Phương án thực hành

Mục tiêu

Mục tiêu chính của phần thí nghiệm trong các kỳ Olympic Vật lý là giới thiệu cho học sinh trung học một số thiết lập thí nghiệm đơn giản nhưng đủ thú vị, có thể dẫn đến việc đo lường một số tham số với độ chính xác cao nhất có thể, sử dụng cách tiếp cận sáng tạo dựa trên một lượng hạn chế các thiết bị *cơ bản* được cung cấp. Học sinh cần thực hiện đo lường một số tham số thông qua thí nghiệm và xử lý chính xác tất cả dữ liệu đo được.
Đối với bài phương án thực hành ở dạng viết, học sinh cần:

1. Mô tả cấu hình đo lường, cách lắp đặt
2. Nêu cơ sở lý thuyết của phép đo
3. Mô tả lại quá trình thực hiện đo lường (Đối với Olympic thì làm thật)
4. Mô tả lại quá trình xử lý số liệu (Xử lý số liệu thật nếu thi)

Trong nhiều dạng bài phương án thực hành, đề sẽ yêu cầu xác định giá trị của một số hằng số vật lý cơ bản hoặc tính chất vật lý của vật liệu phổ biến. Trong trường hợp thí sinh sử dụng giá trị được ghi nhớ , việc chỉ đơn thuần nêu số đó mà không thực hiện phép đo thực tế sẽ không được tính phần điểm nào.
Biết một số giá trị số có thể mang lại lợi thế đáng kể để kiểm tra các phép đo và tính toán của bạn. Cho dù thiết bị thí nghiệm đơn giản được cung cấp cho thí sinh Olympic Vật lý như thế nào, các con số thực tế dựa trên các phép đo thường nên nằm trong khoảng độ chính xác từ 10-30%

Các thông số thường gặp

Gia tốc trọng trường:

$$g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$$

Hằng số khí phổ quát:

$$R = 8.31\ \mathrm{J/mol/K}$$

Hằng số Planck:

$$h = 6.63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$$

Hằng số Boltzmann:

$$k = 1.38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J/K}$$

Điện tích cơ bản:

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19}\mathrm{C}$$

Khối lượng electron:

$$m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

Hằng số điện môi của chân không:

$$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} C^2/N/m^2$$

Độ từ thẩm của chân không:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} T \cdot m/A$$

Hằng số Stefan-Boltzmann:

$$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} W/m^2/K^4$$

Hằng số dịch chuyển Wien:

$$b = 2.9 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

Ở các bậc thi cao hơn như APhO hay IPhO, mục tiêu được yêu cầu xác định không phải là các hằng số trong vật lý, mà thường sẽ gặp các thông số vật lý của một số vật liệu, các đề thi APhO và IPhO thường có sai số rơi vào khoảng 10-20%.

Khối lượng riêng của các chất $\left(\text{kg/m}^3\right)$

gỗ bần	200
than chì	1600
nước đá	910
thủy tinh	2500
nhôm	2700
kẽm	7000
sắt	7800
đồng	8900
chì	11300
nước	1000
glycerin	1260
dầu hỏa	800
cồn	790
dầu	900
thủy ngân	14
không khí	1.29

Nhiệt dung riêng $\left(J/\text{kg}/\text{K}\right)$:

nhôm	900
đồng	400
sắt	450
chì	130
nước đá	2100
nước	4200
cồn	2400
dầu hỏa	2000

Nhiệt hóa hơi riêng $\left(\cdot 10^{6} \mathrm{~J} / \mathrm{kg}\right)$:

nước	2.3
cồn	0.8

Hệ số giãn nở tuyến tính $\left(\cdot 10^{-6} \mathrm{~K}^{-1}\right)$:

nhôm	23
đồng	19
thủy tinh	8.5

Hệ số giãn nở thể tích $\left(\cdot 10^{-4} K^{-1}\right)$:

nước	2
dầu hỏa	10
cồn	11

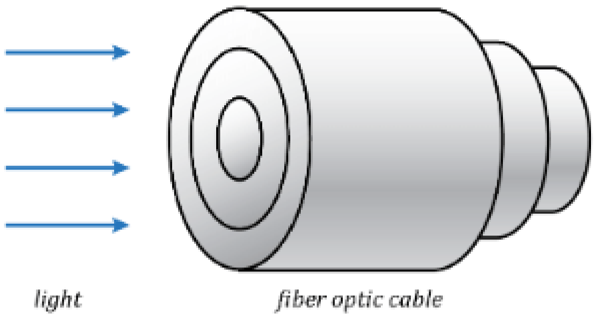
Mô đun Young $\left(\cdot 10^{9} \mathrm{~Pa}\right)$:

chì	16
nhôm	70
đồng	130
gỗ	\$5 – 15\$

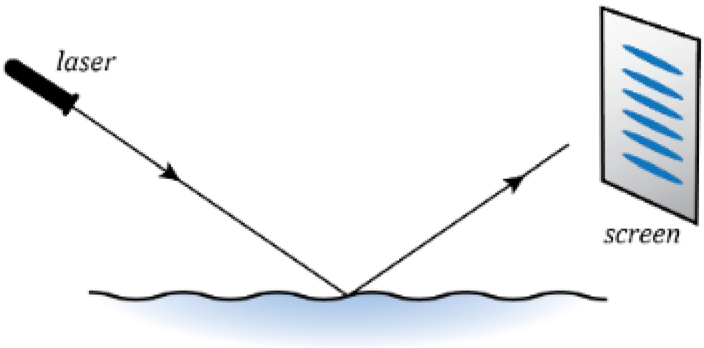
Sức căng bề mặt $\left(\cdot 10^{-3} \mathrm{~N} / \mathrm{m}\right)$:

nước	73
cồn	22
nước xà phòng	40
sữa	45
thủy ngân	490

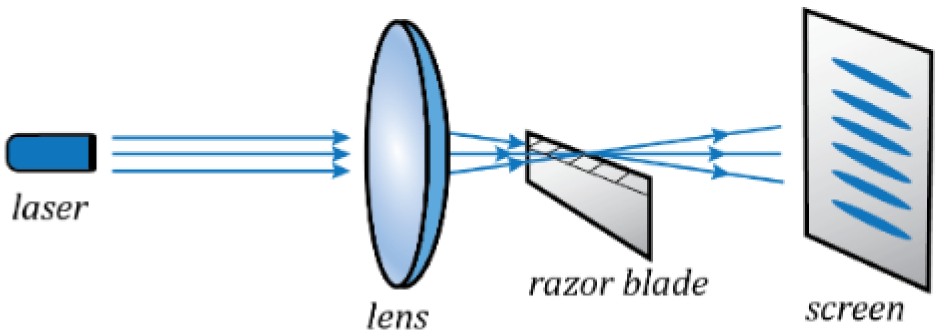
- Đề IPhO 2013 hỏi chỉ số khúc xạ (chiết suất) n của dây cáp quang, kết quả chính thức của cáp quang BTC cung cấp là 1.54



- IPhO 2015 yêu cầu xác định hệ số sức căng bề mặt của nước dựa trên mẫu nhiễu xạ từ các sóng sức căng bề mặt. Đáp án với chất lỏng mà BTC cho là $59.2 \cdot 10^{-}3N/m$



- IPhO 2009 yêu cầu xác định bước sóng λ của diode laser đỏ. Đáp án của BTC cho với mẫu máy phát là 663 nm



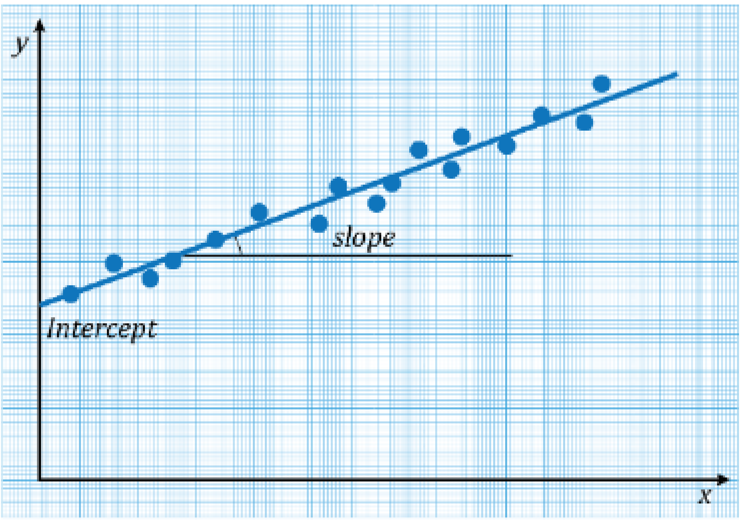
- APhO 2007 yêu cầu xác định hệ số giãn nở nhiệt của một mẫu kính, đáp án của BTC là $7.19 \cdot 10^{-6\circ}C^{-1}$

Các dạng bài tập

- Bài tập ở mức IPhO và APhO thường sẽ nêu rõ setup thực hành và yêu cầu đo đạc + xử lý số liệu, lý do là vì sử dụng các thiết bị thật và cần tuân thủ các tiêu chuẩn an toàn.
- Bài tập thực hành ở mức VPhO cũng sẽ nêu rõ setup thực hành hoặc nếu không, rất dễ phát hiện vì đã có sẵn các dụng cụ đo được BTC chuẩn bị.
- Bài tập Phương án thực hành trên giấy sẽ có thể không nêu bất cứ dụng cụ gì và cho chọn, dẫn đến việc để giải các BT PATH thì cần nắm rõ các setup thực nghiệm kinh điển, tuy nhiên các trường chuyên có thể cài cắm các setup hiếm gặp để lấy lợi thế.
- Bài tập Phương án thực hành trên giấy sẽ cần nêu rõ cơ sở lý thuyết và phương án xử lý số liệu ở dạng phương trình để có điểm tối đa.

Hồi quy tuyến tính - Linearization

Hồi quy tuyến tính là phương pháp xử lý số liệu chính hay dùng trong các bài thực nghiệm APhO và IPhO, với thực tế là các bài tập ở mức độ Olympic thấp hơn như 30/4 hay TST vòng 2 cũng thường bê các bài PhO về rồi làm nhẹ đi. Phương pháp hồi quy tuyến tính gần như có thể áp dụng cho mọi dạng đồ thị như là một phương án để chuyển các dạng đồ thị này dạng đồ thị tuyến tính.
Ví dụ : Với hàm $y = ax^2$ thì phương án hồi quy tuyến tính là vẽ đồ thị của hàm $y(a^2)$ thay vì $y(x)$ (parabol)
Dạng hình đồ thị kết quả của xử lý số liệu là một đám mây các điểm toạ độ có xu hướng dóng theo một đường thẳng.



Các tham số của đường hồi quy (thường gặp nhất là độ dốc) và giao điểm với các trục cho thông tin về tính chất đặc trưng của hệ đang được nghiên cứu tỏng bài thực nghiệm. Do đó, mục tiêu chính là chọn bộ phép biến đổi thích hợp cho các tham số đo được ,vẽ đồ thị với mối quan hệ tuyến tính và tính toán các tham số chưa biết của hệ thống dựa trên độ dốc của đường thẳng hoặc giao điểm của nó với các trục.

Xác định sai số của phép đo

Thực tế, tất cả các thiết bị đo sẽ đều có sai số, các sai số này gọi là *Sai số dụng cụ*. Trong tình huống thực nghiệm cẩn thận và dụng cụ đã hiệu chỉnh đúng, giá trị sai số dụng cụ *của từng dụng cụ* là các giá trị sai số được ghi trong cấu hình của các thiết bị đo.
Khi thực hiện các phép đo và sau đó là lập các phương trình tuyến tính, các đại lượng được đo đạc sẽ ở trong một biểu thức với các phép tính cơ bản như nhân, chia, cộng , trừ, luỹ thừa, khiến cho các sai số này có thể bị khuếch đại.
Mục tiêu của việc xác định sai số chính là xác định sai số của kết quả phép biến đổi do sử dụng các đại lượng đã đo được bởi các dụng cụ có sai số riêng.

Sai số tuyệt đối của phép đo trực tiếp

Có 3 loại sai số tuyệt đối của phép đo trực tiếp:
Sai số tuyệt đối của phép đo riêng biệt: $\Delta a_i = |a_i - \bar{a}|$

Sai số tuyệt đối của phép đo riêng biệt phản ánh độ chênh lệch của giá trị đo được và giá trị thực a của đại lượng cần đo.
Có thể thay thế a bởi $\bar{a}$ mà không làm thay đổi ý nghĩa của nó, vì a chỉ có giá trị trên lý thuyết còn trong đo lường, giá trị quan trọng là $\bar{a}$, nó xuất hiện nhiều lần trong biểu thức sai số.

Sai số tuyệt đối trung bình của phép đo: $\Delta\bar{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta a_i$.

Sai số tuyệt đối thực của phép đo: $\alpha = \left|a - \bar{a}\right|$

Các loại sai số chủ yếu:

- Sai số ngẫu nhiên: Là sai số trong các lần đo do thị giác, điều kiện mỗi lần đo không ổn định. Kết quả đo lúc thì lớn hơn, lúc thì bé hơn giá trị thực.
  Cách khắc phục: Đo cẩn thận nhiều lần. Xác định giá trị trung bình theo phương pháp thống kê.
- Sai số dụng cụ: Do các linh kiện và cấu tạo cùa các thiết bị đo.
- Sai số hệ thống: Làm cho kết quả đo luôn lớn hơn hoặc bé hơn giá trị thực.
  Nguyên nhân chủ yếu: Do thực nghiệm chưa cẩn thận hoặc do dụng cụ chưa hiệu chình đúng.
  Đây là sai số có thề khắc phục được.

Sai số tương đối của phép đo trực tiếp:

Để đánh giá mức độ chính xác của phép đo ta đưa vào sai số tương đối (còn gọi là sai số tỉ đối) được định nghĩa như sau:

$$\delta a = \frac{\overline{\Delta a}}{\bar{a}} \cdot 100\%$$

Và ta viết kết quả đo của đại lượng cần đo là: $a = \bar{a} \pm \overline{\Delta a}$ hoặc $a = \bar{a} \pm \delta a\%$

Khi thực hiện các bài tập PATH trên giấy, ít nhất cần nêu rõ được các sai số sẽ xuất hiện, cách khắc phục các sai số. Đặc biệt, cần tính sai số ở kết quả cuối cùng - là kết quả của các phép đo gián tiếp.

Sai số tuyệt đối của phép đo gián tiếp:

Sai số tuyệt đối của tổng bằng tổng các sai số tuyệt đối của từng số hạng.
Với $X = a + b$ và $a = \bar{a} \pm \Delta a, b = \bar{b} \pm \Delta b$ thì

$$\Delta X = \Delta a + \Delta b$$

Sai số tuyệt đối của hiệu bằng tổng các sai số tuyệt đối của từng số hạng.
Với $X = a - b$ và $a = \bar{a} \pm \Delta a, b = \bar{b} \pm \Delta b$ thì

$$\Delta X = \Delta a + \Delta b$$

Lý do là vì, các sai số tuyệt đối không phân biệt về dấu, ý nghĩa vật lí của nó chính là độ chênh lệch của giá trị đo được so với giá trị thực, vì thế khi đại lượng được xác định bằng hiệu của hai đại lượng đã đo với sai số tuyệt đối của phép đo trực tiếp, độ lệch khỏi giá trị thực sẽ vẫn là tổng sai số tuyệt đối.

- Sai số tuyệt đối của tích $\mathrm{X} = a \cdot b$ là

$$\Delta X = \bar{a} \cdot \Delta b + \bar{b} \cdot \Delta a$$

- Sai số tuyệt đối của thương $\mathrm{X} = \frac{a}{b}$ là

$$\Delta X = \frac{\bar{b}\Delta a + \bar{a}\Delta b}{(\bar{b})^2}$$

Sai số tương đối của phép đo gián tiếp

Sai số tương đối của tổng

$$X = a + b : \frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta a + \Delta b}{a + b}$$

Sai số tương đối của hiệu

$$X = a - b : \frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta a + \Delta b}{a - b}$$

Sai số tương đối của tích

$$X = a \cdot b : \frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

Sai số tương đối của thương

$$X = \frac{a}{b}, \frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

Quy tắc tính sai số của phép đo gián tiếp

Giả sử đại lượng đo gián tiếp A có giá trị thực là a được diễn tả với sự phụ thuộc vào các đại lượng đo trực tiếp $\mathrm{x, y, z}$ bằng biểu thức toán học $\mathrm{F(x, y, z)}$. Trong đó:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x, \quad y = \bar{y} \pm \Delta y, \quad z = \bar{z} \pm \Delta z$$

khi ta thay $\mathrm{x, y, z}$ trong $\mathrm{F(x, y, z)}$ ta sẽ được giá trị trung bình $\overline{\mathrm{a}} = \mathrm{F}(\overline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{y}}, \overline{\mathrm{z}})$.
Sai số $\overline{\Delta a}$ được tính theo một trong hai quy tắc sau:

Quy tắc vi phân toàn phần

1. Lấy vi phân toàn phần hàm $\mathrm{A = F(x, y, z)}$, sau đó nhóm các số hạng có chứa vi phân của cùng biến số:

$$dA = \frac{\delta F}{\delta x} dx + \frac{\delta F}{\delta y} dy + \frac{\delta F}{\delta z} dz$$

2. Lấy các giá trị tuyệt đối của biểu thức đứng trước dấu vi phân (do ta chưa biết rõ dấu của các đạo hàm riêng phần, hơn nữa ta muốn chắc chắn giá trị tìm được phải chứa giá trị thực a).
3. Thay dấu vi phân "d" bằng dấu gia số " Δ " (cũng là dấu sai số), ta sẽ được sai số tuyệt đối $\overline{\Delta a}$
4. Từ đó ta suy ra sai số tương đối nếu cần bằng cách lấy sai số tuyệt đối $\overline{\Delta a}$ chia cho giá trị trung bình $\bar{a}$.

   Ví dụ: Đo chu kỳ dao động của con lắc đơn: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, trong đó $l = \bar{l} \pm \Delta l, g = \bar{g} \pm \Delta g\cdot$ Hãy tìm ΔT?

$$dT = 2\pi \left(\frac{dl}{2g\sqrt{\frac{l}{g}}} - \frac{ldg}{2g^2\sqrt{\frac{l}{g}}} \right)$$

$$\Delta\overline{T} = \frac{\pi}{g\sqrt{\frac{l}{g}}} \left(\Delta l - \frac{l}{g} \Delta g \right)$$

Quy tắc Log e

1. Lấy log e của hàm $F(x, y, z)$
2. Tính vi phân hai vế của hàm $\mathrm{F(x, y, z)}$, sau đó nhóm các số hạng có chứa vi phân của cùng một biến số.
3. Lấy giá trị tuyệt đối của biểu thức đứng trước dấu vi phân d.
4. Thay dấu $(-)$ bằng dấu $(+)$ trong các biểu thức vi phân toàn phần
5. Thay dấu vi phân "d" thành dấu sai số " Δ ".
6. Tính $\overline{\Delta a} = \bar{a} \cdot \delta a$

Ví dụ: Đo một đại lượng gián tiếp x thông qua các đại lượng trực tiếp là $\mathrm{a, b}$ được liên hệ với với nhau bởi biểu thức:

$$x = \frac{a - \sqrt{a}}{a^2 + 2b}$$

, trong đó: $a = \overline{a} \pm \Delta a; b = \overline{b} \pm \Delta b$. Xác định Δx ?

$$x = \frac{a - \sqrt{a}}{a^2 + 2b}$$

Lấy Log e

$$\ln x = \ln\left(a-\sqrt{a}\right) - \ln\left(a^2+2b\right)$$
$$\frac{dx}{x} = \frac{d(x-\sqrt{a})}{a-\sqrt{a}} - \frac{d\left(a^2+2b\right)}{a^2+2b}$$
$$= -\frac{da}{a-\sqrt{a}} - \frac{\frac{da}{2\sqrt{a}}}{a-\sqrt{a}} - \frac{2ada}{a^2+2b} - \frac{2db}{a^2+2b}$$
$$\frac{\Delta x}{x} = \left|\frac{2}{a-\sqrt{a}} - \frac{1}{2a(\sqrt{a}-1)} - \frac{2a}{a^2+2b}\right|\Delta a + \frac{2}{a^2+2b}\Delta b$$
$$\Delta x = \left\{\left|\frac{1}{a-\sqrt{a}} - \frac{1}{2a(\sqrt{a}-1)} - \frac{2a}{a^2+2b}\right|\Delta a + \frac{2}{a^2+2b}\Delta b\right\}\frac{a-\sqrt{a}}{a^2+2b}$$

Bài tập ví dụ

Hồi quy tuyến tính

Ví dụ

Các nguyên tắc cơ bản của kỹ thuật tuyến tính hóa có thể được phác thảo trong một bài toán thực nghiệm nổi tiếng về đo gia tốc trọng trường g tại bề mặt Trái đất bằng cách sử dụng một con lắc đơn và một đồng hồ bấm giờ.

Trong thí nghiệm này, một vật nặng (còn gọi là quả lắc) được treo vào một sợi dây mảnh có chiều dài L. Khi quả lắc được kéo ra khỏi vị trí cân bằng một góc nhỏ và thả ra, nó sẽ dao động với chu kỳ T được cho bởi công thức:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Trong đó g là gia tốc trọng trường.
Để giảm thiểu sai số, nhưng cũng tiết kiệm thời gian đối với đo đạc con lắc đơn, thời gian đo thường không phải 1 chu kỳ của con lắc mà thường là các mức 5-10-20 chu kỳ với các chiều dài L khác nhau và mỗi lần đo thực hiện lại 2 lần bổ sung để lấy trung bình.
Việc thực hiện phép đo sẽ cho một bảng kết quả gồm 4 cột

L, cm	t_1, s	t_2, s	t_3, s

Đối với bài toán cụ thể này, dựa trên phương trình dao động của con lắc đơn, chúng ta mong đợi có một đường thẳng từ mối quan hệ giữa T và $\sqrt{L}$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\cdot\sqrt{L} \quad \text{như} \quad y = k\cdot x$$

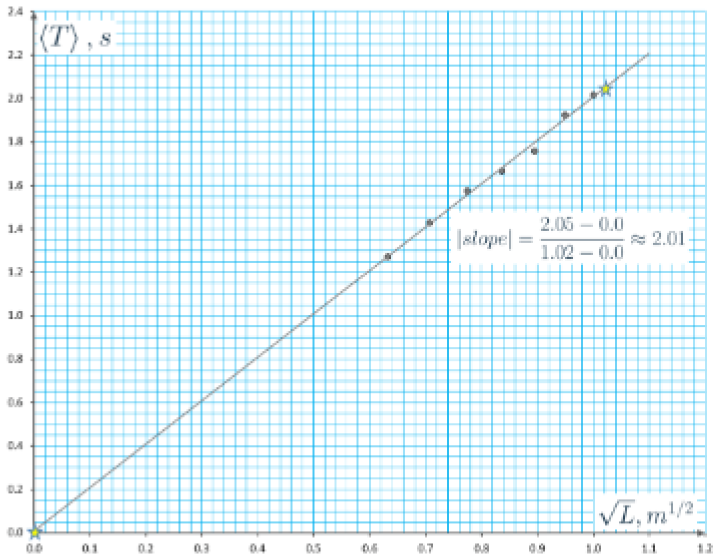
với độ dốc của đường thẳng k bằng

$$|\text{ độ dốc }| = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}$$

Hãy thêm một cột nữa vào bảng để tính $\sqrt{L}$:

L, cm	t_1, s	t_2, s	t_3, s	$\langle T \rangle, s$	$\sqrt{L}, m^{1/2}$

Vẽ đồ thị cho đồ thị $\sqrt{L}$ (trục x) và T (trục y).
Với việc thực hiện phép xác định độ dốc trên giấy kẻ ô



Các điểm dữ liệu sẽ được xác định nằm dọc theo một đường thẳng với độ dốc *nên có giá trị* gần với $\frac{2\pi}{\sqrt{g}}$

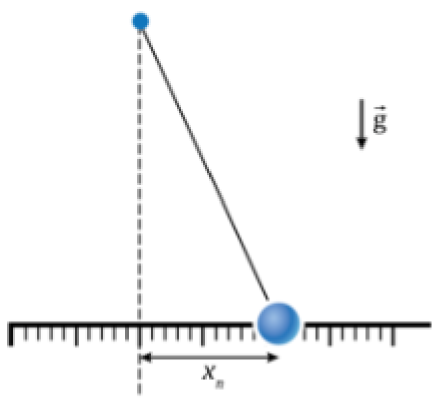
$$g = \frac{4\pi^2}{|\text{ độ dốc }|^2}$$

Tới đây, việc xác định sai số là cần thiết cho phép đo gián tiếp g.

Ví dụ

Zhautykov Olympiad 2009

Con lắc đơn dao động trong trường trọng lực với một quả bóng bàn gắn ở cuối dây dài. Do sức cản không khí, dao động điều hoà của con lắc là dao động tắt dần. Với biểu thức biên độ của quả bóng X_n sau n chu kỳ



$$X_n = \frac{A}{1 + Bn}$$

BTC gợi ý phương án đo : Đo biên độ dao động của mỗi lần dao động trong quá trình tắt dần (10 lần), lặp lại 3 lần đo.
Bảng số liệu sẽ có dạng

n	Xn, cm	Xn, cm	Xn, cm

Dựa vào kết quả đo X_n, nêu phương án xử lý số liệu để xác định giá trị B

Giải

Để có một mối quan hệ tuyến tính, chúng ta hãy nghịch đảo biểu thức ban đầu thành

$$\frac{1}{X_n} = \frac{1}{A} + \frac{B}{A} \cdot n$$

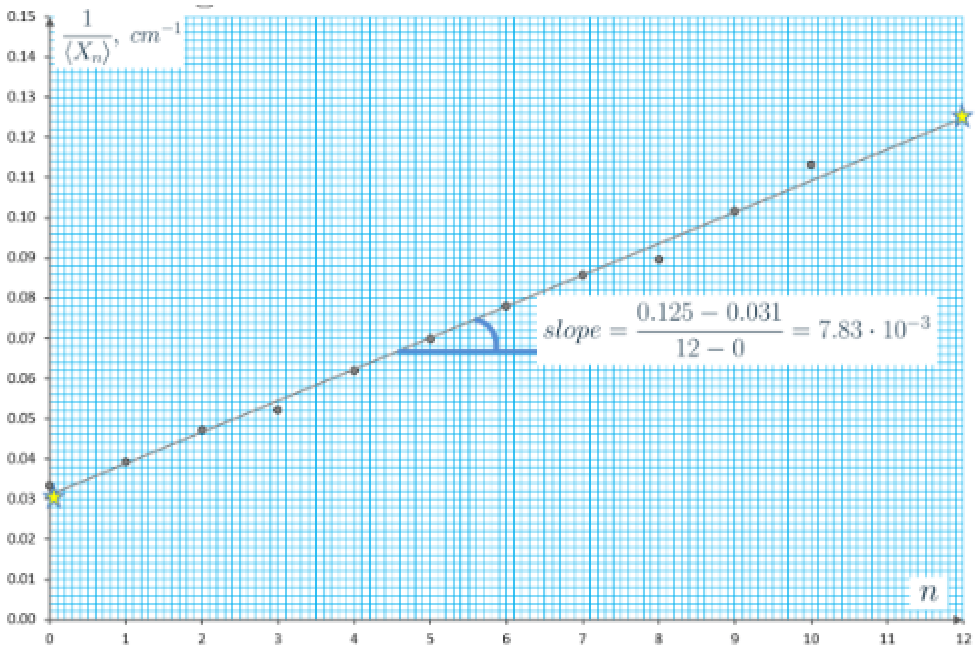
điều này tương tự như một phương trình tuyến tính thông thường

$$y = a + bx$$

Do đó, nếu vẽ đồ thị hàm số $1/X_n(n)$, chúng ta sẽ mong đợi một đường thẳng cắt trục tung tại giá trị $1/A$ và có độ dốc B/A.
Bây giờ chúng ta hãy tính biên độ trung bình $\langle X_n \rangle$ của cả ba tập dữ liệu thực nghiệm và các giá trị nghịch đảo $1/\langle X_n \rangle$.

n	Xn, cm	Xn, cm	Xn, cm	⟨Xn⟩, cm	1/⟨Xn⟩

Các điểm số liệu trên giấy kẻ ô



Vẽ đường thẳng đi qua tất cả các điểm dữ liệu. Tìm được giao điểm với trục thẳng đứng $\frac{1}{A}$
Độ dốc $\frac{B}{A}$
Tới đây, B được xác định qua phép đo gián tiếp.
Cần thiết xác định sai số của B từ phép đo gián tiếp

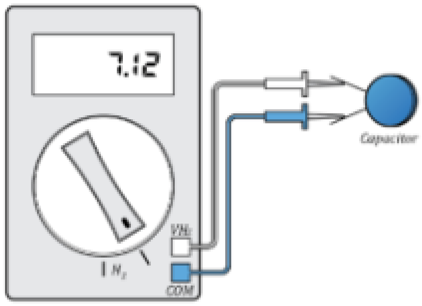
Ví dụ

IPhO 2011

Một phần bài thi thực hành của IPhO 2011 cho, tần số dao động ν của một bộ dao động tích thoát phụ thuộc vào điện dung của tụ điện C theo công thức

$$\nu = \frac{a}{b + C}$$

trong đó a và b là các hằng số. Trong bài toán thực nghiệm, ban tổ chức đã cung cấp một bộ tụ điện với các giá trị điện dung đã biết, trong khi tần số có thể được đo bằng một đồng hồ đo kỹ thuật số cho trước.



Bảng số liệu có dạng

C, pF	ν, kHz

Dựa vào kết quả đo, nêu phương án xác định a

Giải

Để có được một mối quan hệ tuyến tính, chúng ta hãy biến đổi phương trình đã cho thành

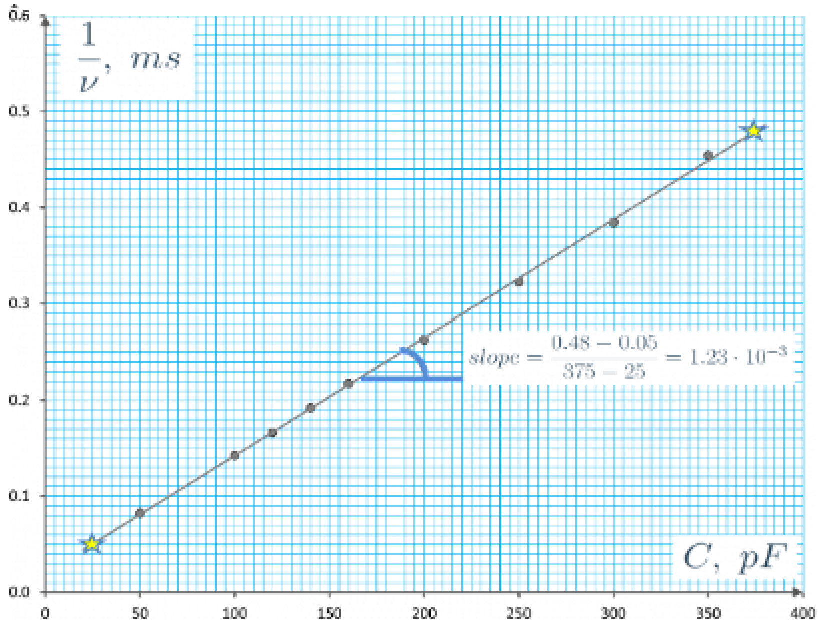
$$\frac{1}{\nu} = \frac{b}{a} + \frac{1}{a} \cdot C$$

Từ biểu thức này, rõ ràng chúng ta nên mong đợi dữ liệu sẽ gần với đường thẳng được vẽ trên hệ tọa độ $1/\nu$ và C với độ dốc bằng

$$\text{độ dốc} = \frac{1}{a}$$

Do đó, chúng ta hãy thêm một cột nữa với các tính toán $1/\nu$

C, pF	ν, kHz	$1/\nu, ms$



Đồ thị trên giấy kẻ ô sẽ có dạng đường thẳng. Xác định độ dốc.
Cuối cùng, giá trị a có thể được xác định qua phép đo gián tiếp

$$a = \frac{1}{\text{độ dốc}}$$

Cần thiết xác định sai số của a từ phép đo gián tiếp

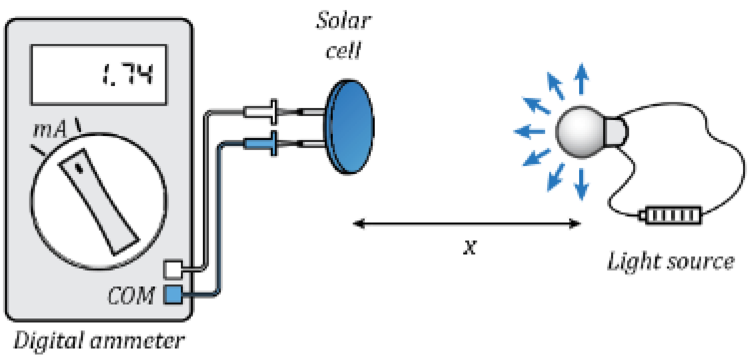
Ví dụ

IPhO 2013

Một pin mặt trời tạo ra dòng điện bằng cách biến đổi năng lượng điện từ của ánh sáng tới. Cường độ dòng điện I được tạo ra bởi pin mặt trời phụ thuộc vào khoảng cách tới nguồn sáng x theo công thức

$$I(x) = \frac{I_0}{1 + \alpha x^2}$$

trong đó I_0 và α là các hằng số liên quan đến thiết lập thực nghiệm.



Bảng số liệu có dạng

$x,\ \text{cm}$	I, mA

Dựa vào kết quả đo, nêu phương án xác định α

Giải

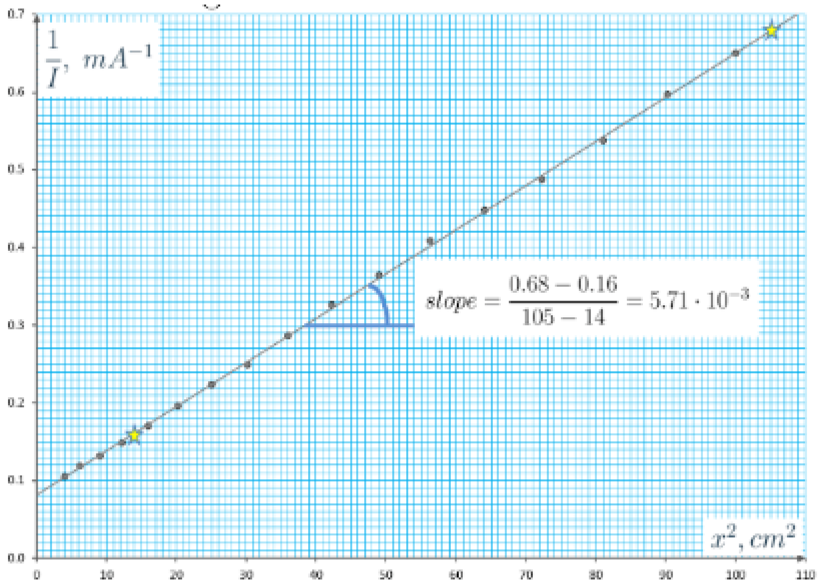
Việc tuyến tính hóa dữ liệu có thể đạt được bằng cách biến đổi mối quan hệ ban đầu giữa dòng điện I được tạo ra bởi pin mặt trời theo hàm của khoảng cách x tới nguồn sáng bằng cách nghịch đảo phương trình gốc như sau

$$\frac{1}{I} = \frac{1}{I_0} + \frac{\alpha}{I_0}x^2$$

Vì vậy, chúng ta tiên đoán sẽ có một đường thẳng được tạo thành bởi dữ liệu thực nghiệm được vẽ trên hệ tọa độ $1/I$ và x^2. Để làm điều đó, hãy thêm hai cột nữa vào bảng đo với các giá trị tính toán của x^2 và $1/I$.

$x,\ \mathrm{cm}$	I, mA	$x^2,\ \mathrm{cm}^2$	$1/I, mA^{-1}$

Đồ thị trên giấy ô li sẽ có dạng đường thẳng



Từ đồ thị, các tham số sau của đường hồi quy có thể được suy ra

$$\text{điểm cắt trục tung} = \frac{1}{I_0}$$
$$\text{độ dốc} = \frac{\alpha}{I_0}$$

Kết hợp cả hai kết quả dẫn đến câu trả lời cuối cùng:

$$\alpha = \frac{\text{độ dốc}}{\text{điểm cắt trục tung}}$$

Xác định sai số của phép đo gián tiếp cho α

Quy luật bậc cao

Mối tương quan giữa hai tham số x và y trong nhiều ứng dụng, ví dụ như chuyển động có gia tốc, có thể được xấp xỉ bằng một hàm đa thức

$$y = ax^n$$

trong đó a và n là các hằng số chưa biết, có thể được tính toán dựa trên dữ liệu từ nhiều phép đo y và x. Để tuyến tính hóa dữ liệu, lấy logarit tự nhiên cho cả hai vế của phương trình đa thức:

$$\ln y = \ln a + n \ln x$$

Như có thể thấy từ biểu thức cuối cùng, dữ liệu tuân theo quy luật tương quan được vẽ trên hệ tọa độ $\ln y$ và $\ln x$ sẽ tạo thành một đường thẳng với điểm cắt trục tung và độ dốc lần lượt bằng $\ln a$ và n.

Ví dụ

Dựa trên các suy luận lý thuyết, mối tương quan giữa các tham số x và y được mong đợi có dạng

$$y = ax^n$$

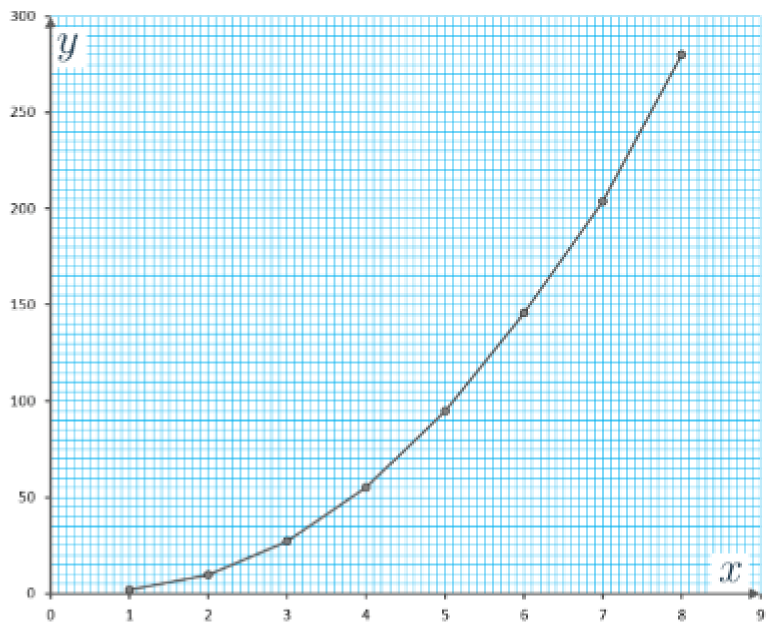
Kết quả đo thực nghiệm:

x	y

Dựa trên kết quả đo thực nghiệm, xác định giá trị a và n với độ chính xác tối đa

Giải

Lý do tại sao đề bài nhấn mạnh *độ chính xác tối đa*, đấy là vì trên lý thuyết, vẫn có thể khảo sát hàm $y(x)$ với dạng nguyên bản luỹ thừa của nó, nhưng với ví dụ này thì không.
Bộ dữ liệu gốc khi plot $y(x)$ trên giấy ô li có dạng

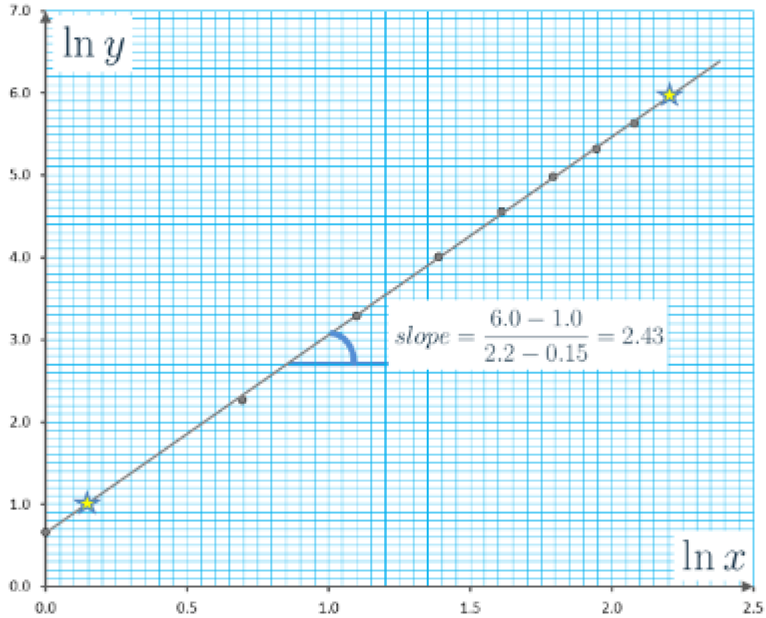


Đồ thị có dạng hình cong và không biến đổi tuyến tính.
Vấn đề sai số khi plot một đồ thị cong là rất lớn, đó là khi ước chừng đường đi của đồ thị, đồ thị

dạng cong sẽ có sai số rất lớn. Đặc biệt là dựa vào đồ thị cong trên không thể xác định a. Và đặc biệt là đồ thị cong này có thể là nhánh dương của bất kỳ bậc luỹ thừa nào, không thể rút ra kết luận có giá trị.
Chính vì thế cần đưa về hồi quy tuyến tính giữa $\ln(y)$ và $ln(x)$.
Bổ sung cột $\ln(y)$ và $ln(x)$

x	y	$\ln x$	$\ln y$

Plot lên giấy ô li sẽ cho kết quả một đường thẳng gần như hoàn hảo.



Sử dụng bất kỳ hai điểm nào trên đường thẳng, cho phép tính độ dốc của đường thẳng, bằng với số mũ n trong quy luật mũ:

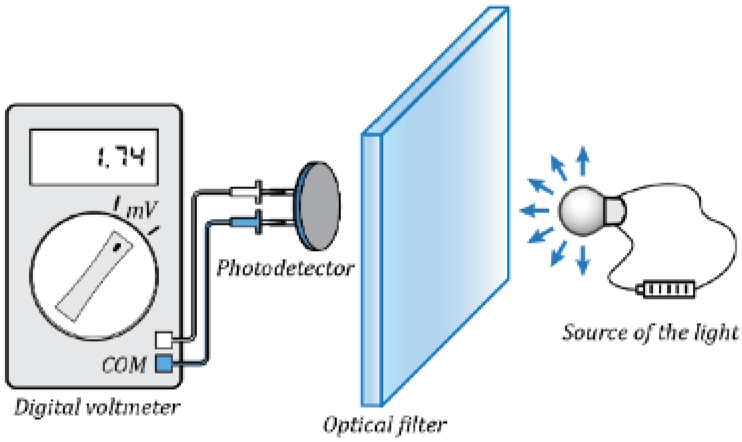
$$\text{độ dốc} = n$$

Điểm cắt trục tung có thể lấy trực tiếp từ đồ thị, cho phép ước tính hệ số khác của quy luật mũ a:

$$\text{điểm cắt trục tung} = \ln a \quad \Rightarrow \quad a$$

Ví dụ

BelPhO 2012
Một bộ lọc quang học là một tấm kính hoặc nhựa rất mỏng, cho phép truyền qua có chọn lọc ánh sáng với các bước sóng khác nhau, trong khi hấp thụ phần còn lại của quang phổ. Phần ánh sáng t truyền qua bộ lọc quang học mỏng được đo bằng cách phát hiện cường độ I được tạo ra bởi pin mặt trời với và không có bộ lọc quang học.



Kết quả của các phép đo cho một thiết lập thực nghiệm với vị trí cố định của nguồn sáng và đầu dò quang được ghi lại trong bảng có dạng

k	I, mV

trong đó k là số lượng các bộ lọc mỏng giống nhau được đặt giữa đèn và đầu dò quang, trong khi I là điện áp quan sát được trên vôn kế kỹ thuật số được tạo ra bởi pin mặt trời.
Dựa vào kết quả đo để xác định tỉ lệ ánh sáng truyền qua tấm t.

Giải

Gọi I_0 là cường độ ánh sáng quan sát được tại đầu dò quang từ nguồn sáng khi không có bộ lọc quang học giữa chúng. Rõ ràng là sau khi đặt k bộ lọc liên tiếp, cường độ ánh sáng cuối cùng đến đầu dò quang sẽ giảm đáng kể như sau

$$I = I_0 t^k$$

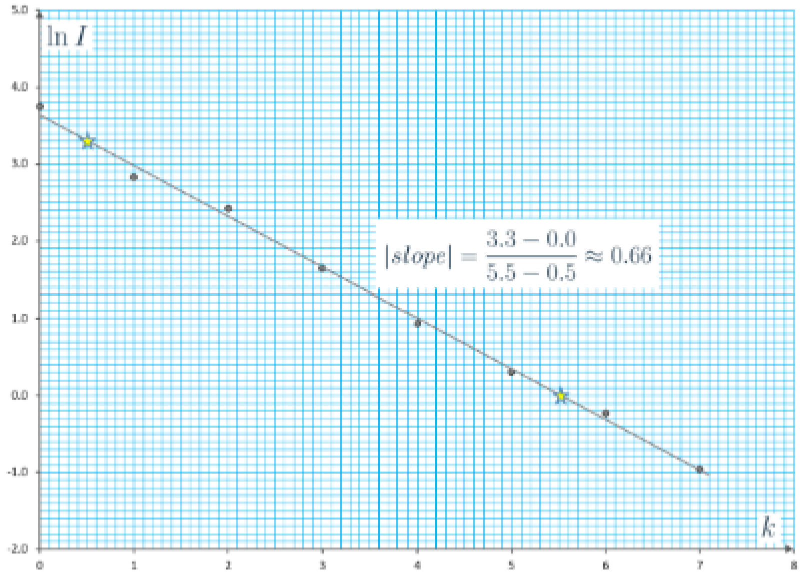
Để tuyến tính hóa dữ liệu, chúng ta hãy lấy logarit tự nhiên ở cả hai vế của phương trình cuối cùng:

$$\ln I = \ln I_0 + k \ln t$$

Vì vậy, chúng ta nên mong đợi một mối quan hệ tuyến tính khi vẽ đồ thị $\ln I$ theo k, vì vậy chúng ta hãy thêm một cột nữa vào bảng đo với tính toán của $\ln I$:

k	I, mV	ln I

Plot các điểm dữ liệu sẽ cho dạng đường thẳng dốc xuống



$$|\text{độ dốc}| = \ln t.$$

Trong bài toán này, độ dốc của đường hồi quy là một số âm, khi đó hệ số truyền ánh sáng qua một bộ lọc đơn có thể được ước tính như sau

$$t = \exp(|\text{độ dốc}|)$$

Quy luật luỹ thừa

Nhiều hiện tượng trong tự nhiên có thể được mô hình hóa bằng một hàm số mũ

$$y = a\exp(bx)$$

trong đó a và b là các hằng số đặc trưng cho mối tương quan hàm mũ giữa các tham số x và y. Để ước lượng các hằng số a và b dựa trên các phép đo x và y, cách tiếp cận tốt nhất là vẽ dữ liệu trong hệ tọa độ thích hợp, nơi nó sẽ tạo thành một đường thẳng.

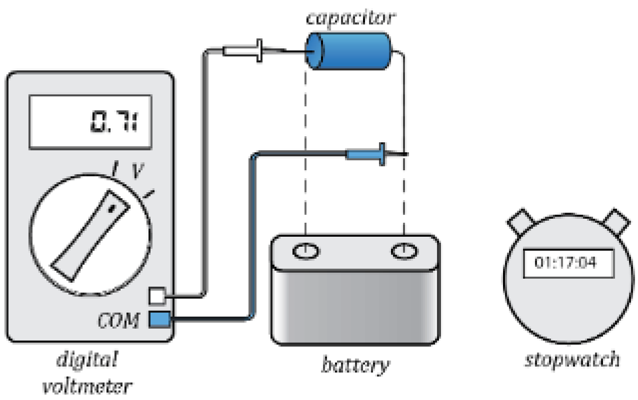
Hãy lấy logarit tự nhiên từ cả hai vế của phương trình:

$$\ln y = \ln a + bx$$

Vì vậy, nếu vẽ đồ thị $\ln y$ theo x, chúng ta có thể mong đợi có một đường thẳng với điểm cắt trục tung bằng $\ln a$ và độ dốc của đường thẳng bằng hằng số b.

Ví dụ (không gợi ý setup)

Trong bài tập thực nghiệm, người tham gia được yêu cầu ước tính điện trở trong của một vôn kế kỹ thuật số cho trước bằng cách sử dụng pin, dây dẫn, đồng hồ bấm giây và tụ điện với điện dung đã biết $C = 50\mu F$. Sử dụng thiết bị được cung cấp, một sinh viên đo điện áp U trên vôn kế theo hàm của thời gian t sau khi kết nối tất cả các phần tử trong mạch điện sau



Kết quả đo:

$\mathrm{U, V}$	$\mathrm{t, s}$

Dựa trên kết quả do, xác định trở kháng trong vôn kế kỹ thuật số R_V

Giải

Tại thời điểm khi tụ điện mang điện tích $|q|$ và dòng điện I trong mạch, từ định luật Kirchhoff

$$\frac{q}{C} + IR_V = 0$$

Theo định nghĩa của dòng điện

$$I = -\frac{dq}{dt}$$

chúng ta có một phương trình vi phân đơn giản, có thể được tích phân bằng cách tách biến, với kết quả

$$q(t) = q_0 \exp\left(-\frac{r}{RC}\right)$$

tương đương với

$$U = U_0 \exp\left(-\frac{r}{RC}\right)$$

trong đó U là điện áp đo được trên vôn kế kỹ thuật số sau thời gian t và U_0 là chỉ số trên vôn kế tại thời điểm $t = 0$

Phương trình có thể được tuyến tính hóa bằng cách lấy logarit tự nhiên từ cả hai vế của nó:

$$\ln U = \ln U_0 - \frac{t}{R_V C}$$

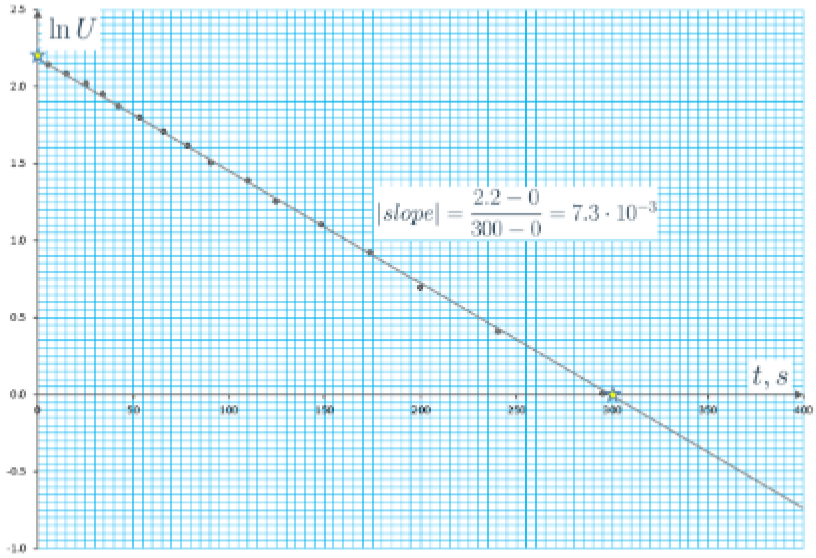
Vì vậy, chúng ta nên mong đợi đồ thị $\ln U$ theo t sẽ có dạng một đường thẳng với độ dốc bằng

$$|\text{độ dốc}| = \frac{1}{R_V C}$$

Hãy thêm một cột nữa với các giá trị tính toán của $\ln U$

$\mathrm{U, V}$	$\mathrm{t, s}$	$\ln \mathrm{U}$

Plot các điểm dữ liệu lên giấy ô li



Tìm độ dốc của đường thẳng $|\text{độ dốc}|$
Kết quả cuối có dạng

$$R_V = \frac{1}{|\text{độ dốc}| C}$$

Ví dụ (không gợi ý setup)

Trong bài tập thực nghiệm, bạn được cung cấp danh sách thiết bị sau:

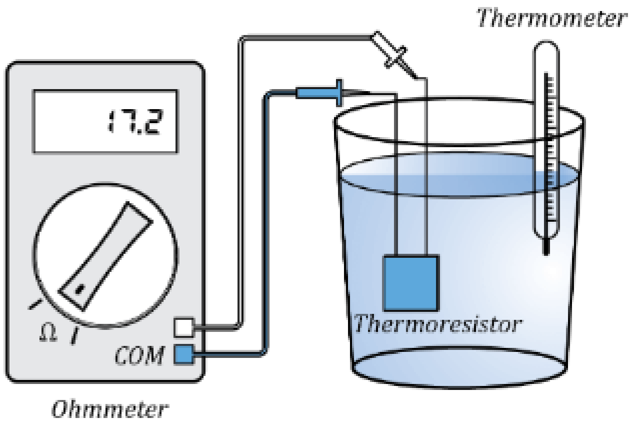
- đồng hồ vạn năng
- nước trong bát
- điện trở nhiệt
- nhiệt kế
  Đã biết rằng đối với các vật liệu bán dẫn, điện trở r phụ thuộc vào nhiệt độ tương tự như biểu thức sau

  $$r = r_0 \exp\left(\frac{\Delta E}{2kT}\right)$$

  trong đó ΔE là độ rộng của vùng cấm của bán dẫn, $k = 1.38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J/K}$ là hằng số Boltzmann, T là nhiệt độ của bán dẫn tính bằng Kelvin.
  Thiết lập phương án thực nghiệm tìm độ rộng vùng cấm của bán dẫn ΔE
  Giải thích: Đối với chất cách điện và chất bán dẫn, vùng cấm tồn tại giữa dải hóa trị và dải dẫn. Electron trong dải hóa trị cần nhận đủ năng lượng để vượt qua vùng cấm và chuyển lên dải dẫn, nơi chúng có thể tham gia vào quá trình dẫn điện.

Giải

Điện trở của điện trở nhiệt cho trước được đo bằng đồng hồ vạn năng kỹ thuật số, khi bán dẫn được đặt trong bát nước nguội dần.



Các thông số đo:

$t, {}^\circ\mathrm{C}$	r, Ohm

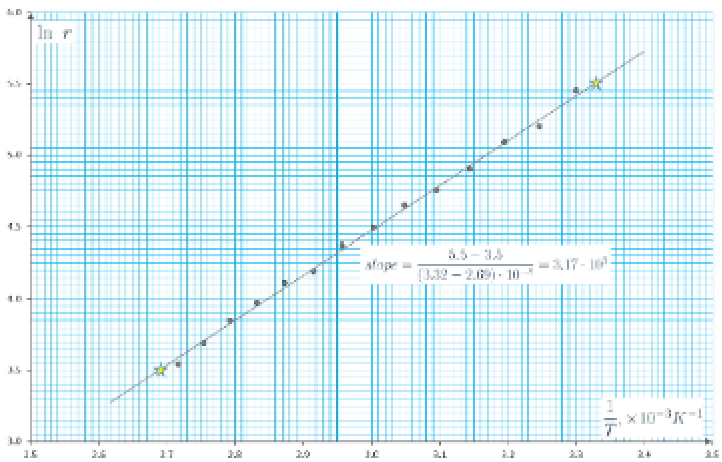
Mối quan hệ giữa điện trở của chất bán dẫn và nhiệt độ tuyệt đối có thể được tuyến tính hóa bằng cách lấy logarit tự nhiên ở cả hai vế của biểu thức đã cho:

$$\ln r = \ln r_0 + \frac{\Delta E}{2k} \cdot \frac{1}{T}$$

Vì vậy, chúng ta nên mong đợi đồ thị của dữ liệu được vẽ theo $\ln r$ và $1/T$ sẽ là một đường thẳng.

$t, {}^\circ\mathrm{C}$	$r,\ \mathrm{Ohm}$	$T, {}^\circ\mathrm{K}$	$\ln r$	$1/T, \times 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$

Plot các số liệu lên giấy ô li



Độ dốc của đường thẳng được fit được xác định bằng $\tan$, có dạng

$$\text{độ dốc} = \frac{\Delta E}{2k}$$

Từ đấy xác định ΔE

Thêm

Để các phép tính chính xác hơn, phương pháp toán học để tính hệ số a và b của đường thẳng $y = kx + b$ là:

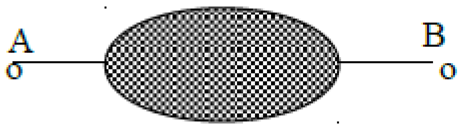
$$k = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

Đôi khi thí sinh ở các kỳ thi Olympiads sẽ gặp vấn đề với việc fit đồ thị, hoặc kết quả đo không đẹp, khiến cho khó đưa ra quyết định khi fit đường thẳng vào các biến, cuối cùng là thu được kết quả lệch đáng kể với giá trị lý thuyết. Có thể sử dụng phương pháp tính hệ số k và b để đưa quyết định và giảm thiểu thêm sai số do người thực nghiệm fit đồ thị.

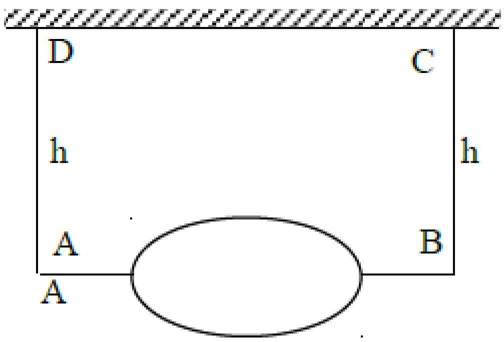
Bài tập

Cho một vật rắn gắn với trục quay mảnh AB đi qua khối tâm của vật . Được dùng các dụng cụ thông thường trong phòng thí nghiệm cơ học (như thước đo, giá đỡ, dây treo, các thanh kim loại mảnh, nhẹ, đồng hồ, cân …), hãy nêu phương pháp thực nghiệm xác định mômen quán tính của vật rắn này đối với trục quay AB.



Giải

Gắn vật với 2 thanh kim loại mảnh AD, BC có chiều dài h rồi cho hệ dao động tự do quanh trục DC nằm ngang (ma sát không đáng kể).



Đo chiều dài h, chu kì dao động nhỏ T, cân khối lượng m của vật ta tính được mô men quán tính I_0 đối với trục AB.
Mô men quán tính đối với trục CD là:

$$\mathrm{I_{CD} = I_0 + mh^2}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + mh^2}{mgh}} \rightarrow I_0 = mgh\left(\frac{T^2}{4\pi^2} - \frac{h}{g}\right)$$

Phương án xử lý số liệu:

$$\frac{T^2}{4\pi^2} - \frac{I_0}{mgh} = \frac{h}{g}$$

Hồi quy tuyến tính với đồ thị h và T^2

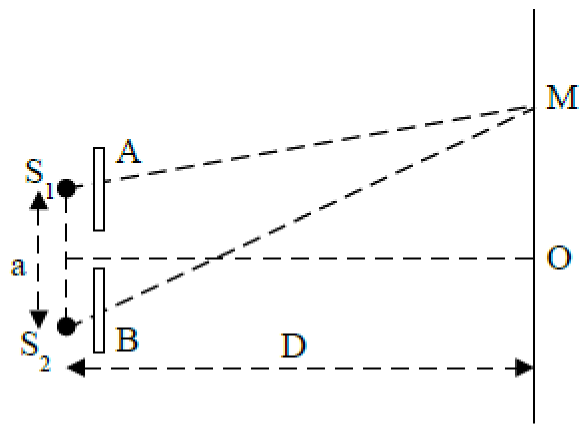
Bài tập

Trong quá trình nghiên cứu chế tạo kính chống đọng nước cho ngành công nghiệp ôtô người ta đã phủ lên bề mặt kính một lớp mỏng màng vật liệu TiO2 chiết suất n chiều dày cỡ mm. Để xác định chiều dày của lớp màng vật liệu TiO2 được phủ trên tấm thuỷ tinh mẫu người ta sử dụng các thiết bị và dụng cụ sau

- Giao thoa kế Young (giao thoa kế này có khoảng cách giữa hai khe sáng là a, khoảng cách từ khe đến màn là D và cho phép xác định vị trí các vân giao thoa và khoảng vân chính xác);
- Hai tấm thuỷ tinh mỏng giống hệt nhau, một tấm có phủ thêm trên bề mặt một màng TiO2 trong suốt.
  Hãy trình bày:

1. Cơ sở lý thuyết xác định bước sóng ánh sáng dùng trong thí nghiệm và chiều dày của lớp màng vật liệu TiO2.
2. Cách tiến hành thí nghiệm, sai số mắc phải.

Giải



1. Cơ sở lý thuyết:
   Khoảng vân khi chưa đặt tấm kính sau hai nguồn kết hợp S1, S2 là $i = \frac{\lambda D}{a} \Rightarrow \lambda = \frac{ai}{D}$
   Biết giá trị khoảng vân ta có thể xác định được bước sóng dùng trong thí nghiệm.
   Trong trường hợp nếu đặt cả hai tấm kính giống hệ nhau sau khe sáng S1 và S2 thì hiệu

quang lộ của hai chùm tia đến màn vẫn giống như trường hợp khi chưa đặt tấm kính. Hệ vân giao thoa sẽ không bị dịch chuyển.

Khi đặt tấm kính chưa phủ màng ngay sau một khe sáng, còn tấm kính có phủ màng sau khe còn lại. hiệu quang lộ của tia sáng từ S1 và S2 đến màn sẽ bị thay đổi so với khi chưa đặt kính một khoảng $(n-1)d$. Lúc này hệ vân giao thoa sẽ dịch chuyển một khoảng

$$x = \frac{(n-1)dD}{a} \Rightarrow d = \frac{ax}{(n-1)D}$$

Bằng việc đo khoảng dịch chuyển chúng ta xác định được chiều dày lớp màng phủ thêm trên tấm kính.
2. Cách tiến hành thí nghiệm, sai số mắc phải

- Xác định các thông số khoảng cách hai khe sáng a và khoảng cách khe đến màn D.
- Bật nguồn sáng hệ giao thoa, xác định vị trí vân trung tâm và khoảng vân i.
- Tính toán bước sóng dùng trong thí nghiệm theo (1).
- Đặt trước hai khe sáng hai tấm kính (tấm có phủ màng và chưa phủ màng).
- Xác định vị trí vân trung tâm, so sánh với trường hợp chưa đặt tấm thuỷ tinh để xác định khoảng dịch vân x.
- Lặp lại thí nghiệm vài lần để tìm giá trị trung bình của khoảng dịch hệ vân.
- Xác định chiều dày lớp màng theo công thức (2).

- Sai số phép đo:

- Sai số do cách đặt tấm kính sau khe sáng.
- Sai số dụng cụ, cách xác định khoảng vân và khoảng dịch chuyển.

Cách 2 : Hồi quy tuyến tính:
Phương trình lý thuyết của tính bước sóng ánh sáng

$$i = \frac{\lambda D}{a} \Rightarrow \lambda = \frac{ai}{D}$$

Sử dụng phép hồi quy tuyến tính trên đồ thị i và D
Đo nhiều lần các bộ giá trị i và D với D thay đổi tương ứng với trục hoành, i là trục tung, plot các điểm dữ liệu lên đồ thị
Xác định đường thẳng tuyến tính cho phương trình $y = kx$
Giá trị k là độ dốc của đường thẳng, có giá trị xấp xỉ:

$$k = \frac{\lambda}{a}$$

Tương tự cho tính độ dày lớp màng

Nhận xét: Khi đề bài yêu cầu xác định *sai số mắc phải*, mặc định phải giải theo hướng tính trung bình và tìm sai số. Vì phương pháp hồi quy tuyến tính sẽ không cho kết quả sai số.