán. Xác định độ rộng của vết các hạt nếu quá trình ngưng tụ diễn ra  $\tau = 0,01\text{s}$  sau khi hạt bay qua. Tiết diện hiệu dụng của sự phát tán ion argon trên các nguyên tử  $\sigma = 5 \cdot 10^{-15} \text{cm}^2$ . Khối lượng nguyên tử argon  $A = 40$ , nhiệt độ  $T = 300\text{K}$ .

**10.56.** Một phân tử không khí ở điều kiện tiêu chuẩn sau thời gian  $t = 10\text{s}$  dịch chuyển được khoảng cách trung bình  $l$  bằng bao nhiêu tính từ vị trí ban đầu?

**10.57.** Để bảo vệ tránh các sản phẩm khí phóng xạ khi phân rã, người ta phủ cát lên quặng Thori. Khi đó khí phóng xạ Radon  $^{220}_{86}\text{Rn}$  do quặng sinh ra trong thời gian xuyên qua lớp cát sẽ bị phân rã đáng kể. Tính khoảng cách đến chỗ khí Radon bị phân rã  $10^5$  lần. Chu kỳ bán rã của Tòron  $T = 54,5\text{s}$ , hệ số khuếch tán của nó trong cát  $D = 0,04\text{cm}^2/\text{s}$ . Giả thiết khuếch tán theo đường thẳng một chiều.

**10.58.** Các tia vũ trụ lang thang trong thiên hà bị lệch trong từ trường giữa các ngôi sao. Quá trình này tương tự quá trình khuếch tán. Tìm thời gian  $\tau$  để các hạt đi qua được quãng đường tương đương với kích thước thiên hà  $R \approx 5 \cdot 10^{22} \text{ cm}$ , nếu độ dài hiệu dụng của quãng đường tự do  $\lambda \approx 3 \cdot 10^{20} \text{ cm}$ .

**10.59.** Sự phun khí đẳng nhiệt qua màng rỗ (có các lỗ rất nhỏ so với quãng đường tự do) được sử dụng để tách các đồng vị. Hỗn hợp đồng vị tự nhiên được cho vào bình có các thành rỗ. Khí phun qua các lỗ rỗ ở thành bình được hút vào một bình chuyên dụng. Người ta cho khí trong bình chuyên dụng qua chu kỳ phun thứ hai, thứ ba,... cho đến khi đạt được mức độ tách cần thiết. Cần phải tiến hành bao nhiêu chu kỳ phun để tỷ số nồng độ các hạt đồng vị nhẹ và nặng tăng 10 lần, nếu phân tử lượng tương đối của chúng lần lượt là  $\mu_1$  và  $\mu_2$ ?

**10.60.** Độ nhớt của Nitơ ở  $0^\circ\text{C}$  là  $\eta = 16,8 \cdot 10^{-10} \text{ N.s/cm}^2$ . Tìm độ dài trung bình của quãng đường tự do  $\lambda$  của các phân tử Nitơ trong các điều kiện trên.

**10.61.** Độ nhớt của Argon (khối lượng nguyên tử tương đối  $A = 40$ ) ở  $0^\circ\text{C}$  là  $\eta = 21 \cdot 10^{-10} \text{ N.s/cm}^2$ . Hãy tính các đại lượng sau của Argon ở nhiệt độ và áp suất tiêu chuẩn:

- 1) Vận tốc trung bình của chuyển động nhiệt của các nguyên tử;
- 2) Quãng đường tự do trung bình của nguyên tử;
- 3) Số va chạm trung bình  $\nu$  của các nguyên tử trong  $1 \text{ cm}^3$  trong 1s;
- 4) Tiết diện khí động hiệu dụng của nguyên tử  $\sigma$ ;
- 5) Bán kính khí động  $r$  của nguyên tử Argon.

**10.62.** Theo các số liệu thực nghiệm, tỷ số giữa các hệ số nhớt của nitơ và hydro bằng 1,94. Sử dụng các quan điểm của lý thuyết khí động học cổ điển, tìm tỷ số giữa các hệ số dẫn nhiệt của chúng

**10.63\*.** Xác định suất tiêu hao khối lượng khí  $Q$  trong dòng chảy Puazayle dừng đẳng nhiệt dọc theo một ống hình trụ dài  $l$ , bán kính  $r$ , ở hai đầu ống luôn giữ áp suất  $P_1$  và  $P_2$  ( $P_1 > P_2$ ).

**10.64.** Để xác định độ nhớt  $\eta$  của khí  $\text{CO}_2$  người ta cho nó vào bình cầu có thể tích  $V = 1 \text{ l}$  ở áp suất  $P_1 = 1600 \text{ mmHg}$ . Sau đó người ta mở van cho khí  $\text{CO}_2$  chảy khỏi bình qua một ống mao dẫn dài  $l = 10 \text{ cm}$ , đường kính  $D = 0,1 \text{ mm}$ . Sau thời gian  $\tau = 22$  phút áp suất trong bình giảm còn  $P_3 = 1350 \text{ mmHg}$ . Tính độ nhớt và đường kính khí động  $d$  của phân tử  $\text{CO}_2$ . Áp suất bên ngoài  $P_2 = 735 \text{ mmHg}$ . Có thể coi quá trình trên là đẳng nhiệt, xảy ra ở nhiệt độ  $15^\circ\text{C}$ .

**10.65.** Một bình có thể tích  $V = 100\text{l}$  được hút không khí ra bằng một bơm lý tưởng (tức là hút sạch khí bay đến) qua một ống bán kính  $r = 2\text{cm}$ , chiều dài  $L = 1\text{m}$ . Xác định thời gian bơm bình từ áp suất  $P_1 = 1\text{atm}$  đến áp suất  $P_2 = 0,1\text{mmHg}$ . Hệ số nhớt của không khí bằng  $\eta = 1,8 \cdot 10^{-4} P$ .

**10.66.** Một bình có thể tích  $V = 100\text{l}$  được hút không khí ra bằng một bơm lý tưởng (tức là hút sạch khí bay đến) qua một ống bán kính  $r = 2\text{cm}$ , chiều dài  $L = 1\text{m}$ . Xác định thời gian hút không khí ở nhiệt độ phòng từ áp suất  $P_1 = 10^{-4}\text{mmHg}$  đến áp suất  $P_2 = 10^{-7}\text{mmHg}$ .

**10.67.** Người ta hút không khí từ một bình thể tích lớn ở áp suất  $10^{-4}\text{mmHg}$ , nhiệt độ  $T = 300\text{K}$  qua một ống dài  $L = 2\text{m}$  và bán kính  $r = 10\text{cm}$ . Bơm có công suất  $V_1 = 1000\text{l/s}$ . Hỏi với công suất  $V_2$  nào của bơm sẽ đảm bảo được vận tốc hút (tức khối lượng khí trong một giây) như thế, nếu bơm được nối trực tiếp với bình?

**10.68.** Một bình được hút không khí qua một ống bằng bơm chân không lý tưởng (hút sạch các phân tử bay đến). Do rò rỉ ở thành bình mà áp suất trong bình không giảm đến không, sau một thời gian bơm áp suất được thiết lập ở mức  $10^{-6}\text{mmHg}$ . Giới hạn chân không này thay đổi như thế nào nếu đường kính của ống giảm hai lần?

**10.69.** Không khí chảy từ một bình vào khí quyển qua một ống làm bằng chất cách nhiệt tốt. Tìm khối lượng khí  $m$  chảy qua ống trong một giây, nếu áp suất và nhiệt độ trong bình lần lượt là  $P_1$  và  $T_1$ , áp suất bên ngoài  $P_0$ , chiều dài ống  $l$ , đường kính ống  $d$ . Dòng khí trong ống có thể coi như chảy theo lớp, bỏ qua sự phụ thuộc của độ nhớt  $\eta$  vào nhiệt độ.

**10.70.** Nước chảy từ một bình rộng thoáng qua một ống mao dẫn hình trụ bán kính  $R = 1\text{mm}$ , chiều dài  $l = 10\text{cm}$  đặt ở đáy bình. Công suất tiêu thụ trong mỗi giây  $N$  do sinh nhiệt bằng bao nhiêu, nếu chiều cao cột nước trong bình là  $h = 5\text{cm}$ ? Nhiệt độ không khí bên ngoài là  $20^\circ\text{C}$ .

**10.71\*.** Quá trình chảy của khí siêu loãng qua một ống có thể xem như một quá trình khuếch tán. Hệ số khuếch tán chỉ được xác định bằng các va chạm của các phân tử khí vào thành ống. Bỏ qua mọi va chạm giữa các phân tử với nhau. Đường kính ống  $2r$  đóng vai trò chiều dài quãng đường tự do. Trên cơ sở các giả định trên, xác định số phân tử  $N$  đi qua tiết diện ngang của một ống trụ dài  $l$  trong mỗi giây, nếu ở một đầu ống mật độ phân tử khí bằng  $n_1$ , ở đầu kia bằng 0. Coi quá trình chảy là đẳng nhiệt.

**10.72.** Hai bình có thể tích bằng nhau được nối với nhau bằng hai ống. Đường kính của một ống rất lớn, đường kính của ống còn lại rất nhỏ so với độ dài quãng đường tự do của các phân tử khí trong bình. Bình thứ nhất được

giữ ở nhiệt độ  $T_1 = 800\text{K}$ , bình thứ hai ở nhiệt độ  $T_2 = 200\text{K}$ . Khí trong ống nhỏ sẽ chảy theo hướng nào nếu khoá van ở ống rộng? Khối lượng khí m chuyển từ một bình sang bình kia bằng bao nhiêu, nếu tổng khối lượng khí trong cả hai bình là  $M$ ?

**10.73.** Một bình bằng thủy tinh có chiều dày thành  $l = 5\text{mm}$  và thể tích  $V = 1\text{l}$  chứa đầy nitơ. Xung quanh bình là chân không. Trên thành bình có một lỗ nhỏ hình trụ bán kính  $a = 0,1\text{mm}$ . Áp suất ban đầu của khí trong bình thấp đến mức bán kính của lỗ nhỏ không đáng kể so với độ dài quãng đường tự do của các phân tử khí. Hỏi mật độ phân tử khí trong bình thay đổi như thế nào theo thời gian? Xác định khoảng thời gian  $\tau$  để áp suất khí trong bình giảm e lần, nếu nhiệt độ được giữ không đổi và bằng  $T = 300\text{K}$ .

**10.74.** Hai bình có thể tích  $V_1$  và  $V_2$  được nối với nhau bằng một ống mao dẫn hình trụ bán kính  $a$  và chiều dài  $l$ . Trong ống mao dẫn diễn ra sự tràn khí đẳng nhiệt Knudsen từ bình nọ sang bình kia. Mật độ khí trong hai bình  $n_1$ ,  $n_2$  sẽ thay đổi như thế nào theo thời gian nếu mật độ ban đầu của chúng là  $n_{10}$ ,  $n_{20}$ ?

**10.75\*.** Đánh giá trị số vận tốc ổn định của một đĩa phẳng chuyển động trong không khí rất loãng, một bên đĩa được làm nóng đến nhiệt độ  $T_1 = 310\text{K}$ , bên kia đến  $T_2 = 300\text{K}$ . Nhiệt độ không khí  $T = 300\text{K}$ .

**10.76.** Xác định góc lệch  $\varphi$  của một đĩa treo trên sợi chỉ đàn hồi, nếu ở phía dưới cách nó  $h = 1\text{cm}$  có một đĩa thứ hai giống nó quay với vận tốc góc  $\omega = 50\text{rad/s}$ . Bán kính các đĩa  $R = 10\text{cm}$ , mô đun xoắn của sợi chỉ  $f = 10^{-3}\text{N.m/rad}$ , độ nhớt của không khí  $\eta = 1,8 \cdot 10^{-9}\text{N.s/cm}^2$ . Bỏ qua hiệu ứng cạnh, chuyển động của không khí giữa hai đĩa giả thiết là theo lớp.

**10.77\*.** Giải bài tập 10.76 với giả thiết rằng các đĩa đặt trong không khí rất loãng với áp suất  $P = 10^{-4}\text{mmHg}$ , khi độ dài quãng đường tự do của các phân tử không khí rất lớn so với khoảng cách giữa hai đĩa. Để đơn giản, giả thiết rằng tất cả phân tử chuyển động với vận tốc có cùng độ lớn và bằng vận tốc trung bình của các phân tử không khí  $v = 450\text{m/s}$ .

**10.78.** Biết rằng trong khí quyển của sao Kim bao gồm chủ yếu là  $\text{CO}_2$  có một lớp mây che phủ đặc ở độ cao  $H = 50\text{km}$  quay tương đối so với hành tinh quanh trục của nó với chu kỳ  $T = 3,6 \cdot 10^4\text{s}$ . Giả thiết chuyển động theo các lớp. Xác định công suất  $N$  tiêu tán trên một đơn vị bề mặt khi chuyển động gần xích đạo. Giả thiết khí quyển đẳng nhiệt với nhiệt độ  $T = 600\text{K}$ , bán kính sao Kim  $R = 6000\text{km}$ .

**10.79\*.** Trong chất lỏng có các hạt Brown giống nhau, mật độ của chúng chỉ phụ thuộc vào một tọa độ  $x$ . Quá trình làm đều mật độ diễn ra do sự khuếch

tán. Biểu diễn hệ số khuếch tán của các hạt Brown  $D$  thông qua trung bình của bình phương khoảng dịch chuyển của hạt theo hướng trục  $X$  trong thời gian  $\tau$ .

**10.80\*.** Tính linh động của hạt Brown không mang điện (hoặc bất kỳ hạt nào khác) là hệ số tỷ lệ giữa vận tốc chuyển động ổn định  $u$  dưới tác dụng của lực không đổi  $f$  và độ lớn lực  $f$ :

$$u = Bf.$$

Các hạt Brown giống nhau lơ lửng trong chất lỏng đặt trong trọng trường. Viết biểu thức của dòng tổng hợp các hạt do khuếch tán và do trọng trường. Ở trạng thái dừng dòng tổng hợp này phải bằng không đồng thời sự phân bố tĩnh của các hạt Brown theo chiều cao tuân theo công thức Boltzmann (công thức khí áp). Trên cơ sở những suy luận trên, thiết lập mối liên hệ giữa tính linh động của hạt với hệ số khuếch tán.

**10.81.** Sử dụng kết quả của hai bài trước, tìm mối liên hệ giữa trung bình của bình phương khoảng dịch chuyển  $\overline{\Delta x^2}$  của hạt Brown trong thời gian  $\tau$  theo một hướng xác định nào đó với tính linh động của hạt. Mối liên hệ này sẽ có dạng như thế nào nếu hạt hình cầu bán kính  $a$ ? (theo công thức Stoc

$$B = \frac{1}{6\pi\eta a}, \text{ trong đó } \eta \text{ là độ nhớt động lực của chất lỏng}).$$

**10.82.** Xác định trung bình bình phương của khoảng dịch chuyển ngang của các hạt huminut trong nước ở nhiệt độ  $20^\circ\text{C}$  trong một phút, biết rằng bán kính của chúng  $a = 0,5\mu\text{m}$ , độ nhớt của nước  $\eta = 10^{-7} \text{ N.s/cm}^2$ .

**10.83.** Theo Anhxtanh và Smolukhovski số Avôgađrô có thể xác định được khi quan sát chuyển động Brown của các hạt humihut và đo trung bình bình phương khoảng dịch chuyển của chúng theo một hướng xác định. Số Avôgađrô bằng bao nhiêu, nếu trung bình bình phương khoảng dịch chuyển trong thời gian 5 phút của các hạt hummihut bán kính  $a = 0,385\mu\text{m}$  trong glyxerin ở nhiệt độ  $20^\circ\text{C}$  bằng  $1,5\mu\text{m}$ ? Độ nhớt của glyxerin  $\eta = 1,49 \cdot 10^{-5} \text{ N.s/cm}^2$ .

**10.84.** Khi xử lý các dữ liệu thực nghiệm của chuyển động Brown, để đơn giản và thuận tiện hơn, người ta không tính  $\langle \Delta x^2 \rangle$  mà tính  $\langle |\Delta x| \rangle$ . Giả thiết sự phân bố các độ dời  $\Delta x$  tuân theo định luật sai số Gauss. Tìm biểu thức tính độ dời trung bình  $\langle |\Delta x| \rangle$  trong thời gian  $\tau$  của hạt Brown.

**10.85.** Một giọt dầu khối lượng  $m = 10^{-10} \text{ g}$  rơi trong không khí từ độ cao  $h = 1\text{m}$ , thực hiện chuyển động Brown. Giả thiết có thể sử dụng công thức

Stốc đối với chuyển động rơi của nó. Tìm trung bình của bình phương độ lệch  $\langle r^2 \rangle$  của giọt ra khỏi vị trí rơi dự kiến nếu nhiệt độ của không khí là  $T = 300\text{K}$ . Hãy kiểm tra xem các điều kiện áp dụng công thức Stốc có thỏa mãn không nếu khối lượng riêng của dầu  $\rho = 0,9\text{g/cm}^3$ ? Độ nhớt của không khí  $\eta = 1,8 \cdot 10^{-9} \text{ N.s/cm}^2$ .

**10.86.** Khi đo điện tích electron theo phương pháp Miliken người ta quan sát chuyển động Brown của các giọt dầu. Khi đó không những có thể tìm được điện tích electron, mà còn tìm được số Avôgadrô. Ký hiệu vận tốc chuyển động ổn định của điện tích giọt dầu trong trọng trường khi không có điện trường là  $v_1$ . Giả thiết trong điện trường cường độ  $E$ , giọt dầu chuyển động lên phía trên với vận tốc ổn định  $v_2$ . Từ các quan sát trên có thể tính được điện tích electron  $e$ . Gọi  $\overline{(\Delta x)^2}$  là trung bình của bình phương độ dời của hạt trong thời gian  $\tau$  theo hướng trục  $x$  (nằm ngang). Giả thiết vận tốc của hạt tỷ lệ với lực đặt vào nó, tìm biểu thức tính  $Ne$ , trong đó  $N$  là số Avôgadrô.

**10.87.** Khi quan sát chuyển động Brown của giọt dầu trong tụ Milliken (xem bài trước) người ta xác định được  $\overline{(\Delta x)^2} = 1,05 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2$ ,  $\tau = 10\text{s}$ ,  $v_1 + v_2 = 0,0268\text{cm/s}$ ,  $T = 300\text{K}$ . Hiệu điện thế giữa hai bản tụ  $U = 940\text{V}$ , khoảng cách giữa chúng  $d = 0,7\text{cm}$ . Tính số Avôgadrô  $N$ . Điện tích giọt dầu đo được bằng điện tích electron  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .

**10.88.** Xác định bán kính tối thiểu  $R_{\min}$  của các hạt sương mù hình cầu để khi đạt đến bán kính đó hạt bắt đầu rơi xuống đất. Nhiệt độ khí quyển không đổi và bằng  $T = 300\text{K}$ . Độ nhớt của không khí  $\eta = 1,8 \cdot 10^{-9} \text{ N.s/cm}^2$ .

**10.89.** Một bình cầu chứa không khí có bán kính  $R = 0,015\text{cm}$  ở nhiệt độ  $T = 300\text{K}$  và áp suất vài atm. Không khí bên trong bình gồm các hạt hình cầu có các bán kính  $r$  khác nhau. Khối lượng riêng của các hạt  $\rho = 1\text{g/cm}^3$ . Khi va vào thành bình các hạt này dính vào đó. Hệ số dính các hạt không phụ thuộc vào kích thước của chúng và không giảm theo thời gian. Mật độ các hạt đủ nhỏ để có thể bỏ qua sự va chạm lẫn nhau giữa chúng. Xác định bán kính của các hạt ở trong không khí lâu nhất.

**10.90.** Tính trung bình bình phương mômen động lượng của một giọt nước bán kính  $r = 10^{-5} \text{ cm}$  thực hiện chuyển động Brown ở nhiệt độ  $T = 300\text{K}$ .

**10.91.** Người ta quan sát dưới kính hiển vi một lớp máu mỏng. Cần mất bao nhiêu thời gian để phát hiện được chuyển động của Brown của các hồng cầu, nếu khoảng cách nhỏ nhất có thể xác định được bằng kính hiển vi



$l = 10^{-6} \text{ m}$ ? Độ nhớt của máu  $\eta = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$ , coi hồng cầu là hình cầu bán kính  $r = 3 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ . Nhiệt độ  $t = 27^\circ \text{ C}$ .

**10.92.** Xác định kích thước hạt nhôm lơ lửng trong chất lỏng có khối lượng riêng  $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$  và độ nhớt  $\eta = 1 \text{ P}$  khi vận tốc rơi nhớt của nó bằng với vận tốc của chuyển động nhiệt ở nhiệt độ phòng. Các hạt này có rơi thành lớp nhôm dưới đáy hay không?

**10.93.** Khí nitơ lỏng được giữ trong bình chứa hình trụ đường kính  $d = 10 \text{ cm}$ . Bình chứa được bao bọc bởi lớp cách nhiệt làm bằng xốp và đường kính ngoài  $D = 30 \text{ cm}$ . Giả thiết rằng sự truyền nhiệt trong xốp là do sự dẫn nhiệt của không khí trong các lỗ rỗng. Xác định thời gian đến khi bay hơi mất 1% nitơ lỏng. Nitơ lỏng chiếm hết thể tích bình và nhiệt độ sôi  $t_1 = -195^\circ \text{ C}$ . Nhiệt độ không khí xung quanh  $t_2 = 25^\circ \text{ C}$ . Hệ số dẫn nhiệt của không khí ở  $t_0 = 0^\circ \text{ C}$  bằng  $\chi_0 = 0,025 \text{ W/(m.K)}$ . Nhiệt hóa hơi phân tử của nitơ  $\lambda = 5,6 \text{ kJ/mol}$ . Khối lượng riêng của nitơ lỏng  $0,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ .

**10.94.** Trong khẩu phần ăn của nhà du hành vũ trụ có sữa, trước khi cất cánh vài ngày người ta rót sữa vào bình chứa hình trụ đặt thẳng đứng. Trong thời gian đó trong sữa hình thành một lớp từ các giọt chất béo, chiều dày của lớp nhỏ hơn rất nhiều so với chiều cao của bình. Sữa có kịp khôi phục lại sự phân bố các hạt chất béo trong thời gian tương tự ở trạng thái không trọng lượng không? Giả thiết rằng kích thước các hạt không thay đổi theo thời gian và việc phóng tên lửa (do diễn ra rất nhanh) không gây nên sự pha trộn sữa.

**10.95.** Xác định số Reynolds của khí thải trong ống thoát khí của ô tô "Matxcovich". Đường kính ống gần bằng 20mm, nhiệt độ của khí trong ống  $\sim 100^\circ \text{ C}$ . Suất tiêu hao nhiên liệu khi chạy với vận tốc 60km/h là gần 8kg trên 100km. Nhiên liệu là hỗn hợp cacbonhydrô  $C_n H_{2n}$  có phân tử lượng  $\sim 10^2$ . Khi xác định độ nhớt của khí thải, tiết diện va chạm hiệu dụng có thể coi là  $\sim 10^{-14} \text{ cm}^2$ .

**10.96\*.** Tìm dòng hơi tĩnh từ một giọt chất lỏng hình cầu bán kính  $a$ , trong quá trình bay hơi của nó (hoặc hơi ngưng tụ trên giọt chất lỏng). Hệ số khuếch tán của hơi chất lỏng nói trên trong không khí bằng  $D$ . Khối lượng riêng của hơi ở cách xa giọt là  $\rho_\infty$ , khối lượng riêng của hơi bão hoà là  $\rho_{bh}$ . Tìm khối lượng riêng của hơi dưới dạng hàm của khoảng cách  $r$  tính từ tâm giọt chất lỏng. Bỏ qua sự phụ thuộc của áp suất hơi bão hoà vào độ cong của bề mặt chất lỏng.

**10.97.** Tìm thời gian bay hơi  $\tau_b$  của một giọt nước với bán kính ban đầu  $a$ , trong không khí có độ ẩm tương đối  $\varphi$  và nhiệt độ  $t = 20^\circ \text{ C}$ . Ở nhiệt độ

$t = 20^{\circ}\text{C}$  áp suất hơi nước bão hoà  $P_{bh} = 17,5\text{mmHg}$ , hệ số khuếch tán  $D = 0,22\text{cm}^2 / \text{s}$ . Xét hai trường hợp sau:

1)  $\varphi = 40\%$ ,  $a = 1\text{mm}$ ;

2)  $\varphi = 99\%$ ,  $a = 1\mu\text{m}$ .

*Hướng dẫn.* Giả thiết quá trình bay hơi là quá trình dừng. Điều đó có thể được, nếu khối lượng riêng hơi nước  $\rho_h$  nhỏ hơn nhiều so với khối lượng riêng của chất lỏng  $\rho_{cl}$ .

**10.98.** Người ta cho nước vào một bình chứa hình trụ có diện tích đáy  $S = 100\text{cm}^2$ . Phía trên của bình có chứa chất hấp thụ hơi nước (áp suất của hơi nước bên trên bằng 0). Khoảng cách giữa mặt nước và chất hấp thụ hơi nước  $H = 10\text{cm}$ . Nhiệt độ của hệ  $T = 300\text{K}$ . Xác định áp suất hơi nước ngay trên bề mặt nước, nếu biết rằng sau  $t = 1\text{h}$  lượng nước giảm mất  $\Delta m = 0,14\text{g}$ . Quãng đường tự do trung bình  $\lambda$  của các phân tử trong hệ không khí – hơi nước giả thiết bằng  $10^{-5}\text{cm}$ . Hơi ngay trên bề mặt nước được coi là hơi bão hoà.

**10.99.** Tìm thời gian bay hơi của nước trong ống dài  $l = 10\text{cm}$ , được hàn kín một đầu. Nhiệt độ  $t = 27^{\circ}\text{C}$ . Ban đầu nước được đổ một nửa ống, độ ẩm tương đối của không khí là 50%. Áp suất hơi nước bão hoà ở  $27^{\circ}\text{C}$  là  $P_{bh} = 20\text{mmHg}$ . Quãng đường tự do trung bình  $\lambda$  của các phân tử trong hệ không khí – hơi nước giả thiết bằng  $10^{-5}\text{cm}$ . Hơi ngay bề mặt nước coi là hơi bão hoà, bỏ qua hiện tượng mao dẫn.

**10.100.** Một bình hình trụ chứa nước đang bay hơi một phần. Nhiệt độ của nước thấp hơn  $4^{\circ}$  so với nhiệt độ không khí xung quanh ( $300\text{K}$ ). Xác định hiệu mật độ hơi trên bề mặt nước và bên ngoài bình, giả thiết rằng hơi bay lên trên là do khuếch tán. Coi quãng đường tự do trung bình của hơi và của không khí là như nhau.

**10.101.** Nước ở đĩa đựng chén trà bị bay hơi vào phòng trong thời gian khoảng một ngày đêm. Xác định tỷ số giữa số phân tử bay khỏi nước trong một giây  $N_1$  với số phân tử quay ngược trở lại trong nước  $N_2$ . Có thể coi rằng một lượng nước không lớn bay hơi không làm thay đổi độ ẩm của không khí trong phòng là 70%. Số phân tử quay trở lại nước được xác định bởi hiện tượng nào? Xác định thời gian bay hơi, bỏ qua các dòng lưu chuyển không khí trong phòng.

**10.102.** Tìm mật độ  $J$  của dòng phân tử chất lỏng bay hơi từ một đơn vị diện tích bề mặt trong một đơn vị thời gian vào chân không ở nhiệt độ  $T$ , nếu biết

áp suất hơi bão hoà ở nhiệt độ  $T$  là  $P_{bh}$  và hệ số dính là  $K$ . Hệ số dính bằng tỷ số giữa số phân tử hơi nước bám vào bề mặt chất lỏng với tổng số phân tử hơi va vào mặt nước trong cùng một khoảng thời gian.

**10.103.** Một bình hẹp hình trụ có đường kính nhỏ không đáng kể so với chiều cao  $h_0 = 20\text{cm}$  của nó. Bình được đổ đầy nước ở nhiệt độ  $300\text{K}$ . Bình được thổi phía trên miệng theo phương ngang bằng một luồng không khí khô, sao cho áp suất trên miệng ống có thể coi bằng không. Tính đến hiện tượng khuếch tán hơi nước trong ống, tìm thời gian để nước trong bình bay hơi hết. Khối lượng riêng của hơi bão hoà ở nhiệt độ đang xét  $\rho_{bh} = 3 \cdot 10^{-5} \text{g/cm}^3$ . Hệ số khuếch tán của hơi nước trong không khí  $D = 0,3 \text{cm}^2 / \text{s}$ .

**10.104.** Trong cột cồn của một nhiệt kế cồn đặt thẳng đứng ở độ sâu cách bề mặt phía trên  $L = 1\text{cm}$  có một bọt khí không lớn được tạo thành. Bọt khí chia cột cồn thành hai phần. Thể tích của phần ống mao dẫn bên trên cột cồn chỉ chứa hơi cồn. Bỏ qua khả năng hoà tan của không khí trong cồn và sự chuyển dịch chất lỏng theo màng của bọt khí. Xác định thời gian để cột cồn không còn bị phân chia. Khối lượng riêng của cồn  $\rho = 0,8 \text{g/cm}^3$ , áp suất hơi cồn ở nhiệt độ  $T = 300\text{K}$  là  $P_0 = 45 \text{mmHg}$ , tiết diện hiệu dụng của các va chạm giữa các phân tử  $\sigma \approx 8 \cdot 10^{-15} \text{cm}^2$ .

**10.105.** Tìm độ biến thiên entropi của  $88\text{g}$  khí cacbonic, nếu sau một quá trình biến đổi nào đó độ nhớt động lực của nó tăng lên  $\sqrt{2}$  lần, còn hệ số khuếch tán tăng lên hai lần.

**10.106.** Tìm độ biến thiên entropi của  $132\text{g}$  khí cacbonic trong một quá trình, nếu sau quá trình đó độ nhớt động lực giảm hai lần, còn số va chạm của các phân tử vào  $1\text{cm}^2$  thành bình trong một giây giảm 4 lần.

**10.107.** Vận tốc rơi của một giọt chất lỏng nhỏ trong buồng Willson thay đổi như thế nào sau khi thể tích của nó tăng đoạn nhiệt lên hai lần? Để đơn giản không khí trong bình có thể coi là khí lý tưởng.

**10.108.** Khi đo độ nhớt bằng phương pháp Stốc người ta ném các bi sắt khối lượng riêng  $\rho$ , bán kính  $r$  chính xác vào tâm của bình trong chất lỏng khối lượng riêng  $\rho_{cl}$  và nhiệt độ  $T$ . Khoảng cách trung bình bình phương  $\langle \Delta R^2 \rangle$  giữa các điểm chạm của các hòn bi vào đáy đến tâm bình bằng bao nhiêu, nếu chiều cao cột nước bằng  $H$ ?

**10.109.** Thiết bị phân tách đồng vị bằng phương pháp khuếch tán khí gồm  $N$  tầng, trong mỗi tầng hỗn hợp các đồng vị ở thể khí được cho đi qua một lỗ nhỏ trong màng mỏng ngăn giữa hai khoang, khí sau khi vào khoang thứ hai được hút và bơm vào khoang thứ nhất của tầng sau. Trong tất cả các khoang

đầu tiên của các tầng, áp suất được giữ như nhau và lớn hơn nhiều lần so với áp suất khí trong khoang thứ hai. Xác định độ giàu của đồng vị nhẹ trong

hỗn hợp, tức là tỷ số giữa nồng độ tương đối thu được  $a = \frac{n_{\text{nhẹ}}}{n_{\text{nặng}}}$  so với

nồng độ tương đối ban đầu đối với trường hợp khí là hydro (các đồng vị có khối lượng nguyên tử là 1 và 2) và  $N = 20$ .

**10.110.** Tìm hiệu giữa các entropi mol của các phân tử oxy trong các điều kiện của hiệu ứng Knudsen bên trong chiếc cốc có thành lỗ và bên ngoài cốc, nếu nhiệt độ bên trong cốc là  $T_1 = 350\text{K}$ , bên ngoài cốc  $T_2 = 300\text{K}$ .

**10.111.** Giữa hai tấm ván không thấm rộng vô cùng đặt song song với nhau ở nhiệt  $T_1$  và  $T_2$  có chứa khí loãng đơn nguyên tử sao cho độ dài quãng đường tự do lớn hơn nhiều so với khoảng cách giữa hai tấm. Mật độ phân tử khí là  $n$ . Xác định động năng trung bình của các nguyên tử trong một đơn vị thể tích giữa hai tấm. Giả thiết rằng trong không gian giữa hai tấm, các nguyên tử phân bố theo phân bố vận tốc Maxwell với các nhiệt độ  $T_1$  và  $T_2$ .

**10.112.** Giữa hai tấm ván không thấm rộng vô cùng đặt song song với nhau ở nhiệt  $T_1$  và  $T_2$  có chứa khí loãng đơn nguyên tử sao cho độ dài quãng đường tự do lớn hơn nhiều so với khoảng cách giữa hai tấm. Mật độ phân tử khí là  $n$ . Khối lượng nguyên tử là  $m$ . Xác định mật độ  $q$  của dòng nhiệt giữa hai tấm. Giả thiết rằng trong không gian giữa hai tấm, các nguyên tử phân bố theo phân bố vận tốc Maxwell với các nhiệt độ  $T_1$  và  $T_2$ .

**10.113.** Một bình trụ có thành cách nhiệt được ngăn thành hai phần bằng nhau bằng một màng dẫn nhiệt, ngăn bên trái chứa hydro florua  $^1\text{H}^{19}\text{F}$ , bên phải chứa  $^{20}\text{Ne}$ . Hai đầu nút mỗi đầu có một lỗ rất nhỏ diện tích  $S$ , qua các lỗ đó các phân tử khí phụt vào chân không. Do sự trao đổi nhiệt mà nhiệt độ các khí trong hai ngăn có thể coi như bằng nhau. Xác định dòng nhiệt  $J$  qua vách ngăn ở giai đoạn đầu của quá trình, khi bỏ qua sự thay đổi nồng độ các phân tử trong bình. Nhiệt độ  $T$  và áp suất  $P$  ban đầu như nhau.

**10.114.** Tại tâm của một khối lập phương tạo thành từ các tấm liên tiếp làm bằng các chất khác nhau, trong kết quả của một phản ứng hạt nhân có các hạt neutron đơn năng lượng được sinh ra. Xác định tỷ số thời gian mà sau đó các neutron này có mặt trên các mặt của khối lập phương song song và vuông góc với mặt phẳng các tấm. Các tấm có cùng độ dày và chứa cùng một lượng chất. Các độ dài quãng đường tự do của các neutron trong các tấm lần lượt là  $\lambda_1$  và  $\lambda_2$  ( $\lambda_1$  và  $\lambda_2$  nhỏ hơn nhiều so với độ dày của tấm).

**10.115.** Một chùm phân tử nitơ đang bay với vận tốc  $10^7\text{cm/s}$  đi qua một lớp nitơ dày  $1\text{cm}$  ở áp suất  $10^{-4}\text{mmHg}$  và nhiệt độ  $0^\circ\text{C}$ . Nhiệt độ của nitơ

tăng nhanh như thế nào nếu mật độ của chùm phân tử có giá trị sao cho qua mỗi  $\text{cm}^2$  có  $10^6$  phân tử đi qua trong một giây. Giả thiết đường kính phân tử bằng  $3,7 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ .

**10.116.** Xác định thời gian hiệu dụng để nhiệt độ cân bằng trong một thanh đồng dài  $L = 10 \text{ cm}$  trong chân không. Khối lượng riêng của đồng  $\rho = 8,9 \text{ g/cm}^3$ . Hệ số dẫn nhiệt  $\chi = 3,8 \text{ J/(s.m.K)}$ ,  $T \gg \theta^*$  ( $\theta^*$  là nhiệt độ Debai).

**10.117.** Ở nhiệt độ  $T$  độ nhớt của một khí có phân tử lượng tương đối  $\mu$  bằng  $\eta$ . Dựa vào các dữ liệu đã cho, xác định khối lượng riêng của khí hoá lỏng. Giả thiết khí là lý tưởng.

**10.118.** Khi mô tả bằng lý thuyết các tính chất của khí thực, năng lượng tương tác giữa hai nguyên tử là hàm của khoảng cách  $r$  thường được viết dưới dạng thế năng Lennard – John  $U(r) = 4\varepsilon_0 \left[ \left( \frac{r_0}{r} \right)^{12} - \left( \frac{r_0}{r} \right)^6 \right]$ . Giả thiết

đối với xênon (khối lượng nguyên tử tương đối 131)  $\varepsilon_0 = 0,02 \text{ eV}$ ,  $r_0 = 4 \text{ Å}$ , trong phạm vi mô hình năng lượng trên, hãy xác định hệ số tự khuếch tán của xênon tại điểm tới hạn.

*Hướng dẫn.* Tiết diện va chạm hiệu dụng được xác định từ điều kiện: năng lượng tương tác khi các hạt ở sát nhau nhất xấp xỉ bằng động năng.

**10.119.** Bảng Hallton có dạng hình vuông cạnh  $H$  có đóng  $N \gg 1$  chiếc đinh. Từ phía trên người ta thả vào bảng một viên bi sắt bán kính  $r$ ,  $r$  lớn hơn nhiều so với bán kính đinh, nhưng nhỏ hơn nhiều so với khoảng cách giữa các đinh. Viên bi lệch khỏi đường thẳng đứng đi qua điểm ném là bao nhiêu khi nó rơi tới cạnh phía dưới của bảng?

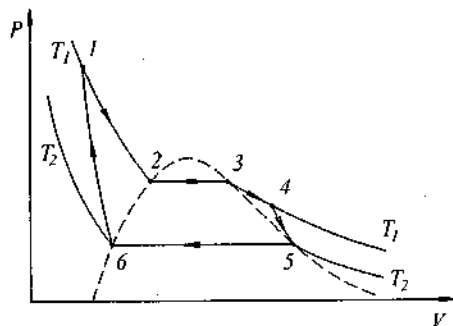
## §11. CHUYỂN PHA

**11.1\*.** Trong một bình kín ở  $0^\circ \text{C}$  có một mol nước (18g). Hỏi cần tốn một nhiệt lượng bằng bao nhiêu để tăng nhiệt độ của hệ lên  $100^\circ \text{C}$  và để toàn bộ nước khi đó chuyển thành hơi bão hoà? Nhiệt hoá hơi riêng của nước ở

<sup>1</sup> Bất đẳng thức  $T \gg \theta$  cho ta biết rằng nhiệt dung của chất không phụ thuộc vào nhiệt độ (định luật Dulong – Pti)

$100^{\circ}\text{C}$  và áp suất không đổi  $\lambda = 539\text{cal/g}$ . Bỏ qua áp suất hơi bão hoà ở  $0^{\circ}\text{C}$  và nhiệt dung của thành bình, đồng thời bỏ qua thể tích của nước so với thể tích hơi bão hoà.

**11.2.** Động cơ Cárnot trong một chu trình  $1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 1$  thực hiện một công bằng bao nhiêu? Tác nhân là một mol nước, trong thời gian làm việc của động cơ nó chuyển thành hơi và ngược lại (H.370). Các đường đẳng nhiệt  $1 - 2 - 3 - 4$  và  $5 - 6$  ứng với  $T_1 = 500\text{K}$  và  $T_2 = 400\text{K}$ . Đường đẳng nhiệt  $5 - 6$  nằm hoàn toàn trong vùng lỏng pha, vì thế tại điểm 6 chỉ có nước, tại điểm 5 chỉ có hơi. Các đường  $1 - 6$  và  $4 - 5$  là các đường polytropic. Nhiệt hoá hơi riêng của nước  $\lambda = 2,26\text{J/g}$  (ở nhiệt độ  $T = 373\text{K}$ ).



Hình 370

**11.3.** Ở đáy của bình đã hút hết không khí có một lớp băng phẳng song song dày  $l = 7\text{mm}$ , mặt dưới của băng được giữ ở nhiệt độ không đổi  $t_0$ . Xác định nhiệt độ  $t_0$  này, biết rằng khi hút khí trong bình, nhiệt độ bề mặt phía trên của lớp băng là  $t_1 = -50^{\circ}\text{C}$ . Độ dẫn nhiệt của nước đá  $\chi = 5,3 \cdot 10^{-3}\text{cal/(s.cm}^{\circ}\text{C)}$ . Nhiệt hóa hơi của nước đá  $q = 680\text{cal/g}$ . Áp suất hơi bão hoà phía trên bề mặt băng ở nhiệt độ  $t_1 = -50^{\circ}\text{C}$  khi không hút chân không là  $P = 0,03\text{mmHg}$ .

**11.4\*.** Sau khi xét chu trình Cárnot của hệ gồm chất lỏng và hơi bão hoà của nó, áp dụng định lý Cárnot hãy biểu diễn đạo hàm của áp suất hơi bão hoà theo nhiệt độ  $\frac{dP}{dT}$  thông qua các thể tích riêng của hơi và chất lỏng  $v_h, v_l$  và nhiệt hoá hơi riêng  $\lambda$ .

**11.5.** Lưu huỳnh tinh thể thoi chuyển hoá thành lưu huỳnh tinh thể mônôclin (tinh thể đơn nghiêng) tại nhiệt độ  $t = 96,5^{\circ}\text{C}$ . Ở áp suất khí quyển nhiệt lượng chuyển đổi  $q = 2,2\text{cal/g}$ . Khi chuyển pha thể tích riêng của lưu huỳnh biến đổi đột ngột một lượng  $\Delta v = 0,014\text{cm}^3/\text{g}$ . Tìm độ dịch chuyển nhiệt độ  $\Delta T$  của điểm chuyển pha khi áp suất thay đổi  $\Delta P = 1\text{atm}$ .

**11.6.** Ở áp suất khí quyển axit axêtic nóng chảy tại nhiệt độ  $t = 16,6^{\circ}\text{C}$ .

Hiệu thể tích riêng giữa pha lỏng và pha rắn  $\Delta v = 0,16\text{cm}^3/\text{g}$ . Điểm nóng chảy của axit axêtic dịch chuyển  $\Delta T = 1\text{K}$  khi áp suất thay đổi  $\Delta P = 4\text{atm}$ . Tìm nhiệt nóng chảy riêng của axit axêtic.

**11.7.** Tìm áp suất hơi nước bão hoà ở nhiệt độ  $101^{\circ}\text{C}$ . Giả thiết hơi nước là khí lý tưởng.

**11.8.** Tìm độ tăng nhiệt độ sôi của nước nếu tăng áp suất hơi bão hoà của nó thêm 1 atm ở gần điểm sôi của nước khi áp suất không khí bằng 1 atm. Nhiệt hoá hơi riêng của nước trong các điều kiện trên  $\lambda = 539\text{cal/g}$ .

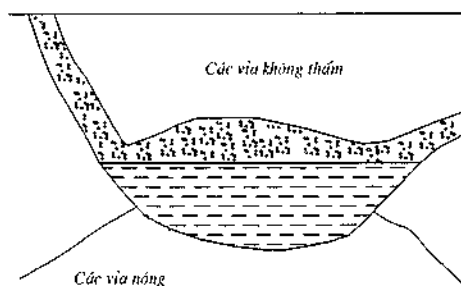
**11.9.** Một phần của một bình kín chứa nước ở nhiệt độ  $T = 300\text{K}$ . Tìm độ biến thiên tương đối của khối lượng riêng hơi bão hoà khi nhiệt độ tăng lên 10K. Nhiệt hoá hơi riêng của hơi nước ở nhiệt độ này  $\lambda = 580\text{cal/g}$ . Coi hơi nước là khí lý tưởng.

**11.10.** Tìm nhiệt độ nấu thức ăn trong nồi áp suất nếu đường kính lỗ van an toàn là  $d = 5\text{mm}$ , khối lượng tải trọng giữ van  $m = 60\text{g}$ . Nhiệt hoá hơi riêng của nước  $\lambda = 2260\text{kJ/kg}$ . Coi hơi nước là khí lý tưởng.

**11.11.** Hơi nước bão hoà trong xilanh phía dưới piston ở  $100^{\circ}\text{C}$  được đun nóng lên  $1^{\circ}\text{C}$  và dịch chuyển piston sao cho hơi vẫn giữ trạng thái bão hoà và không bị ngưng tụ. Tìm sự thay đổi tương đối của thể tích hơi nước, coi hơi nước là khí lý tưởng, nhiệt hoá hơi riêng của nước ở  $100^{\circ}\text{C}$  là  $\lambda = 539\text{cal/g}$ .

**11.12.** Tìm thể tích riêng của hơi nước  $v_h$  ở  $100^{\circ}\text{C}$  và áp suất tiêu chuẩn, nếu biết rằng ở áp suất 735,5mmHg, nhiệt độ sôi của nước bằng  $99,1^{\circ}\text{C}$ . Nhiệt hoá hơi riêng ở  $100^{\circ}\text{C}$  là  $\lambda = 539\text{cal/g}$ .

**11.13.** Các mạch phun nước ngầm gián đoạn có thể coi như các bể ngầm lớn chứa đầy nước ngầm và được sấy bằng nguồn nhiệt của lòng đất (H. 371). Nước được phun lên trên mặt đất qua một khe hẹp, khe hẹp này trong chu kỳ "tĩnh" chứa đầy nước. Giả thiết rằng chu kỳ hoạt động bắt đầu khi nước trong bể ngầm sôi, trong thời gian mạch sôi và trong thời gian mạch phun khe hẹp chỉ chứa hơi nước và phun ra bên ngoài. Xác định lượng nước tiêu hao trong một lần phun. Chiều sâu của khe  $h = 90\text{m}$ , Nhiệt hoá hơi riêng của nước  $\lambda = 2260\text{J/g}$ .



Hình 371

**11.14.** Một xilanh được ngăn đôi bằng một piston nhẹ, một ngăn chứa khí lý tưởng, ngăn còn lại chứa một lượng nước không lớn và hơi bão hoà. Tìm sự

thay đổi tương đối của thể tích khí lý tưởng khi đun nóng cả hệ từ  $100^{\circ}\text{C}$  lên  $101^{\circ}\text{C}$ . Nhiệt hoá hơi riêng của nước ở  $100^{\circ}\text{C}$  là  $\lambda = 539\text{cal/g}$ .

**11.15.** Ở đáy của một bình chứa không khí có một ít nước. Bình được đậy kín bằng một piston. Người ta dịch chuyển piston từ từ sao cho nhiệt độ của bình được giữ không đổi khi thể tích tăng lên hai lần thì nước trong bình bay hơi hết. Tìm áp suất hơi nước, tổng khối lượng nước (kể cả ở trạng thái lỏng và hơi) và khối lượng không khí trong bình. Biết rằng ban đầu áp suất trong bình  $P_1 = 3\text{atm}$ , sau đó  $P_2 = 2\text{atm}$ . Thể tích ban đầu  $V_0 = 22,4\text{l}$ . Coi phân tử lượng của không khí và của nước là đã biết.

**11.16.** Trong một bình kín thể tích  $V_0 = 5\text{l}$  có 1 kg nước ở nhiệt độ  $t = 100^{\circ}\text{C}$ . Khoảng không trên mặt nước chứa đầy hơi bão hoà (không khí đã được hút hết trước đó). Tìm độ tăng khối lượng hơi bão hoà  $\Delta m$  khi nhiệt độ của hệ tăng  $\Delta T = 1\text{K}$ . Nhiệt hoá hơi riêng  $\lambda = 539\text{cal/g}$ .

*Hướng dẫn.* Coi hơi nước là khí lý tưởng. Bỏ qua thể tích riêng của nước so với thể tích riêng của hơi nước.

**11.17.** Nước trong bình được đun đến nhiệt độ sôi sau đó đặt nhanh lên thang máy và đưa lên tầng 30 ( $h = 100\text{m}$ ), sao cho có thể bỏ qua sự thay đổi nhiệt độ trong thời gian đưa lên. Xác định sự thay đổi khối lượng nước tương đối tại thời điểm ngừng sôi sau khi đưa lên tầng 30. Nhiệt hoá hơi riêng  $\lambda = 2260\text{J/g}$ , nhiệt dung riêng của nước  $c = 4,2\text{J/(g.K)}$ . Coi hơi nước là khí lý tưởng.

**11.18.** Tính nhiệt hoá hơi riêng  $\lambda_1$  của nước ở nhiệt độ  $T_1 = 323\text{K}$ , biết nhiệt hoá hơi ở  $T_2 = 373\text{K}$  là  $\lambda_2 = 539\text{cal/g}$ . Giả thiết nhiệt dung của nước không đổi, tức là không phụ thuộc vào áp suất và nhiệt độ. Coi hơi nước là khí lý tưởng và nhiệt dung của nó có thể tính theo thuyết cổ điển. Bỏ qua thể tích riêng của nước so với thể tích riêng của hơi.

**11.19.** Người ta sử dụng một chu trình tạo bởi các nhánh các đường cong đi qua ranh giới các pha “nước – hơi” và hai đường đẳng nhiệt lưỡng pha  $T_1 = 323\text{K}$  và  $T_2 = 373\text{K}$ . Xác định nhiệt hoá hơi riêng của nước  $\lambda_{(323)}$  ở nhiệt độ  $T_1 = 323\text{K}$ . Bỏ qua độ nén của chất lỏng, coi hơi nước là khí lý tưởng. Biết rằng  $\lambda_{(373)} = 2260\text{J/g}$ , nhiệt dung riêng của nước  $c_n = 4,18\text{J/(g.K)}$ .

Nhiệt dung phân tử của hơi nước  $C_V = 3,3R$ .

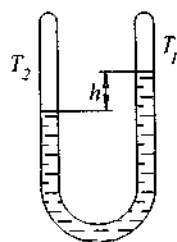
**11.20.** Khi đo độ ẩm ở điểm sương người ta thấy rằng sự ngưng tụ hơi nước diễn ra khi làm lạnh bề mặt ẩm kể đến nhiệt độ  $10^{\circ}\text{C}$ . Tìm độ ẩm tuyệt đối, tức là lượng hơi nước (tính theo g) trong một  $1\text{m}^3$  không khí, giả thiết rằng nhiệt hoá hơi riêng của nước không phụ thuộc vào nhiệt độ và bằng  $\lambda = 2480\text{J/g}$ . Coi hơi nước là khí lý tưởng.



**11.21.** Trong một xilanh được đẩy kín bằng piton có chứa nước ở trạng thái cân bằng với hơi bão hoà ở nhiệt độ  $t = 200^{\circ}\text{C}$ . Cần thay đổi độ cao tương đối của piton so với mặt nước bằng bao nhiêu để đồng thời khi tăng nhiệt độ lên  $1\text{K}$  thì khối lượng hơi bão hoà vẫn không đổi? Nhiệt hoá hơi riêng  $\lambda = 540\text{cal/g}$ .

**11.22.** Người ta rót nước vào một quả cầu kim loại thành mỏng bán kính  $r = 10\text{cm}$  đã rút hết không khí. Áp suất không khí bên ngoài quả cầu bằng áp suất khí quyển. Có thể đun nóng nước đến nhiệt độ cực đại bằng bao nhiêu để thành quả cầu không bị vỡ, nếu sức căng tối hạn mà thành bình có thể chịu được  $\sigma = 88\text{N/cm}$ ? Lượng nước trong bình đủ lớn sao cho ở nhiệt độ này nước chưa bốc hơi hết, tuy nhiên thể tích nước nhỏ không đáng kể so với thể tích hơi.

**11.23.** Trong một ống chữ U kín có chứa ête và hơi của nó (H.372). Xác định độ nhảy  $\frac{h}{\Delta T}$  của chiếc nhiệt kế ngưng tụ vì sai này ở  $T_1 \sim T_2 \sim 300\text{K}$ , khi áp suất hơi bão hoà  $P \sim 1\text{atm}$ , còn khối lượng riêng của chất lỏng  $0,7\text{g/cm}^3$ . Nhiệt hoá hơi riêng của ête  $\lambda = 3,88 \cdot 10^4\text{J/mol}$ . Nhiệt độ sôi của ête ở áp suất  $1\text{atm}$   $T_s = 476\text{K}$ .



Hình 372

**11.24.** Thiết lập công thức biểu diễn sự phụ thuộc của áp suất hơi bão hoà vào nhiệt độ với các giả thiết sau:

- 1) Hơi nước tuân theo phương trình trạng thái Clapêrôn;
- 2) Nhiệt hoá hơi riêng  $\lambda$  là hàm bậc nhất của nhiệt độ  $\lambda = \lambda_0 - aT$ ;
- 3) Thể tích riêng của chất lỏng nhỏ không đáng kể so với thể tích riêng của hơi bão hoà.

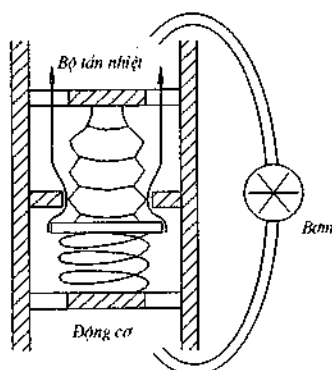
**11.25.** Xác định nhiệt độ sôi  $T$  của nước ở độ cao  $H$  so với bề mặt Trái Đất. Giả thiết khí quyển đẳng nhiệt với nhiệt độ  $T_a$ . Áp suất không khí trên bề mặt Trái Đất bằng  $P_0$ . Nhiệt hoá hơi riêng  $\lambda$  không phụ thuộc vào nhiệt độ.

**11.26.** Xác định sự thay đổi nhiệt độ sôi của nước trên một trong các đỉnh Pa-mia (ở độ cao  $H = 7150\text{m}$ ). Giả thiết nhiệt độ của không khí không đổi và bằng  $0^{\circ}\text{C}$ .

**11.27.** Người ta hút hết không khí từ một bình cách nhiệt lớn, sau đó đặt vào bình đó hai chậu thoát khí nhỏ chứa ête, một chậu đặt cao hơn chậu còn lại  $3\text{m}$ . Xác định hiệu nhiệt độ ête trong các chậu khi cân bằng được thiết lập, nếu tại thời điểm ban đầu nhiệt độ trong cả hai chậu là  $t = 27^{\circ}\text{C}$ . Nhiệt hoá

hơi riêng của ête  $\lambda = 355\text{J/g}$ . Thể tích riêng của ête lỏng nhỏ không đáng kể so với thể tích riêng của hơi ête.

**11.28.** Thiết bị chỉnh nhiệt của động cơ ô tô có dạng một bình hình trụ với nẹp gọn (hộp xếp) chứa đầy cồn và hơi của nó. Khi nhiệt độ của nước thấp áp suất trong hộp xếp nhỏ, nó bị nén và khoá van làm giảm sự tuần hoàn nước trong hệ thống làm mát động cơ (H. 373). Khi nhiệt độ của nước đủ lớn hộp xếp giãn nở và vì vậy van được mở, nước tuần hoàn mạnh hơn, được làm mát... Áp lực của lò xo van bằng bao nhiêu để van mở ở nhiệt độ  $t = 90^\circ\text{C}$ ? Đường kính hộp xếp  $d = 20\text{mm}$ , điểm sôi của cồn  $P_0 = 1\text{atm}$ ,  $t_0 = 78^\circ\text{C}$  (công thức hoá học của cồn  $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ ). Nhiệt hoá hơi riêng của cồn  $\lambda = 580\text{J/g}$ .

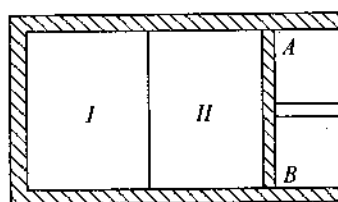


Hình 373

**11.29.** Hơi nước bão hoà ở  $t = 100^\circ\text{C}$  giãn nở đoạn nhiệt, khi đó nhiệt độ của nó giảm  $\Delta T = 1\text{K}$ . Giả thiết rằng trạng thái cân bằng giữa pha lỏng và pha hơi đã kịp thiết lập. Hỏi bao nhiêu phần hơi nước ngưng tụ khi đó. Coi hơi nước là khí lý tưởng.

**11.30.** Hơi nước bão hoà ở nhiệt độ  $T = 300\text{K}$  bị giãn nở và nén đoạn nhiệt. Trong quá trình nào thì hơi nước chuyển thành hơi không bão hoà, và trong quá trình nào thì thành hơi quá bão hoà?

**11.31.** Một xilanh cách nhiệt được chia thành hai phần bằng nhau bởi một vách ngăn dẫn nhiệt cố định (H. 374). Trong phần I có chứa 1,2 mol nitơ và 1 mol hơi nước với độ ẩm tương đối  $\phi = 0,9$ , trong phần II chứa 4 mol neon. Nhiệt độ của khí  $T_0 = 373\text{K}$ . Người ta bắt đầu dịch chuyển từ từ piston AB. Sự thay đổi thể tích tương đối trong ngăn II bằng bao nhiêu để xuất hiện sự ngưng tụ hơi nước trên các thành xilanh? Nhiệt hoá hơi phân tử của nước  $\lambda = 41\text{kJ/mol}$ . Bỏ qua nhiệt dung của thành xilanh.



Hình 374

**11.32.** Hơi nước phun từ một bình kín có chứa nước vào khí quyển qua ống mao dẫn đường kính  $d = 2 \cdot 10^{-3}\text{m}$ , chiều dài  $l = 0,1\text{m}$ . Bình được giữ ở nhiệt độ  $T = 374\text{K}$ . Xác định nhiệt lượng  $Q$  cần cung cấp cho bình trong thời gian một giây. Nhiệt hoá hơi riêng  $\lambda = 2260\text{J/g}$ . Coi hơi là khí lý tưởng. Giả thiết rằng tại mỗi thời điểm đều kịp thiết lập trạng thái cân bằng giữa nước và hơi. Độ nhớt của hơi giả thiết là  $\eta = 1,3 \cdot 10^{-5}\text{Pa.s}$ .

**11.33\*.** Ở  $0^{\circ}\text{C}$  áp suất hơi nước bão hoà trên mặt băng là  $P_1 = 4,58\text{mmHg}$ . Nhiệt nóng chảy riêng của băng ở  $0^{\circ}\text{C}$  là  $q = 80\text{cal/g}$ . Nhiệt hoá hơi riêng của nước ở  $0^{\circ}\text{C}$  là  $\lambda = 596\text{cal/g}$ . Tìm áp suất hơi bão hoà trên mặt băng ở nhiệt độ  $t = -1^{\circ}\text{C}$ .

**11.34.** Một cục nước đá được đặt trong lớp vỏ đoạn nhiệt ở  $0^{\circ}\text{C}$  và áp suất khí quyển. Nhiệt độ của nước đá thay đổi như thế nào nếu nén đoạn nhiệt nó đến áp suất  $P = 100\text{atm}$ ? Phần khối lượng nước đá  $\frac{\Delta m}{m}$  nào tan trong quá trình này? Thể tích riêng của nước  $v_n = 1\text{cm}^3/\text{g}$ , của đá  $v_{\text{ice}} = 1,09\text{cm}^3/\text{g}$ . Nhiệt dung riêng của nước và đá liên hệ với nhau bằng biểu thức  $c_{\text{ice}} \approx 0,6c_n$ .

**11.35.** Ở Nam cực dưới lớp băng dày 3km người ta phát hiện được một hồ nước ngọt. Xác định nhiệt độ của nước trong hồ nếu nhiệt nóng chảy của băng là  $q = 335\text{kJ/kg}$ , còn tỷ lệ giữa khối lượng riêng của đá và của nước bằng 0,917.

**11.36.** Một ống dựng đứng chứa nước đến độ cao  $H = 20\text{m}$  ở nhiệt độ  $t_0 = 0^{\circ}\text{C}$ . Độ cao cột nước thay đổi như thế nào nếu nhiệt độ của nó giảm đến  $t_1 = -0,01^{\circ}\text{C}$ ? Nhiệt nóng chảy riêng của nước đá là  $q = 80\text{cal/g}$ , còn khối lượng riêng của nước đá  $\rho_{\text{ice}} = 0,92\text{g/cm}^3$ . Biết rằng nước không đóng băng vào ống.

**11.37\*.** Người ta đặt một cục nước đá vào trong một bình kín thành dày, phía trên nước đá là hơi bão hoà. Người ta có thể bơm không khí vào bình đến áp suất cao. Cần phải tăng áp suất không khí trong bình lên bao nhiêu để áp suất hơi bão hoà trên mặt cục đá tăng 1%, nếu nhiệt độ ( $T = 250\text{K}$ ) được giữ không đổi? Thể tích riêng của nước đá  $v_{\text{ice}} = 1,1\text{cm}^3/\text{g}$ .

**11.38.** Thể tích riêng của nước đá ở  $0^{\circ}\text{C}$  là  $v_{\text{ice}} = 1,091\text{cm}^3/\text{g}$  còn của nước là  $1\text{cm}^3/\text{g}$ , nhiệt nóng chảy riêng của nước đá  $6000\text{J/mol}$ . Ở nhiệt độ nào thì nước đá tan dưới áp suất hơi nước của chính nó bằng  $4,6\text{mmHg}$ ?

**11.39.** Một viên đạn làm bằng nước đá được bắn ra từ súng. Vận tốc viên đạn  $v = 165\text{m/s}$ . Với nhiệt độ nào của không khí xung quanh thì viên đạn sẽ tan ra? Bỏ qua độ nhớt của không khí.

**11.40.** Người ta đặt trên mặt băng ở nhiệt độ  $-1^{\circ}\text{C}$  một thanh có diện tích đáy tiếp xúc với băng là  $10\text{cm}^2$ . Với trọng lượng nào của thanh thì đá bên dưới nó sẽ bắt đầu tan? Nhiệt nóng chảy riêng của đá bằng  $335\text{J/g}$ , thể tích riêng của đá ở điều kiện tiêu chuẩn xấp xỉ bằng  $1,1\text{cm}^3/\text{g}$ .

**11.41.** Tìm độ biến thiên nhiệt độ nóng chảy của nước đá  $\Delta T$  khi áp suất tăng lên  $\Delta P = 1 \text{ atm}$ . Thể tích riêng của nước ở  $0^\circ\text{C}$  là  $v_n = 1 \text{ cm}^3/\text{g}$ , của đá là  $v_{\text{ice}} = 1,091 \text{ cm}^3/\text{g}$ , nhiệt nóng chảy riêng của nước đá  $q = 80 \text{ cal/g}$ . Trên cơ sở giá trị  $\Delta T$  tìm được, hãy xác định gần đúng nhiệt độ điểm ba.

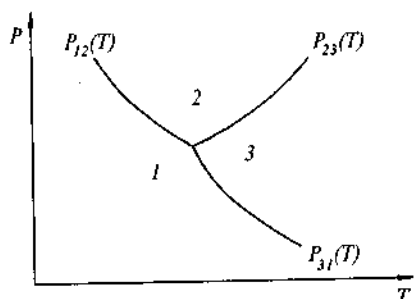
**11.42\*.** Xác định độ biến thiên entropi của hệ gồm nước và hơi bão hoà khi hệ chuyển hoá thành hơi bão hoà. Nhiệt độ ban đầu của hệ  $T_1$ , nhiệt độ cuối  $T_2$ . Khối lượng hơi ban đầu  $m_1$ , sau đó là  $m_2$ . Bỏ qua sự phụ thuộc của nhiệt hoá hơi riêng  $\lambda$  vào nhiệt độ. Coi hơi nước là khí lý tưởng.

**11.43.** Ba pha 1, 2, 3 cân bằng với nhau tại điểm ba (H. 375). Thể tích riêng của chúng tại điểm này lần lượt là  $v_1, v_2, v_3$ .

Giả thiết  $P_{12} = P_{12}(T)$ ,  $P_{23} = P_{23}(T)$ ,

$P_{31} = P_{31}(T)$  là các phương trình đường cong cân bằng giữa pha 1 và 2, 2 và 3,

và 1. Hãy chứng minh rằng tại điểm A ta có mối liên hệ:



Hình 375

$$(v_1 - v_2) \frac{dP_{12}}{dT} + (v_2 - v_3) \frac{dP_{23}}{dT} + (v_3 - v_1) \frac{dP_{31}}{dT} = 0.$$

**11.44.** Xác định gần đúng áp suất và nhiệt độ (theo thang  $^\circ\text{C}$ ) tại điểm ba của nước, sử dụng các dữ liệu cho sau đây. Ở nhiệt độ  $t_1 = 0^\circ\text{C}$  áp suất hơi bão hoà trên mặt nước  $P_1 = 4,579 \text{ mmHg}$ , ở nhiệt độ  $t_2 = 1^\circ\text{C}$ ,  $P_2 = 4,926 \text{ mmHg}$ . Thể tích riêng của đá ở  $0^\circ\text{C}$  và áp suất khí quyển ( $P_0 = 760 \text{ mmHg}$ ) là  $v_1 = 1,091 \text{ cm}^3/\text{g}$ , thể tích riêng của nước cũng ở các điều kiện trên  $v_2 = 1 \text{ cm}^3/\text{g}$ . Nhiệt nóng chảy riêng của đá  $q = 80 \text{ cal/g}$ .

**11.45\*.** Nhiệt độ của nước ở điểm ba  $t = 0,0075^\circ\text{C}$ , nhiệt nóng chảy riêng của đá ở nhiệt độ này  $q_{12} = 80 \text{ cal/g}$ . Thể tích riêng của hơi nước ở điểm ba  $v_3 = 206000 \text{ cm}^3/\text{g}$ . Thể tích riêng của đá  $v_1$  và của nước  $v_2$  có thể bỏ qua so với thể tích riêng của hơi  $v_3$ . Áp suất hơi bão hoà trên mặt nước  $P_1$  hay trên mặt đá  $P_2$  ở  $0^\circ\text{C}$  lớn hơn? Hiệu  $P_1 - P_2$  bằng bao nhiêu?

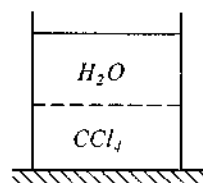
**11.46.** Trong một xilanh bên dưới piston có chứa nước, bên trên mặt nước là hỗn hợp không khí và hơi nước bão hoà. Áp suất lên piston ban đầu bằng áp suất khí quyển ( $1 \text{ atm}$ ). Sau đó áp suất lên piston tăng hai lần. Áp suất hơi bão

hoà trong xilanh thay đổi bao nhiêu phần trăm, nếu nhiệt độ ( $T = 300\text{K}$ ) được giữ không đổi?

**11.47\*.** Trong một bình kín ở nhiệt độ  $t = 20^\circ\text{C}$  chứa không khí ẩm với độ ẩm tương đối  $\varphi = 80\%$ . Cần giảm nhiệt độ của thành bình đi bao nhiêu để sương bắt đầu đọng trên chúng? Nhiệt hoá hơi riêng của nước ở nhiệt độ  $20^\circ\text{C}$  là  $\lambda = 600\text{cal/g}$ . Coi hơi nước là lý tưởng.

**11.48.** Trong một bình có chứa nước và hơi bão hoà ở áp suất  $P$ . Ở phần phía trên của bình có lỗ nhỏ, hơi nước phun qua lỗ vào chân không. Xác định vận tốc phun hơi  $v$ , giả thiết quá trình là đoạn nhiệt. Có thể coi gần đúng là hơi nước tuân theo phương trình trạng thái của khí lý tưởng. Nhiệt hoá hơi riêng của nước  $\lambda$  không phụ thuộc vào nhiệt độ.

**11.49.** Trong cốc chứa một hệ không đồng chất bao gồm hai lớp không pha trộn: cacbonclorua  $\text{CCl}_4$  và nước  $\text{H}_2\text{O}$  (H.376). Nhiệt độ sôi của hệ bằng  $66^\circ\text{C}$  thấp hơn nhiệt độ sôi của nước ( $100^\circ\text{C}$ ) và của  $\text{CCl}_4$  nguyên chất ( $76,7^\circ\text{C}$ ). Các số liệu trên đo ở điều kiện tiêu chuẩn. Nhiệt độ sôi của hệ thay đổi như thế nào nếu áp suất bên ngoài tăng lên 10%. Nhiệt hoá hơi phân tử của nước bằng  $40\text{kJ/mol}$ , của  $\text{CCl}_4$  là  $29\text{kJ/mol}$ .



Hình 376

**11.50.** Trong một bình kín đường kính  $d = 10\text{cm}$  được rót nước đến độ cao  $H = 20\text{cm}$ . Hơi nước trong bình có thể phun vào khí quyển qua một ống mao dẫn bán kính  $r = 1\text{mm}$ , dài  $l = 10\text{cm}$  đặt trên nắp ống. Xác định thời gian để nước bay hơi hết. Nhiệt độ của hệ không đổi và bằng  $t = 101^\circ\text{C}$ . Coi hơi nước là khí lý tưởng. Hệ số ma sát trong của hơi  $\eta = 128\mu\text{P}$ .

**11.51.** Người ta rót nước vào một bình kín đường kính  $D$  đã hút hết không khí đến độ cao  $H_1$ . Ở thành bên, gần đáy bình có lắp một ống dẫn nằm ngang tiết diện tròn bán kính  $r$ , dài  $l$ . Nước chảy qua ống này vào khí quyển. Sau thời gian bao nhiêu thì mức nước trong bình còn  $H_2$ ? Nhiệt độ của nước trong bình không đổi và lớn hơn nhiệt độ sôi  $T_0$  ở áp suất khí quyển một lượng  $\Delta T \ll T_0$ . Nhiệt hoá hơi riêng của nước bằng  $\lambda$ . Giả thiết chuyển động của nước trong ống là không xoáy, độ nhớt của nước bằng  $\eta$ . Khối lượng riêng của hơi không đáng kể so với khối lượng riêng  $\rho$  của nước. Coi hơi nước là khí lý tưởng.

**11.52.** Người ta rót nước vào một bình kín rộng đã hút hết không khí đến độ cao  $h = 20\text{cm}$ . Ở thành bên gần đáy người ta khoét một lỗ có thể đóng kín bằng nút. Phải đun nước trong bình đến nhiệt độ  $T$  bằng bao nhiêu để vận

tốc thoát của nước qua lỗ ở nhiệt độ này lớn gấp hai lần vận tốc thoát ở  $T_0 = 373\text{K}$ ?

**11.53.** Không khí trong phòng ở nhiệt độ  $15^\circ\text{C}$  và độ ẩm tương đối nào đó có chứa  $1\text{kg}$  hơi nước. Với nhiệt độ  $T$  bằng bao nhiêu thì lượng nước trong không khí đạt mức  $2,7\text{kg}$ ? Độ ẩm tương đối được giữ nguyên.

**11.54.** Trong một bình có chứa  $1\text{mol}$  nước ở nhiệt độ  $T_0$ , áp suất  $P_0$  và một lượng hơi nước không đáng kể. Hệ được đun nóng đến nhiệt độ  $T$ , sao cho tất cả nước chuyển hoá thành hơi. Nhiệt hoá hơi riêng của nước ở nhiệt độ  $T_0$  bằng  $\lambda_0$ . Xác định độ biến thiên nội năng của hệ trong quá trình trên. Coi hơi nước là khí lý tưởng.

**11.55.** Trong một bình cách nhiệt  $t_0 = 0^\circ\text{C}$  có một cục nước đá lớn. Người ta ấn một thanh đồng tiết diện  $S = 0,1\text{cm}^2$  với lực  $F = 400\text{N}$  lên phía trên lên cục đá. Sau một thời gian bằng bao nhiêu thì thanh đồng vào sâu trong đá một khoảng  $H = 1\text{cm}$ ? Nhiệt độ của thanh phía trên đá cũng bằng  $0^\circ\text{C}$ , hệ số dẫn nhiệt của đồng  $\chi_{\text{Cu}} = 4\text{W}/(\text{cm.K})$ . Nhiệt nóng chảy riêng của đá  $q = 80\text{cal/g}$ , khối lượng riêng  $\rho = 0,9\text{g}/\text{cm}^3$ , hệ số dẫn nhiệt của đá  $\chi_{\text{ice}} \ll \chi_{\text{Cu}}$ .

**11.56.** Một sợi dây mảnh buộc quanh một thanh nước đá, dưới tác dụng của lực bên ngoài dây có thể cắt ngang qua thanh đá. Giả thiết vận tốc chuyển động của dây  $v$  được xác định bởi vận tốc truyền nhiệt qua dây từ phần thanh đá phía trên dây nơi nước đang đóng băng đến phần phía dưới dây nơi đá đang tan. Xác định  $v$ . Bỏ qua độ dẫn nhiệt của nước đá. Nhiệt độ của nước đá  $0^\circ\text{C}$ , nhiệt nóng chảy riêng  $q = 335\text{J/g}$ , khối lượng riêng của đá  $\rho = 0,917\text{g}/\text{cm}^3$ . Đường kính dây  $d = 0,1\text{mm}$ , hệ số dẫn nhiệt  $\chi = 130\text{W}/(\text{m.K})$ , áp suất  $P$  ở phía dưới dây bằng  $10\text{atm}$ .

**11.57.** Tìm nhiệt hoá hơi riêng  $\lambda$  của benzel gần điểm ba của nó, biết rằng trong các điều kiện này nhiệt nóng chảy riêng của benzel  $q = 30,2\text{cal/g}$ , nhiệt độ của điểm ba  $T = 279\text{K}$ , áp suất cân bằng tại điểm ba  $P = 36\text{mmHg}$  và đối với đường thăng hoa tại điểm này có  $\frac{dP}{dT} = 2,43\text{mmHg/K}$ . Coi hơi của benzel là khí lý tưởng.

**11.58.** Tìm hệ số nở khối  $\alpha$ , hệ số nén đẳng nhiệt  $\beta$  và nhiệt dung  $C_p$  của một hệ không đồng nhất gồm chất lỏng và hơi bão hoà của nó ở trạng thái cân bằng.

**11.59.** Xác định hệ số nén đoạn nhiệt của một hệ lưỡng pha tạo bởi hơi bão hoà và một lượng chất lỏng không lớn. Coi hơi là khí lý tưởng.

**11.60.** Một xilanh cách nhiệt có chứa một lượng heli lỏng không lớn nằm trong trạng thái cân bằng với hơi của nó. Nhiệt độ của heli  $T = 4,2\text{K}$ . Người ta dịch chuyển piston lên trên cho đến khi tất cả heli chuyển hoá thành hơi. Kết quả của quá trình đoạn nhiệt này là số gia tương đối của thể tích heli bằng  $\frac{\Delta V}{V} = 0,02$ . Xác định độ biến thiên tương đối của áp suất khí heli  $\frac{\Delta P}{P}$ ,

giả thiết khí heli tuân theo phương trình trạng thái của khí lý tưởng. Nhiệt hoá hơi riêng của heli  $\lambda = 21,8\text{J/g}$ . Giả thiết tại thời điểm ban đầu, khối lượng hơi lớn hơn nhiều so với khối lượng chất lỏng.

**11.61\*.** Xác định nhiệt dung riêng  $c$  của hơi bão hoà được giãn nở (hoặc nén) sao cho trong suốt quá trình nó luôn được giữ là hơi bão hoà. Thể tích riêng của chất lỏng không đáng kể so với thể tích riêng của hơi bão hoà. Giả thiết hơi tuân theo phương trình trạng thái Clapayron. Giải bài toán đối với trường hợp chất lỏng là nước ở nhiệt độ  $T = 373\text{K}$ . Biết rằng đối với hơi nước có thể áp dụng lý thuyết nhiệt dung cổ điển. Nhiệt hoá hơi riêng của nước ở nhiệt độ  $300\text{K}$  là  $\lambda = 539\text{cal/g}$ .

**11.62\*.** Giải bài tập 11.61 biết nhiệt hoá hơi riêng  $\lambda$  và đạo hàm của nó theo thời gian  $\frac{d\lambda}{dt}$ , nhưng không giả thiết rằng hơi tuân theo phương trình trạng

thái Clapayron. Đối với nước ở nhiệt độ  $t = 100^\circ\text{C}$  thì  $\frac{d\lambda}{dt} = -0,64\text{cal}/(\text{g.K})$ ,

$$C_p^l = 1,01\text{cal}/(\text{g.K}).$$

**11.63.** Một piston không trọng lượng dẫn nhiệt phân chia xilanh kín thành hai phần. Phía dưới piston có một mol nước, phía trên piston có 1 mol không khí.

Áp suất và nhiệt độ trong bình lần lượt bằng  $P = 760\text{mmHg}$  và  $t = 100^\circ\text{C}$ . Xác định nhiệt dung của hệ (không tính đến thành bình và piston). Nhiệt hoá hơi riêng  $\lambda = 2260\text{J/g}$ .

**11.64.** Trong các điều kiện của bài 11.63, xác định nhiệt dung của chất ở phía dưới piston nếu piston không dẫn nhiệt, còn không khí phần trên piston được giữ không đổi ở nhiệt độ  $t = 100^\circ\text{C}$ .

**11.65.** Trong một bình kín có chứa nước và hơi bão hoà ở  $t = 100^\circ\text{C}$ . Tỷ lệ khối lượng hơi và nước bằng  $\beta = 0,1$ . Nhiệt dung riêng của nước  $c_0 = 4,2\text{J}/(\text{g.K})$ . Tìm nhiệt dung riêng  $c$  của cả hệ. Coi hơi nước là khí lý tưởng, nhiệt hoá hơi riêng  $\lambda = 2260\text{J/g}$ .

**11.66.** Tìm nhiệt dung riêng đẳng tích của sương mù nhẹ (tức là hơi bão hoà và các giọt nước, trong đó tổng khối lượng các giọt nước nhỏ hơn khối lượng

hơi) ở nhiệt độ  $t = 100^{\circ}\text{C}$ . Nhiệt hoá hơi của nước  $\lambda = 41\text{kJ/mol}$  không phụ thuộc vào nhiệt độ.

**11.67.** Tìm tốc độ thay đổi của nhiệt hoá hơi riêng so với nhiệt độ  $\frac{d\lambda}{dT}$ , giả thiết hơi bão hoà là khí lý tưởng. Nhiệt dung riêng của chất lỏng bằng  $c$ , hệ số nở khối của chất lỏng  $\alpha$ . Tính  $\frac{d\lambda}{dT}$  đối với nước tại gần điểm sôi ở áp suất khí quyển.

**11.68.** Sự ngưng tụ của hơi trên các ion tạo bởi các hạt mang điện trong khí của buồng Willson được thực hiện bằng cách cho giãn nở đoạn nhiệt thể tích buồng Willson. Buồng chứa đầy khí và hơi bão hoà. Tìm tỷ số  $\frac{m_1}{m_2}$ , trong đó

$m_1$  và  $m_2$  khối lượng hơi bão hoà trước và sau khi giãn nở thể tích khoảng lên  $\eta$  lần. Đối với hỗn hợp khí hơi  $\frac{C_P}{C_V} = \gamma$ , nhiệt độ ban đầu  $T$  nhỏ hơn

nhiều so với nhiệt độ tới hạn. Giả thiết nhiệt hoá hơi phân tử  $\lambda$  không đổi, còn hơi là khí lý tưởng. Bỏ qua nhiệt lượng sinh ra khi ngưng tụ hơi.

**11.69.** Một bình thể tích  $V = 1\text{l}$  chứa hydro ở áp suất  $760\text{mmHg}$  và nhiệt độ  $273\text{K}$ . Thành bình được làm lạnh đột ngột đến nhiệt độ điểm ba ( $P = 60\text{mmHg}$ ,  $T = 14\text{K}$ ). Xác định thời gian “ngưng tụ” của hydro, tức khoảng thời gian trong đó áp suất hydro giảm đáng kể. Sự có mặt của heli trong bình sẽ ảnh hưởng như thế nào đến quá trình trên?

**11.70.** Sự biến đổi  $\text{NH}_4\text{NO}_3$  từ tinh thể hình thoi sang tinh thể dạng hình hộp mặt thoi diễn ra ở áp suất khí quyển và nhiệt độ  $32,0^{\circ}\text{C}$ . Quá trình này hấp thụ một nhiệt lượng  $1600\text{J/mol}$ , còn khối lượng riêng khi đó giảm từ  $1,72$  xuống  $1,66\text{g/cm}^3$ . Tìm nhiệt độ của quá trình biến đổi trên ở áp suất  $10\text{atm}$ .

**11.71.** Trong một bình thành mỏng đã hút hết không khí có đựng antrasen rắn  $\text{C}_{10}\text{H}_8$ . Hơi của  $\text{C}_{10}\text{H}_8$  được tạo thành khi nó thăng hoa bay ra ngoài qua một lỗ nhỏ ở thành bình. Trong một khoảng thời gian xác định người ta đo sự tiêu hao khối lượng  $\text{C}_{10}\text{H}_8$  trong bình. Người ta thấy rằng khi tăng nhiệt độ từ  $T_1 = 283\text{K}$  lên  $T_2 = 303\text{K}$ , sự tiêu hao khối lượng của antrasen trong cùng một khoảng thời gian tăng lên  $\alpha = 9,6$  lần. Tính nhiệt thăng hoa của antrasen  $q$ , giả thiết rằng tại mỗi thời điểm đều kịp thiết lập trạng thái cân bằng giữa antrasen rắn và hơi của nó. Có thể coi hơi  $\text{C}_{10}\text{H}_8$  là khí lý



tương. Bỏ qua thể tích riêng của antrasen rắn so với thể tích riêng của antrasen hơi.

**11.72.** Ở nhiệt độ  $T_1 = 0,1\text{K}$  và áp suất  $P_1 = 3\text{atm}$ , pha lỏng và pha rắn của đồng vị  $^3\text{He}$  nằm trong trạng thái cân bằng. Từ nhiệt độ  $T$  cho đến vài mK entropi của  $^3\text{He}$  lỏng tỷ lệ với nhiệt độ  $S_l = \gamma T$ , trong đó hệ số tỷ lệ  $\gamma = 4,6R$ , còn entropi của hêli rắn không đổi và bằng  $S_r = R \ln 2$ . Cần phải tăng áp suất  $P$  trong hỗn hợp hêli  $^3\text{He}$  lỏng và rắn lên bao nhiêu để nhiệt độ cân bằng pha  $T_1$  giảm 10 lần? Giả thiết hiệu thể tích mol của  $^3\text{He}$  lỏng và rắn không đổi và bằng  $\Delta V = V_l - V_r = 1,3\text{cm}^3/\text{mol}$ .

**11.73.** Đường cong nóng chảy của đồng vị  $^3\text{He}$  đi qua điểm  $T_1 = 0,12\text{K}$  và  $P_1 = 3\text{atm}$ . Với áp suất  $P_2$  bằng bao nhiêu thì pha lỏng và pha rắn của  $^3\text{He}$  sẽ cân bằng ở nhiệt độ  $T_2 = 0,42\text{K}$ ? Tìm phương trình đường cong nóng chảy của  $^3\text{He}$  với các biến  $T, P$  trong khoảng giữa nhiệt độ  $T_1$  và  $T_2$ . Entropi của một mol  $^3\text{He}$  lỏng trong khoảng nhiệt độ và áp suất xét ở trên được xác định bằng biểu thức  $S_l = \frac{RT}{\theta}$ , trong đó  $\theta = 0,46\text{K}$ . Entropi của một mol  $^3\text{He}$  rắn không phụ thuộc vào nhiệt độ  $S_r = R \ln 2$ . Hiệu thể tích mol của  $^3\text{He}$  lỏng và rắn không đổi và bằng  $V_l - V_r = 1,25\text{cm}^3/\text{mol}$ . Tìm độ lớn và dấu của nhiệt nóng chảy phân tử  $q$  đối với  $T_1$  và  $T_2$ .

**11.74.** Entropi của một phân tử gam (mol)  $^3\text{He}$  lỏng ở nhiệt độ thấp thay đổi theo quy luật  $S_l = \frac{RT}{\theta}$ , trong đó hằng số  $\theta \approx 0,46\text{K}$  ở các áp suất gần bằng  $30\text{atm}$ . Entropi của một mol hêli rắn ở các điều kiện trên không phụ thuộc vào nhiệt độ và bằng  $S_r = 0,7R$ . Biết rằng ở  $T_1 = 0,25\text{K}$  thì  $^3\text{He}$  đông đặc khi áp suất  $P_1 = 29\text{atm}$ . Tìm áp suất khi nó đông đặc ở  $T = 0,1\text{K}$ . Hiệu thể tích mol của  $^3\text{He}$  lỏng và rắn ở các nhiệt độ trên  $\Delta V = V_l - V_r = 1,25\text{cm}^3$ .

**11.75.** Theo một trong các mô hình, phần tâm Trái Đất (gọi là nhân) tạo bởi sắt. Phần bao ngoài nhân bị nóng chảy, còn phần bên trong bán kính  $R \approx 1200\text{km}$  ở trạng thái rắn. Nhân nguội đi với vận tốc  $u$  xấp xỉ  $100\text{K}$  trong  $10^9$  năm. Bán kính phần rắn của nhân thay đổi bao nhiêu sau  $10^9$  năm? Giả thiết rằng nhiệt nóng chảy riêng của sắt trong các điều kiện tương

ứng với bề mặt nhân  $q \approx 125 \text{ J/g}$ , nhiệt độ trên bề mặt nhân  $T \approx 3700 \text{ K}$ . Sự thay đổi trọng lượng riêng của sắt đông đặc  $\Delta \rho = 0,3 \text{ g/cm}^3$ .

**11.76.** Xác định nhiệt hóa hơi riêng của heli lỏng trong giới hạn  $T \rightarrow 0$ , giả thiết heli tuân theo phương trình trạng thái VandecVan. Biết rằng đối với heli nhiệt độ tới hạn  $T_k = 5,2 \text{ K}$ .

**11.77.** Một quả cầu ẩm nằm trong không khí có khối lượng riêng của hơi nước (ở cách xa quả cầu) bằng  $\rho_0 = 8,6 \cdot 10^{-6} \text{ g/cm}^3$ . Xác định hiệu nhiệt độ được thiết lập giữa quả cầu và không khí (ở cách xa quả cầu). Khối lượng riêng của hơi bão hoà ở nhiệt độ phòng ( $20^\circ \text{ C}$ ) là  $\rho_{bh}^0 = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ g/cm}^3$ . Hệ số khuếch tán của hơi nước trong không khí  $D = 3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ . Hệ số dẫn nhiệt của không khí  $\chi = 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ W/(m.s)}$ . Nhiệt hoá hơi riêng của nước  $\lambda = 2,2 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$ . Giả thiết không khí không chuyển động.

**11.78.** Xác định vận tốc âm thanh trong hỗn hợp nước – hơi (nước và một lượng hơi không lớn) ở trạng thái cân bằng với nhiệt độ  $T = 293 \text{ K}$ . Hơi phân bố đều trong chất lỏng dưới dạng các bong bóng nhỏ, hỗn hợp nước hơi là ổn định – ví dụ trong môi trường không trọng lượng ở đó không có lực Acsimet. Tần số truyền âm thanh có giá trị đủ để trạng thái cân bằng kịp thiết lập và khi áp suất thay đổi chỉ thay đổi lượng hơi chứa trong hỗn hợp. Coi hơi nước là khí lý tưởng. Nhiệt hoá hơi riêng  $\lambda = 2260 \text{ J/g}$  không phụ thuộc vào nhiệt độ, nhiệt dung riêng của nước  $c_n = 4,2 \text{ J/(g.K)}$ . Khối lượng riêng của hơi nước  $\rho_h = 17 \text{ g/m}^3$ . Lượng hơi trong hỗn hợp  $\varphi = \frac{m_h}{m_h + m_n} = 10^{-7}$ , trong

đó  $m_h, m_n$  là khối lượng hơi và nước tương ứng.

**11.79.** Khi hóa lỏng khí theo sơ đồ đơn giản Linde, phần khí lỏng  $\alpha$  được xác định bởi nhiệt độ và áp suất đầu vào của nó. Giá trị lớn nhất của  $\alpha$  quan sát được khi ở nhiệt độ  $T$  không đổi, entalpi của khí  $I$  phụ thuộc vào entropi  $S$  đạt giá trị nhỏ nhất, tức là  $\left( \frac{\partial I}{\partial S} \right)_T = 0$ . Xét khí hydro như khí VandecVan

với các giá trị tới hạn của áp suất và nhiệt độ  $P_k = 13 \text{ atm}$ ,  $T_k = 33 \text{ K}$ . Xác định áp suất đầu vào khi  $T = 80 \text{ K}$ .

## §12. CÁC HIỆN TƯỢNG BỀ MẶT

12.1. Để xác định sức căng bề mặt của nước, người ta cân các giọt nước rơi từ một ống mao dẫn và đo đường kính  $d$  của các giọt tại thời điểm rơi khỏi ống. Biết rằng khối lượng 318 giọt nước bằng 5g,  $d = 0,7\text{mm}$ . Xác định sức căng bề mặt của nước.

12.2. Sức căng mặt ngoài  $\sigma$  của một chất lỏng bằng bao nhiêu, nếu một vòng dây cao su chiều dài  $l$ , tiết diện ngang  $S$  đặt lên màng chất lỏng này sẽ giãn thành vòng tròn sau khi chọc thủng màng bên trong vòng dây? Giả thiết rằng độ giãn nở của cao su tuân theo định luật Hook và suất Young của nó bằng  $E$ .

12.3. Một giọt của chất lỏng không chịu nén thực hiện các dao động xung, nó lần lượt có dạng giãn dài, cầu, dẹt rồi lại cầu, giãn dài... Chu kỳ các dao động  $T$  này phụ thuộc như thế nào vào khối lượng riêng  $\rho$ , sức căng bề mặt  $\sigma$  và bán kính giọt  $r$ ?

12.4. Biết rằng độ chói nhìn thấy được của một số ngôi sao (nguồn bức xạ sóng vũ trụ) dao động theo chu kỳ. Theo một trong các thuyết đưa ra thì sự thay đổi độ chói liên quan tới sự thay đổi hình dạng của các sao đang dao động tương tự một giọt nước dưới tác dụng của sức căng bề mặt. Giả thiết rằng các nguồn bức xạ vũ trụ này tạo thành từ các notron. Xác định sức căng bề mặt của các notron nếu giả thiết khối lượng sao  $M = 2 \cdot 10^{23}\text{g}$ , còn chu kỳ dao động  $T$  xấp xỉ 1s. Giọt nước khối lượng  $m = 1\text{g}$  dao động với chu kỳ  $\tau = 0,05\text{s}$ . Hệ số sức căng bề mặt của nước  $\sigma_0 = 70 \cdot 10^{-5}\text{N/cm}$ .

12.5\*. Khảo sát chu trình Cárnot đối với một màng mỏng với giả thiết rằng nhiệt độ của nguồn nóng và nguồn lạnh khác nhau rất ít. Sử dụng định lý Cárnot tìm đạo hàm của sức căng bề mặt  $\sigma$  theo nhiệt độ  $T$ .

12.6\*. Tìm biểu thức tính nội năng  $U$  của màng chất lỏng.

12.7. Tính độ biến thiên nhiệt độ của màng chất lỏng khi giãn nở đoạn nhiệt.

12.8. Một màng xà phòng có chiều dày  $h = 10^{-3}\text{mm}$  và nhiệt độ  $T = 300\text{K}$ . Tính độ giảm nhiệt độ của màng nếu kéo giãn đoạn nhiệt nó đến khi diện tích màng tăng lên gấp đôi. Sức căng mặt ngoài của dung dịch xà phòng giảm  $0,15 \cdot 10^{-5}\text{N/cm}$  khi nhiệt độ tăng lên 1K.

12.9. Trong một bình với các thành cách nhiệt có một bong bóng xà phòng bán kính  $r = 5\text{m}$ . Tổng khối lượng không khí trong bình và trong bong bóng là  $\nu = 0,1\text{mol}$ , nhiệt độ của bình  $T = 290\text{K}$ . (Giả thiết nhiệt độ trong và ngoài bong bóng như nhau). Ở nhiệt độ trên, sức căng bề mặt  $\sigma = 70 \cdot 10^{-5}\text{N/cm}$ ,

$\frac{d\sigma}{dT} = -0,15 \cdot 10^{-5} \text{ N/(cm.K) }$ . Nhiệt độ không khí trong bình thay đổi như thế nào nếu bong bóng bị vỡ. Bỏ qua nhiệt dung của các giọt nhỏ tạo thành.

**12.10\*.** Hãy chứng minh rằng ở gần nhiệt độ 0 tuyệt đối, sức căng bề mặt không phụ thuộc vào nhiệt độ, tức là

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{d\sigma}{dT} = 0$$

(cụ thể bài toán chỉ có thể nói về héli – chất duy nhất còn giữ trạng thái lỏng ở nhiệt độ không tuyệt đối).

**12.11.** Áp suất mao dẫn  $P$  trong một giọt thủy ngân nhỏ đường kính  $d = 1 \mu\text{m}$  ở nhiệt độ  $15^\circ\text{C}$  bằng bao nhiêu, nếu sức căng bề mặt của thủy ngân ở nhiệt độ này là  $\sigma = 487 \cdot 10^{-5} \text{ N/cm}$ ?

**12.12.** Áp suất bổ sung  $P$  bên trong một bong bóng xà phòng đường kính  $d = 0,8 \text{ cm}$  bằng bao nhiêu, nếu sức căng bề mặt của nó  $\sigma = 40 \cdot 10^{-5} \text{ N/cm}$ ?

**12.13.** Xác định lượng nước tối đa có thể rót vào một cái sàng đường kính  $D = 20 \text{ cm}$  có đáy được parafin hoá. Sàng được làm bằng kim loại với các lỗ tròn đường kính  $d = 1 \text{ mm}$ . Sức căng bề mặt của nước  $\sigma = 70 \cdot 10^{-5} \text{ N/cm}$ . Lượng nước tối đa này phụ thuộc như thế nào vào khối lượng riêng của nó?

**12.14.** Ở đáy của một bình có vết nứt rộng  $a = 0,02 \text{ mm}$ . Có thể rót thủy ngân vào bình đến độ cao bao nhiêu để nó không chảy ra ngoài vết nứt? Khối lượng riêng của thủy ngân  $\rho = 13,6 \text{ g/cm}^3$ . Sức căng bề mặt (ở  $15^\circ\text{C}$ )  $\sigma = 487 \cdot 10^{-5} \text{ N/cm}$ .

**12.15.** Hiệu mực nước  $h_1 - h_2$  trong hai ống mao dẫn thông nhau đường kính  $d_1 = 0,1 \text{ mm}$ ,  $d_2 = 0,3 \text{ mm}$  thay đổi như thế nào khi đun nóng từ  $20$  lên  $70^\circ\text{C}$ , nếu sức căng bề mặt của nước đối với các nhiệt độ này lần lượt là  $73 \cdot 10^{-5} \text{ N/cm}$  và  $64 \cdot 10^{-5} \text{ N/cm}$ ?

**12.16.** Để vẩy thủy ngân trong nhiệt kế y tế xuống cần một gia tốc  $a \sim 10 \text{ g}$ . Xác định đường kính chỗ thắt của ống nhiệt kế. Sức căng bề mặt của thủy ngân  $\sigma = 490 \cdot 10^{-5} \text{ N/cm}$ , chiều cao cột thủy ngân bên trên chỗ thắt  $h \sim 5 \text{ cm}$ , khối lượng riêng của thủy ngân  $\rho = 13,6 \text{ g/cm}^3$ .

**12.17.** Hai tấm kính đặt thẳng đứng song song với nhau được nhúng một phần trong nước, sao cho khoảng cách giữa chúng  $d = 0,1 \text{ mm}$ . Lực hút giữa chúng bằng bao nhiêu? Chiều rộng của các tấm  $l = 15 \text{ cm}$ ,  $\sigma = 73 \cdot 10^{-5} \text{ N/cm}$ ,

$\theta = 0^0$ . Các tấm có chiều cao sao cho nước không dính đến cạnh trên của tấm.

**12.18.** Hiệu mực chất lỏng trong hai ống mao dẫn thông nhau đường kính  $d_1$  và  $d_2$  bằng bao nhiêu? Sức căng bề mặt của nước  $\sigma$ , khối lượng riêng  $\rho$ . Các góc biên của các mặt khum bằng 0.

**12.19.** Một ống mao dẫn bằng thủy tinh chiều dài  $l$ , bán kính  $r$  được đặt dựng đứng và hàn kín đầu trên. Nước trong ống dâng lên đến độ cao  $h$  bằng bao nhiêu, nếu đầu dưới của ống đặt tiếp xúc với mặt nước?

**12.20.** Nước giữa hai tấm thủy tinh đặt thẳng đứng dâng lên đến độ cao  $h$  bằng bao nhiêu, nếu khoảng cách giữa chúng  $d = 0,5\text{mm}$ ? Đối với nước  $\sigma = 73 \cdot 10^{-5} \text{N/cm}$ . Góc biên  $\theta$  trong trường hợp này có thể coi bằng 0.

**12.21.** Hai tấm thủy tinh thẳng đứng nhúng một phần trong nước và tạo với nhau một góc nhị diện  $\alpha$  rất nhỏ. Tìm độ dâng  $h$  của chất lỏng dưới dạng hàm của khoảng cách  $r$  đến cạnh nhị diện.

**12.22\*.** Một giọt nước khối lượng  $m = 0,1\text{g}$  được cho vào giữa hai tấm kính phẳng song song với nhau đã được nhúng ướt, góc biên  $\theta = 0^0$ . Hỏi lực hút  $F$  giữa hai tấm lớn thế nào, nếu chúng cách nhau một khoảng  $d = 10^{-4} \text{cm}$ ? Sức căng bề mặt của nước (ở  $18^0\text{C}$ ) là  $\sigma = 73 \cdot 10^{-5} \text{N/cm}$ .

**12.23.** Một gam thủy ngân được cho vào giữa hai tấm kính phẳng. Hỏi phải tác dụng vào tấm bên trên một lực  $F$  bằng bao nhiêu để thủy ngân có dạng hình tròn bán kính  $R = 5\text{cm}$ , với độ dày tại mọi điểm như nhau? Sức căng bề mặt của thủy ngân (ở  $15^0\text{C}$ )  $\sigma = 487 \cdot 10^{-5} \text{N/cm}$ , góc biên giữa thủy ngân và thủy tinh  $\theta = 40^0$ .

**12.24\*.** Ở đáy ao độ sâu  $h = 2\text{m}$  sinh ra các bọt khí đường kính  $d_1 = 0,05\text{mm}$ . Hỏi đường kính  $d_2$  của các bọt khí này bằng bao nhiêu khi chúng lên đến mặt nước? Sức căng bề mặt của nước  $\sigma = 73 \cdot 10^{-5} \text{N/cm}$ .

**12.25.** Nhiệt độ không khí bên trong bong bóng xà phòng phải lớn hơn nhiệt độ không khí bên ngoài  $T$  một lượng  $\Delta T$  bằng bao nhiêu để bong bóng bay lên? Bán kính bong bóng bằng  $r$ , sức căng bề mặt của xà phòng  $\sigma$ . Bỏ qua khối lượng màng xà phòng. Chú ý rằng áp suất bên trong bong bóng khác áp suất bên ngoài không đáng kể.

**12.26.** Người ta đặt một bong bóng xà phòng bán kính  $r$  chứa không khí vào bên trong một xilanh có piston di động. Ban đầu áp suất không khí bên ngoài bong bóng bằng áp suất khí quyển  $P_0$ . Di chuyển từ từ piston sao cho bong bóng bị nén và bán kính của nó giảm một nửa. Xác định áp suất không khí trong xilanh tại thời điểm đó.

**12.27.** Nhiệt dung phân tử  $C$  của khí lý tưởng thay đổi so với  $C_p$  bao nhiêu nếu làm nóng nó bên trong một bong bóng xà phòng bán kính  $r = 1\text{cm}$ ? Sức căng bề mặt của dung dịch xà phòng  $\sigma = 50 \cdot 10^{-5} \text{N/cm}$ . Bỏ qua sự phụ thuộc của  $\sigma$  vào nhiệt độ. Áp suất bên ngoài bong bóng  $P_0 = 1\text{atm}$ .

**12.28.** Một bong bóng xà phòng bán kính  $1\text{cm}$  được đun nóng từ  $20^\circ\text{C}$  lên nhiệt độ  $52^\circ\text{C}$ . Tìm bán kính  $r$  của bong bóng ở  $52^\circ\text{C}$ . Giả thiết hệ số sức căng bằng  $40 \cdot 10^{-5} \text{N/cm}$  và không phụ thuộc vào nhiệt độ.

**12.29.** Người ta đặt một bong bóng dầu có chứa khí lý tưởng đơn nguyên tử vào một khoang chân không. Khí bên trong bong bóng được đun nóng. Tìm nhiệt dung riêng  $c$  của khí trong quá trình trên. Bỏ qua sự phụ thuộc của sức căng bề mặt vào nhiệt độ.

**12.30.** Xác định nhiệt dung phân tử  $C$  của không khí bên trong một bong bóng xà phòng. Bong bóng trong điều kiện áp suất ngoài  $P_0$ , nhiệt độ  $T_0$ , có bán kính  $r$ . Hệ số sức căng bề mặt  $\sigma$  của màng xà phòng không phụ thuộc vào nhiệt độ.

**12.31.** Trong buồng chân không có một bong bóng dầu bán kính  $r_0 = 3\text{cm}$ . Sau khi đưa vào một chất hoạt tính bề mặt thì sức căng bề mặt  $\sigma_0 = 60 \cdot 10^{-7} \text{J/cm}^2$  giảm đi  $a = 1,29$  lần. Cần phải cung cấp cho khí trong bong bóng một nhiệt lượng bằng bao nhiêu để nhiệt độ của nó không đổi? Coi khí là lý tưởng.

**12.32.** Một bong bóng xà phòng bán kính  $r$ , sau khi lên đến một độ cao nào đó thì bán kính tăng gấp đôi. Giả thiết khí quyển là đẳng nhiệt. Tìm độ biến thiên entropi của bong bóng xà phòng. Áp suất gần bề mặt Trái Đất  $P_0$ , hệ số sức căng bề mặt của màng xà phòng  $\sigma$ , nhiệt tạo thành màng xà phòng  $q$ .

**12.33.** Một bong bóng xà phòng được thổi bằng một ống hình trụ bán kính trong  $r = 1\text{mm}$  và chiều dài  $l = 10\text{cm}$ . Khi bán kính bong bóng đạt giá trị  $R_0 = 10\text{cm}$  người ta ngừng thổi và không khí từ bong bóng bắt đầu thoát ra qua ống. Hỏi sau thời gian bao nhiêu thì bong bóng biến mất? Sức căng bề mặt của dung dịch xà phòng  $\sigma = 50 \cdot 10^{-5} \text{N/cm}$ , độ nhớt không khí  $\eta = 1,8 \cdot 10^{-9} \text{N.s/cm}^2$ . Bỏ qua sự thay đổi khối lượng riêng không khí trong thời gian diễn ra quá trình trên.

**12.34.** Trên thành của một bong bóng xà phòng hình cầu người ta khoét một lỗ tròn bán kính  $a$  (có thể làm bằng cách đặt một vòng bằng sợi chỉ lên thành bong bóng, sau đó chọc thủng màng xà phòng trong vòng chỉ). Tìm thời gian cho đến khi tất cả không khí bay ra khỏi bong bóng, nếu bán kính ban đầu của bong bóng là  $r_0 = 10\text{cm}$ . Nhiệt độ không khí bên trong và bên ngoài

$t = 20^{\circ}\text{C}$ . Sức căng bề mặt của dung dịch xà phòng ở nhiệt độ này là  $\sigma = 50 \cdot 10^{-5} \text{ N/cm}$ . Áp suất khí quyển  $P = 760 \text{ mmHg}$ . Lấy khối lượng phân tử trung bình của không khí  $\mu = 29$ . Khi thoát qua lỗ coi không khí là chất lỏng lý tưởng không bị nén.

**12.35.** Một giọt nước rơi đều trong không khí. Hỏi bán kính cong bề mặt ở điểm thấp nhất của giọt nước khác bán kính cong bề mặt ở điểm cao nhất bao nhiêu, nếu khoảng cách giữa chúng  $d = 2 \text{ mm}$ ? Sức căng bề mặt  $\sigma = 70 \cdot 10^{-5} \text{ N/cm}$ .

**12.36\*.** Bên trong một bong bóng xà phòng bán kính  $r_0$  có chứa không khí (khí lý tưởng) ở nhiệt độ  $T_0$  và áp suất  $P_0$ . Sức căng bề mặt của dung dịch xà phòng ở nhiệt độ này bằng  $\sigma_0$ . Tỉ nhiệt tạo thành một đơn vị bề mặt màng xà phòng trong quá trình đẳng nhiệt là  $q_0$ . Tìm đạo hàm của bán kính bong bóng theo nhiệt độ  $\frac{dr}{dT}$  khi  $T = T_0$ . Áp suất bên ngoài không đổi.

**12.37.** Tìm sức căng bề mặt  $\sigma$  của một chất lỏng, nếu nó dâng lên độ cao  $h = 32,6 \text{ mm}$  trong ống mao dẫn đường kính  $D = 1 \text{ mm}$ . Khối lượng riêng của chất lỏng  $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ . Giả thiết góc biên của mặt khum bằng không.

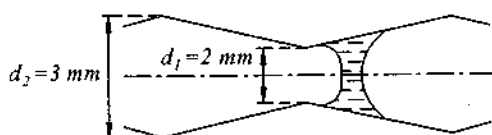
**12.38.** Trong buồng chân không ở hai đầu của một ống có hai bong bóng dầu có kích thước xấp xỉ nhau chứa đầy không khí. Tại thời điểm ban đầu ống được khoá bằng một van. Hỏi điều gì sẽ xảy ra sau khi mở van? Coi quá trình là đẳng nhiệt, hỏi tổng entropi của khí thay đổi bao nhiêu? Bán kính ban đầu của các bong bóng  $r_0 = 5 \text{ cm}$ . Sức căng bề mặt của dầu  $\sigma = 30 \cdot 10^{-5} \text{ N/cm}$ . Nhiệt độ  $T = 300 \text{ K}$ .

**12.39.** Trong một buồng chân không ở hai đầu của một ống có hai bong bóng dầu có kích thước xấp xỉ nhau chứa heli. Tại thời điểm ban đầu ống được khoá bằng một van. Hỏi điều gì sẽ xảy ra sau khi mở van? Nhiệt độ và áp suất trong các bong bóng thay đổi bao nhiêu lần? Entropi của hệ có thay đổi không? Bỏ qua nhiệt dung của màng dầu và của ống so với nhiệt dung của không khí. Coi sức căng bề mặt không phụ thuộc vào nhiệt độ.

**12.40.** Sức căng bề mặt ở ranh giới giữa dầu và nước bằng  $\sigma$ . Cần phải tốn một công  $A$  bằng bao nhiêu để tách đẳng nhiệt một giọt dầu khối lượng  $M$  trong nước ở nhiệt độ  $T$  thành các giọt nhỏ bán kính  $r$ ? Khi đó entropi của dầu thay đổi như thế nào? Khối lượng riêng của dầu bằng  $\rho$ , suất nhiệt tạo thành bề mặt là  $q$ .

**12.41.** Trong một ống nằm ngang có tiết diện thay đổi với mặt cắt được cho trên hình 377, có một giọt nước khối lượng  $m = 4 \cdot 10^{-2} \text{ g}$ . Xác định vị trí cân

bằng của giọt nước. Tính chu kỳ dao động của giọt nước quanh vị trí cân bằng, nếu hệ số sức căng bề mặt của hơi nước  $\sigma = 72 \cdot 10^{-5} \text{ N/cm}$ , góc biên bằng 0. Giả thiết bán kính mặt khum bằng bán kính ống.

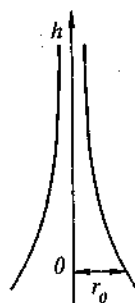


Hình 377

**12.42.** Xác định độ sâu  $h$  của một lớp thủy ngân trên mặt kính phẳng nằm ngang. Kích thước ngang của lớp thủy ngân rất lớn so với độ sâu  $h$ . Sức căng bề mặt của thủy ngân ở mặt biên tiếp giáp với không khí  $\sigma = 490 \cdot 10^{-5} \text{ N/cm}$ , góc biên trên kính  $\theta = 140^\circ$ . Khối lượng riêng của thủy ngân  $\rho = 13,6 \text{ g/cm}^3$ .

**12.43.** Biết rằng trong các bơm piton, trong điều kiện bên ngoài tiêu chuẩn nước từ bể chứa không dâng piton lên quá 10m. Hỏi nước dâng lên bao nhiêu trong một ống mao dẫn thấm ướt tuyệt đối, dài vô hạn và có đường kính  $1 \mu\text{m}$ ?

**12.44.** Một kênh được thấm ướt tuyệt đối tiết diện thay đổi (H.378) có bán kính liên hệ với chiều cao bằng biểu thức  $r = r_0 e^{-h/n_0}$  được đặt thẳng đứng trong trọng trường đều. Bên trong kênh dẫn này người ta đặt một bong bóng xà phòng khối lượng  $m$  và hệ số sức căng  $\sigma$ . Coi màng xà phòng là phẳng, hỏi nó dâng lên đến độ cao nào?



Hình 378

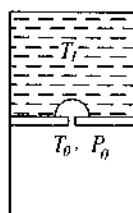
**12.45\*.** Trong khi mưa có thể quan sát được các hạt bụi nước nhỏ li ti đi xuyên qua vải bạt của lều. Giả thiết kích thước các lỗ giữa các sợi chỉ của vải bạt  $d = 0,05 \text{ mm}$ . Xác định kích thước nhỏ nhất của các hạt bụi nước có thể đi qua vải. Vải bạt mỏng không dính ướt. Lực cản  $F$  của không khí đối với chuyển động của các hạt bụi bán kính  $R$  bằng  $p_{kh} v^2 \pi R^2$ .

**12.46\*.** Một màng xà phòng được căng trên một chiếc vòng bán kính  $R$  bằng dây mảnh. Khối lượng màng  $M = 1 \text{ g}$ , hệ số sức căng bề mặt  $\sigma = 30 \cdot 10^{-5} \text{ N/cm}$ . Xác định thời gian thủng màng xà phòng nếu chọc màng tại tâm của nó. Phần năng lượng nào của màng chuyển hoá thành động năng chuyển động của chất lỏng?

**12.47.** Một bình được ngăn thành hai phần bởi một màng cách nhiệt nằm ngang, trên màng có một lỗ nhỏ với kích thước nhỏ hơn nhiều lần chiều dài quãng đường tự do của các phân tử khí. Áp suất phần dưới của bình  $P_0 = 6 \text{ mmHg}$ . Phần phía trên của bình có chiều cao  $h = 9 \text{ cm}$  và chứa đầy dầu ( $\sigma = 0,03 \cdot 10^{-5} \text{ N/m}$ ,  $\rho = 870 \text{ kg/m}^3$ ). Phía trên lỗ của màng ngăn có



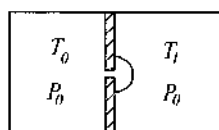
một bong bóng dầu bán kính 1mm được tạo thành (H. 379). Hỏi với tỷ lệ nào giữa nhiệt độ dầu và khí thì kích thước bong bóng không đổi? Nhiệt độ của khí trong bong bóng bằng nhiệt độ của dầu.



Hình 379

**12.48.** Một bình chứa khí được ngăn thành hai phần bằng một màng cách nhiệt nằm ngang, trên màng có một lỗ nhỏ với kích thước nhỏ hơn nhiều lần chiều dài quãng đường tự do của các phân tử khí. Áp suất khí ở hai phía màng ngăn như nhau

$P_0 = 6\text{mmHg}$ . Ở một phía của màng ngay trên lỗ có một bong bóng xà phòng ( $\sigma = 0,03\text{N/m}$ ) bán kính 5mm. Nhiệt độ của khí nằm giữa màng ngăn và bong bóng bằng nhiệt độ của khí ở bên có bong bóng (H. 380). Hỏi với tỷ lệ nhiệt độ nào của khí ở hai bên màng ngăn thì kích thước bong bóng sẽ không đổi?



Hình 380

**12.49.** Tính áp suất hơi nước bão hoà ở  $20^0\text{C}$  trên bề mặt của một giọt nước hình cầu, nếu nó có bán kính:

1)  $r_1 = 10^{-5}\text{cm}$  (giọt sương mù);

2)  $r_2 = 10^{-7}\text{cm}$ .

Đối với nước ở  $20^0\text{C}$   $\sigma = 72,7 \cdot 10^{-5}\text{N/cm}$ ,  $\nu_1 = 1,002\text{cm}^3/\text{g}$ ,  $P = 17,5\text{mmHg}$ .

**12.50.** Một bình nước được đun nóng ở áp suất không đổi  $P_0 = 1\text{atm}$ . Hỏi nhiệt độ sôi của nước sẽ cao hơn  $100^0\text{C}$  bao nhiêu, nếu bỏ hết khí hoà tan trong nước, còn các hạt rắn lơ lửng trong nó có kích thước lớn nhất  $r_{\text{max}} = 10\mu\text{m}$ . Hệ số sức căng bề mặt  $\sigma = 60 \cdot 10^{-7}\text{J/cm}^2$ , nhiệt hoá hơi  $A = 9,7\text{kcal/mol}$ .

**12.51.** Nước không lẫn tạp chất được đun đến nhiệt độ  $t = 101^0\text{C}$  khi áp suất bên ngoài  $P_0 = 1\text{atm}$ . Xác định kích thước tối thiểu của hạt cát để khi nó rơi vào nước sẽ làm cho nước sôi bọt. Hệ số sức căng bề mặt của nước  $\sigma = 58,8 \cdot 10^{-7}\text{J/cm}^2$ , nhiệt hóa hơi riêng  $\lambda = 2,26 \cdot 10^6\text{J/kg}$ , thể tích riêng của hơi nước  $\nu_h = 1,7\text{m}^3/\text{kg}$  khi  $t = 100^0\text{C}$ .

**12.52.** Hơi nước trong phòng bắt đầu ngưng tụ trên bề mặt nhẵn khi hạ nhiệt độ của bề mặt xuống  $t = 10^0\text{C}$ . Bắt đầu từ nhiệt độ nào thì hơi nước sẽ ngưng tụ trên vật rỗ với bán kính các lỗ rỗ  $r = 10^{-5}\text{cm}$ ? Nhiệt hoá hơi riêng

của nước  $\lambda = 2,48 \text{ kJ/g}$ , hệ số sức căng bề mặt  $\sigma = 70 \cdot 10^{-5} \text{ N/cm}$ . Giả thiết bề mặt rỗ dính ướt, góc dính ướt bằng 0.

**12.53.** Hơi bão hoà của cồn trong buồng Willson ở nhiệt độ  $t_1 = 20^\circ \text{C}$  có áp suất  $P_1 = 40 \text{ mmHg}$ . Cần phải thay đổi áp suất hơi bằng cách làm lạnh đoạn nhiệt một lượng  $\Delta P$  bằng bao nhiêu, để trong khoang tạo thành sương mù với bán kính ban đầu của các giọt sương  $r = 10^{-6} \text{ cm}$ ? Nhiệt hoá hơi của cồn  $A = 39,31 \text{ J/mol}$ . Thể tích của một phân tử gam chất lỏng  $V_l = 58,2 \text{ cm}^3/\text{mol}$ , hệ số sức căng bề mặt  $\sigma = 20 \cdot 10^{-5} \text{ N/cm}$ . Giả thiết nhiệt dung phân tử của hơi  $C_p = 4R$ .

**12.54.** Một giọt thuỷ ngân hình cầu bay hơi trong không khí thoáng có gió. Khối lượng riêng của thuỷ ngân  $\rho = 13,6 \text{ g/cm}^3$ , khối lượng phân tử  $\mu = 200$ , sức căng bề mặt  $\sigma = 4,7 \cdot 10^{-5} \text{ N/cm}$ . Nhiệt độ không khí  $t = 27^\circ \text{C}$ . Với kích thước của giọt bằng bao nhiêu thì vận tốc bay hơi trên một đơn vị bề mặt hầu như không phụ thuộc vào bán kính của giọt?

**12.55.** Xác định áp suất lớn nhất mà hơi nước còn có thể ở trạng thái quá bão hoà ở nhiệt độ  $100^\circ \text{C}$ , khi nó nằm trong bình có các thành không dính ướt. Hệ số sức căng bề mặt của nước  $\sigma = 70 \cdot 10^{-5} \text{ N/cm}$ .

**12.56.** Hơi nước quá lạnh chứa trong bình có các thành không dính ướt ở áp suất  $P = 1 \text{ atm}$  và nhiệt độ  $t_0 = 99^\circ \text{C}$ . Hỏi kích thước tối thiểu của giọt nước cần phải tạo thành bằng bao nhiêu để hơi ngưng tụ? Hệ số sức căng bề mặt của nước  $\sigma = 70 \cdot 10^{-5} \text{ N/cm}$ , nhiệt hoá hơi riêng  $\lambda = 2,3 \text{ kJ/g}$ .

**12.57.** Một đám hơi nước gồm các giọt nước nhỏ đường kính  $d = 0,1 \mu\text{m}$  từ từ hợp lại thành một giọt khối lượng  $M = 1 \text{ g}$ . Giả thiết quá trình là đoạn nhiệt. Xác định nhiệt độ của giọt nước và độ biến thiên entropi. Nhiệt độ của đám hơi nước  $t = 27^\circ \text{C}$ . Hệ số sức căng bề mặt  $\sigma = 70 \cdot 10^{-5} \text{ N/cm}$ , còn  $\frac{d\sigma}{dT} = -0,15 \text{ N/(s.K)}$ .

**12.58.** Sương mù được tạo thành từ các giọt nước nhỏ bán kính  $0,0005 \text{ mm}$ . Hơi nước trong môi trường xung quanh ở nhiệt độ  $10^\circ \text{C}$  phải quá bão hoà đến mức độ nào để các giọt nước nhỏ cân bằng với hơi? Áp suất hơi bão hoà trong môi trường xung quanh ở  $10^\circ \text{C}$  là  $9,2 \text{ mmHg}$ . Hệ số sức căng bề mặt  $\sigma = 70 \cdot 10^{-5} \text{ N/cm}$ .

**12.59.** Một giọt nước nhỏ ( $r = 10\mu\text{m}$ ) nằm trong một hốc kín thể tích  $V$  cân bằng với hơi. Hỏi với kích thước nào của hốc thì sự cân bằng đó là bền? Thành bình không dính ướt, trong bình không còn giọt nước và tâm ngưng tụ hơi nào. Xét điều kiện đẳng nhiệt với nhiệt độ  $T = 300\text{K}$ , coi hơi nước là khí lý tưởng, áp suất của nó  $P_h = 27\text{mmHg}$ .

**12.60.** Heli  $^4\text{He}$  lỏng ( $\text{He} - \text{I}$ ) ở áp suất khí quyển bình thường tại điểm sôi có khối lượng riêng  $\rho = 0,125\text{g/cm}^3$ . Hệ số sức căng bề mặt khi đó  $\sigma = 0,35 \cdot 10^{-5}\text{N/cm}$ . Xác định nhiệt hóa hơi riêng  $\lambda$  của  $^4\text{He}$  trong các điều kiện trên. Lấy mô hình heli lỏng là một túi các quả cầu đặt khít nhau.

**12.61.** Trong một bình kín phía trên lớp nước là hơi bão hoà có khối lượng riêng  $\rho$  và nhiệt độ  $T$ . Người ta đưa vào bình một giọt nước bán kính  $a$  ở cùng nhiệt độ  $T$ . Hỏi sau thời gian bao nhiêu thì bán kính giọt nước thay đổi hai lần? Hệ số sức căng bề mặt của nước bằng  $\sigma$ , khối lượng riêng  $\rho_0$ , khối lượng phân tử  $\mu$ . Bỏ qua sự thay đổi áp suất hơi ở gần giọt nước do sự bay hơi của bề mặt giọt nước.

**12.62.** Tại tâm quả cầu bán kính  $a = 1\text{cm}$  có một giọt nước. Không gian giữa giọt nước và mặt cầu chứa đầy hơi bão hoà. Ở bề mặt bên trong quả cầu có một lớp nước rất mỏng. Tại thời điểm ban đầu bán kính giọt nước  $b_0 = 0,5\text{cm}$ . Giả thiết nhiệt độ của hệ  $T = 300\text{K}$  không đổi. Xác định thời gian  $\tau$  để khối lượng giọt nước giảm  $\Delta m = 10\text{mg}$ . Áp suất hơi bão hoà trên bề mặt phẳng  $P_\infty = 3,5 \cdot 10^3\text{Pa}$ , hệ số sức căng bề mặt  $\sigma = 70 \cdot 10^{-5}\text{N/cm}$ , hệ số khuếch tán hiệu dụng  $D = 10\text{cm}^2/\text{s}$ . Coi hơi bão hoà là khí lý tưởng.

**12.63.** Tại tâm quả cầu bán kính  $a = 1\text{cm}$  có một giọt nước. Không gian giữa giọt nước và mặt cầu chứa đầy hơi bão hoà. Ở bề mặt bên trong của quả cầu có một lớp nước rất mỏng. Tại thời điểm ban đầu bán kính giọt nước  $b_0 = 0,1\text{cm}$ . Khi nhiệt độ của hệ  $T_1 = 300\text{K}$  không đổi, thời gian bay hơi 20% giọt nước là

$\tau_1 \sim 1\text{h}$ . Xác định sự thay đổi tương đối  $\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_1}$  của thời gian bay hơi 20% giọt nước nếu nhiệt độ của hệ  $T_2 = 320\text{K}$ . Ở nhiệt độ  $T_1 = 300\text{K}$ , hệ số sức căng bề mặt  $\sigma = 70 \cdot 10^{-5}\text{N/cm}$ ,  $\frac{d\sigma}{dT} = -0,15 \cdot 10^{-5}\text{N}/(\text{cm} \cdot \text{K})$ , hệ số khuếch tán  $D = 10\text{cm}^2/\text{s}$ . Giả thiết hơi bão hoà là khí lý tưởng.

# LỜI GIẢI VÀ HƯỚNG DẪN

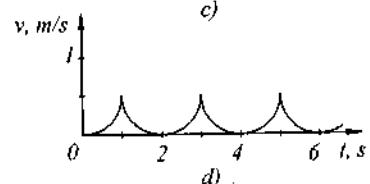
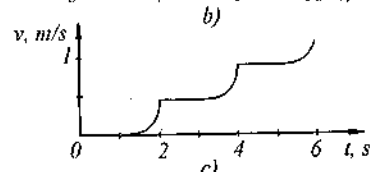
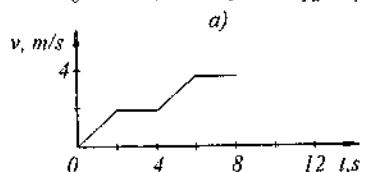
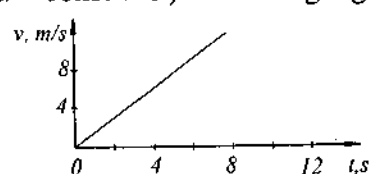
## Phần 1 CƠ HỌC

### §1. ĐỘNG HỌC CHẤT ĐIỂM

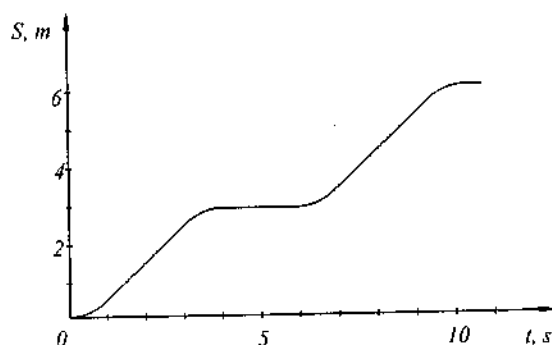
1.1. Xem hình 381.

– Hình 381a: Sự phụ thuộc của vận tốc vào thời gian được mô tả bằng hàm  $v = at$ .

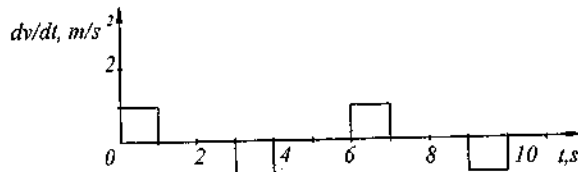
– Hình 381b: Đồ thị được tạo bởi 4 đoạn thẳng: nằm nghiêng ( $v = at$  khi  $a = \text{const} \neq 0$ ) và nằm ngang ( $v = \text{const}$  khi  $a = 0$ ) luân phiên nhau.



Hình 381



Hình 382



Hình 383

– Hình 381c: Đồ thị tạo bởi các đoạn thẳng nằm ngang và các đoạn parabol có phương trình  $v = \frac{kt^2}{2}$  (khi  $a = kt$ ), nếu khi vẽ các parabol này ta lấy gốc tọa độ là các điểm  $t = 1, 3, 5$ .

– Hình 381d: Đồ thị tạo bởi các đoạn parabol. Từ các điểm 0, 2, 4, 6 ta dựng các parabol theo phương trình  $v = \frac{kt^2}{2}$ . Trong giới hạn các đoạn trục 1–2, 3–4, 5–6 đặt các đoạn của các parabol thoả mãn điều kiện  $v = v_{\max} - \frac{kt^2}{2}$ .

1.2. Xem hình 382 và hình 383.

Hình 382: Trên đoạn 0–1 sự phụ thuộc của  $S$  vào thời gian được biểu diễn bằng hàm  $S = \frac{at^2}{2}$ , trên các đoạn 1–3, 3–4, 4–6 – bằng các phương

trình  $S = v_{\max}t$ ,  $S = v_{\max}t - \frac{at^2}{2}$ ,  $S = \text{const}$  và v.v.

Hình 383: Trên đoạn 0–1 thì  $\frac{dv}{dt} = a = \text{const} > 0$ . Trên các đoạn 1–3 và 3–4 – tương ứng  $a = 0$  và  $a = \text{const} < 0$  (xem chú thích của bài 1.1).

1.3.  $v(t) = v_0 \pm \int_{t_0}^{t_1} a(t) dt \equiv v_0 \pm I$ .

$$t_x = \begin{cases} t_1, & \text{khi } v(t) = v_0 + I \text{ (hướng của } \bar{a} \text{ và } \bar{v} \text{ trùng nhau),} \\ t_1, & \text{khi } v(t) = v_0 - I, \text{ nếu } I > 2|v_0|, \\ t_0, & \text{khi } v(t) = v_0 - I, \text{ nếu } I < 2|v_0|. \end{cases}$$

1.4.  $\alpha = 3\pi/8$ .

1.5.  $\alpha = \pi/8$ .

1.6.  $\alpha = \pi/6$ .

1.8. Điều kiện để quỹ đạo của hòn bi khi đi lên đối xứng với quỹ đạo của nó khi đi xuống là  $v_0^2 \sin 2\alpha = Dg$ . Số lần va chạm trong một chu kỳ chuyển động bên trong hình trụ  $N = 2k + 3$ , trong đó  $k$  là số lần va chạm của hòn bi trong thời gian chuyển động của nó từ lần va chạm đầu tiên vào thành trụ đến lần va chạm đầu tiên vào đáy trụ.

1.9. Bóng chuyển động lên trên với vận tốc không đổi  $v = 2\pi \left( \frac{R_{\text{MT}}}{T_{\text{th}}} - \frac{R_{\text{TD}}}{T_{\text{ng}}} \right) \approx 0,5 \text{ km/s}$ , trong đó  $T_{\text{th}}$  là độ dài một tháng,  $T_{\text{ng}}$  là độ dài một ngày đêm.

<sup>1</sup> Sự phụ thuộc của các đại lượng động học vào thời gian trong bài 1.1. và bài 1.2. được tìm bằng cách lấy tích phân hoặc vi phân bằng phương pháp đồ thị hoặc giải tích.

1.10. Bóng chuyển động lên trên với gia tốc không đổi

$$a = \frac{4\pi^2 R}{T_{ng}^2} = 3,4 \text{ cm/s}^2; t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = 4 \text{ phút.}$$

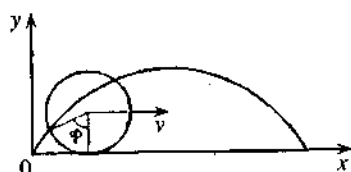
1.11.  $v_x = v_0(1 + \cos \varphi); v_y = -v_0 \sin \varphi; v_{\text{toàn phần}} = 2v_0 \cos \frac{\varphi}{2};$

$$\alpha = -\arctg\left(\tg \frac{\varphi}{2}\right) = -\frac{\varphi}{2}.$$

1.12.  $x = R(\varphi - \sin \varphi) = R(\omega t - \sin \omega t),$   
 $y = R(1 - \cos \varphi) = R(1 - \cos \omega t),$  trong đó

$\varphi = \omega t$  và  $\omega = \frac{v}{R}$  là vận tốc góc của bánh

xe. Quỹ đạo của các điểm trên vành của bánh xe đang chuyển động có dạng xyclôit đơn giản (H. 384). Phương trình của nó thu được dưới dạng tham số.



Hình 384

1.13\*. 
$$h_{\max} = R + \frac{v^2}{2g} + \frac{gR^2}{2v^2}, \quad (*)$$

$$(\cos \varphi)_{h_{\max}} = -\frac{Rg}{v^2}, \quad (**)$$

trong đó  $\varphi$  là toạ độ góc của điểm cần tìm trên vành bánh xe (xem H.7 của bài 1.12).

Lời giải. Toạ độ của một điểm bất kỳ trên vành bánh xe có thể biểu diễn bằng biểu thức sau

$$y = R\left(1 - \cos \frac{vt}{R}\right),$$

suy ra

$$\dot{y} = v \sin \frac{vt}{R}.$$

Các đại lượng  $y, \dot{y}$  và  $h$  liên hệ với nhau bằng biểu thức

$$h = y + \frac{\dot{y}^2}{2g}$$

Thay biểu thức này vào biểu thức trước nó, ta tìm được (\*\*) từ điều kiện

$$\frac{dh}{d\varphi} = 0. \text{ Sau đó ta nhận được } (*).$$

$$1.14. \rho = \frac{(v_0^2 + \omega^2 R^2)^{3/2}}{\omega^3 R^2}.$$

$$1.15. \rho = \frac{(v_0 \cos \alpha + \omega R)^2}{\omega^2 R + g}.$$

1.16. Trục quay tức thời cần tìm sẽ vẽ một đường tròn bán kính  $r = \frac{\omega_2 R}{\omega_1 + \omega_2}$  quanh trục của đĩa thứ nhất. Vận tốc góc của chuyển động quay quanh trục này là  $\omega = \omega_1 + \omega_2$ .

1.17. Khi ô tô quay thì các bánh bên trong và bên ngoài của nó (so với tâm đoạn đường cong) chuyển động theo các đường tròn khác nhau, tức là đi được các quãng đường khác nhau và vận tốc góc của các bánh xe, nếu nó không trượt trên đường, sẽ khác nhau. Điều kiện này được đảm bảo bằng bộ vi sai trong cầu sau của ô tô. Các bánh không có bộ truyền động từ động cơ có thể quay độc lập với nhau với các vận tốc góc khác nhau vì chúng được lắp trên các ổ trục.

$$1.18. v_{in} = 9,88 \text{ m/s}, v_{ex} = 10,12 \text{ m/s}.$$

## §2. ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT ĐIỂM. TĨNH HỌC

$$2.1. F_1 = -\frac{4}{5}F.$$

$$2.2. a = \frac{m}{m+M}g; T = \frac{Mm}{M+m}g.$$

2.3.  $F \geq 40N$ . Lực căng của sợi dây nối hai vật được xác định chỉ bởi độ lớn của lực  $F$  đặt lên các vật và không phụ thuộc vào hệ số ma sát giữa các vật và mặt bàn nếu hệ số ma sát như nhau đối với cả hai vật.

$$2.4. a = \frac{M}{M+m_1+m_2+m_3}g;$$

$$T_1 = (m_1 + m_2 + m_3)a; T_2 = (m_2 + m_3)a; T_3 = m_3a.$$

$$2.5. a = \frac{m_1 \sin \alpha - m_2}{m_1 + m_2}g; T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1 + \sin \alpha)g.$$

$$2.6. a_1 = \frac{2m_1 - m_2}{2m_1 + m_2/2}g; a_2 = -\frac{a_1}{2}; T = \frac{3m_1 m_2}{4m_1 + m_2}g.$$

*Hướng dẫn.* Điều kiện liên hệ các gia tốc  $a_1$  và  $a_2$  có thể nhận được nếu ký hiệu  $x_1$  và  $x_2$  là các khoảng cách từ vật  $m_1$  và  $m_2$  đến mặt phẳng ngang; khi đó  $x_1 + 2x_2$  là đại lượng không đổi. Lấy vi phân biểu thức này hai lần ta tìm được điều kiện cần tìm  $a_1 = -2a_2$ .

$$2.7. a_1 = \frac{m_1(m_2 + m_3) - 4m_2m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3} g; T_1 = \frac{8m_1m_2m_3g}{4m_2m_3 + m_1(m_2 + m_3)};$$

$$T_2 = \frac{4m_1m_2m_3g}{4m_2m_3 + m_1(m_2 + m_3)}$$

*Hướng dẫn.* Ký hiệu  $x_1, x_2, x_3$  là khoảng cách từ các vật  $m_1, m_2, m_3$  đến mặt phẳng chứa ròng rọc. Khi đó ta có đẳng thức sau:

$$x_2 + x_3 + 2x_1 = l_2 + 2l_1 + \text{const},$$

trong đó  $l_1, l_2$  – chiều dài các sợi dây. Đạo hàm biểu thức trên hai lần ta nhận được mối liên hệ giữa các gia tốc của cả ba vật cần thiết để giải bài tập này:  $a_2 + a_3 + 2a_1 = 0$ .

$$2.8. m_3 = \frac{4m_1m_2}{m_1 + m_2}.$$

$$2.9. m_3 = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}.$$

2.10. Các lực sẽ bằng nhau khi chiều dài đoạn dây thẳng đứng có độ lớn

$$x_1 = \frac{3}{5}l; T = \frac{2}{5}mg; \ddot{x}_1 = \frac{3}{5}g.$$

$$2.11. a_1 = \frac{m_1g - m_2(g - a_2)}{m_1 + m_2}; R = \frac{m_1m_2(2g - a_2)}{m_1 + m_2}.$$

2.12. Khi  $k < \frac{m}{M}$  thì  $a \geq \frac{(m - M)gH}{ML - mH}$ ; khi  $k \geq \frac{m}{M}$  thì gia tốc nhận giá trị bất kỳ.

2.13. Hai con khỉ sẽ leo đến ròng rọc cùng một lúc sau khoảng thời gian  $\tau = \frac{l}{3v}$ . Thực vậy, lực căng của dây ở hai phía ròng rọc là như nhau,

điều đó có nghĩa là gia tốc và vận tốc của hai con khỉ này so với ròng rọc cũng như nhau. Vì chúng lại gần nhau với vận tốc  $3v$  nên chúng đi được cả quãng đường  $l$  trong khoảng thời gian  $\frac{l}{3v}$ .



2.14. Vật sẽ chuyển động lên với vận tốc  $\frac{v}{4}$  không phụ thuộc vào việc vận tốc  $v$  có phải là hằng số hay không.

2.15.  $F > 0,25(M + m)g + 0,5(M + m)g \approx 22,5 \text{ N}$ .

2.16.  $t = \frac{v_0}{g(k_1 + k_2)(1 + m/M)}$ .

2.17.  $t = \frac{v_0}{kg(1 + m/M)}$ .

2.18.  $m_{\min} = M \frac{tg\alpha - k}{k}$ ; khi  $m > m_{\min}$  thì tắt dừng lại.

2.19. Sẽ chuyển động;  $a_1 = g \left[ \sin\alpha - k_1 \cos\alpha - (k_1 - k_2) \frac{m_2}{m_1} \cos\alpha \right]$ ;

$a_2 = g(\sin\alpha - k_2 \cos\alpha)$ , tức là  $a_2 > a_1$ . Khi  $k_1 < k_2 < tg\alpha$  thì

$$a_1 = a_2 = g(\sin\alpha - k_1 \cos\alpha).$$

2.20.  $x(t) = L(1 - e^{-t/M})$ ;  $x(\infty) = \frac{v_0 M}{\gamma} = L$ .

2.21.  $\alpha = \frac{4kh\Delta}{l^2} = 0,032 \text{ rad} \approx 1^\circ 50'$ .

2.22.  $S_1 = 2S_0 \left(1 - \frac{kh}{l}\right) = 1,6S_0$ ;  $S_2 = 2S_0 \left(1 + \frac{kh}{l}\right) = 2,4S_0$ .

2.23.  $F = \frac{(k_1 + k_2)Mgl}{2[l - h(k_1 - k_2)]}$ .

2.24.  $h = \frac{1}{2g} \left\{ v^2 - \left[ \frac{4mg}{\pi \rho v d^2 (1 - \cos\alpha)} \right]^2 \right\} \approx 60 \text{ cm}$ .

2.25. Sự thay đổi vận tốc của thuyền theo thời gian diễn ra theo hàm

$v = \frac{mv_0}{m + rv_0 t}$ , trong đó  $m$  là khối lượng thuyền,  $r$  là hệ số sức cản của

nước. Khi đưa ra giả thiết về sự phụ thuộc của lực cản vào vận tốc thuyền thì thuyền phải chuyển động lâu vô cùng và quãng đường đi được cũng phải dẫn

đến vô cùng:  $S = \frac{m}{r} \ln \left( 1 + \frac{rv_0}{m} t \right)$ . Nhưng giả thiết này không còn đúng khi

vận tốc chuyển động của thuyền nhỏ, khi đó lực cản sẽ tỷ lệ bậc nhất với vận tốc.

2.26.  $v = v_0 e^{-rt/m}$ , và hiển nhiên là khi đưa ra giả thiết đó thì chuyển động của thuyền diễn ra rất lâu. Tuy nhiên đối với quãng đường  $S$  mà con thuyền đi được sau khi hạ buồm thì ta có:  $\lim_{t \rightarrow \infty} S = \frac{v_0 m}{r}$  (so sánh với kết quả bài trước).

2.27.  $v = v_0 - \frac{r}{m} S$ , các ký hiệu trong bài này tương tự bài trước.

2.28.  $T_{\max} = mg \frac{v_{\text{tr}}^2}{v_{\text{sau}}^2} = 180 \text{ kN}.$

Chú ý. Cả dây chèo của dù và vận động viên đều không chịu được lực căng này, nếu dây chèo dù cũng tác dụng lên người vận động viên một lực tương tự. Trên thực tế, vận động viên không mở dù tức thời và lực căng của dây cũng nhỏ hơn nhiều.

2.29. Vận tốc quả cầu lớn lớn hơn  $\sqrt{2}$  lần so với vận tốc quả cầu nhỏ.

2.30\*.  $v = \frac{mg}{r} \left[ \left( v_0 \frac{r}{mg} + 1 \right) e^{-rt/m} - 1 \right]$ , trong đó  $m$  – khối lượng của vật,  $r$  – hệ số sức cản của không khí.

Lời giải. Phương trình chuyển động có dạng  $m \frac{dv}{dt} = -mg - rv$ . Kết quả trên thu được bằng cách lấy tích phân phương trình này với điều kiện ban đầu:  $v = v_0$  khi  $t = 0$ .

2.31.  $t_1 = t_0 \frac{v_*}{v_0} \ln \left( 1 + \frac{v_0}{v_*} \right)$ , trong đó  $v_*$  là vận tốc của chuyển động ổn định

trong môi trường nhớt,  $t_0 = \frac{v_0}{g}$ .

2.32.  $H = \frac{v_1^2}{g} \left[ \frac{v_0}{v_1} \sin \alpha - \ln \left( 1 + \frac{v_0}{v_1} \sin \alpha \right) \right] \approx 1,6 \text{ km}; \tau \approx 14 \text{ s}.$

2.33. 1)  $\Delta S = g \tau \left( t + \frac{\tau}{2} \right)$ ; 2)  $\Delta S = v_0 \left[ \tau + \frac{m}{r} e^{-rt/m} (1 - e^{-r\tau/m}) \right]$ , trong đó  $v_0$  là vận tốc chuyển động ổn định của các giọt chất lỏng,  $r$  là hệ số sức cản khi các hạt rơi trong không khí. Thời gian  $t$  tính từ khi bắt đầu rơi giọt đầu tiên.

2.34.  $x(t) = \frac{mV_0}{\beta} (1 - e^{-\beta t/m})$ , tức là nếu độ sâu của đại dương không giới hạn thời gian rơi thì

$$x_{\max} = \frac{mV_0}{\beta} = 50m.$$

$$2.35. t = \frac{R}{v_0 k} (e^{\pi k} - 1).$$

$$2.36. k = \frac{v^2}{Rg} \approx 0,4.$$

2.37\*. Khi chuyển động theo hình sin gia tốc pháp tuyến cực đại tại các đỉnh có bán kính cong cực đại. Nếu  $y = y(x)$  là phương trình đường sin thì tại các đỉnh  $y' = 0$  và bán kính cong tại các điểm này có thể tính theo công thức

$$\frac{1}{R} = |y''|. \text{Viết phương trình đường sin dưới dạng } y = A \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) \text{ (biên độ}$$

$A$  và chu kỳ không gian  $l$  không đổi), ta sẽ nhận được điều kiện để ô tô

không bị trượt là  $v < \frac{l}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu g}{A}}$ , trong đó  $\mu$  là hệ số ma sát,  $g$  là gia tốc rơi

tự do. Thay các giá trị bằng số đề bài cho ta được  $v < 20$  m/s.

$$2.38. v = \sqrt{Rg \operatorname{ctg} \alpha}.$$

$$2.39. r = \frac{v^2}{g \operatorname{tg} \alpha}.$$

*Hướng dẫn.* Khi máy bay bay thẳng, mặt phẳng cánh nằm ngang. Lực nâng trong trường hợp này hướng thẳng đứng lên trên, tức là vuông góc với mặt phẳng cánh. Khi thân máy bay xoay xung quanh trục dọc thì lực nâng cũng xoay một góc tương tự, tức là vẫn giữ vuông góc với mặt phẳng cánh, vì lực tương tác giữa máy bay và môi trường xung quanh chỉ phụ thuộc vào chuyển động tương đối của máy bay với môi trường.

$$2.40. F = \frac{PL}{R} = 1,75 \text{ kN}.$$

$$2.41. v = \sqrt{gl \left( \frac{1}{\cos \varphi} - \cos \varphi \right)}, \text{ trong đó } \cos \varphi = \frac{d^2 + l^2 + R^2}{2ld}.$$

$$2.42. \omega^2 = \frac{g}{\sqrt{(R+l)^2 - (R+r)^2}}.$$

2.43\*.  $\alpha = 0$  nếu  $\omega^2 < \frac{kg}{ml_0(g/l_0 + k/m)}$ , trong trường hợp khác

$$\alpha = g \frac{k - m\omega^2}{\omega^2 kl_0}, \quad (\omega < \sqrt{k/m}).$$

Lời giải. Gọi  $T$  là lực căng của lò xo. Khi đó

$$T = k(l - l_0), \quad l = l_0 + \frac{T}{k},$$

$$T \cos \alpha = mg, \quad T = \frac{mg}{\cos \alpha}, \quad T \sin \alpha = m\omega^2 r,$$

trong đó  $r = l \sin \alpha$ . Nếu  $\alpha \neq 0$  ta có

$$mg \left( 1 - \frac{m\omega^2}{k} \right) = m\omega^2 l_0 \cos \alpha, \quad \cos \alpha = \frac{\Omega_1^2}{\omega^2} \left( 1 - \frac{\omega^2}{\Omega_2^2} \right),$$

trong đó  $\Omega_1^2 = \frac{g}{l_0}$ ,  $\Omega_2^2 = \frac{k}{m}$ . Điều này được thoả mãn nếu

$$\frac{\Omega_1 \Omega_2}{\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}} < \omega < \Omega_2.$$

Nếu  $\omega < \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}}$  thì  $\alpha = 0$ ; khi  $\omega \rightarrow \Omega_2$  thì  $l \rightarrow \infty$ , tức là lò xo sẽ đứt.

$$2.44. \omega^2 = \frac{g(\cos \alpha - k \sin \alpha)}{h \operatorname{tg} \alpha (\sin \alpha + k \cos \alpha)}.$$

$$2.45. x = \frac{g}{\omega^2} \operatorname{tg} \alpha.$$

$$2.46. F_x = Fe^{-4} \approx 183N.$$

2.47. Nếu  $a_1$  là gia tốc của hệ về phía vật khối lượng  $m_1$ ,  $a_2$  là gia tốc của

hệ về phía vật  $m_2$ , thì  $a_1 = \frac{m_1 - m_2 e^{k\pi}}{m_1 + m_2 e^{k\pi}}$ ,  $a_2 = \frac{m_2 - m_1 e^{k\pi}}{m_2 + m_1 e^{k\pi}}$ . Điều kiện để

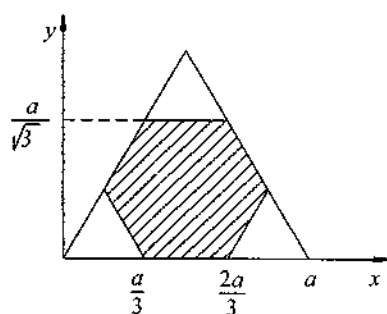
hệ đứng yên  $e^{-k\pi} < \frac{m_2}{m_1} < e^{k\pi}$ .

$$2.48. \Delta t \text{ cực tiểu khi } \frac{d_2}{d_1} = \frac{m_1}{m_2}.$$

$$2.49. \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{F}{kl_0} \left[ 1 - \frac{M}{2(M+m)} \right].$$

2.50. Trên hình 385 biểu diễn quỹ đạo điểm đặt của quả cân trên bàn

$$\begin{cases} y \leq \frac{a}{\sqrt{3}}, \\ y \geq \sqrt{3}x - \frac{2}{\sqrt{3}}a, \\ y \geq \frac{a}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}x. \end{cases}$$



Hình 385

$$2.51. v = \sqrt{2gh} \frac{1 - \sqrt{k_h}}{1 + \sqrt{k_h}} = 0,12 \text{ m/s.}$$

$$2.52. k \geq \frac{R}{l} + \frac{m}{M} \frac{(l^2 + R^2)}{Rl}.$$

$$2.53. k \geq \frac{l}{2R} + \frac{R}{2l}.$$

$$2.54. v = \sqrt{\frac{g}{l}(l^2 - l_0^2)}, \quad x = l_0 ch \left( \sqrt{\frac{g}{l}} t \right).$$

Hướng dẫn. Kết quả nhận được bằng cách lấy tích phân phương trình  $m\ddot{x} = \frac{m}{l}gx$ , trong đó  $m$  là khối lượng cả dây chao,  $x$  là độ dài phần treo lơ lửng tại thời điểm đang xét. Điều kiện ban đầu:  $v = 0$  khi  $l = l_0$ .

### §3. CHUYỂN ĐỘNG CỦA CÁC VẬT CÓ KHỐI LƯỢNG THAY ĐỔI

3.1. Gia tốc của sàn  $\frac{dv}{dt} = \frac{f}{M - \Delta mt}$ . Lấy tích phân phương trình này và chú

ý rằng  $v = 0$  khi  $t = 0$ , ta được  $v = \frac{f}{\Delta m} \ln \frac{M}{M - \Delta mt}$ .

$$3.2. M = M_0 \left[ \exp \left( \frac{\mu L}{v_0 M} \right) - 1 \right].$$

$$3.3. v = v_0 \left[ 1 - \exp \left( - \frac{\alpha L}{v_0 M} \right) \right].$$

$$3.4. T = \frac{L}{v_0} \left( 1 + \frac{m_1}{2m_0} \right).$$

3.5. Dây không đứt.

3.6.  $F = \frac{\Delta m_1 v}{\Delta t} \approx 25 \text{ kN}$ , trong đó  $\Delta m_1$  là khối lượng than, còn  $\Delta t$  là thời gian chất khối lượng này lên toa.

$$3.7. t = \frac{\alpha M_0 g - \mu v}{\alpha \mu g} \approx 6 \text{ phút.}$$

$$3.8. v = \frac{2}{3} \sqrt{2g} \frac{\rho \pi r^2 H^{3/2}}{M}.$$

$$3.9. v = 6\sqrt{2gh_0}.$$

$$3.10. \tau = \frac{v_0}{g} \left( 1 + 2 \frac{M_0}{\Delta m} \right).$$

$$3.11. x = 4,5(\ln 10)^2 \frac{u}{\lambda} \approx 24 \frac{u}{\lambda}.$$

$$3.12. m(t) = m_0 (1 - vt)^{v_0/u}.$$

$$3.13. L = \left( v_0 + \frac{u}{2} \right) \sqrt{\frac{2H}{g}} = 32 \text{ km.}$$

$$3.14. \frac{m_2}{m_1} = 2 \exp \left( - \frac{am_0}{2\mu u} \right); \frac{v_2}{v_1} = \frac{am_0}{u\mu 2 \ln 2}.$$

$$3.15. m = \frac{m_0}{2} \exp \left( - \frac{am_0}{2\mu u} \right); v = u \ln 2 + \frac{m_0 a}{2\mu}.$$

$$3.16*. \mu = - \frac{dm}{dt} = \frac{m_0 g}{u} \exp \left( - \frac{g}{u} t \right).$$

Lời giải. Phương trình chuyển động của tên lửa

$$m \frac{dv}{dt} = -u \frac{dm}{dt} - mg,$$

ta viết nó dưới dạng

$$m \frac{d}{dt}(v + gt) = -u \frac{dm}{dt}, \quad \frac{d(v + gt)}{dm} = -\frac{u}{m}.$$

Từ đây suy ra

$$\frac{m_0}{m} = \exp\left(\frac{v + gt}{u}\right), \quad v = u \ln \frac{m_0}{m} - gt.$$

Từ điều kiện tên lửa đứng yên  $\frac{dv}{dt} = 0$ , ta tìm được  $\mu = -\frac{dm}{dt}$ .

$$3.17. \quad m = m_0 \exp\left(-\frac{g}{u} t\right); \quad t_{1/2} = 2 \text{ phút } 21 \text{ giây}; \quad t_1 = 7 \text{ phút } 50 \text{ giây}.$$

$$3.18. \quad a = 29 \text{ m/s}^2; \quad v = 900 \text{ m/s}.$$

$$3.19. \quad \frac{\Delta m}{m} = 1 - \exp\left(-\frac{2gR_{\text{TĐ}}}{3uv}\right) = 98,6 \text{ \%}.$$

$$3.20. \quad \mu(t) = -\frac{dm}{dt} = \frac{m_0(g+a)}{u} \exp\left[-\frac{(g+a)}{u} t\right].$$

$$3.21. \quad T = \frac{u}{2g}.$$

$$3.22. \quad H = 1,5 \text{ km}.$$

$$3.23. \quad \frac{m_0}{m} = \exp\left(\frac{v_0 + g\tau/6}{u}\right) \approx e^{1,1} \approx 3.$$

3.24. Khi phóng bình thường  $v_1 \approx 8 \text{ km/s} \approx v_{\text{vtI}}$  – vận tốc vũ trụ cấp I ( $v_{\text{vtI}} = \sqrt{gR_{\text{TĐ}}}$ ). Khi bay qua hầm  $v_2 = \sqrt{3}v_{\text{vtI}}$

$$3.25. \quad \alpha = \frac{2(1 + \alpha_0)^2}{2 + \alpha_0} - 1 \approx 19,2.$$

$$3.26. \quad \Delta v = u \ln\left(\frac{1 + \alpha}{1 + \alpha - k}\right) = 3,4 \text{ km/s}.$$

$$3.27. \quad \frac{m_0}{m_k} \approx 148; \quad m_k = 1470 \text{ kg}.$$

$$3.28. \alpha = \frac{u}{v} \ln \frac{m_0}{m}.$$

3.29. Động năng của tên lửa

$$K = \frac{1}{2} (M_0 - \mu t) \left[ g^2 t^2 + \left( u \ln \frac{M_0}{M} \right)^2 \right] = 2,3 \text{ MJ}.$$

$$3.30. \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{g}.$$

$$3.31. \eta = \frac{K}{Q} = \frac{v^2}{2q(e^{v/u} - 1)} \approx 13\%.$$

3.32. 1) Động năng của tên lửa sẽ cực đại khi  $v = 2u$ .

2) Động lượng của tên lửa sẽ cực đại khi  $m = \frac{m_0}{e}$ .

$$3.33. T_2 = \frac{m_0^2 - (m_0 - \alpha T_1)^2}{\alpha m_0} = 19s.$$

$$3.34. v = \frac{2l}{3M} \sqrt{2km}.$$

#### §4. CÔNG, NĂNG LƯỢNG, ĐỘNG LƯỢNG. ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN ĐỘNG LƯỢNG VÀ NĂNG LƯỢNG. VA CHẠM

$$4.1. \Delta v_x \approx 6,3 \text{ cm/s}, A \approx 45 \cdot 10^{-7} \text{ J}.$$

$$4.2. v_c > v_a > v_b.$$

$$4.3. A = mg(H - kL).$$

$$4.4. N_{\max} = N + mgv \sin \alpha \approx 81,2 \text{ mã lực}.$$

$$4.5. F = \frac{m^2 v^2}{2SM} \approx 170 \text{ N}, \text{ trong đó } M \text{ và } m \text{ là khối lượng súng và khối lượng viên đạn.}$$



$$4.6. v = \frac{M \sqrt{2gl \sin \alpha}}{v \cos \alpha}.$$

*Hướng dẫn.* Biểu thức trên dễ dàng nhận được nếu áp dụng định luật bảo toàn động lượng cho các thành phần động lượng của súng và quả đạn hướng dọc theo mặt phẳng nghiêng trước và ngay sau khi bắn. Động lượng của trọng lực (tác dụng lên cả hai vật) trong thời gian bắn  $\Delta t$  rất ngắn, có giá trị nhỏ không đáng kể.

$$4.7*. S_2 = 5000 \text{ m.}$$

*Lời giải.* Do một mảnh đạn rơi ngay tại vị trí nổ nên toàn bộ động lượng mà quả đạn có được tại điểm cao nhất sẽ được truyền cho mảnh thứ hai. Mảnh thứ nhất rơi từ độ cao 19,6 m xuống đất hết 1 s chứng tỏ rằng mảnh thứ nhất sau khi nổ nhận được vận tốc đầu  $v_0$  hướng xuống dưới, do đó mảnh thứ hai nhận được động lượng tương tự hướng lên trên. Vì vậy mảnh thứ hai sau khi nổ có vận tốc đầu  $2v_n$  theo phương ngang ( $v_n$  là thành phần theo phương ngang của viên đạn khi bắn), còn theo phương thẳng đứng  $v_0$ . Vận tốc  $v_0$

xác định từ đẳng thức  $h = v_0 \tau + \frac{g\tau^2}{2}$ , trong đó  $\tau$  là thời gian rơi của mảnh thứ nhất. Thành phần vận tốc theo phương ngang  $v_n$  từ hai biểu thức

$$S_1 = v_n t \text{ và } h = \frac{gt^2}{2}:$$

$$v_n = \sqrt{\frac{g}{2h}} S_1.$$

Khoảng cách từ điểm rơi của mảnh thứ hai đến chỗ nổ theo phương ngang có thể xác định theo các công thức mô tả chuyển động bay của quả đạn trong không gian (chân không)

$$S_2 - S_1 = 2v_n \left[ \frac{h}{g\tau} - \frac{\tau}{2} + \sqrt{\frac{2h}{g} + \left( \frac{h}{g\tau} - \frac{\tau}{2} \right)^2} \right].$$

Thay  $v_n = \sqrt{\frac{g}{2h}} S_1$  vào ta được

$$S_2 = S_1 \left\{ \sqrt{\frac{2g}{h}} \left[ \frac{h}{g\tau} - \frac{\tau}{2} + \sqrt{\frac{2h}{g} + \left( \frac{h}{g\tau} - \frac{\tau}{2} \right)^2} \right] + 1 \right\}.$$

$$4.8. v_1 = \frac{m_1(v+u)+mv}{m+m_1}; v_2 = v; v_3 = \frac{m_1(v-u)+mv}{m+m_1}.$$

$$4.9*. x_\infty = \frac{l}{2}.$$

*Lời giải.* Trong trường hợp đang xét khối tâm của hệ sẽ xê dịch do tác dụng của ngoại lực (các lực ma sát). Ký hiệu  $T$  là lực căng của dây giữa hai con thuyền. Khi đó

$$m_1\ddot{x}_1 + h\dot{x}_1 = T, m_2\ddot{x}_2 + h\dot{x}_2 = -T, m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 + h(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) = 0.$$

Đẳng thức cuối cùng vẫn đúng trong cả trường hợp sau khi các thuyền va vào nhau và cùng chuyển động với nhau cho đến khi dừng. Lấy tích phân nó với cận từ 0 đến  $\infty$ :

$$m_1\dot{x}_1\Big|_0^\infty + m_2\dot{x}_2\Big|_0^\infty + h(x_1 + x_2)\Big|_0^\infty = 0;$$

$$\text{vì } \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = \dot{x}_1(\infty) = \dot{x}_2(\infty) = 0, \quad x_1(0) = 0, x_2(0) = l, \\ x_1(\infty) = x_2(\infty) = x_\infty, \text{ ta nhận được } 2x_\infty - l = 0, \quad x_\infty = \frac{l}{2}.$$

$$4.10. 9 \text{ m/s và } 1 \text{ m/s}$$

$$4.11. v_c = v_0 \frac{m_0}{m+m_0}; S = \frac{mv_0^2}{2kg(m+m_0)}.$$

$$4.12. v = \frac{1}{2}\sqrt{kgL_0}.$$

$$4.13. F = \frac{2Mv}{\tau}$$

$$4.14. x_0 = 2\sqrt{2} \frac{\alpha mg}{k}.$$

$$4.15. v = \sqrt{\frac{2M}{m(M+m)} \left( \frac{kx_0^2}{2} - \alpha mgL \right)}.$$

$$4.16. \vec{w} = \frac{M\vec{u}}{M+m}; \vec{v} = -\frac{m\vec{u}}{M+m}.$$

$$4.17. \vec{v} = -\frac{\Delta m \vec{u}}{M+m}; \vec{S}_1 = -\frac{\Delta m \vec{l}}{M+2m+\Delta m}; \vec{S}_2 = \frac{(M+2m)\vec{l}}{M+2m+\Delta m}.$$

$$4.18. x = \frac{m}{M+m}(a-b).$$

$$4.19*. v = \frac{l}{(1+m/M)\sqrt{2h/g}}.$$

*Lời giải.* Từ định luật bảo toàn động lượng ta có  $Mu = -mv$ , trong đó  $u$  là vận tốc thuyền và người sau khi ném,  $v$  là vận tốc quả tạ. Vận tốc quả tạ so với thuyền  $v_{td} = u + v = v\left(1 + \frac{m}{M}\right)$ . Để quả tạ rơi xuống đuôi thuyền thì độ dịch chuyển tương đối của nó so với thuyền theo phương ngang trong thời gian nó rơi ( $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ ) phải bằng chiều dài thuyền  $v_{td}t = l$ .

$$4.20. \frac{F_{\max}}{mg} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{a}} = 6.$$

$$4.21. \text{Diện tích dù có thể giảm đi } \sqrt{1 + \frac{k_{tx}L_{tx}^2}{2F_cL_c}} = 1,23 \text{ lần.}$$

$$4.22. l_v = \frac{R}{2}\left(1 + \frac{1}{k}\right) = 3 \text{ m}, l_n = R\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{k}\right) = 5,5 \text{ m}.$$

$$4.23. h = \frac{v_0^2 + gl}{3g} \text{ (parabol)}, H = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{l}{2}\left(\frac{v_0^2}{3gl} - \frac{2}{3}\right)^3.$$

$$4.24*. \dot{x}_1 = v_0 = \frac{\sqrt{gl}}{2}; x_{1\max} = l\sqrt{2}.$$

*Lời giải.* Ta tính tọa độ của các vật so với vị trí các trục của ròng rọc, khi đó đối với vị trí cân bằng ta có

$$\cos \varphi_0 = \frac{m_1}{2m_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \varphi_0 = \frac{\pi}{4}; x_1^0 = \frac{l}{2}.$$

Từ điều kiện không giãn của sợi dây ta có

$$x_2 + \sqrt{x_1^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} = L, \quad \dot{x}_2 + \dot{x}_1 \cos \varphi = 0,$$

trong đó  $L$  là nửa chiều dài sợi dây.

Ta viết biểu thức năng lượng toàn phần  $E = K + P$  đối với ba vị trí của hệ

$$x_1 = 0, \quad x_1 = x_1^0 = \frac{l}{2}, \quad x_1 = x_{1\max};$$

$$\begin{aligned} E &= -2m_2g\left(L - \frac{l}{2}\right) = \frac{m_1}{2}(1 + \cos^2 \varphi_0)v_0^2 - m_1gx_1^0 \\ &\quad + 2m_2g\sqrt{(x_1^0)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} - 2m_2gL \\ &= -m_1gx_{1\max} + 2m_2g\sqrt{x_{1\max}^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Giải hệ phương trình này ta tìm được đáp số như đã dẫn ở trên.

4.25. Theo chiều kim đồng hồ, vì khi đó đoạn dây curoa đang hoạt động sẽ bị treo ít hơn và bao phần lớn hơn của vòng tròn bánh puli, so với khi quay ngược chiều kim đồng hồ.

$$4.26. \quad h = \frac{v_0^2 + 2gR}{3g}.$$

$$4.27. \quad \frac{R}{2} \sin \alpha \leq h \leq \frac{R}{4} \frac{1 + \sin \alpha}{\sin \alpha}.$$

$$4.28. \quad h = \frac{v_0^2}{3g} + \frac{R}{3} \cos \varphi.$$

$$4.29. \quad h = \frac{5}{3}R; \quad H = \frac{50}{27}R.$$

$$4.30. \quad v = \frac{v_0}{e} = 3,7 \text{ m/s}.$$

$$4.31. \quad k = \frac{(m_1^e - m_2)(3 \cos \alpha - 2) \sin \alpha}{M + (m_1 + m_2)(3 \cos \alpha - 2) \cos \alpha} \approx \frac{m_1 - m_2}{M} \alpha = 4,4 \cdot 10^{-3}.$$

$$4.32. \quad h \approx 6,1 \text{ m}.$$

$$4.33. \quad E_{\min} = \frac{mg}{2} \left( h + \sqrt{L^2 + h^2} \right) \approx 34 \text{ J}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{L} + \frac{\sqrt{L^2 + h^2}}{L} = 1,25 \quad (\alpha \approx 52^\circ).$$

$$4.34. v = \sqrt{\frac{kgL}{2}} \approx 2,2 \text{ m/s.}$$

$$4.35. v = \sqrt{\frac{gL(2M - k_0m)}{m + M}}.$$

$$4.36. \text{ Các vật có chiều dài } l = \frac{v_0^2}{6kg}.$$

$$4.37. A = k_1 MgL \left( \frac{3}{2} + k_1 \right) \frac{1 - 2k_1}{1 + 2k_1}.$$

$$4.38. A_{\min} = \frac{mgR}{1 + k \operatorname{tg} \alpha} \left( \frac{k}{2} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

$$4.39. H = \frac{50}{27} R + \frac{35}{54} \frac{v^2}{g} - \frac{11}{27} \frac{v^4}{g^2 R} - \frac{5}{54} \frac{v^6}{g^3 R^2}. \text{ Khi } v \geq \sqrt{gR} \text{ thì vật sẽ rơi tự do ngay xuống dưới và sau đó nảy lên độ cao } 2R.$$

$$4.40. S = \frac{l_0 F_2^2}{4mgF_1} = 37,5 \text{ m.}$$

$$4.41. v_0 = \sqrt{\frac{F_0 l}{m + M/3}} = 7 \text{ m/s.}$$

$$4.42. p = \frac{2m\sqrt{2gl}}{3} = 1,2 \text{ kg.m/s.}$$

4.43\*. *Lời giải.* Áp lực bổ sung lên bàn (phần lớn hơn khối lượng của đoạn dây chảo đã nằm trên mặt bàn) gây ra bởi sự mất mát động lượng do các phần tử của chảo va vào bàn khi chúng rơi. Giả sử trong thời gian  $dt$  phần chảo có khối lượng  $dm = \mu dx$  ( $\mu$  là khối lượng trên một đơn vị dài của chảo) rơi xuống bàn, còn  $dx$  là phần tử chiều dài của chảo. Lực mà phần tử này tác dụng lên bàn

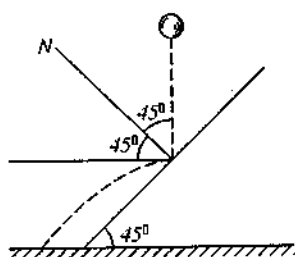
$$\Delta F = v \frac{dm}{dt} = v\mu \frac{dx}{dt} = \mu v^2,$$

trong đó  $v$  là vận tốc mà phần tử  $dm$  có được khi rơi xuống bàn. Dễ thấy rằng  $v^2 = 2gx$ , trong đó  $x$  là chiều dài đoạn dây chảo nằm trên bàn. Suy ra  $\Delta F = 2\mu gx$ . Vậy tổng hợp lực tác dụng lên bàn sẽ bằng  $3\mu gx$ .

$$4.44. v = \sqrt{\frac{g}{2l} [x^2 - (\Delta l)^2]}.$$

4.45. Viên bi bật khỏi miếng ném theo phương ngang và tiếp tục bay theo parabol (H. 386).

4.46. Hộp sẽ không chuyển động bởi vì thành phần động lượng  $\vec{p}$  truyền cho nó theo phương pháp tuyến  $p_n$  và theo phương tiếp tuyến  $p_t$  (so với mặt phẳng nghiêng) của vật rơi thẳng đứng sẽ thỏa mãn biểu thức  $\frac{p_n}{p_t} = \tan \alpha$ , các thành phần trọng lượng của hộp



Hình 386

cũng thỏa mãn điều kiện này  $\frac{mg_n}{mg_t} = \tan \alpha = k$ , dưới tác dụng của các thành phần này hộp sẽ không chuyển động. Sau khi vật nằm yên trong hộp thì sự gia tăng trọng lượng của hộp không làm hộp chuyển động.

4.47.  $\tau = \frac{1}{2g} \left( \frac{V - kv \cos \alpha}{k \cos \alpha - \sin \alpha} - v \right); k \leq \tan \alpha + \frac{V}{v \cos \alpha}.$

4.48. Tiêu cự của hệ  $F \approx \frac{Rv_0^2}{2gR_1} = 13,5 \text{ cm}$ ; điều kiện điều tiêu

$$\frac{gR_1^2}{2R} \ll v_0^2 \ll gR_1.$$

4.49.  $N_{\max} = \frac{2}{3} \mu \omega FR.$

4.50.  $F = F_0 \frac{v}{\sqrt{v^2 + (\omega r)^2}}$ , trong đó  $F_0 = 2\pi \delta \mu P$  là lực để có thể tháo đĩa khỏi trục đứng yên.

4.51\*.  $2\bar{K} = \bar{U}.$

Lời giải. Chọn gốc toạ độ tại một điểm bất kỳ trên sàn và hướng trục  $X$  thẳng đứng lên trên, ta nhận được

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\dot{x}^2 - mgx = 2K - U,$$

trong đó  $K$  là động năng,  $U = mgx$  là thế năng của hòn bi. Lấy tích phân biểu thức trên từ  $t = 0$  đến  $t = T$ , sau đó cho  $T$  tiến tới vô cùng ta sẽ nhận được đáp số cần tìm.

4.52.  $F(r) = -\frac{r_0}{r} U_0 \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r_0} \right) \exp \left( -\frac{r}{r_0} \right); r_1 = 6 \cdot 10^{-13} \text{ cm}.$

$$4.53. 1) v = 2 \frac{M+m}{m} \sqrt{\lg \sin \frac{\alpha}{2}};$$

$$2) v = \frac{2M\sqrt{\lg \sin \frac{\alpha}{2}} - mv'}{m};$$

$$3) v = \frac{2M\sqrt{\lg \sin \frac{\alpha}{2}}}{m}.$$

*Chú thích.* Giải bài toán va chạm giữa con lắc thử đạn và viên đạn được tiến hành bằng cách áp dụng định luật bảo toàn động lượng của hệ con lắc – viên đạn. Cách giải này chỉ đúng trong trường hợp nếu va chạm của viên đạn không truyền chuyển động quay cho con lắc. Điều này xảy ra khi viên đạn va vào tâm lắc của con lắc, vị trí của tâm lắc cách trục quay của nó một khoảng bằng chiều dài con lắc vật lý, còn vận tốc viên đạn vuông góc với đường thẳng nối điểm treo của con lắc với tâm lắc. Khi viên đạn va vào con lắc tại một điểm tùy ý thì để giải bài toán, cần áp dụng định luật bảo toàn mômen động lượng trong hệ con lắc – viên đạn, còn trong trường hợp đầu tiên thì việc áp dụng định luật bảo toàn động lượng tương đương với việc áp dụng định luật bảo toàn mômen động lượng.

$$4.54. \alpha_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \alpha; \alpha_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \alpha \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}.$$

$$4.55. v_0 = \frac{(P_1 + P_2 + mg)\sqrt{P_1 + P_2}}{2m\sqrt{kg}}.$$

$$4.56. p = 2mv \cos \alpha.$$

$$4.57. \Delta K = 2m(v-u)u; \Delta p = -2m(v-u); \text{ sau khi va chạm vật dừng lại nếu } u = v/2.$$

*Hướng dẫn.* Các phương trình va chạm đàn hồi với tấm chắn (bức tường) di động có thể nhận được dễ dàng bằng cách lấy giới hạn của các công thức tính vận tốc của hai vật va chạm đàn hồi, đồng thời giả thiết khối lượng của một tấm chắn (bức tường) bằng vô cùng.

$$4.58. t \approx \frac{Mu_0}{2mv^2 nS} = 16 \mu s, \text{ trong đó } v \text{ là vận tốc Heli trong chùm tia.}$$

$$4.59. vL = \text{const}.$$

$$4.60. P = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2.$$

4.61. Với điều kiện  $\frac{m_1}{m_2} > 20$ , trong đó  $m_1$  là khối lượng quả cầu có năng lượng nhỏ hơn. Kết quả có thể nhận được dễ dàng từ các biểu thức sau

$$20m_1v_1^2 = m_2v_2^2, \quad v = \frac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2} > 0,$$

trong đó  $v$  là vận tốc các quả cầu sau va chạm,  $v_1$  và  $v_2$  là vận tốc của chúng trước va chạm.

$$4.62. S = \frac{v^2}{4kg}.$$

$$4.63. S = \frac{mv}{2\alpha}.$$

$$4.64. \frac{\Delta m}{m} = \frac{1}{3}.$$

$$4.65. x_{\max} = \left(\frac{5}{8} \frac{m}{k}\right)^{2/5} v_0^{4/5}.$$

Hướng dẫn. Sử dụng định lý Conic.

$$4.66. v_1 = v \frac{\sqrt{13}}{4}; \quad v_2 = \frac{v}{4}.$$

4.67\*. Lời giải. Gọi  $\vec{v}$  là vận tốc của hạt thứ nhất trước va chạm,  $\vec{v}_1$  và  $\vec{v}_2$  là vận tốc các hạt sau va chạm. Theo định luật bảo toàn động lượng và định luật bảo toàn năng lượng

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad v^2 = v_1^2 + v_2^2.$$

Bình phương hai vế phương trình thứ nhất và trừ đi phương trình thứ hai ta được  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$ . Nếu cả hai vectơ  $\vec{v}_1$  và  $\vec{v}_2$  đều khác không, tức là khi va chạm không trực diện thì góc giữa chúng bằng  $90^\circ$ . Khi va chạm trực diện  $\vec{v}_1 = 0$ ,  $\vec{v}_2 = \vec{v}$ , tức là các hạt chỉ trao đổi vận tốc cho nhau.

$$4.68. r = \frac{e^2}{2E}, \text{ trong đó } e \text{ là điện tích proton. Để tiện tính toán, ta biến đổi}$$

công thức này bằng cách đặt  $E = eV$ . Khi đó  $r = \frac{e}{2V} = 1,4 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$  ( $2V = 10^6 \text{ V}$ ). Các thí nghiệm về sự tán xạ các hạt của hạt nhân cho thấy rằng bán kính tác dụng của các lực hạt nhân có độ lớn cỡ  $10^{-13} \text{ cm}$ . Vì vậy,



khi tính toán va chạm của các proton có năng lượng lớn hơn 0,5 MeV thì ngoài các lực tĩnh điện, cần tính đến cả các lực hạt nhân.

$$4.69. r_{\min} = \frac{2e^2}{E_0} \left( 1 + \frac{m_\alpha}{m_p} \right) \approx 3,6 \cdot 10^{-13} \text{ cm};$$

$$a_p \approx 2,2 \cdot 10^{27} \text{ g}; a_\alpha \approx 0,54 \cdot 10^{27} \text{ g}.$$

$$4.70. \frac{1}{4} \text{ MeV và } \frac{3}{4} \text{ MeV}.$$

4.71. Khối lượng hạt  $\alpha$  phải nhỏ hơn khối lượng hạt nhân:  $m < M$ ;

$$v = v_0 \sqrt{\frac{M-m}{M+m}}; V = \frac{mv_0}{M} \sqrt{\frac{2M}{M+m}}; \operatorname{tg} \theta = \sqrt{\frac{M-m}{M+m}}.$$

$$4.72. p \approx 7,7 \cdot 10^{-19} \text{ g.cm/s}.$$

$$4.73. \frac{m_1}{m_2} = 3.$$

$$4.74. \gamma = 2\theta.$$

4.75.  $\alpha = 4A/(1+A)^2$ , trong đó  $A$  là khối lượng nguyên tử của hạt mà proton va chạm

|          |   |      |      |       |
|----------|---|------|------|-------|
| A        | 1 | 2    | 4    | 12    |
| $\alpha$ | 1 | 0,89 | 0,64 | 0,284 |

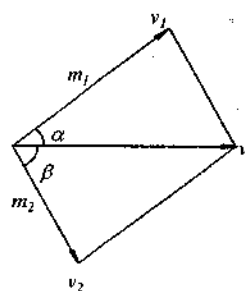
4.76\*. Đối với hạt  $\alpha$  thì  $\theta = 14^\circ 30'$ , đối với deuteron  $\theta = 30^\circ$ .

Lời giải. Gọi  $m_1$  là khối lượng hạt tán xạ (hạt  $\alpha$  hoặc deuteron),  $v$  là vận tốc trước khi khuếch tán;  $m_2$  là khối lượng hạt bị tán xạ (nguyên tử hydro);  $v_1$  và  $v_2$  là vận tốc các hạt sau khi tán xạ (H. 387). Theo định luật bảo toàn động năng và định luật bảo toàn năng lượng:

$$m_1 v = m_1 v_1 \cos \alpha + m_2 v_2 \cos \beta,$$

$$m_1 v_1 \sin \alpha = m_2 v_2 \sin \beta,$$

$$m_1 v^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2.$$



Hình 387

Khử góc  $\beta$  và vận tốc  $v_2$ , ta nhận được phương trình bậc hai đối với  $v_1$

$$(m_1 + m_2)v_1^2 - 2m_1vv_1 \cos \alpha + (m_1 - m_2)v^2 = 0.$$

Điều kiện để phương trình có nghiệm thực có dạng  $\sin \alpha \leq \frac{m_2}{m_1}$ . Góc cực đại

$\alpha$  thoả mãn điều kiện này và sẽ bằng góc  $\theta$ . Như vậy  $\sin \theta = \frac{m_2}{m_1}$ . Từ đây

suy ra đối với hạt  $\alpha$  thì  $\theta = 14^\circ 30'$ , đối với hạt deuteron  $\theta = 30^\circ$ .

$$4.77. Q \leq E \left( 1 - \frac{m}{m_1 + m_2} \right).$$

4.78.  $E_p = \frac{m_{Be}^2}{m_{Be}^2 - m_p^2} E_n = \frac{49}{48} E_n = 1,92 \text{ MeV}$ . Khi năng lượng lớn hơn thì xuất hiện các neutron bay ngược lại.

$$4.79. K_\alpha = \frac{11}{7} Q \approx 4,5 \text{ MeV}.$$

$$4.80. K_D = \frac{m_D + m_T}{m_T} K \approx 250 \text{ keV}.$$

$$4.81. E = E_n \left( 1 + \frac{m_n}{m_{He}} \right) - 2E_D \approx 3,26 \text{ MeV}.$$

$$4.82. E \approx 3,25 \text{ MeV}.$$

## §5. DAO ĐỘNG ĐIỀU HOÀ CỦA CHẤT ĐIỂM

$$5.1. T = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}} \approx 1,4 \text{ s}.$$

$$5.2. x = \frac{gT^2}{4\pi^2} \approx 6,2 \text{ cm}.$$

$$5.3. t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

$$5.4. T = \frac{\pi}{4} T_0.$$

$$5.5. T = 2\pi \sqrt{m \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)}.$$

$$5.6. k = \frac{4\pi^2 A}{gT^2} \approx 0,1.$$

$$5.7. A = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kh}{mg}}.$$

$$5.8*. M > m.$$

*Lời giải.* Khi bỏ vật  $M$ , vị trí cân bằng dịch chuyển lên trên một lượng  $x_0 = \frac{Mg}{k}$ . Xuất hiện dao động của đĩa cân xung quanh vị trí cân bằng mới:  $x = x_0 \cos \omega t$ . Khi đĩa bắt đầu chuyển động lên trên thì vật nhỏ  $m$  cũng chuyển động lên cùng với nó. Tại vị trí cao nhất gia tốc của đĩa đạt cực đại  $a_{\max} = \omega^2 x_0 = \frac{kx_0}{m} = \frac{Mg}{m}$  và hướng xuống dưới. Nếu  $a_{\max} < g$ , tức là  $M < m$  thì khi đĩa chuyển động ngược xuống dưới vật nhỏ sẽ tiếp tục nằm trên đĩa và không bị nảy. Nếu  $a_{\max} > g$ , tức là  $M > m$  thì vật nhỏ chuyển động sẽ bị chậm so với đĩa và xuất hiện hiện tượng nảy.

$$5.9. x \leq \frac{mg}{k} = 20 \text{ cm}.$$

$$5.10. A > \frac{\mu(M+m)g}{k_1 + k_2}.$$

$$5.11. A > \frac{(M+m)g}{k_1 + k_2}.$$

$$5.12. T = 2\pi \sqrt{\frac{Mm}{(M+m)(k_1 + k_2)}}.$$

$$5.13. \frac{A_2}{A_1} = \sqrt{\frac{M}{M+m}}; \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{m+M}{M}}.$$

$$5.14. \frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{M+m}{M}}, \text{ trong đó } \omega \text{ là tần số dao động khi hộp không bị giữ, } \omega_0 \text{ là tần số khi hộp bị giữ chặt.}$$

5.15.  $\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{M+m}{M}}$ , trong đó  $\omega$  là tần số dao động khi thanh không bị giữ,  $\omega_0$  là tần số khi thanh bị giữ chặt.

$$5.16. \varphi_0 = \frac{Q^2 l_0}{mgl_0^3 + 2Q^2 L}; T = 2\pi l_0 \sqrt{\frac{mLl_0}{mgl_0^3 + 2Q^2 L}}.$$

$$5.17. A = \frac{1}{2\pi\nu} \sqrt{\frac{gH}{2}}.$$

$$5.18. H = \frac{(\sqrt{2gh} + 4\pi\nu A)^2}{2g}.$$

$$5.19. a) T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt[4]{r^2 - l^2} \text{ (vuông góc với mặt phẳng hình vẽ);}$$

$$b) T = \frac{2\pi}{\sqrt{g\sqrt{r^2 - l^2}}} \text{ (trong mặt phẳng hình vẽ).}$$

$$5.20. T = 2\pi \left[ \frac{m \cos^2 \alpha + (1 + m/M) \sin^2 \alpha}{k} \right]^{1/2} = 2\pi \sqrt{\frac{13m}{16k}}.$$

$$5.21. T = \frac{4\pi}{3} \sqrt{\frac{2l}{g}}.$$

$$5.22. \omega^2 = g \frac{\sqrt{R^2 - L^2/4}}{4(R^2 - R\sqrt{R^2 - L^2/4})}.$$

$$5.23. T = \frac{2\pi l}{\sqrt{Rg}}.$$

$$5.24. T = 2\pi \left[ \frac{2h}{g} \frac{\rho_s}{\rho_n + \rho_d} \right]^{1/2}.$$

$$5.25. T = 2\pi \left( \frac{0,75k}{\pi\rho_s R^3} + \frac{0,48\rho_l g}{\rho_s R} \right)^{-1/2}.$$

$$5.26. T = \pi \sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}; A \leq mg \frac{k_1 + k_2}{4k_1 k_2}.$$

$$5.27. A = \frac{2\pi m g}{(M+m)k} \sqrt{M(M+m)}.$$

$$5.28. \omega^2 = \frac{g}{2\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}.$$

$$5.29. \omega^2 = \frac{g \sin(\alpha/2)}{R \pi - \alpha/2}.$$

$$5.30. T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + 4m_2}{k}}; \text{ dây sẽ mất sức căng khi } A > \frac{g}{2\omega^2}.$$

$$5.31^*. \omega_0^2 = \frac{2g}{l} \frac{(2m_2/m_1) \sin^3 \varphi_0}{1 + \cos \varphi_0} = \frac{g}{l} \sqrt{3}.$$

Lời giải. Đối với các dao động nhỏ quanh vị trí cân bằng thì động năng của hệ bằng

$$K = \frac{m_1}{2} \left( 1 + \frac{2m_2}{m_1} \cos^2 \varphi_0 \right) \dot{\xi}^2,$$

còn thế năng

$$U = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} \Big|_{x_1^0} \xi^2 = \frac{1}{2} \frac{2m_2}{l/2} g \sin^3 \varphi_0 \xi^2.$$

Ở đây  $\xi = x_1 - x_1^0$  là li độ của vật ở giữa vị trí cân bằng. Cho  $\xi(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$  và  $U_{\max} = K_{\max}$ , ta tìm được đáp số.

$$5.32. T = \pi \sqrt{\frac{mL}{P}}.$$

$$5.33. T = 2\pi R \sqrt{\frac{2}{g(R-r)}}.$$

$$5.34. \text{ Có thể với điều kiện } v_0 \geq \sqrt{g\Delta l} \approx 1 \text{ m/s.}$$

$$5.35. T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{F}}.$$

$$5.36. T = \frac{2\pi}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{m}{k}}; x_{\max} \leq \frac{2mg}{k \sin 2\alpha}.$$

$$5.37. \omega = \sqrt{\frac{4kg}{m}}.$$

$$5.38. T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}.$$

5.39. Khối tâm của hệ chuyển động với vận tốc  $v = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{k}{m}}$ ; trong hệ quy chiếu khối tâm xảy ra dao động với chu kỳ  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}}$  và biên độ  $l = \frac{a}{\sqrt{2}}$ .

$$5.40. v_0 = \sqrt{8\mu g \left( l + \frac{mg\mu}{k} \right)}.$$

5.41. Sau va chạm, quả cầu thứ hai bật ngược lại.  $A = \frac{2m_2 v}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{m_1}{k}}$ .

$$5.42. t = \frac{2L}{v_0} + \pi \sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

$$5.43. t = \frac{2L}{v_0} + \pi \sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

$$5.44. K = \frac{(mv)^2}{2(M+m)}; E_n = \frac{Mmv^2}{2(M+m)}; A = v \sqrt{\frac{Mm}{k(M+m)}}.$$

$$5.45. x = \pi v \sqrt{\frac{3m}{k}}.$$

$$5.46. x = \frac{gt^2}{2} + \frac{mg}{2k} (1 - \cos \omega_0 t) = \left( \frac{9\pi^2}{4} + 1 \right) \frac{mg}{k}.$$

$$5.47. x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (l - l_0) (1 - \cos \omega t) + \frac{gt^2}{2};$$

$$x_2 = l - \frac{m_1}{m_1 + m_2} (l - l_0) (1 - \cos \omega t) + \frac{gt^2}{2}.$$

$$5.48. K = \frac{K_0}{4}; E_{dd} = \frac{K_0}{4}.$$

$$5.50. \frac{\Delta T}{T} \approx -\frac{1}{2} \frac{m}{M+m} \approx -5 \cdot 10^{-4}.$$

5.51. Khi cộng hưởng thì lực ma sát bằng ngoại lực  $F_{ms} = 10^{-3}$  N. Biên độ của vận tốc  $v_0 = A_{ch}\omega = 20\pi$  cm/s,  $k = \frac{F_{ms}}{v_0} = \frac{5}{\pi}$  g/s.

5.52. Khi cộng hưởng pha của vận tốc trùng với pha của ngoại lực và biên độ của vận tốc sẽ cực đại, vì thế công của ngoại lực trong một chu kỳ

$$A = \int_0^T f v dt \text{ cũng sẽ cực đại.}$$

$$5.53. A = \frac{f_0}{6k}.$$

5.54.  $\tau \approx \sqrt{\frac{2\pi m}{PR}} \approx 2 \cdot 10^{-2}$  s. Khi tính toán bằng số ta cho  $m = 0,5$  kg,

$$P = 10^5 \text{ Pa}, R = 10 \text{ cm}.$$

$$5.55. n < 2.$$

$$5.56. f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{\pi} \sqrt{\frac{6m}{M}}.$$

Hướng dẫn. Áp dụng biểu thức bất biến đẳng nhiệt của chuyển động đối với mỗi quả cầu  $q_P dx = \text{const}.$

## § 6. MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG.

### ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG

$$6.1. S = \frac{1}{2} \omega_0 r_0.$$

$$6.2. l_1 = l_2 \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}.$$

$$6.3. x = 0,85 \text{ m}.$$

$$6.4. x = 4h \left( \frac{m}{4m+M} \right)^2 = 0,167 \text{ m}.$$

$$6.5. \omega = \frac{6}{5} \frac{v_0}{l}.$$

$$6.6. \omega_x = \omega_0^2 + \frac{g}{2a}, \text{ trong đó } \omega_0 = \frac{\sqrt{3}v_0}{4a}.$$

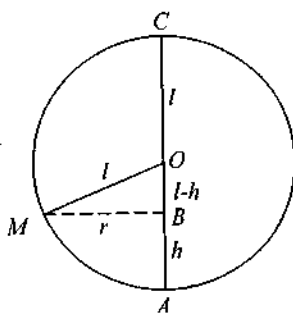
$$6.7*. v_{\max} = \sqrt{2gh_{\max}}, v_{\min} = \sqrt{2gh_{\min}}.$$

Lời giải. Theo định luật bảo toàn năng lượng

$$v^2 + 2gh = \text{const.}$$

Mômen của trọng lực tương ứng với điểm treo  $O$  không có thành phần thẳng đứng. Mômen của lực căng sợi dây bằng không. Vì thế khi người đó chuyển động thì thành phần thẳng đứng của mômen động lượng không đổi. Tại các vị trí, khi độ cao  $h$  cực đại hoặc cực tiểu thì vận tốc chuyển động của người đó nằm ngang, còn mômen động lượng bằng  $mvr$ , trong đó  $r$  là khoảng cách từ vị trí của người đến trục thẳng đứng mà người đó quay quanh. Điều đó nghĩa là tại các vị trí trên thì đại lượng  $vr$  có giá trị như nhau. Tại thời điểm, khi độ cao  $h$  cực đại hoặc cực tiểu, ta kẻ đường tròn có tâm là điểm treo  $O$  và đi qua vị trí của người đó (H.388). Theo hình học phẳng thì  $r^2 = AB \cdot BC$ , hay  $r^2 = (2l - h)h$ . Vì thế tại các vị trí, khi độ cao  $h$  cực đại hoặc cực tiểu thì

$$(2l - h)hv^2 = \text{const.}$$



Hình 388

Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng cho các vị trí này với chú ý rằng, độ cao cực đại  $h$  ứng với  $v$  cực tiểu và ngược lại. Ta thu được

$$v_{\max}^2 + 2gh_{\min} = v_{\min}^2 + 2gh_{\max},$$

$$(2l - h_{\min})h_{\min}v_{\max}^2 = (2l - h_{\max})h_{\max}v_{\min}^2.$$

Giải các phương trình trên, ta được

$$v_{\max}^2 = \frac{2gh_{\max}(2l - h_{\max})}{2l - (h_{\max} + h_{\min})}.$$

$$v_{\min}^2 = \frac{2gh_{\min}(2l - h_{\min})}{2l - (h_{\max} + h_{\min})}.$$

Nếu  $h_{\max}$  và  $h_{\min}$  nhỏ không đáng kể so với  $l$  thì

$$v_{\max}^2 = 2gh_{\max}, v_{\min}^2 = 2gh_{\min}.$$



$$6.8. v_0^2 = \frac{2gh^2}{h+h_0}; v^2 = \frac{2gh_0^2}{h+h_0}.$$

$$6.9. \omega = \frac{\text{const}}{r^2}; F = \frac{\text{const}}{r^3}; A = \frac{3}{2}m\omega_0^2 R_0^2.$$

$$6.10. \tau = \frac{\pi}{2\omega} + \frac{l}{2r\omega}.$$

$$6.11. \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}; S = \frac{\pi l}{\omega m}; \bar{P} = \bar{K}. \text{Độ cứng } k \text{ phải giảm } \sqrt{2} \text{ lần, khi đó tần số sẽ giảm hai lần.}$$

$$6.12. \Omega = \frac{25}{88} \frac{v_0}{R}; u = \frac{v_0}{4}.$$

$$6.13. \Omega = \frac{18}{19} \frac{u}{l}.$$

$$6.14. v_2 = \frac{\pi^2 + 3ar + \frac{\sqrt{3}}{2}a^2}{\pi^2 + 3ar} v_1.$$

## §7. LỰC HẤP DẪN

$$7.1. \text{Không thể, bởi vì } v_{2v1} = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} = 11,5 \text{ m/s} > v_{nh} = \sqrt{2g_{TD}h_{TD}} \approx 7 \text{ m/s},$$

trong đó  $g_{TD}$  và  $h_{TD}$  là gia tốc rơi tự do và độ cao có thể đạt được của một lần nhảy trên Trái Đất.

7.2. Việc giải bài toán trở thành việc tìm năng lượng toàn phần của tên lửa sau khi ngắt động cơ. Ta thấy rằng  $E = \frac{g_0 R_{TD}}{2} - \frac{g_0 R_{TD}}{1,23} < 0$ , tức là tên lửa không thoát khỏi giới hạn của Trái Đất; trong đó  $g_0$  là gia tốc rơi tự do trên bề mặt Trái Đất,  $R_{TD}$  là bán kính Trái Đất.

7.3. Xem kết quả bài trước.  $E = \frac{5}{4} g_0 R_{TD} > 0$  tức là tên lửa sẽ thoát khỏi Trái Đất.

7.4\*.  $U(R) = -\frac{mg_0 R_0^2}{R}$ , trong đó  $R_0$  là bán kính Trái Đất.

Lời giải. Lực hút tác dụng lên vật nằm cách tâm Trái Đất một khoảng  $r$  bằng  $f = \frac{mgR_0^2}{r^2}$ . Khi đó thế năng tại khoảng cách  $R$  sẽ là

$$U(R) = \int_{\infty}^R f \, dr = -\frac{mg_0 R_0^2}{R}.$$

7.5.  $r_{\min} = -\frac{\gamma M}{2v_0^2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma M}{2v_0^2}\right)^2 + l^2}.$

7.6.  $K = \frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2}$ , trong đó  $\gamma$  là hằng số hấp dẫn.

Hướng dẫn. Xét chuyển động tròn của hành tinh.

7.7\*. Lời giải. Khi khối lượng của hành tinh nhỏ không đáng kể thì Mặt Trời có thể coi như đứng yên và ta có thể viết  $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ . Nếu tính đến chuyển động của Mặt Trời thì biểu thức này có dạng  $\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ , trong đó  $\mu = \frac{Mm}{M+m}$  là khối lượng quy chuẩn (rút gọn). Ta viết biểu thức này dưới dạng  $m\ddot{\vec{r}} = \frac{M+m}{M}\vec{F}$ , từ đây dễ dàng thấy rằng, việc tính đến chuyển động của Mặt Trời về hình thức tương đương với việc tăng hằng số hấp dẫn lên  $\frac{M+m}{M}$  lần. Vì vậy

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{M+m}{M} \gamma \frac{M}{4\pi^2} \text{ hoặc } \frac{a^3}{T^2(M+m)} = \frac{\gamma}{4\pi^2}.$$

7.8.  $\Delta T = T \frac{\Delta I_{\text{TD}}}{I_{\text{TD}}} = 5T \frac{\Delta R_{\text{TD}}}{R_{\text{TD}}} = 2,7 \text{ s}$ , trong đó  $T$  là độ dài ngày của Trái Đất,  $R_{\text{TD}}$  là bán kính Trái Đất,  $I_{\text{TD}}$  là mômen quán tính của Trái Đất.

7.9.  $T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\gamma m}} \approx 10^{-3} \text{ s}.$

7.10. Sẽ giảm  $\sqrt{2}$  lần.

$$7.11. R = R_0 \sqrt[3]{\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 \frac{M_1 + M_2}{M_0}} = 2R_0 = 3.10^8 \text{ km.}$$

$$7.12. M_2 \approx M_1 = M; R^3 = \frac{\gamma M T^2}{2\pi^2}; R \approx 1.1.10^8 \text{ km.}$$

$$7.13. r_2 = \left( \frac{2\gamma M}{2\gamma M - r_1 v_1^2} - 1 \right) r_1; v_2 = \frac{r_1}{r_2} v_1. \text{ Sao sẽ phân rã nếu } v_1 \geq \sqrt{\frac{2\gamma M}{r_1}}.$$

$$7.14. 1) r_{\min} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{b}},$$

$$2) r_{cb} = \sqrt{\frac{a}{b}};$$

$$3) F(r_0) = -\frac{3}{4}b, F(r_{\min}) = 3b > 0,$$

$$4) v_{lk}^2 = \frac{\sqrt{ab}}{r} \left( \frac{r}{r_{cb}} - \frac{r_{cb}}{r} \right) - \text{có ý nghĩa khi } r > r_{cb}.$$

$$7.15. \Delta R = \frac{2}{3} \frac{M_{\text{TD}} R_{\text{TD}}^2}{\mu R_{\text{MT}}} \frac{\omega_{\text{TD}}}{\omega_{\text{MT}}} \frac{\Delta T}{T_{\text{TD}}} \approx 3 \text{ cm, trong đó } \mu \text{ là khối lượng rút gọn của hệ Trái Đất - Mặt Trăng, } \omega_{\text{TD}} \text{ và } \omega_{\text{MT}} \text{ là vận tốc góc của Trái Đất và Mặt Trăng, } T_{\text{TD}} \text{ là độ dài ngày của Trái Đất.}$$

7.16. Theo đường hyperbol.

7.17. Cả hai mảnh vỡ sẽ chuyển động theo đường parabol.

7.18\*. *Lời giải.* Tại điểm cực cận  $P$  và điểm cực viễn  $A$  (H. 389), vận tốc hướng tâm của hành tinh bằng không. Vì thế mômen động lượng của hành tinh tại các điểm này có thể viết dưới dạng  $mvr$ . Chú ý đến các phương trình bảo toàn động lượng và năng lượng, ta được phương trình đối với các điểm này:

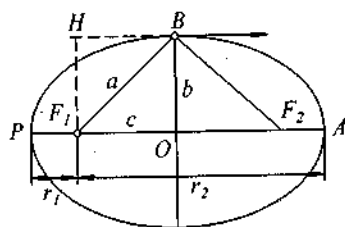
$$r^2 + \gamma \frac{Mm}{E} r - \frac{L^2}{2mE} = 0.$$

Khi  $E < 0$  thì phương trình bậc hai này sẽ có hai nghiệm thực dương  $r_1$  và  $r_2$ . Một nghiệm tương ứng với điểm  $P$ , một nghiệm tương ứng với điểm  $A$ .

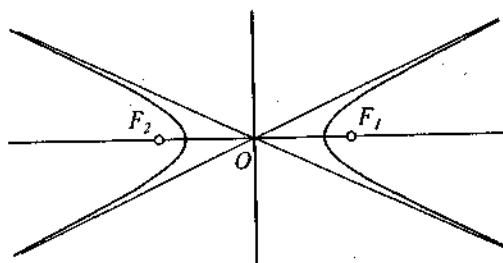
Tổng các nghiệm  $r_1 + r_2$  chính là độ dài trục lớn của elip:

$$2a = r_1 + r_2 = -\gamma \frac{Mm}{E} = -\gamma \frac{M}{\varepsilon},$$

trong đó  $\varepsilon = E/m$  là năng lượng toàn phần trên một đơn vị khối lượng của hành tinh. Vì đối với chuyển động theo elip  $\varepsilon < 0$ , nên biểu thức nhận được ở trên sẽ luôn dương – đó cũng là điều cần có.



Hình 389



Hình 390

**7.19\*. Lời giải.** Giả sử sao chổi chuyển động theo nhánh hyperbol bên phải (H.390). Tại đỉnh của hyperbol sẽ thỏa mãn phương trình sau

$$r^2 + \gamma \frac{Mm}{E} r - \frac{L^2}{2mE} = 0.$$

Ta tưởng tượng rằng có một hạt có cùng khối lượng  $m$  và năng lượng  $E$  chuyển động theo nhánh còn lại của hyperbol, khi đó hạt này sẽ chịu tác dụng của lực đẩy từ tiêu điểm  $F_1$  với độ lớn bằng độ lớn của lực hút tác dụng lên sao chổi. Đối với hạt đó thì tại đỉnh của hyperbol ta có

$$r^2 - \gamma \frac{Mm}{E} r - \frac{L^2}{2mE} = 0.$$

Hiệu các nghiệm dương của hai phương trình trên cho ta độ dài cần tìm

$$2a = \gamma \frac{Mm}{E} = \gamma \frac{M}{\varepsilon}$$

trong đó  $\varepsilon = E/m$  là năng lượng toàn phần trên một đơn vị khối lượng của hành tinh.

**7.20\*. Lời giải.** Nếu  $\vec{p}$  là động lượng, còn  $\vec{r}$  là bán kính vectơ của hành tinh so với Mặt Trời thì

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}\vec{r}) = (\vec{F}\vec{r}) + (\vec{p}\vec{v}) = -\gamma \frac{Mm}{r} + 2K = U + 2K = E + K.$$

Đối với chuyển động tuần hoàn thì giá trị trung bình theo thời gian  $\frac{d}{dt}(\vec{p}\vec{r})$

hiển nhiên bằng không, từ đây suy ra kết quả:  $\overline{E} + \overline{K} = 0$ .

7.22.  $v = v_{II} \sqrt{1 - R/(2a)} = 8,1 \text{ km/s}$ , trong đó  $v_{II} = \sqrt{2gR} = 11,2 \text{ km/s}$  là vận tốc vũ trụ cấp hai,  $2a$  là chiều dài trục lớn của quỹ đạo elip.

$$7.23. \frac{\Delta E}{E} = -\frac{2}{3} \frac{\Delta T}{T} \approx -0,02 \quad (E < 0).$$

7.24.  $M = \frac{4\pi^2}{\gamma} \frac{a^3}{T^2} \approx 6 \cdot 10^{27} \text{ g}$ , trong đó  $a$  là chiều dài bán trục lớn của quỹ đạo elip của vệ tinh.

7.25.  $\frac{M_2}{M_1} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 \approx 0,11$ , trong đó  $R_1 = R + h = 6625 \text{ km}$  là khoảng cách trung bình từ tàu - vệ tinh đến tâm Trái Đất.

$$7.26. R = \sqrt[3]{\frac{g}{\omega^2 R_0}} \quad R_0 \approx 6,61 R_0, \text{ trong } \omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \text{ rad/s}.$$

Hướng dẫn. Gia tốc hướng tâm của vệ tinh  $\omega^2 R$  phải bằng gia tốc  $\frac{gR_0^2}{R^2}$  mà vệ tinh nhận được do lực hấp dẫn.

$$7.27. 2a = \frac{2gR_{TD}^2}{v_1 v_2} \approx 14400 \text{ km}.$$

$$7.28. 2a = \frac{2gR_{TD}^2}{v^2} \approx 14300 \text{ km}.$$

$$7.29*. \text{ Quả thứ nhất. } \frac{R_1}{R_2} = \frac{2gR_0}{v_0^2}.$$

Lời giải. Đối với quả đạn thứ nhất, theo định luật bảo toàn năng lượng ta có

$$\frac{v_0^2}{2} - gR_0 = -g \frac{R_0^2}{R_1} \text{ hoặc } R_1 = \frac{2gR_0^2}{2gR_0 - v_0^2},$$

vì vận tốc của nó tại điểm cao nhất bằng không. Đối với quả đạn thứ hai cũng theo định luật bảo toàn năng lượng

$$\frac{v_0^2}{2} - gR_0 = \frac{v_1^2}{2} - g \frac{R_0^2}{R_2},$$

trong đó  $v_1$  là vận tốc tại điểm xa nhất; ngoài ra theo định luật bảo toàn mômen động lượng  $v_0 R_0 = v_1 R_1$ . Từ đây suy ra

$$R_2 = \frac{v_0^2 R_0}{2gR_0 - v_0^2}.$$

$$7.30. R_1 = \frac{R_0}{\mu_1 - 1} \approx 6,8R_0; R_2 = \frac{R_0}{\mu_2 - 1} \approx 2,52R_0,$$

trong đó  $\mu_{1,2} = \frac{2gR_0}{(v_0 \pm \omega R_0)^2}$ ,  $R_0$  là bán kính,  $\omega$  là vận tốc góc của Trái Đất.

Hướng dẫn. Xem lời giải bài trước.

$$7.31. x = \frac{2R_{TD}v_0^2}{2gR_{TD} - v_0^2} \approx 5.10^4 \text{ km.}$$

7.32\*. *Lời giải.* Vì năng lượng của tàu vũ trụ chỉ phụ thuộc vào độ dài của trục lớn quỹ đạo  $2a$  của nó nên quá trình chuyển sang quỹ đạo tròn diễn ra tại khoảng cách  $a$ , tức là tại giao điểm của elip với trục nhỏ của nó. Phải quay hướng vận tốc của tàu sao cho nó vuông góc với đường nối tàu với tâm Trái Đất.

7.33. Tăng  $\sqrt{2}$  lần.

$$7.34. v_2 = v_1 \frac{h}{l} = 54,6 \text{ km/s.}$$

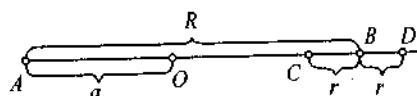
$$7.35. \frac{M_D + M_H}{M_{TD}} = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{R^3}{gR_{TD}^2} = 0,0024.$$

7.36\*. *Lời giải.* Giả sử tâm khối của hai vật  $A$  và  $B$  nằm tại điểm  $O$  (H. 391). Khoảng cách giữa hai vật  $A$  và  $B$  sẽ được giữ nguyên chỉ khi chúng quay với vận tốc

$$\text{góc } \omega = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\gamma(M_A + M_B)}{R}} \text{ quanh điểm}$$

$O$ . Điều kiện cân bằng của hai vật  $C$  và  $D$  trong hệ tọa độ quay (gắn với hai vật  $A$  và  $B$ ) có thể viết như sau:

$$M_C \left[ -\frac{\gamma M_A}{(R-r)^2} + \omega^2 (R-a-r) + \frac{\gamma M_B}{r^2} \right] + F_C = 0,$$



Hình 391

$$M_D \left[ -\frac{\gamma M_A}{(R+r)^2} + \omega^2 (R-a+r) - \frac{\gamma M_B}{r^2} \right] + F_D = 0,$$

trong đó chiều dương được chọn theo chiều từ  $A$  đến  $B$ ,  $F_C$  và  $F_D$  là các lực cần tìm,  $\gamma$  là hằng số hấp dẫn. Khử  $\omega$  và chú ý đến biểu thức  $a\omega^2 = \frac{\gamma M_B}{R^2}$ , đồng thời bỏ qua các số hạng bậc cao của  $r/R$ , ta thu được

$$F_C = \gamma M_C \left[ -\frac{M_B}{r^2} + \frac{r}{R^3} (3M_A + M_B) \right],$$

$$F_D = \gamma M_D \left[ \frac{M_B}{r^2} - \frac{r}{R^3} (3M_A + M_B) \right],$$

tức là khi  $M_C = M_D$  thì cả hai lực đều nhỏ hơn lực mà vật  $B$  hút chúng cùng một lượng.

$$7.37. \Delta v = \frac{R}{2a} \sqrt{\frac{g}{a}} \Delta a = -42 \text{ m/s}.$$

$$7.38. v = \frac{v_0}{2} (1 + \sqrt{5}) \approx 1,62v_0.$$

$$7.39. R_{\max} = \frac{\alpha^2 R}{2 - \alpha^2}; T_2 = \frac{T_1}{(2 - \alpha^2)^{3/2}} \quad (\alpha^2 \leq 2).$$

7.40\*. Cự ly nhỏ nhất  $\rho_1 = 1,25R_{\text{TD}}$ , cự ly lớn nhất  $\rho_2 = 2,1R_{\text{TD}}$ .

Lời giải. Năng lượng của vệ tinh trong hệ tọa độ cực bằng:

$$E = \frac{m}{2} \left[ \dot{\rho}^2 + (\rho^2 \dot{\phi})^2 \right] - \frac{C}{\rho} \quad (C = \gamma m M_{\text{TD}}).$$

Mômen động lượng của các lực đối với tâm bằng:  $L = m\rho(\rho\dot{\phi})$ . Khử  $\dot{\phi}$  từ phương trình này và chú ý rằng, tại các điểm xa nhất và gần nhất của vệ tinh so với tâm Trái Đất thì  $\dot{\rho} = 0$ , ta có thể viết phương trình năng lượng dưới dạng sau

$$\rho^2 - \frac{\gamma}{|E|} \rho + \frac{L^2}{2m|E|} = 0.$$

Trong phương trình trên ta đã tính rằng năng lượng toàn phần  $E$  của vệ tinh trên quỹ đạo elip luôn âm. Hai nghiệm của phương trình này chính là

khoảng cách đến điểm cực cận  $\rho_1$  và đến điểm cực viễn  $\rho_2$  của quỹ đạo elip. Theo định lý Viét

$$\rho_1 + \rho_2 = 2a = \frac{C}{|E|}, \quad \rho_1 \rho_2 = \frac{L^2}{2m|E|},$$

trong đó  $a$  là bán trục chính của quỹ đạo elip. Sử dụng phương trình của elip trong hệ tọa độ cực viết cho điểm cực cận và điểm cực viễn  $\rho_{1,2} = \rho/(1 \pm \varepsilon)$ , ta có thể biểu diễn tất cả các tham số hình học của quỹ đạo thông qua các hằng số cơ học của chuyển động.

Trong bài này năng lượng toàn phần của vệ tinh

$$E = -\frac{C}{R} + \frac{mv_0^2}{2} = -0,3 \frac{C}{R_{TD}},$$

trong đó  $v_0^2 = v_I^2 = \frac{C}{mR_{TD}}$  là bình phương vận tốc vũ trụ cấp một. Trục lớn của

elip  $2a = \frac{C}{|E|} = \rho_1 + \rho_2$ , từ đây suy ra  $\rho_1 = 1,25R_{TD}$ ,  $\rho_2 = \frac{C}{|E|} - \rho_1 \approx 2,1R_{TD}$ .

$$7.41^*. v_A = \frac{\sqrt{1,5}}{3} v_0.$$

Lời giải. Đối với quỹ đạo tròn  $v_0^2 = \frac{C}{mR_0}$ ,  $R_0 = \rho_1$  là bán kính quỹ đạo tròn,  $C = \gamma m M_{TD}$ ,  $m$  là khối lượng vệ tinh,  $\gamma$  là hằng số hấp dẫn. Đối với quỹ đạo elip:  $v_1 = v_0 \sqrt{1,5} = v_P$ . Năng lượng toàn phần của vệ tinh

$$E = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{C}{R_0} = \left( \frac{1,5}{2} - 1 \right) \frac{C}{R_0} = -\frac{1}{4} \frac{C}{R_0}.$$

Trục lớn của quỹ đạo  $2a = \rho_1 + \rho_2 = \frac{C}{|E|} = 4R_0 = 4\rho_1$ , từ đây suy ra

$$\rho_2 = 4\rho_1 - \rho_1 = 3\rho_1 = 3R_0.$$

Đối với hai đầu trục lớn của quỹ đạo thì đẳng thức  $L = m\rho_1 v_P = m\rho_2 v_A$  luôn thỏa mãn ( $L$  là mômen động lượng), suy ra

$$v_A = v_P \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\sqrt{1,5}}{3} v_0 = \frac{v_0}{\sqrt{6}}.$$

$$7.42^*. \frac{T_e}{T_t} = 2\sqrt{2} \approx 2,82.$$



Lời giải. Biểu diễn mômen động lượng qua vận tốc để quét của quỹ đạo elip

$L = 2m \frac{ds}{dt}$ , khi đó ta tính được chu kỳ

$$T_e = \frac{2m}{L} S = 2\pi \frac{m}{L} ab.$$

Vì  $b^2 = a \frac{L^2}{mC}$ , nên

$$T_e^2 = (2\pi)^2 \frac{m}{C} a^3 \quad (C = \gamma m M_{\text{TĐ}}).$$

Đối với quỹ đạo tròn

$$T_t^2 = (2\pi)^2 \frac{m}{C} R^3.$$

Từ đây ta nhận được

$$\left(\frac{T_e}{T_t}\right)^2 = \frac{a^3}{R^3} = \frac{2^3 R_{\text{TĐ}}^3}{R_{\text{TĐ}}^3} = 2^3, \quad \frac{T_e}{T_t} = 2\sqrt{2}.$$

7.43\*.  $v_\rho = \sqrt{\frac{2gR_{\text{TĐ}}}{3}} = \frac{v_{\text{II}}}{\sqrt{3}}$ ,  $v_{\text{II}}$  là vận tốc vũ trụ cấp II.

Lời giải. Điều kiện để vệ tinh thoát khỏi sức hút của Trái Đất là  $\frac{mv^2}{2} - \frac{C}{R} = E = 0$ , trong đó  $C = \gamma m M_{\text{TĐ}}$ ,  $E$  là năng lượng toàn phần của

vệ tinh, suy ra  $v^2 = v_\rho^2 + v_\phi^2 = \frac{2C}{mR}$ . Trên quỹ đạo tròn  $v_\phi^2 = \frac{C}{mR}$ , vì vậy

$$v_\rho^2 = \frac{2C}{mR} - \frac{C}{mR} = \frac{C}{mR} = \frac{2}{3} gR_{\text{TĐ}} = \frac{v_{\text{II}}^2}{3}.$$

7.44\*.  $\rho_{\min} = \frac{mv_\phi^2 R^2}{2C} = \frac{R}{2} = R_{\text{TĐ}}$ ,  $v = \frac{R}{\rho_{\min}} v_\phi = \sqrt{\frac{2C}{mR_{\text{TĐ}}}} = v_{\text{II}}$ ,  $v_{\text{II}}$  là vận tốc vũ trụ cấp II.

Lời giải. Mômen động lượng của vệ tinh khối lượng  $m$  trên quỹ đạo mới được xác định từ điều kiện:

$$L = mv_\phi R = mv_\phi \rho_{\min} = \text{const.}$$

Bình phương vận tốc chuyển động của vệ tinh trên quỹ đạo tròn

$$v_{\varphi}^2 = \frac{C}{mR}, (C = \gamma m M_{\text{TD}}).$$

Năng lượng toàn phần của vệ tinh trên quỹ đạo mới

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{C}{\rho_{\min}} = \frac{m}{2}(v_{\varphi}^2 + v_{\rho}^2) - \frac{C}{R} = 0.$$

Từ đây suy ra đáp số.

7.45\*. Vận tốc phóng từ Trái Đất  $v_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} v_I \approx 1,16 v_I$ , trong đó  $v_I$  là vận tốc vũ trụ cấp I. Phân bố sung vận tốc tại điểm cực viễn  $\Delta v = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) v_I \approx 0,13 v_I$ .

Lời giải. (xem bài 7.40). Đối với quỹ đạo elip trục lớn bằng

$$2a = 2R_{\text{TD}} + R_{\text{TD}} = 3R_{\text{TD}} = \frac{C}{|E|}, (C = \gamma m M_{\text{TD}}).$$

Năng lượng của vệ tinh

$$|E| = \frac{C}{3R_{\text{TD}}} = \frac{C}{R_{\text{TD}}} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{C}{2R_{\text{TD}}} - \frac{mv_2^2}{2},$$

Từ đây suy ra vận tốc phóng từ Trái Đất  $v_1^2 = \frac{4}{3} \frac{C}{mR_{\text{TD}}} = \frac{4}{3} v_I^2$ , vận tốc tại

điểm cực viễn  $v_2^2 = \frac{1}{3} \frac{C}{mR_{\text{TD}}} = \frac{1}{3} v_I^2$ , vận tốc trên quỹ đạo tròn  $v_k^2 = \frac{1}{2} v_I^2$ ,

do đó phân bố sung vận tốc tại điểm cực viễn  $\Delta v = v_k - v_2 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) v_I$ .

$$7.46. \frac{m_t}{m_{tr}} \leq \frac{2}{5} (\sqrt{6} - 1).$$

$$7.47. v_{\min}^2 = \frac{g}{R_0} (R_0 - R_{\text{TD}})^2.$$

$$7.48. 2\sqrt{gR} \left( \sqrt{\frac{5}{3}} - 2\sqrt{\frac{2}{3}} \right) < u < 2\sqrt{gR} \left( \sqrt{\frac{5}{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \right);$$

$$2\sqrt{gR} \left( \sqrt{\frac{5}{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \right) < u < 2\sqrt{gR} \left( \sqrt{\frac{5}{3}} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} \right).$$

$$7.49. m_1 = \sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} m = 8,66 \text{ tấn}; m_2 = \left(1 - \sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}}\right) m = 1,34 \text{ tấn}.$$

$$7.50. v_{\min} = (\sqrt{2} - 1) v_I \sqrt{\frac{R_{\text{TĐ}}}{a}} \approx 1,6 \text{ km/s, trong đó } v_I \text{ là vận tốc vũ trụ cấp } I.$$

$$7.51. T_2 = T_1 \left[ 2 \left( \frac{T}{T_1} \right)^{2/3} - 1 \right]^{3/2} = 2,78 \text{ năm}.$$

$$7.52. \Delta v = v_t - v_k = V_0 \left[ \sqrt{\frac{2}{k(k+1)}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right] \approx 2,71 \text{ km/s}.$$

$$7.53. \Delta v = v_t - v_{SH} = V_0 \left[ \sqrt{\frac{2}{k(k+1)}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right] \approx -2,65 \text{ km/s}.$$

$$7.54. R_0 = \frac{2R_{\text{TĐ}} v_{\text{Ik}}}{\sqrt{2\alpha W/m}} = 3,4 \cdot 10^5 \text{ km, trong } v_{\text{Ik}} \text{ là vận tốc vũ trụ cấp } I.$$

$$7.55. \Delta v \approx 1,2\gamma \frac{M}{R}.$$

7.56. Ban đầu cần giảm vận tốc của vệ tinh chậm  $B$  một lượng  $\Delta v \ll v$ , kết quả là nó sẽ chuyển sang quỹ đạo elip với chu kỳ nhỏ hơn. Sau đó sau  $n$  vòng khi vệ tinh đã vượt qua vị trí ban đầu của nó trên quỹ đạo tròn một khoảng cần thiết thì ta tiếp tục tăng vận tốc vệ tinh một lượng  $\Delta v$ . Sau đó vệ tinh sẽ quay trở lại quỹ đạo cũ với vận tốc ban đầu, tức là vận tốc tương đối của vệ tinh lại bằng không.

$$\Delta v = -\frac{L}{3nT},$$

trong đó  $L = 45 \text{ km}$ ;  $T = 1,5 \text{ h}$  là chu kỳ quay của các vệ tinh. Khi  $n = 1$  thì  $\Delta v > 8 \text{ km/h}$ , cực tiểu khi  $n = 2$ ,  $\Delta v \approx 5 \text{ km/h}$ .

7.57. Nếu  $v_1$  là vận tốc của tàu ứng với Mặt Trời tại điểm nằm trên quỹ đạo sao Mộc,  $V_M$  là vận tốc sao Mộc,

$$v_1 = V_M \sqrt{\frac{2}{R_M / R_{\text{TĐ}} + 1}}.$$

Sau khi bay quanh sao Mộc, vận tốc của tàu so với Mặt Trời  $v = 2V_M - v_1 \approx 1,42V_M > \sqrt{2}V_M$ . Do vậy tàu có thể bay ra xa vô cực (người ta đã phóng tàu "Voyage" theo cách này).

7.58.  $t_r \approx \frac{T}{4\sqrt{2}}$ ; trong hệ Trái Đất – Mặt Trời  $t_r = 2$  tháng.

7.59.  $t \approx \frac{T}{4\sqrt{2}}$ .

7.60.  $\Delta v = v_{\text{TD}} \left( \sqrt{\frac{2R_{\text{SH}}}{R_{\text{TD}} + R_{\text{SH}}}} - 1 \right) \approx 3 \text{ km/s}$ , trong đó  $v_{\text{TD}}$  là vận tốc của Trái Đất trên quỹ đạo.

7.61.  $\rho = \frac{\Delta R}{H} \frac{mH}{4\pi^2 r^2 (R_0 + H)} \approx 2,2 \cdot 10^{-11} \text{ kg/m}^3$ .

7.62\*. Thời gian hạ cánh  $\tau = \frac{3}{2} \pi \sqrt{\frac{3}{2} \frac{R_{\text{TD}}}{g}}$ .

Lời giải. Trục lớn của quỹ đạo hạ cánh  $2a = R_{\text{TD}} + 2R_{\text{TD}} = 3R_{\text{TD}}$ . Thời gian quay theo quỹ đạo elip

$$T_e = 2\pi \sqrt{\frac{m}{C}} a^3 = 2\tau \quad (C = \gamma m M_{\text{TD}}).$$

Thời gian hạ cánh

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{m}{\gamma m M_{\text{TD}}}} \left( \frac{3}{2} \right)^3 R_{\text{TD}}^3 \approx \frac{3}{2} \pi \sqrt{\frac{3}{2} \frac{R_{\text{TD}}^3}{g R_{\text{TD}}^2}} = \frac{3}{2} \pi \sqrt{\frac{3}{2} \frac{R_{\text{TD}}}{g}}.$$

7.63.  $\Delta v \approx 0,01 \sqrt{g R_{\text{TD}}} \approx 79 \text{ m/s}$ .

7.64.  $\Delta M \approx 450 \text{ kg}$ .

7.65.  $v_{\infty} = R \sqrt{\frac{2gR}{l^2 - R^2}}$ . Khi  $l = 2R$ ,  $v_{\infty} = \sqrt{\frac{2}{3}} gR \approx 6,5 \text{ km/s}$ .

7.66.  $\frac{m_0 - m}{m_0} = (\sqrt{2} - 1) \frac{\sqrt{gR}}{u} \approx 0,17$ .

7.67. Cả đám rơi xuống Trái Đất.

7.68.  $N = \pi R_{\text{TD}}^2 h m \left( 1 + 2 \frac{g R_{\text{TD}}}{v^2} \right) = 7,75 \cdot 10^{10}$ .

7.69.  $\Delta M = 2\pi r^2 h \rho = 2,55 \cdot 10^{19} \text{ kg}$ .

$$7.70. v^2 = \left(\frac{m_0}{m}\right)^2 g_0 h \frac{\frac{h}{R} - 2\frac{m}{m_0} \left(2 + \frac{m}{m_0}\right)}{1 + \frac{h}{R}}; v \approx 17,1 \text{ km/s.}$$

$$7.71. m = m_0 \left( \frac{4R}{h} + 1 \pm \sqrt{\left( \frac{4R}{h} + 1 \right)^2 - 1} \right) \approx 6 \text{ kg}; (m \approx m_0 \frac{h}{8R}).$$

$$7.72. R_{\max} - R_{\min} \approx \frac{2mv}{M} \sqrt{\frac{R_{\text{TD}}}{g}} = 256 \text{ m.}$$

$$7.73. R_{\max} - R_{\min} = \frac{4mvR_{\text{TD}}}{M\sqrt{gR_{\text{TD}}} + 2mv} \approx 256 \text{ m.}$$

$$7.74. \frac{b}{a} \approx 1 - 2\left(\frac{\Delta v}{v_0}\right)^2 \approx 0,98.$$

$$7.75. \frac{b}{a} = \cos \delta.$$

$$7.76. R_V = 4,67 R_{\text{TD}}.$$

$$7.77. m_{\min} = M_0 \left[ \exp\left(\frac{v_0 + g_{\text{MT}} \tau}{u}\right) - 1 \right], \text{ trong đó } v_0 = \sqrt{2g_{\text{MT}} R_{\text{MT}}}, g_{\text{MT}}$$

là gia tốc rơi tự do trên bề mặt Mặt Trăng.

$$7.78. \frac{l_{\max}}{l_{\min}} = \frac{1 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{5}{3}.$$

7.79. Phương án I: trong trường hợp này đơn giản chỉ cần “dùng” thiết bị vũ trụ trên quỹ đạo, sau đó nó tự rơi tự do xuống Mặt Trời  $\left(\frac{m}{m_t}\right)_1 \approx 22000$ ;

thời gian rơi  $t_1 \approx \frac{1}{4\sqrt{2}}$  năm.

Phương án II:  $\left(\frac{m}{m_t}\right)_2 \approx e^{5,9} \approx 400$ ; thời gian rơi  $t_2^r = 5,6$  năm, thời gian

bay từ Trái Đất đến điểm cực viễn  $t_2^v = 5,6$  năm,  $t_2 = 12,1$  năm. Trong

trường hợp này sẽ lợi 55 lần về năng lượng nhưng thiệt nhiều về thời gian.

Trong trường hợp tối hạn (khi thời gian bay vô tận)  $\frac{m}{m_i} \approx 63$ .

7.80.  $\frac{\delta T}{T} = \frac{2\delta r}{r} \frac{\omega_1}{\omega_2 \sin \theta} \approx 18,5$  s, trong đó  $\omega_1$  là vận tốc góc của Trái Đất quanh Mặt Trời,  $\omega_2$  là vận tốc góc của Trái Đất quanh trục của nó.

7.81.  $\varphi = \pi \left[ 1 - \left( \frac{T_{\text{TĐ}}}{T_{\text{SH}}} \right) \left( \frac{R_{\text{TĐ}}}{a} \right)^{3/2} \right]$ , trong đó  $T_{\text{TĐ}}$  và  $T_{\text{SH}}$  là chu kỳ quay

của Trái Đất và sao Hoả quanh Mặt Trời,  $a = \frac{R_{\text{TĐ}} + R_{\text{SH}}}{2}$  là bán trục lớn

của elip chuyển.  $\varphi = 0,77 \text{ rad} = 44,3^\circ$ .

7.82.  $\varphi = \frac{\pi}{2} \left( \frac{2T}{T_{\text{TĐ}}} - 1 \right) = 0,66 \text{ rad} = 37,6^\circ$ , trong đó  $T$  là thời gian bay

$$T = \frac{T_{\text{TĐ}}}{2} \left( \frac{R_{\text{SH}} + R_{\text{TĐ}}}{2R_{\text{TĐ}}} \right)^{3/2}.$$

$$7.83. \frac{M_{\text{TH}}}{M_{\text{MT}}} = \frac{\alpha_{\text{TH}} R_{\text{TH}}}{\alpha_{\text{MT}} R_{\text{MT}}} \approx 10^{13}.$$

7.84. Chuyển động của sao Thủy trên bầu trời có thể coi xấp xỉ là dao động điều hoà với biên độ góc  $A = 22,8^\circ$ . Tần số góc của các dao động này là

$$\omega = \frac{2\pi}{115} \text{ ngày}^{-1}. \text{ Thời gian cần tìm } \tau = \frac{0,5^\circ}{A\omega} \approx 9,7 \text{ h}.$$

$$7.85. h_{1\min} = 3R; h_{1\max} = \infty; h_{2\min} = 0; h_{2\max} = R.$$

$$7.86. \text{ Sau nửa chu kỳ dao động } t = \frac{\pi}{\omega}, \text{ trong đó } \omega = \sqrt{k \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2}}, \text{ cần}$$

tăng lực kéo đến  $2F$ . Khi đó các vật khối lượng  $M_1$  và  $M_2$  xích lại gần

$$\text{nhau một khoảng } \Delta x = \frac{2FM_2}{k(M_1 + M_2)}.$$

7.87. Khi cân bằng bền thì góc  $\theta_1$  giữa dây cáp và đường kéo dài của bán kính hành tinh bằng không, còn chu kỳ dao động nhỏ quanh nó

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{3}} \approx 0,9 \text{ h}. \text{ Khi } \theta = \pi/2 \text{ cân bằng là không bền.}$$

$$7.88. F \approx \frac{3mgl}{8R_{\text{TD}}} \approx 6.10^{-3} \text{ N.}$$

$$7.89. T = 2\pi \sqrt{\frac{(R^2 - r^2)^3}{2\gamma MR(3R^2 + r^2)}} \approx 1 \text{ giờ } 33 \text{ phút.}$$

$$7.90. R = \frac{16}{25} \left( \frac{r_2^{5/2} - r_1^{5/2}}{r_2^2 - r_1^2} \right)^2.$$

$$7.91. \frac{\Delta T}{T} = 3 \frac{M_{10} - M_{20}}{M_{10} M_{20}} \Delta M_1 = 3 \frac{\Delta m}{M_0} = 3.10^{-2}; \quad \frac{\Delta a}{a} = \frac{2}{3} \frac{\Delta T}{T} = 2.10^{-2}.$$

Quá trình chuyển diễn ra từ sao nhẹ sang sao nặng vì  $\frac{\Delta a}{a} > 0$ .

7.92. Do tính đối xứng nên các điểm này luôn nằm trên các đỉnh của một hình vuông nào đó. Quỹ đạo của chúng là các elip giống nhau với tiêu điểm nằm ở tâm đường tròn ngoại tiếp. Tham số chung của chuyển động này là

chu kỳ quay  $T = \frac{2\pi(R+r)^{3/2}}{[2(1+2\sqrt{2})\gamma M]^{1/2}}$ . Trục chính của các elip  $R+r$ , trục nhỏ  $2\sqrt{Rr}$ .

$$7.93. v_1 - v_2 = \sqrt{v_0^2 + \frac{3\gamma(M+m)}{R}}.$$

$$7.94. W_T = \frac{3}{5} \frac{\gamma m^2 A_s^{5/3}}{R_0} \approx 0,9.10^{46} \text{ J, trong đó } R_0 = 1,3.10^{-13} \text{ cm, } m \text{ là khối lượng neutron.}$$

$$7.95*. A \approx 6,12.10^7 \text{ N.m.}$$

*Lời giải.* Công nhỏ nhất để di chuyển vật khối lượng  $m$  từ Trái Đất lên Mặt Trăng có thể biểu diễn như sau:  $A \approx mR_{\text{TD}}g_{\text{TD}} - mR_{\text{MT}}g_{\text{MT}}$ , trong đó  $R_{\text{TD}}$  và  $R_{\text{MT}}$  là bán kính Trái Đất và bán kính Mặt Trăng,  $g_{\text{TD}}$  và  $g_{\text{MT}}$  tương ứng là gia tốc rơi tự do trên bề mặt Trái Đất và Mặt Trăng gây ra bởi lực hút của chính bản thân chúng.

$$7.96*. v_{\min} \approx 16,7 \text{ km/s, } v_{\max} \approx 72,7 \text{ km/s.}$$

*Lời giải.* Ta ký hiệu tất cả các vận tốc so với Trái Đất bằng các chữ cái thường, còn so với Mặt Trời bằng các chữ cái hoa. Chia chuyển động của tên lửa thành hai giai đoạn. Ở giai đoạn thứ nhất ta sẽ xét chuyển động trong hệ

quy chiếu trong đó Trái Đất đứng yên và bỏ qua hoàn toàn tính không đồng nhất của trường hấp dẫn của Mặt Trời. Khi đó lực hút của Mặt Trời sẽ triệt tiêu hoàn toàn bởi lực quán tính do chuyển động có gia tốc của tâm Trái Đất gây ra. Coi khối lượng Trái Đất  $M$  là vô cùng lớn so với khối lượng tàu vũ trụ  $m$ , ta viết định luật bảo toàn dưới dạng

$$\frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{Mm}{r} = \frac{mv_\infty^2}{2},$$

trong đó  $v_\infty$  là vận tốc của tên lửa tại thời điểm nó gần như thoát khỏi vùng

ảnh hưởng của trọng trường Trái Đất. Ký hiệu vận tốc tròn  $v_t = \frac{\gamma M}{r}$ , ta thu

được  $v_\infty^2 = v^2 - 2v_t^2$ . Sau khi tên lửa ra khỏi vùng ảnh hưởng của trọng trường Trái Đất, ta xét chuyển động của nó trong hệ quy chiếu gắn với Mặt Trời. Vận tốc của tên lửa trong hệ quy chiếu này là kết quả phép cộng vectơ giữa vận tốc  $\vec{v}_\infty$  và vận tốc tròn  $\vec{V}_t$ :  $\vec{V} = \vec{V}_t + \vec{v}_\infty$ . Bình phương hai vế ta được

$$V^2 = V_t^2 + v_\infty^2 + 2\vec{V}_t \vec{v}_\infty = V_t^2 + v_\infty^2 + 2V_t v_\infty \cos \theta.$$

Để tìm vận tốc vũ trụ cấp III, ta đặt  $V = V_p = \sqrt{2}V_t$ , trong đó  $V_p$  là vận tốc parabol,  $V_t = 29,8$  km/s là vận tốc tròn của tên lửa so với Mặt Trời. Điều đó dẫn đến phương trình

$$v_\infty^2 + 2V_t v_\infty \cos \theta - V_t^2 = 0,$$

từ đây ta tìm được

$$v_\infty = \left( \sqrt{1 + \cos^2 \theta} - \cos \theta \right) V_t$$

(Ta chọn dấu cộng trước biểu thức căn bậc hai vì độ lớn vận tốc  $v_\infty$  dương). Sau đó ta thu được

$$v^2 = \left( \sqrt{1 + \cos^2 \theta} - \cos \theta \right)^2 V_t^2 + 2v_t^2.$$

Giá trị nhỏ nhất của vận tốc vũ trụ cấp III nhận được khi  $\theta = 0$  (tên lửa được phóng theo chiều chuyển động của Trái Đất trên quỹ đạo), giá trị lớn nhất đạt được khi  $\theta = \pi$  (tên lửa được phóng lên ngược với chiều chuyển động của Trái Đất trên quỹ đạo)

$$v_{\min} = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)V_t^2 + 2v_t^2} \approx 16,7 \text{ km/s},$$

$$v_{\max} = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)V_t^2 + 2v_t^2} \approx 72,7 \text{ km/s}.$$

7.97\*.  $v_{\min} \approx 29,2$  km/s,  $v_{\max} \approx 31,8$  km/s.



*Lời giải.* Tên lửa khi phóng lên chuyển động cùng với Trái Đất quanh Mặt Trời với vận tốc  $\vec{V}_k$ . Để tên lửa rơi xuống Mặt Trời cần phải hãm chuyển động của nó. Tương tự như bài trước, khi ra khỏi trọng trường của Trái Đất tên lửa có vận tốc  $\vec{V} = \vec{V}_k + \vec{v}_\infty$  (so với Mặt Trời). Năng lượng tối thiểu để làm chậm chuyển động tên lửa tương ứng với trường hợp khi các vận tốc  $\vec{V}_k$  và  $\vec{v}_\infty$  hướng ngược chiều nhau. Khi đó ta có thể viết  $V = V_k - v_\infty$  (tất cả các vận tốc đều dương) và tìm được năng lượng ứng trên một đơn vị khối lượng tên lửa

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(V_k - v_\infty)^2 - \frac{\gamma M}{R} = -\frac{1}{2}(V_k^2 + 2V_k v_\infty - v_\infty^2)$$

( $R = CA$  là khoảng cách từ tên lửa đến tâm Mặt Trời, H. 392). Nếu  $\varepsilon$  âm thì tên lửa sẽ chuyển động quanh Mặt Trời theo quỹ đạo elip với trục lớn

$$2a = -\frac{\gamma M}{\varepsilon} = \frac{2RV_k^2}{V_k^2 + 2V_k v_\infty - v_\infty^2}.$$



Hình 392

Một trong các tiêu cự của elip này nằm ở tâm Mặt Trời. Gọi  $x = CP$  là khoảng cách từ tâm Mặt trời đến đỉnh gần nhất của elip, khi đó  $2a = R + x$ . Biểu thức này dẫn đến một phương trình bậc hai. Nghiệm nhỏ nhất của phương trình này là

$$v_\infty = V_k \left( 1 - \sqrt{\frac{2x}{R+x}} \right).$$

Bằng cách cho khoảng cách  $x$  trên bề mặt Mặt Trời ta xác định được đường thẳng chứa điểm đã cho để tên lửa rơi. Vì vậy vận tốc cần tìm  $v$  được xác định bởi biểu thức

$$v^2 = v_\infty^2 + 2v_k^2 = V_k^2 \left( 1 - \sqrt{\frac{2x}{R+x}} \right)^2 + 2v_k^2.$$

Khi  $x = 0$  (chuyển động thẳng hướng vào tâm Mặt Trời) vận tốc  $v$  cực đại và bằng

$$v_{\max} = \sqrt{V_k^2 + 2v_k^2} \approx 31,8 \text{ km/s}.$$

Tên lửa rơi xuống điểm gần nhất trên Mặt Trời. Khi  $x = r$  ( $r$  là bán kính Mặt Trời) thì vận tốc cực tiểu

$$v_{\min} \approx \sqrt{V_k^2 \left( 1 - \sqrt{\frac{2r}{R+r}} \right)^2 + 2v_k^2} \approx \sqrt{V_k^2 (1 - \sqrt{\alpha})^2 + 2v_k^2} \approx 29,2 \text{ km/s}.$$

Tên lửa rơi xuống điểm xa nhất trên Mặt Trời khi chuyển động theo tiếp tuyến với bề mặt Mặt Trời.

7.98. Điểm mà tại đó  $g = 0$  chia đoạn thẳng nối tâm các hành tinh này theo tỷ lệ 9:1 và vì vậy nó nằm cách bề mặt Mặt Trăng một khoảng  $r \approx 36,7$  km.

$$7.99*. U = -\frac{3}{5} \frac{\gamma M^2}{R}.$$

*Lời giải.* Năng lượng hấp dẫn của quả cầu là thế năng tạo bởi các lực hút giữa các chất điểm khi ta chia tưởng tượng quả cầu thành các chất điểm đó. Nó có độ lớn (dấu ngược lại) bằng công của ngoại lực cần tiêu hao để đưa các chất điểm cấu thành quả cầu ra xa vô hạn. Công này không phụ thuộc vào cách thức chuyển quả cầu từ trạng thái ban đầu tới trạng thái cuối cùng. Vì thế khi tính toán ta có thể làm như sau: Chia tưởng tượng quả cầu thành các lớp đồng tâm vô cùng mỏng và lần lượt đưa từng lớp ra xa vô cùng, bắt đầu từ lớp ngoài cùng. Cường độ trường hấp dẫn tại điểm bất kỳ của một lớp do phần vật chất bên ngoài lớp đó gây ra luôn bằng không. Trường chỉ được tạo bởi vật chất mà lớp đang xét bao quanh. Nếu  $m$  là khối lượng vật chất này, còn  $dm$  là khối lượng một lớp thì công để đưa một lớp ra xa vô cùng

bằng  $dA = \gamma \frac{m dm}{r}$ . Đối với một quả cầu đồng nhất  $m = M \frac{r^3}{R^3}$ , trong đó

$M$  là khối lượng cả quả cầu. Vì vậy  $dA = 3\gamma \frac{M^2}{R^6} r^4 dr$ . Chú ý rằng

$dA = -dU$ , lấy tích phân ta được

$$U = -3 \frac{\gamma M^2}{R^6} \int_0^R r^4 dr = -\frac{3}{5} \frac{\gamma M^2}{R}.$$

Ta coi thế năng bằng không là năng lượng của quả cầu ở xa vô cùng.

$$7.100*. \vec{g} = -\frac{4\pi}{3} \rho \vec{R}.$$

*Lời giải.* Ta tưởng tượng rằng khoang trống được đổ đầy chất có khối lượng riêng bằng khối lượng riêng của quả cầu. Khi đó trường hấp dẫn cần tìm  $\vec{g}$  chính là hiệu của các trường hấp dẫn của hai quả cầu đặc với tâm tương ứng là  $O$  và  $O_1$ . Điểm quan sát  $A$  nằm bên trong mỗi quả cầu. Vì vậy ta có thể viết

$$\vec{g} = -\frac{4\pi}{3} \rho \vec{r} - \left( -\frac{4\pi}{3} \rho \vec{r}_1 \right) = -\frac{4\pi}{3} \rho \vec{R}.$$

trong đó  $\vec{R}$  là bán kính vectơ kể từ tâm  $O$  của quả cầu đến tâm  $O_1$  của khoang trống. Trường đồng nhất, tức là tại mọi điểm bên trong khoang trống trường có độ lớn và hướng như nhau.

7.101.  $v = \sqrt{3gR_{\text{TD}}}$ , trong đó  $R_{\text{TD}}$  là bán kính Trái Đất.

7.102.  $T_{\text{TD}} = 2\pi\sqrt{\frac{R_{\text{TD}}}{g}}$ ,  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$ ,  $\frac{T_{\text{TD}}}{T} = 10^3$  theo điều kiện đầu bài.

Hiệu lực tác dụng lên vật thứ nhất và vật thứ hai trong hàm  $\delta F = mg \frac{l_0}{R}$ , trong đó  $l_0$  là chiều dài tự nhiên của lò xo. Mặt khác, hiệu này  $\delta F = 2k\delta l$ . Từ đây suy ra  $\frac{\delta l}{l_0} = \left(\frac{T}{T_{\text{TD}}}\right)^2 = 10^{-6}$ .

7.103. Dao động điều hoà với chu kỳ  $T = 2\pi\sqrt{\frac{R_0}{g_0}}$ , trong đó  $R_0$  là bán kính Trái Đất,  $g_0$  là gia tốc rơi tự do trên bề mặt Trái Đất.

7.104.  $\bar{g}_A = \frac{2}{3}\pi\gamma\rho\bar{r}$ , trong đó  $\bar{r}$  là bán kính vectơ nối từ tâm quả cầu đến điểm A.

7.105.  $T = T_0\sqrt{\frac{R}{a}}$ .

7.106.  $p(r) = \frac{2}{3}\pi\rho^2\gamma(R^2 - r^2)$ ;  $p(0) \approx 2.10^7 \text{ N/cm}^2$ .

7.107.  $\rho(r) = \frac{1}{4\pi\gamma} \left[ \frac{2g(r)}{r} + \frac{dg(r)}{dr} \right]$ .

7.108.  $\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{H - 2h}{2R} \approx 8.10^{-5}$ .

7.109.  $\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{\pi R^2 \gamma \rho}{gH} \approx 10^{-7}$ .

7.110.  $\tau \approx \pi\sqrt{\frac{R_{\text{TD}}}{g}} \approx 42 \text{ phút}$ .

7.111.  $z = -\frac{\gamma M}{g(R + H)} \approx -16 \text{ cm}$ .

7.112.  $r(g_{\text{max}}) = \frac{2}{3} \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_2} R_{\text{TD}} \approx 5690$ ;  $\frac{g_{\text{max}}}{g_0} \approx 1,016$ .

7.113.  $T = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma\rho}}$ , trong đó  $\gamma$  là hằng số hấp dẫn, còn  $\rho$  là khối lượng riêng của lớp.

7.114.  $\vec{g}_A = -\frac{4}{3}\pi\gamma\rho\vec{R}$ , trong đó  $\vec{R}$  là vectơ kẻ từ trục hình trụ, đi qua tâm khoảng trống đến điểm  $A$ .

## §8. THUYẾT TƯƠNG ĐỐI

8.1. Nếu trên tàu vũ trụ đo được thời gian riêng là  $\Delta t'$  thì theo đồng hồ trên Trái Đất, sẽ đo được khoảng thời gian  $\Delta t = G\Delta t'$ , trong đó  $G = \frac{25}{7}$ <sup>1</sup>. Vì vậy

$$S = V\Delta t = \frac{24}{25}c \cdot \frac{25}{7}\Delta t' = 24c\tau, (\Delta t' = 7\tau, \tau = 1s)$$

8.2. Có, sẽ nhìn thấy. Nếu bỏ qua thời gian phản xạ của mắt thì sẽ nhìn thấy tức thì.

$$8.3. l = x_2 - x_1 = c\Delta t = l_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}, \text{ trong đó } \beta = \frac{v_0}{c}.$$

$$8.4. v = \frac{2l_0\tau}{\tau^2 + l_0^2/c^2}.$$

$$8.5. \Delta t = \frac{2L}{v} \left(1 - \sqrt{1 - \beta^2}\right) \approx \frac{Lv}{c^2} = 0,0143 \text{ năm} = 5,24 \text{ ngày}.$$

$$8.6. \text{ Theo đồng hồ riêng của tàu vũ trụ thì thời gian trôi qua là } \Delta T_0 = \frac{LV}{c\sqrt{c^2 - v^2}} = 1,5 \text{ tháng}.$$

---

<sup>1</sup> Trong biểu thức, thừa số tương đối tính  $G = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$  có vận tốc chuyển động

tương đối  $V$  của hai hệ quy chiếu. Vì thế  $G$  là hằng số. Trong một số bài tập, thừa số

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$  có chứa thành phần vận tốc biến thiên.

$$8.7. \beta = \frac{V}{c} = \frac{1 - \tau_2 / \tau_1}{1 + \tau_2 / \tau_1} = 0,6; T_{\text{TĐ}} = T \frac{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}{\tau_1 - \tau_2} = 1 \text{ tháng.}$$

$$8.8. l_0 = 375 \text{ m}, \beta = \frac{3}{5}.$$

$$8.9. l_0 = 400 \text{ m}, \beta = \frac{4}{5}.$$

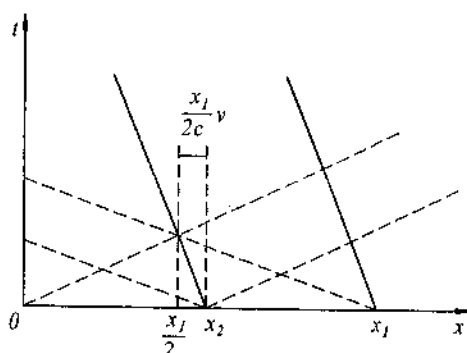
$$8.10. v_0 = c \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^2} = \frac{4}{5}c, \text{ trong đó } \tau_0 = 15 \text{ năm}, \tau = 25 \text{ năm.}$$

8.11\*. Ngoài phương pháp giải thông thường, có thể giải bằng phương pháp đồ thị. Từ hình 393:  $x_2 = \frac{x_1}{2} + \frac{x_1}{2} \frac{v}{c} \Rightarrow x_1 = \frac{2x_2}{1 + \beta};$

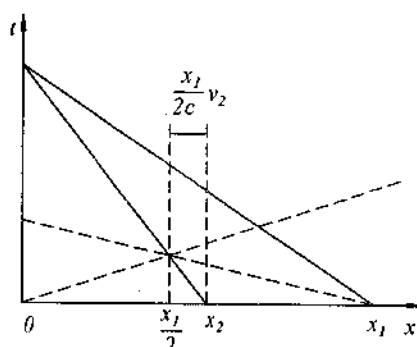
$$\tau_3 = \frac{x_1 - x_2}{c} = \frac{x_2}{c} \frac{1 - \beta}{1 + \beta} = \tau_1 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} = 0,5 \text{ s.}$$

8.12. Có thể giải bằng phương pháp đồ thị, giống như bài 8.11 (H. 394)

$$\tau_3 = \tau_1 \sqrt{1 - \beta^2} = 4 \text{ s.}$$



Hình 393



Hình 394

8.13\*. Khi chuyển động ra xa  $\omega' = \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}} \omega_0$ , khi lại gần

$$\omega' = \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}} \omega_0.$$

*Lời giải.* Giả sử nguồn sáng đứng yên trong hệ quy chiếu  $K$ , còn người quan sát đứng yên trong hệ  $K'$ . Nếu nguồn sáng phát các xung với chu kỳ  $T$ , thì người quan sát chuyển động ra xa trong hệ  $K'$  sẽ nhận được các tín hiệu sau khoảng thời gian

$$T' = \frac{1}{1 - V/c} T$$

(theo đồng hồ của hệ  $K$ ). Để tính được khoảng thời gian theo đồng hồ của hệ quy chiếu  $K'$ , ta phải chuyển sang thời gian riêng của người quan sát

$$T'_0 = \frac{T}{G} \quad \left( \text{ở đây } G = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \right), \text{ ta thu được } T'_0 = \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}} T. \text{ Chuyển}$$

$$\text{sang tần số, ta được } \omega' = \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}} \omega_0 \quad \left( \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \right).$$

Tương tự, khi nguồn sáng và người quan sát tiến lại gần nhau

$$\omega' = \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}} \omega_0.$$

$$8.14^*. l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \cos^2 \varphi', \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = G \operatorname{tg} \varphi'.$$

*Lời giải.* Trong hệ  $K$ , các hình chiếu của thanh trên trục  $x$  và  $y$  tương ứng bằng  $\Delta x = \Delta x' / G$ ,  $\Delta y = \Delta y'$ . Hiển nhiên là  $l_0^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2$ , còn  $\operatorname{tg} \varphi' = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}$ . Như vậy, trong hệ  $K$

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\Delta x')^2 \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) + (\Delta y')^2} = \\ &= \sqrt{l_0^2 - \frac{V^2}{c^2} (\Delta x')^2} = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2} \cos^2 \varphi'}, \end{aligned}$$

vì  $\Delta x' = l_0 \cos \varphi'$ . Góc  $\varphi$  được xác định từ biểu thức  $\operatorname{tg} \varphi = \Delta y / \Delta x = G \operatorname{tg} \varphi'$ .

8.15\*. *Lời giải.* Máy ảnh định vị các tia đến nó đồng thời. Vì thế, do vận tốc ánh sáng hữu hạn nên đối với những điểm nằm xa máy ảnh hơn muốn góp phần tạo ảnh thì phải phát ra các tia sáng sớm hơn so với các điểm gần hơn.

Xét ví dụ một vật sáng có dạng hình lập phương với cạnh  $l$ , bay cách xa điểm chụp ảnh với vận tốc  $v$  vuông góc với tia sáng hướng tới máy ảnh (H. 395a). Do chuyển động nên mặt bên  $ABEF$  bị che khuất khi khối lập phương đứng yên, sẽ được nhìn thấy khi vật chuyển động vì các điểm  $E$  và  $F$  phát sáng sớm hơn thời gian  $l/c$  so với mặt  $ABCD$ , khi điểm  $E$  và  $F$  nằm tại các vị trí  $E'$  và điểm  $F'$ . Trên ảnh (H. 395b) mặt  $ABEF$  sẽ có ảnh dạng hình chữ nhật  $A'B'E'F'$  với cạnh  $A'F' = vl/c$ .

Mặt khác, do sự co Lorentz nên mặt  $ABCD$  sẽ bị co theo hướng

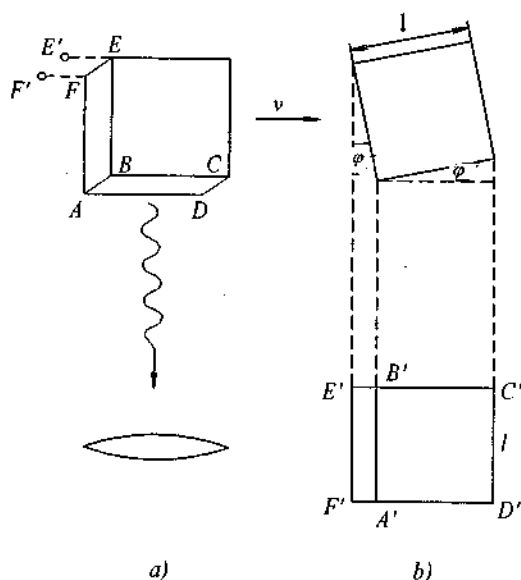
chuyển động  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  lần, sao cho ảnh của nó  $A'B'C'D'$  sẽ có dạng hình chữ nhật với cạnh

$A'D' = l\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Có thể

thấy rằng trên ảnh hình dạng chung của khối lập phương không bị biến dạng vì nó như bị xoay một góc  $\varphi = \arcsin(v/c)$  và giữ nguyên tỷ lệ (H. 395b).

Tương tự đối với quả cầu chuyển động, do ảnh hưởng đồng thời của sự trễ sáng và sự co Lorentz nên hình dạng quan sát được của quả cầu không bị biến dạng: trên ảnh ta nhận được hình tròn. Để

quan sát riêng sự co Lorentz bằng máy ảnh, ta cần sử dụng nguồn sáng ngoài, ví dụ đèn chớp có tác dụng làm mất cảm giác xoay vật chuyển động.



Hình 935

$$8.16^*. v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \sqrt{\frac{1 + eU/(2mc^2)}{[1 + eU/(mc^2)]^2}}.$$

Lời giải. Động năng bằng công của điện trường

$$K_r \approx mc^2(\gamma - 1) = eU, \text{ trong đó } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

suy ra  $\gamma = 1 + \frac{eU}{mc^2}$ , vì thế  $v = c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$ . Cuối cùng, ta thu được

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \sqrt{\frac{1 + eU/(2mc^2)}{[1 + eU/(mc^2)]^2}}.$$

Nếu  $eU \ll mc^2$  thì

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \left( 1 - \frac{3}{4} \frac{eU}{mc^2} \right),$$

Nếu  $eU \gg mc^2$  thì

$$v = c \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{mc^2}{eU} \right)^2 \right] \sim c.$$

Trong hai trường hợp cuối, ta đã sử dụng phương pháp phân tích biểu thức trong căn của công thức chính thành chuỗi theo tham số nhỏ.

$$8.17^*. \frac{K_r}{mc^2} \approx \frac{v^2/c^2}{2} = \frac{1}{150}.$$

Lời giải. Sử dụng khai triển nhị thức

$$\gamma = \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots,$$

đối với  $(v/c) \ll 1$  ta nhận được

$$K_r = mc^2(\gamma - 1) = \frac{mv^2}{2} + \frac{3}{8} \frac{mv^4}{c^2} + \dots$$

Lập tỷ số giữa số hạng thứ hai và số hạng thứ nhất của  $K_r$ , rồi cho nó bằng

một phần trăm:  $\frac{3}{4} \frac{v^2}{c^2} = 0,01$ , ta được  $\frac{v}{c} = 0,1 \sqrt{\frac{4}{3}}$ . Khi đó

$$\frac{K_r}{mc^2} \approx \frac{v^2/c^2}{2} = \frac{1}{150}.$$

$$8.18. pc = \sqrt{K(K + 2mc^2)}.$$

$$8.19. \tau \approx 12,5 \text{ phút.}$$

$$8.20. L = 40 \text{ cm.}$$

$$8.21. E = m_0 c^2 \gamma = m_0 c^2 \frac{\tau}{\tau_0} = 1,3 \cdot 10^{12} \text{ MeV, trong đó } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

$$8.22. \text{Kim giây quay hai vòng.}$$

$$8.23. \Delta t' = \Delta t \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = 3 \text{ s, trong đó } \beta = \frac{v}{c} = 0,8.$$

$$8.24. \tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E}{mc^2} \tau_0 \approx 2,1 \cdot 10^{-5} \text{ s.}$$



$$8.25. c - v \approx \frac{m_0^2 c^2}{2(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})M^2 v^2} c = 8.10^{-28} c = 2,4.10^{-17} \text{ cm/s};$$

$$K_{\text{QD}} / K_{\text{TD}} \approx 2(\sqrt{2} - 1)c/v \approx 8,3.10^3.$$

$$8.26. c - v \approx \frac{9}{2} \left( \frac{m_0 c^2}{MR\omega} \right)^2 c = 1,56.10^{-15} \text{ cm/s}; \quad \frac{K_{\text{QD}}}{K_{\text{TD}}} \approx \frac{2c}{\omega R} = 1,3.10^6.$$

$$8.27. K = mc^2 = 9.10^{20} \text{ J}; M = 13000 \text{ tấn}; v = c\sqrt{3}/2 = 2,6.10^5 \text{ km/s}$$

$$8.28. M = \sqrt{(m_1 + m_2)^2 + \frac{2K_2 m_1}{c^2}}; \text{ tổng khối lượng các hạt tạo thành xấp xỉ bằng tổng khối lượng các hạt ban đầu nếu như}$$

$$\frac{K_2 m_1}{c^2} \ll (m_1 + m_2)^2, \quad v = \frac{c\sqrt{K_2(K_2 + 2m_2 c^2)}}{(m_1 + m_2)c^2 + K_2}.$$

$$8.29. M^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - P^2; E = E_1 + E_2; E_{1,2} = c\sqrt{p_{1,2}^2 + m_{1,2}^2 c^2};$$

$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ , trong đó chỉ số 1 và 2 ứng với các hạt sau phân rã,

$$\begin{aligned} M^2 c^2 &= \frac{(E_1 + E_2)^2}{c^2} - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 = \\ &= (m_1^2 + m_2^2)c^2 + 2\left(\sqrt{(p_1^2 + m_1^2 c^2)(p_2^2 + m_2^2 c^2)} - p_1 p_2 \cos \theta\right). \end{aligned}$$

$$8.30. K_1 = \frac{c^2}{2M} [(M - m_1)^2 - m_2^2]; K_2 = \frac{c^2}{2M} [(M - m_2)^2 - m_1^2].$$

$$8.31*. K_1 = \frac{K_0 \cos^2 \theta_1}{1 + \frac{1}{2} \frac{K_0}{mc^2} \sin^2 \theta_1}.$$

*Lời giải.* Ta viết các phương trình bảo toàn năng lượng và động lượng cho quá trình va chạm

$$K_0 = K_1 + K_2, \quad K_2 = K_0 - K_1,$$

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2; \quad \vec{p}_2 = \vec{p}_0 - \vec{p}_1,$$

$$(\vec{p}_0 - \vec{p}_1)^2 = \vec{p}_2^2; \quad p_2^2 - p_1^2 - p_0^2 = -2p_0 p_1 \cos \theta_1.$$

Nhưng do  $p^2 c^2 = K(K + 2mc^2)$ , nên

$$p_2^2 - p_1^2 - p_0^2 = -\frac{2K_1(K_0 + 2mc^2)}{c^2}.$$

Mặt khác,

$$-2p_0 p_1 \cos \theta_1 = -\frac{2 \cos \theta_1}{c^2} \sqrt{K_0 K_1 (K_0 + 2mc^2)(K_1 + 2mc^2)}.$$

So sánh hai biểu thức trên và sau một số biến đổi đại số, ta được

$$K_1 = \frac{K_0 \cos^2 \theta_1}{1 + \frac{1}{2} \frac{K_0}{mc^2} \sin^2 \theta_1}.$$

$$8.32. \cos \theta = \frac{K}{K + 4m_p c^2}.$$

$$8.33. \sin \frac{\theta}{2} = \frac{m_0 c^2}{2\sqrt{E_1 E_2}}.$$

$$8.34. K_\nu = E_\nu = \frac{1}{2} \frac{(m_\pi c^2)^2 - (m_\mu c^2)^2}{m_\pi c^2} \approx 30 \text{ MeV};$$

$$K_\mu = m_\pi c^2 - m_\mu c^2 - K_\nu \approx 4 \text{ MeV}.$$

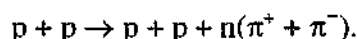
$$8.35. K = 4M_{\tilde{\Lambda}_c} c^2 + \frac{2(M_{\tilde{\Lambda}_c} c^2)^2}{M_p c^2} \approx 19,9 \text{ GeV}.$$

$$8.36. \varphi \approx \frac{M_\pi c^2}{\sqrt{E_1 E_2}} \approx 0,05 \text{ rad} \approx 3^\circ.$$

$$8.37. K_\nu = 29,7 \text{ MeV}; K_\mu = 4,25 \text{ MeV};$$

$$P_\mu = P_\nu = \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)c}{2m_\pi} = 29,7 \frac{\text{MeV}}{c}.$$

8.38. Phản ứng xảy ra theo sơ đồ



Tổng số hạt pion  $2n = 28$ .

8.39.  $m_Z c^2 \approx 90 \text{ GeV}$ ;  $\beta = 0,9$ .

8.40.  $m_D c^2 \approx 1,85 \text{ GeV}$ ;  $\beta = 0,94$ ;  $\tau_c \approx 4,2 \cdot 10^{-13} \text{ s}$ .

8.41.  $E_{\pi^0} = \frac{4m_p^2 c^4 - 3m_\pi^2 c^4}{4m_p c^2} \approx 0,99 \text{ GeV}$ ;  $E_{\pi^\pm} = 0,505 \text{ GeV}$ .

## §9. CHUYỂN ĐỘNG PHẪNG CỦA VẬT RẮN

9.1.  $I_x = \frac{3}{10} MR^2$ ;  $I_z = \frac{3}{20} MR^2 + \frac{3}{5} ML^2$ .

9.2.  $a_2 = -a_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + \frac{I}{r^2}} g$ .

Lực căng của các sợi dây

$$T_1 = \frac{2m_1 m_2 g + m_1 g I / r^2}{m_1 + m_2 + I / r^2};$$

$$T_2 = \frac{2m_1 m_2 g + m_2 g I / r^2}{m_1 + m_2 + I / r^2}.$$

Ứng lực  $T_3 = T_1 + T_2 + Mg$ .

9.3.  $\varphi = \frac{gt^2}{2R \left( 1 + \frac{Mg}{2P} \right)}$ .

9.4.  $\frac{d\omega}{dt} = \frac{m_2 R - m_1 r}{m_2 R^2 + m_1 r^2 + I} g$ ;  $T_1 = m_1 \left( g + r \frac{d\omega}{dt} \right)$ ;  $T_2 = m_2 \left( g - R \frac{d\omega}{dt} \right)$ .

9.5.  $a = \frac{2(M + m)r^2}{mr^2 + MR^2 + 2(M + m)r^2} g$ .

$$9.6. \Delta P = \frac{(b-a)mg}{(b+a)\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)}.$$

$$9.7. T = \frac{Mg}{1 + Mr^2/I} = \frac{Mg}{1 + Mr^2/(4mR^2)} = 0,99T_0;$$

$T_g = Mg + \frac{Mhr}{\pi n R^2} T \approx 1,42T_0$ , trong đó  $I$  là mômen quán tính của hệ,  $T_0$  là lực căng của dây khi vật đứng yên.

$$9.8*. a_2 = \frac{2ma}{M + 4m}.$$

*Lời giải.* Phương trình chuyển động của cả hai con khỉ theo phương thẳng đứng so với hệ quy chiếu đứng yên, phương trình chuyển động quay của ròng rọc và phương trình liên kết động học có thể viết dưới dạng

$$ma_1 = T_1 - mg; ma_2 = T_2 - mg, \frac{MR^2}{2} \beta = (T_1 - T_2)R, a_1 = a - a_2,$$

trong đó  $a_1$  và  $a_2$  là gia tốc con khỉ thứ nhất và thứ hai,  $\beta$  là gia tốc góc của ròng rọc  $\beta = a_2 / R$ ,  $T_1$  và  $T_2$  là tương ứng là các lực căng của sợi dây,  $R$  là bán kính ròng rọc. Từ đây suy ra  $a_2$ .

$$9.9. a = \frac{mgR^2}{I}.$$

$$9.10*. \frac{dv}{dt} = \frac{g}{3} \text{ và } k \geq \frac{2}{9}.$$

*Lời giải.* Phương trình mômen quay của trụ quanh trục nằm trong mặt phẳng lán

$$mR^2 \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{d\omega}{dt} = FR,$$

trong đó  $R$  là bán kính trụ. Khi lăn không trượt, khối tâm của trụ sẽ nhận được gia tốc ngang  $\frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt}$ , gia tốc này do lực ma sát gây nên; do vậy,

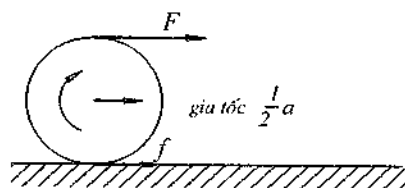
$$k \left( g + \frac{E}{m} \right) \geq R \frac{d\omega}{dt} = \frac{FR}{m(1 + 1/2)},$$

trong đó  $k$  là hệ số ma sát cần tìm. Theo điều kiện bài ra  $\frac{F}{m} = \frac{g}{2}$ , vậy

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{3} \text{ và } k \geq \frac{2}{9}.$$

**9.11\*. Lời giải.**

*Lăn không trượt.* Các lực tác dụng lên trụ được biểu diễn trên hình 396. Lực căng của dây  $F$ , lực ma sát  $f$ , gia tốc của vật  $a$ . Các phương trình chuyển động tịnh tiến của hình trụ:  $F + f = ma/2$ ,



Hình 396

của vật:  $Mg - F = Ma$ , và phương trình chuyển động quay của trụ:

$$(F - f)R = \frac{1}{2} \frac{mR^2 a}{2R}.$$

Từ đây ta thu được  $f = \frac{ma}{8}$ ;  $F = \frac{3ma}{8}$ ;  $a = \frac{g}{1 + 3m/(8M)}$ .

Trụ sẽ không trượt nếu  $|f| \leq kmg$  hoặc  $k \geq (8 + 3m/M)^{-1}$ , trong đó  $k$  là hệ số ma sát.

*Vừa lăn vừa trượt.* Gia tốc góc của trụ  $\beta$ , gia tốc của trục trụ  $b$ . Trong trường hợp này, các phương trình chuyển động có dạng

$$F + f = mb, (F - f)R = mR^2 \beta / 2, Mg - F = Ma.$$

Các gia tốc liên hệ với nhau bởi điều kiện  $a = b + \beta R$ , lực ma sát  $f = kmg$ .

Từ đây ta tính được  $a = \left(1 - \frac{1}{3} \frac{km}{M}\right) \left(1 + \frac{1}{3} \frac{m}{M}\right)^{-1} g$ , với điều kiện

$$k < (8 + 3m/M)^{-1}.$$

*Nhận xét.* Nên xét chuyển động khi  $f = 0$  (khi không có ma sát).

**9.12.** Gia tốc thẳng đứng của vật  $a_1 = \frac{13}{16\sqrt{15}} g$ ; gia tốc ngang  $a_2 = \frac{3}{16} g$ ;

gia tốc vòng rọc  $a_3 = \frac{1}{\sqrt{15}} g$ .

**9.13. a)**  $a = \frac{mgr(R-r)}{I + Mr^2 + m(R-r)^2}$ ; **b)**  $a = \frac{mg}{M + m + MmR^2/I}$ .

**9.14.**  $\omega(t) = \frac{M}{k} \left[1 - \exp\left(-\frac{kt}{I}\right)\right]$ ;  $\omega_{\text{ôn lập}} = \frac{M}{k}$ .

$$9.15. L = \frac{2}{5} m R^2 \omega \approx 5,2 \cdot 10^{41} \text{ g.cm}^2/\text{s}.$$

$$9.16. M = 1,67 \cdot 10^{15} \text{ N.km}.$$

$$9.17. a_t = \frac{2}{3}(g+a); T = \frac{1}{3}m(g+a).$$

$$9.18. N = \frac{I_m^2 \omega^2}{4\pi M_0 I}; t = \frac{I_m}{M_0} \omega, \text{ trong đó } I_m = \frac{mr^2}{2}, I = I_0 + m\left(d^2 + \frac{r^2}{2}\right).$$

9.19. Động năng của chuyển động quay giảm một lượng

$$\Delta K = \frac{1}{2} \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} (\omega_1 - \omega_2)^2.$$

$$9.20. N = \frac{3\pi r n^2}{4kg}.$$

$$9.21. v = \sqrt{\frac{56}{33} gH}.$$

$$9.22*. v = \sqrt{\frac{5}{3} gh}; \omega = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{gh}{3}}.$$

Lời giải. Áp dụng định luật bảo toàn mômen động lượng đối với hệ máng - vật

$$I_0 \omega + m(u \cos \varphi + R\omega)R = 0,$$

trong đó  $u$  là vận tốc của vật so với máng,  $\omega$  là vận tốc góc của máng,  $I_0$  là mômen quán tính của máng. Theo định luật bảo toàn năng lượng

$$I\omega^2 + m\left[(u \cos \varphi + R\omega)^2 + u^2 \sin^2 \varphi\right] = 2mgh.$$

Suy ra

$$\omega = -\frac{\sqrt{2}}{4} \frac{u}{R}, u^2 = \frac{8}{3} gh,$$

$$v^2 = (u \cos \varphi + R\omega)^2 + u^2 \sin^2 \varphi = 5gh/3 \approx 1,67 gh.$$

9.23. Ống xoắn sẽ quay ngược chiều kim đồng hồ  $\omega_{ox} = \frac{2\pi N \mu}{m_0 + M}$ . Sau khi

mở van, ống xoắn quay một góc

$$\varphi = 2\pi N \left(1 - \frac{M}{m_0} \ln \frac{m_0 + M}{M}\right).$$

Khi  $m_0 \ll M$  thì số vòng quay  $n = \frac{m_0}{2M} N$ ; khi  $m_0 \gg M$  thì  $n = N$ .

$$9.24. Q = \frac{\pi^3 \rho n^2 (R_1 R_2)^4 d_1 d_2}{R_1^4 d_1 + R_2^4 d_2} = 62,5 \text{ J. } 65,4 \text{ J}$$

$$9.25. \omega_{\max} = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{2g}}{I} \rho l \pi r^2 H^{3/2}.$$

$$9.26. \text{ Gia tốc góc của trụ } \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{mgr \sin \varphi \cos \varphi}{I + mr^2 \sin^2 \varphi};$$

$$\text{gia tốc của viên bi so với trụ } a = \frac{(I + mr^2)g \sin \varphi}{I + mr^2 \sin^2 \varphi}.$$

$$9.27. t = \sqrt{\frac{2L}{g} \left[ 1 + \frac{4\pi^2 I_1 I_2}{mh^2 (I_1 + I_2)} \right]}.$$

9.28. Vận tốc quay tăng  $(1 + mR^2/I)$  lần. Động năng của chuyển động quay cũng tăng từng đó lần. Năng lượng tăng do công mà người đó thực hiện khi đi chuyển trên đĩa.

$$9.29. \omega = \frac{mrv}{MR^2/2 + mr^2}.$$

$$9.30. \omega_1 = \frac{M_1 r_1^2}{M_1 r_1^2 + M_2 a^2} \omega_0; \quad \omega_2 = \frac{M_1 r_1^2}{M_1 r_1^2 + M_2 a^2} \frac{a}{r_2} \omega_0 = \frac{a}{r_2} \omega_1.$$

$$\text{Mất mát năng lượng } \Delta K = \frac{M_1 M_2 r_1^2 a^2}{4(M_1 r_1^2 + M_2 a^2)} \omega_0^2.$$

$$9.31. r = 2r_0.$$

$$9.32. \text{ Trụ đổ và rơi khỏi đĩa khi đĩa quay với vận tốc góc } \omega = \sqrt{Dg/(Rh)}.$$

$$9.33. a = \frac{F(R \cos \alpha - r)R}{I + mR^2}, \text{ trong đó } I \text{ và } m \text{ là mômen quán tính và khối}$$

lượng cuộn chỉ;  $a > 0$  nếu  $\cos \alpha > r/R$ ; lực ma sát  $f = F \cos \alpha - ma$ .

$$9.34. a = \frac{r \sin \alpha - k(r + R) \cos \alpha}{I_0 + mr^2} mgr.$$

$$9.35. a = \frac{r \sin \alpha - k(R-r) \cos \alpha}{I_0 + mr^2} mgr.$$

$$9.36. t = \frac{mvR \sin \alpha}{M}.$$

9.37\*. Sau khi chuyển qua ranh giới, ban đầu chuyển động là chậm dần đều, sau đó với vận tốc không đổi. 1/3 năng lượng chuyển hoá thành nhiệt, 2/9 – thành năng lượng chuyển động quay và 4/9 còn lại dưới dạng năng lượng của chuyển động tịnh tiến.

Lời giải. Ký hiệu khối lượng của trụ là  $m$ , mômen quán tính là  $I$ , lực ma sát  $f$  và vận tốc ban đầu  $v_0$ . Khi đó

$$m \frac{dv}{dt} = -f, \quad I \frac{d\omega}{dt} = fr,$$

Suy ra

$$v = v_0 - \frac{f}{m}t, \quad \omega = \frac{frt}{I}.$$

Sau khi qua ranh giới với phần nhám vận tốc trượt sẽ là  $v_{tr} = v - \omega r = v_0 - \alpha ft$ ,

trong đó  $\alpha = \frac{1}{m} + \frac{r^2}{I} = \frac{3}{m}$  (vì  $I = mr^2/2$ ). Sau thời gian  $T = v_0 / (\alpha f)$  vận tốc trượt sẽ bằng không, sau đó chuyển động sẽ trở thành lăn thuần túy. Vận tốc chuyển động tịnh tiến khi lăn thuần túy

$$v_l = v_0 - \frac{fv_0}{m\alpha f} = v_0 \left(1 - \frac{1}{m\alpha}\right) = \frac{2v_0}{3}.$$

Vận tốc góc

$$\omega_l = \frac{frv_0}{I\alpha f} = v_0 \frac{r}{I\alpha}.$$

Do đó năng lượng của chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay

$$Q_{tt} = \frac{mv_0^2}{2} \left(1 - \frac{1}{m\alpha}\right)^2; \quad Q_q = \frac{mv_0^2}{2} \frac{r^2}{m\alpha^2 I}.$$

Năng lượng chuyển hoá thành nhiệt

$$Q_n = \frac{mv_0^2}{2} - Q_{tt} - Q_q = \frac{mv_0^2}{2} \frac{1}{m\alpha}.$$

Ta có thể tính riêng công của lực ma sát và thấy rằng nó bằng  $\frac{mv_0^2}{2} \frac{1}{m\alpha}$ .



$$9.52. \cos \alpha \geq \frac{4}{7} + \frac{3}{7} \frac{v_0^2}{gr}.$$

$$9.53. f = \frac{1}{3} mg \sin \alpha = 0,5 \text{ N}.$$

$$9.54. a) a = \frac{R^2 - h^2}{\rho^2 + (R^2 - h^2)} g \sin \alpha, \text{ trong đó } \rho \text{ là bán kính quán tính của hòn bi, } 2h \text{ là độ rộng của máng.}$$

$$b) a = \frac{R^2}{4\rho^2 + R^2} g \sin \alpha.$$

$$9.55. \operatorname{tg} \alpha > \frac{r^2 + \rho^2}{\rho^2} k, \text{ trong đó } \rho \text{ là bán kính quán tính của vật trượt. Đối với quả cầu đặc } \operatorname{tg} \alpha > \frac{7}{2} k, \text{ đối với quả cầu rỗng } \operatorname{tg} \alpha > \frac{5}{2} k, \text{ đối với trụ đặc } \operatorname{tg} \alpha > 3k, \text{ đối với trụ rỗng } \operatorname{tg} \alpha > 2k.$$

$$9.56*. t = \frac{r\omega_0}{2g \sin \alpha}.$$

*Lời giải.* Gọi  $\vec{F}$  là lực ma sát tác dụng lên trụ tại điểm trụ tiếp xúc với mặt phẳng nghiêng (H. 397). Lực này làm cho trụ chuyển động theo mặt phẳng nghiêng lên trên. Ban đầu, khi chuyển động chưa phải là lăn thuần túy thì lực ma sát  $\vec{F}$  là lực ma sát trượt. Sau khi chuyển động chuyển thành lăn thuần túy thì  $\vec{F}$  là lực ma sát tĩnh. Tuy nhiên, không phụ thuộc vào tính chất của chuyển động, lực này luôn tuân theo phương trình chuyển động của khối tâm

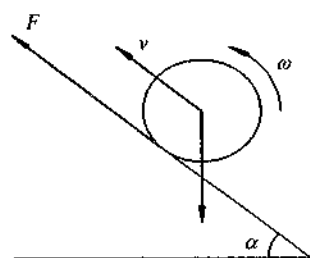
$$m \frac{dv}{dt} = F - mg \sin \alpha$$

và phương trình mômen (đối với trục của trụ)

$$I \frac{d\omega}{dt} = -Fr$$

Khử  $F$  từ hai phương trình trên, ta nhận được

$$mr \frac{dv}{dt} = -I \frac{d\omega}{dt} - mgr \sin \alpha.$$



Hình 397

$$9.38. |v_A| = |v_B| = \sqrt{2gkr_0}; |a_A| = |a_B| = gk.$$

$$9.39. \omega = \omega_0 - 0,2 \frac{g}{R} t; v = 0,1gt, \text{ trong đó } \omega = 2\pi n. \text{ Từ điều kiện } v = \omega R, \\ \text{ta nhận được } T \approx 2,14 \text{ s. Khi } t > T \text{ gia tốc bằng không.}$$

$$9.40. \omega = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + 3m_2} \omega_0.$$

$$9.41. a = F \left( \frac{3}{4} m + M \right)^{-1}.$$

$$9.42. v = 2 \sqrt{\frac{la_0}{3}}.$$

$$9.43. v_{\text{abs}} = \frac{5}{7} v_0.$$

$$9.44. v_0 = 3kR \sqrt{\frac{2g}{R-r}} \approx 8,6 \text{ km/h.}$$

$$9.45. \frac{\Delta K}{K_0} = \frac{16}{21}.$$

$$9.46. v = \frac{Mr^2 v_0}{2I + Mr^2} \approx 56 \text{ m/s.}$$

$$9.47. \omega_\infty = \frac{\omega_0}{3}; v_\infty = \frac{\omega_0 r}{3}; \frac{\Delta K}{K_0} = \frac{2}{3}.$$

$$9.48. v = \frac{2}{7} \omega_0 r \sin \varphi; \omega = \frac{v}{r}.$$

$$9.49. \text{Bắt đầu trượt khi } \varphi = \varphi_{\text{max}} = \frac{4}{3} \frac{kg}{\Omega^2 R}.$$

$$9.50. \text{Bắt đầu trượt khi góc } \alpha \text{ là nghiệm của phương trình} \\ \sin \alpha = k(7 \cos \alpha - 4). \text{ Nếu giả thiết rằng góc } \alpha \text{ đủ nhỏ thì}$$

$$\alpha^2 + \frac{2\alpha}{7k} - \frac{6}{7} = 0, \text{ suy ra } \alpha = 0,2 \text{ rad} \approx 11,5^\circ.$$

$$9.51. k = \frac{2 \sin \varphi}{17 \cos \varphi - 10} = 0,21.$$

Lấy tích phân phương trình này (với điều kiện ban đầu  $\omega = \omega_0$  khi  $t = 0$ ) ta được

$$mrv = I(\omega_0 - \omega)mgrt \sin \alpha.$$

Biểu thức này luôn đúng trong suốt thời gian chuyển động, không phụ thuộc vào việc chuyển động là vừa lăn vừa trượt hay chỉ lăn thuần túy. Tại điểm cao nhất ta phải có  $v = 0$ , từ đây suy ra rằng tại chính điểm này  $\omega = 0$ . Trong trường hợp ngược lại thì trụ sẽ tiếp tục lăn lên và điểm đang xét chưa phải là điểm cao nhất. Do đó, để tìm  $t$  trong phương trình trên ta cho  $v = \omega = 0$ , khi đó

$$t = \frac{I\omega_0}{mgr \sin \alpha} = \frac{r\omega_0}{2g \sin \alpha}.$$

Thật thú vị là thời gian trụ chuyển động lên không phụ thuộc vào hệ số ma sát giữa trụ và mặt phẳng nghiêng. Kết quả không thay đổi ngay cả khi hệ số ma sát là đại lượng biến thiên.

Ngược lại thời gian trụ lăn xuống dưới, thậm chí cả độ cao cực đại đều phụ thuộc vào hệ số ma sát. Điều đó là do khi chuyển động xuống dưới trụ luôn lăn thuần túy, còn khi chuyển động lên trên ban đầu trụ vừa lăn vừa trượt, sau đó chỉ lăn thuần túy.

9.57. 1)  $a_1 = g(k \cos \alpha - \sin \alpha)$ , hướng lên trên;

$$2) t_1 = \frac{I\omega_0 r}{(I + mr^2)a_1 + mr^2 g \sin \alpha} = \frac{\omega_0 r}{(3k \cos \alpha - \sin \alpha)g};$$

$$3) H_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \sin \alpha;$$

$$4) a_2 = \frac{mr^2}{I + mr^2} g \sin \alpha = \frac{2}{3} g \sin \alpha;$$

$$5) H_2 = \frac{a_1}{a_2} H_1;$$

$$6) H = H_1 + H_2 = \frac{k \cos \alpha - \sin \alpha}{4g(3k \cos \alpha - \sin \alpha)} \omega_0^2 r^2;$$

$$7) \bar{t} = \sqrt{\frac{2H}{a_2 \sin \alpha}} = \frac{\omega_0 r_0}{2g \sin \alpha} \sqrt{\frac{3(k \cos \alpha - \sin \alpha)}{3k \cos \alpha - \sin \alpha}}.$$

9.58.  $a = \frac{5}{7} g \sin \alpha$ . Lực ma sát bằng  $\frac{2}{7} mg \sin \alpha$ , trong đó  $m$  là khối lượng quả cầu.

$$9.59. \omega = -\frac{\omega_0}{3}; \frac{\Delta K}{K} = \frac{2}{3}.$$

$$9.60. v = \frac{2}{3}v_0; \frac{\Delta K}{K} = \frac{1}{3}.$$

$$9.61. F_{ms} = \frac{1}{3}m(g-a)\sin\alpha; a_t = \frac{2g-5a}{3}\sin\alpha.$$

$$9.62. l = \frac{3M+m+2m\sin^2\varphi}{4g(M+m)\sin\varphi}v^2.$$

$$9.63. t = \frac{1}{\sqrt{2}}s; \omega = 40s^{-1}.$$

$$9.64. \text{ Phải đặt trụ rỗng phía trước; } a = \frac{4g\sin\alpha}{k+7}; N = \frac{mg\sin\alpha}{k+7}.$$

$$9.65. a = 2g \frac{(M+m)\sin\alpha}{4M+3m}.$$

9.66. Vị trí điểm B mà tại đó hòn bi tách ra khỏi mặt cầu và bắt đầu chuyển động tự do dưới tác dụng của trọng lực được xác định bởi góc  $\alpha$ , với

$$\cos\alpha = \frac{2r^2}{3r^2 + \rho^2},$$

trong đó  $\rho$  là bán kính quán tính của hòn bi. Kết quả không phụ thuộc vào bán kính mặt cầu. Đối với hòn bi đặc  $\cos\alpha = 10/17$ , đối với hòn bi rỗng  $\cos\alpha = 6/11$ .

$$9.67. h \approx 1,59R; H \approx 1,78R.$$

$$9.68. \omega_{\min} = \frac{v_0}{R}; v = \frac{\omega_0 R - v_0}{2}.$$

$$9.69. 1) a = \frac{mg\sin\alpha}{2M+m(1+\cos\alpha)}.$$

$$2) F_{ms} = (M+m)a.$$

$$3) t = \frac{N_{\max}}{2M+m} \frac{1}{a^2}; v_{\max} = \frac{N_{\max}}{(2M+m)a}.$$

$$9.70*. a = \frac{m+m_1}{2m+m_1(1+\cos\alpha)}g\sin\alpha.$$

*Lời giải:* Ta xét tất cả các chuyển động trong hệ quy chiếu mà trong đó mặt phẳng nghiêng đứng yên. Vì khối tâm của hệ và trục quay tức thời A (H. 177) chuyển động song song, nên phương trình mômen đối với trục này có dạng  $I \frac{d\omega}{dt} = M$ . Mômen động lượng của hệ là tổng của mômen động lượng của trụ  $I\omega$  và mômen động lượng của con chó  $m_1 v h$ , trong đó  $h = r(1 + \cos \alpha)$  là chiều dài đường vuông góc hạ từ điểm S lên mặt phẳng nghiêng. Vì vậy,

$$L = I\omega + m_1 r v (1 + \cos \alpha),$$

ở đây  $I$  được hiểu là mômen quán tính của trụ đối với trục quay tức thời, tức là bằng  $2mr^2$ . Do không có chuyển động trượt nên  $v = \omega r$ , do đó,

$$L = [2m + m_1 (1 + \cos \alpha)] r v.$$

Vì khối tâm của hệ và trục quay tức thời A chuyển động song song nên đạo hàm của  $L$  theo thời gian bằng mômen của các ngoại lực đối với trục quay tức thời A, tức là  $(m + m_1) g r \sin \alpha$ . So sánh hai biểu thức, ta thu được đáp số.

$$9.71. x = \frac{7}{3}; \frac{\Delta K}{K_0} = \frac{4}{7}.$$

9.72. Quả cầu sẽ chuyển động đều nếu điểm đánh của gậy cao hơn tâm của nó một khoảng bằng  $2/5$  bán kính của nó. Nếu điểm đánh nằm cao hơn thì quả cầu sẽ chuyển động nhanh dần, nếu thấp hơn nó sẽ chuyển động chậm dần. Lời giải được đưa ra với giả thiết rằng lực ma sát của quả cầu vào mặt bàn nhỏ không đáng kể so với lực mà gậy tác dụng lên quả cầu trong thời gian đánh.

9.73. Trường hợp 1) được thực hiện khi điểm đánh cao hơn tâm quả cầu một lượng lớn hơn  $2/5$  bán kính quả cầu, trường hợp 2) khi điểm đánh cao hơn tâm quả cầu một lượng đúng bằng  $2/5$  bán kính quả cầu, trường hợp 3) khi điểm đánh cao hơn tâm quả cầu một lượng nhỏ hơn  $2/5$  bán kính quả cầu (xem bài 9.72).

$$9.74. K_H = \frac{p^2}{2m}; K_q = \frac{5p^2 k^2}{4m}; \text{ khi } k = \frac{2}{5}.$$

$$9.75. x = \frac{v^2}{4kg}.$$

$$9.76. x = \frac{v^2}{kg}.$$

$$9.77. v_0 = \left(1 + \frac{7M}{5m}\right) V.$$

$$9.78. v = \frac{5}{7} \frac{m}{M} V.$$

$$9.79. v = \frac{5}{7} \frac{m}{M} \left( 1 - \frac{h}{R} \right) v_0.$$

$$9.80. \omega_0 > \frac{5v_0 h}{2R^2}.$$

$$9.81. v = \sqrt{3}v_0 - \frac{14}{5\sqrt{3}} \frac{M}{m} v_1.$$

$$9.82. \Delta E = \frac{1}{2} \left( \frac{mMv_0^2}{M+m} + \frac{I m r^2 \omega_0^2}{I + m r^2} \right), \text{ trong đó } I = \frac{2}{5} M R^2.$$

$$9.83. v = \frac{3}{7} v_0.$$

$$9.84. \Delta K = \frac{67}{216} \frac{M v_0^2}{2}.$$

$$9.85. V = V_0 - \frac{7}{5} \frac{M}{m} v = 80 \text{ m/s}.$$

$$9.86. d = \frac{D}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

$$9.87. \omega = \frac{mM}{m+M} \frac{av}{I}.$$

$$9.88. \operatorname{tg} \varphi = \frac{2vL}{\omega r^2}; \cos \psi = 1 - \frac{3m^2 (4v^2 L^2 + \omega^2 r^2)}{4gL^3 (2m+M)(3m+M)}.$$

$$9.89. \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} = \frac{\omega r^2}{2vL \left( 1 + \frac{M}{M+m} \frac{R^2}{2L^2} \right)}, \text{ trong đó } v_{\parallel} \text{ là thành phần vận tốc}$$

của con lắc dọc theo trục trụ,  $v_{\perp}$  – theo hướng vuông góc.

$$9.90. \omega = \sqrt{3g/l}.$$

Hướng dẫn. Theo định luật bảo toàn năng lượng

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{l}{3} m \omega^2 = \frac{mgl}{2}.$$

$$9.91. l = \frac{L}{\sqrt{3}}.$$

$$9.92*. h = \frac{6m^2}{(M+2m)(M+3m)} H.$$

*Lời giải.* Vận tốc của quả cầu tại điểm thấp nhất trước khi va chạm  $v_0 = \sqrt{2gH}$ . Vì va chạm không phải là đàn hồi nên ngay sau khi va chạm tại vị trí thấp nhất quả cầu và đầu dưới của thanh có cùng vận tốc  $v$ . Vận tốc này có thể tìm được từ định luật bảo toàn mômen động lượng ứng với trục  $A$

$$mlv_0 = mlv + I\omega,$$

trong đó  $I = ML^2/3$  là mômen quán tính của thanh đối với trục  $A$ . Vì  $v = l\omega$  nên suy ra

$$v = \frac{ml^2}{I + ml^2} v_0 = \frac{3m}{M + 3m} v_0.$$

Tiếp theo ta sẽ xét xem quả cầu và thanh sau va chạm có chuyển động cùng nhau không hay sẽ chuyển động độc lập. Để làm được điều đó, ta tính vận tốc quả cầu  $v_1$  và vận tốc đầu dưới của thanh  $v_2$  khi chúng đạt được cùng một độ cao  $h_1$  nếu như chúng chuyển động độc lập với nhau. Các vận tốc này được tìm từ các phương trình bảo toàn năng lượng

$$v^2 - v_1^2 = 2gh_1, \quad \frac{1}{2} \frac{I}{l^2} (v^2 - v_2^2) = Mg \frac{h_1}{2}.$$

Biến đổi phương trình thứ hai về dạng

$$v^2 - v_2^2 = 3gh_1,$$

ta thấy rằng  $v_1 > v_2$ . Do đó, tại bất kỳ vị trí nào quả cầu đều có xu hướng vượt thanh. Vì quả cầu chuyển động phía sau thanh nên trong suốt thời gian chuyển động nó dính vào thanh. Từ đây suy ra rằng, sau va chạm quả cầu và thanh sẽ chuyển động như một vật. Độ cao mà chúng đạt được có thể xác định dễ dàng từ định luật bảo toàn năng lượng

$$h = \frac{I + ml^2}{(M + 2m)gl^2} v^2 = \frac{6m^2}{(M + 2m)(M + 3m)} H.$$

9.93.  $ML^2 = ml^2$ . Vì  $L \geq l$  nên để quá trình diễn ra được thì  $M \leq m$ . Khi  $M > m$  thì quá trình không diễn ra.

9.94.  $\cos \varphi = -0,154$ , tức là  $\varphi \approx 99^\circ$ .

$$9.95*. v = \frac{2M\sqrt{3gl}}{M+3m}.$$

*Lời giải.* Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng cho thanh trước khi va chạm và áp dụng định luật bảo toàn mômen động lượng và bảo toàn năng lượng cho hệ thanh – vật trong thời gian va chạm

$$\frac{Mgl}{2} = \frac{Ml^2\omega^2}{6}, \quad \frac{Ml^2\omega}{3} = \frac{Ml^2\omega'}{3} + mvl, \quad \frac{Ml^2\omega^2}{6} = \frac{Ml^2\omega'^2}{6} + \frac{mv^2}{2},$$

trong đó  $\omega$  và  $\omega'$  là vận tốc góc của thanh ở vị trí thẳng đứng trước và sau va chạm,  $v$  là vận tốc của vật sau va chạm. Giải hệ trên ta tìm được  $v$ .

$$9.96. \cos\varphi = 1 - \frac{3(mv\sin\alpha)^2}{gl(M+3m)(M+2m)}.$$

$$9.97. \cos\varphi_{\text{tầm vắn}} = 1 - (1 - \cos\varphi) \left( \frac{M-3m}{M+3m} \right)^2;$$

$$\cos\varphi_{\text{sợi chỉ}} = 1 - \frac{6M^2(1 - \cos\varphi)}{(M+3m)^2}.$$

$$9.98. m_1 = 3m \left( \frac{l}{l_1} \right)^2 = \frac{4}{3}m; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

$$9.99. v_{0\min} = \sqrt{6\sqrt{2}gl}.$$

$$9.100. v = v_0 - \frac{M}{m} \sqrt{\frac{2}{3}} gL \sin \frac{\alpha}{2} = 440 \text{ m/s}.$$

$$9.101. F = \left( 1 + \frac{4a^2m}{I} \right) mg, \text{ trong đó } m \text{ là khối lượng, } I \text{ là mômen quán tính của người.}$$

$$9.102. v = \frac{M}{m} \sqrt{\frac{2gl}{3}}.$$

9.103\*. Cần phải chém bằng đoạn kiếm nằm cách tay một khoảng bằng  $2/3$  chiều dài thanh kiếm.

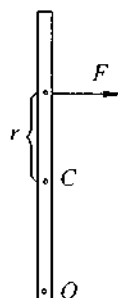
*Lời giải.* Giả sử tác dụng lực  $F$  vào điểm chém cách tâm thanh kiếm một khoảng bằng  $r$  với một lực bằng  $F$ . Coi thanh kiếm là một thanh đồng nhất (H. 398). Dưới tác dụng của lực này thanh kiếm bắt đầu chuyển động tịnh



tiến và quay, khi đó nếu điểm  $O$  đứng yên thì tay sẽ không cảm thấy lực chém. Ta viết phương trình chuyển động của trọng tâm thanh kiếm

$$m \frac{dv}{dt} = F,$$

trong đó  $\frac{dv}{dt}$  là gia tốc góc của trọng tâm thanh kiếm. Đối với chuyển động quay của thanh kiếm quanh trục đi qua trọng tâm  $C$



Hình 398

$$\frac{ml^2}{12} \frac{d\omega}{dt} = Fr,$$

trong đó  $\frac{d\omega}{dt}$  là gia tốc góc của thanh kiếm,  $m$  là khối lượng thanh kiếm,

$\frac{ml^2}{12}$  là mômen quán tính của thanh kiếm ứng với trọng tâm  $C$ . Điểm  $O$  sẽ đứng yên nếu vận tốc của chuyển động tịnh tiến  $v$  và vận tốc dài của điểm  $O$  – do chuyển động quay của thanh kiếm xung quanh điểm  $C$  với vận tốc góc  $\omega$  gây nên bằng nhau về độ lớn nhưng ngược chiều nhau, hoặc là nếu  $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\omega}{dt}$ . Đặt điều kiện này vào phương trình chuyển động, ta tìm được  $r = l/6$ , từ đây dễ dàng suy ra đáp số.

Điểm cần tìm trên thanh kiếm được gọi là tâm chém, nó trùng với tâm lắc của con lắc vật lý tạo thành bằng cách treo thanh kiếm tại điểm  $O$ . Việc giảm tải cho tâm quay khỏi tác dụng của va chạm là đặc biệt cần thiết trong trường hợp con lắc thử đạn.

**9.104.**  $x = \frac{l}{6} \frac{v_A - v_B}{v_A + v_B}$ . Kết quả không phụ thuộc vào tính chất va chạm.

**9.105.**  $x = \frac{l}{2\sqrt{3}} \sqrt{\frac{M}{m} - 1}$ . Để quá trình xảy ra được thì  $M \geq m$ . Điều kiện  $x \leq l/2$  còn cho  $M \leq 4m$ .

**9.106.**  $K = 16 \frac{m}{M} \frac{mv_0^2}{2}$ .

**9.107.**  $K = \frac{4M - 7m}{4M} \frac{mv_0^2}{2}$ .

9.108.  $U = \frac{M}{M+4m} \frac{mv^2}{2}$ . Trong các trường hợp giới hạn  $M=0$  và  $M=\infty$

ta thu được  $U=0$  và  $U=mv^2/2$ , tương ứng.

9.109\*.  $\omega = \frac{12mv_0}{(4m+M)l}$ .

Lời giải. Nếu  $F$  là lực tác dụng lên hòn bi trong thời gian va chạm thì phương trình chuyển động của hòn bi là

$$m \frac{dv}{dt} = -F.$$

Phương trình chuyển động của khối tâm của thanh

$$M \frac{dV}{dt} = F.$$

Phương trình mômen của thanh ứng với khối tâm

$$I \frac{d\omega}{dt} = \frac{Fl}{2}.$$

Khử  $F$  từ các phương trình trên, ta thu được

$$\frac{m}{I} \frac{dv}{d\omega} = -\frac{2}{l}, \quad \frac{M}{I} \frac{dV}{d\omega} = \frac{2}{l}.$$

Lấy tích phân trong giới hạn từ giá trị ban đầu của vận tốc góc  $\omega=0$  đến giá trị cuối cùng, ta tìm được

$$v - v_0 = -\frac{2}{l} \frac{I}{m} \omega, \quad V = \frac{2}{l} \frac{I}{M} \omega,$$

trong các phương trình trên  $v$ ,  $V$  và  $\omega$  là giá trị các vận tốc tương ứng sau va chạm. Vận tốc góc  $\omega$  tìm được từ phương trình bảo toàn năng lượng. Nếu thế các giá trị của  $v$ ,  $V$  vào phương trình bảo toàn năng lượng, thì ta có phương trình bậc hai đối với  $\omega$

$$\left[ 1 + \frac{4I}{l^2} \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \right] \omega^2 - 4 \frac{v_0}{l} \omega = 0.$$

Một trong các nghiệm của phương trình này ( $\omega=0$ ) là vận tốc góc của thanh trước khi va chạm, còn nghiệm còn lại là vận tốc góc của thanh sau va chạm. Theo điều kiện bài toán, cần phải lấy nghiệm thứ hai. Thay

$$I = \frac{1}{12} Ml^2 \text{ vào nghiệm, ta thu được } \omega = \frac{12mv_0}{(4m+M)l}.$$

$$9.110. h = \frac{l^3}{l^2 + r^2 / 2}.$$

$$9.111. n = \frac{3v^2 \sin^2 \alpha}{28\pi kgl} \approx 1.$$

$$9.112. v = \frac{2Mx\omega_0 l^2}{Ml^2 + 3mx^2}; x = l\sqrt{\frac{M}{3m}}; v_{\max} = l\omega_0\sqrt{\frac{M}{3m}}.$$

$$9.113. n = \frac{3v^2}{32\pi kgl} \approx 1.$$

$$9.114. \omega_{\max} = \frac{u}{l} \ln\left(1 + \frac{6m_0}{M}\right).$$

$$9.115. a_{\min} = g \frac{b}{h}; N = mg; x = \frac{ah}{2g}.$$

$$9.116. \omega = \sqrt{\frac{12m(2gl \sin \varphi - v_t^2)}{l^2(4M + 3m)}} \approx 0,3 \text{ s}^{-1}.$$

9.117. Thời gian rơi  $t = 1,3 \text{ s}$ . Số vòng quay  $n \approx \frac{\omega t + \arccos 0,6}{2\pi} \approx 0,65$ . Khi tính toán ta đã lấy chiều cao của người là 2m.

9.118.  $v = \sqrt{3gl}$ . Điểm cần tìm nằm cách chân cột một khoảng  $x = 2l/3$ .

$$9.119*. F_n = \frac{3}{2}mg; F_d = \frac{1}{4}mg.$$

*Lời giải.* Động năng của thanh tại vị trí nằm ngang  $I\omega^2/2 = mgl/2$ . Gia tốc hướng tâm của khối tâm thanh cũng ở vị trí này là  $\omega^2 l/2$ . Theo định lý về chuyển động của khối tâm thì

$$F_n = m\omega^2 \frac{l}{2} = \frac{ml^2}{2I} mg = \frac{3}{2}mg.$$

Áp dụng phương trình  $I \frac{d\omega}{dt} = M$  cho chuyển động quay của thanh ở vị trí 2,

ta thu được  $I \frac{d\omega}{dt} = mg \frac{l}{2}$ . Từ đây ta tìm được thành phần thẳng đứng của gia tốc khối tâm tại vị trí này

$$a = \frac{l}{2} \frac{d\omega}{dt} = \frac{mgl^2}{4I} = \frac{3}{4}g$$

Ta lại có  $ma = mg - F_d$ . Kết quả ta tìm được

$$F_d = m(g - a) = \frac{1}{4}mg.$$

$$9.120. v = (L - h) \sqrt{\frac{6g(L + h)}{4L^2 - 3h^2}}.$$

$$9.121. v = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{gR\sqrt{3}}{5}}.$$

$$9.122. v = \sqrt{\frac{gh}{2}}.$$

$$9.123. \Delta K = \frac{mv^2}{8}; \Delta p = \frac{mv}{4}.$$

$$9.124. h = \frac{\phi l}{24 \cos \phi} \frac{(1 + 3 \cos^2 \phi)^2}{(1 - 3 \cos^2 \phi)}; 3 \cos^2 \phi < 1.$$

$$9.125. T = \frac{1}{2} \rho \omega^2 (l^2 - x^2); T_{\max} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 l^2; K_{\max} = \frac{1}{3} VT_{\max} = 10^7 \text{ J}.$$

$$9.126. \text{ Quả cầu sẽ chuyển động về bên phải với vận tốc } \frac{7}{13}v_0 \text{ và quay với}$$

$$\text{vận tốc } \frac{v_0}{R}. \text{ Vận tốc góc của thanh } \frac{6v_0}{13L}; t = \frac{40}{91} \frac{v_0}{kg}.$$

$$9.127. x_{\max} = \sqrt{\frac{2mgH}{k[1 + M/(3m)]}}.$$

$$9.128. \text{ Trong mặt phẳng ngang khối tâm của thanh chuyển động với vận tốc } \sqrt{\frac{3}{2}gh}; \text{ thanh quay xung quanh khối tâm của nó với vận tốc góc } \frac{\sqrt{6gh}}{L}.$$

$$9.129. U = \frac{1}{2} \frac{ml^2}{I + ml^2} Mgl = \frac{3}{2} \frac{Mm}{M + 3m} gl, \text{ trong đó } I \text{ là mômen quán tính của thanh.}$$

$$9.130. \omega = \frac{12m\omega_0}{4M + 3m} \approx 1 \text{ s}^{-1}.$$

$$9.131. \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

$$9.132. H = 2l = -\frac{I_1^2 \omega^2}{2Mg(I_2 + Ml^2)}, \text{ tức là khi } \omega^2 \geq \frac{4Mgl(I_2 + Ml^2)}{I_1^2} \text{ động cơ có thể có thể quay cả vòng quanh điểm A.}$$

$$9.133. \text{Xung của phản lực } \int_0^t N dt = \frac{P}{2} \text{ hướng về phía cùng chiều với lực tác dụng.}$$

$$9.134. \text{Xung của phản lực của giá đỡ trong thời gian va chạm } \tau \text{ bằng}$$

$$\int_0^t N dt = \frac{1}{10} Mv.$$

$$9.135. \frac{\omega_1}{\omega_2} = -5;$$

$$9.136. \frac{\omega_1}{\omega_2} = -3; \frac{v_1}{v_2} = -5;$$

$$9.137. F = \frac{P}{1 + 3(l/L)^2}; \text{ khi } l = L \text{ thì } F = \frac{P}{4}.$$

$$9.138. \frac{N}{N_0} = \frac{8}{13}; v = \sqrt{\frac{3}{4} gl}.$$

$$9.139. v_C = \sqrt{\frac{9}{13} gl}; N = \frac{28}{169} mg.$$

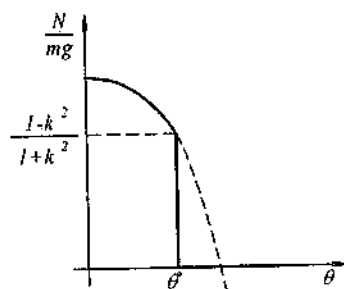
$$9.140. N = \frac{1 + 4(1 - \cos \alpha)^2}{(1 + 4 \sin^2 \alpha)} mg \approx \frac{1}{4} mg.$$

$$9.141. N = Mg \frac{1 + \frac{Mr^2}{I_0} (1 - \cos \alpha)^2}{\left(1 + \frac{Mr^2}{I_0} \sin^2 \alpha\right)^2} \approx 0,32Mg, \text{ trong đó } I_0 = \frac{Mr^2}{2}.$$

$$9.142. k_{\min} = \frac{F_{\text{ms}}}{N} = \frac{m(M + m)}{2M^2 + 4Mm + m^2} = \frac{4}{31}.$$

9.143.  $v_0 > \sqrt{(M/m + 4m/M + 3)gR} = 8,1 \text{ m/s}$ .

9.144.  $N = mg \cos \theta$ . Sau khi quay một góc  $\theta^*$  (đồ thị trên H. 399), điểm  $m$  sẽ chuyển động theo đường parabol.



9.145.  $\omega_0 = \frac{4v_0 \sin \alpha}{R} = 4s^{-1}$ .

9.146. Gọi  $T$  là thời gian xảy ra va chạm, còn  $\tau$  là thời gian trượt cho đến khi bắt đầu lăn không trượt. Xét hai trường hợp:

Hình 399

1)  $\tau \geq T$ :  $\tan \alpha = \frac{1}{2k}$ ,  $\omega_2 = \omega_1 - \frac{5kv_0}{R}$  (điều

kiện này được thực hiện khi  $k \leq \frac{\omega_1 R_0}{7v_0}$ );

2)  $\tau < T$ :  $\tan \alpha = \frac{7}{2} \frac{v_0}{\omega_1 R}$ ;  $\omega_2 = \frac{2}{7} \omega_1$  (trường hợp này được thực hiện khi

$k > \frac{\omega_1 R_0}{7v_0}$ ).

9.147. Khi  $k < \frac{1}{7}$  quả cầu bật khỏi thành dưới góc  $\tan \alpha = 2k$ ; khi  $k > \frac{1}{7}$  - dưới góc  $\tan \alpha = \frac{2}{7}$ .

9.148. Gọi  $T$  là thời gian diễn ra va chạm, còn  $\tau$  là thời gian trượt cho đến khi bắt đầu lăn không trượt. Xét hai trường hợp:

1)  $\tau \leq T$ : trường hợp này được thực hiện khi  $k \geq \frac{1}{4} \tan \varphi = \frac{1}{4\sqrt{3}}$ ; khi đó

$$\tan \psi = \frac{\omega_0 R}{v_0 \cos \varphi} = \frac{1}{2\sqrt{3}}; \quad \omega_0 = \frac{v_0 \sin \varphi}{2R} = \frac{v_0}{4R};$$

2)  $\tau > T$ : trường hợp này được thực hiện khi  $k < \frac{1}{4\sqrt{3}}$ , chính xác hơn là khi

$$k = \frac{\omega_0 R}{2v_0 \cos \varphi} = \frac{\omega_0 R}{v_0 \sqrt{3}}; \quad \tan \psi = \frac{1}{3} - \frac{2\omega_0 R}{v_0 \sqrt{3}}.$$

9.149.  $\tan \beta = \frac{3}{7} \tan \alpha$ .

$$9.150. \omega_{\max} = \frac{v_0}{R} \frac{k \sin \alpha}{k^2 + 2k + \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{7} \frac{v_0}{R};$$

$$\frac{Q}{m + m_0} = \frac{v_0^2 k}{2(k+1)} - \frac{\omega_{\max}^2 R^2 k(2+k)}{2(1+k)^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{v_0^2}{(1+k)^2} + \frac{v_0^2}{14^2} \right) = \frac{3}{28} v_0^2.$$

9.151\*. Bán trục chính của elipxoit quán tính hướng theo đường chéo nối các đỉnh đối diện của khối lập phương và bằng  $a = 1/\sqrt{I_0}$ ; hai bán trục khác bằng nhau  $b = c = a/\sqrt{5,5}$ , trong đó  $I_0 = ml^2/6$  là mômen quán tính đối với trục bất kỳ đi qua khối tâm của khối lập phương.

*Lời giải.* Elipxoit quán tính đối với tâm khối lập phương là một hình cầu bán kính  $a = 1/\sqrt{I_0}$ . Đối với điểm A thì trục trùng với đường chéo của khối lập phương là trục chính với mômen quán tính  $I_0$ . Đối với trục bất kỳ vuông góc với đường chéo tại điểm A thì mômen quán tính xác định theo định lý Steiner

$$I_A = I_0 + m \left( \frac{d}{2} \right)^2,$$

trong đó  $d = l\sqrt{3}$  là đường chéo khối lập phương. Từ đây suy ra đáp số.

$$9.152*. I = \frac{M}{6} \frac{l^2 m^2 + l^2 n^2 + m^2 n^2}{l^2 + m^2 + n^2}.$$

*Lời giải.* Các mômen quán tính chính đối với khối tâm

$$I_1 = \frac{M}{12} (m^2 + n^2), \quad I_2 = \frac{M}{12} (l^2 + n^2), \quad I_3 = \frac{M}{12} (l^2 + m^2);$$

các cosin định hướng theo trục quay đối với hệ tọa độ gắn với các hướng chính và có gốc là khối tâm bằng

$$\cos \alpha = l/d, \quad \cos \beta = m/d, \quad \cos \gamma = n/d,$$

trong đó  $d^2 = l^2 + m^2 + n^2$  là bình phương đường chéo của hình hộp. Mômen quán tính đối với một hướng bất kỳ được biểu diễn thông qua các mômen chính bằng công thức sau

$$I = I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \cos^2 \beta + I_3 \cos^2 \gamma.$$

Thế vào công thức này các giá trị của các cosin hướng, ta tìm được đáp số.

## §10. DAO ĐỘNG CỦA VẬT RẮN. SÓNG

$$10.1. \frac{T_2}{T_1} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$10.2. T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}; T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{6g}}; \frac{T_1}{T_2} = 2.$$

$$10.3. T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{29a}{18g}}; T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}; \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{29}{18}} \approx 1,27.$$

$$10.4. \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{11}{4\sqrt{6}}} \approx 1,06.$$

$$10.5. \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{2k - mgl}{2k + mgl}}.$$

$$10.6. l = 15 \text{ cm}.$$

$$10.7. x = \frac{R}{\sqrt{2}}; T_{\min} = 2\pi\sqrt{\frac{R\sqrt{2}}{g}}.$$

$$10.8. S_{\max} = \sqrt{\frac{I_0}{m}} = \frac{l}{2\sqrt{3}}; \omega_{\max}^2 = \frac{g}{2} \sqrt{\frac{m}{I_0}} = \frac{g}{l} \sqrt{3}, \text{ trong đó } S \text{ là khoảng}$$

cách từ điểm treo đến trung điểm của thanh.

$$10.9. x = 2(a + b) = 34,8 \text{ cm}; T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 1,42 \text{ s};$$

$$l = a + \frac{(a+b)^2 + \frac{2}{5}r^2}{a} = 49,6 \text{ cm}; a = \sqrt{\frac{1}{2}\left(b^2 + \frac{2}{5}r^2\right)} = 7,42 \text{ cm}.$$

$$10.10. T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{k}\left(\frac{I}{r^2} + m\right)}.$$

$$10.11. T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga + ka^2}}.$$

$$10.12. x_0 = \frac{mga}{kl}; T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{kl^2}}.$$



$$10.13. T = \frac{4\pi}{\sqrt{3\left(\frac{k}{m} + \frac{2g}{l}\right)}}.$$

$$10.14. x_0 = \frac{g(m+2M)}{k}; T = 4\pi\sqrt{\frac{m+3M}{3k}}.$$

$$10.15. T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{3(k_1+k_2)}}.$$

$$10.16. T = \pi\sqrt{\frac{(3m+4M)(k_1+k_2)}{3k_1k_2}}.$$

$$10.17. T = \pi\sqrt{\frac{2M+3m}{2k}}.$$

$$10.18. T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{k}\left(M + \frac{m_1+m_2}{2}\right)}.$$

$$10.19. T = 2\pi\sqrt{\frac{3M+m}{3(k_1+k_2)}}.$$

$$10.20. \text{a) } \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}; \text{ b) } \omega = \sqrt{\frac{6k}{m}}.$$

$$10.21. T = 2\pi\sqrt{\frac{3M/8+m}{k}}.$$

$$10.22. A = mv\sqrt{\frac{3}{k(M+3m)}}.$$

$$10.23. A = \omega_0 L \sqrt{\frac{M}{3k[1+3m/(4M)]}}.$$

$$10.24. \varphi_0 = \frac{v}{l}\sqrt{\frac{3m}{11k}}; T = 2\pi\sqrt{\frac{11}{3}\frac{m}{k}}.$$

$$10.25. A = \frac{\Delta l}{\sqrt{1+\frac{4M}{3m}}}.$$

$$10.26. T = \frac{2\pi}{h}\sqrt{\frac{M[2h^2 + \pi^2(D^2 + d^2)]}{2(k_1+k_2)}}.$$

$$10.27. T = \frac{2\pi}{\omega}, \text{ trong đó } \omega^2 = \frac{6ka^2}{ml^2} - \frac{3g}{2l}. \text{ Dao động có thể xảy ra khi}$$

$$k > \frac{mg}{4} \frac{l}{a^2}.$$

$$10.28. T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{3k(m_1 + m_2)}}.$$

$$10.29. \varphi_0 = \sqrt{\frac{3mv_0^2}{2l(kl + mg)}}.$$

$$10.30. T = \pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

$$10.31. \varphi_0 = \frac{2\sqrt{6}}{11} \frac{v}{l} \sqrt{\frac{m}{k}}; T = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{3k}}.$$

$$10.32. T = 2\pi \sqrt{\frac{3\pi r^4 l \rho + 8\mu a^3}{9\mu g a r}} = 1,65 \text{ s}.$$

$$10.33. I = \frac{T^2}{4\pi^2} mgr - 3mr^2 \approx 6 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2.$$

$$10.34. T = \frac{2\pi}{r} \sqrt{\frac{I + mr^2}{2k}}. \text{ Đối với trụ đặc thì } T = \pi \sqrt{\frac{3m}{k}}.$$

$$10.35. T = \pi \sqrt{\frac{15m}{11k}}; A = \frac{2}{15} l \frac{k}{m\omega^2} = \frac{l}{22}.$$

$$10.36. T = 2\pi \sqrt{\frac{15m}{32k}}; A = \frac{4}{45} l \frac{k}{m\omega^2} = \frac{l}{24}.$$

$$10.37. T = 2\pi \sqrt{\frac{h}{2g}}.$$

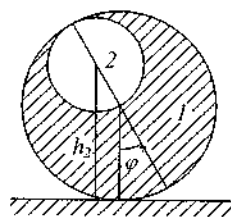
$$10.38. T = 2\pi \sqrt{\frac{7R}{5g}}.$$

$$10.39. T = 2\pi \sqrt{R^2 - l^2} \sqrt{\frac{1}{g} \left( R^2 - \frac{2}{3} l^2 \right)}.$$

$$10.40. T = 2\pi\sqrt{10R/g}.$$

$$10.41*. T = \pi\sqrt{29R/g}.$$

*Lời giải.* Đưa bài toán về dạng tìm biểu thức tính thế năng và động năng của hệ. Giả sử ta lấp đầy khoang trống bằng chính chất làm trụ. Trụ đặc mới được tạo thành ta gọi là trụ 1, còn trụ có bán kính bằng một nửa chiếm thể tích khoang trống là trụ 2. Khối lượng các trụ lần lượt là  $m_1$  và  $m_2$ . Năng lượng của hệ (thế năng cũng như động năng) sẽ bằng hiệu năng lượng của hai trụ 1 và 2. Khi quay



Hình 400

hệ từ vị trí cân bằng một góc  $\varphi$  (H. 400), tâm khối của trụ 1 sẽ giữ nguyên độ cao nên thế năng  $U_1$  của nó không đổi. Thế năng của trụ 2 sẽ bằng  $U_2 = m_2gh_2$ , trong đó  $h_2 = R + \frac{R}{2}\cos\varphi$  là độ cao của khối tâm trụ 2 so với mặt phẳng ngang mà hệ đặt trên đó. Thế năng toàn phần của hệ

$$U = U_1 - U_2 = \text{const} - m_2gR\left(1 + \frac{\cos\varphi}{2}\right).$$

Thế năng chứa phần biến thiên là  $(m_2gR\cos\varphi)/2$ . Vì thế khi chọn hằng số cộng hợp lý, ta có thể biểu diễn đại lượng  $U$  dưới dạng

$$U = \text{const} + \frac{m_2gR(1 - \cos\varphi)}{2} = \text{const} + m_2gR\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

hoặc đối với các góc  $\varphi$  nhỏ  $U \approx \text{const} + m_2gR\varphi^2/4$ . Động năng của hệ  $K = (I_1 - I_2)\dot{\varphi}^2/2$ , trong đó  $I_1$  và  $I_2$  mômen quán tính của các trụ đối với trục quay tức thời. Khi góc  $\varphi$  thay đổi thì  $I_1$  và  $I_2$  cũng thay đổi. Nhưng đối với những dao động nhỏ thì sự thay đổi này có thể bỏ qua, và coi  $I_1$  và  $I_2$  là mômen tại thời điểm khi hệ nằm ở vị trí cân bằng. Khi đó, sử dụng định lý Huyghens - Steiner ta dễ dàng tìm được  $I_1 = 3m_1R^2/2$  và  $I_2 = 19m_2R^2/8$ . Chú ý rằng  $m_1 = 4m_2$ , suy ra  $K = 29m_2R^2\dot{\varphi}^2/16$ . Trên cơ sở các giá trị tìm được của  $U$  và  $K$ , ta có thể kết luận rằng dao động nhỏ của hệ là dao động điều hoà với chu kỳ  $T = \pi\sqrt{29R/g}$ .

$$10.42. T = 2\pi\sqrt{\frac{5R}{2g}}.$$

$$10.43. T = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g} \frac{3M+m}{2M+m}}.$$

$$10.44. T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{3g}}.$$

$$10.45. T = 2\pi \frac{a}{b} \sqrt{\frac{l}{3g}}.$$

$$10.46. T = 2\pi \sqrt{\frac{r^2 + 6l^2}{4gl \sin \alpha}} \approx 2\pi \sqrt{\frac{3l}{2g \sin \alpha}}, \text{ trong đó } r \text{ là bán kính đĩa.}$$

$$10.47. T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g} \frac{9M+2m}{2M+m}}.$$

$$10.48. T = 2\pi \sqrt{\frac{2b}{3g \sin \alpha}}.$$

$$10.49. T = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}}.$$

$$10.50. T = 2\pi \sqrt{\frac{r \cos \alpha}{g \sin^2 \alpha} \left( 2 - \frac{2}{3} \sin^2 \alpha \right)}.$$

$$10.51. T_1/T_2 = 1.$$

$$10.52. T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2}.$$

10.53.  $T = 2\pi \sqrt{I/(3g)}$ . Trong trường hợp tổng quát hơn, khi tấm không đồng nhất nhưng khối tâm của nó trùng với tâm hình học thì  $T = 2\pi \sqrt{2H/(Mga^2)}$ , trong đó  $I$  là mômen quán tính của tấm đối với trục thẳng đứng đi qua tâm của nó,  $a$  là chiều dài một cạnh của tấm.

$$10.54. \frac{T'}{T} = \frac{1}{\sqrt{1+I/I_0}} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{I}{I_0}, \text{ trong đó } T \text{ là chu kỳ dao động của đồng}$$

hồ đứng yên,  $T'$  là chu kỳ dao động của đồng hồ nằm trên mặt bàn ngang nhẵn tuyệt đối. Đồng hồ chạy nhanh 0,1%.

$$10.55. \frac{T}{T_0} = \sqrt{\frac{I}{I+I_0}}.$$

$$10.56. T = 2\pi \sqrt{\frac{I_1 I_2}{f(I_1 + I_2)}}.$$

$$10.57. T = \pi \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

$$10.58. A = \frac{4}{3} \frac{F_0}{k}, \text{ trong đó } k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$

10.59. Nếu khi con lắc dao động, vận tốc góc cực đại của nó  $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{\max}$  nhỏ

hơn vận tốc góc của trục quay  $\omega$ , hoặc  $\omega - \frac{d\varphi}{dt} > 0$  tại bất kỳ thời điểm nào

thì mômen của lực ma sát tác dụng từ phía trục quay lên con lắc sẽ luôn hướng về một phía. Vì mômen này không đổi, còn khi dao động con lắc đi theo hướng quay ngược với chiều quay của trục cùng một quãng đường, nên công của mômen lực ma sát trong một chu kỳ bằng không.

10.60\*. *Lời giải.* Khi dao động, lực ma sát tác dụng lên khớp nối từ phía trục quay trong một nửa chu kỳ sẽ hướng theo chuyển động của con lắc, khi trục quay và khớp nối quay theo một hướng, và trong nửa chu kỳ còn lại lực này hướng ngược với chiều chuyển động của con lắc.

1) Nếu lực ma sát tăng cùng với vận tốc trượt thì trong nửa chu kỳ, khi trục quay và khớp nối quay ngược chiều nhau nó sẽ lớn hơn. Vì vậy công của lực ma sát của con lắc với trục quay trong một chu kỳ sẽ dương, độ tắt dần của con lắc tăng lên do ma sát giữa khớp nối và trục quay.

2) Nếu lực ma sát giảm cùng với vận tốc trượt thì ngược lại, công của lực ma sát trong cả chu kỳ sẽ âm, và dao động sẽ tắt dần chậm hơn. Trong trường hợp, khi công của lực ma sát trên trục quay lớn hơn trên các bộ phận khác của con lắc thì năng lượng dao động sẽ tăng lên, biên độ dao động sẽ tăng và con lắc có thể tự dao động.

$$10.61. x \approx 9,6 \text{ m.}$$

$$10.62. L = 30 \text{ cm.}$$

*Hướng dẫn.* Tần số dao động  $\nu = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ , trong đó  $T$  là lực căng của dây

đàn,  $\rho$  là khối lượng dây đàn trên một đơn vị dài,  $L$  là chiều dài dây đàn. Áp dụng công thức trên ta tìm được  $L$ .

10.63. Chu kỳ dao động của dây mảnh giảm hai lần.

10.64. Giảm 9 lần.

**10.65.** 1) Ấn dây đàn trên một đoạn rất ngắn ở chính giữa;

2) Ấn tương tự cách đầu dây  $1/3$  chiều dài. Không thể giảm tông của âm bằng cách đó.

**10.66.** Nếu

$$y_1 = a_1 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{d_1}{\lambda} \right) = a_1 \sin(\omega t - \varphi_1)$$

là dao động của hạt đang xét do các sóng từ nguồn thứ nhất gây ra, còn

$$y_2 = a_2 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{d_2}{\lambda} \right) = a_2 \sin(\omega t - \varphi_2)$$

là dao động của hạt đang xét do các sóng từ nguồn thứ hai gây ra, thì dao động tổng hợp có dạng

$$y = y_1 + y_2 = A \sin(\omega t + \psi),$$

trong đó

$$A = \left[ a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \right]^{1/2}, \quad \psi = \arctg \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}.$$

**10.67.**  $J = \frac{\Delta P^2}{2} \frac{S}{\rho v_{at}} \approx 4,6 \cdot 10^{-5} \text{ W}.$

*Hướng dẫn.* Dòng năng lượng  $J = \frac{\rho \mu^2}{2} v_{at} S$ ,  $u/v_{at} = \Delta P/(\gamma P)$ ; với lưu ý

rằng  $v_{at} = \sqrt{\gamma P / \rho}$ , ta tìm được đáp số.

**10.68.**

1)  $v = \frac{990}{\pi} \approx 315 \text{ s}^{-1}$ ;

2)  $c_{at} = 330 \text{ m/s}$ ;

3)  $\lambda = \pi/3 \approx 1,05 \text{ m}$ ;

4)  $u = 99 \text{ cm/s}$ ;

5)  $\Delta P = \gamma P u / v_{at} \approx 3,2 \text{ mm Hg}.$

## §11. CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT RẮN TRONG KHÔNG GIAN. CON QUAY HỒI CHUYỂN

**11.1.**  $\tan \beta = a^3 m^2 g \sin \alpha / (I_{\parallel}^2 \omega^2)$ , trong đó  $I_{\parallel}$  là mômen quán tính của con quay đối với trục của nó,  $m$  là khối lượng con quay,  $a$  là khoảng cách từ điểm tỳ con quay đến khối tâm của nó.

**11.2.**  $\alpha \approx \frac{m a l \tau}{I_{\parallel} \omega} \approx 0,43^\circ \approx 25'.$

**11.3.**  $\varphi = \arccos \frac{3g}{2\omega^2 l}.$

**11.4.**  $L \approx 10^8 \text{ g.cm}^2/\text{s}; M \approx 10^9 \text{ g.cm}^2/\text{s}.$

**11.5\*.**  $\frac{c-v}{c} \approx 1,9 \cdot 10^{-22}.$

*Lời giải.* Độ xoay cực đại đạt được khi vận tốc quỹ đạo  $\vec{v}$  vuông góc với trục Trái Đất. Quỹ đạo lấy đi một mômen động lượng  $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} / \sqrt{1 - v^2/c^2}$  vuông góc với vận tốc  $\vec{v}$ . Trái Đất nhận được một mômen tương tự nhưng ngược chiều. Khi đó vectơ vận tốc góc của Trái Đất  $\vec{\omega}$  lệch về phía cạnh một góc  $\alpha = L/(I\omega)$ . Thế vào biểu thức này  $I = 2Mr^2/5$  và lưu ý rằng hiệu  $c - v$  rất nhỏ, ta được

$$\frac{c-v}{c} \approx \frac{25m^2 c^2}{8M^2 l^2 \omega^2} \approx 1,9 \cdot 10^{-22}.$$

Chú ý rằng kết luận trên chỉ đúng đối với việc xoay trục Trái Đất “trong không gian”, tức là so với hệ “các sao cố định”. Để nghiên cứu độ xoay của trục quay “trong vật”, tức là so với chính Trái Đất thì cần chú ý đến tính không đồng nhất của quả đất. Điều đó liên quan tới vấn đề là chuyển động quay của quả cầu quanh một đường kính cố định luôn không bền.

**11.6.**  $\varphi = 1,34 \cdot 10^{-17} \text{ rad}.$

**11.7.**  $\alpha \approx \frac{5mv \sin \varphi}{2M_{\text{TD}} R_{\text{TD}} \omega_{\text{TD}}} = 1,27 \cdot 10^{-17} \text{ rad}.$

**11.8.**  $M = \frac{2\pi I N u}{R} = 612 \text{ N.m}^2.$

**11.9.**  $F = \frac{m\rho^2 2\pi N v}{Ra} \approx 2000 \text{ N}.$

$$11.10. F_{\max} = \frac{2\pi^2 \phi n \rho^2 m}{Tl} \approx 6500 \text{ N}.$$

$$11.11. N_{\min} = \frac{1}{I} h m k r.$$

11.12. Trục nghiêng về phía  $x$  một góc  $\varphi$  so với trục  $z$  trong mặt phẳng  $zOx$  và  $\varphi = \frac{2mvz_0}{L_z} \approx 0,04 \text{ rad} \approx 2,3^\circ$ .

$$11.13. \operatorname{tg} \alpha = \frac{4l^2 g}{r^4 \omega^2}.$$

11.14.  $F_{\text{al}} = P + \frac{I_{//} \Omega^2}{r} = P + \frac{1}{2} m \Omega^2 r$ , trong đó  $P$  là khối lượng con lăn,  $m$  là khối lượng của nó. Khi  $r = 50 \text{ cm}$  và vận tốc làm việc  $1 \text{ vòng/s}$  ( $\Omega = 2\pi \text{ rad/s}$ ) ta thu được  $m \Omega^2 r / 2 \approx mg = P$ . Vậy  $F_{\text{al}} \approx 2P$ . Ta thấy rằng mômen động lượng toàn phần  $\vec{L}$  không hướng dọc theo trục của con lăn vì còn có mômen xuất hiện do chuyển động quay quanh trục thẳng đứng. Tuy nhiên mômen này không đổi khi con lăn quay, và vì vậy, khi giải bài ta có thể bỏ qua.

$$11.15. T = \frac{3\pi \omega r}{g} \operatorname{tg} \alpha; R = \frac{3}{2} \frac{\omega^2 r^2}{g} \operatorname{tg} \alpha.$$

$$11.16. \Omega = \frac{g'h}{\pi v R^2} = 0,33 \text{ s}^{-1}, \text{ trong đó } g' = \sqrt{a^2 + g^2} = 10,25 \text{ m/s}^2; \vec{\Omega} \uparrow \downarrow \vec{g}'.$$

$$11.17. \alpha_{\max} = 2\alpha_0 = 2 \arctg \frac{a}{g} = 22^\circ 40'; \tau = \frac{\pi}{\Omega} \approx 9,9 \text{ s, trong đó } \Omega \approx 0,318 \text{ s}^{-1}.$$

$$11.18. \varphi = \arctg \frac{2v^2}{Rg}.$$

$$11.19*. \vec{M} = 2[\vec{\Omega} \vec{\omega}] I_z = [\vec{\Omega} \vec{\omega}] I_x.$$

**Giải.** Ta chia tưởng tượng chiếc vòng ra thành những phần tử vô cùng bé – các chất điểm khối lượng  $dm$ . Ta xét chuyển động của một trong các chất điểm này. Vì vận tốc tương đối  $\vec{v}_{\text{td}} = [\vec{\omega} \vec{r}]$  nên theo định lý Coriolis, lực tác dụng lên chất điểm này là

$$d\vec{f} = -dm\omega^2 \vec{r} + dm[\vec{\Omega}[\vec{\Omega} \vec{r}]] + 2dm[\vec{\Omega}[\vec{\omega} \vec{r}]].$$



Biểu thức này đổi dấu khi dấu của  $\vec{r}$  thay đổi và vì vậy, khi lấy tích phân theo cả vòng thì sẽ bằng không. Do đó, tổng hợp lực tác dụng lên vòng phải bằng không. Để tính mômen  $d\vec{M}$  của lực  $d\vec{f}$ , ta đưa vào hệ toạ độ vuông góc có các vectơ đơn vị trên các trục là  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  và hướng trục  $X$  dọc theo vectơ  $\vec{\omega}$ , còn trục  $Y$  - dọc theo  $\vec{\Omega}$ . Sau những tính toán đơn giản, ta được

$$d\vec{M} = 2[\vec{\Omega}\vec{\omega}]y^2 dm + [\vec{\Omega}(2\omega\vec{j} - \Omega\vec{i})]yz.$$

Khi lấy tích phân theo cả chiếc vòng thì số hạng thứ hai sẽ bằng không, và vì vậy

$$\vec{M} = 2[\vec{\Omega}\vec{\omega}]I_z = [\vec{\Omega}\vec{\omega}]I_x,$$

trong đó  $I_z$  và  $I_x$  là các mômen quán tính của chiếc vòng ứng với trục  $Z$  và trục  $X$ . Vì vậy mômen  $\vec{M}$  cần tìm phải vuông góc với cả  $\vec{\omega}$  và  $\vec{\Omega}$ . Kết quả đúng trong cả trường hợp khi các vectơ  $\vec{\omega}$  và  $\vec{\Omega}$  không vuông góc với nhau.

$$11.20. \varphi \approx 2 \cdot \frac{5}{11} \frac{v_0}{\omega R} \approx \frac{1}{55} \approx 1^\circ.$$

$$11.21. \frac{v_0}{R\omega} = \frac{11}{5}.$$

$$11.22*. \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{2} \frac{kgt}{r\omega_0}; \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{5}{7} \frac{v_0}{r\omega_0}.$$

*Lời giải.* Sau va chạm, tâm của quả cầu bị va chạm sẽ bắt đầu chuyển động với vận tốc ban đầu  $v_0$ . Theo định lý về chuyển động của khối tâm thì vận tốc của nó tại thời điểm  $t$  sẽ là  $v = v_0 - kgt$ . Gọi  $\vec{\omega}$  là giá trị tức thời của vectơ vận tốc góc. Mômen lực ma sát so với tâm quả cầu bằng  $kmgr\vec{i}$ , trong đó  $\vec{i}$  là vectơ đơn vị hướng ra sau hình vẽ và vuông góc với hình vẽ. Từ phương trình  $\vec{M} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = kmgr\vec{i}$ , ta được  $\frac{2}{5}r \frac{d\vec{\omega}}{dt} = kg\vec{i}$ . Suy ra  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \frac{5}{2} \frac{kgt}{r} \vec{i}$ . Trục quay tức thời luôn nằm trong mặt phẳng vuông góc

với mặt phẳng hình vẽ. Góc  $\alpha$  được xác định từ biểu thức  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{2} \frac{kgt}{r\omega_0}$ .

Tiếp theo, ta xác định thời điểm bắt đầu lăn không trượt. Vận tốc chuyển động tịnh tiến của quả cầu chỉ phụ thuộc vào thành phần nằm ngang của vectơ  $\vec{\omega}$ . Thời điểm bắt đầu lăn không trượt tìm được từ điều kiện  $\frac{5}{2}kgt = v_0 - kgt$ . Từ thời điểm này góc  $\alpha$  sẽ không đổi và đối với góc lăn

$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{5}{7} \frac{v_0}{r \omega_0}$ . Trong trường hợp riêng, khi  $v_0 = \omega_0 r$  ta tính được

$\operatorname{tg} \alpha = 5/7$ ,  $\alpha = 35^\circ 32'$ . Chú ý rằng đáp số tìm được xác định độ xoay của trục quay so với không gian bên ngoài chứ không phải so với bên trong quả cầu.

11.23.  $\vec{L} = 2m[\vec{\omega}_0 a^2 - \vec{a}(\vec{\omega}_0 \vec{a})]$ ; không phụ thuộc;

$$|\vec{F}| = \frac{m\omega_0^2 a^2 \sin \alpha \cos \alpha}{l}; \quad \vec{F} = \frac{m(\vec{\omega}_0 \vec{a})}{l\omega_0} [\vec{\omega}_0 (\vec{\omega}_0 \vec{a}) - \vec{a}\omega_0^2],$$

trong đó  $\vec{F}$  ứng với ổ trục trên.

11.24.  $F = \frac{m}{3a} (\pi l)^2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 718 \text{ N}.$

## §12. HỆ QUY CHIỀU KHÔNG QUÁN TÍNH

12.1.  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g'}}$ , trong đó  $g' = \sqrt{g^2 + a^2}$ .

12.2.  $T_1 = T \sqrt{1 + \frac{a}{g}}$ . (Sau khi ngắt động cơ thì đồng hồ ngừng chạy.)

12.3. 1) Ống bao sẽ dần dần (theo sự gia tăng của gia tốc) dịch chuyển về phía ngược với chiều của gia tốc; khoảng dịch chuyển cực đại

$$\xi = \frac{ma}{k} \approx 1 \text{ cm}.$$

2) Ống bao bắt đầu thực hiện dao động với phương trình  $x = \frac{ma}{k}(1 - \cos \omega t)$ ,

trong đó  $x$  là tọa độ của ống so với xe lăn được tính từ vị trí ban đầu của ống, coi chiều dương của  $x$  là chiều ngược với chiều của gia tốc xe lăn;  $\omega = \sqrt{k/m} = 10 \text{ s}^{-1}$ . Do ma sát và lực cản của không khí mà dao động này sẽ tắt dần.

12.4\*. *Lời giải.* Nếu li độ ống bao từ tâm khối chung là  $x_1$ , còn dịch chuyển của xe lăn là  $x_2$  thì  $mx_1 = Mx_2$ . Phương trình chuyển động của xe lăn  $M\ddot{x}_2 = -k(x_2 + x_1)$ ; thế  $x_1$  từ biểu thức trước đó vào phương trình này, ta được

$$M\ddot{x}_2 + k(1 + M/m)x_2 = 0.$$

Tương tự đối với ống bao

$$m\ddot{x}_1 + k(1 + m/M)x_1 = 0.$$

Vậy sẽ xảy ra dao động điều hoà của xe lăn và ống bao với tần số

$$\omega = \sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}} \approx 10,8 \text{ s}^{-1}. \text{ Biên độ dao động của ống bao } l \frac{M}{M+m} = 5 \text{ cm},$$

$$\text{của xe lăn } l \frac{m}{M+m} \approx 1 \text{ cm}.$$

$$12.5. \text{ Về phía đông } s_D = \frac{1}{3} \omega t^3 g \cos \varphi = \frac{2}{3} \omega t h \cos \varphi;$$

Về phía xích đạo  $s_{XD} = \frac{1}{12} \omega^2 t^4 g \sin 2\varphi = \frac{1}{2} \omega t \sin \varphi s_D$ , trong đó  $\varphi$  là vĩ độ vật lý của điểm khảo sát,  $t$  là thời gian,  $h$  là độ cao mà điểm đó rơi xuống.

12.6. Viên đạn lệch về phía tây một khoảng

$$x_T = \frac{4}{3} \frac{v_0^3 \omega}{g^2} \cos \varphi \approx 51 \text{ cm}.$$

Kết quả có thể không như ta cảm nhận. Khi chuyển động lên trên lực Coriolis hướng về phía tây, còn khi chuyển động xuống dưới thì nó hướng sang phía đông. Thoạt đầu ta có thể nghĩ rằng độ lệch về phía tây sẽ được bù bởi độ lệch về phía đông sau đó. Nhưng thực tế không phải như vậy. Khi vật chuyển động lên trên vận tốc ban đầu của nó bằng không. Tuy nhiên vật đến điểm cao nhất với thành phần vận tốc hướng về phía tây mà vật thu được dưới tác dụng của lực Coriolis. Vì thế khi vật rơi xuống nó đã có vận tốc đầu hướng sang phía tây. Do đó, vận tốc luôn hướng sang phía tây và khi rơi xuống đất nó bằng không.

12.7. Cần phải hướng nòng súng về phía Đông một góc

$$\alpha = \frac{2}{3} \frac{v_0 \omega}{g} \cos \varphi \approx 2,45 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \approx 51''.$$

$$12.8. \Delta S = \frac{\omega_{TD} L^2 \sin \varphi}{v_0} = 23,6 \text{ m}, \text{ trong đó } \omega_{TD} \text{ là vận tốc góc của Trái}$$

Đất quanh trục riêng của nó. Độ lệch không phụ thuộc vào hướng bắn, nếu bỏ qua ảnh hưởng của lực hướng tâm.

$$12.9. \Delta h = 2v\omega_{TD}t^2 \approx 12,5 \text{ cm}.$$

$$12.10. \Delta S_D \approx 0,7 \text{ m}, \Delta S_N \approx 0,5 \text{ m}.$$

12.11\*.  $x = 5,8\text{cm}$ .

*Lời giải.* Khi viên đạn bay ra khỏi nòng súng nó có vận tốc hướng về phía nam. Vì vậy nó sẽ chịu tác dụng của gia tốc Coriolis hướng sang phía tây

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2v\omega \sin \varphi,$$

trong đó  $\omega$  là vận tốc góc của Trái Đất và  $\varphi$  là vĩ độ vật lý của vùng bắn súng. Coi gần đúng vector vận tốc của viên đạn là không đổi, ta thu được (lấy tích phân hai lần biểu thức của gia tốc Coriolis) độ lệch của viên đạn về phía tây so với hướng bắn ban đầu  $x = vt^2\omega \sin \varphi = 5,8\text{ cm}$ .

12.12. Tàu hơi nước tác dụng lên ray bên phải (theo chiều chuyển động) một lực (các bước giải bài toán được chỉ rõ trên H. 401)

$$F = 2mv\omega \sin \varphi = 250\text{ N},$$

trong đó  $\omega$  là vận tốc góc của Trái Đất quanh trục riêng của nó.

12.13.

$$P = P_0 \left( 1 - \frac{2\omega v \cos \varphi + v^2/R}{g} \right) \approx P_0 \left( 1 - 2 \frac{\omega v}{g} \cos \varphi \right) \approx P_0 (1 - 7,5 \cdot 10^{-5}),$$

trong đó  $R$  là bán kính Trái Đất.

12.14\*.  $v_0 = \frac{2ml\omega_0}{M+m}$ . Vận tốc khẩu đại bác hướng sang phía tây.

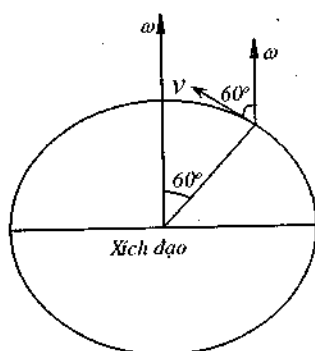
*Lời giải.* Trong hệ quy chiếu gắn với Trái Đất phương trình chuyển động của khẩu đại bác cùng với quả đạn trong thời gian quả đạn chuyển động trong nòng súng có thể viết dưới dạng

$$(M+m) \frac{dv}{dt} = 2m\omega_0 v = 2m\omega_0 at,$$

trong đó  $v$  là giá trị vận tốc tức thời của quả đạn,  $\omega_0$  là vận tốc góc của Trái Đất quanh trục của nó. Vậy

$$\int_0^{v_0} dv = \int_0^{t_0} \frac{2m\omega_0 a}{M+m} t dt, \text{ trong đó } t_0 = \sqrt{\frac{2l}{a}}.$$

12.15\*.  $\omega = \frac{3m\omega_0}{M} = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s}$ , trong đó  $\omega_0 = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$  là vận tốc góc của Trái Đất quanh trục của nó.



Hình 401

*Lời giải.* Trong hệ toạ độ gắn với Trái Đất, khi quả đạn chuyển động bên trong nòng súng chịu tác dụng của lực Coriolis (và vì vậy hệ đại bác – quả đạn cũng chịu tác dụng của lực này). Lực Coriolis hướng về phía tây và bằng  $F = 2m\omega_0 v$ , trong đó  $v$  là giá trị vận tốc tức thời của quả đạn.

Phương trình chuyển động của khẩu đại bác cùng với quả đạn có dạng

$$I \frac{d\omega}{dt} = 2m\omega_0 vr$$

trong đó  $I$  là mômen quán tính của khẩu đại bác (mômen quán tính của quả đạn có thể bỏ qua vì điều kiện  $M \gg m$ ),  $r$  là khoảng cách từ quả đạn đến trục quay tại thời điểm đang xét,  $\omega$  là vận tốc góc tức thời của nòng súng. Đặt  $v = at$  ta được

$$\frac{1}{3} Ml^2 \int_0^{\omega} d\omega = m\omega_0 a^2 \int_0^{t_0} r^3 dt,$$

trong đó  $t_0 = \sqrt{\frac{2l}{a}}$  là thời gian chuyển động của quả đạn bên trong nòng súng. Lấy tích phân phương trình trên ta tìm được  $\omega$ .

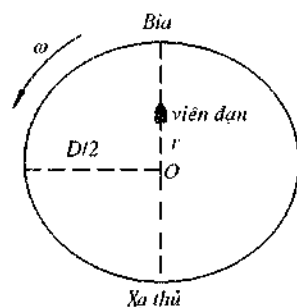
**12.16\*.**  $\dot{\omega} = \frac{2}{3} \text{ rad/s}^2$ .

*Lời giải.* Trong hệ quy chiếu gắn với vòng ngựa gỗ thì gia tốc cạnh của viên đạn  $\vec{a}_c = 2[\vec{v}_{td}\vec{\omega}] + [\vec{r}\dot{\vec{\omega}}]$ , hoặc dạng vô hướng  $a_c = -2v_0\omega + r\dot{\omega}$ . Quy ước lệch về bên phải là dương, về bên trái là âm (H. 402). Bán kính  $r$  coi là dương nếu cao hơn tâm  $O$  và âm nếu thấp hơn. Lưu ý đến các điều kiện ban đầu

$r = -\frac{D}{2}$ ,  $\omega = \omega_0$  khi  $t = 0$ , ta thu được

$$r = v_0 t - \frac{D}{2}, \quad \omega = \omega_0 + \dot{\omega} t,$$

$$a_c = -2v_0\omega_0 - 3\dot{\omega}v_0 t - \frac{D\dot{\omega}}{2}.$$



Hình 402

Lấy tích phân phương trình cuối ta tìm được độ lệch cạnh. Khi  $t = \frac{D}{v_0}$  thì độ

lệch phải bằng không, vì thế ta thu được  $\dot{\omega} = \frac{4v_0\omega_0}{D} = \frac{2}{3} \text{ rad/s}^2$ . Gia tốc dài trên mép vòng ngựa gỗ bằng  $6,67 \text{ m/s}^2$ .

12.17. Sàn của căn phòng có dạng hình parabolit tròn xoay

$$z = \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2);$$

trục  $z$  hướng theo trục quay, gốc toạ độ nằm tại điểm thấp nhất, các trục  $x$  và  $y$  nằm trong mặt phẳng ngang.

12.18. Dây rơi đặt vuông góc với sàn của khoang máy bay. Chu kỳ của con

$$\text{lắc } T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}}.$$

$$12.19. t' = t \left( 1 + \frac{v^4}{4R^2 g^2} \right) = 1\text{h}56\text{s}.$$

$$12.20. T = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3} \frac{l}{g} \cos \varphi}.$$

$$12.21*. \cos \alpha = \frac{3(a^2 - b^2)g}{2\omega^2(a^3 + b^3)}.$$

*Lời giải.* Trong hệ toạ độ quay xung quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc  $\omega$ , điều kiện cân bằng của thanh có thể viết dạng  $M_{ht} = M_{tl}$ , trong đó  $M_{ht}$  là mômen lực hướng tâm,  $M_{tl}$  là mômen trọng lực ứng với điểm treo thanh.

Lực hướng tâm quán tính tác dụng lên một phần tử của thanh dài  $dx$  cách điểm treo một khoảng  $x$  là

$$dF_{ht} = \frac{m dx}{a+b} \omega^2 x \sin \alpha.$$

Mômen của nó là

$$dM_{ht} = dF_{ht} x \cos \alpha.$$

Từ đây suy ra

$$M_{ht} = \frac{m\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{a+b} \int_b^a x^2 dx = \frac{1}{3} \frac{m\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{a+b} (a^3 + b^3).$$

So sánh mômen này với mômen của trọng lực  $M_{tl} = mg \frac{a-b}{2} \sin \alpha$ , ta được đáp số cần tìm.

$$12.22. \operatorname{tg} \beta = \frac{v(v+2u)}{gR} = 0,107; \beta \approx 6,1^\circ.$$

12.23.  $v_0 \geq 0,29 \text{ m/s}$ .

12.24.  $k = \frac{mg - N}{mg} = \frac{v(v - 2v_0)}{Rg} = 0,05$ .

12.25. Để cả bờ trái bị xói mòn thì sông phải uốn khúc về bên phải. Khi đó bán kính chỗ uốn phải bằng  $r \approx 4 \text{ km}$ .

12.26.  $v = 2\Omega R$ . Vận tốc so với Trái Đất  $V_{tm} = \begin{cases} 4\Omega R \\ 0 \end{cases}$  phụ thuộc vào vị trí ban đầu của máng là bên trái hay bên phải trục  $O$ .

12.27.  $\tan \alpha = \frac{\pi v}{15g}$ .

12.28.  $\varphi_{tr} = \frac{\omega^2 R}{g} \approx 7,3^\circ$ ;  $\varphi_c = \frac{2v\omega}{g} = 5,8^\circ$ .

12.29.  $M = 2m$ , nếu người đó còn ở trên vòng ngựa gỗ;  $M = 4m$ , nếu anh ta nhảy khỏi vòng.

12.30.  $v_0 \geq \omega R$ .

12.31.  $\tau = \frac{\ln(2 + \sqrt{3})}{\omega}$ .

12.32.  $A = \frac{m\omega^2 R^2}{2} \approx 750 \text{ J}$ .

12.33.  $L = \frac{\omega^2 l^2}{kg}$ .

12.34.  $v = \omega R\sqrt{2}$ ;  $\varphi = 45^\circ$ .

12.35\*. Chuyển động của ống bao dọc theo thanh sẽ diễn ra theo quy luật

$$x = a_0 \cos \omega t = 2 \cos(40\pi t) \text{ cm},$$

$$M = 2m\omega x \dot{x} = 2m\omega^2 a_0^2 \sin(2\omega t) \approx 63 \sin(80\pi t) \text{ N.cm}.$$

Lời giải. Để thuận tiện, ta xét chuyển động của ống bao trong hệ toạ độ quay. Khi đó chuyển động của ống dọc theo thanh dưới tác dụng của lực

hướng tâm có dạng  $m \frac{d^2 x}{dt^2} = m\omega^2 x$ . Nghiệm tổng quát của phương trình

$x = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$ . Thay  $x(0) = a_0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$  vào, ta nhận được nghiệm.

Mômen động lượng của ống bao đối với trục quay của thanh  $L = m\omega x^2$ ; mômen này tăng theo thời gian. Để tăng mômen động lượng, nhằm mục đích duy trì vận tốc, góc cần đặt mômen ngoại lực  $M = \frac{dL}{dt} = 2m\omega x \dot{x}$ .

12.36. Khi  $\omega_0^2 < \frac{2k}{m}$  dao động điều hoà  $x = l \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m} - \omega_0^2} t\right)$ ;

khi  $\omega_0^2 = \frac{2k}{m}$  - trạng thái cân bằng;

khi  $\omega_0^2 > \frac{2k}{m}$  chuyển động không thuận nghịch  $x = l \operatorname{ch}\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{2k}{m}} t\right)$ .

12.37.  $x_0 = \frac{k a^2}{k - m\omega^2}$  là vị trí cân bằng. Cân bằng bền khi  $x_0 < l$ .

$\omega^2 < \frac{k}{m} \left(1 - \frac{a}{l}\right)$ ;  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k - m\omega^2}}$  với điều kiện tương tự.

12.38.  $v_{td} = \frac{\omega L}{\sqrt{2}}$ ,  $v_{tm} = \sqrt{\frac{2}{3}} \omega L$ .

12.39.  $T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$ ;  $l = \frac{l_0}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$ , trong đó  $\omega_0^2 = \frac{2k}{m}$ . Khi giải bài tập,

ta đã bỏ qua các đại lượng tỷ lệ với  $\frac{d}{dt} \omega(t)$ .

12.40.  $T = \frac{2\pi}{\sqrt[4]{\frac{4k\omega^2}{mx_0} + \omega^4}}$ .

12.41.  $k = \frac{1}{2} \left[ \frac{\Omega r_0}{v_0} - \frac{v_0}{\Omega r_0} \right]$ , tức là khi  $\Omega r_0 > v_0$ .

12.42.  $\omega = \frac{\Omega}{\sqrt{2}}$ .

12.43.  $\Delta A = 2\pi k m \Omega \omega a^2 = 5,65 \cdot 10^{-2} \text{ J}$ .



$$12.44. A = \frac{m\omega^2 l^2}{2}.$$

$$12.45. A = \frac{m\omega^2 l^2}{8}.$$

$$12.46. T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

$$12.47*. \omega^2 = \frac{g}{l} \sqrt{2}. \text{ Cân bằng bền nếu } kl > mg \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} mg.$$

Lời giải. Ta viết phương trình động lực trong hệ toạ độ quay cùng với tam giác

$$m\vec{a}_{td} = m\vec{g} + \vec{F}_{dh} + \vec{N} + \vec{F}_C + \vec{F}_{ht}.$$

Ở đây  $N$  là phản lực vuông góc,  $F_C$  là lực Coriolis,  $F_{ht}$  là lực hướng tâm quán tính. Chiếu phương trình trên lên cạnh huyền  $AC$  ta được

$$m\ddot{R} = -mg \cos \alpha - k(R-l) + m\omega^2 R \sin^2 \alpha,$$

hoặc

$$\ddot{R} = -\frac{k - m\omega^2 \sin^2 \alpha}{m} \left( R - \frac{kl - mg \cos \alpha}{k - m\omega^2 \sin^2 \alpha} \right),$$

trong đó  $R$  là khoảng cách (toạ độ) của vật đến điểm  $A$  trên cạnh huyền. Cho  $\ddot{R} = 0$  ta xác định được vị trí cân bằng của ống bao:

$$R^* = \frac{kl - mg \cos \alpha}{k - m\omega^2 \sin^2 \alpha} \quad (k - m\omega^2 \sin^2 \alpha \neq 0);$$

cho  $R^* = l$  ta tìm được vận tốc góc

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{g}{l} \sqrt{2}.$$

Nếu đưa vào độ dịch chuyển khỏi vị trí cân bằng  $\xi = R - R^*$ , thì ta thu được

$$\ddot{\xi} = -\frac{k - m\omega^2 \sin^2 \alpha}{m} \xi,$$

tức là khi  $k > m\omega^2 \sin^2 \alpha$ , nó tương ứng với dao động điều hoà của ống bao quanh vị trí cân bằng với tần số

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2 \sin^2 \alpha}$$

và điều đó đồng nghĩa với việc vị trí cân bằng là bền.

$$12.48. \rho l^2 \omega^2 < 8T.$$

$$12.49. A = km\omega^2 \operatorname{ctg} \alpha \left( R_B^2 - RR_B + \frac{R^2}{2} \right) + 2km\omega vR, \text{ trong đó } R_B = \frac{g \operatorname{tg} \alpha}{\omega^2}$$

(điểm B mà tại đó  $mg \sin \alpha = m\omega^2 r \cos \alpha$ ).

$$12.50. M_{\min} = 0; M_{\max} = \frac{ml^2}{6} \Omega \omega \approx 7.10^{-4} \text{ N.m } (\vec{r}_i // \vec{\Omega}).$$

$$12.51. M_{\max} = m\omega \Omega R^2.$$

$$12.52. \frac{F_{\max} - F_{\min}}{mg} = 4\varphi_{\max} \frac{T_M}{T_K} \approx 0,01, \text{ trong đó } T_M = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 1 \text{ s};$$

$T_K = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = 20 \text{ s}$ . Lực Coriolis sẽ không quay mặt phẳng dao động của con lắc (tương tự con lắc Phucô trên xích đạo).

$$12.53. F = ma\omega^2 \sin 2\alpha.$$

$$12.54. F = 2mg \sin \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

$$12.55. \Omega = \sqrt{\frac{2k - m\omega^2}{m}} = 4 \text{ s}^{-1}.$$

$$12.56. T = \frac{2\pi}{\omega}, \text{ trong đó } \omega = \sqrt{\frac{k}{m} + 3\Omega^2}.$$

$$12.57. T = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{2L}{3R}}.$$

$$12.58. T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

12.59. Nếu hướng trục  $OX$  theo bán kính vào tâm Trái Đất (điểm  $O$  là vị trí của tàu), trục  $OZ$  theo hướng tiếp tuyến với quỹ đạo của tàu và cùng chiều chuyển động của nó thì trong điều kiện bài toán, quỹ đạo chuyển động của nắp so với tàu có dạng elip và  $x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$ , còn  $z(t) = \frac{2v_0}{\omega} (1 - \cos \omega t)$ ,

trong đó  $\omega$  là vận tốc góc dao động của nắp so với tàu và có độ lớn bằng vận tốc góc của chuyển động quay của tàu quanh Trái Đất, tức là

$$\omega = \sqrt{g \frac{R_0^2}{R_{\text{TD}}^3}} \approx 1,1.10^{-3} \text{ s}^{-1}; T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 5700 \text{ s} \approx 1 \text{ h } 35 \text{ phút}.$$

Elip có bán trục nhỏ  $b \approx 450 \text{ m}$  và bán trục lớn  $a \approx 900 \text{ m}$ .

**12.60.**  $v_{\max} \approx 0,003 \text{ m/s}$ ; quỹ đạo gần giống đường tròn.

**12.61\*.** Vệ tinh sẽ vẽ một hình elip nhỏ

$$x(t) = -\frac{2v_0}{\omega}(1 - \cos \omega t), \quad y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t,$$

đỉnh của elip nằm tại điểm cân bằng của vệ tinh, còn tâm lệch về phía tây một khoảng  $\frac{2v_0}{\omega}$ , trong đó  $\omega$  là vận tốc góc của Trái Đất.

*Lời giải.* Từ phương trình động lực  $m\vec{a}_0 = \vec{P} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_0$ , trong đó  $\vec{P}$  là “trọng lượng” của vật mà đối với điểm cân bằng của vệ tinh  $A$  nó bằng không:  $P_A = -\frac{C}{R_0^2} + m\omega^2 R_0 = 0$  ( $C = \gamma mM$ ).

Đối với chuyển động nhiễu loạn

$$P = -\frac{C}{(R_0 + y)^2} + m\omega^2(R_0 + y) \approx \frac{2C}{R_0^2}y + m\omega^2y = 3m\omega^2y.$$

Theo các hình chiếu trên các trục tọa độ  $X, Y, Z$  với gốc tại điểm  $A$ , phương trình động lực được viết dưới dạng:

$$\ddot{x} = -2\omega\dot{y}, \quad \ddot{y} = 3\omega^2y + 2\omega\dot{x}, \quad \ddot{z} = 0.$$

Từ đây suy ra  $\dot{x} = -2\omega y$ ,  $\ddot{y} + \omega^2y = 0$ . Với các điều kiện ban đầu  $y(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = v_0$  ta được  $y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$ .

Đối với tọa độ  $x$  khi  $x(0) = 0$  ta nhận được  $x(t) = -\frac{2v_0}{\omega}(1 - \cos \omega t)$ .

$$\mathbf{12.62.} \quad d_{\min} = \omega_{\text{TD}} R_{\text{TD}} \sqrt{\frac{R_{\text{TD}}}{g}} (\pi - 2) \approx 420 \text{ km}.$$

**12.63.**  $F = \frac{4\pi}{T} \sqrt{\frac{R}{g}} P \approx 0,12P$ , trong đó  $P$  là trọng lượng của vật trên bề mặt Trái Đất,  $T$  là độ dài của ngày trên sao,  $R$  là bán kính Trái Đất.

$$\mathbf{12.64.} \quad v = r_0 \sqrt{2\left(\omega^2 - 3\frac{g_0}{R_0}\right)}.$$

$$\mathbf{12.65.} \quad U \approx 5 \cdot 10^{-13} \text{ V}.$$

$$\mathbf{12.66.} \quad R_{\text{Xích Đạo}} - R_{\text{Cực}} \approx 10 \text{ km}.$$

### §13. BIẾN DẠNG ĐÀN HỒI

13.1.  $D = 27 \text{ mm}$ .

13.2.  $\Delta V = \frac{1-2\mu}{E} l P$ , trong đó  $E$  là suất Young,  $\mu$  là hệ số Poát-xông.

$\Delta V < 0$  khi nén,  $\Delta V > 0$  khi giãn.

13.3.  $\Delta l = \rho g l^2 / 2E$ , trong đó  $\rho$  là khối lượng riêng của thanh,  $l$  là chiều dài thanh,  $E$  là suất Young; thể tích tăng một lượng  $\Delta V = \frac{1-2\mu}{2SE} V_0^2 \rho g$ , trong đó  $V_0$  là thể tích ban đầu,  $\mu$  là hệ số Poát-xông,  $S$  là tiết diện ngang.

13.4.  $\frac{\Delta l}{l} \sim 10^{-6}$ .

13.5.  $\alpha = 45^\circ$ ;  $\tau = \frac{F}{2S}$ .

13.6.  $U = \frac{P^2 h}{6ES}$ ; năng lượng đàn hồi tăng 7 lần.

13.7.  $\Delta l = \frac{\rho g L}{2E} (L - 2h) \approx 10^{-2} \text{ mm}$ .

13.8.  $T = \frac{2\pi x}{L} E$ , trong đó  $x$  là khoảng cách tính từ tiết diện đi qua trung điểm;  $T_{\max} = \frac{\pi d}{L} E \approx 2 \cdot 10^5 \text{ N/cm}^2$ .

13.9\*.  $\frac{\Delta V}{V} \approx 5 \cdot 10^{-4}$ .

*Lời giải.* Do tính đối xứng nên ứng suất tiếp tuyến  $\tau$  tác dụng trong lớp vỏ như nhau theo tất cả các hướng. Ta lấy một phần tử nhỏ có dạng hình chữ nhật trên vỏ. Khi tính sự biến thiên tương đối diện tích của phần tử này dưới tác dụng của các ứng suất tiếp tuyến  $\tau$ , có thể bỏ qua độ cong của phần tử mà coi nó như một hình chữ nhật phẳng. Khi đó ta tính được  $\Delta S / S = 2(1 - \mu)\tau / E$  (bỏ qua sự thay đổi diện tích gây ra bởi áp suất vuông góc). Vì diện tích  $S$  tỷ lệ với  $V^{2/3}$  nên độ biến thiên tương đối của thể tích sẽ là  $\Delta V / V = (3/2)\Delta S / S$ . Vì bề mặt bị cong nên ứng suất  $\tau$  tạo ra hiệu áp suất vuông góc, không khó tính được nó bằng  $2\pi d / R$  (xem công thức Laplace trong thuyết về sức căng bề mặt). Hiệu này phải cân bằng với hiệu áp suất khí  $\Delta P$  trên các mặt khác nhau của lớp vỏ. Kết quả ta nhận được

$$10.56. T = 2\pi \sqrt{\frac{I_1 I_2}{f(I_1 + I_2)}}.$$

$$10.57. T = \pi \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

$$10.58. A = \frac{4}{3} \frac{F_0}{k}, \text{ trong đó } k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$

10.59. Nếu khi con lắc dao động, vận tốc góc cực đại của nó  $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{\max}$  nhỏ

hơn vận tốc góc của trục quay  $\omega$ , hoặc  $\omega - \frac{d\varphi}{dt} > 0$  tại bất kỳ thời điểm nào

thì mômen của lực ma sát tác dụng từ phía trục quay lên con lắc sẽ luôn hướng về một phía. Vì mômen này không đổi, còn khi dao động con lắc đi theo hướng quay ngược với chiều quay của trục cùng một quãng đường, nên công của mômen lực ma sát trong một chu kỳ bằng không.

10.60\*. *Lời giải.* Khi dao động, lực ma sát tác dụng lên khớp nối từ phía trục quay trong một nửa chu kỳ sẽ hướng theo chuyển động của con lắc, khi trục quay và khớp nối quay theo một hướng, và trong nửa chu kỳ còn lại lực này hướng ngược với chiều chuyển động của con lắc.

1) Nếu lực ma sát tăng cùng với vận tốc trượt thì trong nửa chu kỳ, khi trục quay và khớp nối quay ngược chiều nhau nó sẽ lớn hơn. Vì vậy công của lực ma sát của con lắc với trục quay trong một chu kỳ sẽ dương, độ tắt dần của con lắc tăng lên do ma sát giữa khớp nối và trục quay.

2) Nếu lực ma sát giảm cùng với vận tốc trượt thì ngược lại, công của lực ma sát trong cả chu kỳ sẽ âm, và dao động sẽ tắt dần chậm hơn. Trong trường hợp, khi công của lực ma sát trên trục quay lớn hơn trên các bộ phận khác của con lắc thì năng lượng dao động sẽ tăng lên, biên độ dao động sẽ tăng và con lắc có thể tự dao động.

$$10.61. x \approx 9,6 \text{ m.}$$

$$10.62. L = 30 \text{ cm.}$$

*Hướng dẫn.* Tần số dao động  $\nu = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ , trong đó  $T$  là lực căng của dây

đàn,  $\rho$  là khối lượng dây đàn trên một đơn vị dài,  $L$  là chiều dài dây đàn. Áp dụng công thức trên ta tìm được  $L$ .

10.63. Chu kỳ dao động của dây mảnh giảm hai lần.

10.64. Giảm 9 lần.

10.65. 1) Ấn dây đàn trên một đoạn rất ngắn ở chính giữa;

2) Ấn tương tự cách đầu dây  $1/3$  chiều dài. Không thể giảm tông của âm bằng cách đó.

10.66. Nếu

$$y_1 = a_1 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{d_1}{\lambda} \right) = a_1 \sin(\omega t - \varphi_1)$$

là dao động của hạt đang xét do các sóng từ nguồn thứ nhất gây ra, còn

$$y_2 = a_2 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{d_2}{\lambda} \right) = a_2 \sin(\omega t - \varphi_2)$$

là dao động của hạt đang xét do các sóng từ nguồn thứ hai gây ra, thì dao động tổng hợp có dạng

$$y = y_1 + y_2 = A \sin(\omega t + \psi),$$

trong đó

$$A = \left[ a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \right]^{1/2}, \quad \psi = \arctg \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}.$$

$$10.67. J = \frac{\Delta P^2}{2} \frac{S}{\rho v_{at}} \approx 4,6 \cdot 10^{-5} \text{ W}.$$

Hướng dẫn. Dòng năng lượng  $J = \frac{\rho \mu^2}{2} v_{at} S$ ,  $u / v_{at} = \Delta P / (\gamma P)$ ; với lưu ý rằng  $v_{at} = \sqrt{\gamma P / \rho}$ , ta tìm được đáp số.

10.68.

$$1) v = \frac{990}{\pi} \approx 315 \text{ s}^{-1};$$

$$2) c_{at} = 330 \text{ m/s};$$

$$3) \lambda = \pi / 3 \approx 1,05 \text{ m};$$

$$4) u = 99 \text{ cm/s};$$

$$5) \Delta P = \gamma P u / v_{at} \approx 3,2 \text{ mm Hg}.$$

## §11. CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT RẮN TRONG KHÔNG GIAN. CON QUAY HỒI CHUYỂN

11.1.  $\tan \beta = a^3 m^2 g \sin \alpha / (I_{//}^2 \omega^2)$ , trong đó  $I_{//}$  là mômen quán tính của con quay đối với trục của nó,  $m$  là khối lượng con quay,  $a$  là khoảng cách từ điểm tựa con quay đến khối tâm của nó.

$$11.2. \alpha \approx \frac{m a l \tau}{I_{//} \omega} \approx 0,43^\circ \approx 25'.$$

$$11.3. \varphi = \arccos \frac{3g}{2\omega^2 l}.$$

$$11.4. L \approx 10^8 \text{ g.cm}^2/\text{s}; M \approx 10^9 \text{ g.cm}^2/\text{s}.$$

$$11.5*. \frac{c-v}{c} \approx 1,9 \cdot 10^{-22}.$$

*Lời giải.* Độ xoay cực đại đạt được khi vận tốc quả đạn  $\vec{v}$  vuông góc với trục Trái Đất. Quả đạn lấy đi một mômen động lượng  $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} / \sqrt{1 - v^2/c^2}$  vuông góc với vận tốc  $\vec{v}$ . Trái Đất nhận được một mômen tương tự nhưng ngược chiều. Khi đó vector vận tốc góc của Trái Đất  $\vec{\omega}$  lệch về phía cạnh một góc  $\alpha = L/(I\omega)$ . Thế vào biểu thức này  $I = 2Mr^2/5$  và lưu ý rằng hiệu  $c - v$  rất nhỏ, ta được

$$\frac{c-v}{c} \approx \frac{25m^2 c^2}{8M^2 l^2 \omega^2} \approx 1,9 \cdot 10^{-22}.$$

Chú ý rằng kết luận trên chỉ đúng đối với việc xoay trục Trái Đất “trong không gian”, tức là so với hệ “các sao cố định”. Để nghiên cứu độ xoay của trục quay “trong vật”, tức là so với chính Trái Đất thì cần chú ý đến tính không đồng nhất của quả đất. Điều đó liên quan tới vấn đề là chuyển động quay của quả cầu quanh một đường kính cố định luôn không bền.

$$11.6. \varphi = 1,34 \cdot 10^{-17} \text{ rad.}$$

$$11.7. \alpha \approx \frac{5mv \sin \varphi}{2M_{\text{TĐ}} R_{\text{TĐ}} \omega_{\text{TĐ}}} = 1,27 \cdot 10^{-17} \text{ rad.}$$

$$11.8. M = \frac{2\pi I N u}{R} = 612 \text{ N.m}^2.$$

$$11.9. F = \frac{m\rho^2 2\pi N v}{Ra} \approx 2000 \text{ N.}$$

$$11.10. F_{\max} = \frac{2\pi^2 \varphi n \rho^2 m}{Tl} \approx 6500 \text{ N}.$$

$$11.11. N_{\min} = \frac{1}{l} h m k r.$$

11.12. Trục nghiêng về phía  $x$  một góc  $\varphi$  so với trục  $z$  trong mặt phẳng  $zOx$  và  $\varphi = \frac{2mvz_0}{L_z} \approx 0,04 \text{ rad} \approx 2,3^\circ$ .

$$11.13. \operatorname{tg} \alpha = \frac{4l^2 g}{r^4 \omega^2}.$$

11.14.  $F_{\text{al}} = P + \frac{I_{//} \Omega^2}{r} = P + \frac{1}{2} m \Omega^2 r$ , trong đó  $P$  là khối lượng con lăn,  $m$  là khối lượng của nó. Khi  $r = 50 \text{ cm}$  và vận tốc làm việc 1 vòng/s ( $\Omega = 2\pi \text{ rad/s}$ ) ta thu được  $m \Omega^2 r / 2 \approx mg = P$ . Vậy  $F_{\text{al}} \approx 2P$ . Ta thấy rằng mômen động lượng toàn phần  $\vec{L}$  không hướng dọc theo trục của con lăn vì còn có mômen xuất hiện do chuyển động quay quanh trục thẳng đứng. Tuy nhiên mômen này không đổi khi con lăn quay, và vì vậy, khi giải bài ta có thể bỏ qua.

$$11.15. T = \frac{3\pi \omega r}{g} \operatorname{tg} \alpha; R = \frac{3}{2} \frac{\omega^2 r^2}{g} \operatorname{tg} \alpha.$$

$$11.16. \Omega = \frac{g'h}{\pi v R^2} = 0,33 \text{ s}^{-1}, \text{ trong đó } g' = \sqrt{a^2 + g^2} = 10,25 \text{ m/s}^2; \vec{\Omega} \uparrow \downarrow \vec{g}'.$$

$$11.17. \alpha_{\max} = 2\alpha_0 = 2\arctg \frac{a}{g} = 22^\circ 40'; \tau = \frac{\pi}{\Omega} \approx 9,9 \text{ s, trong đó } \Omega \approx 0,318 \text{ s}^{-1}.$$

$$11.18. \varphi = \arctg \frac{2v^2}{Rg}.$$

$$11.19*. \vec{M} = 2[\vec{\Omega} \vec{\omega}] I_z = [\vec{\Omega} \vec{\omega}] I_x.$$

Lời giải. Ta chia tưởng tượng chiếc vòng ra thành những phần tử vô cùng bé – các chất điểm khối lượng  $dm$ . Ta xét chuyển động của một trong các chất điểm này. Vì vận tốc tương đối  $\vec{v}_{\text{td}} = [\vec{\omega} \vec{r}]$  nên theo định lý Coriolis, lực tác dụng lên chất điểm này là

$$d\vec{f} = -dm\omega^2 \vec{r} + dm[\vec{\Omega}[\vec{\Omega} \vec{r}]] + 2dm[\vec{\Omega}[\vec{\omega} \vec{r}]].$$



Biểu thức này đổi dấu khi dấu của  $\vec{r}$  thay đổi và vì vậy, khi lấy tích phân theo cả vòng thì sẽ bằng không. Do đó, tổng hợp lực tác dụng lên vòng phải bằng không. Để tính mômen  $d\vec{M}$  của lực  $d\vec{f}$ , ta đưa vào hệ toạ độ vuông góc có các vectơ đơn vị trên các trục là  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  và hướng trục  $X$  dọc theo vectơ  $\vec{\omega}$ , còn trục  $Y$  – dọc theo  $\vec{\Omega}$ . Sau những tính toán đơn giản, ta được

$$d\vec{M} = 2[\vec{\Omega}\vec{\omega}]y^2 dm + [\vec{\Omega}(2\omega\vec{j} - \Omega\vec{i})]yz.$$

Khi lấy tích phân theo cả chiếc vòng thì số hạng thứ hai sẽ bằng không, và vì vậy

$$\vec{M} = 2[\vec{\Omega}\vec{\omega}]I_z = [\vec{\Omega}\vec{\omega}]I_x,$$

trong đó  $I_z$  và  $I_x$  là các mômen quán tính của chiếc vòng ứng với trục  $Z$  và trục  $X$ . Vì vậy mômen  $\vec{M}$  cần tìm phải vuông góc với cả  $\vec{\omega}$  và  $\vec{\Omega}$ . Kết quả đúng trong cả trường hợp khi các vectơ  $\vec{\omega}$  và  $\vec{\Omega}$  không vuông góc với nhau.

$$11.20. \varphi \approx 2 \cdot \frac{5}{11} \frac{v_0}{\omega R} \approx \frac{1}{55} \approx 1^\circ.$$

$$11.21. \frac{v_0}{R\omega} = \frac{11}{5}.$$

$$11.22*. \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{2} \frac{kgt}{r\omega_0}; \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{5}{7} \frac{v_0}{r\omega_0}.$$

*Lời giải.* Sau va chạm, tâm của quả cầu bị va chạm sẽ bắt đầu chuyển động với vận tốc ban đầu  $v_0$ . Theo định lý về chuyển động của khối tâm thì vận tốc của nó tại thời điểm  $t$  sẽ là  $v = v_0 - kgt$ . Gọi  $\vec{\omega}$  là giá trị tức thời của vectơ vận tốc góc. Mômen lực ma sát so với tâm quả cầu bằng  $kmgr\vec{i}$ , trong đó  $\vec{i}$  là vectơ đơn vị hướng ra sau hình vẽ và vuông góc với hình vẽ. Từ phương trình  $\vec{M} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = kmgr\vec{i}$ , ta được  $\frac{2}{5}r \frac{d\vec{\omega}}{dt} = kg\vec{i}$ . Suy ra  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \frac{5}{2} \frac{kgt}{r} \vec{i}$ . Trục quay tức thời luôn nằm trong mặt phẳng vuông góc

với mặt phẳng hình vẽ. Góc  $\alpha$  được xác định từ biểu thức  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{2} \frac{kgt}{r\omega_0}$ .

Tiếp theo, ta xác định thời điểm bắt đầu lăn không trượt. Vận tốc chuyển động tịnh tiến của quả cầu chỉ phụ thuộc vào thành phần nằm ngang của vectơ  $\vec{\omega}$ . Thời điểm bắt đầu lăn không trượt tìm được từ điều kiện  $\frac{5}{2}kgt = v_0 - kgt$ . Từ thời điểm này góc  $\alpha$  sẽ không đổi và đối với góc lăn

$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{5}{7} \frac{v_0}{r \omega_0}$ . Trong trường hợp riêng, khi  $v_0 = \omega_0 r$  ta tính được

$\operatorname{tg} \alpha = 5/7$ ,  $\alpha = 35^\circ 32'$ . Chú ý rằng đáp số tìm được xác định độ xoay của trục quay so với không gian bên ngoài chứ không phải so với bên trong quả cầu.

**11.23.**  $\vec{L} = 2m[\vec{\omega}_0 a^2 - \vec{a}(\vec{\omega}_0 \vec{a})]$ ; không phụ thuộc;

$$|\vec{F}| = \frac{m \omega_0^2 a^2 \sin \alpha \cos \alpha}{l}; \quad \vec{F} = \frac{m(\vec{\omega}_0 \vec{a})}{l \omega_0} [\vec{\omega}_0 (\vec{\omega}_0 \vec{a}) - \vec{a} \omega_0^2],$$

trong đó  $\vec{F}$  ứng với ổ trục trên.

**11.24.**  $F = \frac{m}{3a} (\pi m l)^2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 718 \text{ N}.$

## §12. HỆ QUY CHIỀU KHÔNG QUÁN TÍNH

**12.1.**  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g'}}$ , trong đó  $g' = \sqrt{g^2 + a^2}$ .

**12.2.**  $T_1 = T \sqrt{1 + \frac{a}{g}}$ . (Sau khi ngắt động cơ thì đồng hồ ngừng chạy.)

**12.3.** 1) Ống bao sẽ dần dần (theo sự gia tăng của gia tốc) dịch chuyển về phía ngược với chiều của gia tốc; khoảng dịch chuyển cực đại

$$\xi = \frac{ma}{k} \approx 1 \text{ cm}.$$

2) Ống bao bắt đầu thực hiện dao động với phương trình  $x = \frac{ma}{k} (1 - \cos \omega t)$ ,

trong đó  $x$  là toạ độ của ống so với xe lăn được tính từ vị trí ban đầu của ống, coi chiều dương của  $x$  là chiều ngược với chiều của gia tốc xe lăn;

$\omega = \sqrt{k/m} = 10 \text{ s}^{-1}$ . Do ma sát và lực cản của không khí mà dao động này sẽ tắt dần.

**12.4\*.** *Lời giải.* Nếu li độ ống bao từ tâm khối chung là  $x_1$ , còn dịch chuyển của xe lăn là  $x_2$  thì  $mx_1 = Mx_2$ . Phương trình chuyển động của xe lăn  $M\ddot{x}_2 = -k(x_2 + x_1)$ ; thế  $x_1$  từ biểu thức trước đó vào phương trình này, ta được

$$M\ddot{x}_2 + k(1 + M/m)x_2 = 0.$$

Tương tự đối với ống bao

$$m\ddot{x}_1 + k(1 + m/M)x_1 = 0.$$

Vậy sẽ xảy ra dao động điều hoà của xe lăn và ống bao với tần số  $\omega = \sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}} \approx 10,8\text{s}^{-1}$ . Biên độ dao động của ống bao  $l \frac{M}{M+m} = 5\text{ cm}$ ,

của xe lăn  $l \frac{m}{M+m} \approx 1\text{ cm}$ .

12.5. Về phía đông  $s_D = \frac{1}{3}\omega t^3 g \cos \varphi = \frac{2}{3}\omega t h \cos \varphi$ ;

Về phía xích đạo  $s_{XD} = \frac{1}{12}\omega^2 t^4 g \sin 2\varphi = \frac{1}{2}\omega t \sin \varphi s_D$ , trong đó  $\varphi$  là vĩ độ vật lý của điểm khảo sát,  $t$  là thời gian,  $h$  là độ cao mà điểm đó rơi xuống.

12.6. Viên đạn lệch về phía tây một khoảng

$$x_T = \frac{4}{3} \frac{v_0^3 \omega}{g^2} \cos \varphi \approx 51\text{ cm}.$$

Kết quả có thể không như ta cảm nhận. Khi chuyển động lên trên lực Coriolis hướng về phía tây, còn khi chuyển động xuống dưới thì nó hướng sang phía đông. Thoạt đầu ta có thể nghĩ rằng độ lệch về phía tây sẽ được bù bởi độ lệch về phía đông sau đó. Nhưng thực tế không phải như vậy. Khi vật chuyển động lên trên vận tốc ban đầu của nó bằng không. Tuy nhiên vật đến điểm cao nhất với thành phần vận tốc hướng về phía tây mà vật thu được dưới tác dụng của lực Coriolis. Vì thế khi vật rơi xuống nó đã có vận tốc đầu hướng sang phía tây. Do đó, vận tốc luôn hướng sang phía tây và khi rơi xuống đất nó bằng không.

12.7. Cần phải hướng nòng súng về phía Đông một góc

$$\alpha = \frac{2}{3} \frac{v_0 \omega}{g} \cos \varphi \approx 2,45 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \approx 51''.$$

12.8.  $\Delta S = \frac{\omega_{\text{TD}} L^2 \sin \varphi}{v_0} = 23,6\text{ m}$ , trong đó  $\omega_{\text{TD}}$  là vận tốc góc của Trái

Đất quanh trục riêng của nó. Độ lệch không phụ thuộc vào hướng bắn, nếu bỏ qua ảnh hưởng của lực hướng tâm.

12.9.  $\Delta h = 2v\omega_{\text{TD}} t^2 \approx 12,5\text{ cm}$ .

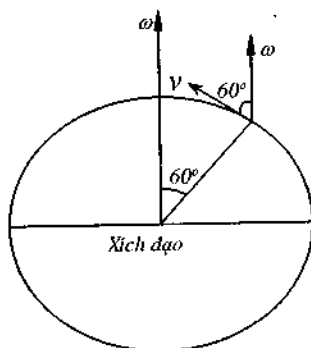
12.10.  $\Delta S_D \approx 0,7\text{ m}$ ,  $\Delta S_N \approx 0,5\text{ m}$ .

12.11\*.  $x = 5,8\text{cm}$ .

*Lời giải.* Khi viên đạn bay ra khỏi nòng súng nó có vận tốc hướng về phía nam. Vì vậy nó sẽ chịu tác dụng của gia tốc Coriolis hướng sang phía tây

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2v\omega \sin \varphi,$$

trong đó  $\omega$  là vận tốc góc của Trái Đất và  $\varphi$  là vĩ độ vật lý của vùng bắn súng. Coi gần đúng vectơ vận tốc của viên đạn là không đổi, ta thu được (lấy tích phân hai lần biểu thức của gia tốc Coriolis) độ lệch của viên đạn về phía tây so với hướng bắn ban đầu  $x = vt^2 \omega \sin \varphi = 5,8\text{ cm}$ .



Hình 401

12.12. Tàu hơi nước tác dụng lên ray bên phải (theo chiều chuyển động) một lực (các bước giải bài toán được chỉ rõ trên H. 401)

$$F = 2mv\omega \sin \varphi = 250\text{ N},$$

trong đó  $\omega$  là vận tốc góc của Trái Đất quanh trục riêng của nó.

12.13.

$$P = P_0 \left( 1 - \frac{2\omega v \cos \varphi + v^2 / R}{g} \right) \approx P_0 \left( 1 - 2 \frac{\omega v}{g} \cos \varphi \right) \approx P_0 (1 - 7,5 \cdot 10^{-5}),$$

trong đó  $R$  là bán kính Trái Đất.

12.14\*.  $v_0 = \frac{2ml\omega_0}{M+m}$ . Vận tốc khẩu đại bác hướng sang phía tây.

*Lời giải.* Trong hệ quy chiếu gắn với Trái Đất phương trình chuyển động của khẩu đại bác cùng với quả đạn trong thời gian quả đạn chuyển động trong nòng súng có thể viết dưới dạng

$$(M+m) \frac{dv}{dt} = 2m\omega_0 v = 2m\omega_0 at,$$

trong đó  $v$  là giá trị vận tốc tức thời của quả đạn,  $\omega_0$  là vận tốc góc của Trái Đất quanh trục của nó. Vậy

$$\int_0^{v_0} dv = \int_0^{t_0} \frac{2m\omega_0 a}{M+m} t dt, \text{ trong đó } t_0 = \sqrt{\frac{2l}{a}}.$$

12.15\*.  $\omega = \frac{3m\omega_0}{M} = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s}$ , trong đó  $\omega_0 = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$  là vận tốc góc của Trái Đất quanh trục của nó.

*Lời giải.* Trong hệ toạ độ gắn với Trái Đất, khi quả đạn chuyển động bên trong nòng súng chịu tác dụng của lực Coriolis (và vì vậy hệ đại bác – quả đạn cũng chịu tác dụng của lực này). Lực Coriolis hướng về phía tây và bằng  $F = 2m\omega_0 v$ , trong đó  $v$  là giá trị vận tốc tức thời của quả đạn.

Phương trình chuyển động của khẩu đại bác cùng với quả đạn có dạng

$$I \frac{d\omega}{dt} = 2m\omega_0 vr$$

trong đó  $I$  là mômen quán tính của khẩu đại bác (mômen quán tính của quả đạn có thể bỏ qua vì điều kiện  $M \gg m$ ),  $r$  là khoảng cách từ quả đạn đến trục quay tại thời điểm đang xét,  $\omega$  là vận tốc góc tức thời của nòng súng. Đặt  $v = at$  ta được

$$\frac{1}{3} M I^2 \int_0^{\omega} d\omega = m \omega_0 a^2 \int_0^{t_0} t^3 dt,$$

trong đó  $t_0 = \sqrt{\frac{2l}{a}}$  là thời gian chuyển động của quả đạn bên trong nòng súng. Lấy tích phân phương trình trên ta tìm được  $\omega$ .

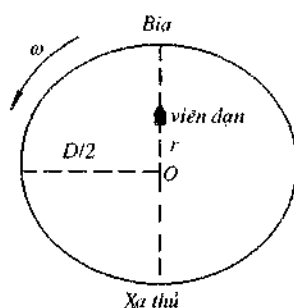
$$12.16^*. \dot{\omega} = \frac{2}{3} \text{ rad/s}^2.$$

*Lời giải.* Trong hệ quy chiếu gắn với vòng ngựa gỗ thì gia tốc cạnh của viên đạn  $\vec{a}_c = 2[\vec{v}_{td}\vec{\omega}] + [\vec{r}\dot{\vec{\omega}}]$ , hoặc dạng vô hướng  $a_c = -2v_0\omega + r\dot{\omega}$ . Quy ước lệch về bên phải là dương, về bên trái là âm (H. 402). Bán kính  $r$  coi là dương nếu cao hơn tâm  $O$  và âm nếu thấp hơn. Lưu ý đến các điều kiện ban đầu

$$r = -\frac{D}{2}, \quad \omega = \omega_0 \text{ khi } t = 0, \text{ ta thu được}$$

$$r = v_0 t - \frac{D}{2}, \quad \omega = \omega_0 + \dot{\omega} t,$$

$$a_c = -2v_0\omega_0 - 3\dot{\omega}v_0 t - \frac{D\dot{\omega}}{2}.$$



Hình 402

Lấy tích phân phương trình cuối ta tìm được độ lệch cạnh. Khi  $t = \frac{D}{v_0}$  thì độ

lệch phải bằng không, vì thế ta thu được  $\dot{\omega} = \frac{4v_0\omega_0}{D} = \frac{2}{3} \text{ rad/s}^2$ . Gia tốc dài trên mép vòng ngựa gỗ bằng  $6,67 \text{ m/s}^2$ .

12.17. Sàn của căn phòng có dạng hình parabolit tròn xoay

$$z = \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2);$$

trục  $z$  hướng theo trục quay, gốc toạ độ nằm tại điểm thấp nhất, các trục  $x$  và  $y$  nằm trong mặt phẳng ngang.

12.18. Dây rơi đặt vuông góc với sàn của khoang máy bay. Chu kỳ của con

$$\text{lắc } T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}}.$$

$$12.19. t' = t \left( 1 + \frac{v^4}{4R^2 g^2} \right) = 1\text{h}56\text{s}.$$

$$12.20. T = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3} \frac{l}{g} \cos \varphi}.$$

$$12.21*. \cos \alpha = \frac{3(a^2 - b^2)g}{2\omega^2(a^3 + b^3)}.$$

*Lời giải.* Trong hệ toạ độ quay xung quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc  $\omega$ , điều kiện cân bằng của thanh có thể viết dạng  $M_{ht} = M_{tl}$ , trong đó  $M_{ht}$  là mômen lực hướng tâm,  $M_{tl}$  là mômen trọng lực ứng với điểm treo thanh.

Lực hướng tâm quán tính tác dụng lên một phần tử của thanh dài  $dx$  cách điểm treo một khoảng  $x$  là

$$dF_{ht} = \frac{m dx}{a+b} \omega^2 x \sin \alpha.$$

Mômen của nó là

$$dM_{ht} = dF_{ht} x \cos \alpha.$$

Từ đây suy ra

$$M_{ht} = \frac{m\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{a+b} \int_b^a x^2 dx = \frac{1}{3} \frac{m\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{a+b} (a^3 + b^3).$$

So sánh mômen này với mômen của trọng lực  $M_{tl} = mg \frac{a-b}{2} \sin \alpha$ , ta được đáp số cần tìm.

$$12.22. \operatorname{tg} \beta = \frac{v(v+2u)}{gR} = 0,107; \beta \approx 6,1^\circ.$$

12.23.  $v_0 \geq 0,29 \text{ m/s}$ .

12.24.  $k = \frac{mg - N}{mg} = \frac{v(v - 2v_0)}{Rg} = 0,05$ .

12.25. Để cả bờ trái bị xói mòn thì sông phải uốn khúc về bên phải. Khi đó bán kính chỗ uốn phải bằng  $r \approx 4 \text{ km}$ .

12.26.  $v = 2\Omega R$ . Vận tốc so với Trái Đất  $V_m = \begin{cases} 4\Omega R \\ 0 \end{cases}$  phụ thuộc vào vị trí ban đầu của máng là bên trái hay bên phải trục  $O$ .

12.27.  $\tan \alpha = \frac{\pi v}{15g}$ .

12.28.  $\varphi_{tr} = \frac{\omega^2 R}{g} \approx 7,3^\circ$ ;  $\varphi_c = \frac{2v\omega}{g} = 5,8^\circ$ .

12.29.  $M = 2m$ , nếu người đó còn ở trên vòng ngựa gỗ;  $M = 4m$ , nếu anh ta nhảy khỏi vòng.

12.30.  $v_0 \geq \omega R$ .

12.31.  $\tau = \frac{\ln(2 + \sqrt{3})}{\omega}$ .

12.32.  $A = \frac{m\omega^2 R^2}{2} \approx 750 \text{ J}$ .

12.33.  $L = \frac{\omega^2 l^2}{kg}$ .

12.34.  $v = \omega R\sqrt{2}$ ;  $\varphi = 45^\circ$ .

12.35\*. Chuyển động của ống bao dọc theo thanh sẽ diễn ra theo quy luật

$$x = a_0 \cos \omega t = 2 \cos(40\pi) \text{ cm},$$

$$M = 2m\omega x \dot{x} = 2m\omega^2 a_0^2 \sin(2\omega t) \approx 63 \sin(80\pi) \text{ N.cm}.$$

*Lời giải.* Để thuận tiện, ta xét chuyển động của ống bao trong hệ tọa độ quay. Khi đó chuyển động của ống dọc theo thanh dưới tác dụng của lực

hướng tâm có dạng  $m \frac{d^2 x}{dt^2} = m\omega^2 x$ . Nghiệm tổng quát của phương trình

$x = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$ . Thay  $x(0) = a_0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$  vào, ta nhận được nghiệm.

Mômen động lượng của ống bao đối với trục quay của thanh  $L = m\omega x^2$ ; mômen này tăng theo thời gian. Để tăng mômen động lượng, nhằm mục đích duy trì vận tốc, góc cần đặt mômen ngoại lực  $M = \frac{dL}{dt} = 2m\omega x \dot{x}$ .

12.36. Khi  $\omega_0^2 < \frac{2k}{m}$  dao động điều hoà  $x = l \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m} - \omega_0^2} t\right)$ ;

khi  $\omega_0^2 = \frac{2k}{m}$  – trạng thái cân bằng;

khi  $\omega_0^2 > \frac{2k}{m}$  chuyển động không thuận nghịch  $x = l \operatorname{ch}\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{2k}{m}} t\right)$ .

12.37.  $x_0 = \frac{ka^2}{k - m\omega^2}$  là vị trí cân bằng. Cân bằng bền khi  $x_0 < l$ .

$\omega^2 < \frac{k}{m}\left(1 - \frac{a}{l}\right)$ ;  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k - m\omega^2}}$  với điều kiện tương tự.

12.38.  $v_{ld} = \frac{\omega L}{\sqrt{2}}$ ,  $v_{lm} = \sqrt{\frac{2}{3}}\omega L$ .

12.39.  $T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$ ;  $l = \frac{l_0}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$ , trong đó  $\omega_0^2 = \frac{2k}{m}$ . Khi giải bài tập,

ta đã bỏ qua các đại lượng tỷ lệ với  $\frac{d}{dt}\omega(t)$ .

12.40.  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{4\frac{k\omega^2}{m\omega_0^2} + \omega^4}}$ .

12.41.  $k = \frac{1}{2}\left[\frac{\Omega r_0}{v_0} - \frac{v_0}{\Omega r_0}\right]$ , tức là khi  $\Omega r_0 > v_0$ .

12.42.  $\omega = \frac{\Omega}{\sqrt{2}}$ .

12.43.  $\Delta A = 2\pi km\Omega\omega a^2 = 5,65 \cdot 10^{-2} \text{ J}$ .



$$12.44. A = \frac{m\omega^2 l^2}{2}.$$

$$12.45. A = \frac{m\omega^2 l^2}{8}.$$

$$12.46. T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

$$12.47*. \omega^2 = \frac{g}{l} \sqrt{2}. \text{ Cân bằng bền nếu } kl > mg \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} mg.$$

Lời giải. Ta viết phương trình động lực trong hệ toạ độ quay cùng với tam giác

$$m\vec{a}_{td} = m\vec{g} + \vec{F}_{dh} + \vec{N} + \vec{F}_C + \vec{F}_{ht}.$$

Ở đây  $N$  là phản lực vuông góc,  $F_C$  là lực Coriolis,  $F_{ht}$  là lực hướng tâm quán tính. Chiếu phương trình trên lên cạnh huyền  $AC$  ta được

$$m\ddot{R} = -mg \cos \alpha - k(R-l) + m\omega^2 R \sin^2 \alpha,$$

hoặc

$$\ddot{R} = -\frac{k - m\omega^2 \sin^2 \alpha}{m} \left( R - \frac{kl - mg \cos \alpha}{k - m\omega^2 \sin^2 \alpha} \right),$$

trong đó  $R$  là khoảng cách (toạ độ) của vật đến điểm  $A$  trên cạnh huyền. Cho  $\ddot{R} = 0$  ta xác định được vị trí cân bằng của ống bao:

$$R^* = \frac{kl - mg \cos \alpha}{k - m\omega^2 \sin^2 \alpha} \quad (k - m\omega^2 \sin^2 \alpha \neq 0);$$

cho  $R^* = l$  ta tìm được vận tốc góc

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{g}{l} \sqrt{2}.$$

Nếu đưa vào độ dịch chuyển khỏi vị trí cân bằng  $\xi = R - R^*$ , thì ta thu được

$$\ddot{\xi} = -\frac{k - m\omega^2 \sin^2 \alpha}{m} \xi,$$

tức là khi  $k > m\omega^2 \sin^2 \alpha$ , nó tương ứng với dao động điều hoà của ống bao quanh vị trí cân bằng với tần số

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2 \sin^2 \alpha}$$

và điều đó đồng nghĩa với việc vị trí cân bằng là bền.

$$12.48. \rho l^2 \omega^2 < 8T.$$

$$12.49. A = km\omega^2 \operatorname{ctg} \alpha \left( R_B^2 - RR_B + \frac{R^2}{2} \right) + 2km\omega vR, \text{ trong đó } R_B = \frac{g \operatorname{tg} \alpha}{\omega^2}$$

(điểm B mà tại đó  $mg \sin \alpha = m\omega^2 r \cos \alpha$ ).

$$12.50. M_{\min} = 0; M_{\max} = \frac{ml^2}{6} \Omega \omega \approx 7.10^{-4} \text{ N.m } (\vec{r}_i // \vec{\Omega}).$$

$$12.51. M_{\max} = m\omega \Omega R^2.$$

$$12.52. \frac{F_{\max} - F_{\min}}{mg} = 4\varphi_{\max} \frac{T_M}{T_K} \approx 0,01, \text{ trong đó } T_M = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 1 \text{ s};$$

$T_K = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = 20 \text{ s}$ . Lực Coriolis sẽ không quay mặt phẳng dao động của con lắc (tương tự con lắc Phucô trên xích đạo).

$$12.53. F = m\omega^2 \sin 2\alpha.$$

$$12.54. F = 2mg \sin \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

$$12.55. \Omega = \sqrt{\frac{2k - m\omega^2}{m}} = 4 \text{ s}^{-1}.$$

$$12.56. T = \frac{2\pi}{\omega}, \text{ trong đó } \omega = \sqrt{\frac{k}{m} + 3\Omega^2}.$$

$$12.57. T = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{2L}{3R}}.$$

$$12.58. T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

12.59. Nếu hướng trục  $OX$  theo bán kính vào tâm Trái Đất (điểm  $O$  là vị trí của tàu), trục  $OZ$  theo hướng tiếp tuyến với quỹ đạo của tàu và cùng chiều chuyển động của nó thì trong điều kiện bài toán, quỹ đạo chuyển động của nắp so với tàu có dạng elip và  $x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$ , còn  $z(t) = \frac{2v_0}{\omega} (1 - \cos \omega t)$ ,

trong đó  $\omega$  là vận tốc góc dao động của nắp so với tàu và có độ lớn bằng vận tốc góc của chuyển động quay của tàu quanh Trái Đất, tức là

$$\omega = \sqrt{g \frac{R_0^2}{R_{\text{TD}}^3}} \approx 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}; T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 5700 \text{ s} \approx 1 \text{ h } 35 \text{ phút}.$$

Elip có bán trục nhỏ  $b \approx 450 \text{ m}$  và bán trục lớn  $a \approx 900 \text{ m}$ .

**12.60.**  $v_{\max} \approx 0,003 \text{ m/s}$ ; quỹ đạo gần giống đường tròn.

**12.61\*.** Vệ tinh sẽ vẽ một hình elip nhỏ

$$x(t) = -\frac{2v_0}{\omega}(1 - \cos \omega t), \quad y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t,$$

đỉnh của elip nằm tại điểm cân bằng của vệ tinh, còn tâm lệch về phía tây một khoảng  $\frac{2v_0}{\omega}$ , trong đó  $\omega$  là vận tốc góc của Trái Đất.

*Lời giải.* Từ phương trình động lực  $m\vec{a}_0 = \vec{P} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_0$ , trong đó  $\vec{P}$  là “trọng lượng” của vật mà đối với điểm cân bằng của vệ tinh A nó bằng không:  $P_A = -\frac{C}{R_0^2} + m\omega^2 R_0 = 0$  ( $C = \gamma m M$ ).

Đối với chuyển động nhiễu loạn

$$P = -\frac{C}{(R_0 + y)^2} + m\omega^2(R_0 + y) \approx \frac{2C}{R_0^2}y + m\omega^2y = 3m\omega^2y.$$

Theo các hình chiếu trên các trục tọa độ  $X, Y, Z$  với gốc tại điểm A, phương trình động lực được viết dưới dạng:

$$\ddot{x} = -2\omega\dot{y}, \quad \ddot{y} = 3\omega^2y + 2\omega\dot{x}, \quad \ddot{z} = 0.$$

Từ đây suy ra  $\dot{x} = -2\omega y$ ,  $\ddot{y} + \omega^2y = 0$ . Với các điều kiện ban đầu  $y(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = v_0$  ta được  $y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$ .

Đối với tọa độ  $x$  khi  $x(0) = 0$  ta nhận được  $x(t) = -\frac{2v_0}{\omega}(1 - \cos \omega t)$ .

$$\mathbf{12.62.} \quad d_{\min} = \omega_{\text{TD}} R_{\text{TD}} \sqrt{\frac{R_{\text{TD}}}{g}} (\pi - 2) \approx 420 \text{ km}.$$

$$\mathbf{12.63.} \quad F = \frac{4\pi}{T} \sqrt{\frac{R}{g}} P \approx 0,12P, \text{ trong đó } P \text{ là trọng lượng của vật trên bề mặt}$$

Trái Đất,  $T$  là độ dài của ngày trên sao,  $R$  là bán kính Trái Đất.

$$\mathbf{12.64.} \quad v = r_0 \sqrt{2 \left( \omega^2 - 3 \frac{g_0}{R_0} \right)}.$$

$$\mathbf{12.65.} \quad U \approx 5 \cdot 10^{-13} \text{ V}.$$

$$\mathbf{12.66.} \quad R_{\text{Xích Đạo}} - R_{\text{Cực}} \approx 10 \text{ km}.$$

### §13. BIẾN DẠNG ĐÀN HỒI

13.1.  $D = 27 \text{ mm}$ .

13.2.  $\Delta V = \frac{1-2\mu}{E} l P$ , trong đó  $E$  là suất Young,  $\mu$  là hệ số Poát-xông.  
 $\Delta V < 0$  khi nén,  $\Delta V > 0$  khi giãn.

13.3.  $\Delta l = \rho g l^2 / 2E$ , trong đó  $\rho$  là khối lượng riêng của thanh,  $l$  là chiều dài thanh,  $E$  là suất Young; thể tích tăng một lượng  $\Delta V = \frac{1-2\mu}{2SE} V_0^2 \rho g$ , trong đó  $V_0$  là thể tích ban đầu,  $\mu$  là hệ số Poát-xông,  $S$  là tiết diện ngang.

13.4.  $\frac{\Delta l}{l} \sim 10^{-6}$ .

13.5.  $\alpha = 45^\circ$ ;  $\tau = \frac{F}{2S}$ .

13.6.  $U = \frac{P^2 h}{6ES}$ ; năng lượng đàn hồi tăng 7 lần.

13.7.  $\Delta l = \frac{\rho g L}{2E} (L - 2h) \approx 10^{-2} \text{ mm}$ .

13.8.  $T = \frac{2\pi x}{L} E$ , trong đó  $x$  là khoảng cách tính từ tiết diện đi qua trung điểm;  $T_{\max} = \frac{\pi d}{L} E \approx 2 \cdot 10^5 \text{ N/cm}^2$ .

13.9\*.  $\frac{\Delta V}{V} \approx 5 \cdot 10^{-4}$ .

*Lời giải.* Do tính đối xứng nên ứng suất tiếp tuyến  $\tau$  tác dụng trong lớp vỏ như nhau theo tất cả các hướng. Ta lấy một phần tử nhỏ có dạng hình chữ nhật trên vỏ. Khi tính sự biến thiên tương đối diện tích của phần tử này dưới tác dụng của các ứng suất tiếp tuyến  $\tau$ , có thể bỏ qua độ cong của phần tử mà coi nó như một hình chữ nhật phẳng. Khi đó ta tính được  $\Delta S / S = 2(1 - \mu)\tau / E$  (bỏ qua sự thay đổi diện tích gây ra bởi áp suất vuông góc). Vì diện tích  $S$  tỷ lệ với  $V^{2/3}$  nên độ biến thiên tương đối của thể tích sẽ là  $\Delta V / V = (3/2)\Delta S / S$ . Vì bề mặt bị cong nên ứng suất  $\tau$  tạo ra hiệu áp suất vuông góc, không khó tính được nó bằng  $2\tau d / R$  (xem công thức Laplace trong thuyết về sức căng bề mặt). Hiệu này phải cân bằng với hiệu áp suất khí  $\Delta P$  trên các mặt khác nhau của lớp vỏ. Kết quả ta nhận được

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3(1-\mu)R}{2Ed} \Delta P \approx 5.10^{-4}.$$

$$13.10. U = \frac{2\pi R^3}{3K} P^2.$$

$$13.11. v = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \approx 8 \text{ kHz}.$$

$$13.12. \Delta l = \frac{4Fl(1-\mu-2\mu^2)}{\pi D^2 E(1-\mu)}.$$

$$13.13. F = \frac{\pi E}{4\mu} (d_0^2 - dd_0).$$

$$13.14. P = E \frac{\rho_{\text{nước}} - \rho}{3\rho_{\text{nước}}(1-2\mu)} \approx 2.10^4 \text{ atm}.$$

$$13.15. \frac{\Delta V'}{V} = 3 \frac{\Delta V}{V} \frac{P}{\varepsilon E} \approx 6.10^{-4}.$$

$$13.16. P = 24500 \text{ N/cm}^2 \approx 2450 \text{ atm}.$$

$$13.17. P = E\alpha(t_1 - t_2); P_a \approx +1000 \text{ atm (giãn nở)} \text{ và } P_h \approx -375 \text{ atm (co lại)}.$$

$$13.18. \alpha = \frac{\alpha_d + 2\alpha_t}{3} = 1,37.10^{-5} \text{ K}^{-1}.$$

$$13.19. T_d = \frac{2}{5} E_t (\alpha_t - \alpha_d) \Delta t = -200 \text{ atm (tấm bằng đồng bị nén)};$$

$$T_t = \frac{1}{5} E_t (\alpha_d - \alpha_t) \Delta t = +100 \text{ atm (tấm bằng thép giãn)}.$$

13.20\*. Độ nén của thanh giảm hai lần.

*Lời giải.* Khi không có mấu tỳ, thanh sẽ chuyển động có gia tốc. Lực nén tại tiết diện thanh cách A một khoảng  $x$  là  $T = F(1 - x/L)$ , bởi vì các phần tử trước phải truyền gia tốc cho các phần tử sau của thanh. Sự thay đổi độ dài của phần tử  $dx$  của thanh cách A một khoảng  $x$  là

$$d\xi = \frac{T}{ES} dx = \frac{F}{ES} \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx.$$

Do đó, tổng chiều dài thay đổi sẽ là

$$\Delta L = \int_0^L d\xi = \frac{1}{2} \frac{LF}{ES}.$$

$$13.21. U = ma^2 l / (6ES).$$

13.22. Sẽ không có ứng suất trong thanh rơi tự do vì trong trường hợp này, lực hút của Trái Đất tác dụng lên tất cả các phần tử của thanh và truyền cho chúng cùng một gia tốc. Trong bài 13.20 lực tác dụng được đặt ở một đầu của thanh nên các phần tử sau nhận được gia tốc là do các phần tử trước bị nén.

$$13.23. \Delta l = -\frac{Fl}{2a^2 E}; \quad \Delta V = -\frac{Fl(1-2\mu)}{2E}, \quad \mu \text{ là hệ số Poát-xông.}$$

$$13.24. \Delta l = \frac{MmLg}{SE(2m+2M+\mu)} \approx 4,3 \text{ cm.}$$

$$13.25. F_{\max} = mg + v_0 \sqrt{\frac{mES}{l}} \approx 2,1 \cdot 10^5 \text{ N.}$$

$$13.26. v \geq \frac{T_g - \frac{mg}{S}}{\sqrt{\frac{ME}{Sl}}} = 3 \text{ m/s.}$$

$$13.27. F = \frac{\beta}{2} \frac{r^2}{2\pi R^2} M.$$

13.28.  $T = \frac{M\omega^2}{2L} (L^2 - x^2)$ ;  $\Delta L = \frac{M\omega^2}{3ES} L^2$ , trong đó  $x$  là khoảng cách từ tiết diện đang xét đến trục quay.

$$13.29. \varepsilon_1 = \frac{\rho\omega^2 L^2}{3E}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\rho\omega^2 (L/2)^2}{3E}; \quad \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{1}{4}.$$

$$13.30. \varepsilon = \frac{3}{4} \left( \frac{v}{v_a} \right)^2 = 3 \cdot 10^{-6}.$$

$$13.31. \Delta x = \frac{\rho g_0 R^2}{3E} \approx 230 \text{ m.}$$

$$13.32. \Delta x = \frac{\rho g_0}{E} \left( R^2 \ln 2 - \frac{R^2}{2} \right) \approx 144 \text{ m.}$$

$$13.33. R = \left( \frac{3\gamma M r^3 \rho}{2T_{ph}} \right)^{1/3} \approx 580 \text{ km.}$$

$$13.34. \tau = 2 \frac{l}{v_{at}} \approx 4 \cdot 10^{-5} \text{ s}, \quad v = \frac{v_{at} T_{dh}}{E} \approx 5 \text{ m/s}.$$

$$13.35. \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{2} \frac{v}{v_{at}}, \text{ trong đó } v_{at} \text{ là vận tốc âm thanh trong thanh nhỏ.}$$

$$13.36. A = \frac{\pi^2 d^3 b E}{6L} \approx 19,7 \text{ J}.$$

## §14. ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT LỎNG

$$14.1. T = \frac{4}{D} \sqrt{\frac{\pi m}{g \rho}}.$$

$$14.2. T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g(\sin \alpha + \sin \beta)}}.$$

$$14.3. T = 2\pi \sqrt{\frac{H}{g}}.$$

$$14.4. T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

$$14.5*. F = Q\rho \left[ gt + \sqrt{2g \left( H - \frac{Q}{S} t \right)} \right], \text{ trong đó } H \text{ là độ cao từ vị trí rót nước.}$$

*Lời giải.* Tại vị trí mực nước trong cốc, vận tốc thẳng đứng của dòng nước là  $v = \sqrt{2g(H-h)}$ . Sau 1s mực nước dâng một lượng  $\Delta h = Q/S$ . Áp lực lên đáy do dòng nước chảy xuống trong 1s là  $\Delta h S v \rho$ , trong đó  $\rho$  là khối lượng riêng của nước. Tổng áp lực lên đáy  $F = hgS\rho + \Delta h S v \rho$ . Sau thời gian  $t$  kể từ khi nước bắt đầu chảy  $h = \Delta h t = Qt/S$  và  $F = \Delta h \rho S \left[ gt + \sqrt{2g(H-h)} \right]$ . Cuối cùng, ta được

$$F = Q\rho \left[ gt + \sqrt{2g \left( H - \frac{Q}{S} t \right)} \right].$$

$$14.6. t = \frac{S}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{g}} (\sqrt{H} - \sqrt{h}), \quad T = \frac{S}{\sigma} \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

14.7.  $h = \frac{H}{2}$ ;  $x_{\max} = H$ .

14.8.  $v = \sqrt{2(P - P_0)/\rho + 2gh}$ , trong đó  $P_0$  là áp suất khí quyển.

14.9. Khi mực chất lỏng trong bình cao hơn đầu dưới của ống AB thì vận tốc dòng chảy không đổi và bằng  $v = \sqrt{2gh}$ . Sau đó vận tốc dòng chảy bắt đầu giảm.

14.10.  $L = \frac{T}{g(\rho_{\text{thép}} - \rho_{\text{nước}})} \ln \frac{S_0 T}{Mg - \rho_{\text{nước}} gV} = 15,6 \text{ km};$

$$S(h) = S_0 \exp \left[ -\frac{gh}{T} (\rho_{\text{thép}} - \rho_{\text{nước}}) \right];$$

$$H = \left( T - \frac{Mg - \rho_{\text{nước}} gV}{S_0} \right) \left[ g(\rho_{\text{thép}} - \rho_{\text{nước}}) \right]^{-1} \approx 3 \text{ km}.$$

14.11.  $r(y) = r_0 \sqrt[4]{\frac{H}{H+y}}.$

14.12.  $t = \frac{S}{\sigma} \frac{h-h_0}{\sqrt{2gh_0}}.$

14.13.  $P = P_0 - \rho g(h - h_1) + \rho g(h_0 - h_1) \frac{h_0^4(h^4 - h_1^4)}{h^4(h_0^4 - h_1^4)}$ ; áp suất cực đại khi

$$h_m = \left( \frac{4h_1^4 h_0^4 (h_0 - h)}{h_0^4 - h_1^4} \right)^{1/5}.$$

14.14. Cần đặt một lực  $F = 2S\rho g(h_1 - h_2) = 5 \text{ N}$  để đẩy xe lăn từ phía lỗ cao hơn.

14.15. Bình phải có gia tốc  $a \geq 2g(H-h)/l$  hướng về bên phải trên hình 307 đối với điều kiện của bài toán.

14.16. Paraboloid tròn xoay, được tạo ra từ parabol  $z = \frac{\omega^2}{2g} x^2$ , trong đó  $x$  là

khoảng cách đến trục quay,  $z$  là độ tăng mực chất lỏng ở thành bình so với ở tâm bình.



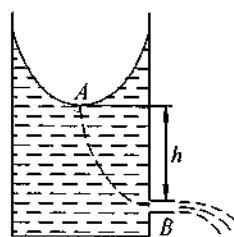
14.17. 1)  $P = P_0 + \frac{\rho \omega^2 R^2}{2}$ , trong đó  $P_0$  là áp suất tại tâm của đáy,  $\rho$  là khối lượng riêng của nước,  $R$  là khoảng cách từ tâm đáy;

2)  $P \approx 42,3 \cdot 10^{-2} \text{ N/cm}^2$ .

14.18\*. *Lời giải.* Ta chuyển sang hệ quy chiếu, trong đó chất lỏng đứng yên. Trong hệ quy chiếu này có thêm 2 lực quán tính: lực hướng tâm và lực Coriolis. Lực Coriolis không thực hiện công. Nó chỉ làm cong dòng chảy, nhưng không ảnh hưởng đến tính đúng đắn của công thức Bernuli. Lực hướng tâm tạo thêm một số hạng mới của thế năng. Tổng thế năng của một đơn vị khối lượng chất lỏng sẽ là  $u = gz - \omega^2 r^2 / 2$ , do đó phương trình Bernuli được viết dưới dạng

$$\frac{v^2}{2} + gz - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 + \frac{P}{\rho} = B = \text{const},$$

trong đó  $v$  là vận tốc tương đối của chất lỏng (tức là vận tốc so với hệ quy chiếu quay). Hằng số Bernuli  $B$  như nhau đối với mọi dòng chảy vì các dòng chảy đều bắt đầu từ gần bề mặt chất lỏng, tại đó vận tốc  $v$  nhỏ không đáng kể. Áp dụng phương trình trên cho dòng chảy  $AB$ , bắt đầu từ điểm  $A$  trên bề mặt chất lỏng (H.403). Nếu ta đặt gốc toạ độ tại điểm  $A$  thì  $z_A = r_A = v_A = 0$ ,  $P_A = P_B = P_0$ ,  $v_B = v$ ,  $z_B = -h$ ,  $r_B = R$ , ta nhận



Hình 403

được  $v = \sqrt{2(gh + \omega^2 R^2)}$ . Chuyển về hệ quy chiếu cố định, tính toán không có gì khó.

14.19.  $\omega_k = \left( \frac{\omega_0^3}{4} + \frac{3}{\pi} \frac{m_0 \omega_0 g}{\rho R^4} \right)^{1/3}$ ,  $\rho$  là khối lượng riêng của nước.

14.20\*. *Lời giải.* Xét một lớp chất lỏng hình xuyên có bán kính trong là  $r$ , bán kính ngoài là  $r + dr$ . Lực ma sát trong tác dụng lên nó theo chiều dòng chảy bằng

$$2\pi l \eta \left[ \left( r \frac{dv}{dr} \right)_{r+dr} - \left( r \frac{dv}{dr} \right)_r \right] = 2\pi l \eta \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) dr.$$

(Các chỉ số  $r$  và  $r + dr$  có nghĩa là các đại lượng trong dấu ngoặc phải được tính với giá trị bán kính tương ứng là  $r$  và  $r + dr$ ). Hiệu các áp lực  $(P_1 - P_2)2\pi r dr$  cũng tác dụng theo hướng tương tự. Khi chuyển động là

chuyển động chuẩn tĩnh thì tổng cả hai lực bằng không. Điều đó dẫn đến phương trình

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = - \frac{P_1 - P_2}{4l\eta} r.$$

Nghiệm của phương trình trên bằng không tại  $r = R_1$  và  $r = R_2$  là

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4l\eta} \left[ R_2^2 - r^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln(R_2 / R_1)} \ln \frac{r}{R_2} \right].$$

Lưu lượng chất lỏng

$$Q = \frac{\pi \rho (P_1 - P_2)}{8\eta l} \left[ R_2^4 - R_1^4 - \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{\ln(R_2 / R_1)} \right].$$

$$14.21. f = \frac{2\pi\eta v_0}{\ln(r_2 / r_1)} \approx 0,27 \cdot 10^{-5} \text{ N/cm}; v(r) = v_0 \frac{\ln(r_2 / r)}{\ln(r_2 / r_1)}.$$

$$14.22. \tau = \frac{8\eta L}{\rho g R^2}, \text{ trong đó } g \text{ là gia tốc rơi tự do.}$$

$$14.23. Q = \frac{3\pi\phi R_1^3 R_2^3}{8\eta(R_2^3 - R_1^3)} \Delta P.$$

$$14.24. v_{\max} = \frac{\rho g h \delta^2}{8\eta d} \approx 2,3 \text{ cm/s}; M = \frac{2}{3} \rho l v_{\max} \delta = 1,15 \cdot 10^{-4} \text{ g/cm}.$$

$$14.25. Q = \frac{ab^3 \Delta P}{12\eta l} \approx 0,8 \text{ cm}^3/\text{s}.$$

14.26. Giảm 4 lần.

$$14.27. h(t) = H e^{-t/\tau}, \text{ trong đó } \tau = \frac{8S}{\pi^2} \frac{\eta l}{\rho g r^2} \approx 2,5 \cdot 10^3 \text{ s} \approx 0,7 \text{ h. Thời gian}$$

$$\text{chảy } t_{\text{ch}} \approx \tau \ln \frac{H}{r} \approx 100\tau \approx 70 \text{ h.}$$

$$14.28. r \approx \sqrt[4]{\frac{8Q\eta l}{\pi\rho g h}} \approx 0,1 \text{ cm}, \text{ tức là } d \approx 2 \text{ mm.}$$

$$14.29. N = \omega M = \frac{\pi}{2} \omega^2 \frac{a+b}{ab} \eta R^4 \approx 76 \text{ W, trong đó } \omega = 2\pi.$$

$$14.30. \Delta l = \frac{4\eta VL^2}{\pi r_1^2 E(r_2^2 - r_1^2)}.$$

$$14.31. \omega_1(t) = \frac{1}{4} \omega_{20} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{4\eta S}{3mRh} t\right) \right];$$

$$\omega_2(t) = \frac{1}{4} \omega_{20} \left[ 1 + 3 \exp\left(-\frac{4\eta S}{3mRh} t\right) \right]; v(t) = \omega_1 R; \frac{K_D - K_C}{K_D} = \frac{3}{4}.$$

14.32. Thời gian thiết lập chuyển động lăn thuần túy có thể đánh giá như  $\tau \sim \frac{R^2 \rho}{\eta}$ . Bình đựng dầu chưng sẽ vượt qua bình đựng mật ong

$l' \approx (v_0 - v)\tau \approx 10 \text{ m}$ , trong đó  $v = \frac{2v_0}{3}$  là vận tốc khi lăn đều.

14.33. Đối với sóng hấp dẫn, vận tốc  $u$  và bước sóng  $\lambda$  liên hệ với nhau bằng hệ thức  $u = \sqrt{g\lambda/2\pi}$ . Vì thế bức tranh sóng sẽ giống nhau nếu tất cả các kích thước thay đổi tỷ lệ với bình phương vận tốc chuyển động. Do đó, vận tốc của mẫu tàu thử phải bằng  $3,6 \text{ km/h} = 1 \text{ m/s}$ . Ta thấy rằng trong bài này thông số đồng dạng không thứ nguyên là các tỷ số  $\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{g\lambda}}{v}$  và  $\frac{\lambda}{l}$ , trong đó  $v$  là vận tốc tàu,  $l$  là kích thước dài của nó.

14.34.  $\tau = \frac{m}{kv_0} \left( \frac{v_0 l}{v} - 1 \right); S = \frac{m}{k} \ln \left( \frac{v_0 l}{v} \right)$ . Quá trình tính toán cho ta kết quả mâu thuẫn nhau và vô lý:

1)  $\tau_1 \approx 15 \text{ s}$ ,  $S_1 \approx 0,04 \text{ mm}$ ;

2)  $\tau_2 \approx 49 \text{ h}$ ,  $S_2 \approx 5 \text{ m}$ .

Từ đây ra thấy rõ ràng là trong khuôn khổ giả thiết mà mô hình đưa ra không thể nhận được các kết quả hợp lý. Quy luật chuyển động của thuyền rất phức tạp. Chuyển động của thuyền phụ thuộc vào các kích thước của nó, vào vận tốc (không phải theo quy luật bình phương), vào hình dáng, bản chất của bề mặt và vào một số yếu tố khác.

## Phần II

# NHIỆT HỌC VÀ VẬT LÝ PHÂN TỬ

### §1. KHÍ LÝ TƯỞNG. CÔNG, NHIỆT LƯỢNG, NỘI NĂNG. NGUYÊN LÝ THỨ NHẤT CỦA NHIỆT ĐỘNG HỌC. NHIỆT DUNG

1.2. *Hướng dẫn.* Các hệ số  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $\beta$  được xác định bằng các biểu thức

$$\alpha = \frac{1}{V_0} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P, \quad \lambda = \frac{1}{P_0} \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V, \quad \beta = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T.$$

Ngoài ra, người ta thường tính  $\alpha$  và  $\lambda$  theo các công thức sau

$$\alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P, \quad \lambda = \frac{1}{P} \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V.$$

Đối với các chất lỏng và rắn các cách xác định này về bản chất không khác nhau. Cách xác định đầu tiên có ưu điểm là đối với khí lý tưởng thì các đại lượng  $\alpha$  và  $\lambda$  không đổi, trong khi đó với cách xác định thứ hai thì chúng thay đổi tỷ lệ nghịch với nhiệt độ tuyệt đối  $T$ . Đại lượng  $\beta$  còn gọi là độ nén đẳng nhiệt của vật chất.

1.3.  $\lambda = 46(^{\circ}\text{C})^{-1}$ .

1.4. Phải tăng 460atm.

1.5.  $\alpha = \frac{1}{T_0}$ ;  $\lambda = \frac{1}{T_0}$ ;  $\beta_T = \frac{1}{P}$ ;  $K_T = P$ .

Ở đây  $T_0$  là nhiệt độ tuyệt đối tương ứng với  $0^{\circ}\text{C}$ . Nếu sử dụng cách thứ hai (xem lời giải bài 1.2) để xác định các hệ số  $\alpha$ ,  $\lambda$  thì ta sẽ nhận được

$\alpha = \lambda = \frac{1}{T}$ , tức là khi đó đối với khí lý tưởng các hệ số  $\alpha$ ,  $\lambda$  không phải là hằng số.

1.6\*.  $x = 0,131$ .

*Lời giải.* Khoảng cách giữa điểm treo và khối tâm của con lắc là  $a = l(1 - x/2)$ , trong đó  $l$  là chiều dài ống niken.

Ta sẽ xét một cách gần đúng con lắc như con lắc toán học. Để bù lại sự giãn nở vì nhiệt thì phải đòi hỏi đại lượng  $a$  không thay đổi khi nhiệt độ thay đổi, tức là  $\frac{da}{dl} = 0$ , hay là

$$2\left(1 - \frac{x}{2}\right) - l \frac{dx}{dl} = 0.$$

Ta tìm được  $\frac{dx}{dl}$ . Chiều dài ống niken  $l = l_0(1 + \alpha_d t)$ , thể tích bên trong ống  $V = V_0(1 + 3\alpha_d t)$ , thể tích thủy ngân  $v = v_0(1 + \alpha t)$ . Phần thể tích ống chứa thủy ngân bằng  $x = \frac{v}{V} = x_0[1 + (\alpha - 3\alpha_d)t]$ , trong đó  $x_0 = \frac{v_0}{V_0}$  là giá trị của  $x$  khi  $t = 0^\circ \text{C}$ . Từ đây ta tìm được

$$dx = x_0(\alpha - 3\alpha_d)dt \approx x(\alpha - 3\alpha_d)dt, \quad dl = l_0\alpha_d dt \approx l\alpha_d dt,$$

tức là

$$\frac{dx}{dl} = \frac{x}{l} \left( \frac{\alpha}{\alpha_d} - 3 \right).$$

Điều kiện để bù phân giãn nở vì nhiệt có dạng

$$\left(1 - \frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2} \left( \frac{\alpha}{\alpha_d} - 3 \right) = 0,$$

suy ra

$$x = \frac{2}{\alpha/\alpha_d - 3} = \frac{1}{8}.$$

Tiếp theo ta tính đến độ lệch giữa tâm dao động và khối tâm của con lắc. Sử dụng công thức đã biết đối với độ dài rút gọn của con lắc vật lý, ta dễ dàng tính được

$$L = \frac{2}{3} \frac{3 - 3x + x^2}{2 - x} l.$$

Cần phải yêu cầu đại lượng này không thay đổi khi thay đổi nhiệt độ, tức là  $\frac{dL}{dx} = 0$ . Lập luận tương tự như trên ta đi đến phương trình

$$(x^3 - 5x^2 + 9x - 6) + \left( \frac{\alpha}{\alpha_d} - 3 \right) (x^2 - 4x + 3)x = 0,$$

sau khi thay các giá trị số  $\frac{\alpha}{\alpha_d} = 18$ , ta thu được

$$16x^3 - 65x^2 + 54x - 6 = 0.$$

Để tìm nghiệm của phương trình bậc ba này ta đặt  $x = \frac{1}{8} + \delta$ , trong đó  $\delta$  là đại lượng vô cùng bé. Thế biểu thức này vào phương trình trên và bỏ qua lập phương và bình phương của  $\delta$ , ta thu được phương trình tuyến tính đối với  $\delta$ , sau khi giải ta được  $\delta = 0,006$ . Như vậy

$$x = 0,125 + 0,006 = 0,131.$$

1.7.  $\rho = \rho_0(1 + \beta P) = 1,054 \text{ g/cm}^3$ .

1.8.  $m \approx 105 \text{ g}$ .

1.9.  $x = \frac{H + l - \sqrt{H^2 + l^2}}{2}$ .

1.10.

$$h_1 = -\frac{1}{2}(2l + H_1 - h) + \sqrt{\frac{1}{4}(2l + H_1 - h)^2 + \frac{2T_1}{T_0}(H_0 + h) - H_1(2l - h)}.$$

1.11.  $P = 224,4 \text{ mmHg}$ .

1.12.  $V = \frac{M}{\rho_0 \left( \frac{1}{1 + \alpha_1} - \frac{1}{1 + \alpha_2} \right)} \approx 1000 \text{ m}^3$ , trong đó  $\alpha$  là hệ số nở nhiệt của

các khí.

1.13.  $P = \rho_0 g l \left( \frac{1}{1 + \alpha_2} - \frac{1}{1 + \alpha_1} \right) = 14 \text{ mmHg}$ , trong đó  $\alpha$  là hệ số nở nhiệt của các khí.

1.14.  $m = \frac{2M\sigma}{3\rho RT} \mu = 488 \text{ g}$ , trong đó  $\mu$  là khối lượng mol phân tử nitơ.

1.15.  $n = \frac{\ln(P_2 / P_1)}{\ln[V / (V + v)]}$ .

1.16.  $\tau = \frac{V}{K} \ln \frac{P_0}{P} \approx 370 \text{ s}$ , trong đó  $K$  là vận tốc bơm của bơm dầu, tức là thể tích khí bơm được trong 1s.

1.17.  $P = 1,37 \cdot 10^3 \text{ atm}$ .

1.18. 1)  $P = 0,03 \text{ atm}$ ; 2)  $P \approx 7,6 \cdot 10^4 \text{ atm}$ .

1.19.  $P_{bom} = \frac{N \rho Z k T}{A} \approx 7,5 \cdot 10^{10} \text{ atm}$ , trong đó  $N$  là số Avôgadrô,  $Z = 92$  là nguyên tử số của uran,  $A = 238$  là khối lượng nguyên tử tương đối của uran.

$P_{TD} = \frac{1}{2} \rho_{TD} g R \approx 1,7 \cdot 10^6 \text{ atm}$ , trong đó  $R$  là bán kính Trái Đất.

1.20.  $P = \frac{P_0}{T_0} (V_0 + V_1 + V_2) \left( \frac{V_0}{T_0} + \frac{V_1}{T_1} + \frac{V_2}{T_2} \right)^{-1}$ .

1.21.  $m = \frac{\mu P S l}{R(T_2 - T_1)} \ln \frac{T_2}{T_1}$ , trong  $\mu$  là khối lượng mol phân tử không khí.

1.22.  $V = 200 \text{ cm}^3$ .

1.23.  $\frac{1}{\mu} = \frac{M_1}{M} \frac{1}{\mu_1} + \frac{M_2}{M} \frac{1}{\mu_2} + \frac{M_3}{M} \frac{1}{\mu_3} + \dots$

1.24.  $v = 340 \text{ m/s}$ .

1.25.  $\frac{\delta Q}{dt} = \frac{\lambda \mu P K}{RT} \approx 5 \text{ cal/s} \approx 21 \text{ W}$ , trong đó  $K$  là công suất của bơm,  $\mu$  là khối lượng mol phân tử của nước.

126. 1)  $Q_{142} = Q_{132} - A_{132} + A_{142} = 60 \text{ J}$ ;

2)  $Q'_{21} = Q_{132} - A_{132} + A_{21} = 70 \text{ J}$ ;

3)  $Q_{14} = U_4 - U_1 + A_{142} = 50 \text{ J}$ ;  $Q_{42} = Q_{142} - Q_{14} = 10 \text{ J}$ .

1.27.  $Q = 2Q_2 + Q_3 - Q_1 = 94 \text{ kJ}$ .

1.30. Kết quả suy ra từ công thức  $U = C_V \frac{PV}{R}$ .

1.31.  $Q = 0$ .

1.32.  $Q = 910 \text{ J}$ .

1.33.  $Q = \frac{AC_P}{R} = 25 \text{ J}$ .

1.34.  $A_{nguồn} \approx -100 \text{ J}$ ;  $Q = -350 \text{ J}$ .

$$1.35. \Delta U = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{1-\gamma} - 1 \right] \approx -1900 \text{ J, trong đó } \gamma = \frac{C_P}{C_V} = 1,4.$$

$$1.36. \Delta P = \frac{CU^2}{3V} = 3 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

$$1.37. P_2 = P_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma = 0,312 \text{ atm.}$$

$$1.38. TV^{n-1} = \text{const}; PV^n = \text{const}, \text{ trong đó } n = \frac{C - C_P}{C - C_V}.$$

1)  $V = \text{const}$ ; 2)  $P = \text{const}$ ; 3)  $PV^\gamma = \text{const}$ ; 4)  $PV = \text{const}$ .

Hằng số  $n$  được gọi là chỉ số polytropic.

1.39. Sẽ nóng lên khi  $n > 1$ , lạnh đi khi  $n < 1$ .

1.40.  $C = \nu(3C_V - 2C_P) = -0,163 \text{ cal/K}$ , trong đó  $\nu = 0,163$  là số mol của hêli.

$$1.42. A = \frac{P_1 V_1}{n-1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right] = \frac{P_2 V_2}{n-1} \left[ \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{n-1} - 1 \right], \text{ trong trường hợp}$$

riêng đối với quá trình đẳng nhiệt  $A_T = P_2 V_2 \ln \frac{V_2}{V_1}$ , trong đó  $P_2 V_2 = RT$ ;

đối với quá trình đoạn nhiệt  $A_{ad} = A$ , nếu thay chỉ số polytropic  $n$  thành chỉ số đoạn nhiệt  $\gamma$ .

$$1.43. A > 0, A = \frac{m}{\mu} RT_1 \left[ \left( \frac{V_2}{V_1} - 1 \right) - \ln \frac{V_2}{V_1} \right].$$

$$1.44. T = 500 \text{ K.}$$

1.45. 1) Khí lạnh đi khi giãn nở và nhiệt độ của nó tỷ lệ với  $\sqrt{P}$ .

2)  $C = C_V - R$ . Khi giãn nở cần phải cung cấp nhiệt cho khí.

1.46. 1) Khí nóng lên khi giãn nở và nhiệt độ của nó tỷ lệ với  $\sqrt{V}$ .

2)  $C = C_P + R$ . Khi giãn nở cần phải cung cấp nhiệt cho khí.

$$1.47. C = \frac{1}{2}(C_V + C_P) = C_V + \frac{R}{2} = C_P - \frac{R}{2}.$$

$$1.48. P \sim T^{2/3}.$$



1.49.  $C(V) = R \frac{\gamma V_0 - (1+\gamma)V}{(\gamma-1)(V_0-2V)}$ ;  $T_{\max} = \frac{P_0 V_0}{4R}$ , Tại điểm  $C(V) = 0$  đường

thẳng trên hình 317 tiếp xúc với đường đoạn nhiệt, Tại điểm  $C(V) = \infty$  - đường đẳng nhiệt.

1.50.  $VT^{(C_V - C_0)/R} e^{-\alpha T/R} = \text{const.}$

1.51.  $VT^{C_{V_0}/R} e^{\alpha T^2/2R} = \text{const.}$

1.52.  $VT^{1/(\gamma-1)} e^{-\alpha T^2/2R} = \text{const.}$

1.53.  $Q_{132} = \frac{19}{2} RT_1$ ;  $Q_{142} = \frac{17}{2} RT_1$ ;  $Q_{12} = 9RT_1$ ;  $C_{12} = 3R$ .

1.54.  $C = C_V + \frac{R}{2}$ .

1.55\*.  $C_1 = \frac{V_1 + V_2}{V_2 + \gamma V_1} \gamma C_V$ ,  $C_2 = 0$ ;  $C_1 = C_V \frac{V_1 + \gamma V_2}{V_1 + V_2}$ ;  $C_2 = \infty$ .

Lời giải. Vì phân nhiệt lượng mà khí thứ nhất nhận được  $\delta Q_1 = C_V dT_1 + P_1 dV_1 = C_V dT_1 + RT_1 dV_1/V_1$ , còn khí thứ hai nhận được  $\delta Q_2 = 0$ . Do đó  $C_2 = 0$  và  $C_V dT_2 + RT_2 dV_2/V_2 = 0$ . Vì áp suất  $P_1 = P_2$  nên  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$ , suy ra  $\frac{dV_1}{V_1} + \frac{dV_2}{dV_2} = \frac{dT_1}{T_1} - \frac{dT_2}{T_2}$ . Vì thể tích của hệ  $V_1 + V_2$  trong cả quá trình không đổi nên  $dV_1 + dV_2 = 0$ . Khử  $dV_2$  và  $dT_2$ , ta thu được

$$\left( \frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} + \frac{R}{C_V} \frac{1}{V_2} \right) dV_1 = \frac{dT_1}{T_1}.$$

Sử dụng hệ thức  $C_P - C_V = R$  ta tìm được

$$\delta Q_1 = \left( C_V + R \frac{V_2}{V_2 + \gamma V_1} \right) dT_1.$$

Vì vậy

$$C_1 = C_V + \frac{V_2}{V_2 + \gamma V_1} R = \frac{V_1 + V_2}{V_2 + \gamma V_1} \gamma C_V.$$

Khi  $V_1 = V_2$

$$C_1 = \frac{2\gamma C_V}{\gamma + 1}.$$

Nếu nắp  $CD$  được làm bằng chất dẫn nhiệt và giữ cho nhiệt độ của khí ở phía trên không đổi thì  $C_2 = \infty$ , còn  $C_1 = C_V \frac{V_1 + \gamma V_2}{V_1 + V_2}$ .

$$1.56. C_1(V_2) = \frac{C_V}{1 - V_2/(5V_0)}.$$

$$1.57. V_1 = \frac{RT_0^2}{P_0(T_0 + T)} = 9,47 \text{ l}; V_2 = \frac{RT_0 T}{P_0(T_0 + T)} = 12,9 \text{ l};$$

$$P = P_0 \frac{T_0 + T}{2T_0} = 1,18 \text{ atm}; m = \frac{RT_0}{2q} \ln \frac{P}{P_0} \approx 0,56 \text{ g}.$$

$$1.58. \gamma = \frac{4}{3}.$$

$$1.59. A = 2C_V T_0 (2^{(\gamma-1)/2} - 1); C = -C_V.$$

$$1.60. Q = \frac{2RT_0}{\gamma-1} \left[ \left( \frac{V_0}{V_0 - hS} \right)^\gamma - 1 \right].$$

$$1.61. T_{\max} = \frac{\mu(P_2 V_1 - P_1 V_2)^2}{4mR(P_2 - P_1)(V_1 - V_2)} = 490 \text{ K}, \text{ trong đó } \mu \text{ là khối lượng mol phân tử hêli, } m \text{ là khối lượng của hêli.}$$

$$1.62. V_0 = \frac{2}{5} \frac{Q}{\rho g H} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} \right)^\gamma = 98,7 \text{ m}^3, \text{ trong đó } \gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{7}{5}; \text{ thể tích cuối}$$

$$\text{cùng của bể chứa dầu } V = \frac{2}{5} \frac{Q}{\rho g H} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} \right)^{\gamma-1} = 342 \text{ m}^3.$$

$$1.63. \gamma = \frac{V}{hS} \frac{T_1^2 - T_2^2}{T_2^2}.$$

$$1.64. T - T_0 = \frac{mv^2}{2\nu C_V} \approx 28000 \text{ K}, \text{ trong đó } \nu \text{ là số mol;}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{1/(\gamma-1)} \approx 1000; \frac{P}{P_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \approx 10^5.$$

**1.65\*.** *Lời giải.* Để đơn giản việc tính toán, ta giả thiết rằng có 1 mol khí đi qua ống xoắn. Công mà khí thực hiện bằng  $A = P_2 V_2 - P_1 V_1 = R(T_2 - T_1)$ . Độ biến thiên nội năng của nó  $U_2 - U_1 = C_V (T_2 - T_1)$ . Nhiệt lượng mà khí nhận được  $Q = U_2 - U_1 + A$ . Thế vào đây các biểu thức tính  $U_2 - U_1$  và  $A$ , ta tìm được nhiệt lượng  $Q = (C_V + R)(T_2 - T_1)$ , hoặc  $Q = C_P (T_2 - T_1)$ , vì  $C_V + R = C_P$ . Từ đây thấy rõ rằng, trong thí nghiệm đã cho người ta đo được nhiệt dung  $C_P$ .

**1.66.**  $T = 2\pi \sqrt{\frac{Ml_0}{Mg + P_0 S}}$ . Trong trường hợp tới hạn, khi  $P_0 = 0$  thì

$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}}$ , tức là chu kỳ dao động trùng với chu kỳ dao động của con lắc toán học chiều dài  $l_0$ .

**1.67.**  $T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\gamma} \frac{Ml_0}{Mg + P_0 S}}$ . Công thức đúng cả trong trường hợp khi  $\gamma$  phụ thuộc vào nhiệt độ, vì để nhận được nó ta đã sử dụng phương trình đoạn nhiệt dưới dạng vi phân. Trong trường hợp tới hạn, khi  $P_0 = 0$  thì

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\gamma} \frac{l_0}{g}}.$$

$$\mathbf{1.68.} \quad \tau = \frac{2\pi}{S} \sqrt{\frac{M}{P_0(\gamma_1/V_1 + \gamma_2/V_2)}}.$$

**1.69\*.** *Lời giải.* Xét bốn trạng thái sau của khí:

$$1) P_0, V_0, T_0; \quad 2) P_1, V, T;$$

$$3) P_1, V_1, T_0; \quad 4) P_2, V_2, T_2;$$

Khí chuyển từ trạng thái thứ nhất sang trạng thái thứ hai, và cả từ trạng thái thứ ba sang trạng thái thứ tư đều qua quá trình đoạn nhiệt, vì vậy

$$P_0 V_0^\gamma = P_1 V^\gamma, \quad P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma.$$

Trong trạng thái thứ nhất và trạng thái thứ ba, nhiệt độ của khí như nhau. Do đó  $P_0 V_0 = P_1 V_1$ . Công của máy nén khí hai tầng

$$A = \frac{P_0 V_0}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{P_0}{P_1} \right)^{(1-\gamma)/\gamma} + \left( \frac{P_1}{P_2} \right)^{(1-\gamma)/2} - 2 \right].$$

Công này đạt cực tiểu khi  $P = \sqrt{P_0 P_2}$  :

$$A_{\min} = \frac{2P_0 V_0}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{P_2}{P_0} \right)^{(\gamma-1)/2\gamma} - 1 \right].$$

Công của máy nén khí một tầng với cùng áp suất ban đầu và áp suất cuối

$$A_1 = \frac{P_0 V_0}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{P_2}{P_0} \right)^{\gamma-1} - 1 \right].$$

Do đó,

$$A_{\min} = 2A_1 \left[ \left( \frac{P_2}{P_0} \right)^{(\gamma-1)/2\gamma} + 1 \right]^{-1}.$$

Đối với heli  $\gamma = \frac{5}{3}$ ,  $A_{\min} = 0,515 A_1$ ; đối với không khí  $\gamma = \frac{7}{5}$ ;

$$A_{\min} = 0,64 A_1.$$

$$1.70. V_1 = \sqrt{V_0 V_2};$$

$$A_1 = \frac{2P_0 V_0}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{V_0}{V_2} \right)^{(\gamma-1)/2} + 1 \right], \quad A_{\min} = 2A_1 \left[ \left( \frac{V_0}{V_2} \right)^{(\gamma-1)/2} + 1 \right]^{-1}.$$

Đối với argon  $A_{\min} = 0,42 A_1$ ; đối với nitơ  $A_{\min} = 0,62 A_1$ .

**1.71\*. Lời giải.** Khi chuyển từ trạng thái ban đầu (thể tích  $V_1$ , nhiệt độ  $T_1$ ) sang trạng thái cuối (thể tích  $V_2$ , nhiệt độ  $T_2$ ) áp suất bên ngoài thực hiện một công lên chất khí  $A = P_2(V_1 - V_2)$ , công này dùng để tăng nội năng  $U_2 - U_1 = C_V(T_2 - T_1)$ . Áp dụng phương trình Clapayron  $PV = RT$  và hệ thức Mayer  $C_P - C_V = R$ , sau một vài biến đổi đơn giản, ta thu được

$$T_2 = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{P_2 - P_1}{P_1} \right) T_1.$$

Trong quá trình chuẩn tĩnh đoạn nhiệt

$$T_2^{\text{chuẩn tĩnh}} = T_1 \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma}.$$

Trong trường hợp thứ nhất, khi  $P_2$  thay đổi thì nhiệt độ  $T_2$  thay đổi theo hàm bậc nhất, còn trong trường hợp thứ hai  $T_2$  thay đổi theo hàm lũy thừa cơ số  $e$ , thêm vào đó trong vùng lân cận vô cùng bé của điểm  $P_1$ , cả hai sự thay đổi này đều diễn ra nhanh như nhau. Từ đây suy ra  $T_2^{\text{chuẩn tĩnh}} > T_2$  nếu  $P_2 - P_1 > 0$  và  $T_2^{\text{chuẩn tĩnh}} < T_2$  nếu  $P_2 - P_1 < 0$ . Điều đó có nghĩa là sự tăng nhiệt độ trong quá trình nén đoạn nhiệt tức thời và sự giảm nhiệt độ trong quá trình giãn nở đoạn nhiệt tức thời nhỏ hơn các đại lượng tương ứng trong quá trình chuẩn tĩnh đoạn nhiệt.

$$1.72. T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{S \left[ (P_0 + \rho g l) \frac{\gamma}{x_0} + 2\rho g \right]}} = 0,11 \text{ s, trong đó } \gamma = \frac{7}{5} \text{ là chỉ số}$$

đoạn nhiệt,  $\rho = 13,6 \text{ g/cm}^3$  là khối lượng riêng của thủy ngân.

$$1.73. |\Delta x| = \frac{\Delta g}{g} H \frac{S_0}{S} \left( 1 + \frac{S_0 H}{V} \right)^{-1} \approx 0,01 \text{ cm, trong đó } H = 760 \text{ mmHg.}$$

$$1.74. \frac{P}{(\gamma - 1)} = \sum \frac{P_i}{(\gamma_i - 1)}, \text{ trong đó } P = \sum P_i \text{ là áp suất hỗn hợp khí.}$$

$$1.75. T = 300 \text{ K.}$$

$$1.76. \Delta U = (m_1 c_{P_1} + m_2 c_{P_2}) \Delta t / \gamma = 1,26 \text{ kJ.}$$

$$1.77. P = \frac{2}{3} P_0 \left( 1 + \alpha \frac{Q}{C} \right), \text{ trong đó } P_0 \text{ là áp suất ban đầu của hỗn hợp,}$$

$\alpha$  là hệ số nở khối.

$$1.78. n = \frac{R}{C_V} \frac{\ln(P_1 / P_0)}{\ln(T_{\max} / T_0)}; A = \frac{nvRT_0}{\gamma - 1} \left( \frac{T_{\max}}{T_0} - 1 \right);$$

khi  $T_{\max} \rightarrow T_0$  thì  $A \rightarrow vRT_0 \ln \frac{P_1}{P_0}$ , trong đó  $v$  là số mol của hỗn hợp khí.

$$1.79. c_V = \frac{27}{32} R = 1,68 \text{ cal/(g.K)} \approx 7,0 \text{ J/(g.K).}$$

$$1.80. c_P = \frac{71}{188} R \approx 0,75 \text{ cal/(g.K)} \approx 3,14 \text{ J/(g.K).}$$

$$1.81. C_V = (2C_{V_1} - C_{V_2})\alpha + C_{V_2} = 5,15 \text{ cal/(mol.K)} \approx 21,5 \text{ J/(mol.K).}$$

$$1.82. P \approx 6,4 \cdot 10^6 \text{ Pa.}$$

$$1.83. \alpha = \frac{4Ac_p - 7R}{3R} \approx 0,5.$$

$$1.84. T = \frac{q}{3k} + \frac{5}{6} T_0; P = \frac{2Nq}{3V_0} + \frac{5}{3} P_0.$$

$$1.85. Q = 3,37 \text{ kJ.}$$

$$1.86. \Delta T = -\frac{A}{R} = -5,05 \text{ K.}$$

$$1.87. T = \frac{T_0}{\sqrt[4]{2}} = 246 \text{ K.}$$

$$1.88. A = (C_{V1} + C_{V2}) T_0 \left[ \left( \frac{V_0}{V} \right)^{C_{V1} + C_{V2}} - 1 \right].$$

$$1.89. \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{\ln(l_{01}/l_1)}{\ln(l_{02}/l_2)}.$$

$$1.90. T = \frac{E(A_D + A_T)}{8\pi R \rho r^3} \approx 10^8 \text{ K}; P = \frac{4\rho RT}{A_D + A_T} \approx 10^9 \text{ atm, trong đó } A_D \text{ và}$$

$A_T$  tương ứng là khối lượng nguyên tử deuteri và triti.

$$1.91. E = \frac{4\pi\rho RT}{A_D} r^3 \approx 0,98 \text{ J, } A_D \text{ là khối lượng nguyên tử deuteri.}$$

$$1.92. K_{ad} = \gamma P = \gamma K_T.$$

1.93\*. *Lời giải.* Từ biểu thức đã biết đối với hiệu các nhiệt dung phân tử của một chất đồng nhất đẳng hướng

$$C_P - C_V = \left[ P + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \right] \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P,$$

suy ra

$$\delta Q = C_V dT + \frac{C_P - C_V}{(\partial V / \partial T)_P} dV.$$

Đối với quá trình đoạn nhiệt  $dQ = 0$ . Vì vậy

$$dT_{\text{ad}} + \frac{\gamma - 1}{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P} dV_{\text{ad}} = 0.$$

Thay

$$dT_{\text{ad}} = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P dV_{\text{ad}} + \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V dP_{\text{ad}}$$

vào biểu thức trên, ta được

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{\text{ad}} = -\frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P.$$

So sánh biểu thức này với

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

ta tìm được đáp số.

**1.94\*.** *Lời giải.* Xét nội năng  $U$  như một hàm của  $P$  và  $V$ , ta có

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_P dV + \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_V dP.$$

Nếu coi nó là hàm của  $T$  và  $P$  ta được

$$\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = C_V \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V.$$

Lại có entalpi  $I = U + PV$ . Khi đó

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_P = \left(\frac{\partial(I - PV)}{\partial V}\right)_P = \left(\frac{\partial I}{\partial V}\right)_P - P.$$

Tiếp theo

$$\left(\frac{\partial I}{\partial V}\right)_P = \left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = C_P \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P.$$

Do đó,

$$dU = \left[ C_P \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P - P \right] dV + C_V \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V dP.$$

Vì  $dU$  là một vi phân toàn chỉnh nên

$$\frac{\partial}{\partial P} \left[ C_P \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P - P \right] = \frac{\partial}{\partial V} \left[ C_V \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V \right].$$

Lấy đạo hàm, ta thu được biểu thức cần tìm.

$$1.95. C_P - C_V = R + V \left( \frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_P - P \left( \frac{\partial C_P}{\partial P} \right)_V.$$

$$1.96*. T_2 = \frac{C_V T_1 + P_2 V_1}{C_P}; V_2 = \frac{RT_2}{P_2}.$$

*Lời giải.* Nhiệt lượng mà khí nhận được trong quá trình giãn nở hoặc nén đoạn nhiệt bằng không. Công mà khí thực hiện  $A = P_2 \Delta V$ , vì vậy  $\Delta U + P_2 \Delta V = 0$ . Vì  $U = C_V T$  nên ta có

$$C_V (T_2 - T_1) + P_2 (V_2 - V_1) = 0,$$

hay là

$$C_V (T_2 - T_1) + RT_2 = P_2 V_1,$$

từ đây suy ra đáp số.

1.97\*. *Lời giải.* Sử dụng lời giải của bài trước, ta tìm được

$$T_3 = \frac{C_V T_2 + P_1 V_2}{C_P}; V_3 = \frac{RT_3}{P_1}.$$

Sử dụng phương trình Clapayron  $PV = RT$  và hệ thức Mayer  $C_P - C_V = R$  ta biến đổi biểu thức của  $T_3$  về dạng

$$T_3 = T_1 + \frac{C_V}{C_P^2} \frac{V_1 (P_2 - P_1)^2}{P_2}.$$

Từ đây ta thấy rằng, trong cả hai quá trình nhiệt độ, và cùng với nó là thể tích khí, luôn luôn tăng. Nếu áp suất thay đổi nhỏ thì từ các công thức đã thu được, ta suy ra rằng nhiệt độ và thể tích thay đổi một lượng nhỏ bậc hai. Trong bậc nhất, chúng vẫn không thay đổi.

1.99.  $T_2 - T_1 = \frac{P_2 - P_1}{\rho c} \approx 2,4 \text{ K}$ , trong đó  $\rho$  và  $c$  tương ứng là khối lượng riêng và nhiệt dung riêng của nước.

## §2. VẬN TỐC ÂM THANH. CHUYỂN ĐỘNG CỦA CHẤT KHÍ

$$2.1. \Delta v_{at} \approx \frac{v_{at}}{2T} \Delta T \approx 0,61 \text{ m/s}.$$

$$2.2. v_{at} \approx 1260 \text{ m/s}.$$



2.3.  $\gamma = 1,41$ .

2.4.  $v_{at} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$ , trong đó  $\mu$  là khối lượng mol trung bình, còn  $\gamma$  là chỉ số

đoạn nhiệt của hỗn hợp.  $\mu = \frac{v_1\mu_1 + v_2\mu_2 + \dots}{v_1 + v_2 + \dots}$ ;  $\gamma = \frac{v_1C_{P1} + v_2C_{P2} + \dots}{v_1C_{V1} + v_2C_{V2} + \dots}$ .

2.5.  $v_{at} = \sqrt{\frac{15}{16}RT} \approx 3 \cdot 10^7 \text{ cm/s} = 300 \text{ km/s}$ .

2.6.  $\frac{\Delta v_{at}}{v_{at}} = 4,5\%$ .

2.7.  $T = 4 \frac{\gamma_{kk}\mu_{He}}{\gamma_{He}\mu_{kk}} T_0 = 136 \text{ K}$ .

2.8. Tăng 2,86 lần.

2.9. Cần xét đồng tuyết lở có khối lượng  $M$ , chứa 1 mol không khí

$$M \approx \rho V_{kk} \frac{\rho_l}{\rho_l - \rho},$$

trong đó  $V_{kk}$  là thể tích mol không khí.

$$v_{at} = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{ad}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu_{kk}}} \frac{1}{1 - \rho} \sqrt{\frac{\mu_{kk}}{M}} \approx 27 \text{ m/s}.$$

2.10.  $T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 177 \text{ K}$ .

2.11.  $T_2 = T_1 - \frac{\mu v^2}{2C_p} = 194 \text{ K}$ ;  $P_1 = P_2 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 3,3 \text{ atm}$ , trong đó  $\mu$  là

khối lượng mol,  $C_p$  là nhiệt dung phân tử,  $P_2$  là áp suất khí quyển.

2.12.  $T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1/4} \approx 400 \text{ K}$ ;  $v = \sqrt{\frac{8RT_1}{\mu} \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1/4}\right]} \approx 860 \text{ m/s}$ .

2.13.  $\frac{M_0}{M} = e^{v/v_0} \approx 22$ , trong đó  $v_0 = \sqrt{\frac{2C_p T}{\mu}} \approx 2,58 \text{ km/s}$ .

2.14.  $v = \sqrt{\frac{2}{\mu} C_p T} \approx 1,4 \text{ km/s}$ , trong đó  $\mu$  là khối lượng mol trung bình, còn  $C_p$  là nhiệt dung phân tử trung bình của hỗn hợp.

$$2.15. T_c = T_0 \left( \frac{v_c}{v_0} \right)^{R/C_V} = 278 \text{ K}.$$

$$2.16. n_c = \frac{\rho_m g h}{k \gamma T_0} \approx 7,9 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}.$$

$$2.17. v = \sqrt{\frac{2C_P T}{\mu}}. \text{ Vận tốc lớn nhất này đạt được khi xả khí đoạn nhiệt vào chân không (hoặc khi } \frac{P}{P_0} \gg 1, \text{ trong đó } P \text{ là áp suất khí trong bình, } P_0 \text{ là áp suất khí bên ngoài).}$$

$$2.18. v = v_a \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}}.$$

2.19\*. *Lời giải.* Trong hệ quy chiếu mà vật đứng yên, vận tốc chuyển động của khí có thể coi là chuẩn tĩnh. Phương trình Bernoulli trong hệ này có thể viết dưới dạng  $c_P T + \frac{v^2}{2} = \text{const}$ . Nhiệt độ lớn nhất tại điểm có  $v = 0$ . Nhiệt độ này bằng

$$T_{\max} = T \left( 1 + \frac{v^2}{2Tc_P} \right),$$

$$\text{hay là } T_{\max} = T \left[ 1 + \frac{1}{2} M^2 (\gamma - 1) \right],$$

trong đó  $M = \frac{v}{v_{at}}$  là số Mach (  $v_{at}$  là vận tốc âm thanh ).

$$2.20. P \approx 160 \text{ atm}.$$

$$2.21. L \approx 22 \text{ km}.$$

### §3. CÁC CHU TRÌNH. TÍNH TOÁN CÔNG, NỘI NĂNG, CÁC HIỆU ỨNG NHIỆT VÀ HỆ SỐ HIỆU SUẤT

3.1. Tốt hơn là giảm nhiệt độ máy lạnh.

$$3.2. Q_2 = \frac{1-\eta}{\eta} A = 15 \text{ kJ}.$$

$$3.3. Q_1 = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2 V_2^{\gamma-1}}{T_1 V_1^{\gamma-1}} = 3110 \text{ J}; Q_2 = \frac{RT_2}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2 V_2^{\gamma-1}}{T_1 V_1^{\gamma-1}} = 2330 \text{ J};$$

$$A = Q_1 - Q_2 = 780 \text{ J}.$$

$$3.4. A = \frac{Q_2(T_1 - T_2)}{T_2} = 418 \text{ J}.$$

$$3.5. \eta = (T_1 - T_2) \left( T_1 + \frac{C_P}{R} \frac{T_1 - T_2}{\ln(P_1/P_2)} \right)^{-1}, \text{ trong đó } T_1 > T_2; P_1 > P_2.$$

$$3.6. \eta = \frac{(\gamma - 1)(T_1 - T_2) \ln(V_1/V_2)}{(\gamma - 1)T_1 \ln(V_1/V_2) + (T_1 - T_2)}, \text{ trong đó } \gamma = \frac{C_P}{C_V}.$$

$$3.7. A_{12} = R(T_2 - T_1); Q_{12} = C_P(T_2 - T_1);$$

$$A_{23} = 0; Q_{23} = C_V(T_1 - T_2) < 0;$$

$$A_{31} = Q_{31} = RT_1 \ln(V_1/V_2) = RT_1 \ln(T_1/T_2) < 0;$$

$$\eta = \frac{R(T_2 - T_1) + RT_1 \ln(T_1/T_2)}{C_P(T_2 - T_1)}.$$

$$3.8. Q_{12} = C_V(T_2 - T_1); Q_{23} = 0; Q_{31} = C_V T_1 \ln(T_2/T_1); \eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right).$$

$$3.9. \eta = 1 - 2 \frac{C_P + C_V(T_1 - T_2)}{C_V(\sqrt{T_1 T_2} - T_2) + C_P(T_1 - \sqrt{T_1 T_2})}; Q_{12} = \frac{C_P + C_V}{2} (T_2 - T_1);$$

$$Q_{23} = C_V(\sqrt{T_1 T_2} - T_2); Q_{31} = C_V(T_1 - \sqrt{T_1 T_2}).$$

$$3.10. \eta = 1 - \frac{T_2}{T_1};$$

$$3.11. A_{12} = Q_{12} = RT_1 \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right); A_{23} = (C_V - C_0)(T_1 - T_2);$$

$$Q_{23} = C_0(T_2 - T_1); A_{34} = Q_{34} = -RT_2 \ln(V_3/V_4);$$

$$A_{41} = (C_V - C_0)(T_2 - T_1); Q_{41} = C_0(T_1 - T_2);$$

$$\eta = \frac{R(T_1 - T_2) \ln(V_2/V_1)}{RT_1 \ln(V_1/V_2) + C_0(T_2 - T_1)}.$$

$$3.12. \eta \approx 13 \%.$$

$$3.13. \eta \approx 25 \%$$

$$3.14. \eta \approx 50 \%$$

$$3.15. \eta = 1 - \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \left[ \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} - 1 \right] \left[ \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^2 - 1 \right]^{-1} \approx 0,16.$$

$$3.16. \frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{1 - \alpha_2^{1-\gamma}}{1 - \alpha_1^{1-\gamma}} \approx 1,29.$$

$$3.17. \eta = \frac{1}{9} (3 - 2 \ln 2) = 0,18.$$

$$3.18. m = 0,2 \text{ kg/kWh.}$$

$$3.19. A = 4P_1V_1 \left( \ln 2 - \frac{19}{24} \right) \approx -40 \text{ J}; \eta = \frac{\ln 2 - 19/24}{\ln 2 + 19/24} \approx 0,018.$$

$$3.20. A = c_n m_n (t_1 - t_2) \left\{ \left[ (\gamma - 1) \ln \frac{V_2}{V_1} \right] \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right]^{-1} - 1 \right\} = 21 \text{ kJ.}$$

$$3.21. \eta = \frac{4 - 6 \ln 2}{123} = -0,144\%. \text{ Hiệu suất âm không có nghĩa nhưng dấu "trừ" cho ta biết là "công có ích" âm, tức là hệ nhiệt động đó không phải là một động cơ nhiệt mà là một máy lạnh.}$$

$$3.22. A_{12} = \frac{-A_{231} - RT_1 \frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha}}{1 - \frac{R(\alpha^2 - 1)}{2\alpha C_V}} = 935 \text{ J, trong đó } \alpha = \frac{V_3}{V_2} = 2.$$

$$3.23. \eta = \frac{1 + 2 \ln 2}{61 + 2 \ln 2} \approx 0,04.$$

$$3.24. A \approx 600 \text{ kJ}; m_{ice} = 4,86 \text{ kg.}$$

$$3.25. A_{\max} = cm_1(T_1 - T) - qm_2 = 61,8 \text{ kJ};$$

$$T = T_1 \exp \left( - \frac{m_2 q}{cm_1 T_2} \right) = 279 \text{ K, trong đó } c \text{ là nhiệt dung riêng của nước.}$$

$$3.26. A_{\max} = \lambda m_1 - cm_2(T - T_2) = 480 \text{ kJ}; \quad T = T_2 \exp\left(\frac{m_1 \lambda}{cm_2 T_1}\right) = 315 \text{ K},$$

trong đó  $c$  là nhiệt dung riêng của nước.

$$3.27. m_{\text{ice}} = \frac{McT_0}{q} \ln \frac{T_2}{T_1} \approx 8,2 \text{ kg}.$$

$$3.28. \nu \approx 0,1 \text{ mol}; \quad A \approx 2,1 \text{ kJ}.$$

$$3.29. N_{bn} = N \frac{T_1 - T_2}{T_1} \approx 67 \text{ W}.$$

$$3.30. \Delta N = N \frac{T_2 - T_1}{T_1} = 10,7 \text{ W}.$$

3.31. Phải tăng 20%.

$$3.32. t = \frac{5}{2} \frac{pV\Delta T}{T_{kk}N} \left(1 - \frac{T_{kl}}{T_{kk}}\right) \approx 76 \text{ s}.$$

3.33.  $A = \nu q \left(\frac{T}{T_0} - 1\right) + \nu C_n \left(T \ln \frac{T}{T_0} - T + T_0\right)$ , trong đó  $q$  là nhiệt nóng chảy phân tử của nước đá,  $C_n$  là nhiệt dung phân tử của nước.

$$3.34. A \approx 3 \cdot 10^{16} \text{ J}.$$

$$3.35. N \approx 6 \cdot 10^6 \text{ W/km}^2.$$

3.36.  $N = \frac{1}{2} \rho c h L u \frac{(\Delta T)^2}{T} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ kW}$ , trong đó  $\rho$  và  $c$  tương ứng là khối lượng riêng và nhiệt dung riêng của nước.

3.37.  $A = \nu q \left(\frac{T}{T_0} - 1\right) + \nu C_n \left(T \ln \frac{T}{T_0} - T + T_0\right)$ , trong đó  $q$  là nhiệt nóng chảy phân tử của nước đá,  $C_n$  là nhiệt dung phân tử của nước.

$$3.38. T = \sqrt{T_1 T_2} = 500 \text{ K}; \quad N_{\max} = 225 \text{ kW}.$$

$$3.39. T = \sqrt{T_1 T_2} = 400 \text{ K}; \quad N_{\max} = \frac{a}{2} \left(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}\right)^2 \approx 100 \text{ kW}.$$

3.40.  $S \approx 0,023 R$  (rúp), trong đó  $S$  là giá làm 1kg đá, còn  $R$  là giá 1kWh điện.

3.41\*. *Lời giải.* Ta lấy trên đồ thị  $P, V$  (H. 404) hai đường đẳng nhiệt 1-2 và 3-4 vô cùng gần nhau và hai đường đoạn nhiệt 2-3 và 4-1 vô cùng gần nhau và áp dụng định lý Cáoô cho chu trình 12341. Nhiệt lượng  $Q_1$  mà

hệ nhận được trong quá trình đẳng nhiệt 1-2 bằng  $Q_1 = A_1 + \Delta U$ , trong đó  $A_1 = P\Delta V$  là công mà hệ thực hiện

trong 1-2, còn  $\Delta U = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \Delta V$  là

sự biến đổi nội năng trong 1-2. Công của chu trình biểu diễn bằng diện tích hình 1-2-3-4-1. Với độ chính xác đến bậc cao, có thể thay thế diện tích hình 1-2-3-4-1 bằng diện tích hình bình hành 1-2-5-6-1,

tức là  $A = \Delta P \Delta V = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \Delta T \Delta V$ , trong đó  $\Delta T = T_1 - T_2$ . Theo định lý

Cácno  $\frac{A}{Q_1} = \frac{\Delta T}{T_1}$ . Thay vào phương trình này các biểu thức tính  $A$  và  $Q_1$ , ta

thu được công thức thứ nhất cần chứng minh. Công thức thứ hai thu được từ công thức thứ nhất bằng cách lấy đạo hàm theo  $T$  khi  $V$  không đổi.

**3.42\*. Lời giải.** Để thuận tiện, ta viết nguyên lý thứ nhất của nhiệt động học  $\delta Q = dU + PdV$  dưới dạng  $\delta Q = dI - VdP$ . Sau đó ta lấy trên đồ thị  $P, V$  (H.404) hai đường đẳng nhiệt 1-2 và 3-4 vô cùng gần nhau và hai đường đoạn nhiệt 2-3 và 4-1 vô cùng sát nhau, rồi áp dụng định lý Cácno cho chu trình 1-2-3-4. Nhiệt lượng  $Q_1$  mà hệ nhận được trong quá trình đẳng nhiệt 1-2 bằng

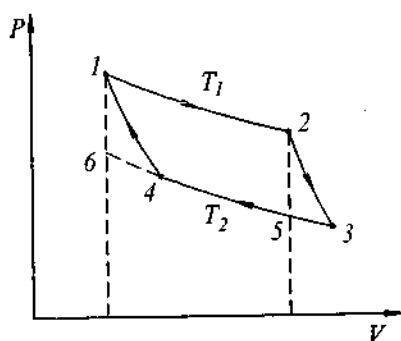
$$Q_1 = I_2 - I_1 - V(P_2 - P_1).$$

Vì sự biến đổi entanpi  $I_2 - I_1$  diễn ra trong quá trình đẳng nhiệt nên

$$Q_1 = \left[ \left( \frac{\partial I}{\partial P} \right)_T - V \right] (P_2 - P_1).$$

Công của chu trình  $A$  được biểu diễn bằng diện tích hình 1-2-3-4. Với độ chính xác đến bậc cao có thể thay thế diện tích hình 1-2-3-4 bằng diện tích hình bình hành 1-2-5-6. Diện tích hình bình hành bằng chiều dài đáy 6-1 nhân với chiều cao  $V_2 - V_1$ . Vì điểm 1 và 6 ứng với thể tích như nhau nhưng nhiệt độ khác nhau nên chiều dài đáy 6-1 bằng  $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V (T_1 - T_2)$ . Vì thế công của chu trình là

$$A = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V (T_1 - T_2)(V_2 - V_1).$$



Hình 404

hoặc nếu sử dụng đẳng thức  $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$  thì ta nhận được

$$A = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P (T_1 - T_2)(P_2 - P_1).$$

Theo định lý Căcnô thì  $\frac{A}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ . Thay vào phương trình này các biểu

thức tính  $A$  và  $Q_1$ , ta thu được công thức thứ nhất cần chứng minh. Công thức thứ hai nhận được từ công thức thứ nhất bằng cách lấy đạo hàm theo  $P$ ,

$$\text{vì } C_P = \left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)_P.$$

#### §4. ENTRÔPI. CÁC QUÁ TRÌNH THUẬN NGHỊCH VÀ KHÔNG THUẬN NGHỊCH

4.1\*.  $Q \approx 20\,000$  kcal/kg.

*Lời giải.* Nhiệt lượng mà động cơ truyền cho nước trong hệ thống sưởi (bình lạnh) khi nó làm việc là

$$Q' = q \frac{T_2}{T_1}.$$

Công của động cơ

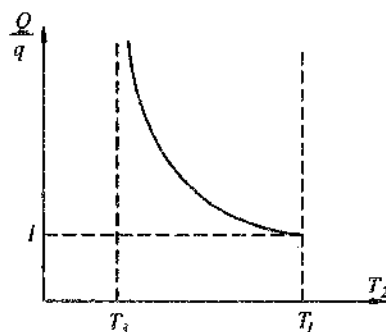
$$A = q \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

dùng để đưa máy làm lạnh vào hoạt động. Máy lạnh lấy nhiệt lượng  $Q_3$  từ nguồn lạnh (nước dưới đáy ao, hồ,...) và truyền cho nước trong hệ thống sưởi nhiệt lượng  $Q''$ . Khi đó

$$Q'' = \frac{T_2}{T_3} Q_3; \quad Q'' - Q_3 = Q' \frac{T_2 - T_3}{T_2} = A,$$

$$Q'' = A \frac{T_2}{T_2 - T_3} = q \frac{T_1 - T_2}{T_1} \frac{T_2}{T_2 - T_3};$$

Tổng nhiệt lượng mà ngôi nhà nhận được



Hình 405

$$Q = Q' + Q'' = q \frac{T_2(T_1 - T_3)}{T_1(T_2 - T_3)} \approx 20\,000 \text{ kcal/kg.}$$

Đồ thị phụ thuộc của  $Q/q$  vào nhiệt độ trong hệ thống sưởi được cho trên hình 405.

Một phương pháp giải khác (tổng quát hơn) dựa trên bất đẳng thức Clausius.

4.2. 1) Lạnh đi. 2) Nóng lên.

Đáp số được suy ra từ đẳng thức  $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ , nếu chú ý đến điều kiện ổn định của vật chất đồng nhất và đẳng hướng.

4.3\*. *Lời giải.* Ta viết bất đẳng thức Clausius dưới dạng

$$\int \frac{\delta Q_1}{T_1} - \int \frac{\delta Q_2}{T_2} \leq 0,$$

trong đó  $\delta Q_1$  là phần tử nhiệt lượng mà máy nhận được trong chu trình kín từ các nguồn nóng, còn  $\delta Q_2$  là phần tử nhiệt lượng cấp cho nguồn lạnh. (Các đại lượng  $\delta Q_1$  và  $\delta Q_2$  đều dương). Nếu thay  $T_1$  bằng nhiệt độ cực đại, và thay  $T_2$  bằng nhiệt độ cực tiểu thì bất đẳng thức chỉ càng mạnh lên. Nghĩa là

$$\frac{1}{T_{\max}} \int \delta Q_1 - \frac{1}{T_{\min}} \int \delta Q_2 \leq 0,$$

hay

$$\frac{Q_1}{T_{\max}} - \frac{Q_2}{T_{\min}} \leq 0.$$

trong đó  $Q_1$  là tổng nhiệt lượng mà máy nhận được trong chu trình kín từ các nguồn nóng, còn  $Q_2$  là tổng nhiệt lượng cấp cho nguồn lạnh. Từ đẳng thức trên suy ra

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leq \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max}},$$

đó là điều cần chứng minh.

4.4. Công và nhiệt lượng có độ lớn bằng diện tích chu trình trên đồ thị (hình chữ nhật).

$$4.7. A = C \left[ T_1 \ln \frac{T_1}{T_3} - (T_1 - T_3) \right].$$



$$4.8. \eta = \frac{T_1 - T_2}{2T_1}; \eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2}.$$

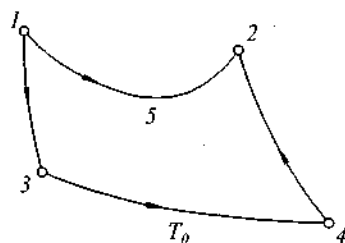
$$4.9. A = Q_1 \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

$$4.10. \eta = 1 - \frac{\alpha - 1}{\alpha \ln \alpha}.$$

$$4.11. A = C_p \left( T_3 - T_1 - T_1 \ln \frac{T_3}{T_1} \right).$$

$$4.12. A = C_1 (2\sqrt{T_1 T_2} - T_1 - T_2).$$

4.13\*. *Lời giải.* Giả sử trên sơ đồ, đường 1-3-4-2 biểu diễn cách chuyển trạng thái thứ nhất, còn 1-5-2 biểu diễn cách thứ hai (H. 406). Áp dụng bất đẳng thức Clausius đối với chúng và lưu ý rằng trên các đường đoạn nhiệt 1-3 và 4-2 hệ không nhận nhiệt lượng, ta viết



Hình 406

$$\int_{132} \frac{\delta Q}{T} = \int_{1342} \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_0}{T_0}, \quad (*)$$

trong đó  $Q_0$  là nhiệt lượng nhận được trong quá trình đẳng nhiệt 3-4. Theo điều kiện thì  $T > T_0$  và  $\delta Q > 0$ , vì vậy

$$\int_{152} \frac{\delta Q}{T} < \int_{132} \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q}{T_0}, \quad (**)$$

trong đó  $Q$  là nhiệt lượng nhận được trong quá trình 1-5-2. So sánh (\*) và (\*\*) ta suy ra  $Q > Q_0$ .

$$4.15. \eta = 1 - \gamma \frac{e^{b/\gamma} - 1}{e^b - 1} \approx \frac{b}{2} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \approx 0,025.$$

$$4.16. \eta \approx \frac{(\gamma - 1)(a - 1)}{(\gamma - 1)a + 1} \approx 0,024.$$

$$4.17. \eta = 1 - \frac{\ln a}{a - 1} \approx \frac{a - 1}{2} \approx 0,1.$$

$$4.18. \eta = 1 - \frac{\ln(4/3)}{3/2} \approx 0,29.$$

$$4.19. \frac{Q_{II}}{A} = 181.$$

$$4.20. \frac{Q_I}{A} = 2570.$$

$$4.21. \eta = 1 - \frac{2C_1}{C_1 + C_2} = \frac{3}{7} \approx 0,43.$$

$$4.22. C = \frac{C_{\max} - C_{\min}}{\ln(C_{\max} / C_{\min})} = 39,8 \text{ J/(mol.K)}; \eta = 0,0525.$$

$$4.23. \eta = 1 - \frac{2 e^{\alpha} - 1}{a e^{\alpha} + 1} \approx \frac{a^2}{12} \approx 0,52 \%$$

$$4.24. \Delta T \approx 8 \text{ K}.$$

*Hướng dẫn.* Xét hệ như một động cơ nhiệt lý tưởng với nguồn lạnh là nước đá và nguồn nóng là bình chứa ở nhiệt độ phòng.

$$4.25. Q_{CA} = -A \frac{T_A + T_C}{T_B - T_C} = -700 \text{ J}.$$

$$4.26. \eta = 1 - \ln 2.$$

$$4.27*. \text{Lời giải. Giả sử tại tất cả các điểm của đường đẳng nhiệt } \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = 0.$$

Khi đó  $\left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = 0$ , và trên đường đẳng nhiệt

$$dU = \left[ T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P \right] dV = -P dV,$$

nên  $\delta Q = dU + P dV = 0$ . Điều đó có nghĩa là tại tất cả các điểm đường đẳng nhiệt phải trùng với đường đoạn nhiệt.

4.28. 1) Nếu hệ số nở nhiệt bằng không trên cả đoạn đường đẳng nhiệt thì đường đẳng nhiệt sẽ trùng với đường đoạn nhiệt, nên không thể thực hiện chu trình Căcnô giữa  $4^\circ\text{C}$  và nhiệt độ bất kỳ.

2) Trên thực tế đối với nước hệ số nở nhiệt bằng không chỉ tại một điểm của đường đẳng nhiệt, vì thế điều kiện bài toán không thể thực hiện được.

$$4.29. Q_{\max} = 12 \text{ kJ}; \Delta S_I = \Delta S_n = -47,5 \text{ J/K}.$$

$$4.32*. A = (C_1 T_{10} + C_2 T_{20}) - (C_1 + C_2) T; T^{C_1 + C_2} = T_{10}^{C_1} T_{20}^{C_2}.$$

*Lời giải.* Công nhận được lớn nhất khi máy làm việc theo những chu trình Carnô vô cùng nhỏ liên tiếp nhau. Giả sử sau một trong những chu trình như vậy, vật thứ nhất cho nhiệt lượng  $\delta Q_1 = -C_1 dT_1$ , còn vật thứ hai  $\delta Q_2 = -C_2 dT_2$  (ký hiệu  $T_1$  và  $T_2$  là các nhiệt độ biến thiên của các vật). Công thực hiện bằng  $\delta A = \delta Q_1 + \delta Q_2$ , ngoài ra như đã biết, tổng của các nhiệt lượng rút gọn bằng không

$$\frac{\delta Q_1}{T_1} + \frac{\delta Q_2}{T_2} = 0$$

hay là

$$C_1 \frac{dT_1}{T_1} + C_2 \frac{dT_2}{T_2} = 0.$$

Lấy tích phân hệ thức trên có tính đến nhiệt độ ban đầu, ta được

$$T_1^{C_1} T_2^{C_2} = T_{10}^{C_1} T_{20}^{C_2}.$$

Nhiệt độ cuối cùng được tìm từ điều kiện  $T_1 = T_2 = T$ , từ đây

$$T^{C_1+C_2} = T_{10}^{C_1} T_{20}^{C_2} \quad (*)$$

Công cực đại mà hệ có thể thực hiện

$$A = \int \delta A = -C_1 \int_{T_{10}}^T dT - C_2 \int_{T_{20}}^T dT = (C_1 T_{10} + C_2 T_{20}) - (C_1 + C_2) T.$$

Công này bằng độ giảm nội năng của hệ.

**4.33\*.** *Lời giải.* Viết (\*) (xem lời giải bài trước) dưới dạng

$$T^{1+C_1/C_2} = T_{20} T_{10}^{C_1/C_2},$$

khi  $C_2 \rightarrow \infty$  ta được  $T = T_{20}$ . Kết quả này là hiển nhiên vì  $C_2 = \infty$ . Công nguyên tố

$$\delta A = \delta Q_1 + \delta Q_2 = \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) \delta Q_1 = -C_1 \left(1 - \frac{T_{20}}{T_1}\right) dT_1.$$

Lấy tích phân ta được

$$A = C_1 \left[ T_{10} - T_{20} - T_{20} \ln \left( \frac{T_{10}}{T_{20}} \right) \right].$$

Công  $A$  nhỏ hơn độ giảm nội năng của nguồn nóng  $C_1(T_{10} - T_{20})$ . Một phần nội năng hệ truyền cho môi trường xung quanh dưới dạng nhiệt.

$$4.34. T = T_{10}, A = C_2 \left[ T_{20} - T_{10} + T_{10} \ln \left( \frac{T_{10}}{T_{20}} \right) \right]. \text{ Dễ dàng thấy rằng } A > 0.$$

$$4.35. T_1^{\max} = 800 \text{ K}; T_2 = T_3 = 300 \text{ K}.$$

$$4.36. A_{\min} = \frac{C_V T_0}{4} \approx 1560 \text{ J}.$$

$$4.37. T = \frac{T_1 + T_2}{2} = 450 \text{ K}; A = 0.$$

$$\Delta S = \nu C_V \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2} + \nu R \ln \frac{(V_1 + V_2)^2}{4V_1 V_2} \approx 0,8 \text{ J/K}.$$

$$4.38. \Delta S = \frac{A}{T} = 0,08 \text{ J/K}.$$

$$4.39. T \approx T_0 \left( 1 - \frac{\nu \mu}{5M} \right) \approx 0,98 T_0; \Delta S \approx 0,65 \nu R.$$

$$4.40. \Delta S = \frac{5}{2} k \ln \frac{7}{5} - k \ln 2 \approx 0,21 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}.$$

$$4.41. \Delta U = \frac{5}{2} P_1 V_1 \left( \frac{V_1}{V_2} - 1 \right) = -117 \text{ cal}.$$

$$Q = \frac{3}{2} P_1 V_1 \left( \frac{V_1}{V_2} - 1 \right) = -70 \text{ cal}.$$

$$\Delta S = -\frac{3}{2} \frac{P_1 V_1}{T_1} \ln \frac{V_2}{V_1} = -0,20 \text{ cal/K}.$$

$$4.42. S_2 - S_1 = \frac{R}{2} (5\nu_1 + 3\nu_2) \ln \frac{5\nu_1 T_1 + 3\nu_2 T_2}{5\nu_1 + 3\nu_2} -$$

$$- \frac{R}{2} (5\nu_1 \ln T_1 + 3\nu_2 \ln T_2) + R(\nu_1 + \nu_2) \ln 2 = 0,16 \text{ cal/}^\circ\text{C}.$$

trong đó  $\nu_1 = 0,0402$  là số mol hydro,  $\nu_2 = 0,0984$  là số mol heli.

$$4.43*. A \leq 1,8 \text{ kJ}.$$

*Lời giải.* Đối với mỗi quá trình vô cùng bé  $TdS \geq \delta Q = dU + \delta A$ . Trong quá trình đẳng nhiệt nội năng của khí lý tưởng  $U$  không thay đổi. Vì vậy  $\delta A \leq TdS$ . Từ đây suy ra

$$A \leq T(S_2 - S_1) = RT \left( v_1 \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} + v_2 \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2} \right) = \\ vRT \ln \frac{(V_1 + V_2)^2}{V_1 V_2} \approx 1,8 \text{ kJ}.$$

4.44. Nhiệt độ cuối  $T_2 = T_1 \left[ \frac{V_1 V_2}{(V_1 + V_2)^2} \right]^{1/5} = 0,754 T_1 = 226 \text{ K}$ ; Công cực đại  $A_{\max} = (v_1 + v_2) C_V (T_1 - T_2) = 1,55 \text{ kJ}$ .

4.45.  $\Delta S = R \ln \frac{(n+1)^2}{4n}$ .

4.46.  $\Delta S = C_V \ln \left\{ \frac{(T_1 + T_2)^2}{T_1 T_2} \frac{n}{(n+1)^2} \left[ \frac{4n}{(n+1)^2} \right]^{R/C_V} \right\}$ .

4.47.  $S_2 - S_1 = \frac{A}{T} - v C_V \frac{T_1 - T}{T} = 13 \text{ J/K}$ .

4.48.  $S_2 - S_1 = v [C_V \ln(T_2 / T_1) + R \ln(V_2 / V_1)]$ , trong đó

$\frac{T_1}{T_2} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \left( 1 - \frac{V_1}{V_2} \right) \approx 1,1$ . Sau khi thay  $C_V = \frac{5}{2} R$ ,  $\frac{V_2}{V_1} = n$  vào ta được

$$S_2 - S_1 = vR \left( \frac{5}{2} \ln \frac{T_2}{T_1} + \ln n \right) = 1,8 \text{ cal/}^\circ\text{C}.$$

4.49.  $\Delta S \approx \frac{vR}{4} \left( \frac{mg}{P\sigma} \right)^2$ .

4.50.  $\Delta S = R \frac{P_1 - P_2}{P_0}$ .

4.51.  $T_2 = 2T_1 = 400 \text{ K}$ ;  $\Delta S = 0$ .

4.52.  $S_2 - S_1 \approx (C_p^n - C_p^{\text{ice}}) \frac{T_0 - T_1}{T_1} - \frac{q}{T_0} = -20,6 \text{ J/(K.mol)}$ .

4.53.  $S_2 - S_1 = Mc_p \left[ \frac{T - T_0}{T_0} - \ln \left( 1 + \frac{T - T_0}{T_0} \right) \right] \approx 1,5 \text{ J/K}$ .

$$4.56. \Delta U = U - U_0 = \frac{M}{\mu} C_V T_0 (2^{\gamma-1} - 1);$$

$$\Delta S = S - S_0 = \frac{M}{\mu} C_V (\gamma - 1) \ln 2; \text{ trong đó } \gamma = \frac{C_P}{C_V}.$$

$$4.57. \Delta S = R \frac{M}{\mu} \ln \frac{V_2}{V_1}, \text{ trong đó } \mu \text{ là khối lượng mol của khí.}$$

$$4.58. \Delta U = U_2 - U_1 = \frac{PV^n}{\gamma - 1} \left( \frac{1}{V_2^{n-1}} - \frac{1}{V_1^{n-1}} \right);$$

$$\Delta S = S_2 - S_1 = (nC_V - C_P) \ln \frac{V_1}{V_2};$$

Trong trường hợp riêng  $\Delta U = -625 \text{ cal/mol}$ ,  $\Delta S \approx -4 \text{ cal/(mol.K)}$  - hệ không nhận nhiệt mà cho nhiệt  $Q = -417 \text{ cal/mol}$ .

$$4.59. A = -2PV \ln 2.$$

$$4.60. \Delta S = 63 \text{ cal/K.}$$

$$4.61. \Delta S = 3,2 \text{ cal/K.}$$

4.62.  $s = c_p \ln T + \frac{\lambda(T)}{T} \xi + \text{const}$ , trong đó  $c_p$  là nhiệt dung riêng của chất lỏng,  $\lambda(T)$  là nhiệt hóa hơi ở nhiệt độ  $T$ ,  $\xi$  là tỷ lệ khối lượng hơi so với khối lượng cả hệ.

4.63\*. *Lời giải.* Hai vật A và B có thể trao đổi nội năng bằng cách trao đổi nhiệt và thực hiện công lẫn nhau. Vì chúng được đặt trong vỏ cứng cách nhiệt nên trong một quá trình vô cùng bé sự thay đổi nội năng của chúng liên hệ với nhau bởi hệ thức  $dU_A = -dU_B$ . Vì các lực tác dụng bằng nhau và ngược dấu nên  $\delta A_A = -\delta A_B$ , trong đó  $\delta A_A$  là công của vật A lên vật B,  $\delta A_B$  là công của vật B lên vật A. Do đó

$$(dU + \delta A)_A = -(dU + \delta A)_B,$$

hay

$$\delta Q_A = -\delta Q_B.$$

Nhiệt lượng mà vật A thu được bằng nhiệt lượng mà vật B tỏa ra. Theo định đề Clausius, trong hệ chỉ có thể tự xảy ra các quá trình mà trong đó nhiệt lượng từ vật nóng hơn truyền cho vật lạnh hơn. Từ đây suy ra

$$\delta Q_A < 0, \delta Q_B > 0,$$

vì  $T_A > T_B$ . Áp dụng bất đẳng thức Clausius cho mỗi vật  $A$  và  $B$ , ta được

$$\Delta S_A \geq \int \frac{\delta Q_A}{T_A}, \quad \Delta S_B \geq \int \frac{\delta Q_B}{T_B}.$$

Cộng từng vế hai bất đẳng thức này và chú ý rằng  $S_A + S_B = S$ , ta tìm được

$$\Delta S \geq \int \left( \frac{\delta Q_A}{T_A} + \frac{\delta Q_B}{T_B} \right) = \int \delta Q_B \left( \frac{1}{T_B} - \frac{1}{T_A} \right) > 0.$$

4.64.  $\Delta S = mc \ln \frac{T_2}{T_1}$ , trong đó  $m$  là khối lượng chất.

4.65.  $\Delta S = C_P \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2}$ , trong đó  $C_P$  là nhiệt dung của một vật.

4.66.  $\Delta S = -\frac{R}{2} \ln 2 \approx -2,95 \text{ J/K}$ .

4.67.  $\Delta S = 2R \ln 2 \approx 5,9 \text{ J/K}$ .

4.68.  $\Delta S = R \ln 2$ ;  $\Delta T = (2^{\gamma-1} - 1)T_0 \approx 0,32T_0$ .

4.69.  $\Delta S = \frac{5}{2} R \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2} + 2R \ln 2$ , nếu hai khí giống nhau thì không có số hạng thứ hai.

4.70.  $\Delta S = R \ln \frac{(P_1 + P_2)^2}{4P_1 P_2} + 2R \ln 2$ , nếu hai khí giống nhau thì không có số hạng thứ hai.

## §5. THỂ NHIỆT ĐỘNG

5.3.  $P = A(V)T + B(V)$ , trong đó  $A(V)$  và  $B(V)$  là các hàm bất kỳ của thể tích.

5.4.  $V = A(P)T + B(P)$ , trong  $A(P)$  và  $B(P)$  là các hàm bất kỳ của áp suất.

5.5.  $A = \left( \frac{1}{2} bP^2 + \frac{2}{3} cP^3 \right) = 332 \text{ J}$ .

$$\Delta U = -T \int_0^P \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right) dP + A = A - \frac{1}{2} \beta T P^2 = 120 \text{ J}.$$

5.6. Điều kiện vi phân toàn phần của  $\delta A$  dẫn đến biểu thức  $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = 0$ . Sự

không phụ thuộc của công  $A$  vào đường lấy tích phân khi có hệ thức này được suy ra là do  $P$  không phụ thuộc vào  $T$  mà là hàm chỉ của thể tích:  $P = P(V)$ .

$$5.9. \quad \left(\frac{\partial I}{\partial P}\right)_T = V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P; \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_P - P;$$

$$\left(\frac{\partial C_P}{\partial P}\right)_T = -T\left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_P.$$

$$5.11. \quad C_P - C_V = \left[ P + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \right] \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P =$$

$$= -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P^2 \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T.$$

$$5.12. \quad c_P - c_V = \frac{kT\alpha^2}{\rho}.$$

5.13. Đối với nước  $c_P - c_V = 2 \text{ J/(kg.K)} \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ kcal/(kg.K)}$ . Sự sai khác rất nhỏ giữa các nhiệt dung riêng  $c_P$  và  $c_V$  của nước là do hệ số nở nhiệt  $\alpha$  rất nhỏ, và ở  $4^\circ\text{C}$  hệ số  $\alpha$  đạt cực tiểu  $\alpha = 0$ . Đối với thủy ngân  $c_P - c_V = 17 \text{ J/(kg.K)}$ ,  $c_V = 123 \text{ J/(kg.K)} \approx 0,0292 \text{ kcal/(kg.K)}$ ,  $\frac{c_P}{c_V} = 1,13$ .

$$5.14*. \quad T_2 - T_1 = \int_{P_1}^{P_2} \frac{T}{C_P} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dP.$$

*Lời giải.* Trong quá trình giãn nở thuận nghịch thì entropi  $S$  của chất khí không đổi. Nếu coi nó như một hàm của nhiệt độ và áp suất, ta có thể viết cho quá trình giãn nở thuận nghịch rất nhỏ

$$\Delta S = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P \Delta T + \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T \Delta P = 0.$$

Hiển nhiên là

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial T \Delta S}{\partial T}\right)_P = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_P = \frac{C_P}{T}.$$



Ngoài ra,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P.$$

Do đó

$$\frac{C_P}{T} \Delta T - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \Delta P = 0.$$

Từ đây suy ra đối với quá trình vô cùng nhỏ thì

$$\frac{\Delta T}{\Delta P} = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \frac{T}{C_P} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P.$$

Lấy tích phân ta tìm được đáp số.

$$5.15. \Delta T = \frac{\alpha T}{\rho c_P} \Delta P \approx 0,038^\circ \text{C}.$$

$$5.16. \Delta T = \frac{\alpha T}{\rho c_P} \Delta P \approx -0,26^\circ \text{C}.$$

$$5.17. \Delta T = -\frac{F \alpha_d}{c \rho \pi r^2} T \approx -0,095 \text{ K}.$$

$$5.18. \Delta T \approx \frac{F \alpha_d T}{c \rho S} = -0,03 \text{ K}, \text{ trong đó } S \text{ là tiết diện của dây.}$$

$$5.19. C_P - C_V = 15 \text{ J/(K.kmol)}; \Delta S_T = -0,1 \text{ J/K}.$$

$$5.20. \frac{C_P}{C_V} = -\frac{\beta_T \Delta P_S}{(\Delta V/V)_S} = 1,13.$$

5.21. Việc chứng minh dẫn đến xét dấu của biểu thức biến thiên nhiệt độ  $dT_S = -\frac{T\alpha}{\beta_T C_V} dV_S$ , trong đó  $\alpha$  và  $\beta_T$  là tương ứng là hệ số nở khối và hệ số nén đẳng nhiệt.

$$5.22. A = \frac{\beta_T m P^2}{2\rho} = 1,44 \cdot 10^{-3} \text{ J}; Q = \frac{\alpha m T}{\rho} P = -4,33 \text{ J}.$$

$$5.23. \frac{C_P}{C_V} = 1,1; \Delta P_S = 11 \text{ atm}.$$

5.24.  $\Delta T \approx -\frac{2T_0\Delta\rho}{c_p\rho_m^2\Delta t_m}\Delta P$ , trong đó  $c_p$  là nhiệt dung riêng của nước,  $\rho_m$

là khối lượng riêng của nước ở  $4^\circ\text{C}$ ,  $\Delta t_m = 4^\circ\text{C}$ . Nhiệt độ cuối cùng của nước  $t_c = 0,4^\circ\text{C}$ .

5.25\*. *Lời giải.* Gọi  $l, \tau, T, S$  tương ứng là chiều dài, lực căng, nhiệt độ và entropi của chảo. Trong số bốn đại lượng này chỉ có hai đại lượng độc lập, hai đại lượng còn lại là hàm của chúng. Vì thế ta có đẳng thức sau đây

$$\left(\frac{\partial T}{\partial l}\right)_S \left(\frac{\partial l}{\partial S}\right)_T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_l = -1. \quad (*)$$

Từ nguyên lý thứ nhất của nhiệt động học viết dưới dạng  $d(U - TS) = -SdT + \tau dl$ , ta rút ra

$$\left(\frac{\partial S}{\partial l}\right)_T = -\left(\frac{\partial \tau}{\partial T}\right)_l \text{ hoặc } \left(\frac{\partial l}{\partial S}\right)_T = -\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)_l;$$

Hơn nữa,  $T, \tau, l$  liên hệ hàm số với nhau nên ta có đồng nhất thức

$$\left(\frac{\partial l}{\partial S}\right)_T = \left(\frac{\partial l}{\partial \tau}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial l}\right)_\tau;$$

Thay nó vào (\*) ta được

$$\frac{C_l}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial l}\right)_S \left(\frac{\partial l}{\partial \tau}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial l}\right)_\tau = -1;$$

trong đó  $C_l = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_l$  là nhiệt dung khi chiều dài không đổi. Nó luôn

dương đối với tất cả các vật  $C_l > 0$ . Đại lượng  $\left(\frac{\partial l}{\partial \tau}\right)_T$  cũng luôn dương đối với tất cả các vật. Vì vậy

$$\left(\frac{\partial T}{\partial l}\right)_S \left(\frac{\partial T}{\partial l}\right)_\tau < 0.$$

Theo điều kiện bài ra đối với chảo cao su  $\left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_\tau < 0$ , cho nên  $\left(\frac{\partial T}{\partial l}\right)_S > 0$ .

Từ đây suy ra chảo cao su sẽ nóng lên nếu kéo giãn đoạn nhiệt nó.

5.27.  $\Delta T_S = -0,04 \text{ K}$  (nước lạnh đi!)

5.28.  $\alpha = -\frac{Q}{TV(P_2 - P_1)} \approx 4,7 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ .

$$\beta_T = \gamma \beta_S = \gamma \frac{2A}{V(P_2^2 - P_1^2)} \approx 2,2 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}.$$

$$\left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \approx \frac{\alpha}{\beta_T} = 2,14 \cdot 10^6 \text{ Pa/K}.$$

$$5.29. U = \frac{\varepsilon^2}{2} \left( E - T \frac{\partial E}{\partial T} \right).$$

$$5.30. P_0 = T \alpha K \approx 1,6 \cdot 10^9 \text{ Pa}.$$

$$5.31. \gamma = 1 + \frac{T \alpha^2 v_a^2}{C_P} \approx 1,2.$$

$$5.32. C_P = \frac{5}{2} R. \text{ (Khí lý tưởng.)}$$

$$5.33. C_V = \frac{3}{2} R. \text{ (Khí lý tưởng.)}$$

$$5.34. \left( \frac{\partial Q}{\partial V} \right)_T = 3P = 3 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

$$5.35. \left( \frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_T = \frac{6P}{T} = 2 \cdot 10^3 \text{ Pa/K}.$$

$$5.36. U = \Psi_0(V) + 3\alpha T^4 V, \text{ trong đó } \Psi_0(V) \text{ là năng lượng tự do khi } T = 0.$$

$$5.37. \Delta \Psi = -RT \ln 2.$$

$$5.38. Q = \frac{\alpha}{T} B_0^2.$$

$$5.39. \Delta S = \frac{4\sigma}{3c} T^3 (V_2 - V_1), \text{ trong đó } \sigma \text{ là hằng số Stêphan - Boltzmann, } c \text{ là vận tốc ánh sáng.}$$

$$5.40. A = \frac{4}{3} \sigma T_1^3 (T_1 - T_2) (V_2 - V_1), \text{ trong đó } V_1 \text{ và } V_2 \text{ là thể tích nhỏ nhất và thể tích lớn nhất trên đường đẳng nhiệt.}$$

$$5.41. t_0 \approx t \frac{T}{T_0} \approx 10^7 \text{ năm.}$$

$$5.42. C_V = 12 A^{1/4} V P^{3/4} = 8,4 \cdot 10^{-3} \text{ J/K}; C_V = 8 C_V^H.$$

5.43.  $C_p = \infty$ ;  $VT^3 = \text{const}$ .

5.44.  $\Delta\psi \approx 10 \text{ J}$ ;  $\Delta S \approx -0,67 \text{ J/K}$ .

5.45.  $A \approx 33,3 \text{ J}$ ;  $\Delta P \approx -14 \text{ mmHg}$ ;  $\Delta V \approx 0,33 \text{ l}$  ;  $\Delta S \approx 0,03 \text{ J/K}$ ;  
 $\Delta I \approx -33,3 \text{ J}$ .

5.46\*. *Lời giải.*

$$C_V = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = -T \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \right)_V = 12A(V)T^3,$$

$$P = - \left( \frac{\partial \psi}{\partial V} \right)_T = - \frac{dU_0}{dV} + T^4 \frac{dA}{dV},$$

$$\frac{1}{V_0} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = - \frac{1}{V_0} \frac{\left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V}{\left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T} = \frac{1}{V_0} \frac{4T^3 \frac{dA}{dV}}{\frac{d^2 U_0}{dV^2} - T^4 \frac{d^2 A}{dV^2}}.$$

Từ đây suy ra đáp số cần tìm.

$$5.47. T_2 - T_1 = \int_{P_1}^{P_2} \frac{T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P - V}{C_P} dP.$$

5.50\*. *Lời giải.* Để tính sự biến thiên entropi của khí, ta thay quá trình thực tế Joule – Thomson bằng quá trình chuẩn tĩnh đẳng entropi đưa hệ đến trạng thái cuối cùng. Đối với quá trình này  $dI = TdS + VdP = 0$ , vì thế

$$\left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_I = - \frac{V}{T} < 0.$$

Vì áp suất trong quá trình Joule – Thomson giảm nên từ bất đẳng thức nhận được, suy ra entropi tăng.

5.51.  $x \approx \frac{Pv - c\Delta T}{\lambda} \approx 2,6 \%$ , trong đó  $v$  là thể tích một đơn vị khối lượng nước (thể tích riêng).

## §6. KHÍ THỰC. KHÍ VANDECVAN

$$6.1. P_k = \frac{a}{27b^2}; T_k = \frac{8a}{27Rb}; V_k = 3b; \frac{RT_k}{P_k V_k} = \frac{8}{3}.$$

Tỷ số cuối cùng được gọi là hệ số tới hạn. Trên thực tế, các hệ số tới hạn đối với các khí khác nhau có một vài giá trị khác nhau và tất cả chúng đều lớn hơn 8/3 một chút.

$$6.2. \left( \pi + \frac{3}{\phi^2} \right) \left( \phi - \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3} \tau.$$

$$6.3. V_k = \frac{3RT_k}{8P_k} = 128 \text{ cm}^3, \text{ thực nghiệm cho } 94 \text{ cm}^3.$$

$$6.4. b = 38,6 \text{ cm}^3/\text{mol}; a = 1,35 \cdot 10^6 \text{ atm.cm}^6/\text{mol}^2.$$

$$6.5. \rho_k = \frac{\mu}{V_k} = \frac{8\mu P_k}{3RT_k} = 0,189 \text{ g/cm}^3. \text{ Thực nghiệm cho } \rho_k = 0,32 \text{ g/cm}^3.$$

$$6.6. P = \frac{a}{V^2} = 16800 \text{ atm}.$$

$$6.7. T_B = \frac{27}{8} T_k = 3,375 T_k.$$

Khi giải bài tập, để thuận tiện ta xét tích  $PV$  như một hàm của khối lượng riêng  $\rho$  của khí và tìm điều kiện để đạo hàm  $\frac{d(PV)}{d\rho}$  bằng không khi  $\rho = 0$ .

$$6.8. \mu = 2,48 \text{ g/mol}.$$

$$6.9. P \approx 98 \text{ atm}; P_{lt} \approx 198 \text{ atm}.$$

$$6.10. \beta_T = \frac{V^2(V-b)^2}{RTV^3 + 2a(V-b)^2}.$$

$$6.11. \alpha = \frac{V-b}{TV_0 \left[ 1 - \frac{2a(V-b)^2}{RTV^3} \right]}.$$

**6.12\*.** *Lời giải.* Để đơn giản, ta coi khối lượng của chất đó bằng một đơn vị. Khi đó các thể tích riêng của chất lỏng và chất khí được biểu diễn bằng độ dài các đoạn  $NL$  và  $NG$ , còn thể tích riêng của chất trong trạng thái lưỡng pha thì bằng độ dài  $MN$ . Nếu khối lượng chất lỏng và chất khí tương ứng là  $m_l$  và  $m_k$  thì  $V_M = |NM| = m_l |NL| + m_k |NG|$ . Kết quả cần tìm có thể nhận được từ biểu thức này nếu chú ý rằng  $m_l + m_k = 1$ .

**6.13.**  $C_P = \infty$ . Trong vùng đã cho các đường đẳng áp trùng với các đường đẳng nhiệt.

**6.14\*.** *Lời giải.* Tại điểm tới hạn thì  $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_T = 0$ . Do đó, số hạng đầu tiên của chuỗi Taylor trong lân cận điểm tới hạn có dạng

$$P - P_k = \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^3 P}{\partial V^3} \right)_k (V - V_k)^3 + \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_k (T - T_k)$$

Sau khi tính các đạo hàm từ phương trình VancleVan và sử dụng các hệ thức đã biết đối với các thông số tới hạn qua  $a$  và  $b$ , ta thu được

$$P - P_k = -\frac{9}{16} \frac{RT_k}{V_k^4} (V - V_k)^3 + \frac{3}{2} \frac{R}{V_k} (T - T_k).$$

Thay cho thể tích  $V$  ta sử dụng  $\rho = \frac{\mu}{V}$ , trong đó  $\mu$  là khối lượng phân tử. Sử dụng phương trình thủy tĩnh học  $P - P_k = -\rho_k gh$  ta nhận được

$$\frac{\rho - \rho_k}{\rho_k} = -\frac{2}{3} \sqrt[3]{6 \frac{\mu gh + (3/2)R(T - T_k)}{RT_k}}.$$

Độ cao  $h$  được tính từ mức mà tại đó khối lượng riêng của chất bằng khối lượng riêng tới hạn và chiều dương là chiều hướng lên trên. Trong trường hợp riêng, khi  $T = T_k$  thì

$$\frac{\rho - \rho_k}{\rho_k} = -\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{6\mu gh}{RT_k}}.$$

Ở xa điểm tới hạn khí có thể coi là khí lý tưởng. Trong trường hợp này, đối với sự thay đổi tương đối của khối lượng riêng theo độ cao, ta có

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = -\frac{\mu gh}{RT}.$$

Khi nhiệt độ như nhau và khối lượng phân tử tương đối như nhau, đại lượng này nhỏ hơn đại lượng trước  $\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{3} \left( \frac{RT}{\mu gh} \right)^{2/3}$  lần. Đối với không khí

$$(\mu = 28,8, T_k = 132,5 \text{ K}) \text{ ở độ cao } h = 1 \text{ cm thì } \alpha \approx 8700, \frac{\rho - \rho_k}{\rho_k} \approx -\frac{1}{100}.$$

$$6.15. V = \frac{8P_k V_1 \mu}{3RT_k \rho} = 2,96 \text{ cm}^3.$$

6.16. Khối lượng riêng  $\rho$  phải thoả mãn điều kiện

$$\left| \frac{\rho}{\rho_k} - 1 \right| < \frac{3}{4} \sqrt[3]{\frac{\rho g h_0}{P_0}} \text{ cm}^3.$$

Hướng dẫn. Sử dụng dữ liệu là ở gần điểm tới hạn đường đẳng nhiệt  $T \approx T_k$

$$\text{có dạng } P_k - P = P_0 \left( \frac{V - V_k}{V_k} \right)^3.$$

$$6.17. T = 0,8T_k \approx 373 \text{ K} = 100^\circ \text{C}.$$

$$6.18. x = \frac{V_l}{V_k} \approx 0,25.$$

$$6.19. \lambda = \int_{v_l}^{v_h} \frac{a}{v^2} dv = a \left( \frac{1}{v_l} - \frac{1}{v_h} \right) \approx \frac{a}{v_l} = v_l P_l = \frac{P_l}{\rho}.$$

6.20.  $U = v \left( C_V T - \frac{av}{V} \right)$ , trong đó  $v$  là số mol, còn các hằng số  $C_V$  và  $a$  ứng với một mol.

$$6.21. A = 2RT \ln \frac{2V - 2b}{V - 2b} - \frac{2a}{V}.$$

$$6.22. \Delta T = \frac{a}{C_V} \left( \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) \approx 0,25 \text{ K}.$$

6.23. Khí lạnh đi. Nhiệt độ và áp suất của nó là

$$T' = T - \frac{a}{2C_V} \frac{(V_2 - V_1)^2}{V_1 V_2 (V_1 + V_2)}; P' = \frac{2RT'}{V_1 + V_2 - 2b} - \frac{4a}{(V_1 + V_2)^2}.$$

$$6.24. T' - T = -\frac{av}{2VC_V} \approx -0,0053 \text{ K, trong đó } v \approx 0,041 \text{ là số mol.}$$

$$6.25. T - T = \frac{a\mu}{C_V} \left( \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) = \frac{9RT_k V_k \mu}{8C_V} \left( \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) \approx -0,01 \text{ K}.$$

$$6.26. Q = a \left( \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right).$$

$$6.27. Q = \frac{C_V}{R} \left\{ \left( P + \frac{a}{V_2^2} \right) (V_2 - b) - \left( P + \frac{a}{V_1^2} \right) (V_1 - b) \right\} + a \left( \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right).$$

$$6.28. C_P - C_V = \frac{R}{1 - \frac{2a(V-b)^2}{RTV^3}}.$$

$$6.29. S = \nu \left[ R \ln \left( \frac{V - \nu b}{\nu} \right) + \int \frac{C_V(T)}{T} dT + \text{const} \right], \text{ trong đó hằng số trong}$$

ngoặc vuông không phụ thuộc vào số hạt. Nếu nhiệt dung  $C_V$  không phụ thuộc vào nhiệt độ thì

$$S = \nu \left[ R \ln \left( \frac{V - \nu b}{\nu} \right) + C_V \ln T + \text{const} \right].$$

$$6.30. T(V - b)^{n-1} = \text{const}, \text{ trong } n = 1 + \frac{R}{C_V - C}.$$

$$6.32. A = 2C_V T_1 \left[ 1 - \left( \frac{V_1 - 2b}{V_2 - 2b} \right)^{R/C_V} \right] + 4a \left( \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right).$$

$$6.33. T^{C_V/R} (V - b) \exp \left[ -kT^2 / (2R) \right] = \text{const}.$$

$$6.34. S - 2\alpha\sqrt{T} = \text{const}; T^{C_V/R} (V - b) \exp \left( -2\alpha\sqrt{T} / R \right) = \text{const}.$$

$$6.35. C_V T - \frac{a}{V} = \text{const}; C = C_V \left( 1 - \frac{RT}{a(V-b)} V^2 \right).$$

$$6.36. Q = 2RT \ln \left[ (V - 2b) \left( \frac{V}{10} - 2b \right)^{-1} \right].$$

$$6.37. \Delta S = (C_V - R) \ln \frac{T_2}{T_1}.$$



$$6.38. \Delta S = R \ln \frac{aV_0 - ab + bV_0 \Delta U}{(V_0 - b)(a - V_0 \Delta U)}.$$

$$6.39. \Delta S = 2R \ln \frac{T_2}{T_1} \approx -16,6 \text{ J/(mol.K)}.$$

$$6.40. \Delta S \approx -R \ln 2 - \frac{a}{2V_0 T_0} - \frac{Rb}{V_0}.$$

$$6.41. \Delta S = C_V \ln \left( 1 - \frac{3a}{2C_V V_0 T_0} \right) + R \ln \frac{2V_0 - b}{V_0 - b} \approx R \ln 2 - \frac{3a}{4V_0 T_0} + \frac{Rb}{2V_0}.$$

$$6.42. T = \frac{8A + \frac{a}{9b}}{R}.$$

$$6.43. P = \frac{1}{2} (P_1 + P_2).$$

$$6.44. P_2 = \frac{R}{2V_2 C_V} \left[ \frac{C_V}{R} \left( P_{10} + \frac{a}{V_1^2} \right) (V_1 - b) - \frac{3a}{4V_1} \right].$$

$$6.45. \Delta S = R \ln \left\{ \frac{RT_1}{P_2 V_1 [1 - V_k / (3V_1)]} \right\} \approx 26 \text{ J/K}.$$

$$6.46. \Delta S = C_V \ln \left( 1 - \frac{a}{V_0 C_V T_0} \right) + R \ln 2;$$

$$\Delta U = C_V T_0 \left( 2^{R/C_V} - 1 \right) - 2^{R/C_V} \frac{a}{V_0}.$$

$$6.47. \Delta S \approx \frac{Rb}{V_0} + R \ln 2; \Delta U = C_V T_0 \left( 2^{R/C_V} - 1 \right) + 2^{R/C_V} \frac{RbT_0}{V_0}.$$

$$6.48. \frac{T_{VV}}{T_H} = \left( \frac{V_0 V - bV}{V_0 V - bV_0} \right)^{R/C_V} < 1, \text{ tức là khí Vandec Van lạnh hơn.}$$

$$6.49. T = T_0 \left( \frac{P}{P_0} \right)^{\frac{R}{R+C_V}}, T_H = T$$

$$6.50. C = - \frac{C_V}{1 + \frac{2a}{PV^2}}.$$

**6.51\*.** *Lời giải.* Theo nguyên lý thứ nhất nhiệt động học thì nhiệt hoá hơi của một mol chất lỏng bằng  $\Lambda = U_h - U_l + A$ , trong đó  $U_h$  và  $U_l$  là nội năng của hơi và chất lỏng, còn  $A = P(V_h - V_l)$  là công để chống lại áp suất không đổi bên ngoài. Đại lượng  $U_h - U_l$  được tìm từ phương trình

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P = \frac{a}{V^2},$$

ta thu được

$$U_h - U_l = a\left(\frac{1}{V_l} - \frac{1}{V_h}\right).$$

Như vậy,

$$\Lambda = V_h\left(P - \frac{a}{V_h^2}\right) - V_l\left(P - \frac{a}{V_l^2}\right) = V_h\left(\frac{RT}{V_h - b} - \frac{2a}{V_h^2}\right) - V_l\left(\frac{RT}{V_l - b} - \frac{2a}{V_l^2}\right).$$

$$6.52. \Delta S = R \ln \left[ 25 \left( \frac{11}{17} \right)^3 \right] \approx 1,9 R.$$

$$6.53. \frac{V_2}{V_1} \approx 1,2.$$

$$6.54. C = \frac{C_V}{1 - \ln 2} \approx 5R.$$

$$6.55. \Delta \psi = -a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_0}\right) - RT_0 \ln \frac{V_1 - b}{V_0 - b} \approx -2,88 \text{ MJ}.$$

$$6.56. \frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta v_a}{v_a} \approx \frac{V}{V - b} - 1 \approx \frac{b}{V} = \frac{2N_A d^3}{V} \approx 4 \cdot 10^{-4}; \quad v_a^{VV} \approx \frac{V}{V - b} v_a^H.$$

$$6.57. v_a = \sqrt{\frac{2aR}{3\mu b C_V}}.$$

$$6.58. \frac{\beta_T}{\beta_S} = \frac{C_P}{C_V} \approx \left(\frac{C_P}{C_V}\right)_{lt} + \frac{2aP}{C_V RT^2} = \frac{5}{3} + 0,054 \approx 1,72.$$

$$6.59. \tau = \frac{6\pi b}{\sigma} \sqrt{\frac{3Mb}{2a}}.$$

$$6.60. a = \frac{0,03RTV}{2} \approx 0,036 \text{ l}^2 \cdot \text{atm/mol}^2.$$

$$6.61. A = R(T_2 - T_1) \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b} \approx 21 \text{ J}.$$

$$6.62. \eta = 1 - \frac{RT_1}{C_V(T_2 - T_1)} \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b}.$$

$$6.63. \eta = PV \left[ \frac{C_V}{R} P(V - b) + 2PV \left( \frac{C_V}{R} + 1 \right) - \left( \frac{C_V}{R} - 1 \right) \frac{a}{2V} + \frac{C_V}{R} \frac{3ab}{4V^2} \right]^{-1}.$$

$$6.64. \eta = 1 - \left( \frac{V_1 - b}{V_2 - b} \right)^{R/C_V}.$$

$$6.65. Q = 10^3 \text{ J}.$$

$$6.66. \frac{\Delta T}{\Delta P} = \frac{\frac{bRT}{(V-b)^2} - \frac{2a}{V^2}}{C_P \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T}.$$

$$6.67. \frac{\Delta T}{\Delta P} = \frac{\frac{2a}{RT} - b}{C_P}; T_{\text{Đảo}} = \frac{2a}{Rb} = \frac{27}{4} T_k.$$

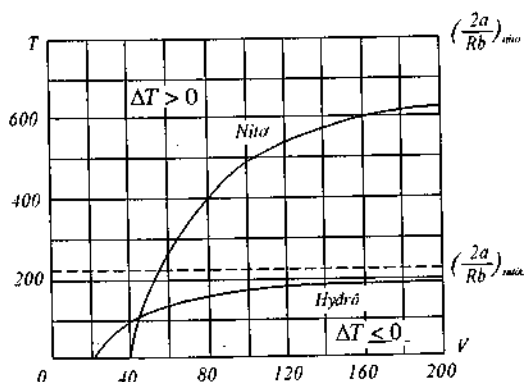
$$6.68. \Delta T = \frac{b\Delta P}{C_P} > 0, \text{ trong đó } \Delta P \text{ nhỏ và } \Delta P < 0.$$

$$6.69. \Delta T = \frac{2a\Delta P}{RTC_P}, \text{ trong đó } \Delta P \text{ nhỏ và âm.}$$

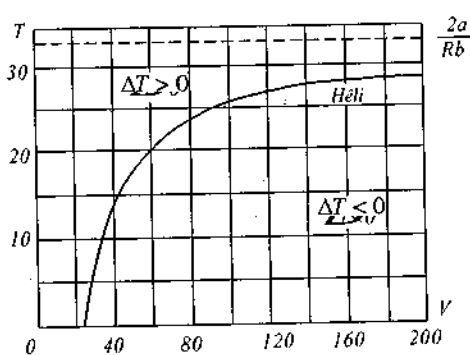
6.70.  $T < T_{\text{đảo}} = 35,1\text{K}$ . Khi cho tiết lưu heli dưới áp suất 30atm, tức là khi công thức  $\Delta T = \frac{2a\Delta P}{RTC_P}$  (xem bài trước) không thể áp dụng thì hiện tượng đảo quan sát được ở 14K.

$$6.71. \frac{bRT}{(V-b)^2} - \frac{2a}{V^2} = 0.$$

6.72. Hiperbol:  $T = \frac{2a}{Rb} \frac{V-b}{V}$  (H. 407 và H. 408). Các trục tiệm cận (biểu diễn bằng các đường gạch gạch) cắt trục tọa độ tại các điểm nghịch đảo của hiệu ứng vi phân Joule – Thomson.



Hình 407



Hình 408

$$6.73. \frac{\Delta T}{\Delta T_S} \approx \frac{b}{V} \left( 1 + \frac{2a}{RTb} \right) \left( 1 - \frac{b}{V} \right) = \frac{V_k}{3V} \left( \frac{27}{4} \frac{T_k}{T} + 1 \right) \left( 1 - \frac{V_k}{3V} \right) \approx 0,11.$$

$$6.74*. P_0 \approx 100 \text{ atm.}$$

*Lời giải.* Khi thoát từ từ thì trạng thái của chất trong bình có thể coi là cân bằng. Vì bình được cách nhiệt nên entropi riêng (và vì vậy cả entropi mol) của khí trong bình phải không đổi. Trong quá trình giãn nở đoạn nhiệt thuận nghịch với công ngoài thì khí sẽ lạnh đi. Đến một nhiệt độ nào đó thì khí tiếp tục giảm áp suất sẽ kéo theo không chỉ nhiệt độ giảm mà cả sự ngưng tụ khí thành thể lỏng. Quá trình này là cân bằng và không kèm theo sự biến đổi entropi. Để thay đổi entropi của một mol chất khí chuyển từ trạng thái ban đầu (thể khí) sang trạng thái cuối (thể lỏng) ta có thể viết

$$\Delta S = \int \left( C_V \frac{dT}{T} + P \frac{dV}{T} \right) - \frac{\Lambda}{T_1}.$$

Thế vào biểu thức này

$$pdV = RdT - VdP = RdT - RT \frac{dP}{P}.$$

và để ý rằng  $C_P = C_V + R$ , ta nhận được

$$\Delta S = C_P \ln \frac{T_1}{T_0} - R \ln \frac{P_1}{P_0} - \frac{\Lambda}{T_1} = R \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln \frac{T_1}{T_0} - \ln \frac{P_1}{P_0} - \frac{\Lambda}{RT_1} \right).$$

Cho  $\Delta S$  bằng không ta tìm được

$$P_0 = P_1 \left( \frac{T_0}{T_1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} e^{\Lambda/(RT_1)} \approx 100 \text{ atm.}$$

6.75.  $V_k = 113 \text{ cm}^3/\text{mol}$ ;  $P_k = 34,4 \text{ atm}$ .

6.76.  $Q = b \left( \frac{T}{T_k} - 1 \right) (P_1 - P_2) \approx 320 \text{ J/mol}$ .

6.77.  $\Delta U = P_2 V_2 - P_1 V_1 + \frac{RTb}{a} \left( \frac{P_2 V_2^2}{V_2 + b} - \frac{P_1 V_1^2}{V_1 + b} \right)$ , trong đó  $P_1$  và  $P_2$  là áp suất khí ứng với thể tích  $V_1$  và  $V_2$ .

6.78.  $dS = \left( R + \frac{a}{T_0 V_0} \right) \exp \left( -\frac{a}{RTV_0} \right) \frac{dV}{V-b}$ .

6.79.  $\Delta C_V = \frac{2a}{T^2} \left( \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) = -3,8 \cdot 10^{-2} R = -0,316 \text{ J/(K.mol)}$ .

## §7. PHÂN BỐ MAXWELL<sup>1</sup>

7.1.  $\frac{n_1}{n_2} = \frac{v_1^2}{v_2^2} \exp \left[ \frac{\mu(v_2^2 - v_1^2)}{2RT} \right] \approx 0,98$ , trong đó  $\mu$  là phân tử lượng.

7.2.  $\overline{v_x^2} = \frac{kT}{m}$ ;  $\frac{mv_x^2}{2} = \frac{kT}{2}$ .

7.3.  $v_m = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = 342 \text{ m/s}$ ;  $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = 1,13v_m = 386 \text{ m/s}$ .

$\overline{v_{ip}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = 1,23v_m = 420 \text{ m/s}$ .

7.4.  $t = 153 \text{ }^\circ\text{C}$ .

<sup>1</sup> Chúng tôi xin nhắc lại là trong tập sách này sử dụng hai ký hiệu tương đương nhau  $\overline{v^2} = \langle v^2 \rangle$ .

$$7.6. \bar{v} \propto P^{1/5}.$$

$$7.7. dN = 2\pi N (\pi kT)^{-3/2} \sqrt{\varepsilon} \exp[-\varepsilon/(kT)] d\varepsilon.$$

$$7.8. \varepsilon_m = \frac{kT}{2}.$$

$$7.9. T = \frac{mv^2}{3k}.$$

$$7.10*. v_{1/2} = 1,088 \sqrt{\frac{2kT}{m}}.$$

Lời giải. Vận tốc cần tìm được xác định từ phương trình

$$\Phi(x) = x \frac{d\Phi}{dx} = \frac{1}{2},$$

trong đó  $\Phi(x)$  là tích phân xác suất sai số:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi,$$

còn  $x^2 = \frac{mv^2}{2kT}$ . Phương trình trên có thể giải dễ dàng nếu sử dụng bảng<sup>1</sup> của hàm số  $\Phi(x)$  và đạo hàm  $\Phi'(x)$  của nó. Bằng cách đó ta tính được  $x = 1,088$ .

$$7.11. \left(\frac{1}{v}\right) = \sqrt{\frac{2m}{\pi kT}} = \frac{4}{\pi v}.$$

7.12\*. Lời giải. Số phân tử cần tìm  $dN$  bằng số trong hình các điểm vận tốc trong một yếu tố thể tích của không gian vận tốc nằm giữa hai hình trụ đồng trục bán kính  $v_{\perp}$  và  $v_{\perp} + dv_{\perp}$  với chiều cao  $dv_{\parallel}$ . Thể tích của yếu tố này bằng  $d\omega = 2\pi v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel}$ , còn số trong hình các điểm vận tốc trong nó bằng

$$dN = f d\omega = 2\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right) v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel}.$$

$$7.13. \frac{dN''}{dN'} = \left(\frac{V''}{V'}\right)^{(y-1)/2} \approx 1,15.$$

<sup>1</sup> Xem sách bất kỳ về các hàm số đặc biệt trong toán xác suất.

7.14.  $\alpha = \exp\left(-\frac{eV}{kT}\right)$ , trong đó  $e$  là điện tích electron.

1)  $\alpha = 13,5 \%$ ;

2)  $\alpha = 1,8 \%$ .

7.15.  $v = \frac{2\pi R^2 n}{\delta} \approx 660 \text{ m/s}$ .

7.16.  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

7.17.  $n(r) = \frac{v}{4\pi r^2} \sqrt{\frac{2m}{\pi kT}}$ .

7.18.  $j = \frac{NR}{t^4} \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mR^2}{2kTt^2}\right)$ ;  $t_0 = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{m}{kT}}$ ;  $v_0 = 2\sqrt{\frac{kT}{m}}$ .

7.19\*.  $z = \frac{n\bar{v}}{4}$ .

*Lời giải.* Đầu tiên ta xét trường hợp riêng khi giá trị tuyệt đối của vận tốc tất cả các phân tử như nhau, nhưng chúng phân bố đẳng hướng theo vận tốc.

Trong trường hợp này số phân tử chứa trong  $1\text{cm}^3$  có chiều của vận tốc nằm trong góc đặc  $d\Omega$  là  $dn = \frac{n}{4\pi} d\Omega$ , trong đó  $n$  là số phân tử trong  $1\text{cm}^3$ . Tiếp

theo ta xét số phân tử va chạm vào  $1\text{cm}^2$  thành bình và đang bay tới thành bình với góc tới nằm giữa  $\theta$  và  $\theta + d\theta$ , khi đó ta có

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta, \quad dn = n \sin\theta d\theta / 2.$$

Số va chạm của các phân tử trên vào  $1\text{cm}^2$  thành bình sẽ là

$$dz = nv \sin\theta \cos\theta d\theta / 2.$$

Lấy tích phân biểu thức trên trong giới hạn từ 0 đến  $\frac{\pi}{2}$ , ta tìm được  $z = \frac{n\bar{v}}{4}$ .

Nếu giá trị tuyệt đối của vận tốc các phân tử khác nhau thì ta sẽ chia chúng thành những nhóm có vận tốc xấp xỉ nhau. Bằng cách đó ta dễ dàng nhận được

$$z = \frac{n\bar{v}}{4}, \quad (*)$$

trong đó  $\bar{v}$  là vận tốc trung bình của các phân tử. Đối với phân bố Maxwell

$$z = \frac{n}{4} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = n \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}.$$

$$7.20. z = n \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}.$$

$$7.21. dP = \frac{4\pi}{3} mn \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^4 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv; v_0 = 2\sqrt{\frac{kT}{m}}.$$

$$7.22. dN = \pi n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv; v_0 = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

$$7.23. \text{Đối với phân bố đẳng hướng } E = \frac{mn\langle v^3 \rangle}{8};$$

$$\text{Đối với phân bố Maxwell } E = n \sqrt{\frac{2k^3 T^3}{m\pi}} = \frac{\pi m}{16} \langle v^3 \rangle,$$

trong đó  $m$  là khối lượng phân tử,  $n$  là số phân tử trong  $1\text{cm}^3$ .

$$7.24. \bar{\epsilon} = 2kT.$$

$$7.25*. t_{1/2} = \tau \ln 2.$$

*Lời giải.* Nếu lỗ  $S$  rất nhỏ thì sự phân bố vận tốc ít bị biến dạng, tức là sẽ giữ nguyên phân bố đẳng hướng và phân bố Maxwell. Theo công thức (\*) (xem lời giải bài 7.19)

$$d(Vn) = -\frac{Sn\bar{v}dt}{4}.$$

Lấy tích phân phương trình này, ta được  $n = n_0 e^{-t/\tau}$ , trong đó  $\tau = \frac{4V}{S\bar{v}}$ . Từ đây suy ra đáp số.

$$7.26. n = n_0 (1 - e^{-t/\tau}). \text{ Các ký hiệu tương tự như bài trước.}$$

$$7.27. t = \frac{4V}{S\bar{v}} \ln \frac{P_0 - P_1}{P_0 - P_2} \approx \frac{4V}{S\bar{v}} \frac{P_2 - P_1}{P_0} \approx 1,17 \text{ s};$$

$$t_{1/2} = \frac{4V}{S\bar{v}} \ln 2 \approx 6,2 \cdot 10^4 \text{ s} = 17 \text{ h}.$$

7.28\*. *Lời giải.* Phương trình cân bằng đối với các phân tử nitơ

$$\frac{dN_a^{(1)}}{dt} = -\frac{1}{4} \frac{S\bar{v}_a}{V} (N_a^{(1)} - N_a^{(2)}); \quad \frac{dN_a^{(2)}}{dt} = -\frac{1}{4} \frac{S\bar{v}_a}{V} (N_a^{(2)} - N_a^{(1)}),$$



trong đó  $N_a^{(1)}$ ,  $N_a^{(2)}$  là số phân tử nitơ trong ngăn thứ nhất và ngăn thứ hai của bình.

Vì  $N_a^{(1)} + N_a^{(2)} = N_a = \text{const}$ , nên phương trình thứ nhất sẽ có dạng

$$\frac{dN_a^{(1)}}{dt} = -\frac{S\bar{v}_a}{2V} \left( N_a^{(1)} - \frac{N_a}{2} \right).$$

Lấy tích phân phương trình này, sử dụng điều kiện ban đầu  $N_a^{(1)} = N_a$  tại  $t = 0$ , sau đó xác định  $N_a^{(2)}$  từ  $N_a^{(2)} = N_a - N_a^{(1)}$ , ta được

$$N_a^{(1)} = \frac{N_a}{2} \left[ 1 + \exp\left(-\frac{S\bar{v}_a t}{2V}\right) \right], \quad N_a^{(2)} = \frac{N_a}{2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{S\bar{v}_a t}{2V}\right) \right].$$

Tương tự đối với các phân tử ôxy

$$N_k^{(1)} = \frac{N_k}{2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{S\bar{v}_k t}{2V}\right) \right], \quad N_k^{(2)} = \frac{N_k}{2} \left[ 1 + \exp\left(-\frac{S\bar{v}_k t}{2V}\right) \right].$$

Do các giá trị áp suất ban đầu trong cả hai ngăn như nhau, nên  $N_a = N_k = N$ . Áp suất trong ngăn thứ nhất

$$P_1 = \frac{1}{V} (N_a^{(1)} + N_k^{(1)}) kT = P \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[ \exp\left(-\frac{S\bar{v}_a t}{2V}\right) - \exp\left(-\frac{S\bar{v}_k t}{2V}\right) \right] \right\}.$$

Áp suất trong ngăn thứ hai

$$P_2 = P \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[ \exp\left(-\frac{S\bar{v}_k t}{2V}\right) - \exp\left(-\frac{S\bar{v}_a t}{2V}\right) \right] \right\}.$$

Khi  $t = 0$  và  $t = \infty$ , từ hai phương trình cuối ta suy ra  $P_1 = P_2 = P$ , đó cũng chính là điều kiện cần phải có.

**7.29\*. Lời giải.** Tiến hành tương tự như bài 7.26, ta tìm được tỷ lệ giữa mật độ thành phần nhẹ và thành phần nặng

$$\beta = \alpha \frac{1 - e^{-t/\tau_1}}{1 - e^{-t/\tau_2}},$$

trong đó chỉ số 1 ứng với thành phần nhẹ, 2 ứng với thành phần nặng. Thời gian  $\tau_1$  và  $\tau_2$  liên hệ với nhau bằng đẳng thức  $\frac{\tau_2}{\tau_1} = 2$ . Do đó, đạo hàm

$\frac{d\beta}{dt}$  bằng không khi

$$e^{-t/\tau_2} = \sqrt{2} - 1.$$

tức là khi  $\beta = \alpha\sqrt{2}$ . Tuy nhiên, điều kiện này không ứng với cực đại và cực tiểu trên đường cong  $\beta = \beta(t)$  mà ứng với điểm uốn. Giá trị cực đại và cực tiểu của  $\beta$  nhận được tại hai đầu của khoảng thời gian  $(0, \infty)$ . Khi  $t = 0$  ta nhận được cực đại  $\beta_{\max} = \frac{\alpha\tau_2}{\tau_1} = 2\alpha$ , khi  $t = \infty$  thì có cực tiểu  $\beta_{\min} = \alpha$ .

7.30.  $\frac{15P}{16}$ .

7.31\*.  $Q = \frac{kT}{8} S\bar{v}n_0 e^{-t/\tau}$ .

Lời giải. Phương trình cân bằng năng lượng

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{8}nmS\bar{v}^3 + Q.$$

Phương trình cân bằng số hạt

$$V \frac{dn}{dt} = -\frac{1}{4}nS\bar{v}.$$

Theo điều kiện thì năng lượng trung bình của một hạt không đổi  $\frac{E}{Vn} = \text{const.}$

Từ đây  $dE = E \frac{dn}{n}$ . Khử  $dE$  và  $dn$  ta được

$$\frac{E}{Vn} = \frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{m\bar{v}^3}{\bar{v}} - \frac{4Q}{nS\bar{v}}.$$

Suy ra

$$Q = \frac{m}{8} \left( \frac{\bar{v}^3}{\bar{v}} - \bar{v}^2 \right) nS\bar{v}.$$

Đối với phân bố Maxwell

$$Q = \frac{kT}{8} S\bar{v}n = \frac{kT}{8} S\bar{v}n_0 e^{-t/\tau},$$

trong đó  $\tau = \frac{4V}{S\bar{v}}$ .

7.32\*.  $\bar{v} = v_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ ;  $n = n_0 \sqrt{8\pi}$ ;  $T = \frac{mv_0^2}{4k}$ .

*Lời giải.* Do các va chạm của các phân tử vào thành bình và giữa chúng với nhau bên trong bình nên phân bố vận tốc Maxwell được thiết lập. Điều kiện bảo toàn số hạt và động năng của khí trong bình có dạng

$$n_0 v_0 = \frac{n \bar{v}}{4}, \quad \frac{n_0 m v_0^3}{2} = \frac{n m \pi \bar{v}^3}{16}.$$

Từ đây suy ra đáp số.

$$7.33. v_0 = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \bar{v}_p.$$

$$7.34. v_0 = \sqrt{\frac{5kT}{m}} = \sqrt{\frac{5}{3}} \bar{v}_p.$$

$$7.35. F = \frac{\pi^2 P}{2} (1 - \cos^3 \theta_0), \text{ trong đó } \cos \theta_0 = \frac{L}{\sqrt{L^2 + R^2}}.$$

$$7.36. \frac{\Delta n}{n} = (1 + x_0) e^{-x_0} \approx 10^{-38}, \text{ trong đó } x_0 = \frac{m v_{2k}^2}{2kT} \approx 100.$$

$$7.37. \omega = \frac{2\pi}{R} \sqrt{\frac{3kT}{m}}; v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

7.38. Lực đẩy tên lửa tỷ lệ với vận tốc phụt khí, vì thế, nếu  $F_1$  là lực đẩy tên lửa loại thông thường,  $F_2$  là lực đẩy tên lửa loại thứ hai thì

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{\pi}{16}} \approx 0,44.$$

$$7.39. T_{hh} = 1,284 T_0.$$

$$7.40. T = \frac{T_0}{2^{1/3}} = 217 \text{ K}.$$

$$7.41. \frac{T}{T_0} = \left( \frac{P}{P_0} \right)^{1/6}.$$

$$7.42. T_0 = \sqrt{T_1 T_2} \approx 400 \text{ K}; P_0 = \frac{P}{2} \left[ \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^{1/4} + \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{1/4} \right] \approx 1,06 \text{ atm}.$$

$$7.43. \text{ Pitton dịch chuyển lên trên } 6,75 \text{ cm}.$$

$$7.44. T(t) = T_0 \left( 1 + \frac{S}{6V} \sqrt{\frac{kT_0}{2\pi m}} t \right)^{-2}, \text{ trong đó } m \text{ là khối lượng phân tử.}$$

$$7.45. F = \frac{P\sigma}{2}.$$

$$7.46. v = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \langle v_{ip} \rangle = 2,45 \text{ km/s.}$$

$$7.47. \frac{a(T_2)}{a(T_1)} = \exp \left[ \frac{(A_1 - A_2)(T_1 - T_2)v^2}{2T_1T_2R} \right] \approx 0,93, \text{ trong đó } a \text{ là tỷ lệ mật độ}$$

đồng vị uran,  $A$  là khối lượng nguyên tử.

$$7.48. \frac{n_D}{n_H} = \sqrt{2}.$$

$$7.50. \alpha = \left( 1 + \frac{\varepsilon}{kT} \right) \exp \left( -\frac{\varepsilon}{kT} \right).$$

$$7.51*. P \approx 6,4 \cdot 10^{-12} \text{ mmHg.}$$

Lời giải. Vận tốc bay hơi được xác định bởi biểu thức

$$q = \frac{nm\bar{v}}{4},$$

trong đó  $n$  là mật độ nguyên tử hơi Wolfram. Áp suất của nó

$$P = \frac{1}{3} nm\bar{v}^2 = \frac{4}{3} q \frac{\bar{v}^2}{\bar{v}}.$$

Khi phân bố là phân bố Maxwell

$$\frac{\bar{v}^2}{\bar{v}} = 3 \sqrt{\frac{\pi kT}{8m}} = 3 \sqrt{\frac{\pi RT}{8A}},$$

trong đó  $A$  là khối lượng nguyên tử tương đối, đối với Wolfram  $A = 184$ .  
Cuối cùng ta thu được

$$P = q \sqrt{\frac{2\pi RT}{A}}.$$

Thay các giá trị số, ta tìm được áp suất hơi bão hoà của Wolfram khi  
 $T = 2000 \text{ K}$  là  $P \approx 6,4 \cdot 10^{-12} \text{ mmHg}$ .

$$7.52. \frac{dM}{dt} = P \sqrt{\frac{\mu}{2\pi RT}} \approx 0,38 \text{ g/(s.cm}^2\text{)}, \text{ trong đó } \mu \text{ là phân tử lượng.}$$

$$7.53. \frac{dM}{dt} = wSP_0 \sqrt{\frac{\mu}{2\pi RT}} \left(1 + \frac{E_n}{kT}\right) e^{-E_n/(kT)} \approx 5,1 \text{ g/s.}$$

$$7.54. \Delta S = 8R \ln 2.$$

$$7.55. \frac{v_2}{v_1} = 0,435.$$

$$7.56. \text{Giảm khoảng } 17,8 \text{ lần.}$$

$$7.57. C = 3R.$$

$$7.58. \text{Giảm } 3 \text{ lần.}$$

$$7.59. \Delta S = 4R \ln 2.$$

$$7.60. \Delta S = -R \ln 2.$$

$$7.61. n = \frac{1}{4} \beta S \frac{N}{V} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \left[1 - \left(1 + \frac{E_0}{kT}\right) \exp\left(-\frac{E_0}{kT}\right)\right].$$

$$7.62. dw_1(v_x) = \frac{dv_x}{2v_0}; \quad dw_2(E) = \frac{dE}{v_0 \sqrt{2mE}}; \quad \langle v_x \rangle = 0; \quad \langle |v_x| \rangle = \frac{v_0}{2};$$

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{v_0^2}{3}.$$

$$7.63. dN_{v_0} = \frac{1}{4} \pi n R^2 \frac{dv}{v_{\max} - v_{\min}} \left(v_0 + \frac{v_0^2 k}{v_0}\right).$$

$$7.64. \Phi \sim \varepsilon_b^2 - (mgh)^2; \quad H = \frac{\varepsilon_b}{mg} \approx \frac{v_b^2}{2g} \approx 5 \text{ m.}$$

$$7.65. \alpha = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \sin^3 \varphi \approx 2 \cdot 10^{-8}.$$

$$7.66. S = \frac{4V}{v\tau} \approx 0,8 \text{ mm}^2.$$

## §8. PHÂN BỐ BOLTZMANN

$$8.1. M \approx 5,3 \cdot 10^{18} \text{ kg.}$$

$$8.2. \frac{m}{M} = \frac{4\pi\gamma P_0}{g^2} \approx 0,87 \cdot 10^{-6}.$$

$$8.3. m_{atm} \approx \frac{\pi P_0 R^4}{\gamma M} \approx 0,5 \cdot 10^{37} \text{ g.}$$

8.4\*. Nhiệt độ của khí không đổi.

*Lời giải.* Khi bình rơi tự do, khí trong bình sẽ nằm trong trạng thái không trọng lượng. Trạng thái ban đầu của nó là trạng thái không cân bằng – mật độ phía trên nhỏ hơn so với phía dưới. Tuy nhiên động năng trung bình của các phân tử ở mọi nơi đều như nhau. Khi chuyển sang trạng thái cân bằng, mật độ của chúng sẽ trở nên đồng đều. Nhưng tổng động năng của các phân tử khí được xác định bởi nhiệt độ của nó vẫn không thay đổi. Thí nghiệm trong bài tương tự như thí nghiệm nổi tiếng của Gay – Lussac khi giãn nở khí vào chân không.

$$8.5. \overline{\varepsilon_{tm}} = kT; C = C_p.$$

$$8.6. \overline{\varepsilon_{tm}} = \frac{1 - \left(1 + \frac{mgH}{kT}\right) \exp\left(-\frac{mgH}{kT}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{mgH}{kT}\right)} kT.$$

$$8.7. C = C_V + \frac{R}{12} \left(\frac{\mu gH}{RT}\right)^2.$$

$$8.8. z_C = \frac{(N_1 + N_2)kT - N_1 m_1 \left[ \exp\left(\frac{m_1 gh}{kT}\right) - 1 \right]^{-1} gh}{g(N_1 m_1 + N_2 m_2)} + \frac{N_2 m_2 \left[ \exp\left(\frac{m_2 gh}{kT}\right) - 1 \right]^{-1} gh}{g(N_1 m_1 + N_2 m_2)}$$

$$8.9. \frac{N_0}{N_1} \approx 9,5 \text{ (ở gần bề mặt Trái Đất nhiều khí hơn).}$$

8.10. 0,374%.

8.11.  $v_a = 400 \text{ m/s}$ .

8.12.  $N \approx 6 \cdot 10^{23}$ .

8.13.  $N = \frac{RT \ln \alpha}{(4/3)\pi r^3 (\rho - \rho_0) gl} \approx 6,5 \cdot 10^{23}$ .

8.14.  $T = \frac{3}{4} \frac{mgR}{k}$ .

8.15.  $T = \frac{mgH}{4k}$ .

8.16.  $T \approx T_0 \left[ 1 - \frac{\mu g H}{4C_V T_0} + \frac{(\mu g H)^2}{16C_V R T_0^2} \right]$ .

8.17.  $T = \frac{5T_1 + 7T_2}{12}$ .

8.18.  $\Delta x_C = \frac{maL^2}{12kT}$ .

8.19. 1)  $\Delta S = \frac{MR}{24\mu} \left( \frac{\mu a h}{RT} \right)^2$ ; 2)  $\Delta S = 0$ .

8.20.  $v_H \approx \sqrt{\frac{204kT}{m}} \approx 4,6 \text{ km/s}$ .

8.21.  $T = \frac{6}{5} T_0$ ;  $M = S \Delta t P_0 \sqrt{\frac{N_A}{2\pi \mu k T_0}}$ .

8.22.  $t = \frac{2k^2 T^2 S \rho}{v \sigma P_0 m^2 g} \ln 2$ , trong đó  $m$  là khối lượng phân tử,  $\rho$  là khối lượng riêng của nước,  $v$  là vận tốc trung bình của chuyển động nhiệt của các phân tử hơi.

8.23. Số các phân tử  $dN$  có các tọa độ giữa  $r$  và  $r + dr$ ,  $z$  và  $z + dz$  bằng

$$dN = \frac{Ng \left( \frac{m\omega}{kT} \right)^2 \exp \left( \frac{m\omega^2 r^2}{2kT} \right) r dr \exp \left( -\frac{mgz}{kT} \right) dz}{\left[ 1 - \exp \left( -\frac{mgH}{kT} \right) \right] \left[ \exp \left( \frac{m\omega^2 R^2}{2kT} \right) - 1 \right]},$$

trong đó  $N$  là tổng số phân tử trong bình. Trục  $Z$  hướng thẳng đứng lên trên.

$$8.24. \mu = \frac{2RT\rho \ln \alpha}{\omega^2(\rho - \rho_0)(r_2^2 - r_1^2)}.$$

$$8.25. \Delta C_V = \frac{\mu^2 \omega^4 a^4}{48RT^2} \approx 2,8 \cdot 10^{-4} \text{ J/(K.mol)}.$$

$$8.26. \rho_1 = \rho_0 \left( 1 + \frac{m\omega^2 r_0^2}{4kT_0} \right).$$

$$8.27. \frac{\Delta \rho}{\rho} \approx 4 \cdot 10^{-6}.$$

$$8.28. \mu = \frac{\alpha RT\rho}{G(\rho - \rho_0)} \approx 1,4 \cdot 10^6 \text{ g/mol}.$$

$$8.29. \omega = 463 \text{ s}^{-1}.$$

$$8.30. P(r) = \frac{M\omega^2 l}{2S} \exp \left[ \frac{\mu\omega^2}{2RT} \left( r^2 - \frac{l^2}{4} \right) \right].$$

$$8.31. P(r) = \frac{3}{2} P_0 \left( 1 + \frac{M\omega^2 l}{2P_0 S} \right) \exp \left[ -\frac{\mu\omega^2}{2RT} \left( \frac{9}{16} l^2 - r^2 \right) \right].$$

$$8.32. \Delta S = \frac{\mu\omega^2 a^2}{4T_0}; \Delta T = \frac{\mu\omega^2 a^2}{4C_V}.$$

$$8.33. \Omega = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2RT}{\mu} \frac{\Delta P}{P_0}} \approx 16,4 \text{ s}^{-1}.$$

$$8.34. \Delta S = -\frac{R}{24} \left( \frac{\mu\omega^2 a^2}{2RT} \right)^2.$$

$$8.35. I = N_A m R^2 \left[ \frac{1}{1 - \exp \left( -\frac{m\omega^2 R^2}{2kT} \right)} - \frac{2kT}{m\omega^2 R^2} \right];$$

$$\text{khi } T \rightarrow \infty, I = N_A \frac{mR^2}{2}.$$



$$8.36. q = \sqrt{\frac{2}{\pi}} P_0 S \left[ v_2 - v_1 + gh \left( \frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} \right) \right], \text{ (dòng năng lượng từ bình 2 sang}$$

$$\text{bình 1)}; v_{1,2} = \sqrt{\frac{RT}{\mu_{1,2}}}.$$

$$8.37. P = P_0 \exp \left[ -\frac{mg\bar{v}\sigma}{4kTS} \exp \left( -\frac{mgh}{kT} \right) t \right], P_0 = n_0 kT = \frac{N_0}{S} mg, \text{ trong đó}$$

$m$  – khối lượng phân tử,  $N_0$  – tổng số phân tử trong bình,  $n_0$  – mật độ khí ban đầu ở đáy bình.

$$8.38. \bar{U} = \frac{kT}{2}.$$

$$8.39. \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/(kT)} + 1} + \frac{3}{2} RT, \text{ nếu } \varepsilon \gg kT \text{ thì } \bar{\varepsilon} \approx \frac{3}{2} RT.$$

$$8.40. E = -\varepsilon N_A \frac{e^2 - 1}{e^2 + e + 1} = -0,575 RT.$$

$$8.41. R \leq \frac{2}{3} \gamma \frac{Mm}{kT} \approx 4 \cdot 10^{22} \text{ cm}, \text{ trong đó } \gamma - \text{hằng số hấp dẫn, } m - \text{khối}$$

lượng các phân tử hydro.

$$8.42. \Delta T = -\frac{2}{9} T_1; \Delta S \approx R \ln \frac{kT_1}{\hbar \omega}.$$

$$8.43. \Delta T = -\frac{2}{7} T_1; \Delta S \approx \frac{M}{\mu} R \ln \frac{kT_1}{\hbar \omega}.$$

$$8.44. \Delta T = \frac{\varepsilon}{3k} \left( e^{-\varepsilon/(kT_1)} - e^{-\varepsilon/(kT_0)} \right) \approx 0,8 \text{ K}.$$

$$8.45. \sqrt{\langle \omega^2 \rangle} = \frac{4kT}{Mr^2} = 7,3 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}.$$

$$8.46. \bar{\varepsilon} = \frac{kT}{2} = 2,1 \cdot 10^{-21} \text{ J}; \sqrt{\langle v^2 \rangle} = 7,2 \cdot 10^{11} \text{ Hz}.$$

$$8.47. K = \frac{5PV}{2} = 2,75 \cdot 10^{-13} \text{ J}.$$

$$8.48. E = PV = 100 \text{ J}.$$

$$8.49. E = \frac{3}{2} PV = 150 \text{ J}.$$

$$8.50. \bar{\varepsilon} = kT \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = 1,65 \cdot 10^{-20} \text{ J}.$$

$$8.51. U \approx \frac{\Delta E N}{2} \left( 1 - \frac{\Delta E}{2kT} \right); S = \text{const} - \frac{N(\Delta E)^2}{8kT^2}.$$

$$8.52. \bar{\varepsilon} = \frac{hv}{e^{hv/(kT)} - 1}; \quad \bar{\varepsilon}_1 = 1,6 \cdot 10^{-21} \text{ J}; \quad \bar{\varepsilon}_2 = 6 \cdot 10^{-27} \text{ J};$$

$$\bar{\varepsilon}_{cd} = kT = 4,1 \cdot 10^{-21} \text{ J}.$$

$$C_V = R \left( \frac{hv}{kT} \right)^2 \frac{e^{hv/(kT)}}{(e^{hv/(kT)} - 1)^2} \approx R \left( \frac{hv}{kT} \right)^2 e^{-hv/(kT)} \approx 0,03 R \approx 0,25 \text{ J/(Mol.K)}$$

## §9. SỰ THĂNG GIÁNG.

### Ý NGHĨA THỐNG KÊ CỦA ENTRÔPI

9.1\*. *Lời giải.*  $fg = \bar{f}\bar{g} + \bar{g}\Delta f + \bar{f}\Delta g + \Delta f\Delta g$ . Lấy trung bình và chú ý rằng  $\overline{\Delta f} = \overline{\Delta g} = 0$ , ta tìm được

$$\overline{fg} = \bar{f}\bar{g} + \overline{\Delta f\Delta g}.$$

$$9.2. \overline{\Delta f^2} = \overline{f^2} + \bar{f}^2. \quad (*)$$

$$9.4*. \overline{\Delta n^2} = \bar{n}.$$

*Lời giải.* Nếu chia thể tích  $V$  thành  $z = \frac{V}{v}$  phần bằng nhau  $v_i = v$ , thì tổng số phân tử là  $N = \sum n_i$ , trong đó  $n_i$  - số phân tử trong thể tích  $i$ . Vì các  $v_i$  có độ lớn như nhau nên số phân tử trung bình trong chúng  $\bar{n}_i$  cũng như nhau. Vì thế  $N = z\bar{n}$ , tức là  $\bar{n} = Np$ , trong đó  $p = \frac{v}{V}$  - xác suất chứa phân tử trong thể tích  $v$ .

Ta xác định các đại lượng  $f_i$  như sau:  $f_i = 1$  nếu phân tử thứ  $i$  nằm trong thể tích còn lại  $V - v$ . Khi đó số phân tử  $n$  trong thể tích  $v$  có thể biểu diễn dưới dạng  $n = \sum f_i$ , giả thiết rằng tổng lấy theo tất cả  $N$  phân tử của thể tích

V. Rõ ràng là các hàm  $f_i$  thoả mãn điều kiện  $f_i = f_i^2 = f_i^3 = \dots$ . Hiển nhiên là  $\overline{f_i} = \overline{f_i^2} = \overline{f_i^3} = \dots = p$ . Theo công thức (\*) (xem đáp số bài 9.2)

$$\overline{\Delta f_i^2} = \overline{f_i^2} - \overline{f_i}^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

Vì trong trường hợp khí lý tưởng thì các đại lượng  $f_1, f_2, f_3, \dots$  độc lập với nhau, nên

$$\overline{\Delta n^2} = Np(1-p) = (1-p)\bar{n}.$$

Nếu  $v \ll V$  thì  $p \ll 1$ . Bỏ qua xác suất  $p$  so với 1 ta thu được đáp số.

9.5.  $P = \left(\frac{1}{2}\right)^N$ ,  $N = \log_2 \frac{T}{\tau} \sim 70$ , trong đó  $\tau \sim 10^{-4}$  s – thời gian cần thiết cho một phân tử khí để nó bay qua khoảng cách bằng kích thước của bình.

9.6.  $V = \frac{1}{N\alpha^2} = 3,7 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3$ ;  $\bar{n} = \frac{1}{\alpha^2} = 10^{12}$ , trong đó  $N$  – số phân tử trong một đơn vị thể tích ( $N = 2,7 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ ).

$$9.7. \sqrt{\frac{\langle (\Delta \rho)^2 \rangle}{\rho^2}} = \sqrt{\left(\frac{kT}{V}\right)^2 \frac{N}{p^2}} = \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

$$9.8. \frac{\Delta T}{T} \approx 4 \cdot 10^{-11}.$$

9.9.  $\frac{w_1}{w_0} = e^{\Delta S/k} \approx 10^{-162}$ , trong đó  $\frac{\Delta S}{k} = -\frac{1}{2} \frac{v_0}{V} \frac{C_V}{k} \left(\frac{\Delta T}{T_0}\right)^2$ ,  $V$  – thể tích bình,  $v_0 = 10^{-6} \text{ cm}^3$ .

9.10.  $v = \frac{kVT^2}{C_V \langle (\Delta T)^2 \rangle} = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^{-3}$ , trong đó  $V$  – thể tích một mol hêli trong điều kiện của bài.

9.11.  $\frac{w_1}{w_2} = \exp \left[ -\frac{3}{4} N_0 \left( \frac{\Delta T}{T_0} \right)^2 \right] = e^{-2} \approx 0,14$ , trong đó  $N_0$  – số phân tử trong thể tích  $v$  khi  $T = T_0$ .

$$9.12. \frac{\langle (\Delta T)_2^2 \rangle}{\langle (\Delta T)_1^2 \rangle} = \frac{1}{2}.$$

$$9.13. V \approx 3,7 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^3.$$

$$9.14. \frac{\langle (\Delta V)^2 \rangle}{V_0^2} = \frac{3}{5N}.$$

$$9.15*. P = \frac{N!}{N_1! N_2!} p^{N_1} q^{N_2}.$$

*Lời giải.* Ta lấy một phân bố nào đó, trong đó thể tích  $V_1$  chứa  $N_1$  phân tử, còn  $V_2$  chứa  $N_2$  phân tử. Đánh dấu vị trí tất cả các phân tử, sau đó tiến hành hoán vị tất cả các vị trí có thể của chúng. Vì trong quá trình hoán vị số phân tử  $N_1$  và  $N_2$  trong thể tích  $V_1$  và  $V_2$  không đổi, nên kết quả là ta thu được các tổ hợp khả dĩ các phân tử với các số  $N_1$  và  $N_2$  bất buộc số các tổ hợp này bằng  $N!$ . Trong số đó có những tổ hợp trùng nhau. Để thu được tất cả số phân bố  $Z$  của  $N$  phân tử theo các thể tích  $V_1$  và  $V_2$ , ta chia toàn bộ số hoán vị  $N!$  trên cho tích  $N_1! N_2!$  nhận được  $Z = \frac{N!}{N_1! N_2!}$ . Trong trường

hợp khí lý tưởng tất cả các  $Z$  phân bố này có xác suất bằng nhau. Ta tìm xác suất của một phân bố. Xác suất mà trong đó, một phân tử xác định bay vào thể tích  $V_1$  là  $p = \frac{V_1}{V_1 + V_2}$ , còn trong thể tích  $V_2$  là  $q = \frac{V_2}{V_1 + V_2}$ . Xác suất để  $N_1$  phân tử xác định rơi vào thể tích  $V_1$ , còn  $N_2$  phân tử còn lại rơi vào thể tích  $V_2$  sẽ là  $p^{N_1} q^{N_2}$ . Nhân nó với số phân bố  $Z$ , ta được

$$P = \frac{N!}{N_1! N_2!} p^{N_1} q^{N_2}. \quad (*)$$

Đó chính là xác suất để số các phân tử (không quan trọng là các phân tử nào) trong các thể tích  $V_1$  và  $V_2$  tương ứng bằng  $N_1$  và  $N_2$ .

$$9.16. \frac{\sqrt{\Delta N^2}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sim 10^{-6}; \quad \bar{N} = \frac{1}{4} S n \bar{v} t = 1,2 \cdot 10^{12}.$$

$$9.17. j \approx 4 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}; \quad \frac{\sqrt{\Delta N^2}}{N} \approx 5 \cdot 10^{-6}.$$

$$9.18. j \approx 10^9 \text{ s}^{-1}; \quad \frac{\sqrt{\Delta N^2}}{N} \approx 10^{-3}.$$

**9.19\*.**  $n = 7,8 \cdot 10^{11}$

*Lời giải.* Sử dụng công thức (\*) (xem lời giải bài 9.15), ta nhận được

$$\frac{(N-n)!}{N!} \frac{(N+n)!}{N!} = \alpha,$$

trong đó  $N$  là số Avôgadrô. Sau khi rút gọn

$$\frac{(1+1/N) \dots (1+n/N)}{(1-1/N) \dots (1-(n-1)/N)} = \alpha.$$

Lấy lôgarit biểu thức này và lưu ý rằng  $\frac{n}{N} \ll 1$ , ta tìm được

$$2\left(\frac{1}{N} + \frac{2}{N} + \dots + \frac{n-1}{N}\right) + \frac{n}{N} = \ln \alpha,$$

hoặc  $\frac{n^2}{N} = \ln \alpha$ , suy ra

$$n = \sqrt{N \ln \alpha} = \sqrt{N} = 7,8 \cdot 10^{11}.$$

**9.20\*.** *Lời giải.* Trong nhiệt động học, entropi của  $N$  phân tử khí lý tưởng biểu diễn bằng công thức

$$S = N \left( c_V \ln T + k \ln \frac{V}{N} + s_0 \right),$$

trong đó  $c_V$  – nhiệt dung riêng đẳng tích của khí trên một phân tử,  $s_0$  – hằng số không phụ thuộc vào số hạt. Ở trạng thái ban đầu entropi của hệ

$$S_0 = 2N \left( c_V \ln T + k \ln \frac{V}{N} + s_0 \right);$$

ở trạng thái cuối

$$S = (N-n) \left( c_V \ln T + k \ln \frac{V}{N-n} + s_0 \right) + (N+n) \left( c_V \ln T + k \ln \frac{V}{N+n} + s_0 \right).$$

Suy ra

$$S_0 - S = k(N-n) \ln(N-n) + k(N+n) \ln(N+n) - 2kN \ln N,$$

hoặc nếu tính đến tỷ số  $\frac{n}{N} \ll 1$ :

$$S_0 - S = \frac{kn^2}{N}.$$

Theo công thức Boltzmann

$$S_0 - S = k \ln \frac{P_0}{P} = k \ln \alpha,$$

Ta nhận được  $\frac{n^2}{N} = \ln \alpha$ , suy ra  $n = \sqrt{N \ln \alpha}$ .

**9.21\*. Lời giải.** Trước thăng giáng, khi trạng thái của toàn bộ khí cân bằng thì entropi được xác định bằng biểu thức

$$S_0 = Nc_V \ln T + Nk \ln \frac{V}{N},$$

trong đó  $c_V$  – nhiệt dung riêng đẳng tích của khí trên một phân tử. Sau thăng giáng, khi trong thể tích  $v$  có  $n$  hạt thì entropi của khí sẽ là

$$S = Nc_V \ln T + k(N - n) \ln \frac{V - v}{N - n} + kn \ln \frac{V}{n}.$$

Lấy biểu thức này trừ biểu thức trên và bỏ qua các số hạng bậc hai theo  $v/V$  và  $n/N$ , ta thu được số gia entropi của khí do thăng giáng

$$\Delta S = k \ln \left[ \left( \frac{\bar{n}}{n} \right)^n e^{n - \bar{n}} \right].$$

Theo công thức Boltzman

$$\Delta S = k \ln \frac{P}{P_0},$$

đối với xác suất cần tìm ta có

$$P_n = P_0 \left( \frac{\bar{n}}{n} \right)^n e^{n - \bar{n}}.$$

Thực hiện phép biến đổi sang phân bố Gauss, sau đó có thể xác định hằng số  $P_0$  từ điều kiện chuẩn hoá  $\sum P_n = 1$ .

**9.22\*. Lời giải.** Có thể xét piton như một con lắc điều hòa. Giá trị trung bình của thế năng của nó khi xê dịch khỏi vị trí cân bằng một khoảng  $x$  là

$$\frac{\chi \langle x^2 \rangle}{2} = \frac{kT}{2}, \text{ trong đó } \chi - \text{suất đàn hồi tương ứng với li độ } x. \text{ Dễ thấy rằng}$$

$\Delta V = Sx$ , trong đó  $\Delta V$  là sự thay đổi thể tích của hệ,  $S$  là diện tích piton.

Như vậy  $\langle \Delta V^2 \rangle = \frac{S^2 kT}{\chi}$ . Lực kéo piton trở lại vị trí cân bằng  $F = S \frac{\partial P}{\partial x} x$ ,

vì thế

$$\chi = -S \frac{\partial P}{\partial x} = -S^2 \frac{\partial P}{\partial V}.$$

Cuối cùng ta nhận được

$$\langle (\Delta V^2)_T \rangle = -kT \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T^{-1} = -kT \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T.$$

Ký hiệu  $T$  được đưa vào vì khi tìm công thức ta đã giả thiết nhiệt độ của môi trường xung quanh không đổi (bộ ổn nhiệt). Nếu vật chất bên trong thể tích  $V$  được cách nhiệt thì trong công thức trên ký hiệu  $T$  phải được thay bằng  $S$ , tức là

$$\langle (\Delta V^2)_S \rangle = -kT \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_S.$$

$$9.23. L = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{mgl}{kT}} \approx 80m.$$

9.24. Đại lượng  $\langle \phi^2 \rangle$  giảm  $\alpha$  lần,  $\langle \varphi^2 \rangle$  tăng  $\frac{\beta}{\gamma^4}$  lần. Có thể nhận xét rằng

$\langle \varphi^2 \rangle$  không phụ thuộc vào mômen của gương;

$$N = \frac{RT}{D\langle \varphi^2 \rangle} \approx 6,04 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

$$9.25. \text{Chú ý rằng } \langle \lambda \rangle = \frac{\int_0^\infty x e^{-x/l} dx}{\int_0^\infty e^{-x/l} dx} = l, \text{ nên } \frac{\sqrt{\langle \lambda^2 \rangle - \langle \lambda \rangle^2}}{\langle \lambda \rangle} = 1. \text{ (Khi } x = l$$

số hạt trong dòng phân tử giảm  $e$  lần)

$$9.26. \alpha \approx 0,01.$$

$$9.27. m \approx \frac{\sqrt{\alpha kT}}{g}.$$

$$9.28. \frac{\sqrt{\langle \Delta V^2 \rangle}}{V} = \sqrt{\frac{kT\beta_T}{V}} \approx 3,6 \cdot 10^{-9}.$$

$$9.29. \frac{\sqrt{\langle \Delta n_{\Delta V}^2 \rangle}}{\langle \Delta n_{\Delta V} \rangle} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0 N_A \Delta V}} \exp\left(\frac{\mu gh}{2RT}\right).$$

$$9.30. \frac{\sqrt{\langle \Delta n_{\Delta V}^2 \rangle}}{\langle \Delta n_{\Delta V} \rangle} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0 N_A \Delta V}} \exp\left(-\frac{\mu \omega^2 r^2}{4RT}\right).$$

$$9.31. \sqrt{\frac{\Delta h^2}{h^2}} = \sqrt{\frac{\rho g k T}{4\pi\sigma^2}}.$$

$$9.32. \sqrt{\frac{\langle \Delta V^2 \rangle}{V^2}} = \sqrt{\frac{3}{4\pi} \frac{kT}{P_0 r^3 + \frac{8}{3}\sigma r^2}}.$$

$$9.33. \frac{\sqrt{\langle \Delta V^2 \rangle}}{V} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{T}{T - T_k}} \frac{1}{\sqrt{N}}, \text{ trong đó } N \text{ là số phân tử trong thể tích } V.$$

$$9.34. t \approx \frac{6\pi a \eta}{kT} h^2; \text{ khi } mgh \sim kT, \text{ trong đó } h \text{ là kích thước dài của bình, } m \text{ là khối lượng hạt thủy ngân, } a \text{ là bán kính của nó, } \eta \text{ là hệ số nhớt của nước.}$$

$$9.35. \frac{\sqrt{\langle \Delta P^2 \rangle}}{\langle P \rangle} = \sqrt{2} \text{ đối với một phân tử; } \frac{\sqrt{\langle \Delta P^2 \rangle}}{\langle P \rangle} = \sqrt{\frac{2}{N_A}} \approx 2 \cdot 10^{-12} \text{ đối với một mol.}$$

$$9.36. \frac{\sqrt{\langle \Delta \rho^2 \rangle}}{\rho} = \sqrt{\frac{kT\gamma_T}{V}}.$$

$$9.37*. \langle \Delta \varepsilon^2 \rangle = \frac{3k^2 T^2}{2}.$$

Lời giải. Theo biểu thức đối với số phân tử khí trung bình  $dN$  có động năng nằm giữa  $\varepsilon$  và  $\varepsilon + d\varepsilon$  (xem lời giải bài 7.7)

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\int_0^\infty \varepsilon T^{-3/2} \sqrt{\varepsilon} e^{-\alpha \varepsilon} d\varepsilon}{\int_0^\infty T^{-3/2} \sqrt{\varepsilon} e^{-\alpha \varepsilon} d\varepsilon},$$

trong đó  $\alpha = \frac{1}{kT}$ . Ký hiệu mẫu số là  $Z$  và lấy đạo hàm của nó theo tham số  $\alpha$  ta được

$$\langle \varepsilon \rangle = -\frac{1}{Z} \frac{dZ}{d\alpha}, \quad \langle \varepsilon^2 \rangle = \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{d\alpha^2}.$$

Tính tích phân  $Z$ , theo các công thức trên ta tìm được

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3kT}{2}; \quad \langle \varepsilon^2 \rangle = \frac{15k^2 T^2}{4};$$



$$\langle \Delta \varepsilon^2 \rangle = \langle \varepsilon^2 \rangle - \langle \varepsilon \rangle^2 = \frac{3k^2 T^2}{2}.$$

9.38\*. *Lời giải.* Xét nhiệt độ  $T$  của hệ con như một hàm của  $U$  và  $V$ , ta được

$$(\Delta T)_V = \left( \frac{\partial T}{\partial U} \right)_V \Delta U = \frac{\Delta U}{C_V},$$

suy ra

$$\langle (\Delta T^2)_V \rangle = \frac{\langle (\Delta U^2)_V \rangle}{C_V^2} = \frac{kT^2}{C_V}.$$

Tiến hành tương tự đối với các trường hợp còn lại, ta thu được

$$\langle (\Delta S^2)_V \rangle = \frac{\langle (\Delta U^2)_V \rangle}{T^2} = kC_V,$$

$$\langle (\Delta S^2)_P \rangle = \frac{\langle (\Delta U^2)_P \rangle}{T^2} = kC_P,$$

$$\langle (\Delta P^2)_T \rangle = \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T^2 \langle (\Delta V^2)_T \rangle = -kT \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T,$$

$$\langle (\Delta P^2)_S \rangle = \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_S^2 \langle (\Delta V^2)_S \rangle = -kT \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_S.$$

9.39.  $S = 2R \ln 2 \approx 11,5 \text{ J/(mol.K)}.$

## §10. CÁC HIỆN TƯỢNG VẬN CHUYỂN. SỰ DẪN NHIỆT. CHUYỂN ĐỘNG BROWN

10.1.  $z = 4 \sqrt{\frac{\pi}{mkT}} P d^2 \sim 4 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}.$

10.2.  $v = \frac{\pi d^2 \bar{v} n^2}{\sqrt{2}} = 2 \sqrt{\frac{\pi}{m}} \frac{P^2 d^2}{(kT)^{3/2}} \sim 6 \cdot 10^{28} \text{ s}^{-1} \text{ cm}^{-3}.$

10.3.  $z \propto T^{-1/2}; \lambda \propto T.$

10.4.  $z \propto P; \lambda \propto P^{-1}.$

10.5.  $z \propto P^{(\gamma+1)/(2\gamma)}$ ;  $\lambda \propto P^{-1/\gamma}$ , trong đó  $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ .

10.6.  $C = C_V + \frac{R}{4}$  (quá trình polytropic).

10.7.  $\frac{z_2}{z_1} = \frac{1}{8}$ ;  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 2$ .

10.8.  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \approx 0,75$ .

10.9.  $l \approx 0,3 \text{ m}$ .

10.10.  $P < 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ mmHg}$ .

10.11.  $m = \frac{\pi S \chi}{ql} (t_1 - t_2) = 54 \text{ g}$ , trong đó  $q = 80 \text{ cal/g}$  là nhiệt nóng chảy của đá.

10.12.  $t_R = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\ln(R_2 / R_1)} \ln(R / R_1)$ .

10.13.  $t_R = \frac{t_2 - t_1}{R_1 - R_2} \frac{R_1 R_2}{R} + \frac{t_1 R_1 - t_2 R_2}{R_1 - R_2}$ .

10.14\*.  $T = T_0 + \frac{q}{6\chi} (R^2 - r^2)$ ;  $T_T = 790 \text{ K}$ .

Lời giải. Phương trình dẫn nhiệt khi có các nguồn nhiệt với mật độ công suất  $q$  đối với các bài toán đối xứng cầu có dạng

$$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \chi r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + q.$$

Trong trường hợp chuẩn tĩnh  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ , và sau khi lấy tích phân phương trình trên ( $q = \text{const}$ ) theo bán kính ta được

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{q}{3\chi} r + \frac{C}{r^2}.$$

Hằng số tích phân  $C$  phải bằng không, vì trong trường hợp ngược lại tại tâm cầu ta sẽ nhận được giá trị vô hạn của đạo hàm  $\frac{dT}{dr}$ . Lấy tích phân lần thứ hai có tính đến điều kiện biên  $T = T_0$  khi  $r = R$ , ta tìm được

$$T = T_0 + \frac{q}{6\chi} (R^2 - r^2).$$

Nhiệt độ tại tâm quả cầu

$$T_T = T_0 + \frac{qR^2}{6\chi} = 790 \text{ K}.$$

**10.15.**  $T = T_0 + \frac{I^2 \rho}{4\pi^2 R^4 \chi} (R^2 - r^2)$ , trong đó  $I$  là cường độ dòng điện,  $\rho$  là điện trở suất của dây dẫn,  $R$  là bán kính dây dẫn,  $r$  là khoảng cách đến trục dây dẫn. Tất cả các đại lượng được biểu diễn trong hệ đơn vị CGS.

$$\textbf{10.16. } W = \frac{8\pi a r_0}{7} T^{7/2} \approx 3,6 \cdot 10^{12} \text{ kW}.$$

$$\textbf{10.17. } E = \frac{AW}{4\pi\chi} = 5,3 \mu\text{V}.$$

$$\textbf{10.18. } T = \left[ T_0^2 + \frac{U_0^2}{cd^2} (a^2 - x^2) \right]^{1/2}.$$

$$\textbf{10.20. } t = \frac{\rho_d c \Delta}{\chi} \left( x - a \ln \frac{a-x}{a} \right); \quad a = \frac{T_0 - T_d}{2\rho_{ice} q} c \rho_d \Delta.$$

$$\textbf{10.21. } l = L \frac{\sqrt{T_1 T_2} - T_1}{T_2 - T_1}.$$

$$\textbf{10.22. } \tau = \frac{Mcl}{2S\chi} \ln \frac{t_{10} - t_{20}}{t_1 - t_2} \approx 3\text{h}20 \text{ phút, trong đó } c \text{ là nhiệt dung riêng của nước.}$$

$$\textbf{10.23. } \tau = \frac{Mch}{2S\chi} \ln \frac{t_0 - t_1}{t_0 - t_2} \approx 33 \text{ phút } 20 \text{ giây, trong đó } c \text{ là nhiệt dung riêng của nước.}$$

$$\textbf{10.24. } \tau = \frac{q\rho\alpha^2}{6\chi(t_1 - t_2)} \approx 10 \text{ s, trong đó } \rho \text{ là khối lượng riêng của nước đá.}$$

$$\textbf{10.25. } T_1 = \frac{C_1 T_{10} + C_2 T_{20}}{C_1 + C_2} + \frac{C_2}{C_1 + C_2} (T_{10} - T_{20}) e^{-t/\tau};$$

$$T_2 = \frac{C_1 T_{10} + C_2 T_{20}}{C_1 + C_2} - \frac{C_1}{C_1 + C_2} (T_{10} - T_{20}) e^{-t/\tau};$$

$$T_1 - T_2 = (T_{10} - T_{20}) e^{-t/\tau}; \quad t_{1/2} = \tau \ln 2,$$

$$\text{trong đó } \frac{1}{\tau} = \frac{\chi S}{l} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right).$$

**10.26\*.**  $x = 11,3 \text{ cm}$ .

*Lời giải.* Ta ký hiệu  $x$  là chiều dày lớp băng được tạo thành tại thời điểm  $t$ . Nếu quá trình đóng băng diễn ra không quá nhanh, mà giống như trên thực tế trong điều kiện tự nhiên, thì trong lớp đá sẽ hình thành độ giảm tuyến tính nhiệt độ từ  $T_{nc}$  đến  $T$ . Trong trường hợp này, nhiệt lượng thoát ra ngoài từ

một đơn vị bề mặt lớp băng trong thời gian  $dt$  sẽ là  $\chi \frac{T_{nc} - T}{x} dt$ . Nhưng

đại lượng này cũng có thể biểu diễn dưới dạng  $q\rho dx$ , trong đó  $dx$  là chiều dày lớp băng hình thành trong thời gian  $dt$ ,  $\rho$  là khối lượng riêng của nước đá,  $q$  là tỷ nhiệt tạo thành nước đá. Điều đó dẫn đến phương trình

$$\chi \frac{T_{nc} - T}{x} dt = q\rho dx.$$

Lấy tích phân phương trình trên, ta được

$$\chi(T_{nc} - T)x = \frac{1}{2} q\rho x^2 + A.$$

Chọn thời điểm ban đầu là khi bắt đầu tạo thành lớp băng trên bề mặt nước. Khi đó  $x = 0$  tại  $t = 0$ , và do đó  $A = 0$ . Kết quả là ta nhận được

$$x = \sqrt{\frac{2\chi(T_{nc} - T)t}{q\rho}} = 11,3 \text{ cm}.$$

**10.27\*.**  $\tau \approx 41 \text{ phút}$ .

*Lời giải.* Nếu nước đá tăng không quá nhanh thì sự phân bố tức thời nhiệt độ ở trong nước xung quanh cũng giống như trong trường hợp chuẩn tính với cùng các điều kiện biên. Theo kết quả bài 10.14, sự phân bố nhiệt độ trong trường hợp ta xét có dạng

$$T = T_\infty + \frac{R}{r} (T_0 - T_\infty),$$

trong đó  $R$  là giá trị tức thời của bán kính cục đá,  $T_0$  và  $T_\infty$  là nhiệt độ không đổi của nước trên bề mặt quả cầu và ở vô cùng (theo điều kiện bài ra

$T_{\infty} - T_0 = 10^{\circ}\text{C}$ ). Nhiệt lượng mà nước xung quanh truyền cho quả cầu trong thời gian  $dt$  bằng

$$4\pi r^2 \chi \frac{dT}{dr} dt = 4\pi \chi R (T_{\infty} - T_0) dt.$$

Nhiệt lượng này làm tan nước đá, vì thế nó có thể biểu diễn dưới dạng

$$-q dm = -4\pi \chi R^2 \rho_{nd} q dR.$$

So sánh hai biểu thức trên, ta thu được

$$\chi (T_{\infty} - T_0) dt = -\rho_{nd} q R dR.$$

Lấy tích phân biểu thức này, ta tìm được thời gian tan đá

$$\tau = \frac{\rho_{nd} q R_0^2}{2\chi (T_{\infty} - T_0)} = 2480 \text{ s} \approx 41 \text{ phút.}$$

$$10.28. L = \frac{2q\lambda \ln(R_2 / R_1)}{\pi\alpha(T_2^4 - T_1^4)}.$$

$$10.29. L \approx \sqrt{\frac{\chi\tau}{c}} \sim 3 \text{ m.}$$

$$10.30. T(x) = \left[ \frac{x}{L} (T_2^{3/2} - T_1^{3/2}) + T_1^{3/2} \right]^{2/3}.$$

$$10.31. \Delta T = \left( \frac{3q\sqrt{T_0}}{4\pi\chi_0} \ln \frac{R}{r} + T_0^{3/2} \right)^{2/3} - T_0.$$

$$10.32. q = \frac{8\pi}{3} \chi_0 T_0 R.$$

$$10.33. t = 158^{\circ}\text{C}.$$

$$10.34. d = \left( \frac{c_V m v \sqrt{2} (t_1 - t_2)}{0,72 i^2 R \ln(r_2 / r_1)} \right)^{1/2} = 2,3 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$$

$$10.35. P = \frac{7}{3} P_0.$$

$$10.36. \frac{V}{V_0} = \frac{13}{3}.$$

10.37.  $P \gg \frac{1}{4\pi} \frac{v}{r^2} \sqrt{\frac{mkT}{2\gamma}} \approx 10^{-5} \text{ atm}$ , trong đó  $m$  là khối lượng phân tử

không khí,  $r$  là bán kính phân tử;  $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ .

10.38.  $l \sim \frac{v_{at}^5 \rho}{v^2 \chi T} \sim 50 \text{ km}$ , trong đó  $v_{at}$  là vận tốc âm thanh,  $\rho$  là khối lượng

riêng,  $\chi$  là hệ số dẫn nhiệt của không khí,  $T$  là nhiệt độ không khí.

10.39.  $\lambda \approx \frac{3D}{\bar{v}} = 3D \sqrt{\frac{\pi m}{8kT}} \approx 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$ .

10.40.  $n = 3$ .

10.41.  $\Delta S = 8R \ln 2 \approx 46 \text{ J/K}$ .

10.42.  $\frac{D_2}{D_1} = 4$ .

10.43.  $C = C_V - \frac{R}{2}$ .

10.44. Giảm  $\sqrt{1,5} \approx 1,22$  lần.

10.45.  $\tau \approx \sqrt{\frac{\mu}{RT}} \left( R_0^2 n \sigma + \frac{l^2}{r} \right)$ .

10.46.  $\langle r^2 \rangle = 2\pi\lambda^2$ .

10.47.  $\sqrt{\langle r^2 \rangle} \approx 3,3 \text{ cm}$ ; 1) kết quả giảm 2 lần; 2) kết quả tăng  $\sqrt{8}$  lần; 3) kết quả tăng  $\sqrt{2}$  lần.

10.48.  $t \approx 3$  phút.

10.49.  $t \approx 80 \text{ s}$ .

10.50. Khoảng  $10^{12}$  lần.

10.51.  $\Delta S \approx 110 \text{ J/K}$ ;  $A = 33 \text{ kJ}$ .

10.52.  $v = \sqrt{\frac{\lambda e E}{2m}} \approx 15 \text{ m/s}$ , trong đó  $m$  là khối lượng ion Ar,  $e$  là điện tích electron.

10.53.  $E \sim \frac{\pi \sigma}{e} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ V/cm}$ ,  $e$  – điện tích electron.

$$10.54. T = \frac{\langle \varepsilon \rangle}{k} = \frac{eE}{2k\sigma n} \sqrt{\frac{M}{m}} \sim 4500 \text{ K.}$$

$$10.55. \langle r^2 \rangle = \frac{4}{3} \frac{kT\tau}{P\sigma} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \approx 4 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2; \quad \sqrt{\langle r^2 \rangle} \approx 2 \text{ mm,} \quad \text{trong đó}$$

$\mu = 12,4 \text{ g/mol}$  là khối lượng mol quy chuẩn của Ar và  $\text{H}_2\text{O}$ .

$$10.56. l \approx \sqrt{2\lambda\bar{v}t} \approx 3 \text{ cm,} \quad \text{trong đó } \gamma \text{ là chiều dài quãng đường tự do, } \bar{v} - \text{ vận}$$

tốc trung bình của các phân tử không khí.

$$10.57. x = \sqrt{\frac{DT}{\ln 2}} \ln 10^5 = 20,4 \text{ cm.}$$

$$10.58. \tau \approx \frac{R^2}{6D} \approx \frac{R^2}{2\lambda v} \approx \frac{R^2}{2\lambda c} \approx 1,4 \cdot 10^{14} \text{ s} \approx 4,4 \cdot 10^6 \text{ năm,} \quad \text{trong đó } v - \text{ vận}$$

tốc của hạt vũ trụ, gần bằng vận tốc ánh sáng trong chân không.

$$10.59. N \geq \frac{2}{\lg(\mu_2 / \mu_1)}.$$

$$10.60. \lambda = \frac{3\eta}{\rho v} = 0,89 \cdot 10^{-5} \text{ cm.}$$

$$10.61. 1) \bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi A}} = 3,8 \cdot 10^{10} \text{ cm/s;}$$

$$2) \lambda = \frac{3\eta}{nm\bar{v}} = 0,92 \cdot 10^{-5} \text{ cm;}$$

$$3) v = \frac{n\bar{v}}{2\lambda} = 5,6 \cdot 10^{28} \text{ s}^{-1} \text{ cm}^{-3};$$

$$4) \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}n\lambda} = 0,283 \cdot 10^{-14} \text{ cm}^2;$$

$$5) r = \sqrt{\frac{\sigma}{\pi}} = 3 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$$

$$10.62. \frac{\chi_N}{\chi_H} \approx 0,13.$$

$$10.63*. Q = \frac{\pi\mu r^4}{8\eta RT} \frac{P_1^2 - P_2^2}{l}.$$

*Lời giải.* Khi chảy trong một đoạn ống vô cùng nhỏ  $dx$  có thể coi chất lỏng là không chịu nén, và áp dụng công thức Poazơ đối với tiết diện này

$$Q = -\frac{\pi \rho r^4}{8\eta} \frac{dP}{dx}.$$

Thế khối lượng riêng  $\rho$  từ công thức Clapayron ta được

$$Q = -\frac{\pi \mu r^4}{8\eta RT} P \frac{dP}{dx}.$$

Do trong dòng chảy tĩnh đại lượng  $Q$  không đổi dọc theo cả ống, còn  $\eta$  chỉ phụ thuộc vào nhiệt độ và không đổi trong quá trình chảy đẳng nhiệt, nên sau khi lấy tích phân ta nhận được đáp số.

$$10.64. \eta = \frac{\pi P_2 D^4 \tau}{128 l V} \left[ \ln \frac{(P_1 - P_2)(P_2 + P_3)}{(P_3 - P_2)(P_1 + P_2)} \right]^{-1} \approx 14 \cdot 10^{-10} \text{ N.s/cm}^2;$$

$$d = \sqrt{\frac{m\bar{v}}{3\sqrt{2\pi\eta}}} = 3,8 \cdot 10^{-8} \text{ cm}.$$

$$10.65. t = \frac{16\eta LV}{\pi r^4} \left( \frac{1}{P_2} - \frac{1}{P_1} \right) \approx 4,3 \text{ s}.$$

$$10.66. t = \frac{3}{4} \frac{LV}{r^3} \sqrt{\frac{\mu}{2\pi RT}} \ln \frac{P_1}{P_2} \approx 88 \text{ s}.$$

$$10.67. \dot{V}_2 = \frac{\dot{V}_1 A}{\dot{V}_1 + A} \approx 330 \text{ l/s, trong đó } A = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi RT}{\mu}} \frac{r^3}{L}, \mu \text{ là khối lượng}$$

mol của không khí.

10.68. Tăng 8 lần.

$$10.69. m = \frac{\pi \eta \mu d^4 P_1^2}{128(3\gamma - 1) R \eta l T_1} \left[ 1 - \left( \frac{P_0}{P_1} \right)^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \right], \text{ trong đó } \gamma = \frac{C_P}{C_V}, \mu \text{ là khối}$$

lượng mol của khí.

$$10.70. N = \frac{\pi(\rho g h)^2}{8\eta l} R^4 \approx 10^{-3} \text{ J/s. trong đó } \eta \text{ là hệ số nhớt của nước.}$$

$$10.71*. N = \frac{2}{3} \frac{n}{l} \pi \bar{v} r^3.$$



*Lời giải.* Hướng trục  $X$  dọc theo ống. Khi đó  $N = -SD \frac{dn}{dx}$ , trong đó  $S$  – tiết diện ngang của ống. Vì dòng  $N$  phân tử như nhau trong suốt chiều dài của ống, nên  $\left| \frac{dn}{dx} \right| = \frac{n}{l}$ . Thay đại lượng  $\lambda$  bằng  $2r$  trong công thức  $D = \frac{1}{3} \bar{v} \lambda$ , ta thu được  $D = \frac{2}{3} \bar{v} r$ , từ đây suy ra đáp số.

**10.72.** Khí sẽ chảy vào bình có nhiệt độ lớn hơn.

$$m = \frac{\sqrt{T_1 T_2}}{T_1 + T_2} \frac{\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}} M = \frac{2}{15} M.$$

**10.73.**  $n = n_0 e^{-t/\tau}$ ;  $\tau = \frac{3Vl}{2\pi a^3 \bar{v}} = 5 \cdot 10^3 \text{ s} = 83,4 \text{ phút.}$

**10.74.**  $n_1 = \frac{n_{10}\tau_1 + n_{20}\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} + \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} (n_{10} - n_{20}) e^{-t/\tau}$ ;

$$n_2 = \frac{n_{20}\tau_2 + n_{10}\tau_1}{\tau_1 + \tau_2} + \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_2} (n_{20} - n_{10}) e^{-t/\tau}$$

trong đó  $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}$ ,  $\tau_1 = \frac{3V_1 l}{2\pi a^3 \bar{v}}$ ,  $\tau_2 = \frac{3V_2 l}{2\pi a^3 \bar{v}}$ .

**10.75\*.**  $u \approx 1,4 \text{ m/s.}$

*Lời giải.* Khi đánh giá hiện tượng trong bài có thể giả thiết rằng một phân sáu số phân tử chuyển động sang phải, còn một phân sáu sang trái. Các phân tử chuyển động song song với bề mặt đĩa có thể không xét đến. Coi vận tốc các phân tử  $v$  là như nhau. Giả sử đĩa chuyển động đều với vận tốc  $u$  và bề mặt có nhiệt độ thấp hơn về phía trước. Số va chạm vào một  $\text{cm}^2$  bề mặt này trong một giây  $\frac{n(v+u)}{6}$ . Giả sử trong hệ quy chiếu gắn với đĩa, phân tử bật ra với vận tốc  $v_2$  từ bề mặt có nhiệt độ  $T_2$ . Trong hệ quy chiếu cố định vận tốc của phân tử bật ra sẽ là  $v_2 + u$ , còn sự thay đổi vận tốc  $v_2 + u + v$ . Vì vậy áp suất khí lên bề mặt có nhiệt độ thấp hơn

$$P_2 = \frac{nm}{6} (v+u)(v_2 + u + v).$$

Tương tự, áp suất khí lên bề mặt nóng hơn

$$P_1 = \frac{nm}{6} (v-u)(v_1 + v - u).$$

Khi chuyển động ổn định thì  $P_2 = P_1$ . Khi đó ta dễ dàng nhận được

$$u = \frac{v_1 - v_2}{4v + v_1 + v_2} v \approx \frac{v_1 - v_2}{6} \approx \frac{v}{12} \frac{v_1^2 - v_2^2}{v^2} \approx \frac{1}{12} \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \frac{T_1 - T_2}{T} \approx 1,4 \text{ m/s}.$$

$$10.76. \varphi = \frac{\pi \eta \omega}{2 f h} = 81^\circ.$$

10.77\*. *Lời giải.* Xét trên đĩa đang quay một vòng có bán kính trong  $r$  và bán kính ngoài  $r + dr$ . Từ diện tích vòng này mỗi giây có  $nv \cdot 2\pi r \frac{dr}{4}$  phân

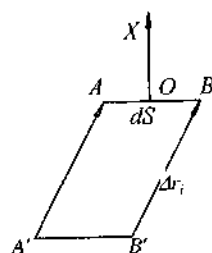
tử bật ra. Mỗi phân tử lấy đi một mômen động lượng  $mr^2\omega$  và truyền cho đĩa đứng yên. Tổng mômen mà đĩa đứng yên nhận được trong một giây có thể dễ dàng tính được bằng tích phân. So sánh mômen này với mômen lực  $f\varphi'$  từ phía sợi chỉ xoắn, đối với góc xoắn ta nhận được

$$\varphi' = \frac{3\pi P}{8vf} \omega R^4 = \frac{3}{4} \frac{Ph}{\eta v} \varphi \approx 1^\circ.$$

trong đó  $\varphi$  là độ lớn góc xoắn tương ứng với trường hợp khi khoảng cách giữa hai đĩa rất nhỏ so với chiều dài quãng đường tự do của phân tử (xem bài trước).

$$10.78. N \approx 3 \cdot 10^{-7} \text{ J/(cm}^2 \cdot \text{s)}.$$

10.79\*. *Lời giải.* Giả sử trong một chất lỏng khi không có ngoại lực thì các hạt Brown phân bố đều với mật độ  $n(x)$ , mật độ này chỉ biến đổi theo trục  $X$ . Ta tính dòng khuếch tán  $G$  của các hạt này qua một tiết diện bất kỳ vuông góc với trục  $X$ . Ta lấy trên tiết diện này một diện tích vô cùng nhỏ  $dS$  (H. 409). Tách một nhóm hạt Brown dịch chuyển được cùng một vector  $\Delta \vec{r}_i$  trong thời gian  $\tau$ . Giả sử không những mật độ toàn phần của các hạt Brown rất lớn mà mật độ của chúng trong mỗi nhóm  $n_i(x)$



Hình 409

cũng lớn. Số hạt  $N_i$  của nhóm thứ  $i$  đi qua diện tích  $dS$  trong thời gian  $\tau$  sẽ bằng số hạt trong khối trụ chéo  $ABB'A'$  với đáy  $AB$  và đường sinh  $\Delta r_i$ , tức là

$$dN_i = \int n_i(x) dV.$$

Ta có thể chọn các kích thước dài của diện tích  $dS$  rất nhỏ so với  $\Delta r_i$ . Khi đó yếu tố thể tích  $dV$  có thể biểu diễn dưới dạng  $dV = dS dx$ , vì thế,

$$dN_i = dS \int n_i(x) dx = dS \int_{-\Delta x_i}^0 n_i(x_0 + \xi) d\xi,$$

trong đó  $x_0$  là tọa độ tâm  $O$  của  $dS$ . Chọn  $\tau$  và  $\Delta x_i$  đủ nhỏ, khai triển hàm  $n_i(x_0 + \xi)$  theo lũy thừa của  $\xi$  và chỉ giữ lại đến số hạng bậc nhất, ta được

$$dN_i = n_i(0)dS \int_{-\Delta x_i}^0 d\xi + \left( \frac{dn_i}{dx} \right)_{x=x_0} dS \int_{-\Delta x_i}^0 \xi d\xi,$$

sau khi lấy tích phân

$$dN_i = dS \left[ n_i \Delta x_i - \frac{1}{2} \frac{dn_i}{dx} (\Delta x_i)^2 \right].$$

Ta bỏ qua  $x_0$  với giả thiết là mật độ  $n_i$  và đạo hàm của nó  $\frac{dn_i}{dx}$  được lấy tại tâm  $O$  của  $dS$ .

Số dư  $dN$  của các hạt Brown đi qua diện tích  $dS$  theo chiều dương của trục  $X$  so với số hạt chuyển động theo chiều ngược lại có thể tính được bằng cách lấy tổng các biểu thức trên theo tất cả các nhóm hạt

$$dN = dS \int_i n_i \Delta x_i - \frac{dS}{2} \sum_i \frac{dn_i}{dx} (\Delta x_i)^2.$$

Giá trị trung bình của tổng thứ nhất bằng không. Thực vậy, mật độ  $n_i$  ứng với tâm của  $dS$ , còn sự dịch chuyển của các hạt Brown theo chiều dương và theo chiều âm có xác suất bằng nhau. Để tính tổng thứ hai, ta thấy rằng theo định nghĩa về trung bình

$$\overline{n \Delta x^2} = \sum n_i (\Delta x_i)^2.$$

Các đại lượng  $\Delta x_i$  độc lập không phụ thuộc vào  $x$ . Trung bình bình phương khoảng dịch chuyển  $(\overline{\Delta x})^2 \equiv \overline{\Delta x^2}$  không thể phụ thuộc vào  $x$  do chất lỏng là đồng nhất và không có ngoại lực. Do đó đạo hàm biểu thức trên theo  $x$  ta được

$$\overline{\Delta x^2} \frac{dn}{dx} = \sum \frac{dn_i}{dx} (\Delta x_i)^2.$$

Kết quả ta thu được đối với giá trị trung bình  $d\bar{N}$

$$d\bar{N} = -dS \frac{\overline{\Delta x^2}}{2} \frac{dn}{dx}.$$

Để tìm dòng khuếch tán trung bình của các hạt Brown  $G$ , ta chia biểu thức trên cho  $dS$  và  $\tau$

$$G = -\frac{\overline{\Delta x^2}}{2\tau} \frac{dn}{dx}.$$

Từ đây ta thấy rằng, quá trình làm đều mật độ các hạt Brown có thể xem như quá trình khuếch tán với hệ số khuếch tán

$$D = \frac{1}{2} \frac{\overline{\Delta x^2}}{\tau}.$$

Ở đây  $\overline{(\Delta x)^2}$  được hiểu là “trung bình theo tổng các hạt”. Tuy nhiên do các hạt giống nhau và không có sự tương tác giữa chúng nên khái niệm trên có thể hiểu là “trung bình theo thời gian” đối với một hạt.

**10.80\*. Lời giải.** Mật độ dòng tổng hợp của các hạt theo chiều dương của trục  $X$ :  $nBf - D \frac{\partial n}{\partial x}$ , trong đó  $f$  là tổng hợp của trọng lực và lực đẩy của áp suất thủy tĩnh tác dụng lên hạt Brown (trục  $X$  hướng thẳng đứng xuống dưới). Cho biểu thức trên bằng không và chú ý rằng  $n = n_0 \exp \frac{fx}{kT}$ , cuối cùng ta thu được

$$D = kTB \quad (\text{công thức Anhxtanh}).$$

$$\mathbf{10.81.} \quad \overline{\Delta x^2} = 2kTB\tau = \frac{kT}{3\pi\eta a} \tau.$$

$$\mathbf{10.82.} \quad \sqrt{\Delta^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{\frac{2kT\tau}{3\pi\eta a}} \approx 10 \mu\text{m}.$$

$$\mathbf{10.83.} \quad N = \frac{RT\tau}{3\pi a \eta \overline{\Delta x^2}} \approx 6,02 \cdot 10^{23}.$$

$$\mathbf{10.84.} \quad \langle |\Delta x| \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi} \langle \Delta x^2 \rangle} = 2 \sqrt{\frac{kTB\tau}{\pi}}.$$

$$\mathbf{10.85.} \quad \sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{\langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle} = 2 \sqrt{\frac{hkT}{mg}} \approx 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ cm.} \quad \text{Bán kính giọt dầu}$$

$$a = \left( \frac{3m}{4\pi\rho} \right)^{1/3} \approx 1,36 \cdot 10^{-3} \text{ cm,} \quad \text{tức là rất lớn so với quãng đường tự do của}$$

các phân tử không khí ( $\sim 10^{-5}$ ). Số Raynon  $\text{Re} = \frac{mg\rho}{6\pi\eta^2} \approx 0,15 \ll 1$ . Điều

kiện áp dụng công thức Stốc được thỏa mãn.

$$10.86. Ne = \frac{2RT(v_1 + v_2)}{E(\Delta x)^2} \tau.$$

$$10.87. N = 5,88 \cdot 10^{23}.$$

$$10.88. R_{\min} = \left( \frac{729}{16\pi} \frac{kT\eta^2}{\rho^3 g^2} \right)^{1/7} \approx 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ cm (khi } R < R_{\min} \text{ các hạt sương}$$

mù tham gia vào chuyển động Brown, khi  $R > R_{\min}$  các hạt này rơi vào môi trường nhớt tương ứng với công thức Stốc).

$$10.89. r = \left( \frac{3kT}{\pi R \rho g} \right)^{1/3} = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ cm.}$$

$$10.90. \sqrt{\langle L^2 \rangle} = 1,4 \cdot 10^{-19} \text{ g.cm}^2/\text{s}.$$

$$10.91. \tau = \frac{l^2}{4D} \approx 15 \text{ s, trong đó } D \text{ là hệ số khuếch tán.}$$

10.92. Sử dụng công thức Stốc đối với lực cản trong chuyển động nhớt ta tìm được  $r \sim 10^{-3} \text{ cm}$ . Các hạt bị lắng xuống từ chiều cao trung bình được tính theo công thức khí áp kế  $h \sim \frac{kT}{mg} \leq r$  ( $m$  là khối lượng hiệu dụng của hạt).

Từ đây suy ra  $r \geq 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$ . Vậy các hạt này kết tủa thành lớp nhôm dưới đây.

$$10.93. t = 0,03 \rho \lambda \frac{d^2 \sqrt{T_0}}{16 \chi_0} (T_2^{3/2} - T_1^{3/2})^{-1} \ln \frac{D}{d} \approx 500 \text{ s.}$$

$$10.94. \text{Thời gian tạo thành lớp chất béo } \tau_{th} \approx \frac{l}{FB} \approx 1 \text{ ngày đêm (theo điều}$$

kiện). Thời gian khôi phục lại sự phân bố các hạt  $\tau_u \approx \frac{l^2}{2kTB}$ . Tính toán cho

kết quả  $\tau_u \approx 10^{11} - 10^{12} \text{ s} \sim 1000 \text{ năm}$ .

$$10.95. Re \sim 10^5.$$

10.96\*. *Lời giải.* Dòng hơi tĩnh qua một mặt cầu bất kỳ bán kính  $r$  đồng tâm với giọt chất lỏng hình cầu là

$$j = -D \cdot 4\pi r^2 \frac{d\rho}{dr} = \text{const.}$$

Từ đây suy ra

$$\rho = \frac{j}{4\pi Dr} + \rho_{\infty}.$$

Đại lượng  $j$  có thể tìm từ điều kiện là trên bề mặt giọt chất lỏng ( $r = a$ ) hơi phải bão hoà, tức là

$$j = 4\pi Da(\rho_{bh} - \rho_{\infty})$$

và, do đó

$$\rho = \frac{a}{r}(\rho_{bh} - \rho_{\infty}) + \rho_{\infty}.$$

$$10.97. \tau_b = \frac{a^2}{2D} \frac{\rho_{cl}}{(1-\phi)\rho_{bh}} = \frac{a^2}{2D} \frac{RT}{(1-\phi)\mu\rho_{bh}} \rho_{cl}.$$

$$1) \tau_b \approx 37 \text{ phút}; 2) \tau_b \approx 0,13 \text{ s}.$$

$$10.98. P_0 = \frac{3H\Delta m N_A}{\lambda \bar{v} St \mu} kT = 20,5 \text{ mmHg}.$$

$$10.99. t = \frac{9Rt\rho l^2}{4\lambda \bar{v} P_{bh} \mu} \approx 220 \text{ ngày, trong đó } \mu \text{ và } \rho \text{ là khối lượng phân tử và khối lượng riêng của nước.}$$

$$10.100. \Delta n \approx 0,5 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}.$$

$$10.101. \frac{N_1 - N_2}{N_1} \approx 4 \cdot 10^{-5}; \tau \approx 1 \text{ tháng}.$$

$$10.102. J = \frac{\bar{v} K P_{bh}}{4kT}, \text{ trong đó } \bar{v} - \text{ vận tốc trung bình của chuyển động nhiệt.}$$

$$10.103. t = \frac{\rho_n h_0^2}{2D\rho_{bh}} \approx 257 \text{ ngày đêm, trong đó } \rho_n - \text{ khối lượng riêng của nước.}$$

$$10.104. \tau = \frac{3\pi}{8} \frac{\rho_n L \sigma}{mg} \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \approx 100 \text{ năm (sự di chuyển cồn xuống dưới chỉ diễn ra do khuếch tán các phân tử qua bọt khí vì } P_0 \gg \rho g L).$$

$$10.105. \Delta S = 40,6 \text{ J/K}.$$

$$10.106. \Delta S = -15 R \ln 2 = -86,4 \text{ J/K}.$$

$$10.107. \text{ Vận tốc tăng thêm } 15\%.$$

$$10.108. \langle \Delta R^2 \rangle = \frac{3kTH}{\pi^3 (\rho - \rho_{cl}) g}.$$

$$10.109. \frac{a_N}{a_0} = \frac{(n_{nhẹ} / n_{nặng})_N}{(n_{nhẹ} / n_{nặng})_0} = \left( \sqrt{\frac{\mu_{nặng}}{\mu_{nhẹ}}} \right)^N \approx 10^3, \text{ trong đó } \mu_{nặng} \text{ và}$$

$\mu_{nhẹ}$  tương ứng là khối lượng phân tử tương đối của đồng vị nặng và đồng vị nhẹ.

$$10.110. \Delta S = \left( C_V + \frac{R}{2} \right) \ln \frac{T_1}{T_2} \approx 4,2 \text{ J/(mol.K)}.$$

$$10.111. \bar{E}_d = \frac{3}{2} k n \sqrt{T_1 T_2}.$$

$$10.112. q = n \sqrt{\frac{8k^3}{\pi m}} \sqrt{T_1 T_2} (\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}) \left[ \frac{W}{m^2} \right].$$

$$10.113. J = \frac{1}{32} SP \bar{v}.$$

$$10.114. \frac{t_{//}}{t_{\perp}} = \frac{4\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}.$$

$$10.115. \frac{dT}{dt} \approx 4 \text{ K/s}.$$

$$10.116. t \approx \frac{3L^2 \rho R}{\chi \mu} \approx 100 \text{ s}.$$

$$10.117. \rho_l \sim \frac{\mu^{1/4} N_A^{1/2} \eta^{3/2}}{(RT)^{3/4}}.$$

$$10.118. D \sim \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{m}} r_0 \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{s}.$$

$$10.119. \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \frac{H^3}{Nr}.$$

## §11. CHUYỂN PHA

11.1\*.  $Q = 10770 \text{ cal/mol}$ .

*Lời giải.* Vì khi đun nóng thể tích của bình không đổi nên công không được thực hiện. Vì vậy nhiệt lượng cần tìm sẽ bằng độ tăng nội năng của hệ và, vì vậy, sẽ không phụ thuộc vào cách thức biến đổi hệ từ trạng thái đầu đến trạng thái cuối. Ta thực hiện quá trình biến đổi này theo hai giai đoạn

1) Đun nước nóng từ  $0^\circ\text{C}$  đến  $100^\circ\text{C}$  sao cho sự bay hơi không diễn ra. Để làm được điều đó cần cung cấp một nhiệt lượng  $Q_1 = 18.100 = 1800 \text{ cal/mol}$ .

2) Cho nước bay hơi ở nhiệt độ không đổi  $t = 100^\circ\text{C}$ . Để làm được điều đó cần cung cấp một nhiệt lượng  $Q_2 = U_h - U_n$ , trong đó  $U_h$  và  $U_n$  tương ứng là nội năng của một mol hơi và của một mol nước ở nhiệt độ  $100^\circ\text{C}$  và áp suất khí quyển. Để xác định  $U_h - U_n$ , ta sử dụng nguyên lý thứ nhất của nhiệt động lực học  $\Delta = U_h - U_n + A$ , trong đó  $A$  là nhiệt hoá hơi ứng với một mol ( $\Delta = 539.18 = 9710 \text{ cal/mol}$ ), còn  $A$  là công chống lại áp suất không đổi bên ngoài ( $A = PV_h = RT = 1,98.373 = 739 \text{ cal/mol}$ ). Như vậy

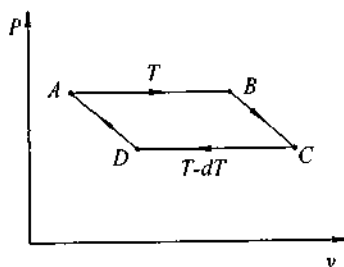
$$Q_2 = U_h - U_n = \Delta - A = 8970 \text{ cal/mol},$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = 1800 + 8970 = 10770 \text{ cal/mol}.$$

11.2.  $A = \frac{\mu\lambda(T_1 - T_2)}{T_2} = 13,85 \text{ kJ/mol}$ , trong đó  $\mu$  là khối lượng phân tử của nước.

11.3.  $t_0 = t_1 + \frac{Pl\lambda}{\chi} \sqrt{\frac{\mu}{2\pi RT_1}} = -5,5^\circ\text{C}$ , trong đó  $\mu$  là khối lượng phân tử của nước.

11.4\*. *Lời giải.* Giả sử điểm A trên đồ thị  $P, v$  (H.410) biểu diễn trạng thái của 1g chất lỏng ở nhiệt độ  $T$  và áp suất  $P$  bằng áp suất hơi bão hoà ở cùng nhiệt độ này. Ta sẽ cung cấp nhiệt cho hệ sao cho áp suất và nhiệt độ của hệ không đổi. Khi đó chất lỏng sẽ bay hơi và ở mọi thời điểm áp suất trên bề mặt chất lỏng là áp suất hơi bão hoà. Giả sử B biểu diễn trạng thái khi tất cả chất lỏng đã chuyển hoá thành hơi. Khi đó nhiệt lượng mà hệ nhận được trên đường đẳng nhiệt AB sẽ bằng nhiệt hoá hơi  $\lambda$ . Ta giảm đoạn nhiệt nhiệt độ của hơi một lượng  $dT$  (điểm C), và sau đó



Hình 410



theo đường đẳng nhiệt  $CD$  và đường đoạn nhiệt  $DA$  đưa hệ trở lại trạng thái ban đầu. Công mà hệ thực hiện bằng diện tích hình bình hành  $ABCD$ . Biểu diễn diện tích này qua  $v_h, v_l$  và  $dT$ , đồng thời áp dụng định lý Căcnô ta được

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\lambda}{T(v_h - v_l)} \quad (\text{công thức Clapayron - Clausius}).$$

$$11.5. \Delta T = \frac{T}{q} \Delta v \Delta P \approx 0,056 K.$$

$$11.6. q \approx T \frac{\Delta P}{\Delta T} \Delta V \approx 44 \text{ cal/g (thực nghiệm cho kết quả } 46,4 \text{ cal/g)}.$$

$$11.7. P \approx \left(1 + \frac{\lambda \Delta T}{vRT^2}\right) P_0 = 1,035 \text{ atm, trong đó } \lambda \text{ là nhiệt hoá hơi riêng,}$$

$$v = \frac{1}{18} \text{ là số mol trong 1g nước, } P_0 \text{ là áp suất khí quyển.}$$

$$11.8. T - T_0 \approx \frac{T_0}{1 - \frac{RT_0}{\lambda\mu} \ln 2} - T_0 \approx 26 K.$$

$$11.9. \frac{\Delta n}{n} = \frac{\Delta T}{T} \left( \frac{\lambda\mu}{RT} - 1 \right) = 0,55.$$

$$11.10. t = 109^\circ C.$$

$$11.11. \frac{\Delta V}{V} \approx -3,2\%.$$

$$11.12. v_h = v_l + \frac{\lambda}{T} \frac{dT}{dP} \approx 1700 \text{ cm}^3/\text{g}.$$

$$11.13. \frac{\Delta m}{m} \approx \frac{c(T_{10} - T_1)}{\lambda} \approx 14\%, \text{ trong đó } c \text{ là nhiệt dung riêng của nước, } T_1 \text{ và } T_{10} \text{ là nhiệt độ sôi tương ứng ở } 1 \text{ atm và } 10 \text{ atm.}$$

$$11.14. \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta T}{T} \left( 1 - \frac{\lambda}{RT} \right) \approx -3,2\%.$$

$$11.15. P_h = 1 \text{ atm; } m_{kh} = 42,3 \text{ g, } m_h = 26,3 \text{ g.}$$

$$11.16. \Delta m \approx \frac{\mu VP}{RT^2} \left( \frac{\lambda\mu}{RT} - 1 \right) \Delta T = 0,075 \text{ g, trong đó } V \approx 4 \text{ lít là thể tích hơi, } P \text{ là áp suất hơi.}$$

$$11.17. \frac{\Delta m}{m} = \frac{cghT_0}{\lambda^2} \approx 2,5 \cdot 10^{-4}.$$

$$11.18. \lambda_1 = \lambda_2 + (c_p^l - c_p^h)(T_2 - T_1) \approx 567 \text{ cal/g}.$$

$$11.19. \lambda_{323} = \lambda_{373} + \left( c_n - \frac{C_V + R}{\mu} \right) (T_2 - T_1) \approx 2370 \text{ J/g}.$$

$$11.20. \rho = \frac{\mu P_0}{RT} \exp \left[ \frac{\lambda \mu}{R} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right] \approx 7,9 \text{ g/cm}^3, \text{ trong đó } T_0 - \text{nhiệt độ sôi của nước ở áp suất } P_0.$$

$$11.21. \frac{\Delta h}{h} = -\frac{\Delta T}{T} \left( \frac{\lambda \mu}{RT} - 1 \right) \approx 2 \cdot 10^{-2}.$$

$$11.22. T = \left[ \frac{1}{T_0} - \frac{R}{\mu \lambda} \ln \left( 1 + \frac{2\sigma}{P_0 r} \right) \right]^{-1} = 404 \text{ K}, \text{ trong đó } T_0 - \text{nhiệt độ sôi của nước ở áp suất khí quyển } P_0.$$

$$11.23. \frac{h}{\Delta T} \approx 10 \frac{T_S P}{T^2} \approx 76 \text{ cm cột cồn/K}, \text{ trong đó } P \sim 1 \text{ atm} \approx 1460 \text{ cm cột cồn}.$$

$$11.24. P = AT^{-\mu_1/R} \exp \left( -\frac{\lambda_0 \mu}{RT} \right), \text{ trong đó } \mu \text{ là khối lượng phân tử}.$$

Giá trị của hằng số  $A$  có thể tìm được nếu biết nhiệt độ sôi của chất lỏng ở áp suất nào đó.

$$11.25. T = \frac{\lambda \mu_1 T_0 T_a}{\lambda \mu_1 T_a + \mu g H T_0}, \text{ trong đó } \mu \text{ là khối lượng mol không khí, } \mu_1 \text{ là khối lượng phân tử nước, } T_0 \text{ là nhiệt độ sôi của nước ở trên bề mặt Trái Đất}.$$

$$11.26. \Delta T = T_{100} \frac{B}{1+B} \approx 24 \text{ K}, \text{ với giả thiết } B = \frac{\mu_{kk}}{\mu_n} \frac{gH}{\lambda} \frac{T_{100}}{T_0} \approx 6,8 \cdot 10^{-2},$$

trong đó  $T_{100} \approx 373 \text{ K}$  là nhiệt độ sôi của nước ở trên bề mặt Trái Đất,  $T_0 \approx 273 \text{ K}$  là nhiệt độ không khí,  $\lambda = 2260 \text{ J/g}$  là nhiệt hoá hơi.

$$11.27. \Delta T = \frac{Tgh}{\lambda} \approx 0,023 \text{ K}.$$

$$11.28. F = \frac{\pi d^2}{4} P_0 \left\{ \exp \left[ \frac{\lambda \mu}{R} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right] - 1 \right\} = 16,7 \text{ N}.$$

11.29.  $\frac{\Delta m}{m} = \left( \frac{c_p T}{\lambda} - 1 \right) \frac{\Delta T}{T} \approx 0,17\%$ , trong đó  $c_p$  – nhiệt dung riêng của hơi nước khi áp suất không đổi,  $\lambda$  là nhiệt hoá hơi riêng.

11.30. Khi nén đoạn nhiệt hơi nước trở nên không bão hoà, khi giãn nở đoạn nhiệt – hơi quá bão hoà. (Tạo hơi quá bão hoà bằng cách giãn nở đoạn nhiệt trong buồng Wilson).

11.31.  $\frac{\Delta V_2}{V_2} = -3 \frac{\Delta T}{T_0}$ , trong đó  $\frac{\Delta T}{T_0} = -\frac{1-\varphi}{\lambda - \varphi R T_0} R T_0 = -0,0083$ , khi đó  $\frac{\Delta V_2}{V_2} \approx 2,5\%$ .

11.32.  $Q = \frac{\lambda^2 \pi d^4 \mu^2 P_h^2 \Delta T}{128 \eta l R^2 T^3} \approx 1,4 \text{ kJ/s}$ , trong đó  $P_h = 10^5 \text{ Pa}$ .

11.33\*.  $P_{-1^\circ\text{C}} = 4,20 \text{ mmHg}$ .

Lời giải. Nhiệt thăng hoa riêng  $q_{th} = q + \lambda = 676 \text{ cal/g}$ . Sau khi thay vào phương trình Clapayron – Clausius

$$\frac{dP}{dT} = \frac{q_{th}}{T(v_h - v_l)} \approx \frac{q_{th}}{T v_h}$$

và xác định thể tích riêng của hơi nước từ phương trình  $P v_h = \frac{1}{\mu} R T$ , ta dễ dàng tìm được rằng khi  $\Delta T = -1 \text{ K}$  thì  $\Delta P = -0,38 \text{ mmHg}$ , còn áp suất hơi bão hoà trên mặt băng khi  $t = -1^\circ\text{C}$ :  $P_{-1^\circ\text{C}} = 4,20 \text{ mmHg}$ .

11.34.  $\Delta T \approx \frac{PT}{q} (v_n - v_{ice}) = -0,72 \text{ K}$ ,  $\frac{\Delta m}{m} = \frac{c_{ice} \Delta T}{q} = 0,0054$ , trong đó  $q = 80 \text{ cal/g}$  là nhiệt nóng chảy riêng của nước đá.

11.35.  $\Delta T = \frac{Tgh}{q} \left( \frac{\rho_{ice}}{\rho_n} - 1 \right) \approx -2 \text{ K}$ , tức là  $t_{hó} = -2^\circ\text{C}$ .

11.36.  $\Delta H = 1,25 \text{ m}$ .

11.37\*.  $\Delta P = \frac{RT}{\mu v_{ice}} \frac{\Delta P_h}{P_h} = 10,5 \text{ atm}$ .

*Lời giải.* Quá trình tăng đẳng nhiệt áp suất bên ngoài một lượng  $\Delta P$  làm tăng thể nhiệt động riêng của nước đá một lượng  $\Delta \varphi_{ice} = v_{ice} \Delta P$ . Độ nén của nước đá có thể bỏ qua. Để cân bằng không bị phá vỡ thì phải tăng thể nhiệt động của hơi nước. Nhưng đối với hơi nước thì

$$\Delta \varphi_h = v_h \Delta P_h = \frac{RT}{\mu} \frac{\Delta P_h}{P_h}.$$

So sánh hai biểu thức trên, ta thu được đáp số.

11.38.  $t = 0,0074^\circ\text{C}$ .

11.39.  $t > -13^\circ\text{C}$ .

11.40.  $P = 128\text{ N}$ .

11.41.  $\frac{\Delta T}{\Delta P} = \frac{T(v_l - v_{ice})}{q} = -0,0075\text{ K/atm}$ .

Duar đã tìm được bằng thực nghiệm là  $-0,0072\text{ K/atm}$ . Nhiệt độ của điểm ba có thể tìm gần đúng bằng cách cho áp suất cân bằng của hơi tại điểm ba bằng không. Bằng cách đó ta nhận được điểm ba nằm cao hơn điểm nóng chảy  $0,0075\text{ K}$ .

11.42\*. *Lời giải.* Cho chất lỏng bay hơi chuẩn tĩnh và đẳng nhiệt ở nhiệt độ  $T_1$ . Sự biến thiên entropi trong quá trình này

$$\Delta_1 S = \frac{\lambda}{T_1} (m_2 - m_1).$$

Sau đó ta thay đổi chuẩn tĩnh nhiệt độ của hơi sao cho nó luôn ở trạng thái bão hoà. Phần tử nhiệt lượng cần cung cấp cho hơi trong quá trình này là

$$\delta Q = m_2 c dT = m_2 \left( c_P^h - \frac{\lambda}{T} \right) dT.$$

Vì  $dS = \frac{\delta Q}{T}$  nên lấy tích phân và bỏ qua sự phụ thuộc của  $\lambda$  vào  $T$ , ta tìm được sự biến thiên entropi tương ứng

$$\Delta_2 S = m_2 \left[ c_P^h \ln \frac{T_2}{T_1} + \lambda \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \right].$$

11.44.  $t = \frac{P_0 - P_1}{\frac{P_2 - P_1}{t_2 - t_1} + \frac{q}{T(v_1 - v_2)}} = 0,0075^\circ\text{C}$ .

$$P = \frac{P_2 - P_1}{t_2 - t_1} t + P_1 = 4,582\text{ mmHg}.$$

**11.45\*.** *Lời giải.* Đối với độ nghiêng của các đường cong cân bằng tại điểm ba (H. 411) ta có

$$\frac{dP_{23}}{dT} = \frac{q_{23}}{T(v_3 - v_2)} \approx \frac{q_{23}}{Tv_3},$$

$$\frac{dP_{13}}{dT} = \frac{q_{13}}{T(v_3 - v_1)} \approx \frac{q_{13}}{Tv_3}.$$

Vì  $q_{13} = q_{12} + q_{23}$  nên  $q_{13} > q_{23}$ . Vì thế đường cong thăng hoa dốc hơn đường cong bay hơi. Ở lân cận điểm ba các đường cong cân bằng có thể thay thế bằng các tiếp tuyến của chúng. Khi đó

$$P_1 - P_2 = AB = AC - BC = t \left( \frac{dP_{13}}{dT} - \frac{dP_{23}}{dT} \right),$$

$$P_1 - P_2 = \frac{q_{12}}{Tv_3} t = 0,00033 \text{ mmHg}.$$

**11.46.**  $\frac{\Delta P_{bh}}{P_{bh}} = \frac{\mu v_l}{RT} \Delta P = 0,08 \%$ .

**11.47\*.** *Lời giải.* Để tính gần đúng, ta thay đạo hàm  $\frac{dP}{dT}$  bằng tỷ số các số gia hữu hạn vào phương trình

$$\frac{dP}{dT} \approx \frac{\lambda}{Tv} \approx \frac{\mu \lambda P}{RT^2},$$

ta nhận được

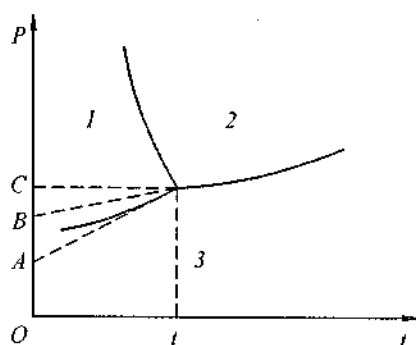
$$\frac{T_2 - T_1}{P_2 - P_1} = \frac{RT_1^2}{\mu \lambda P_1},$$

trong đó  $P_1$  và  $P_2$  là áp suất hơi bão hoà ở nhiệt độ  $T_1$  và  $T_2$ . Áp suất hơi trong không khí ở nhiệt độ  $T_1$  và độ ẩm tương đối  $\varphi$  sẽ là  $\varphi P_1$ , vì thế,

$P_2 = \frac{T_2}{T_1} \varphi P_1$ . Thay các giá trị này vào phương trình trên ta được

$$T_2 - T_1 = \frac{\varphi - 1}{\mu \lambda - \varphi RT_1} RT_1^2 = -3,3 \text{ K}.$$

Để có kết quả chính xác hơn, ta có



Hình 411

$$\ln\left(\frac{\varphi T_2}{T_1}\right) = \frac{\mu\lambda}{RT_1T_2}(T_2 - T_1).$$

Thay các giá trị bằng số và chuyển sang lôgarit thập phân

$$T_2 - T_1 = 0,124T_2 \lg\left(\frac{\varphi T_2}{T_1}\right). \quad (*)$$

Để giải (\*) ta sử dụng phương pháp tiếp cận dần. Với xấp xỉ không ta giả thiết  $T_2 = T_1$ . Đối với xấp xỉ thứ nhất

$$T_2 - T_1 = 0,124T_1 \lg \varphi = -3,52 \text{ K}.$$

Tính  $T_2$  từ phương trình trên và thay vào vế phải của (\*) ta tìm được xấp xỉ thứ hai

$$T_2 - T_1 = -3,66705 \text{ K}.$$

Xấp xỉ thứ ba

$$T_2 - T_1 = -3,67313 \text{ K}.$$

Xấp xỉ thứ tư

$$T_2 - T_1 = -3,67360 \text{ K}$$

Làm tròn số đến phần trăm

$$T_2 - T_1 = -3,67 \text{ K}$$

Như vậy thay  $\frac{dP}{dT}$  bằng tỷ số của các số gia hữu hạn dẫn đến sai số 10%.

$$11.48. \nu = \sqrt{\frac{2C_p T_0 \lambda}{\lambda \mu - RT_0 \ln(P/P_0)}}, \text{ trong đó } P_0 = 1 \text{ atm}, T_0 = 373 \text{ K}.$$

$$11.49. \Delta T = \frac{\Delta P R T^2}{P_1 \lambda_1 + P_2 \lambda_2} \approx 3 \text{ K}, \text{ tức là nhiệt độ sôi của hệ } t = 69^\circ \text{C}. \text{ Ở đây}$$

$P_1 \approx 0,27 P_0$ ,  $P_2 \approx 0,73 P_0$ , trong đó  $P_0$  - áp suất khí quyển tiêu chuẩn.

$$11.50. t \approx \frac{2\eta l \rho d^2 H R^2 T^3}{\lambda \mu^2 P_0^2 r^4 \Delta T} \approx 40 \text{ phút, trong đó } \rho, \mu \text{ và } \lambda \text{ tương ứng là khối}$$

lượng riêng, khối lượng phân tử, và nhiệt hoá hơi riêng của nước,  $P_0$  là áp suất khí quyển tiêu chuẩn.

$$11.51. t = \frac{2l\eta}{\rho g r^4} D^2 \ln \frac{a + \rho g H_2}{a + \rho g H_1}, \text{ trong đó } a = \frac{\lambda \mu P_0 \Delta T}{RT_0^2}.$$

11.52.  $T = T_0 + \frac{3R\rho gh}{\lambda\mu P_0} T_0^2 = 374,7 \text{ K}$ , trong đó  $P_0 = 1 \text{ atm}$ ,  $\lambda$  là nhiệt hoá

hơi riêng của nước,  $\rho$  là khối lượng riêng,  $\mu$  là khối lượng phân tử.

11.53.  $T \approx 330 \text{ K}$ .

11.54.  $\Delta U \approx \lambda_0 + 3RT - 4RT_0$ .

11.55.  $t = \int_0^H \frac{q^2 \rho_{ice} \rho_n S}{\chi_{Cu} T_0 F \Delta \rho} dz \approx 12 \text{ s}$ .

11.56.  $v = \frac{\Delta \rho}{\rho} \frac{PT\chi}{(\rho q)^2 d} \approx 0,38 \text{ mm/s} \approx 1,37 \text{ m/h}$ .

11.57.  $\lambda = \frac{RT^2}{\mu P} \left( \frac{dP}{dT} \right)_{th} - q_{nc} \approx 103 \text{ cal/K}$ .

11.58.  $\alpha = \beta_T = \infty$ ;  $C_P = \pm \infty$ .

11.59.  $\beta_S = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_S = \frac{1}{P} \left( 1 - \frac{2RT}{\lambda\mu} + \frac{C_P RT^2}{\lambda^2 \mu^2} \right)$ , trong đó  $\lambda$  là nhiệt hoá

hơi riêng,  $C_P$  là nhiệt dung phân tử đẳng áp của hơi.

11.60.  $\frac{\Delta P}{P} = -\frac{\Delta V/V}{1 - \frac{2RT}{\lambda\mu} + \frac{C_P RT^2}{\lambda^2 \mu^2}} = -0,033$ .

11.61\*.  $c = -1 \text{ cal/(g.K)}$ .

*Lời giải.* Nguyên lý thứ nhất của nhiệt động học đối với một đơn vị khối lượng hơi có thể viết dưới dạng  $\delta Q = di^h - v^h dP$ , trong đó  $i^h$  là entanpi riêng, còn  $v^h$  là thể tích riêng của hơi. Ta áp dụng phương trình trên cho quá trình có áp suất biến đổi. Tuy nhiên, nếu coi hơi là khí lý tưởng thì entanpi chỉ phụ thuộc vào nhiệt độ. Khi đó đối với quá trình chuẩn tĩnh bất kỳ  $\frac{di^h}{dT} = c_p^h$ . Do đó, nhiệt dung riêng của hơi bão hoà cần tìm là

$c = c_p^h - v^h \frac{dP}{dT}$ . Vì quá trình đun nóng được tiến hành sao cho hơi luôn ở

trạng thái bão hoà nên đạo hàm  $\frac{dP}{dT}$  được xác định bởi phương trình Clapayron – Clausius, phương trình này cho

$$c = c_p^h - \frac{\lambda}{T}.$$

Theo thuyết cổ điển, nhiệt dung phân tử đẳng áp của hơi  $C_p^h = 8 \text{ cal}/(\text{mol.K})$ , còn nhiệt dung riêng  $c_p^h = \frac{8}{18} = 0,444 \text{ cal}/(\text{g.K})$ . Sử dụng giá trị này và giá trị của  $\lambda$ , ta tìm được đáp số.

**11.62\*.**  $c = -1,07 \text{ cal}/(\text{g.K})$ .

*Lời giải.* Lập luận như bài trước, ta tìm được

$$c = \frac{di^h}{dT} - \frac{\lambda}{T}.$$

Để tính đạo hàm  $\frac{di^h}{dT}$  ta sử dụng công thức

$$\lambda = u^h - u^l + P(v^h - v^l) = i^h - i^l.$$

Vì phương trình trên dành cho quá trình, trong đó hơi luôn ở trạng thái bão hoà nên các đại lượng chứa trong phương trình này chỉ phụ thuộc vào nhiệt độ. Lấy đạo hàm theo nhiệt độ, ta được

$$\frac{di^h}{dT} = \frac{d\lambda}{dT} + \frac{di^l}{dT}.$$

Đối với chất lỏng  $di^l = c_p^l dT + v^l dP$ , hơn nữa có thể bỏ qua số hạng cuối.

Khi đó  $\frac{di^l}{dT} = c_p^l$ , và vì thế

$$\frac{di^h}{dT} = c_p^l + \frac{d\lambda}{dT}.$$

Thay đại lượng này vào biểu thức tính  $c$ , ta thu được

$$c = c_p^l - \frac{\lambda}{T} + \frac{d\lambda}{dT}.$$

Đối với nước khi  $T = 373 \text{ K}$  công thức này cho  $c = -1,07 \text{ cal}/(\text{g.K})$ , giá trị này sai khác so với giá trị thu được trong bài trước 7%.

**11.63.**  $C = \mu c_0 + C_V + R \left( \frac{\lambda \mu}{RT} - 1 \right)^2 \approx 1,3 \text{ kJ/K}$ , trong đó  $\mu$  và  $c_0$  - khối

lượng phân tử và nhiệt dung riêng của nước,  $C_V$  - nhiệt dung phân tử đẳng tích của không khí.



$$11.64. C = \mu c_0 + \frac{1}{R} \left( \frac{\lambda \mu}{T} \right)^2 \approx 1,5 \text{ kJ/K.}$$

$$11.65. c = \frac{1}{1 + \beta} \left\{ c_0 + \beta \frac{R}{\mu} \left[ 3 + \left( \frac{\lambda \mu}{RT} - 1 \right)^2 \right] \right\} \approx 10 \text{ J/(g.K).}$$

$$11.66. c_V = \frac{3R}{\mu} + \frac{R}{\mu} \left( \frac{\lambda}{RT} - 1 \right)^2 \approx 70 \text{ J/(g.K).}$$

Ta thấy rằng kết quả này có thể nhận được bằng cách lấy giới hạn từ kết quả bài trước khi  $\beta \rightarrow \infty$ .

$$11.67. \frac{d\lambda}{dT} = c_P^h - c - \frac{v^l}{v^h - v^l} \frac{\lambda}{T} (1 - \alpha T), \text{ trong đó } c_P^h \text{ là nhiệt dung riêng đẳng áp của hơi; } v^l, v^h \text{ là thể tích riêng của chất lỏng và hơi;}$$

$$\left( \frac{d\lambda}{dT} \right)_n = -2,3 \text{ J/(g.K).}$$

$$11.68. \frac{m_1}{m_2} = \eta^{\gamma-2} \exp \left[ \frac{\lambda}{RT} (\eta^{\gamma-1} - 1) \right].$$

11.69.  $t \sim 1$  phút; sự tồn tại của heli làm tăng đáng kể thời gian “đông” của hydro.

$$11.70. t = 32,3^\circ \text{C.}$$

$$11.71. q = \frac{RT_1 T_2}{\mu(T_2 - T_1)} \ln \left( a \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \right) = 638 \text{ J/g.}$$

$$11.72. \Delta P = \frac{R}{\Delta V} \left[ 2,3(T_2^2 - T_1^2) - \ln 2(T_2 - T_1) \right] \approx 2,9 \text{ atm, trong đó } T_2 = 0,01 \text{ K.}$$

$$11.73. P = P_1 + \frac{R}{2\theta} \frac{(T^2 - T_1^2) - 2 \ln 2 \theta (T - T_1)}{v_l - v_r} \text{ (đường parabol); } P_2 = 29 \text{ atm.}$$

$$q = RT \left( \frac{T}{\theta} - \ln 2 \right); q_1 = -0,43 \text{ J/mol; } q_2 = 0,18 \text{ J/mol}$$

$$11.74. P = P_1 + \frac{R(T - T_1)}{\theta \Delta V} \left( \frac{T + T_1}{2} - 0,7\theta \right) = 33 \text{ atm.}$$

$$11.75. \Delta R = \frac{3qu}{4\pi\gamma RT \Delta \rho} \approx 35 \text{ km, trong đó } \gamma \text{ là hằng số hấp dẫn.}$$

$$11.76. \lambda(0) = \frac{a}{b} = \frac{27}{8} RT_k = 150 \text{ J/mol.}$$

$$11.77. \Delta T = \frac{\lambda D}{\chi} \frac{\rho_{bh}^0 - \rho_0}{1 + \frac{\lambda D}{\chi} \rho_{bh}^0 \frac{\lambda \mu}{RT^2}} = 6,4 \text{ K.}$$

$$11.78. v_a \approx \frac{\rho_h \lambda}{\rho_{kk} \sqrt{c_{kk} T}} \approx 3,4 \text{ cm/s.}$$

$$11.79. P = \gamma P_k = 112,2 \text{ atm, trong đó } \gamma = 24\sqrt{3\tau} - 12\tau - 27, \tau = \frac{T}{T_k}.$$

## §12. CÁC HIỆN TƯỢNG BỀ MẶT

$$12.1. \sigma = \frac{mg}{\pi d} \approx 7 \cdot 10^{-5} \text{ N/cm, trong đó } m \text{ là khối lượng giọt nước.}$$

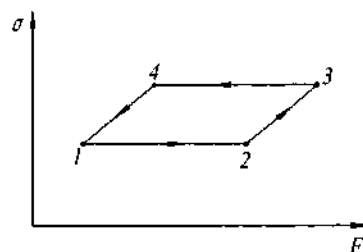
$$12.2. \sigma = \frac{(2\pi R - l)ES}{2\pi R^2}.$$

$$12.3. T \propto \sqrt{\frac{\pi r^3}{\sigma}}. \text{ Sử dụng phương pháp đơn vị đo.}$$

$$12.4. \sigma = \sigma_0 \frac{M}{m} \left( \frac{\tau}{T} \right)^2 = 3,5 \cdot 10^{26} \text{ N/cm.}$$

$$12.5*. \frac{d\sigma}{dT} = -\frac{q}{T}.$$

*Lời giải.* Ta xét màng chất lỏng và cho tiến hành với màng này chu trình Cárnot vô cùng nhỏ. Trong hệ tọa độ ta đặt diện tích màng trên trục nằm ngang, còn trên trục thẳng đứng là sức căng bề mặt  $\sigma$  (H. 412). Khi nhiệt độ không đổi thì sức căng bề mặt cũng không đổi, vì thế trên hệ tọa độ của ta các đường đẳng nhiệt được biểu diễn bằng các đường thẳng nằm ngang. Trạng thái ban đầu của màng được biểu diễn bằng điểm 1. Cho màng tiếp xúc với nguồn



Hình 412

nóng có nhiệt độ bằng nhiệt độ của màng ở trạng thái 1. Sau đó dùng sức

căng bên ngoài ta cho màng giãn chuẩn tĩnh đến trạng thái 2. Khi đó ta cần tiêu hao một công, công này là công âm:  $A_1 = -\sigma(T_1)\Delta F$ , trong đó  $\Delta F$  là số gia diện tích của màng khi giãn theo đường đẳng nhiệt 1-2. Khi giãn đẳng nhiệt cần cung cấp nhiệt lượng cho màng, độ lớn của nhiệt lượng này là  $Q_1 = q\Delta F$ . Ở trạng thái 2 ta tách màng khỏi nguồn nóng và cho nó giãn nở đoạn nhiệt một đoạn vô cùng nhỏ tới trạng thái 3, ở trạng thái 3 ta cho nó tiếp xúc với nguồn lạnh có nhiệt độ  $T_2$ . Giả thiết rằng nhiệt độ  $T_1$  và  $T_2$  khác nhau rất ít. Từ trạng thái 3 ta cho màng chuyển đổi đẳng nhiệt sang trạng thái 4. Bề mặt màng giảm một lượng  $\Delta F$  và nó thực hiện một công dương  $A_2 = \sigma(T_2)\Delta F$ . Từ trạng thái 4 ta cho màng trở lại trạng thái ban đầu. Công của màng trên các đường đoạn nhiệt 2-3 và 4-1 vì chúng rất nhỏ so với trên 1-2 và 3-4. Công toàn phần mà màng thực hiện trong cả chu trình là

$$A = A_1 + A_2 = [\sigma(T_2) - \sigma(T_1)]\Delta F = \frac{d\sigma}{dT}(T_2 - T_1)\Delta F.$$

Theo định lý Căcnô

$$\frac{A}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Thế vào biểu thức này các biểu thức của  $A$  và  $Q_1$ , ta được

$$\frac{d\sigma}{dT} = -\frac{q}{T}. \quad (*)$$

**12.6\*. Lời giải.** Theo nguyên lý thứ nhất nhiệt động học  $\delta Q = dU - \sigma dF$ , trong đó  $F$  là diện tích bề mặt của màng. Nếu quá trình là đẳng nhiệt thì theo công thức (\*) (xem lời giải bài trước) ta có

$$\delta Q = q dF = -T \left( \frac{d\sigma}{dT} \right) dF.$$

Như vậy, khi tăng đẳng nhiệt bề mặt màng

$$dU = \left( \sigma - T \frac{d\sigma}{dT} \right) dF.$$

Ta có thể coi diện tích  $F$  và nhiệt độ  $T$  là các thông số xác định trạng thái của màng. Năng lượng trên một đơn vị bề mặt của màng không phụ thuộc vào  $F$  nên

$$U = \left( \sigma - T \frac{d\sigma}{dT} \right) F.$$

12.7.  $dT = -\frac{q}{c_F} dF$ , trong đó  $c_F$  là nhiệt dung một đơn vị diện tích bề mặt của màng khi  $F$  không đổi, còn  $q$  được xác định bởi công thức (\*) (xem lời giải bài 12.5). Khi giãn nở đoạn nhiệt thì màng sẽ lạnh đi.

12.8. Giả thiết  $c_F = c_V h$  ( $c_V$  là nhiệt dung riêng của nước) ta được

$$\Delta T = \frac{2T}{c_V h} \frac{d\sigma}{dT} \approx -0,02 \text{ K}.$$

Hệ số "2" chỉ màng có hai mặt.

$$12.9. \Delta T = \frac{16\pi r^2}{5\nu R} \left( \sigma - T \frac{d\sigma}{dT} \right) = 3,14 \cdot 10^{-3} \text{ K}.$$

12.10\*. *Lời giải.* Thay vào công thức (\*) (bài 12.5)  $q = T\Delta S$ , trong đó  $\Delta S$  là số gia entropi của màng khi tăng diện tích của nó lên một đơn vị. Ta nhận được

$$\frac{d\sigma}{dT} = -\Delta S.$$

Theo định lý Nernst, ở nhiệt độ không tuyệt đối tất cả các quá trình diễn ra không có sự thay đổi entropi, tức là  $\Delta S = 0$ . Từ đây suy ra rằng, ở nhiệt độ không tuyệt đối đạo hàm  $\frac{d\sigma}{dT}$  bằng không.

$$12.11. P = \frac{4\sigma}{d} \approx 196 \text{ N/cm}^2.$$

$$12.12. P = \frac{8\sigma}{d} \approx 4 \cdot 10^{-3} \text{ N/cm}^2 \approx 0,29 \text{ mmHg}.$$

12.13.  $M \approx \frac{\pi \sigma D^2}{gd} \approx 900 \text{ g}$ . Khối lượng nước rót vào sàng không phụ thuộc vào khối lượng riêng của nó.

$$12.14. h \approx \frac{2\sigma}{\rho g a} \approx 35 \text{ cm}.$$

$$12.15. \Delta(h_1 - h_2) = \frac{4\Delta\sigma(d_2 - d_1)}{\rho g d_1 d_2} \approx 24,2 \text{ mm}.$$

$$12.16. r = \frac{2\sigma}{a\rho\eta} \approx \frac{\sigma}{5\rho gh} \approx 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ cm}.$$

$$12.17. F = \frac{2\sigma^2 l \cos^2 \theta}{\rho g d^2} \approx 10 \text{ N.}$$

$$12.18. h_1 - h_2 = \frac{4\sigma(d_2 - d_1)}{\rho g d_1 d_2}.$$

$$12.19. h = \frac{P + \rho g l + \frac{2\sigma}{r} - \sqrt{\left(P + \rho g l + \frac{2\sigma}{r}\right)^2 - \frac{8\sigma \rho g l}{r}}}{2\rho g} \approx \frac{2\sigma l}{r\left(P + \rho g l + \frac{2\sigma}{r}\right)},$$

trong đó  $P$  là áp suất khí quyển.

$$12.20. h = \frac{2\sigma \cos \theta}{d\rho g} = 3 \text{ cm.}$$

$$12.21. h = \frac{\sigma \cos \theta}{\rho g \sin(\alpha/2)} \frac{1}{r} \approx \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g \alpha} \frac{1}{r}.$$

$$12.22*. F = 1,46 \cdot 10^4 \text{ N.}$$

*Lời giải.* Giọt nước có dạng hình đĩa với bề mặt biên lõm. Độ cong của tiết diện bề mặt này so với mặt phẳng song song với hai tấm kính phẳng, nhỏ không đáng kể. Bán kính cong của tiết diện vuông góc với tiết diện nói trên là  $r = \frac{d}{2}$ . Độ cong trung bình của bề mặt bên của đĩa

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2}{d}.$$

Áp suất chất lỏng giữa hai tấm kính nhỏ hơn áp suất khí quyển một lượng  $\Delta P = \frac{2\sigma}{d}$ . Diện tích đĩa  $S = \frac{m}{\rho d}$ , trong đó  $\rho$  là khối lượng riêng của nước.

Các tấm kính sẽ hút nhau với một lực

$$F = S\Delta P = \frac{2m\sigma}{\rho d^2} = 1,46 \cdot 10^4 \text{ N.}$$

$$12.23. F = \frac{2\sigma \rho \cos \theta}{m} \pi^2 R^4 = 630 \text{ N, trong đó } m - \text{khối lượng thủy ngân.}$$

$$12.24*. d_2 = 5,23 \cdot 10^{-3} \text{ cm.}$$

*Lời giải.* Đại lượng  $d_2$  được xác định từ phương trình

$$\left(P_0 + \rho gh + \frac{4\sigma}{d_1}\right)d_1^3 = \left(P_0 + \frac{4\sigma}{d_2}\right)d_2^3,$$

trong đó  $P_0$  là áp suất khí quyển. Vì  $\frac{4\sigma}{d_1} \ll P$  và hơn nữa  $\frac{4\sigma}{d_2} \ll P_0$ , nên trong gần đúng bậc không các số hạng này có thể bỏ qua (tức là bỏ qua sức căng bề mặt). Khi đó  $d_2 = 5,3 \cdot 10^{-3}$  cm. Giá trị này có thể tính chính xác hơn bằng phương pháp gần đúng liên tiếp. Trong gần đúng bậc nhất  $d_2 = 5,23 \cdot 10^{-3}$  cm.

$$12.25. \Delta T > \frac{4\sigma T}{Pr}.$$

$$12.26. P = 8P_0 + \frac{24\sigma}{r}.$$

$$12.27. C - C_P = \frac{4\sigma R}{3P_0 r} = \frac{2}{3} R \cdot 10^{-4} \approx 1,33 \cdot 10^{-4} \text{ cal/(mol.K)}.$$

$$12.28. r = 1,04 \text{ cm}.$$

$$12.29. C = 3R.$$

$$12.30. C = C_P + \frac{4\sigma R}{3P_0 r + 8\sigma}.$$

$$12.31. Q = 8\pi\sigma_0 r_0^2 \ln a \approx 3,4 \cdot 10^{-4} \text{ J}.$$

$$12.32. \Delta S = \frac{12\pi r^2}{T} \left( q + \frac{1}{3} r P_0 \ln 2 \right), \text{ trong đó } T \text{ là nhiệt độ khí quyển.}$$

12.33. Thời gian  $t$  liên hệ với bán kính bong bóng bởi biểu thức

$$t = \frac{2\eta l}{\sigma r^4} (R_0^4 - R^4).$$

$$\text{Bong bóng biến mất sau } t = \frac{2\eta l}{\sigma r^4} R_0^4 = 7,2 \cdot 10^3 \text{ s} \approx 2 \text{ h}.$$

$$12.34. t = \frac{2}{7a^2} \sqrt{\frac{2P\mu}{\sigma RT}} r_0^{7/2} \approx 630 \text{ s} = 10,5 \text{ phút. (So sánh với kết quả bài trước.)}$$

$$12.35. R_2 - R_1 = \frac{\rho g d^3}{4\sigma} \approx 0,28 \text{ mm}.$$

$$12.36^* . \left( \frac{dr}{dT} \right)_{T=T_0} = \frac{r_0}{T_0} \frac{4q_0 + r_0 P_0}{3r_0 P_0 - 4\sigma_0} .$$

Lời giải. Áp suất bên trong bong bóng  $P = P_{ng} + \frac{4\sigma}{r}$ . Đạo hàm biểu thức này khi áp suất bên ngoài không đổi và giả thiết  $r = r_0$ ,  $\sigma = \sigma_0$ , ta thu được

$$dP = \frac{4d\sigma}{r_0} - \frac{4\sigma_0 dr}{r_0^2} .$$

Theo công thức đã biết thì  $d\sigma = -\frac{q_0}{T_0} dT$ , thế  $d\sigma$  vào ta được

$$dP = -\frac{4q_0}{r_0 T_0} dT - \frac{4\sigma_0}{r_0^2} dr .$$

Vì khối lượng khí bên trong bong bóng không đổi nên  $\frac{Pr^3}{T} = \frac{P_0 r_0^3}{T_0}$ ; suy ra

$$\frac{dP}{P_0} + \frac{3dr}{r_0} - \frac{dT}{T_0} = 0 .$$

Khử  $dP$  từ phương trình trên vào đây, ta thu được đáp số.

$$12.37. \sigma = \frac{gDh\rho}{4} \approx 8 \cdot 10^{-4} \text{ N/cm} .$$

$$12.38. \Delta S = \frac{16\pi\sigma r_0^2}{3T} \ln 2 \approx 28 \cdot 10^{-7} \text{ J/K} .$$

$$12.39. T = T_0; P = \frac{P_0}{\sqrt{2}}; \Delta S > 0$$

$$12.40. A = \frac{3M\sigma}{r\rho}; \Delta S = \frac{3Mq}{Tr\rho} .$$

$$12.41. \tau = 2\sqrt{\frac{5\pi m}{\sigma}} \approx 0,2 \text{ s} .$$

$$12.42. h = 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \sin \frac{\theta}{2} \approx 3,6 \text{ mm} .$$

12.43. Theo công thức  $h = \frac{2\sigma}{\rho g r}$  thì nước trong ống mao dẫn có thể lên đến độ cao 14m, vì kích thước lớn nhất của bong bóng hơi nước bị giới hạn bởi đường kính ống mao dẫn.

**12.44.** Màng dừng lại ở độ cao tương ứng với cực tiểu năng lượng toàn phần  $mgh + 2\sigma S$ , trong đó  $S$  là diện tích bề mặt của màng.

$$h = \ln \sqrt{\frac{4\pi\sigma r_0}{mg}}.$$

**12.45\*.**  $R > \frac{9\sigma\rho_{kk}}{2\rho^2gd} = 0,086\text{cm} \approx 1\text{mm}$ , trong đó  $\rho$  là khối lượng riêng của nước.

$$\mathbf{12.46*} \cdot \frac{K}{E_m} = \frac{1}{2}.$$

*Lời giải.* Lực căng bề mặt  $f = 2.2\pi\sigma x = 4\pi\sigma x$  tác dụng vào trục lớn dần và đang chuyển động (bán kính  $x$ ) của dung dịch xà phòng. Phương trình chuyển động của trục này

$$\frac{d(mV)}{dt} = f.$$

trong đó  $m$  là khối lượng tức thời của trục, được xác định bởi bán kính giới hạn  $R$  của trục và khối lượng giới hạn  $M$  của nó

$$m = \frac{\pi x^2}{\pi R^2} M = \frac{x^2}{R^2} M.$$

Thế  $m$  vào phương trình chuyển động, ta được

$$V^2 + \frac{x}{2} \frac{dV}{dt} = \frac{2\pi R^2 \sigma}{M}.$$

Vế phải của phương trình này là hằng số đã biết. Như vậy, việc giải bài toán trở thành giải phương trình vi phân

$$\frac{x\ddot{x}}{2} + \dot{x}^2 = \text{const.}$$

Phương trình này dễ dàng giải được và rõ ràng là  $x > 0$ , còn  $\frac{dV}{dt} \geq 0$ . Từ đây

suy ra rằng, để thoả mãn điều kiện  $V^2 + \frac{x}{2} \frac{dV}{dt} = \text{const}$ , thì  $\frac{dV}{dt} = 0$ , điều đó nghĩa là  $V = \text{const}$ .

Vận tốc không đổi và bằng  $V = \sqrt{\frac{2\pi R^2 \sigma}{M}}$ . Để thấy rằng năng lượng ban đầu

của màng  $E_m = 2\pi R^2 \sigma$ , còn động năng cuối quá trình  $K = \frac{MV^2}{2} = \pi R^2 \sigma$ .



Nếu bỏ qua động năng của màng cuối quá trình, ta sẽ nhận được đáp số.

Chú ý rằng nghiệm của phương trình vi phân này là

$$x(t) = V_0 t + \text{const}; \quad \dot{x} = V_0; \quad \ddot{x} = 0.$$

$$12.47. \sqrt{\frac{T_1}{T_0}} = \frac{1}{P_0} \left( \rho g h + \frac{2\sigma}{r} \right); \quad \frac{T_1}{T_0} \approx 1,12.$$

$$12.48. \frac{T_1}{T_0} = \left( 1 + \frac{4\sigma}{r P_0} \right)^2 \approx 1,19.$$

$$12.49. 1) P - P_0 \approx \frac{2\sigma}{r} \frac{v_l}{v_h} \approx \frac{2\sigma}{r} \frac{\mu v_l P_0}{RT} = 0,19 \text{ mmHg}.$$

$$2) \frac{P}{P_0} = 2,9. \text{ Khi kích thước giọt rất nhỏ, công thức đưa đến kết quả này}$$

$$\frac{P}{P_0} = \exp\left(\frac{\mu v_l}{RT} \frac{2\sigma}{r}\right), \text{ có thể coi như chỉ mang tính đánh giá.}$$

$$12.50. \Delta T = \frac{2\sigma}{r} \frac{RT_0^2}{AP_0} = \frac{2\sigma R}{r} \frac{TV}{A} \approx 3,3 \text{ K, trong đó } V \text{ là thể tích mol của hơi nước.}$$

$$12.51. r = \frac{2\sigma v_h T}{\lambda(t - t_0)} \approx 0,03 \text{ mm, với chú ý rằng } \frac{\rho_h}{\rho_l} \ll 1.$$

$$12.52. t = t_1 + \frac{2\sigma T_1}{r \lambda \rho} \approx 10,2^\circ \text{C}.$$

$$12.53. \Delta P_h = \frac{2\sigma C_P V_l P_l}{Rr(\Lambda - C_P T_l)} \approx 1,3 \text{ mmHg}.$$

$$12.54. r \gg \frac{2\sigma \mu}{RT\rho} \approx 5,5 \cdot 10^{-9} \text{ m}.$$

12.55. *Hướng dẫn.* Để đánh giá sơ bộ có thể coi giọt “nhỏ nhất” được tạo thành từ 13 phân tử là các quả cầu (theo mô hình: các quả cầu đặt khít nhau). Đường kính giọt này bằng  $3d$ , trong đó  $d$  là đường kính phân tử. Trên thực tế nó lớn hơn nhiều (xem bài tiếp theo). Đánh giá đường kính nhỏ nhất cỡ

$$r = 3 \sqrt[3]{\frac{\mu}{N_A \rho}} \approx 9 \cdot 10^{-8} \text{ cm}.$$

$$P_r = P_\infty \left( 1 + \frac{2\sigma\mu}{RT\rho_l r} \right) \approx 1,9 \text{ atm.}$$

12.56.  $r = \frac{2\sigma T}{\rho_l \lambda \Delta T} \approx 225 \text{ \AA}$  (xem kết quả bài trước và so sánh)

12.57.  $\Delta T = \frac{\Delta F}{Mc} \left( \sigma - T \frac{d\sigma}{dT} \right) = 1,7 \text{ K}$ , trong đó  $\Delta F$  là sự thay đổi bề mặt,  $c$  là nhiệt dung riêng của nước,  $c = 4,2 \text{ J/(gK)}$ .

$$\Delta S = \Delta F \frac{d\sigma}{dT} = 10^{-2} \text{ J/K.}$$

12.58.  $\Delta P = 0,02 \text{ mmHg.}$

12.59.  $V = 2\pi r^4 \frac{RT\rho_l^2}{\mu\sigma\rho_h} = 2\pi r^4 \frac{\rho_l^2}{\sigma P_{bh}} \left( \frac{RT}{\mu} \right)^2 = 4,7 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3.$

$R \approx \sqrt[3]{V} \approx 1,7 \text{ mm}$ , trong đó  $\sigma = 71 \cdot 10^{-5} \text{ N/cm.}$

*Hướng dẫn:* Sự cân bằng bền được hiểu là đối với sự bay hơi của giọt nước khi tăng hơi quá bão hoà.

12.60.  $\lambda = \frac{4\sigma}{\rho^{2/3}} \left( \frac{\pi N_A}{6\mu} \right)^{1/3} = 24 \text{ J/g.}$

Trên thực tế  $\lambda = 23 \text{ J/g}$ . Khi giải cần chú ý là mỗi phân tử của lớp bề mặt có cỡ 9 phân tử “láng giềng” khác với các phân tử bên trong lòng chất lỏng (có 12 “láng giềng”).

12.61.  $\tau = \frac{7\rho_0^2 a^3}{32\sigma\lambda\rho} \sqrt{\frac{\pi RT}{2\mu}}$ , trong đó  $\lambda$  là chiều dài quãng đường tự do của phân tử hơi nước.

12.62.  $\tau = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{RT}{\mu} \right)^2 \frac{\rho_l \Delta m}{D\sigma P_\infty} \frac{a-b_0}{a+b_0} \approx 15^7 \text{ s} \approx 120 \text{ ngày đêm.}$

12.63.  $\frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_1} = \frac{1}{2} \frac{\Delta T}{T} - \frac{\Delta\sigma}{\sigma} \approx 0,08.$

## PHỤ LỤC

**Bảng 1. MỐI LIÊN HỆ GIỮA CÁC ĐẠI LƯỢNG CỦA HỆ ĐO LƯỜNG SI VÀ GAUSS**

| <i>Đại lượng vật lý</i>          | <i>SI</i>         | <i>Gauss</i>                      | <i>Mối liên hệ</i>                                         |
|----------------------------------|-------------------|-----------------------------------|------------------------------------------------------------|
| Chiều dài                        | m                 | cm                                | $1\text{m} = 10^2\text{cm}$                                |
| Khối lượng                       | kg                | g                                 | $1\text{kg} = 10^3\text{g}$                                |
| Thời gian                        | s                 | s                                 | $1\text{s} = 1\text{s}$                                    |
| Cường độ dòng điện               | A                 | ед. тока СГС                      | $1\text{A} \approx 3 \cdot 10^9 \text{ед. СГС}$            |
| Điện tích                        | C                 | ед. заряда СГС                    | $1\text{C} \approx 3 \cdot 10^9 \text{ед. СГС}$            |
| Lực                              | N                 | дин (дина)                        | $1\text{N} = 10^5 \text{дин}$                              |
| Công, năng lượng, nhiệt lượng    | J                 | эрг                               | $1\text{J} = 10^7 \text{эрг}$                              |
| Công suất N, W, nhiệt thông J, Φ | W                 | эрг/с                             | $1\text{W} = 10^7 \text{эрг / с}$                          |
| Áp suất, ứng suất T, σ           | Pa                | дин/см <sup>2</sup>               | $1\text{Pa} = 10 \text{дин / см}^2$                        |
| Độ nhớt động lực η               | Pa.s              | П (пуаз)<br>дин.с/см <sup>2</sup> | $1\text{Pa.s} = 10 \text{П}$                               |
| Độ nhớt động $\nu = \eta/\rho$   | m <sup>2</sup> /s | Ст (стокс) см <sup>2</sup> /с     | $1\text{m}^2/\text{s} = 10^4 \text{Ст}$                    |
| Hệ số trao đổi nhiệt             | W/m <sup>2</sup>  | эрг/(с.см <sup>2</sup> )          | $1\text{W}/\text{m}^2 = 10^3 \text{эрг / (с.см}^2\text{)}$ |
| Độ dẫn nhiệt χ                   | W/(m.K)           | эрг/(с. м.К)                      | $1\text{W}/(\text{м.К}) = 10^5 \text{эрг / (с.см.К)}$      |
| Điện thế, hiệu điện thế          | V                 | ед. напряжения<br>СГС             | $1\text{V} \approx \frac{1}{300} \text{ед. СГС}$           |
| Điện trở                         | Ω                 | ед. Сопр. СГС<br>(с/см)           | $1\Omega \approx \frac{1}{9} \cdot 10^{-11} \text{с / см}$ |

**Bảng 2. MỘT SỐ HẰNG SỐ THƯỜNG DÙNG**

Vận tốc ánh sáng trong chân không  $c = 2,998.10^{10}$  cm/s

Hằng số hấp dẫn  $\gamma = 6,67.10^{-11}$  N.m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup> =  $6,67.10^{-8}$  дин.смм<sup>2</sup> / г<sup>2</sup>

Hằng số Boltzman  $k = 1,38.10^{-23}$  J/K =  $8,62.10^{-11}$  MeV/K

Hằng số khí lý tưởng  $R = 8,314$  Jun/(Kmol.K) = 0,0848 lit.at/(mol.K)

Thể tích mol của khí lý tưởng trong điều kiện tiêu chuẩn  
( $P_0 = 101325$  Pa = 760 mmHg;  $T = 273,15$  K)

$V_0 = 22,4$  l/mol =  $22,4.10^{-3}$  m<sup>3</sup>/mol =  $22,4.10^3$  cm<sup>3</sup>/mol

Hằng số Avôgađrô  $N_A = 6,025.10^{23}$  mol<sup>-1</sup>

Hằng số Loshmidt  $n_0 = 2,69.10^{25}$  m<sup>-3</sup> =  $2,69.10^{19}$  cm<sup>-3</sup>

Khối lượng êlectrôn  $m_e = 9,11.10^{-31}$  kg =  $9,11.10^{-28}$  g

Khối lượng prôtôn  $m_p = 1,67.10^{-27}$  kg =  $1,67.10^{-24}$  g

Năng lượng của êlectrôn tĩnh  $m_e c^2 = 0,511$  MeV

Năng lượng của prôtôn tĩnh  $m_p c^2 = 938$  MeV

Nhiệt độ tương ứng với 1eV  $T_1 = 11606$  K

Khối lượng Mặt Trời  $M_{MT} = 1,99.10^{30}$  kg =  $1,99.10^{33}$  g

Khối lượng Trái Đất  $M_{TD} = 5,98.10^{24}$  kg =  $5,98.10^{27}$  g

Bán kính Mặt Trời  $R_{MT} = 6,96.10^5$  km =  $6,96.10^8$  m

Bán kính Trái Đất  $R_{TD} = 6,38.10^3$  km =  $6,38.10^6$  m

Khoảng cách trung bình từ Trái Đất đến Mặt Trời  $L_1 \approx 1,5.10^{11}$  m

Khoảng cách trung bình từ Trái Đất đến Mặt Trăng  $L_2 \approx 3,84.10^8$  m

Vận tốc trung bình của Trái Đất theo quỹ đạo  $v_{TD} \approx 30$  km/s =  $3.10^4$  m/s

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Овчинкин В.А. Сборник задач по общему курсу физики для ВТУЗов. В трех частях. Ч.1. Механика, термодинамика и молекулярная физика. Москва. МФТИ - 2002 г.
2. Стрелков С.П. Сборник задач по общему курсу физики. В 5 книгах. Книга 1. Механика. Москва. Физматлит – 2006.
3. Гинзбург В.Л. Сборник задач по общему курсу физики. В 5 книгах. Книга 2. Термодинамика и молекулярная физика. Москва. Физматлит – 2006.
4. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. Для студентов технических вузов. Санкт-Петербург. Книжный мир – 2004.

# MỤC LỤC

|                  |   |
|------------------|---|
| Lời nói đầu..... | 3 |
|------------------|---|

## ĐỀ BÀI

### Phần I. CƠ HỌC

|                                                                                                   |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| §1. Động học chất điểm.....                                                                       | 5   |
| §2. Động lực học chất điểm. Tĩnh học.....                                                         | 8   |
| §3. Chuyển động của các vật có khối lượng thay đổi.....                                           | 17  |
| §4. Công, năng lượng, động lượng. Định luật bảo toàn động lượng và năng lượng.<br>Sự va chạm..... | 23  |
| §5. Dao động điều hoà của chất điểm.....                                                          | 36  |
| §6. Mômen động lượng. Định luật bảo toàn mômen động lượng.....                                    | 45  |
| §7. Lực hấp dẫn.....                                                                              | 49  |
| §8. Thuyết tương đối.....                                                                         | 67  |
| §9. Chuyển động phẳng của vật rắn.....                                                            | 73  |
| §10. Dao động của vật rắn. Sóng.....                                                              | 100 |
| §11. Chuyển động của vật rắn trong không gian. Con quay hồi chuyển.....                           | 113 |
| §12. Hệ quy chiếu không quán tính.....                                                            | 118 |
| §13. Biến dạng đàn hồi.....                                                                       | 129 |
| §14. Động lực học chất lỏng.....                                                                  | 133 |

### Phần II. NHIỆT HỌC VÀ VẬT LÝ PHÂN TỬ

|                                                                                                          |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| §1. Khí lý tưởng. Công, nhiệt lượng, nội năng. Nguyên lý thứ nhất của nhiệt<br>động học. Nhiệt dung..... | 140 |
| §2. Vận tốc âm thanh. Chuyển động của chất khí.....                                                      | 156 |
| §3. Các chu trình. Tính toán công, nội năng, các hiệu ứng nhiệt và hệ số hiệu suất.....                  | 158 |
| §4. Entropi. Các quá trình thuận nghịch và không thuận nghịch.....                                       | 166 |
| §5. Thế nhiệt động.....                                                                                  | 177 |
| §6. Khí thực. Khí Van der Waals.....                                                                     | 184 |
| §7. Phân bố Maxwell.....                                                                                 | 194 |
| §8. Phân bố Boltzmann.....                                                                               | 203 |
| §9. Sự thăng giáng. Ý nghĩa thống kê của entropi.....                                                    | 211 |
| §10. Các hiện tượng vận chuyển. Sự dẫn nhiệt. Chuyển động Brown.....                                     | 215 |
| §11. Chuyển pha.....                                                                                     | 233 |
| §12. Các hiện tượng bề mặt.....                                                                          | 247 |

## LỜI GIẢI VÀ HƯỚNG DẪN

### Phần 1. CƠ HỌC

|                                                                                                |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| §1. Động học chất điểm.....                                                                    | 2  |
| §2. Động lực học chất điểm. Tĩnh học.....                                                      | 2  |
| §3. Chuyển động của các vật có khối lượng thay đổi.....                                        | 2  |
| §4. Công, năng lượng, động lượng. Định luật bảo toàn động lượng và năng lượng.<br>và chạm..... | 26 |
| §5. Dao động điều hoà của chất điểm.....                                                       | 26 |
| §6. Mômen động lượng. Định luật bảo toàn mômen động lượng.....                                 | 27 |
| §7. Lực hấp dẫn.....                                                                           | 28 |
| §8. Thuyết tương đối.....                                                                      | 28 |
| §9. Chuyển động phẳng của vật rắn.....                                                         | 30 |
| §10. Dao động của vật rắn. Sóng.....                                                           | 31 |
| §11. Chuyển động của vật rắn trong không gian. Con quay hồi chuyển.....                        | 33 |
| §12. Hệ quy chiếu không quán tính.....                                                         | 33 |
| §13. Biến dạng đàn hồi.....                                                                    | 34 |
| §14. Động lực học chất lỏng.....                                                               | 35 |

### Phần II NHIỆT HỌC VÀ VẬT LÝ PHÂN TỬ

|                                                                                                          |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| §1. Khí lý tưởng. Công, nhiệt lượng, nội năng. Nguyên lý thứ nhất<br>của nhiệt động học. Nhiệt dung..... | 360 |
| §2. Vận tốc âm thanh. Chuyển động của chất khí.....                                                      | 372 |
| §3. Các chu trình. Tính toán công, nội năng, các hiệu ứng nhiệt và hệ số hiệu suất.....                  | 374 |
| §4. Entropi. Các quá trình thuận nghịch và không thuận nghịch.....                                       | 379 |
| §5. Thế nhiệt động.....                                                                                  | 387 |
| §6. Khí thực. Khí VandecVan.....                                                                         | 393 |
| §7. Phân bố Maxwell.....                                                                                 | 401 |
| §8. Phân bố Boltzmann.....                                                                               | 410 |
| §9. Sự thăng giáng - ý nghĩa thống kê của entropi.....                                                   | 414 |
| §10. Các hiện tượng vận chuyển. Sự dẫn nhiệt. Chuyển động Brown.....                                     | 421 |
| §11. Chuyển pha.....                                                                                     | 436 |
| §12. Các hiện tượng bề mặt.....                                                                          | 446 |
| PHỤ LỤC.....                                                                                             | 455 |
| TÀI LIỆU THAM KHẢO.....                                                                                  | 457 |

*Chịu trách nhiệm xuất bản:*  
Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI  
Tổng biên tập kiêm Phó Tổng Giám đốc NGUYỄN QUÝ THAO

*Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung:*  
Phó Tổng biên tập NGÔ ÁNH TUYẾT  
Giám đốc Công ty CP Sách ĐH—DN NGÔ THỊ THANH BÌNH

*Biên tập nội dung và sửa bản in:*  
NGUYỄN VĂN THUẬN

*Trình bày bìa:*  
ĐINH XUÂN DŨNG

*Chế bản:*  
THÁI SƠN

---

Công ty CP Sách Đại học – Dạy nghề, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam  
giữ quyền công bố tác phẩm.

---

**TUYỂN TẬP CÁC BÀI TẬP VẬT LÝ ĐẠI CƯƠNG**

(Dùng cho các trường Đại học có các chuyên ngành vật lý, vật lý kỹ sư  
và vật lý kỹ thuật)

**TẬP MỘT : CƠ HỌC, NHIỆT HỌC VÀ VẬT LÝ PHÂN TỬ**

**Mã số: 7B764y3-DAI**

Số đăng kí KHXB : 54 - 2013/CXB/ 55- 51/GD

In 500 cuốn (QĐ in số : 05), khổ 16 x 24 cm.

In tại Công ty CP in và vật tư Hải Dương.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 02 năm 2013.