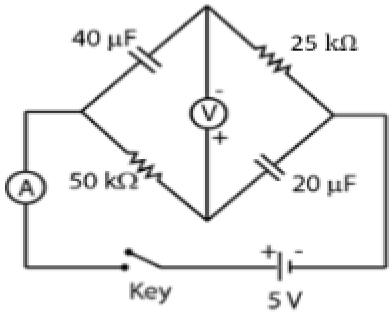
Luyện tập tính toán

Bài tập

Trong mạch điện được minh họa ở trên, khóa được đóng tại thời điểm $t = 0$. Câu nào sau đây là đúng?



A) Vôn kế hiển thị -5 V ngay khi khóa được nhấn và hiển thị +5 V sau một khoảng thời gian dài

B) Vôn kế sẽ hiển thị $0\vee$ tại thời điểm $t = \ln 2$ giây

C) Cường độ dòng điện qua ampe kế giảm còn $1/e$ giá trị ban đầu sau 1 giây

D) Cường độ dòng điện qua ampe kế giảm về 0 sau một khoảng thời gian dài.

Lời giải

Tại thời điểm $\mathrm{t} = 0$ hoặc ngay khi khóa được nhấn, vôn kế hiển thị -5 V vì điện áp trên mỗi tụ điện bằng 0. Sau một khoảng thời gian dài, các tụ điện sẽ được nạp đầy và vôn kế sẽ hiển thị 5 V.

Hằng số thời gian của mạch là $\tau = RC = 40 \times 10^{-6} \times 25 \times 10^{3} = 1 \mathrm{sec}$

Chỉ số của vôn kế tại mỗi thời điểm $= \Delta \mathrm{V}_{40} \mu \mathrm{F} - \Delta \mathrm{V}_{50} \mathrm{k}\Omega$

Sự thay đổi điện áp trên tụ điện là $\Delta V_{40\mu \mathrm{F}} = \mathrm{V}_{\text{supply}} \left(1 - \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{t}}{\tau}}\right) = 5\left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\right)$

Sự thay đổi điện áp trên điện trở là $\Delta \mathrm{V}_{50\mathrm{k}\Omega} = \mathrm{V}_{\text{supply}} \left(\mathrm{e}^{\frac{-t}{\tau}}\right) = 5\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}$

Chỉ số ampe kế $= 5\left(1 - e^{-t}\right) - 5e^{-t} = 5 - 10e^{-t}$

Tại $t = \ln 2$, chỉ số ampe kế $= 5 - 10e^{-\ln 2} = 5 - 5 = 0$

Vì vậy đáp án B là đúng.

Ban đầu, tụ điện bị ngắn mạch và cho phép dòng điện đi qua nó. Do đó, mạch tương đương sẽ có cả hai điện trở được nối song song. Điện trở tương đương sẽ là $R_{\mathrm{eq}} = \frac{50 \times 25}{50 + 25} = \frac{50}{3} \mathrm{k}\Omega$

Dòng điện ban đầu qua ampe kế là $\mathrm{l}_{\mathrm{i}} = \mathrm{V}/\mathrm{R} = \frac{5}{50/3}\ \mathrm{mA}$

Sự thay đổi điện áp theo thời gian trên các điện trở $25\mathrm{k\Omega}$ và $50\mathrm{k\Omega}$ có thể được cho bởi
$\mathrm{V} = \mathrm{V_s e^{\frac{-t}{t}}} = 5\mathrm{e}^{-1}\ \mathrm{V}$

Dòng điện qua $25\mathrm{k\Omega}$ là $\mathrm{I_1} = \mathrm{V/R} = 5\mathrm{e}^{-1}/25\ \mathrm{mA}$

Dòng điện qua $50\mathrm{k\Omega}$ là $\mathrm{I_2} = \mathrm{V/R} = 5\mathrm{e}^{-1}/50\ \mathrm{mA}$

Tổng dòng qua ampe kế là $I = I_1 + I_2 = \frac{5}{50} \times 3e^{-1} = \frac{I_i}{e}$

Vì vậy, cường độ dòng điện qua ampe kế giảm còn $1/e$ giá trị ban đầu sau 1 giây.

Do đó đáp án C là đúng.

Vì dòng điện qua ampe kế tại mỗi thời điểm là $1 = \frac{5}{50} \times 3e^{-t}$

Sau một khoảng thời gian dài $t = \infty$

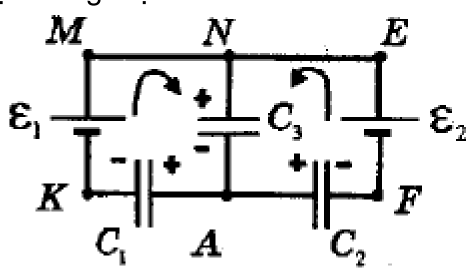
Nên $I = \frac{5}{50} \times e^{-\infty} = 0$

Vì vậy, cường độ dòng điện qua ampe kế sẽ giảm về 0 sau một khoảng thời gian dài.

Do đó đáp án D cũng đúng.

Bài tập

Xác định điện tích của các tụ điện trong mạch như hình vẽ.



Lời giải

Ghi các dấu điện tích của các bản tụ điện. Ký hiệu các hiệu điện thế trên các tụ điện là u_1, u_2, u_3. Điện tích của mỗi tụ điện bằng: $q_1 = C_1u_1, q_2 = C_2u_2, q_3 = C_3u_3$. Vì ba bản tụ điện gặp nhau tại một điểm A không nối trực tiếp với nguồn, nên tổng điện tích của chúng bằng không. Ta có phương trình:

$$C_1u_1 + C_2u_2 - C_3u_3 = 0$$

Đi theo vòng kín MNAKM theo chiều kim đồng hồ, ta có phương trình $\mathcal{E}_1 = u_3 + u_1$ (2).
Đi theo vòng kín AFENA ngược chiều kim đồng hồ, ta có phương trình $\mathcal{E}_2 = u_3 + u_2$ (3). Các phương trình (1), (2) và (3) tạo thành hệ:

$$\begin{cases} C_1u_1 + C_2u_2 - C_3u_3 = 0(1), \\ \mathcal{E}_1 = u_3 + u_1(2), \\ \mathcal{E}_2 = u_3 + u_2(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \mathcal{E}_1 - u_3 \\ u_2 = \mathcal{E}_2 - u_3 \\ C_1\left(\mathcal{E}_1 - u_3\right) + C_2\left(\mathcal{E}_2 - u_3\right) - C_3u_3 = 0 \end{cases}$$

Từ phương trình thứ ba, ta tìm được:

$$u_3 = \frac{C_1\mathcal{E}_1 + C_2\mathcal{E}_2}{C_1 + C_2 + C_3}$$

Khi đó

$$u_1 = \mathcal{E}_1 - u_3 = \frac{C_2\mathcal{E}_1 + C_3\mathcal{E}_1 - C_2\mathcal{E}_2}{C_1 + C_2 + C_3}$$

và

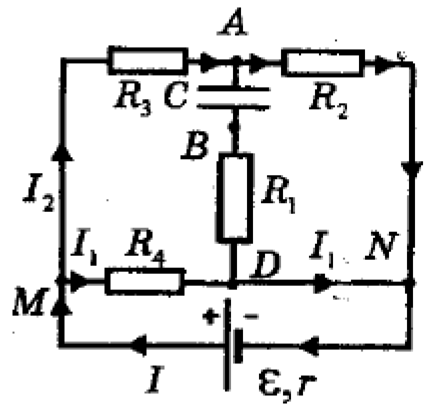
$$u_2 = \mathcal{E}_2 - u_3 = \frac{C_1\mathcal{E}_2 + C_3\mathcal{E}_2 - C_1\mathcal{E}_1}{C_1 + C_2 + C_3}$$

Điện tích của các tụ điện được tìm bằng cách nhân hiệu điện thế với điện dung tương ứng.

Bài tập

Xác định điện tích của tụ điện trong mạch như hình vẽ.

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 200\mathrm{m}\Omega; \mathcal{E} = 500\ \mathrm{V}; r = 100\mathrm{m}\Omega; C = 10\ \mu\mathrm{F}$$



Lời giải

Khi giải các bài toán tương tự, cần lưu ý rằng dòng điện một chiều không chạy qua tụ điện.
Các mũi tên trong hình vẽ chỉ ra cách dòng điện chạy trong mạch này.
Để tìm điện tích của tụ điện, cần biết hiệu điện thế $\phi_A - \phi_B$ trên các bản cực của nó.
Vì dòng điện không chạy qua điện trở R_1, nên $\phi_B - \phi_D = 0 \Rightarrow \phi_B = \phi_D$.
Vì các điểm D và N được nối bằng dây dẫn có điện trở $R_{\text{dây}} = 0$, nên
$\phi_D - \phi_N = 0 \Rightarrow \phi_N = \phi_D = \phi_B$.
Do đó, hiệu điện thế trên các bản cực của tụ điện C là $\phi_A - \phi_B = \phi_A - \phi_N$, đây chính là điện áp trên điện trở R_2.

Với $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$, khi đó điện trở của mạch giữa các điểm M và N là

$$R_{MN} = \frac{2R \cdot R}{2R + R} = \frac{2}{3}R$$

Dòng điện tổng cộng

$$I = \frac{\mathcal{E}}{2R/3 + r} = \frac{3\mathcal{E}}{2R + 3r}$$

Hiệu điện thế giữa các điểm M và N là

$$\phi_M - \phi_N = IR_{MN} = \frac{3\mathcal{E}}{2R + 3r}\frac{2}{3}R = \frac{2\mathcal{E}R}{2R + 3r}$$

Cường độ dòng điện chạy qua các điện trở R_2 và R_3 mắc nối tiếp là

$$I_2 = \frac{\phi_M - \phi_N}{R_2 + R_3} = \frac{\mathcal{E}}{2R + 3r}$$

Hiệu điện thế giữa các điểm A và N là

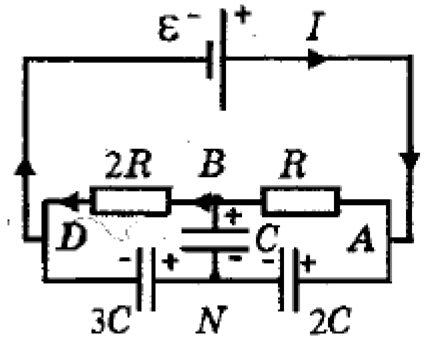
$$\phi_A - \phi_N = \phi_A - \phi_B = I_2 R_2 = \frac{\mathcal{E}R}{2R + 3r}$$

Điện tích của tụ điện là

$$q = C\left(\phi_A - \phi_B\right) = \frac{\mathcal{E}RC}{2R + 3r} \approx 1,43 \cdot 10^{-3}C$$

Bài tập

Xác định điện tích của tụ điện C trong mạch như hình vẽ. Bỏ qua điện trở trong của pin.



Lời giải

Các mũi tên chỉ chiều của dòng điện I trong mạch (dòng điện một chiều không chạy qua tụ điện), trong đó

$$I = \frac{\mathcal{E}}{3R}$$

Hiệu điện thế giữa các điểm A và B là

$$\phi_A - \phi_B = IR = \frac{\mathcal{E}}{3}$$

, và hiệu điện thế giữa các điểm B và D là

$$\phi_B - \phi_D = I \cdot 2R = \frac{2\mathcal{E}}{3}$$

Giả sử q_1, q_2, q_3 lần lượt là độ lớn điện tích của các tụ điện $C, 2C, 3C$. Giả sử các bản tụ điện được sạc như trong hình vẽ. N là điểm chung của ba bản tụ điện không nối với nguồn. Khi đó tổng điện tích của chúng bằng không, tức là

$$-q_1 - q_2 + q_3 = 0$$

Giả sử u_1, u_2, u_3 là các hiệu điện thế trên các tụ điện. Khi đó $q_1 = Cu_1, q_2 = 2Cu_2, q_3 = 3Cu_3$ và phương trình cuối cùng có dạng:

$$3u_3 - u_1 - 2u_2 = 0 \tag{1}$$

Viết một đẳng thức đại số hiển nhiên:

$$(\phi_B - \phi_N) + (\phi_N - \phi_D) = \phi_B - \phi_D$$

Trong đẳng thức này, $\phi_B - \phi_D = \frac{2\mathcal{E}}{3}, \phi_B - \phi_N = u_1$, và $\phi_N - \phi_D = u_3$, do đó $u_1 + u_3 = \frac{2\mathcal{E}}{3}(2)$
Ta viết thêm một đẳng thức nữa:

$$(\phi_A - \phi_N) + (\phi_B - \phi_N) = \phi_A - \phi_B$$

Trong đẳng thức này, $\phi_A - \phi_B = \frac{\mathcal{E}}{3}, \phi_A - \phi_N = u_2, \phi_B - \phi_N = u_1$ do đó $u_2 - u_1 = \frac{\mathcal{E}}{3}$ (3).
Ta nhận được hệ ba phương trình:

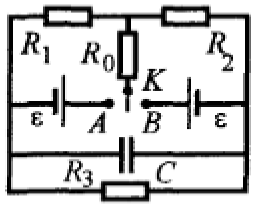
$$\begin{cases} 3u_3 - u_1 - 2u_2 = 0, \\ u_1 + u_3 = \frac{2\mathcal{E}}{3}, \\ u_2 - u_1 = \frac{\mathcal{E}}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3u_3 + 2u_2, \\ 4u_3 - 2u_2 = \frac{2\mathcal{E}}{3} \\ 3u_2 - 3u_3 = \frac{\mathcal{E}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{2\mathcal{E}}{9} \\ u_2 = \frac{5\mathcal{E}}{9} \\ u_3 = \frac{4\mathcal{E}}{9} \end{cases}$$

Vì tất cả các hiệu điện thế đều dương, nên giả thiết về dấu của các điện tích trên các bản của tụ điện C là đúng. Biết được các hiệu điện thế, ta tìm được các điện tích của tụ điện:

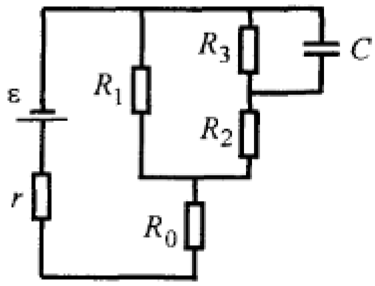
$$q_1 = \frac{2C\mathcal{E}}{9}, q_2 = \frac{10C\mathcal{E}}{9}, q_3 = \frac{4C\mathcal{E}}{3}$$

Bài tập

Điện tích đi qua tụ điện C khi chuyển khóa K từ vị trí A sang vị trí B là bao nhiêu? Điện trở trong của các nguồn là $r = 10\Omega, \epsilon = 50\text{ V}, R_0 = R_1 = 10\Omega, R_2 = 20\Omega, R_3 = 30\Omega, C = 10\mu\text{F}.$



Lời giải



Khi khóa ở vị trí A, mạch ban đầu có thể được chuyển đổi thành mạch như hình a). Đối với mạch này, dòng điện i_0 chạy qua điện trở R_0 bằng

$$i_0=\frac{\epsilon}{r+R_0+\frac{R_1(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3}}$$

Độ sụt áp U_{23} trên đoạn mạch chứa các điện trở R_2 và R_3 :

$$U_{23}=i_0\frac{R_1\left(R_2+R_3\right)}{R_1+R_2+R_3}=\frac{\epsilon R_1\left(R_2+R_3\right)}{\left(r+R_0\right)\left(R_1+R_2+R_3\right)+R_1\left(R_2+R_3\right)}$$

Dòng điện i_3 chạy qua điện trở R_3,

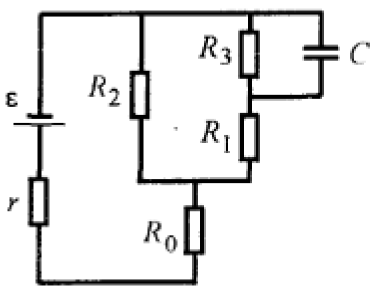
$$i_3=\frac{U_{23}}{R_2+R_3}=\frac{\epsilon R_1}{\left(r+R_0\right)\left(R_1+R_2+R_3\right)+R_1\left(R_2+R_3\right)}$$

và độ sụt áp trên nó

$$U_3=i_3R_3=\frac{\epsilon R_1R_3}{\left(r+R_0\right)\left(R_1+R_2+R_3\right)+R_1\left(R_2+R_3\right)}$$

Vì U_3 bằng hiệu điện thế giữa các bản tụ điện, nên điện tích của nó $\boldsymbol{q_A}$, khi khóa ở vị trí A, bằng

$$q_A=CU_3=\frac{\epsilon CR_1R_3}{\left(r+R_0\right)\left(R_1+R_2+R_3\right)+R_1\left(R_2+R_3\right)}$$



Khi khóa ở vị trí B, mạch ban đầu tương đương với mạch như hình b). Sự khác biệt giữa mạch a) và b) là, thứ nhất, các điện trở R_1 và R_2 đổi chỗ cho nhau, và thứ hai, bản tụ điện khác được nối với cực âm của nguồn.
Xét các sự khác biệt này, điện tích q_B của tụ điện, khi khóa ở vị trí B, có thể được tìm bằng công thức tính điện tích khi khóa ở vị trí A. Khi đó cần thay đổi $R_1 \leftrightarrow R_2$. Vậy

$$q_B = \frac{\epsilon C R_2 R_3}{(r+R_0)(R_1+R_2+R_3)+R_2(R_1+R_3)}$$

Vì khi chuyển khóa A, điện tích của các bản tụ điện đổi dấu ngược lại, nên điện tích Δq đi qua tụ điện C sẽ bằng tổng của q_A và q_B, tức là

$$\Delta q = q_A + q_B =$$
$$= \frac{(r+R_0)(R_1+R_2)(R_1+R_2+R_3)+R_1R_2(R_1+R_2+2R_3)}{[(r+R_0)(R_1+R_2+R_3)+R_1(R_2+R_3)]} \frac{1}{[(r+R_0)(R_1+R_2+R}$$
$$\approx 240\ \mu\mathrm{C}$$

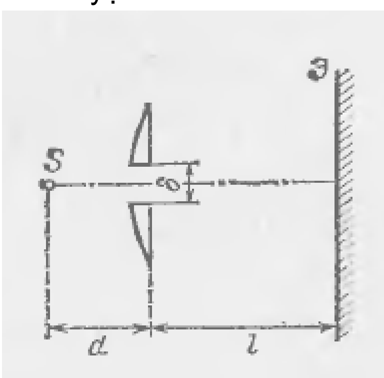
Bài tập

Một thấu kính mỏng phẳng lồi có đường kính $2r$, bán kính cong R, với chiết suất n_0 được đặt ở vị trí sao cho bên trái là không khí ($n_1 = 1$), và bên phải là môi trường trong suốt với chiết suất $n_2 \neq 1$ (mặt lồi hướng về phía không khí). Trong không khí, một nguồn sáng đơn sắc điểm được đặt cách thấu kính một khoảng d trên trục quang chính.

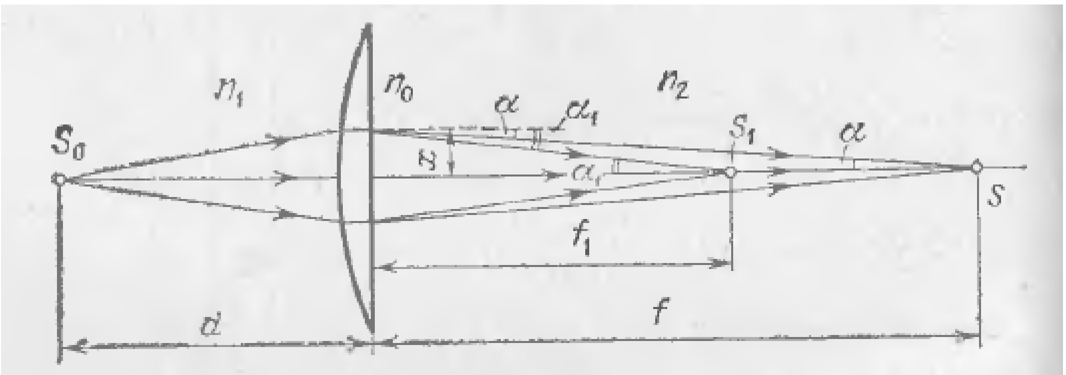
1. Hãy chứng minh mối liên hệ dưới đây giữa vị trí của ảnh, cách thấu kính một khoảng f, và vị trí của nguồn sáng d trong xấp xỉ chùm tia cận trục:

$$\frac{F_1}{d} + \frac{F_2}{f} = 1$$

   trong đó F_1 và F_2 lần lượt là tiêu cự của thấu kính trong không khí và khi tiếp xúc một phía với môi trường có chiết suất $\boldsymbol{n}_2$.
2. Thấu kính được cắt vuông góc với mặt phẳng thành hai phần bằng nhau, sau đó tách ra một khoảng $\delta \ll r$ (thấu kính Billet). Trên trục đối xứng của hệ này, một nguồn sáng điểm S được đặt cách thấu kính một khoảng $d\,(d > F_1)$ (xem hình). Ở bên phải hệ thấu kính, trên màn Э, được đặt song song với thấu kính ở khoảng cách l, hình thành N vân giao thoa, nếu bên phải cũng là không khí. Hãy xác định số vân giao thoa N theo bước sóng λ.
   Ghi chú: Tất cả các chiết suất đều là tuyệt đối.



Lời giải



1. Nếu phía sau thấu kính là không khí, thì các tia sáng xuất phát từ nguồn S_0, sau khi khúc xạ qua thấu kính, sẽ hội tụ tại điểm S_1 cách thấu kính một khoảng f_1 (hình 1).

Theo công thức thấu kính

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f_1}=\frac{1}{F_1}$$

ta có

$$\frac{F_1}{d}+\frac{F_1}{f_1}=1$$

Khi không gian phía sau thấu kính được lấp đầy bởi môi trường có chiết suất $\boldsymbol{n}_2$, ảnh của nguồn sáng S_0 dịch chuyển tới điểm S cách thấu kính một khoảng f (hình 1).

Để chứng minh phương trình cần tìm, ta cần chỉ ra rằng

$$\frac{F_1}{f_1}=\frac{F_2}{f}$$

Ghi định luật khúc xạ cho cả hai trường hợp:

$$\frac{\sin\alpha_0}{\sin\alpha_1}=\frac{1}{n_0};\frac{\sin\alpha_0}{\sin\alpha}=\frac{n_2}{n_0}$$

trong đó α_0 là góc tới của tia sáng tại ranh giới "thấu kính - không khí". Từ các biểu thức thu được với giá trị nhỏ của các góc α_0,α_1,α, khi $\sin\alpha\approx\alpha$, ta có:

$$\alpha_1=n_0\alpha_0,\alpha=\frac{n_0}{n_2}\alpha\Rightarrow\alpha_1=n_2\alpha$$

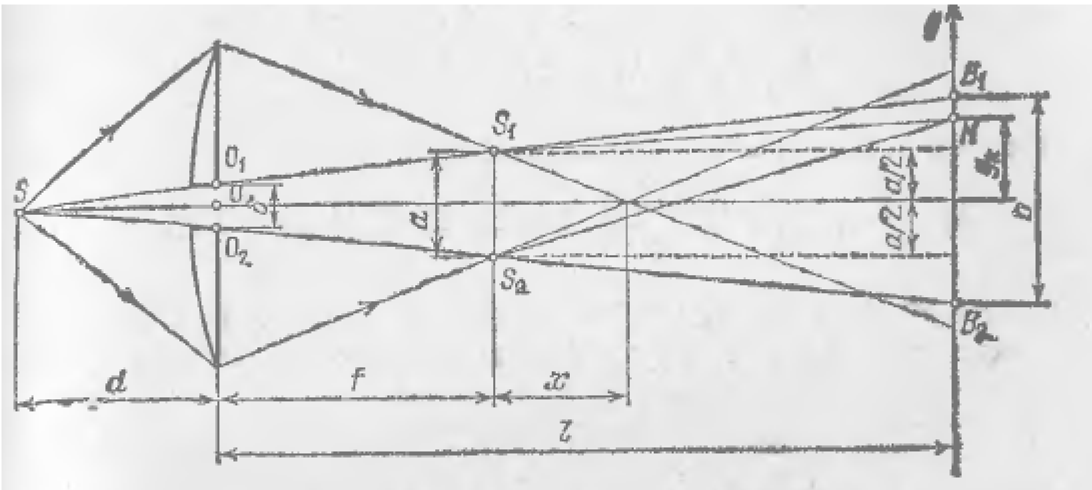
Vì $\alpha_1=x/f_1,\alpha=x/f$, nên $f=n_2 f_1$.
Xét sự truyền của chùm tia song song với trục quang chính, ta có thể chứng minh tương tự rằng $F_2=n_2F_1$. Do đó,

$$\frac{F_1}{f_1}=\frac{F_2/n_2}{f/n_2}=\frac{F_2}{f}$$

Từ 2 phương trình, ta có

$$\frac{F_1}{d} + \frac{F_2}{f} = 1$$

Điều này hoàn tất việc chứng minh.



2) Thấu kính bị cắt tạo ra hai ảnh S_1 và S_2 của nguồn sáng S cách thấu kính một khoảng f (hình 2). Các nguồn này là kết hợp, chúng tạo ra một mẫu giao thoa trên màn Э.

Khoảng cách $a = S_1S_2$ giữa các ảnh của nguồn sáng có thể dễ dàng tìm được từ sự tương đồng của các tam giác SO_1O_2 và SS_1S_2

$$\frac{a}{\delta} = \frac{d+f}{d}, a = \delta\left(1 + \frac{f}{d}\right) \tag{1}$$

Mẫu giao thoa thu được khi các sóng kết hợp phát ra từ các nguồn S_1 và S_2 chồng chập lên nhau. Kích thước $b = B_1B_2$ của vùng mà trong đó mẫu giao thoa có thể nhìn thấy được, có thể xác định từ sự tương đồng của các tam giác SO_1O_2 và SB_1B_2:

$$\frac{b}{\delta} = \frac{l+d}{d}; b = \delta\left(1 + \frac{l}{d}\right) \tag{2}$$

Hãy tìm tọa độ y_k của cực đại thứ k. Nếu cực đại này nằm tại điểm M trên màn, thì phải thỏa mãn mối quan hệ

$$S_2M - S_1M = k\lambda$$

trong đó λ là bước sóng. Gọi $S_1M = L_1, S_2M = L_2$. Từ hình 1, ta thấy rằng

$$L_1^2 = (l-f)^2 + \left(y_k - \frac{a}{2}\right)^2$$
$$L_2^2 = (l-f)^2 + \left(y_k + \frac{a}{2}\right)^2$$

Lấy phương trình thứ hai trừ đi phương trình thứ nhất, ta được $L_2^2 - L_1^2 = 2y_ka$, hoặc $(L_2 + L_1)(L_2 - L_1) = 2y_ka$, từ đó

$$L_2 - L_1 = \frac{2y_ka}{L_2 + L_1}$$

Trong trường hợp $y_k \ll l - f$, ta có thể chấp nhận xấp xỉ $L_2 + L_1 \approx 2(l-f)$. Khi đó

$$L_2 - L_1 \approx \frac{y_k a}{l-f}$$
$$a\frac{y_k}{l-f} = k\lambda, y_k = \frac{k\lambda(l-f)}{a} \tag{3}$$

Khoảng cách Δ giữa các cực đại liên tiếp bằng

$$\Delta = y_k - y_{k-1} = \frac{k\lambda(l-f)}{a} - \frac{(k-1)\lambda(l-f)}{a} = \frac{\lambda(l-f)}{a} \tag{4}$$

Từ công thức (4), ta thấy rằng tất cả các cực đại cách nhau một khoảng bằng nhau. Do đó, số cực đại cần tìm là

$$N = \frac{B_1B_2}{\Delta} = \frac{b}{\Delta} \tag{5}$$

Thay thế các biểu thức (1), (2) và (4) vào (5), ta được

$$N = \frac{\delta(1+l/d)a}{\lambda(l-f)} = \frac{\delta^2(1+l/d)(1+f/d)}{\lambda(l-f)}$$

Rõ ràng là mẫu giao thoa sẽ xuất hiện khi $l > f$. Từ công thức thấu kính

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$$

ta có thể viết

$$f = \frac{Fd}{d-F}, \text{hoặc } \frac{f}{d} = \frac{F}{d-F}$$

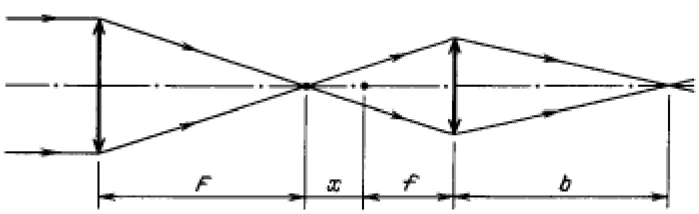
Khi đó, ta thu được biểu thức sau cho N:

$$N = \frac{\delta^2}{\lambda}\frac{(l+d)}{l(d-F)-Fd}, \text{ trong đó } F = \frac{R}{n_0-1}$$

Bài tập

Ống nhòm có độ phóng đại góc $k = 20$, bao gồm hai thấu kính hội tụ mỏng - vật kính có tiêu cự $F = 0,5$ m và thị kính có thể điều chỉnh theo mắt trong khoảng từ $D_- = -7$ đến $D_+ = +10$ đi-ốp-tri (khi điều chỉnh, thị kính di chuyển tương đối so với vật kính).
Bắt đầu từ khoảng cách tối thiểu a nào tính từ vật kính, ta có thể quan sát các vật ở xa bằng mắt bình thường không căng thẳng với sự trợ giúp của ống nhòm này?

Lời giải



Ống nhòm được xem xét trong bài toán này là hệ thống Kepler. Độ phóng đại góc $k = F/f$, do đó tiêu cự của thị kính bằng $f = F/k = 2,5$ cm.

Khi vật quan sát tiến lại gần từ vô cực đến khoảng cách tối thiểu có thể $\boldsymbol{a}$, ảnh của vật qua vật kính sẽ di chuyển từ mặt phẳng tiêu điểm về phía thị kính một khoảng x, có thể tìm được từ công thức thấu kính:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{F+x} = \frac{1}{F}, \frac{1}{F+x} = \frac{a-F}{aF}, x = \frac{aF}{a-F} - F \approx \frac{F^2}{a}$$

vì $a \gg F$. Do đó, ta cần tìm $\boldsymbol{x}$.
Thị kính của ống nhòm là kính lúp; khi quan sát vật qua kính lúp bằng mắt không căng thẳng, tức là mắt điều tiết vô cực, vật phải nằm ở mặt phẳng tiêu điểm của kính lúp.
Khoảng cách x cần tìm bằng độ dịch chuyển của mặt phẳng tiêu điểm thị kính khi điều chỉnh nó; khi đó, rõ ràng là thị kính cần phải dịch chuyển ra xa vật kính.
Như hình vẽ, khi quan sát các vật vô cực qua thị kính dịch chuyển, chùm ánh sáng đi ra từ thị kính sẽ hội tụ.
Khi chùm tia song song rọi vào ống nhòm, vị trí này của thị kính là cần thiết cho mắt viễn thị, mà độ hội tụ ánh sáng của nó ở trạng thái không căng thẳng là không đủ để hội tụ chùm tia song song trên võng mạc.
Độ dịch chuyển tối đa của thị kính tương ứng với độ hội tụ $D_+ = +10$ đi-ốp. Kính mắt có độ hội tụ như vậy sẽ hội tụ chùm tia song song ở khoảng cách $b = 1/D_+$. Khoảng cách b này xác định khoảng cách $\boldsymbol{x}$:

$$\frac{1}{f+x} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \text{ từ đó } x = \frac{f^2}{b-f} = \frac{5}{6} \text{ cm}$$

Khoảng cách cần tìm bằng

$$a \approx \frac{F^2}{m} = \frac{0,25 \cdot 6\mathrm{m}^2}{5 \cdot 10^{-2}\mathrm{m}} = 30\mathrm{m}$$

Bài tập

Một thanh mỏng ngắn được đặt cách thấu kính hội tụ mỏng một khoảng $a = 20\mathrm{cm}$ dọc theo trục quang chính của nó. Chiều dài ảnh thật của thanh qua thấu kính lớn hơn chiều dài của thanh $k = 9$ lần. Chiều dài ảnh sẽ thay đổi bao nhiêu lần nếu dịch chuyển thanh dọc theo trục một khoảng $\Delta = 5$ cm ra xa thấu kính? Chú ý: với $|x| \ll 1$, công thức $1/(1+x) \approx 1 - x$ là đúng.

Gọi tiêu cự của thấu kính là F, chiều dài của thanh là l, chiều dài ảnh của nó là L, với $l \ll a, L \ll b$ trong đó b là khoảng cách từ ảnh của thanh đến thấu kính. Khi đó, theo công thức thấu kính mỏng, đối với vị trí của một đầu thanh và ảnh của nó, ta có:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$$

Nếu đầu kia của thanh nằm gần thấu kính hơn, ta có thể viết:

$$\frac{1}{a-l} + \frac{1}{b+L} = \frac{1}{L}, \text{ hoặc } \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1-(l/a)} + \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{1+(L/b)} = \frac{1}{F}$$

Vì $1/(1+x) \approx 1-x$ khi $x \ll 1$, nên ta có thể viết lại hệ thức cuối cùng dưới dạng:

$$\frac{1}{a}\left(1+\frac{l}{a}\right)+\frac{1}{b}\left(1-\frac{L}{b}\right) \approx \frac{1}{F}$$

Trừ (1) từ (2), ta được: $\frac{l}{a^2}-\frac{L}{b^2} \approx 0$, từ đó độ phóng đại dọc của thấu kính $k=\frac{L}{l}=\left(\frac{b}{a}\right)^2$, và $b=\sqrt{k}a$. Thay thế biểu thức này cho b vào hệ thức (1), ta được

$$F=\frac{\sqrt{k}a}{\sqrt{k}+1}.$$

Với khoảng cách mới từ thanh đến thấu kính $a_1=a+\Delta a$, từ ảnh đến thấu kính $b_1=\frac{a_1 F}{a_1-F}$ và chiều dài ảnh mới L_1, hệ số phóng đại mới có dạng:

$$k_1=\frac{L_1}{l}=\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2=\left(\frac{F}{a_1-F}\right)^2=\left(\frac{\frac{\sqrt{k}a}{\sqrt{k}+1}}{a+\Delta a-\frac{\sqrt{k}a}{\sqrt{k}+1}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{k}a}{(a+\Delta a)(\sqrt{k}+1)-\sqrt{k}\ldots}\right.$$

Từ đây, tỷ số cần tìm của chiều dài ảnh thanh bằng

$$n=\frac{L_1}{L}=\frac{k_1}{k}=\left(\frac{a}{(a+\Delta a)(\sqrt{k}+1)-\sqrt{k}a}\right)^2=\frac{1}{\left(\left(1+\frac{\Delta a}{a}\right)(\sqrt{k}+1)-\sqrt{k}\right)^2}=\frac{\ldots}{\left(1+\ldots\right.}$$

nghĩa là chiều dài ảnh sẽ giảm 4 lần.

Bài tập

Một lăng kính thuỷ tinnh có chiết suất n. Xác định góc chiết quang A của lăng kính, sao cho góc lệch cực tiểu $\mathrm{D_m}$ của lăng kính bằng nửa góc A .
Xét cụ thể hai trường hợp : $\mathrm{n}=\sqrt{2}$ và $\mathrm{n}=1,45$.

Lời giải

Góc lệch D của một tia sáng khi qua một lăng kính có góc chiết quang A dược tính theo công thức :

$$\mathrm{D}=\mathrm{i}+\mathrm{i}'-\mathrm{A} \text{ với } \mathrm{A}=\mathrm{r}+\mathrm{r}'$$

Ở độ lệch cực tiểu, thì

$$\mathrm{r}=\mathrm{r}'=\frac{\mathrm{A}}{2}$$

và

$$\mathrm{i}=\mathrm{i}'=\frac{\mathrm{D}_{\min}+\mathrm{A}}{2}$$

Theo định luật khúc xa $\mathrm{\sin i = n \cdot \sin r}$
ta có

$$\sin \frac{D_m + A}{2} = n \sin \frac{A}{2}$$

Theo giả thiết

$$\begin{aligned}
& D_m = \frac{A}{2}, \text{ và đẳng thức này thành:} \\
& \sin \frac{1}{2}\left(\frac{A}{2} + A\right) = n \cdot \sin \frac{A}{2} \\
& \sin \left(\frac{A}{2} + \frac{A}{4}\right) = n \cdot \sin \frac{A}{2} \\
& \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{4} + \cos \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{A}{4} = n \cdot \sin \frac{A}{2}
\end{aligned}$$

$$2 \sin \frac{A}{4} \cdot \cos^2 \cdot \frac{A}{4} + \left(2 \cos^2 \frac{A}{4} - 1\right) \cdot \sin \frac{A}{4} = 2n \cdot \sin \frac{A}{4} \cdot \cos \frac{A}{4}$$

hay

$$2 \cos^2 \frac{A}{4} + \cos \frac{A}{2} = 2n \cdot \cos \frac{A}{4}$$

thay

$$2 \cos^2 \frac{\mathrm{A}}{4} = \left(1 + \cos \frac{\mathrm{A}}{2}\right)$$

, thì phương trình trở thành :

$$2 \cos \frac{A}{2} + 1 = 2n \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{A}{2}}{2}}$$

Bình phương hai vế ta được :

$$\left(2 \cos \frac{A}{2} + 1\right)^2 = 2n^2 \cdot \left(1 + \cos \frac{A}{2}\right) \$Đặt\$ \cos \frac{A}{2} = x$$

, ta dược phương trình bậc hai :

$$4x^2 + 4x + 1 = 2n^2(1 + x) \Rightarrow 4x^2 + \left(4 - 2n^2\right)x - \left(2n^2 - 1\right) = 0$$

Biệt só của phương trình :

$$\Delta' = \left(2 - n^2\right)^2 + 4\left(2n^2 - 1\right) = n^4 + 4n^2 = n^2\left(n^2 + 4\right)$$

luôn luôn dương, và phương trình có hai nghiệm trái dấu. Do $\frac{\mathrm{A}}{2}$ luôn nhỏ. hơn 90°, nên $\cos \frac{\mathrm{A}}{2}$ luôn luôn dương, và ta chỉ lấy nghiệm dương:

$$x = \cos\frac{A}{2} = \frac{n^2 - 2 + n\sqrt{n^2+4}}{4}$$

a) Với $\mathrm{n}^2 = 2, \mathrm{n} = \sqrt{2}$, ta được :

$$x = \cos\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+4}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ suy ra } \frac{A}{2} = 30^\circ \text{ hay } A = 60^\circ$$

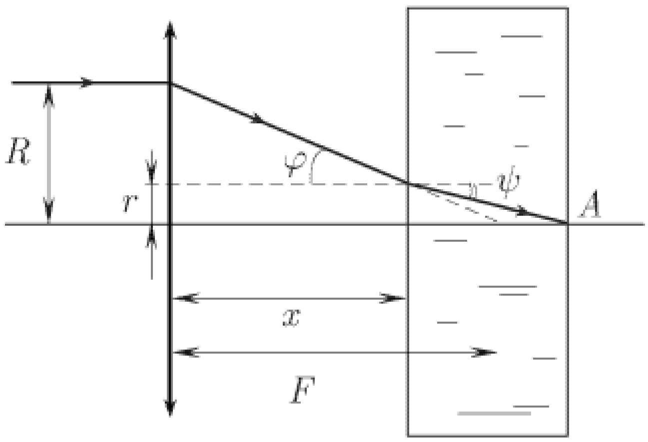
b) Với $\mathrm{n} = 1,45; \mathrm{n}^2 = 2,1025; \sqrt{\mathrm{n}^2+4} = \sqrt{6,1025} = 2,470$ ta được :

$$x = \cos\frac{A}{2} = \frac{0,1025 + 1,45.2,47}{4} = \frac{3,6843}{4} = 0,9211$$

Suy ra $A \approx 46^\circ$.

Bài tập

Hệ thống quang học bao gồm một thấu kính hội tụ mỏng có tiêu cự $F = 12$ cm và một tấm thủy tinh phẳng song song dày h cm với chiết suất $n = 1,33$. Tấm thủy tinh vuông góc với trục quang học chính của thấu kính. Một chùm tia sáng song song hình trụ mỏng có bán kính $r = 0,5$ cm truyền dọc theo trục quang học chính và hội tụ tại một điểm nằm trên mặt sau của tấm thủy tinh. Với những giá trị h nào điều này có thể xảy ra? Tìm bán kính R của vệt sáng trên mặt trước của tấm thủy tinh khi $h = 30$ cm.



Lời giải

Sau khi đi qua thấu kính, tia sáng ngoài cùng của chùm tia cách trục quang học một khoảng r tạo thành một góc ϕ lớn nhất với trục quang học chính (hình vẽ). Nếu không có tấm thủy tinh, tất cả các tia của chùm tia sẽ hội tụ tại tiêu điểm của thấu kính, cách thấu kính một khoảng F. Từ đó, góc ϕ được xác định bởi hệ thức $\operatorname{tg}\phi = r/F = 0,005$. Giá trị thu được $\operatorname{tg}\phi$ có nghĩa là góc ϕ đủ nhỏ để có thể sử dụng gần đúng $\operatorname{tg}\phi \approx \sin\phi \approx \phi$, với ϕ tính bằng radian. Do đó,

$$\phi \approx \frac{r}{F}$$

Tia sáng khảo sát bị khúc xạ trên mặt trái của tấm thủy tinh và truyền tiếp trong tấm thủy tinh dọc theo hướng tạo với trục quang học một góc $\psi < \phi$ nào đó (hình vẽ). Vì vậy, sử dụng định luật khúc xạ ánh sáng, ta có:

$$\frac{\sin\phi}{\sin\psi} = \frac{\phi}{\psi} = n$$

Từ (1), nó có thể được viết lại dưới dạng

$$\psi \approx \frac{r}{nF} \cdot (2)$$

Theo điều kiện, tia sáng khảo sát rơi vào điểm A trên mặt sau của tấm thủy tinh. Từ hình vẽ, ta thấy $r = h \operatorname{tg}\psi + x \operatorname{tg}\phi \approx h\psi + x\phi$. Từ đó, sử dụng (1) và (2), ta tìm được

$$x = F - \frac{h}{n} \cdot (3)$$

Trong gần đúng thấu kính mỏng, khoảng cách $\boldsymbol{x}$ là khoảng cách giữa thấu kính và tấm thủy tinh. Rõ ràng, $\boldsymbol{x} \geq 0$. Do đó, từ (3), chỉ những giá trị h thỏa mãn điều kiện sau là chấp nhận được:

$$h \leq nF = 133\mathrm{cm}$$

Khoảng cách $\boldsymbol{x}$, nơi nên đặt tấm thủy tinh để tất cả các tia của chùm tia hội tụ tại điểm A khi ra khỏi tấm thủy tinh, phụ thuộc vào độ dày h của tấm thủy tinh, như (3). Kích thước của vệt sáng R trên mặt trước của tấm thủy tinh cũng phụ thuộc vào độ dày này. Với giá trị h cho trong điều kiện, ta có:

$$R = h \operatorname{tg}\psi \approx h\psi \approx \frac{hr}{nF} \approx 0,11 \text{ cm}$$

Đáp án: $h \leq nF = 133\mathrm{cm}$; $R \approx hr/(nF) \approx 0,11$ cm.