Phương pháp công ảo

Lý thuyết

- Nguyên lý biến phân (thuộc phạm trù cơ lượng tử) đầu tiên gặp trong cơ học là nguyên lý công ảo (Virtual Work Principle), nguyên lý công ảo là nền tảng của cơ học phân tích bao gồm phương pháp Lagrange và Hamilton.
- Hữu dụng khi tính toán và xác định điều kiện cân bằng của một hệ cơ học.
- Hữu dụng khi tính toán giá trị lực của hệ phức tạp.
  Khái niệm về công ảo xoay quanh ý tưởng tính toán công thực hiện trên một hệ các hạt (hoặc chất điểm, vật) thông qua một dịch chuyển ảo.

Dịch chuyển ảo

Nói về ý nghĩa của dịch chuyển ảo, xét một hệ N hạt, có thể chịu một số ràng buộc nào đó (ví dụ: hệ các hạt điện tích có tương tác qua lại, etc...) được xác định bởi $3N$ toạ độ ($3N$ bậc tự do)Descartes tương ứng với một hệ quy chiếu quán tính.
Giả sử tại một thời điểm, hệ trải qua những dịch chuyển vô cùng nhỏ mang tính ảo, tức là thời gian trôi qua gần như là tức thời cho các dịch chuyển vô cùng nhỏ này. Sự thay đổi này ($\delta\vec{x}_i$) trong hệ được gọi là dịch chuyển ảo.

Trong tính huống thông thường khi xem xét dịch chuyển ảo, nó sẽ tuân theo các ràng buộc tức thời .
ví dụ vật thể 1 được gắn vào vật thể 2, thì khi vật 1 có dịch chuyển ảo, vật 2 cũng sẽ dịch chuyển theo. Vật 1 nằm trong ống rỗng thì khi có dịch chuyển ảo, nó phải theo phương của ống dẫn.
Đối với các ràng buộc về chuyển động thì thường sẽ bỏ qua .
ví dụ như nếu vật 1 chuyển động trên vật 2 cũng đang chuyển động, xét dịch chuyển ảo của vật 1 thì có thể xem bỏ qua chuyển động của vật 2 : Xét một ống chứa hạt nặng đang quay theo phương nằm ngang, tại một thời điểm xét dịch chuyển ảo của hạt nặng trong ống, có thể bỏ qua ràng buộc là chuyển động quay của ống

Xét một hệ N hạt, chịu n ràng buộc hoàn hảo :
Ràng buộc hoàn hảo là các trường hợp ràng buộc có thể được biểu diễn thông qua các biến toạ độ và có thể là thời gian.

$$f_i(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0$$

các x_i là các toạ độ suy rộng mô tả hệ
Đạo hàm toàn phần của phương trình chuyển động tương ứng với một dịch chuyển vô cùng nhỏ của hệ:

$$df_i = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_j + \frac{\partial f_i}{\partial t} dt = 0$$

Nhận thấy ở đây sẽ bao gồm cả dịch chuyển không gian và dịch chuyển thời gian. Đối với dịch chuyển ảo, vì thời gian dịch chuyển gần như tức thời, coi dịch chuyển thời gian bằng 0,

$$\delta f_i = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \delta x_j = 0$$

Điều kiện để dịch chuyển ảo và dịch chuyển thực giống nhau là phương trình ràng buộc không phụ thuộc vào thời gian, theo cơ học Hamilton thì khi đấy hàm sẽ gọi là một *hàm dừng*, nó không phụ thuộc vào thời gian một cách tường minh.

Trong trường hợp các ràng buộc là không hoàn hảo (tức là sẽ không thể viết dưới dạng $f_i(x_1, \ldots, x_{3N}, t) = 0$), trường hợp không hoàn hảo được viết dưới dạng các đạo hàm:

$$\sum_i a_{ji} dx_i + a_{jt} dt = 0$$

j tương ứng với ràng buộc thứ j, khi đấy phương trình của dịch chuyển ảo là:

$$\sum_i a_{ji} \delta x_i = 0$$

Cũng có thể áp dụng cho toạ độ suy rộng:

$$\sum_i a_{ji} dq_i + a_{jt} dt = 0$$

có thể thay thế a bằng

$$\frac{\partial f_j}{\partial q_i} \text{ và } \frac{\partial f_j}{\partial t}$$

Công ảo

Xét lại hệ gồm N hạt với $3N$ bậc tự do. Giả sử các lực $F_1, \ldots F_{3N}$ tác dụng lên các hạt theo chiều dương, công ảo của hệ được viết bởi:

$$\delta W = \sum_i F_i \delta x_i = \sum_i \overrightarrow{\mathbf{F}}_i \cdot \delta \overrightarrow{\mathbf{r}}_i$$

Công ảo không phụ thuộc vào hệ toạ độ đang được sử dụng mà có thể được biến đổi theo bất kỳ hệ toạ độ suy rộng nào

$$\delta W = \sum_j \left(\sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j$$

Định nghĩa được lực suy rộng:

$$Q_j = \left(\sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \Rightarrow \delta W = \sum_j Q_j \delta q_j$$

Lực suy rộng sẽ không nhất thiết phải có đơn vị của một lực, giống như toạ độ suy rộng không nhất thiết phải có đơn vị độ dài. Tuy nhiên, tích của lực suy rộng và toạ độ suy rộng có đơn vị công - năng lượng.

Trong biểu thức công ảo, các lực được coi là không đổi trong suốt dịch chuyển ảo, điều này đúng ngay cả khi các lực có thể thay đổi rất mạnh trên một dịch chuyển nhỏ trong một số hệ phi tuyến tính nhất định.

Giả sử hệ chịu các ràng buộc nhất định, lực có thể được chia làm 2 loại là lực tác dụng $\vec{F}^{\alpha}$ và lực ràng buộc $\vec{F}^{c}$. Công ảo của các lực ràng buộc theo toạ độ suy rộng:

$$\delta W_c = \sum_i Q_i^c \delta q_i$$

Nếu dịch chuyển và ràng buộc **tương thích** hay là trong quyển Cơ học 3 nói các ràng buộc là **hoàn hảo** thì công ảo của lực ràng buộc bằng 0, tức là lực ràng buộc sẽ không sinh công. Tức là khi các dịch chuyển ảo có hướng vuông góc với lực ràng buộc (chỉ áp dụng cho các trường hợp đặc biệt). Tuy nhiên các bài toán vật lý có thể áp dụng công ảo sẽ thuộc các bài toán có dạng như vậy. Khi đấy tổng công ảo của hệ chỉ là của lực tác dụng:

$$\delta W = \sum_i Q_i^a \delta q_i$$

Định lí công ảo

Một ứng dụng quan trọng của công ảo là nghiên cứu cân bằng tĩnh của hệ cơ học. Giả sử một hệ cơ học gồm N chất điểm với các ràng buộc **hoàn hảo**, nếu hệ đang ở trong trạng thái cân bằng tĩnh, định luật Newton cho N chất điểm là:

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}_i^a + \overrightarrow{\mathbf{F}}_i^c = 0$$

Công ảo của hệ viết:

$$\delta W = \sum_i \overrightarrow{\mathbf{F}}_i^a \cdot \delta \overrightarrow{\mathbf{r}}_i + \overrightarrow{\mathbf{F}}_i^c \cdot \delta \overrightarrow{\mathbf{r}}_i = 0$$

Với một hệ cơ học lý tưởng, các ràng buộc không sinh công (phản lực của sàn vuông góc với phương chuyển động, v.v..) và các dịch chuyển ảo là khả nghịch, tức là có thể thay đổi $\delta \vec{r}$ bằng $-\delta \vec{r}$, cân bằng của hệ cơ học sẽ thoả mãn điều kiện:

$$\delta W = \sum_i \overrightarrow{\mathbf{F}}_i^a \cdot \delta \overrightarrow{\mathbf{r}}_i = 0 \Rightarrow \delta W = \sum_i Q_i^a \delta q_i = 0$$

Tại sao lại cần khả nghịch các dịch chuyển ảo ? Nếu đảo ngược hướng của dịch chuyển ảo, tức là đổi dấu, tương ứng với việc thay đổi cấu hình theo hướng ngược lại. Nó có ý nghĩa vật lý rằng các ràng buộc không phân biệt hướng của chuyển động (đặc biệt đối với ràng buộc hoàn hảo - không sinh công)

Xử lý cân bằng cơ học sẽ chỉ cần xử lý lực tác dụng.

Đối với một hệ cơ ban đầu không có chuyển động, nhưng không ở trạng thái cân bằng, về lý thuyết, theo cơ học Newtons, thì 1 hoặc nhiều chất điểm của hệ sẽ có tổng lực tác dụng lớn hơn không và sẽ bắt đầu chuyển động theo hướng của tổng lực tác dụng. Chọn hướng của dịch chuyển ảo theo hướng của chuyển động thực, khi đấy công ảo lớn hơn 0

$$\delta W = \sum_i \overrightarrow{\mathbf{F}}_i^a \cdot \delta\overrightarrow{\mathbf{r}}_i + \overrightarrow{\mathbf{F}}_i^c \cdot \delta\overrightarrow{\mathbf{r}}_i > 0$$

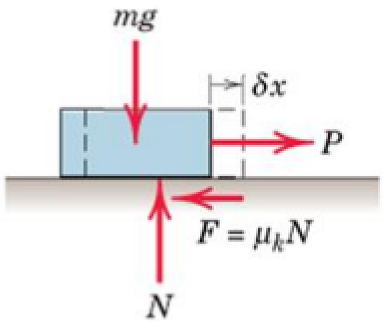
Lực ràng buộc không sinh công,

$$\delta W = \sum_i \overrightarrow{\mathbf{F}}_i^a \cdot \delta\overrightarrow{\mathbf{r}}_i > 0$$

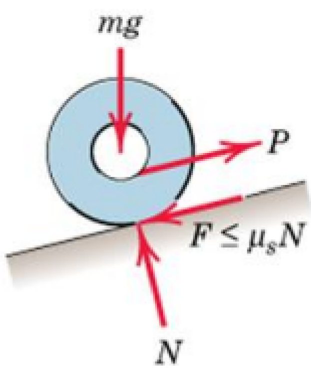
Phát biểu định lí công ảo: Muốn cho một hệ chất điểm có các liên kết hoàn hảo ban đầu đứng yên sẽ vẫn đứng yên thì điều kiện cần và đủ là tổng các công ảo của các ngoại lực đặt vào hệ phải bằng không.

Công của lực ma sát

Tuy định lí công ảo thường được áp dụng với các hệ lý tưởng, việc bắt gặp các bài tập cơ học có lực ma sát là cực kỳ thường xuyên. Nếu lực ma sát tồn tại trong hệ và đáng kể, công sinh ra do lực tác dụng sẽ bị công của lực ma sát chống lại, nghĩa là ngược dấu.
Đối với lực ma sát sinh ra do chuyển động trượt

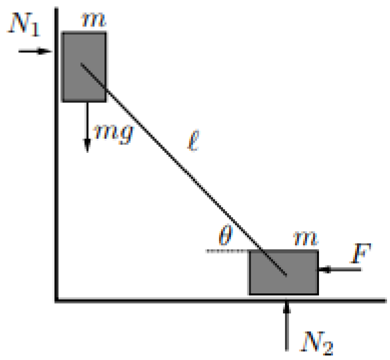


Với một dịch chuyển ảo lừa δx, công sinh ra bởi lực ma sát:$-\mu_k N \delta x$



Với chuyển động lăn không trượt thì lực ma sát sẽ không sinh công. Do khi xét một dịch chuyển ảo vô cùng nhỏ của khối tâm thì chuyển động có thể được quy từ chuyển động tịnh tiến và quay quanh khối tâm thành chuyển động quay quanh tâm quay tức thời, và tâm quay tức thời này không dịch chuyển. Hay giải thích một cách khác, với một dịch chuyển đủ lớn để thấy được sự chuyển động của tâm quay tức thời, thì hướng chuyển động của điểm *đã từng* là tâm quay tức thời sẽ không cùng phương với lực ma sát của chuyển động lăn không trượt (rolling friction) mà sẽ đi lên theo phương vuông góc, khiến cho công của lực ma sát lăn không trượt bằng 0.

Bài tập ví dụ



Góc tường 90 độ có 2 vật khối lượng m trượt không ma sát trên bề mặt tường và sàn, phản lực của tường lên vật 1 là N_1, phản lực của sàn lên vật 2 là N_2. Xác định lực F để hệ vật ở trạng thái cân bằng.

Lời giải hướng cơ học Newton

Cân bằng lực theo phương x, y và cân bằng momen:

$$\begin{array}{ll} \sum F_x = 0 & N_1 - F = 0 \\ \sum F_y = 0 & N_2 - 2mg = 0 \\ \sum \tau = 0 & mg\ell\cos\theta - N_1\ell\sin\theta = 0 \end{array}$$

Đáp án: $F = mg\cot\theta$

Lời giải hướng định lí công ảo

Áp dụng định lí công ảo cho hệ vật cân bằng:

$$mg\delta y - F\delta x = 0$$

Xét ràng buộc của x và y,

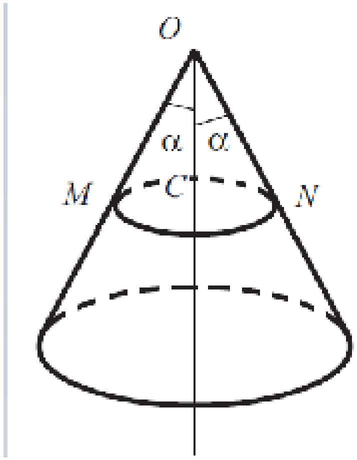
$$\left.\begin{array}{l} x = \ell\cos\theta \\ y = \ell\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \delta x = -\delta\theta\ell\sin\theta \\ \delta y = \delta\theta\ell\cos\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \delta x\cos\theta - \delta y\sin\theta = 0$$

Kết hợp 2 phương trình có:

$$\begin{aligned} (mg\cot\theta - F)\delta x &= 0 \\ F &= mg\cot\theta \end{aligned}$$

Bài tập ví dụ

Một dải cao su đàn hồi nặng có dạng một đường tròn với trọng lượng P được móc nằm ngang trên một hình nón trơn thẳng có trục thẳng đứng và góc ở đỉnh là 20° . Bán kính của dải dây đàn hồi ở trạng thái không căng là a. Hãy tìm vị trí cân bằng của dải dây đàn hồi trên hình nón và lực căng T trong dải dây, biết rằng lực đàn hồi tỉ lệ thuận với độ giãn dài của chu vi dải đàn hồi (hệ số tỉ lệ là A).



Lời giải

Gọi MN là vị trí cân bằng của dải dây cao su khi bán kính của nó là x, lực căng dây cao su khi đó là:

$$T = 2\pi(x - a)\lambda$$

Nếu kéo dải dây xuống một đoạn dịch chuyển nhỏ, bán kính dải dây khi căng sẽ tăng một đoạn là δx , đoạn dây sẽ dịch chuyển theo phương thẳng đứng là δz

$$\delta z = \delta x \ \cot \alpha$$

Phương trình định lí công ảo:

$$\delta W = \sum_i Q_i^a \delta q_i = 0$$

Với toạ độ suy rộng $q = x$

$$P\delta z - T2\pi\delta x = 0$$

Thay T và δz

$$P\cot \alpha - \lambda 2\pi(x - a)2\pi = 0,$$

Suy ra

$$x = a + \frac{P\cot \alpha}{\lambda 4\pi^2}$$

Vị trí cân bằng:

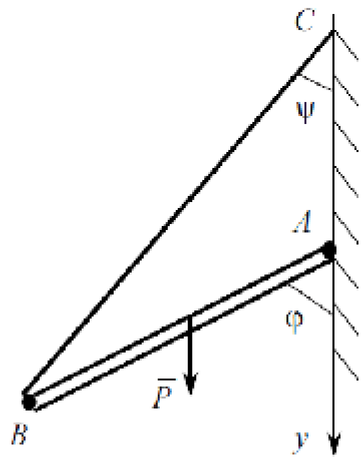
$$OC = x\cot \alpha = a\cot \alpha + \frac{P\cot^2 \alpha}{\lambda 4\pi^2}$$

Lực căng dây:

$$T = \frac{P \cot \alpha}{2\pi}$$

Bài tập

Một thanh đồng chất nặng AB tựa đầu A vào tường thẳng đứng, và đầu B được giữ bởi sợi dây BC, được cố định tại điểm C trên cùng bức tường . Hãy tìm mối quan hệ giữa các góc φ và ψ, lần lượt được tạo thành bởi thanh và sợi dây với phương thẳng đứng khi hệ cân bằng.



Lời giải

Giả sử $AB = 2a$, $BC = l$, trọng lượng của thanh là $\vec{P}$. Hướng trục y thẳng đứng xuống dưới từ điểm C. Phương trình biểu diễn nguyên lý công ảo có dạng

$$P\delta y = 0$$

trong đó $y = l\cos\psi - a\cos\varphi$, và do đó, vì $P \neq 0$,

$$\delta y = a\sin\varphi\delta\varphi - l\sin\psi\delta\psi = 0$$

Vì vậy, ở vị trí cân bằng, ta phải có đẳng thức

$$a\sin\varphi\delta\varphi = l\sin\psi\delta\psi$$

Hệ có một bậc tự do, có thể chọn một trong các góc này - φ hoặc ψ làm toạ độ (thay cho toạ độ suy rộng). Mối quan hệ liên kết các góc này có thể thu được, ví dụ, bằng cách áp dụng định lý $\sin$ cho tam giác ABC:

$$\frac{2a}{\sin\psi} = \frac{l}{\sin(\pi - \varphi)}, \text{ hoặc } 2a\sin\varphi = l\sin\psi$$

sau khi biến phân (vi phân theo biến), ta có

$$l\cos\psi\delta\psi = 2a\cos\varphi\delta\varphi$$

Chia từng hạng tử, ta được

$$\frac{a\sin\varphi\delta\varphi}{2a\cos\varphi\delta\varphi} = \frac{l\sin\psi\delta\psi}{l\cos\psi\delta\psi}, \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\psi$$

Đây chính là mối quan hệ cần tìm giữa các góc φ và ψ khi cân bằng, các giá trị của góc φ và ψ có thể thu được bằng cách giải phương trình vừa tìm được cùng với phương trình

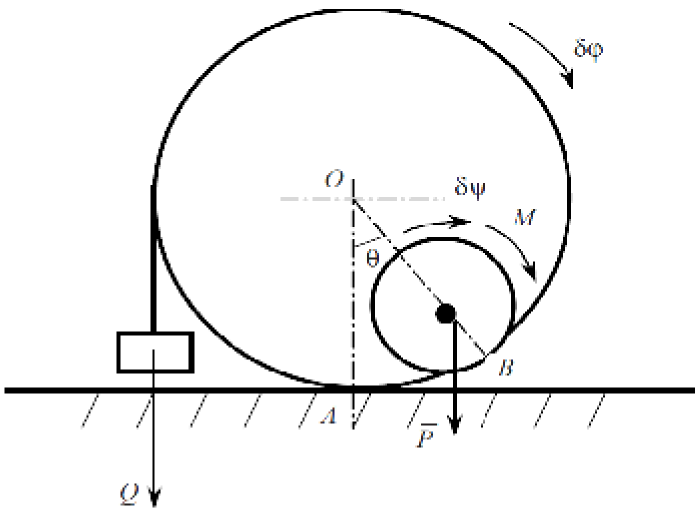
$$l\sin\psi = 2a\sin\varphi$$

thiết lập mối liên hệ giữa các góc φ và ψ này.

Bài tập

Một xi-lanh rỗng có bán kính R, nằm trên mặt phẳng nằm ngang, bên trong đặt một xi-lanh đặc có bán kính r và trọng lượng $\bar{P}$; một cặp lực có mô-men M tác dụng lên xi-lanh sau trong mặt phẳng của hình vẽ. Một sợi dây được quấn quanh xi-lanh rỗng, mang một vật nặng có trọng lượng $\bar{Q}$ ở đầu tự do (hình 8).

Giả sử bề mặt của các xi-lanh đủ nhám để loại trừ sự trượt, và bỏ qua trọng lượng của xi-lanh rỗng, hãy tìm vị trí cân bằng của hệ.



Lời giải

Hệ có hai bậc tự do, tương ứng với hai chuyển động độc lập có thể xảy ra, cụ thể là toàn bộ hệ có thể quay một góc vô cùng bé $\delta\varphi$ quanh tâm quay tức thời A của xi-lanh rỗng, và cũng có thể, giữ xi-lanh rỗng cố định, quay xi-lanh bên trong một góc $\delta\psi$ quanh tâm quay tức thời B.

Gọi θ là góc AOB ở vị trí cân bằng. Đầu tiên, giữ xi-lanh bên trong cố định bên trong xi-lanh rỗng, quay toàn bộ hệ một góc $\delta\varphi$ quanh điểm A. Phương trình định lí công ảo cho chuyển động này sẽ là

$$-QR\delta\varphi + P(R-r)\sin\theta\delta\varphi + M\delta\varphi = 0$$

từ đó, bằng cách cho hệ số của $\delta\varphi$ bằng không, tìm được

$$\sin\theta = \frac{QR-M}{P(R-r)}$$

Bây giờ, giữ xi-lanh rỗng cố định, cho xi-lanh bên trong chuyển động quay một góc $\delta\psi$ quanh tâm tức thời B; phương trình công ảo lúc này sẽ là

$$M\delta\psi - Pr\sin\theta\delta\psi = 0$$

từ đó

$$\sin\theta = \frac{M}{P \cdot r}$$

Nhận được hai giá trị của góc θ, vị trí cân bằng của hệ có thể xảy ra nếu cả hai giá trị $\sin\theta$ bằng nhau, nghĩa là

$$\frac{QR - M}{P(R-r)} = \frac{M}{Pr}$$

Sau khi biến đổi rõ ràng, nhận được $M = Qr$. Thay giá trị M này vào công thức cho $\sin\theta$, ta tìm được

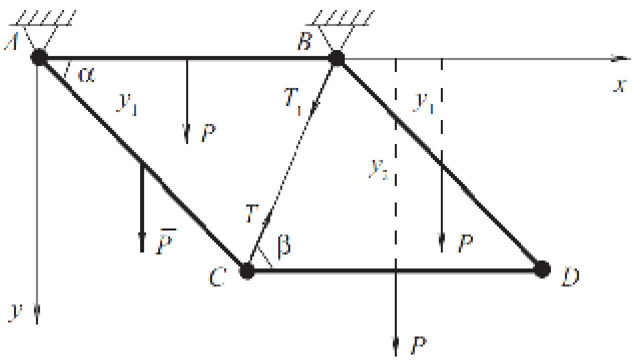
$$\sin\theta = \frac{Q}{P}$$

trong đó vị trí cân bằng có thể xảy ra nếu

$$M = Qr$$

Bài tập

Bốn thanh giống nhau có trọng lượng $\bar{P}$ và chiều dài L tạo thành một hình thoi khớp nối $ABCD$ trong mặt phẳng thẳng đứng, trong đó thanh AB được cố định ở vị trí nằm ngang. Các khớp nối B và C được nối bằng một sợi dây (hình 9). Xác định lực căng T của sợi dây này.



Lời giải

Để xác định lực căng của dây BC, ta loại bỏ dây và thay thế tác dụng của nó bằng hai lực $\bar{T}$ và $\bar{T}_1$ ($\bar{T} = -\bar{T}_1$). Các lực hướng ra từ nút, ta coi dây bị kéo căng. Khi đó, thanh AC có thể quay quanh điểm A, trong khi thanh AB không thay đổi vị trí của nó, do đó lực $\bar{T}_1$ tác dụng tại điểm B không thực hiện công và phương trình mô tả định lí công ảo sẽ được viết dưới dạng

$$2P\delta y_1 + P\delta y_2 + T_x\delta x_C + T_y\delta y_C = 0$$

trong đó x_C, y_C là tọa độ của điểm C; y_1, y_2 là tung độ của các điểm đặt các lực trọng lượng của các thanh.
Từ hình vẽ, ta tìm được:

$$\begin{aligned} y_1 &= 1/2L\sin\alpha, \quad & y_2 &= L\sin\alpha, \\ x_C &= L\cos\alpha, & y_C &= L\sin\alpha. \end{aligned}$$

Biến phân các hệ thức này, ta được:

$$\begin{aligned} \delta y_1 &= 1/2L\cos\alpha\delta\alpha, \quad & \delta y_2 &= L\cos\alpha\delta\alpha, \\ \delta x_C &= -L\sin\alpha\delta\alpha, & \delta y_2 &= L\cos\alpha\delta\alpha. \end{aligned}$$

Ta tìm các hình chiếu của lực T lên các trục x, y:

$$\begin{aligned} T_x &= T\cos\beta, \quad & T_y &= -T\sin\beta, \quad \beta = 1/2(\pi-\alpha), \\ T_x &= T\sin 1/2\alpha, & T_y &= -T\cos 1/2\alpha. \end{aligned}$$

Thay thế các biểu thức này vào phương trình công (19), ta nhận được

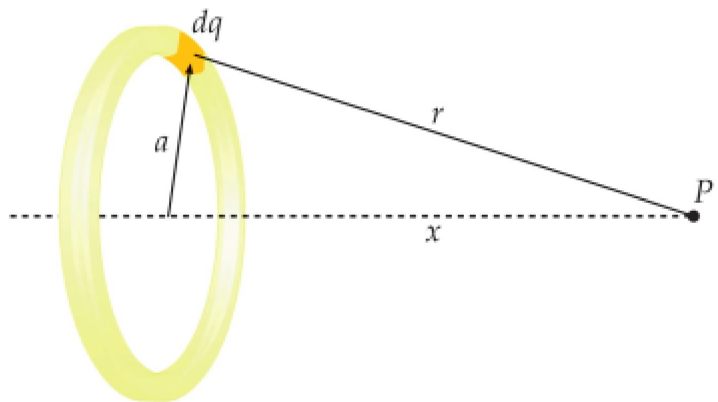
$$2P\cos\alpha - T(\sin\alpha\sin 1/2\alpha + \cos\alpha\cos 1/2\alpha) = 0$$

từ đó

$$T = \frac{2P\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Bài tập

Một hệ bao gồm một vòng dây mỏng tích điện có bán kính R và một thanh dài tích điện đều theo hướng trục của vòng tròn, với một đầu trùng với tâm của vòng tròn. Tổng điện tích của vòng tròn bằng q. Điện tích của thanh (trên một đơn vị độ dài) bằng λ. Tìm lực tương tác giữa vòng tròn và thanh.



Lời giải

Mô hình công ảo:
Giả sử dịch chuyển ảo cho thanh dài một đoạn rất nhỏ dọc theo trục x, lúc này lực tương tác giữa vòng tròn và thanh sẽ sinh công A.
Xét quá trình tương đương : cắt một đoạn rất nhỏ dx ngay tại đầu thanh ở tâm vòng dây và di

chuyển nó ra xa, kết quả cho một hệ tương tự, tức là biến thiên năng lượng của quá trình tương đương - biến thiên thế năng lực điện trường của vòng dây lên đoạn dx là bằng công A.
Áp dụng cách tính công ảo:

$$\int \vec{F}\vec{dr} = \int F dr = -A = -\Delta V$$

ΔV ở đây hiểu là biến thiên thế năng lực điện trường của vòng dây lên thanh dài trước và sau quá trình dịch chuyển, vì thế lượng biến thiên này bằng với thế năng gây ra bởi vòng dây lên một đoạn dx vô cùng gần tâm vòng dây.
Thế năng tại điểm P trên trục x gây ra bởi điện tích dq :

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+a^2}}$$

Thế năng tại điểm P trên trục x gây ra bởi toàn bộ vòng dây:

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+a^2}}\int dq = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+a^2}}$$

Với điểm P là một điện tích q' :

$$V(x) = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{q\lambda x}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+a^2}}$$

Ta có : $\Delta V = V(x) = A$ bằng với công ảo, x là dịch chuyển ảo. Khi dịch chuyển ảo tiến đến rất nhỏ có dạng ∂x , và thế năng tại vị trí x coi như không đổi đối với dịch chuyển ảo ∂x, giá trị lực tương tác:

$$F = \frac{\partial V(x)_{x=0}}{\partial x} = \frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

Lời giải truyền thống

Từ tính đối xứng của điều kiện, rõ ràng rằng, điện trường dọc theo pháp tuyến sẽ bằng không.
Tức là $E_n = 0$ và $E = E_l$

Bây giờ $dE_l = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0(R^2+l^2)}\cos\theta$

Nhưng $dq = \frac{q}{2\pi R}dx$ và $\cos\theta = \frac{l}{(R^2+l^2)^{1/2}}$
Do đó

$$E = \int dE_l = \int_0^{2\pi R}\frac{ql}{2\pi R}\cdot\frac{dx}{4\pi\epsilon_0(R^2+l^2)^{3/2}}$$

hoặc $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{ql}{(l^2+R^2)^{3/2}}$
và với $l >\!> R$, vòng tròn này sẽ hành xử như một điện tích điểm, làm giảm điện trường xuống giá trị,

$$E=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{l^2}$$

Đối với $E_{\max}$, chúng ta cần có $\frac{dE}{dl}=0$

Vậy, $\left(l^2+R^2\right)^{3/2}-\frac{3}{2}l\left(l^2+R^2\right)^{1/2}2l=0$ hoặc $l^2+R^2-3l^2=0$

Do đó, $l=\frac{R}{\sqrt{2}}$ và $E_{\max}=\frac{q}{6\sqrt{3}\pi\epsilon_0R^2}$

Cường độ điện trường do vòng tròn tại một điểm trên trục của nó (giả sử trục x) cách tâm của vòng một khoảng x được cho bởi:

$$E(x)=\frac{qx}{4\pi\epsilon_0\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}$$

Và từ tính đối xứng, $\vec{E}$ tại mọi điểm trên trục đều hướng dọc theo trục x (Hình).

Chúng ta hãy xét một phần tử (dx) trên sợi mang điện tích (λdx). Lực điện mà phần tử này chịu trong điện trường của vòng tròn là:

$$dF=(\lambda dx)E(x)=\frac{\lambda qxdx}{4\pi\epsilon_0\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}$$

Vậy lực tương tác cần tìm là:

$$F=\int_0^\infty\frac{\lambda qxdx}{4\pi\epsilon_0\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}$$

$$F=\frac{\lambda q}{4\pi\epsilon_0R}$$