Thuyết động học chất khí

Zinc

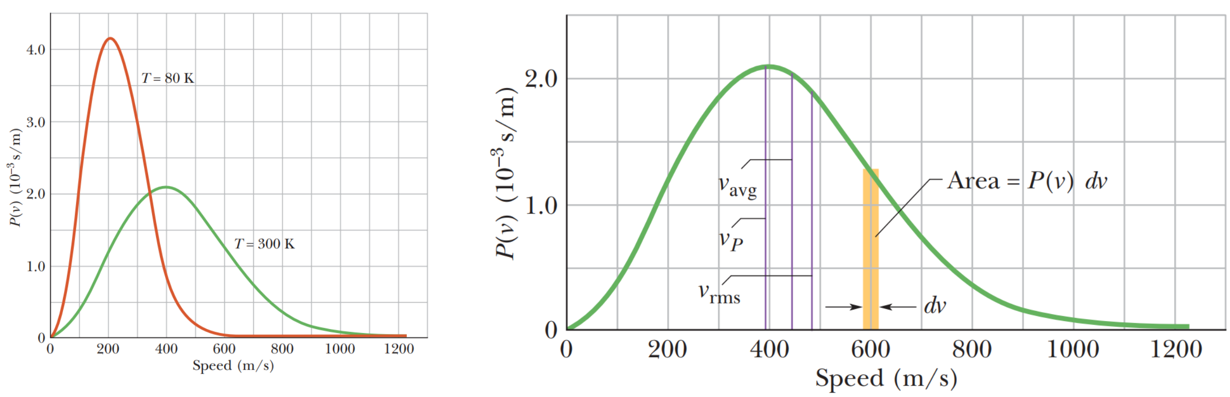
Ngày 27 tháng 10 năm 2021

Tóm tắt nội dung

Trong vật lý thống kê và thuyết động học chất khí, phân bố Maxwell-Boltzmann miêu tả phân bố xác suất của một hạt phân tử có vận tốc xác định tuỳ theo nhiệt độ của một hệ hạt trong một hộp kín.

1 Phân bố Maxwell-Boltzmann

1.1 Hàm phân bố



Hình 1: Hàm phân bố theo vận tốc phân tử

Người ta đã chứng minh được rằng, hàm phân bố Maxwell-Boltzmann có dạng:

$$f(v) \propto v^2 e^{-mv^2/2kT}. \tag{1}$$

Theo lý thuyết thống kê:

$$\int_0^\infty f(v)dv = 1. \tag{2}$$

Ta có thể suy ra được hàm phân bố là:

$$\boxed{f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}}. \tag{3}$$

1.2 Các vận tốc của phân tử

1. Vận tốc trung bình

$$\langle v \rangle = \frac{\int_0^\infty v f(v) dv}{\int_0^\infty f(v) dv} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}. \tag{4}$$

2. Vận tốc căn quân phương

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \frac{\int_0^\infty v^2 f(v) dv}{\int_0^\infty f(v) dv} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \tag{5}$$

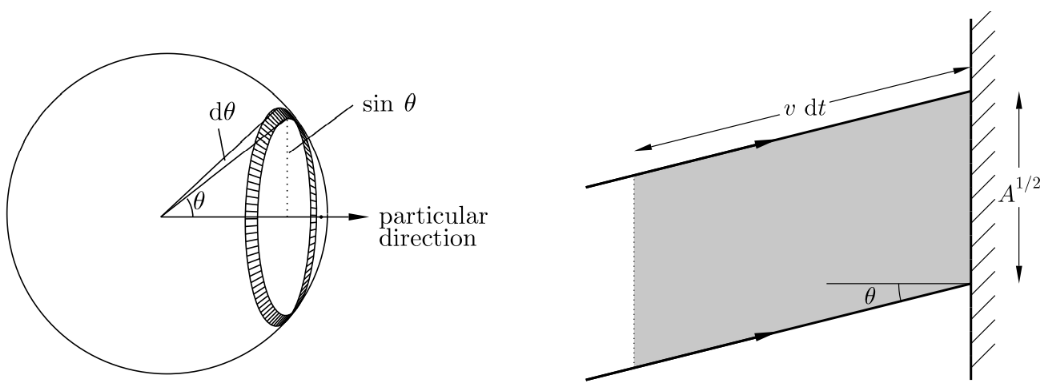
3. Vận tốc xác suất lớn nhất

$$v_P = v\left(\frac{df}{dv} = 0\right) = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \tag{6}$$

1.3 Động năng trung bình của chuyển động nhiệt của khí đơn nguyên tử

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} kT. \tag{7}$$

2 Áp suất của khí



Hình 2: Phân tử va đập vào tường

Hạt khí chuyển động theo mọi phương, xét khí xác định trên một đơn vị góc khối $d\Omega$ nhỏ trong hệ toạ độ cầu thoả mãn:

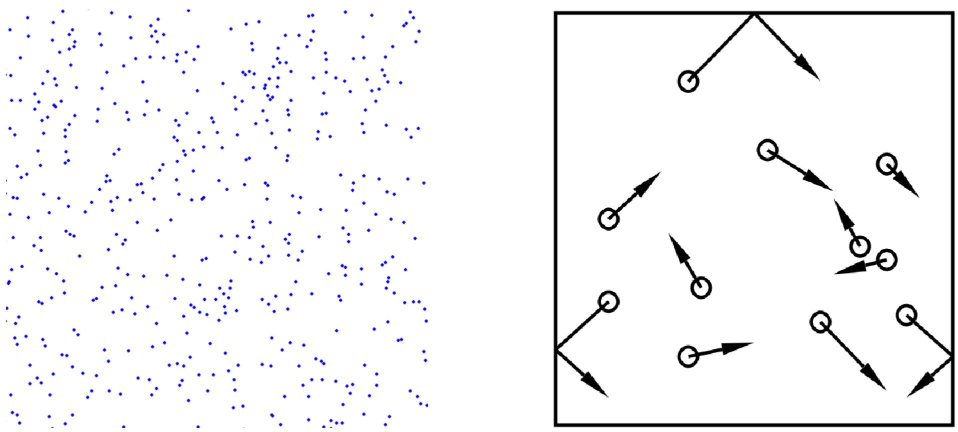
$$d\Omega = \frac{dS}{R^2} = 2\pi \sin\theta d\theta. \tag{8}$$

Số hạt va đập vào một diện tích A của tường với góc θ là:

$$dN = \frac{d\Omega}{4\pi} \cdot Avdt \cos\theta \cdot n f(v) dv. \tag{9}$$

Sau va chạm, dòng khí phản xạ đàn hồi toàn phần, do đó tường sẽ chịu một biến thiên động lượng:

$$dp = 2mv\cos\theta \cdot dN. \tag{10}$$

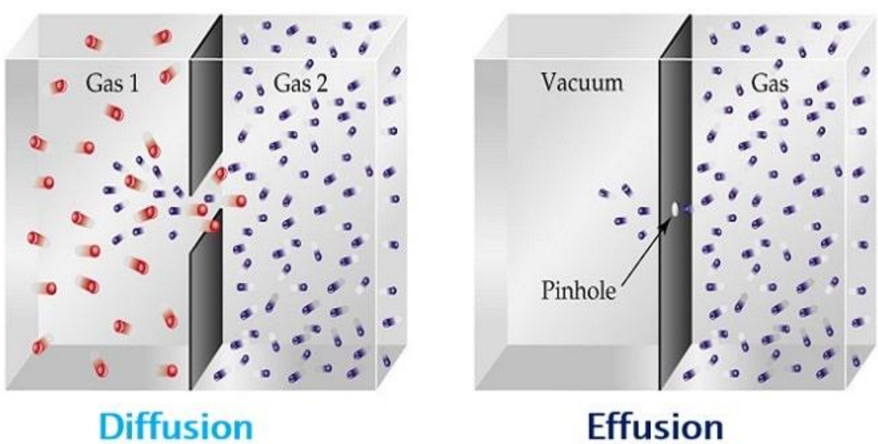


Hình 3: Va chạm của khí với nhau với tường

Áp suất của khí tác dụng lên tường là:

$$p = \int \frac{dp}{Adt} = n\int_0^\infty v^2 f(v)dv \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\sin\theta d\theta \Rightarrow \boxed{p = \frac{1}{3}nm\langle v^2\rangle = \frac{2}{3}u = nkT}. \tag{11}$$

3 Khuếch tán phân tử



Hình 4: Sự khuếch tán của khí

Từ phương trình (9) ta tìm được số hạt va chạm vào tường trong một đơn vị thời gian trong một đơn vị diện tích (**Flux**) là:

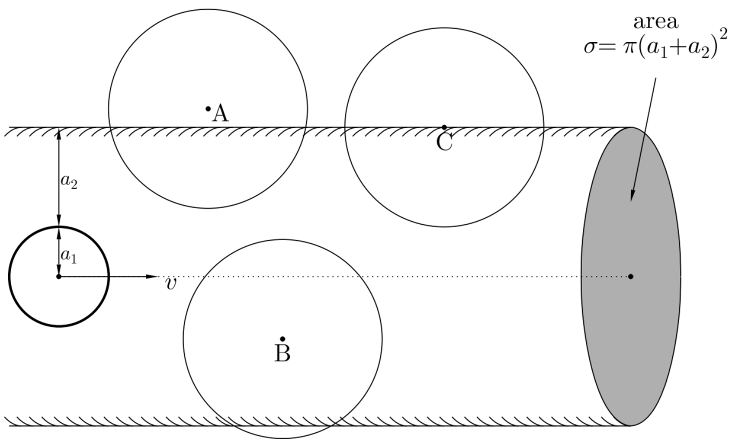
$$\Phi = \int \frac{dN}{Adt} = \frac{1}{2}n\int_0^\infty vf(v)dv \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta d\theta \Rightarrow \boxed{\Phi = \frac{1}{4}n\langle v\rangle} \tag{12}$$

Lấy ví dụ về hai bình cách nhiệt có một lỗ rò thông giữa hai bình, nếu đường kính lỗ lớn hơn rất nhiều so với quãng đường tự do trung bình của phân tử (ta sẽ đề cập sau) thì hai khí sẽ chuyển dịch đến khi cân bằng áp suất. Ngược lại, khi đường kính lỗ rất nhỏ so với quãng đường tự do trung bình, sự chuyển dịch sẽ dừng lại khi căn bằng dòng khí va chạm:

$$D \gg \lambda \Rightarrow (p_1, p_2) \to (p, p).$$

$$D \ll \lambda \Rightarrow (\Phi_1, \Phi_2) \to (\Phi, \Phi).$$

4 Quãng đường tự do trung bình



1. Thời gian va chạm trung bình

$$\boxed{\tau = \frac{1}{n\sigma v} = \frac{1}{n\pi d^2 v}}. \tag{13}$$

2. Quãng đường tự do trung bình

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2}}. \tag{14}$$

5 Các tích phân cần dùng

- $\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$
- $\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$
- $\int_0^\infty x^4 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$
- $\int_0^\infty x e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{1}{2\alpha}$
- $\int_0^\infty x^3 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha^2}$
- $\int_0^\infty x^5 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{\alpha^3}$
- $\int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.
- $\int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$.
- $\int_{-\infty}^\infty x^4 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$.
- $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$.
- $\ln n! \approx n \ln n - n \quad (n \text{ lớn})$.
- $\int_0^\infty \frac{x^n e^x}{(e^x-1)^2} dx = n\zeta(n)\Gamma(n)$.