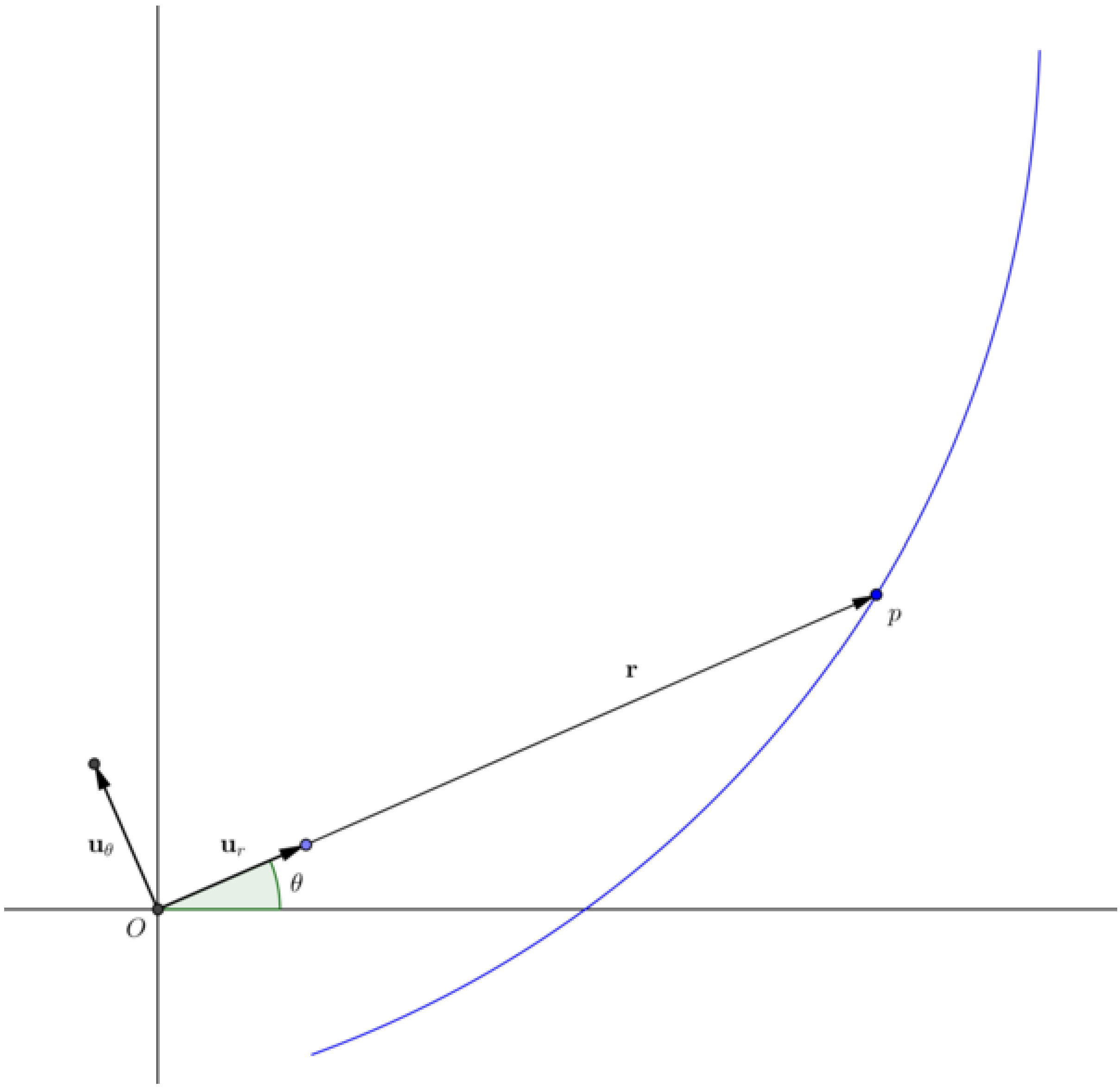
Giải bài tập 12.08

Bài tập cơ học số 1

Lý thuyết

Hệ toạ độ cực:



(1): $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$

Biểu diễn vecto $\mathbf{u}_r$ và $\mathbf{u}_\theta$ theo vecto đơn vị $\mathbf{i}$ và $\mathbf{j}$

$\mathbf{u}_r = \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\sin\theta$
$\mathbf{u}_\theta = -\mathbf{i}\sin\theta + \mathbf{j}\cos\theta$
(2) : $\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_r}{\mathrm{d}\theta} = \mathbf{u}_\theta$
(3): $\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_\theta}{\mathrm{d}\theta} = -\mathbf{u}_r$

Vector vận tốc trong hệ toạ độ cực

$\mathbf{v} = r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\mathbf{u}_\theta + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\mathbf{u}_r$

Vector gia tốc trong hệ toạ độ cực

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\\ &= r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{u}_\theta + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\mathbf{u}_\theta + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{u}_r + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_r}{\mathrm{d}t}\\ &= r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{u}_\theta + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\mathbf{u}_\theta + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_\theta}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{u}_r + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_r}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\\ &= r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{u}_\theta + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\mathbf{u}_\theta - r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\mathbf{u}_r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{u}_r + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\mathbf{u}_\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\\ &= \left(r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)\mathbf{u}_\theta + \left(\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right)\mathbf{u}_r\end{aligned}$$

Lời giải

Xét lực xuyên tâm $\mathbf{F} = \mathbf{r}F(r)$ tác dụng lên hạt có khối lượng m. Áp dụng định luật hai Newton ta có

$$\begin{aligned}F &= m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right),\\ 0 &= m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\end{aligned}$$

trong hệ toạ độ cực. Phương trình hai suy ra :

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 0,$$

hay

$$r^2\dot{\theta} = \text{ hằng số } = h, \text{chẳng hạn},$$

hay

$$\dot{\theta} = hu^2$$

bằng cách đặt

$$r = \frac{1}{u}.$$

Khi đó do

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{dr}{dt} = \dot{\theta}\frac{dr}{d\theta} = hu^2\frac{dr}{d\theta} = -h\frac{du}{d\theta},\\ \ddot{r} &= \dot{\theta}\frac{d\dot{r}}{d\theta} = hu^2\frac{d}{d\theta}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right) = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2},\\ r\dot{\theta}^2 &= \frac{1}{u}h^2u^4 = h^2u^3,\end{aligned}$$

phương trình (1) trở thành

$$F = -mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right),$$

Phương trình này thường được gọi là công thức Binet.
Trong bài toán này, coi $r = \frac{1}{u}$ và viết phương trình quỹ đạo dưới dạng

$$u = C\theta,$$

trong đó C là hằng số. Công thức Binet suy ra:

$$F = -mh^2u^3 = \frac{-mh^2}{r^3}.$$

Thế năng theo định nghĩa là

$$V = -\int_{\infty}^{r} F(r)dr = \int_{\infty}^{r} \frac{mh^2}{r^3}dr = \left[\frac{-mh^2}{2r^2}\right]_{\infty}^{r} = \frac{-mh^2}{2r^2},$$

với mốc thế năng tại vô cực bằng không.

Bài tập cơ học số 2

Lời giải

(a) Khi quả cầu nhỏ lăn không trượt, tổng động năng và thế năng của nó là một hằng số của chuyển động, chúng ta có

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\cdot\varphi^2 + mg(R+r)\cos\theta = mg(R+r)$$

với $v = r\dot{\psi} = (R+r)\dot{\theta}$, do dó

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{10}{7}\frac{(1-\cos\theta)g}{(R+r)}}.$$

Vận tốc ở tâm của quả cầu nhỏ là

$$v = (R+r)\dot{\theta} = \sqrt{\frac{10}{7}(R+r)(1-\cos\theta)g}.$$

(b) Tại thời điểm quả cầu nhỏ rời khỏi quả cầu lớn thì lực giá đỡ lên quả cầu nhỏ $N = 0$. Từ phương trình lực

$$mg\cos\theta - N = \frac{mv^2}{R+r},$$

ta tìm dược góc θ_c mà tại đó quả cầu nhỏ rời khỏi quả cầu lớn được cho bởi

$$\cos\theta_c = \frac{10}{17}.$$

Như vậy

$$\theta_c = \arccos\left(\frac{10}{17}\right).$$

Lưu ý rằng sự rút ra này chỉ áp dụng cho hệ số ma sát đủ lớn.

(c) Khi quả cầu nhỏ lăn không trượt chúng ta có

$$\begin{aligned} mg\sin\theta - f &= m\dot{v}, \\ fr &= \frac{2}{5}mr^2\ddot{\varphi}, \\ v &= (R+r)\dot{\theta} = r\dot{\varphi}, \end{aligned}$$

ở đây f là lực ma sát trên quả cầu. Từ đó chúng ta tim được

$$f = \frac{2}{7}mg\sin\theta.$$

Tại thời điểm khi quả cầu nhỏ bắt đầu trượt thì lực ma sát là

$$f = \mu N,$$

tức là

$$\frac{2}{7}mg\sin\theta = \mu\left(mg\cos\theta - \frac{mv^2}{R+r}\right).$$

Khi đó, sử dụng biểu thức của v trong câu (a) chúng ta có

$$2\sin\theta = 17\mu\cos\theta - 10\mu.$$

Giải phương trình này ta thấy rằng góc θ_s mà ở đó quả cầu nhỏ bắt đầu trượt được cho bởi công thức

$$\cos\theta_s = \frac{170\mu^2 \pm \sqrt{756\mu^2+4}}{289\mu^2+4}.$$

Tuy nhiên, chúng ta cần $\theta_c > \theta_s$, hoặc là $\cos\theta_s > \cos\theta_c$. Ở đây với giá trị của μ có thể làm thỏa mãn điều đó, nói chung chúng ta phải lấy dấu trên. Do đó

$$\theta_s = \arccos\left(\frac{170\mu^2 + \sqrt{756\mu^2+4}}{289\mu^2+4}\right).$$

Bài tập nhiệt học số 1

Lời giải

(a) Kí hiệu $n(h)$ là mật độ phân tử tại độ cao h. Từ điều kiện cân bằng cơ $dp=-nmgdh$ và phương trình trạng thái $p=nkT$, ta tìm được

$$\frac{1}{p}dp=-\frac{mg}{kT}dh.$$

Suy ra $n(h)=n_0\exp(-mgh/kT)$. Đặt $\int_0^H n(h)dh/\int_0^\infty n(h)dh=\frac{1}{2}$, ta tính được

$$H=\frac{kT}{mg}\ln 2=\frac{RT}{N_0mg}\ln 2.$$

Phân tử lượng trung bình của không khí là 30 . Ta có

$$H=\frac{8,31\times 10^7\times 273}{30\times 980}\times\ln 2\approx 8\times 10^5\ \mathrm{cm}=8\ \mathrm{km}.$$

(b) Hệ thức $\frac{1}{p}dp=-\frac{mg}{kT}dh$ vẫn đúng và quá trình đoạn nhiệt được mô tả bởi phương trình

$$p^{(1-\gamma)/\gamma}T=\ \mathrm{const}$$

với $\gamma=\frac{c_p}{c_e}\approx 7/2$ (dối với phân tử lương nguyên từ). Do đó $\frac{dT}{T}\frac{\gamma}{\gamma\cdot 1}=-\frac{mg}{kT}dh$. Lấy tích phân ta được

$$T-T_0=-(\gamma-1)mg\,(h-h_0)/\gamma k.$$

Hơn nữa

$$\frac{dT}{dh}=-\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{mg}{k}\approx -0,1\ \mathrm{K/m}$$

Bài tập nhiệt học số 2

Lời giải

Khi pit tông cân bằng: $p_1S=p_0S+Mg\quad(1)$, trong đó p_1 là áp suất của khí trong xi lanh khi này, $S=\pi R_0^2$. Từ (1) có:

$$p_1=p_0+\frac{Mg}{S}$$

Quá trình biến đối của khí trong bình là đoạn nhiệt nên:

$$p_0V_0^\gamma=p_1V_1^\gamma\Leftrightarrow p_0h_0^\gamma=p_1h_1^\gamma$$

trong đó h_1 là chiều cao của cột khí trong bình khi pit tông cân bằng:

$$\Rightarrow h_1=h_0\left(1+\frac{Mg}{p_0S}\right)^{\frac{-1}{\gamma}}$$

Phương trình trạng thái của khối khí trong xi lanh: $\frac{p_0V_0}{T_0}=\frac{p_1V_1}{T_1}\Leftrightarrow\frac{p_0h_0}{T_0}=\frac{p_1h_1}{T_1}$, trong đó T_1 là nhiệt độ của cột khí trong bình khi pit tông cân bằng:

$$T_1 = T_0\left(1 + \frac{Mg}{p_0 S}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Công mà khí trong xi lanh nhận được trong quá trình đoạn nhiệt:
$A_k = \Delta U = \frac{m_k}{\mu}\frac{R}{\gamma-1}(T_1 - T_0) = \frac{p_0 h_0 S}{T_0(\gamma-1)}(T_1 - T_0)$, với T_1 xác định theo phương trình trên, m_k là khối lương khí. Công do khí quyển thực hiện từ thời điểm ban đầu đến khi pit tông cân bằng:

$$A_{kq} = p_0 S\left(h_0 - h_1\right) = p_0 S h_0\left[1 - \left(1 + \frac{Mg}{p_0 S}\right)^{\frac{-1}{\gamma}}\right]$$

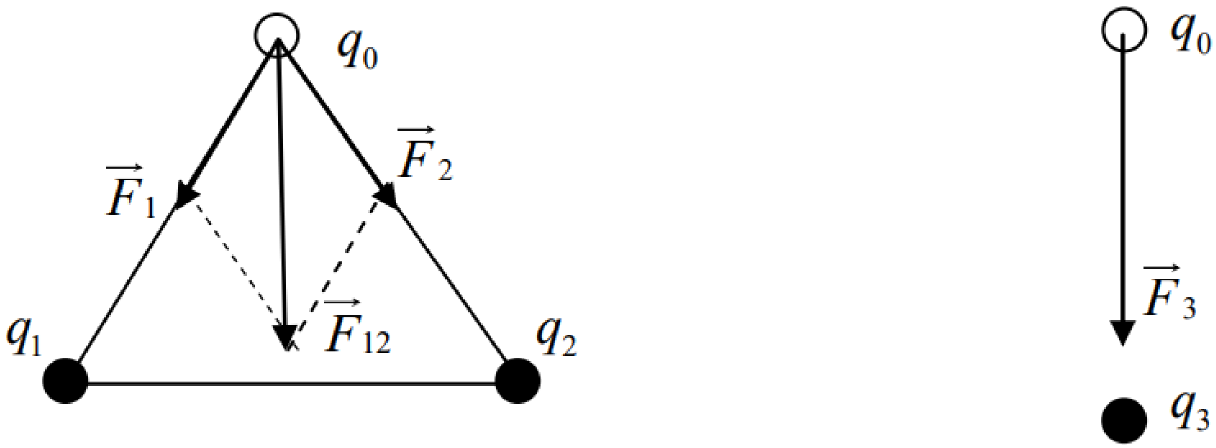
Công do trọng lực của pit tông thực hiện từ thời điểm ban đầu đến khi pit tông cân bằng:

$$A_p = Mg\left(h_0 - h_1\right) = Mgh_0\left[1 - \left(1 + \frac{Mg}{p_0 S}\right)^{\frac{-1}{\gamma}}\right]$$

Bài tập điện học số 1

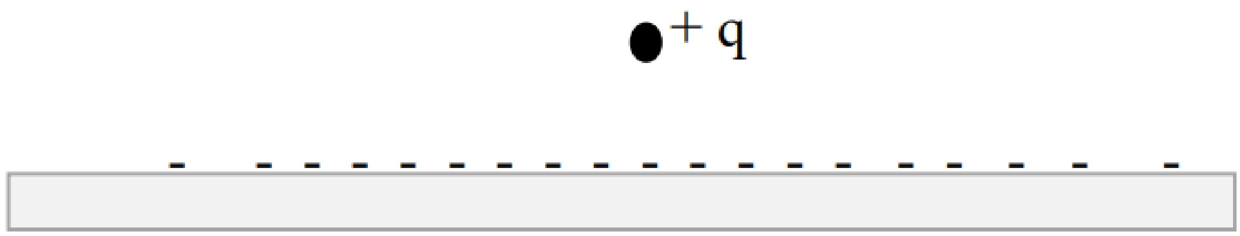
Lý thuyết

Phương pháp ảnh điện



Lực tương tác của hai điện tích q_1, q_2 lên điện tích q_0 hợp lực $\vec{F}_{12}$ của hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$. Xét về phương diện tác dụng lực, nếu ta thay hai điện tích q_1, q_2 bằng q_3 sao cho $\vec{F}_{12} = \vec{F}_3$ thì tính chất bài toán không thay đổi. Việc thay thế hai điện tích bằng một điện tích sao cho yêu cầu bài toán không bị thay đổi, giúp cho việc giải quyết bài toán đơn giãn hơn chính là ý tưởng cơ bản ban đầu của phương pháp ảnh điện.

Bây giờ, nếu xét tương tác điện tích điểm $+q$ và mặt phẳng dẫn rộng vô hạn nối đất: Do hiện tượng nhiễm điện hưởng ứng, trên bề mặt vật dẫn xuất hiện các điện tích âm. Vậy, tương tác +q và vật dẫn chính là tương tác +q và các điện tích xuất hiện trên vật dẫn. Việc xác định tương tác +q và các điện tích đơn lẽ trên vật dẫn thì quá phức tạp. Do đó, ta có thể thay hệ các điện tích trên mặt phẳng dẫn bởi điện tích ảnh - q sao cho các tính chất điện không thay đổi.



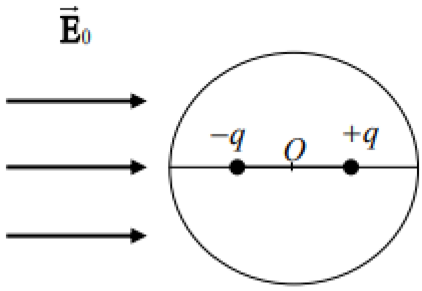
1. Vấn đề tính toán trực tiếp trường sinh ra bởi hệ thống các điện tích và các vật dẫn (hoặc các điện môi) là rất khó khăn vì khi có mặt thêm các điện tích hưởng ứng (hoặc các điện tích liên kết) làm cho sự phân bố điện tích mặt trở nên phức tạp.
2. Để khắc phục khó khăn này ta cần chú ý đặc điểm của trường tĩnh điện hoàn toàn được xác định bởi các giá trị điện thế mô tả tính chất của trường tại biên giữa các vật dẫn và điện môi khác nhau, lẫn điện trường trên bề mặt. Như vậy nếu ở về một phía của mặt biên, ta làm biến đổi các thông số của môi trường (chẳng hạn thay vật dẫn này bằng vật dẫn khác hoặc điện môi, thay điện môi này bằng điện môi khác hoặc vật dẫn). Rồi ta thiết lập sự phân bố các điện tích mới đơn giản hơn, sao cho các điều kiện biên hoàn toàn được giữ nguyên như trước.

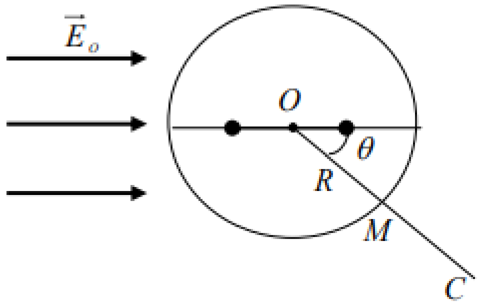
- Điện truờng của hệ điện tích cho trước sẽ không bị thay đổi nếu ta lấp đầy thể tích được giới hạn bởi một mặt đẳng thế nào đó, chứa trong nó một điện tích tổng cộng Q bằng một vẫn dẫn điện cũng chứa điện tích Q .
- Một mặt đẳng thế bất kỳ có thể được thay thế bằng một bản dẫn mỏng vô hạn có điện thế tương ứng, trường ở cả hai phía của bản khi đó không thay đổi.

3. Khi đó ta dễ dàng tiến hành mọi tính toán và giải các bài tập tĩnh điện đối với hệ điện tích điểm này. Điện tích vừa được đưa vào như vậy được gọi là điện tích ảnh của các điện tích đã cho.
4. Nội dung chủ yếu của phương pháp ảnh điện là xác định được các điện tích ảnh, sau đó ta bước vào giải bài toán tĩnh điện trên hệ điện tích ảnh đã tìm và hệ điện tích điểm ban đầu đã biết. Nghiệm của bài toán cũng là nghiệm duy nhất phải tìm. Như vậy ta đã chuyển bài toán phức tạp có những điện tích phân bố liên tục về bài toán đơn giản chỉ gồm các điện tích điểm.

Lời giải 1

Mật độ điện tích trên bề mặt quả cầu là không đều.
Do tính chất đối xứng, có thể xem điện tích trên vỏ tương đương với hệ điện tích q , - q. Hai điện tích này tạo thành một lương cực điện.





Điện thế tại điểm C (khoảng cách từ C đến O là r) bằng tổng điện thế của trường ngoài $\left(V_{\vec{E}_o}\right)$ và điện thế của lưỡng cực $\left(V_{\vec{P}}\right)$.

Thế năng lưỡng cực được xác định:

$$V_{\vec{P}}=\frac{p_e\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Thế năng trường ngoài được xác định:

$$V_{\vec{E}_o}=\int -E_0 dx=-E_0 x=-E_0 r\cos\theta.$$

Theo tính chất của vật dẫn trong điện trường, quả cầu dẫn là vật đẳng thế. Chọn gốc điện thế tại O , điện thế tại mọi điểm trên quả cầu bằng 0 . Mọi điểm M ở bề mặt quả cầu đều có $V_M=0$. Vậy:

$$\begin{aligned}
&V_M=V_{\vec{E}_o}(M)+V_{\vec{P}}(M)=0\\
&\Leftrightarrow \frac{p_e\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}=E_0 R\cos\theta\\
&\Leftrightarrow p_e=4\pi\varepsilon_0 E_0 R^3
\end{aligned}$$

Véctơ cường độ điện trường theo phương pháp tuyến tại M được xác định: không thể

$$\begin{aligned}
E_M&=E_{\vec{E}_o}(r)+E_{\vec{P}}(r)\\
&=\left.\left(-\frac{\partial V_{\vec{E}_o}}{\partial r}-\frac{\partial V_{\vec{P}}}{\partial r}\right)\right|_R\\
&=E_0\cos\theta+2E_0\cos\theta\\
&=3E_0\cos\theta
\end{aligned}$$

Ta được mật độ điện mặt:

$$\sigma = E_n(M) \cdot \varepsilon_0 = 3E_0\varepsilon_0 \cos\theta.$$

Lý thuyết lời giải 2

In spherical coordinates, the scale factors are $h_r = 1, h_\theta = r\sin\phi, h_\phi = r$, and the separation functions are $f_1(r) = r^2$, $f_2(\theta) = 1$, $f_3(\phi) = \sin\phi$, giving a Stäckel determinant of $S = 1$.

The Laplacian is

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right).$$

To solve Laplace's equation in spherical coordinates, attempt separation of variables by writing

$$F(r,\theta,\phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi).$$

If azimuthal symmetry (Azimuthal symmetry is **a type of rotational symmetry where an object appears the same when rotated around a specific axis or point**.) is present, then $\Theta(\theta)$ is constant and the solution of the Φ component is a Legendre polynomial $P_l(\cos\phi)$. The general solution is then

$$F(r,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + B_l r^{-l-1}\right)P_l(\cos\phi).$$

Lời giải 2

Điều kiện biên trên bề mặt vật dẫn là

$$\begin{aligned} &\Phi = \text{ hằng số } = \Phi_s, \text{ tức là}, \\ &\varepsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial r} = -\sigma, \end{aligned}$$

$D_r = \varepsilon_0 E_r = \varepsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial r} = -\sigma$

trong đó Φ_s là thế năng của quả cầu dẫn điện và σ là mật độ điện tích mặt của nó. Do đối xứng, thế năng tại một điểm (r,θ,φ) trong hệ toạ độ cầu với gốc toạ độ ở tâm quả cầu là

$$\Phi = \sum_{n=0}\left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta).$$

Đây là phương trình tổng quát của thế năng tại 1 điểm trong hệ toạ độ cầu thu được từ việc giải phương trình Laplace trong hệ toạ độ cầu. Thành phần $C_n r^n$ là thành phần chỉ thế năng bên trong mặt cầu và $\frac{D_n}{r^{n+1}}$ là thế năng bên ngoài mặt cầu

Giả sử E_0 là cường độ điện trường đều ban đầu. Khi $r \to \infty$

$$\Phi = -E_0 r\cos\theta = -E_0 r P_1(\cos\theta).$$

Bằng cách làm bằng các hệ số của $P_n(\cos\theta)$ ở hai vế của phương trình (1) ta có

$$C_0 = 0, \quad C_1 = -E_0, \quad D_1 = E_0 a^3, \quad C_n = D_n = 0 \quad \text{với } n > 1.$$

Do đó

$$\Phi = -E_0 r \cos\theta + \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos\theta,$$

trong đó a là bán kính của quả cầu. Điều kiện biên thứ hai và phương trình (2) cho

$$\sigma = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta$$

Bài tập quang học số 1

Lời giải

Chia không khi trên sân bay thành các lớp $\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2, \ldots$. Song song với mặt đất.

$$n_0 = n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 = \ldots = n \sin\theta$$

Ta có: $n_0 = n \sin\theta = n_0(1 + ay)$

Từ hình vẽ ta có:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cot\theta \text{ hay } \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}$$

$$1 + ay = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Rightarrow 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 = 1 + 2ay + a^2 y^2$$

Vì a nhỏ, y hữu hạn nên bỏ qua $(ay)^2$ nên $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \sqrt{2\mathrm{a}y}$ hay chuyển sang dạng vi phân ta có:

$$\frac{dy}{d\mathrm{x}} = \sqrt{2\mathrm{a}y}$$

Tích phân hai vế ta được $y = \frac{a}{2} x^2$
Đường đi của tia sáng trên sân bay là một nhánh của parabol khi

$$y = h \Rightarrow d = \sqrt{\frac{2h}{a}} = 1500m$$

Bài tập quang học số 2

Lời giải

Quang trình tia sáng OSQ là:

$$\delta = n_1 \mathrm{OS} + n_2 \cdot SQ =$$

$$n_1 \sqrt{(r\sin\theta)^2 + [x + r(1-\cos\theta)]^2} + n_2 \sqrt{(r\sin\theta)^2 + [y - r(1-\cos\theta)]^2}$$

Theo nguyên lí Fermat ta có: $\frac{d\delta}{d\theta} = 0$
Hay:

$$\frac{d\delta}{d\theta} = \frac{n_1(x+r)r\sin\theta}{\sqrt{(r\sin\theta)^2 + [x + r(1-\cos\theta)]^2}} + \frac{n_2(r-y)r\sin\theta}{\sqrt{(r\sin\theta)^2 + [y - r(1-\cos\theta)]^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{n_1(x+r)}{\sqrt{(r\sin\theta)^2 + [x + r(1-\cos\theta)]^2}} + \frac{n_2(r-y)}{\sqrt{(r\sin\theta)^2 + [y - r(1-\cos\theta)]^2}} = 0$$

Với θ nhỏ thì $\sin\theta \approx \theta; 1 - \cos\theta \approx \frac{\theta^2}{2}$. Khi đó (1) trở thành

$$\frac{n_1(x+r)}{\sqrt{(x+r)r\theta^2 + x^2}} + \frac{n_2(r-y)}{\sqrt{(r-y)r\theta^2 + y^2}}$$

Vì θ nhỏ nên trong biểu thức (1) số hạng nào có chứa θ ta bỏ đi, lúc đó (2) được viết lại là:

$$\frac{n_1(x+r)}{x} + \frac{n_2(r-y)}{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{n_1}{x} + \frac{n_2}{y} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

Phương trình $(*)$ là phương trình xác định sự tạo ảnh bởi lưỡng chất cầu thỏa mãn điều kiện tương điểm.