Một số mẹo biến đổi toán học trong những bài toán mạch điện phức tạp

Zinc

Ngày 29 tháng 9 năm 2021

Tóm tắt nội dung

Chúng ta đã quá quen thuộc với những bài toán mạch điện DC và AC, và sử dụng chủ yếu biến đổi toán học để giải quyết. Đối với những mạch phức hợp, việc biến đổi toán học khôn ngoan sẽ giúp chúng ta hạn chế sự sai sót hay sự rắc rối khi làm. Và dưới đây là một chút mẹo biến đổi toán đã được tích luỹ từ kinh nghiệm làm bài.

1 Một số phương pháp giải

1.1 Nghiệm lại lý thuyết toán học về số phức

Ta có một công thức rất quan trọng về số phức, đó là biến đổi Euler:

$$\boxed{e^{i\phi} = \cos\phi + i \cdot \sin\phi}.$$

Số phức có dạng:

$$z^* = a + bi = |z^*| \cdot e^{i\phi}.$$

Với:

- $|z^*| = \sqrt{a^2 + b^2}$ là mode của số phức.
- $\Re(z^*) = a$ là phần thực của z^*.
- $\Im(z^*) = b$ là phần ảo của z^*.
- $\tan\phi = \frac{b}{a}$.

1.2 Phương pháp giải mạch điện xoay chiều bằng số phức

Một cách tóm tắt, ta có các bước chung để giải bài toán xoay chiều bằng số phức là:
***Bước 1:** Chuyển các thông số mạch điện sang dạng phức

$$R \Rightarrow R^*, \quad Z_L \Rightarrow Z_L^* = iZ_L, \quad Z_C \Rightarrow Z_C^* = -iZ_C.$$

$$u = U_0 \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow u^* = U_0 e^{i(\omega t+\varphi)}.$$
$$i = I_0 \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow i^* = I_0 e^{i(\omega t+\varphi)}.$$

***Bước 2:** Giải như bài toán điện một chiều
Ta sẽ sử dụng định luật Kirchoff và định luật Ohm với các thông số dạng phức y như điện một chiều.
Mạch nối niếp: $Z^* = \sum_i^N Z_i^*$.
Mạch song song: $\frac{1}{Z^*} = \sum_i^N \frac{1}{Z_i^*}$.
Định luật Ohm: $u_i^* = i_i^* \cdot Z^*$.

***Bước 3:** Sau khi tính toán xong, chuyển các thông số về dạng thực

$$Z = |Z^*|, \quad u = \Re(u^*), \quad i = \Re(i^*).$$

1.3 Các mẹo khi giải bài toán mạch điện hỗn tạp

Để tránh trường hợp biến đổi toán học quá rắc rối và dễ sai sót, ta có những mẹo biến đổi được tích luỹ như sau:

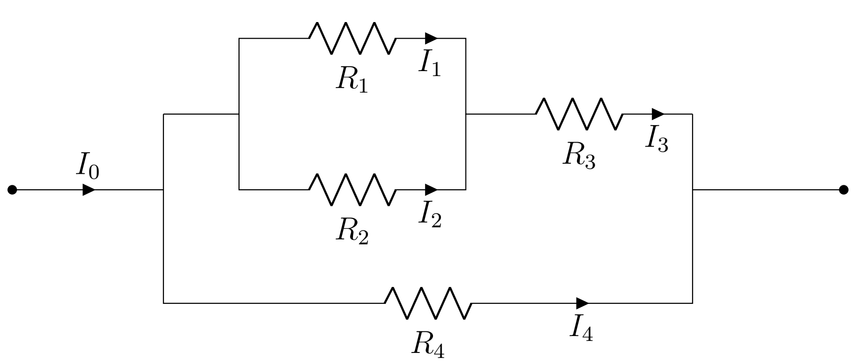
1. Đối với cả bài toán DC và AC, khi tính trở kháng đoạn mạch song song, **KHÔNG** viết $Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1+Z_2}$ mà ta nên để nguyên dạng $\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$

2. Đối với bài toán AC, trong cả quá trình biến đổi, **KHÔNG** trục mẫu số phức (nhân liên hợp để biến phần phức thành thực), đến biểu thức cuối rồi mới xử lí.

3. Đối với bài toán AC, với x^* và $y^* = y_0 \cdot e^{i\theta}$, ta có mẹo biến đổi nhanh: $x^* = \frac{y^*}{a+bi} \Rightarrow x = \frac{y_0}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \cos(\theta + \phi)$, nếu bài toán hỏi tìm các giá trị hiệu dụng thì ta sẽ chỉ cần quan tâm đến hệ số của hàm dao động.

2 Bài toán

Bài 1:



Cho mạch điện như hình vẽ trên. Đặt một hiệu điện thế U_0 vào hai đầu đoạn mạch, đặt các cường độ dòng điện qua từng điện trở như hình vẽ. Tìm hiệu điện thế và cường độ dòng điện qua mỗi điện trở.

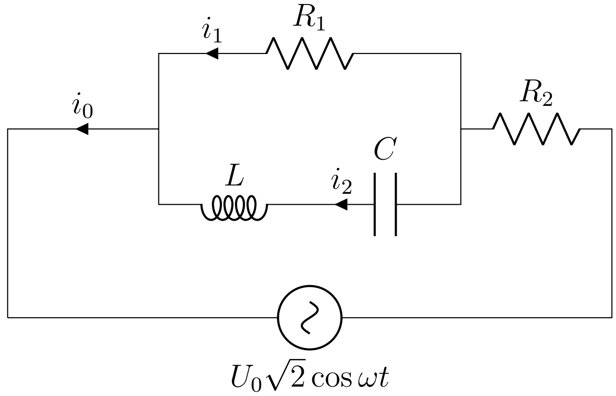
Lời giải tham khảo

$$I_0 = U_0 \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} + R_3} + \frac{1}{R_4} \right), \quad I_3 = \frac{U_0}{\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} + R_3}.$$

$$U_1 = \frac{U_0}{\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} + R_3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} = \frac{U_0}{1 + R_3 \cdot \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}, \quad U_2 = \frac{U_0}{1 + \frac{1}{R_3 \cdot \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}}.$$

$$I_1 = \frac{U_0}{R_1 + R_3 \cdot \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)}, \quad I_2 = \frac{U_0}{R_2 + R_3 \cdot \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)}, \quad I_4 = \frac{U_0}{R_4}.$$

Bài 2: Đây là một bài toán được tham khảo từ đề thi học sinh giỏi quốc gia Vật lí THPT 2004.



Cho một mạch điện có sơ đồ như hình trên. Những linh kiện gồm có hai điện trở R_1 và R_2, một tụ điện có điện dung C, một cuộn cảm thuần có độ tự cảm L. Đặt vào hai đầu mạch điện với điện áp xoay chiều $u = U_0\sqrt{2}\cos\omega t$. Bỏ qua điện trở của các dây nối. Hãy tìm điện áp hiệu dụng và cường độ dòng điện hiệu dụng qua các linh kiện trong mạch.

Lời giải tham khảo

Gọi điện áp của R_1, L, C, R_2 lần lượt là u_1, u_L, u_C, u_2.
Gọi cường độ dòng điện qua R_2, R_1, L, C lần lượt là i_0, i_1, i_2.
Gọi điện áp hiệu dụng, cường độ dòng hiệu dụng là các kí hiệu như trên nhưng chữ cái in hoa.

$$i_0^* = \frac{u^*}{R_2 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{i(Z_L - Z_C)}}} = \frac{u^*}{\left(R_2 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{R_1}{(Z_L - Z_C)^2}}\right) + i \cdot \left(\frac{1}{\frac{Z_L - Z_C}{R_1^2} + \frac{1}{Z_L - Z_C}}\right)}.$$

$$u_2^* = R_2 \cdot i_0^* \Rightarrow \boxed{U_2 = \frac{U_0 R_2}{\sqrt{\left(R_2 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{R_1}{(Z_L - Z_C)^2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\frac{Z_L - Z_C}{R_1^2} + \frac{1}{Z_L - Z_C}}\right)^2}}}.$$

$$u_1^* = \frac{u^*}{R_2 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{i(Z_L - Z_C)}}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{i(Z_L - Z_C)}} = \frac{u^*}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) - i \cdot \left(\frac{R_2}{Z_L - Z_C}\right)}.$$

$$\Rightarrow \boxed{U_1 = \frac{U_0}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{R_2}{Z_L - Z_C}\right)^2}}}.$$

$$i_1^* = \frac{u_1^*}{R_1} = \frac{u^*}{(R_1 + R_2) - i \cdot \left(\frac{R_1 R_2}{Z_L - Z_C}\right)} \Rightarrow \boxed{I_1 = \frac{U_0}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \left(\frac{R_1 R_2}{Z_L - Z_C}\right)^2}}}.$$

$$i_2^* = \frac{u_1^*}{i(Z_L - Z_C)} = \frac{u^*}{R_2 + i\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)(Z_L - Z_C)} \Rightarrow \boxed{I_2 = \frac{U_0}{\sqrt{R_2^2 + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)^2 (Z_L - Z_C)^2}}}.$$

$$u_L^* = i_2^* \cdot iZ_L = \frac{u^*}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)\left(1 - \frac{Z_C}{Z_L}\right) - i \cdot \frac{R_2}{Z_L}} \Rightarrow \boxed{U_L = \frac{U_0}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)^2 \left(1 - \frac{Z_C}{Z_L}\right)^2 + \frac{R_2^2}{Z_L^2}}}}.$$

$$u_C^* = i_2^* \cdot (-iZ_C) = \frac{u^*}{-\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)\left(\frac{Z_L}{Z_C} - 1\right) + i \cdot \frac{R_2}{Z_C}} \Rightarrow \boxed{U_C = \frac{U_0}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)^2 \left(\frac{Z_L}{Z_C} - 1\right)^2 + \frac{R_2^2}{Z_C^2}}}}.$$

Trong cả hai bài toán trên, việc giữ nguyên dạng $\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$ khi biến đổi đã làm triệt tiêu một số thành phần và khiến bài toán đỡ rắc rối và đỡ sai sót hơn.