Chuyển động của hạt trong trường xuyên tâm

Zinc

Ngày 30 tháng 12 năm 2021

§1 Giới thiệu về cơ học thiên thể

Cơ học thiên thể là một nhánh của thiên văn học giải quyết các vấn đề chuyển động và hiệu ứng hấp dẫn của các thiên thể. Lĩnh vực này vận dụng các nguyên lý của vật lý học, cơ học cổ điển vào nghiên cứu các thiên thể như các sao và các hành tinh. Mặc dù cơ học thiên thể hiện đại đã bắt đầu cách đây 400 năm từ thời Isaac Newton, nhưng các nghiên cứu gần đây chỉ ra rằng các vấn đề về vị trí các hành tinh được biết từ 3000 năm trước. Hiện nay đây là lĩnh vực được sử dụng phổ biến trong ngành công nghiệp hàng không vũ trụ, tại NASA hay ESA...

Một trong những thành tựu toán học giải tích lớn nhất mô tả chính xác nhất sự chuyển động của các thiên thể là ba định luật Kepler nổi tiếng sau 20 năm quan sát thiên văn của nhà thiên văn học Đan Mạch Tycho Brahe.

§2 Cách thông số quỹ đạo

2.1 Các thông số động học

Xét một vật thể có khối lượng m chuyển động trong trường hấp dẫn của một thiên thể lớn khối lượng M ($m \ll M$ để coi như M cố định).

Cả vật thể và thiên thể sẽ hút nhau bởi lực hấp dẫn xuyên tâm theo định luật vạn vật hấp dẫn của Newton:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{GMm}{r^2}\hat{\mathbf{r}}, \;\; U(r) = -\int_\infty^r \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\frac{GMm}{r}. \tag{2.1}$$

Momen động lượng của quỹ đạo $\mathbf{L}$ sẽ bảo toàn, chuyển động của vật sẽ trên một mặt phẳng cố định, và $\mathbf{L}$ có dạng:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} = m\mathbf{r}\times\mathbf{v} = m\mathbf{h} = mr^2\frac{d\theta}{dt}\hat{\mathbf{z}}. \tag{2.2}$$

Năng lượng của quỹ đạo cũng được bảo toàn và có dạng:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left(\frac{L^2}{2mr^2} + U(r)\right). \tag{2.3}$$

Trong nhiều bài toán, ta sẽ đặt thế năng và lực hiệu dụng của quỹ đạo có dạng:

$$U_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r), \;\; F_{eff}(r) = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{dU(r)}{dr}. \tag{2.4}$$

2.2 Các phương trình vi phân về chuyển động

Từ phương trình (2.3) ta có thể suy ra các phương trình vi phân của chuyển động mà nghiệm của nó có thể rất phức tạp:

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - \frac{L^2}{2mr^2} - U(r)}. \tag{2.5}$$

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{2mU(r)}{L^2}. \tag{2.6}$$

Tích phân cần dùng trong tính toán:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\arcsin\left[\frac{2c}{\sqrt{4ac+b^2}}\left(x-\frac{b}{2c}\right)\right] + C \tag{2.7}$$

§3 Các định luật Kepler về chuyển động thiên thể

3.1 Phát biểu ba định luật

Định luật Kepler:

1. Vật thể sẽ chuyển động quanh thiên thể theo quỹ đạo có dạng cônic với thiên thể ở vị trí tiêu điểm của cônic đó.
$$r(\theta) = \frac{p}{1+e\cos\theta}. \tag{3.1}$$
2. Đường nối tâm hai vật quét qua một diện tích bằng nhau trong những khoảng thời gian bằng nhau.
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}h. \tag{3.2}$$
3. Bình phương chu kỳ quỹ đạo của một vật thể tỷ lệ với lập phương bán trục lớn của quỹ đạo elip của vật thể đó (nếu quỹ đạo là đóng).
$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}. \tag{3.3}$$

3.2 Chứng minh

1. Định luật thứ nhất

***Cách 1:** Đầu tiên ta sẽ chứng minh rằng momen động lượng của quỹ đạo là một đại lượng bảo toàn.

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{v}) = \mathbf{v}\times\mathbf{v} + \mathbf{v}\times\mathbf{a} = \mathbf{v}\times\mathbf{v} - \frac{GM}{r^3}\mathbf{r}\times\mathbf{r} = 0 - 0 = 0 \tag{3.4}$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}\times\mathbf{v} = \mathbf{h}. \tag{3.5}$$

Với $\mathbf{h}$ là một vector không đổi. Điều này có nghĩa là vector $\mathbf{r}$ sẽ luôn vuông góc với vector $\mathbf{h}$, tức là vật thể sẽ luôn chuyển động trên một mặt phẳng vuông góc với $\mathbf{h}$.
Để chứng minh định luật 1 Kepler ta lấy gia tốc nhân với momen động lượng riêng:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{h} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r}\times\left(\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = -\frac{GM}{r^3}\left[\left(\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)\mathbf{r} - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right] = \frac{GM}{r}\frac{d\mathbf{r}}{dt} = GM\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}. \tag{3.6}$$

Tích phân cả hai vế của phương trình lên ta được:

$$\mathbf{v}\times\mathbf{h} = GM\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{c} \tag{3.7}$$

Với $\mathbf{c}$ là vector hằng nằm trên mặt phẳng Oxy. Gọi góc giữa $\mathbf{c}$ và $\mathbf{r}$ là θ, ta có:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{h}) &= \mathbf{r}\cdot(GM\hat{\mathbf{r}}+\mathbf{c}) = GMr + rc\cos\theta.\\ &= (\mathbf{r}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{h} = \mathbf{h}\cdot\mathbf{h} = h^2\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\Rightarrow r(\theta) = \frac{\mathbf{r}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{h})}{GM + c\cos\theta} = \frac{h^2}{GM(1+e\cos\theta)}. \tag{3.9}$$

***Cách 2:** Để thuận tiện, ta sẽ đặt $u = \frac{1}{r}$ và $\alpha = GMm$. Từ phương trình (2.6) ta suy ra được:

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} + \frac{2GMm^2}{L^2}u - u^2 = -\left(u - \frac{m\alpha}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2} + \left(\frac{m\alpha}{L^2}\right)^2. \tag{3.10}$$

Dễ dàng giải phương trình vi phân kia bằng phân ly biến số và đổi lại biến ta được:

$$\frac{1}{r} = \frac{m\alpha}{L^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}\cos\theta\right) \Rightarrow r(\theta) = \frac{L^2}{GMm^2(1+e\cos\theta)}. \tag{3.11}$$

***Cách 3:** Ta sẽ sử dụng định luật 2 Newton cho hệ toạ độ cực:

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= -F. \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) &= 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{d\theta} = -h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = -h\frac{du}{d\theta}. \\ \ddot{r} &= \frac{d\dot{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Từ đó ta suy ra **phương trình Binet**:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{mh^2u^2} = \frac{GM}{h^2} \Rightarrow r(\theta) = \frac{h^2}{GM(1+e\cos\theta)}. \tag{3.14}$$

Dễ thấy, hàm $r(\theta)$ là một phương trình biểu diễn hình conic. Ở đây, $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} = \sqrt{1 + \frac{2pE}{GMm}}$ là tâm sai và $p = \frac{h^2}{GM} = a(1-e^2)$ là bán trục bên của conic.

$$r(\theta) = \frac{h^2}{GM\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{G^2M^2m}}\cos\theta\right)} = \frac{p}{1+e\cos\theta} = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}. \tag{3.15}$$

2. Định luật thứ hai

Vi phân diện tích trong hệ toạ độ cực là: $dA = rdrd\theta$. Diện tích quét qua một góc $d\theta$ là:

$$dA = d\theta\int_0^r rdr = \frac{1}{2}r^2d\theta \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}h. \tag{3.16}$$

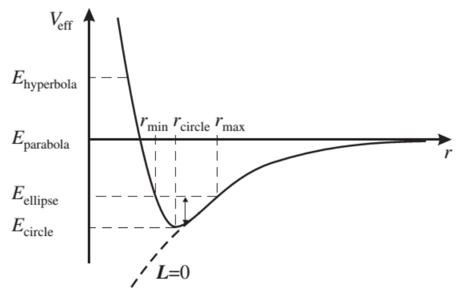
Có thể thấy diện tích quét của vật thể quanh thiên thể trong một đơn vị thời gian là không đổi.

3. Định luật thứ ba

Từ phương trình (3.16) ta có:

$$\frac{\pi ab}{T} = \frac{1}{2}\sqrt{GMa(1-e^2)} \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \tag{3.17}$$

3.3 Các thông số của từng dạng quỹ đạo



Dạng quỹ đạo	Tâm sai (e)	$r(\theta)$	E	L
Tròn	0	r_0	$-\frac{GMm}{2r_0}$	$m\sqrt{GMr_0}$
Elip	$0 \to 1$	$\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$	$-\frac{GMm}{2a}$	$m\sqrt{GMa(1-e^2)}$
Parabola	1	$\frac{2a}{1+\cos\theta}$	0	$m\sqrt{2GMa}$
Hyperbola	$1 \to \infty$	$\frac{a(e^2-1)}{1+e\cos\theta}$	$\frac{GMm}{2a}$	$m\sqrt{GMa(e^2-1)}$

3.4 Vector Runge-Lenz

Một đại lượng có giá trị không đổi trong quỹ đạo tĩnh, đó là vector Runge-Lenz, và có giá trị đại số là tâm sai của quỹ đạo:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{L} \times \mathbf{v}}{GMm} + \hat{\mathbf{r}}, \quad |\mathbf{e}| = e. \tag{3.18}$$

§4 Bài toán hai vật

Nếu m có thể so sánh được với M, thì hệ hai vật sẽ quay quanh khối tâm của chính nó, và bài toán sẽ phức tạp đi.
Để đơn giản hoá điều này, ta có thể coi hệ hai vật là một vật cố định ở tâm có khối lượng $M + m$ và vật thể có khối lượng hiệu dụng $\mu = \frac{mM}{M+m}$ quay xung quanh vật chủ với khoảng cách giữa chúng là $\mathbf{r}$. Các định luật Kepler vẫn áp dụng theo cách này.
Năng lượng và mômen động lượng của quỹ đạo lúc này là:

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{GMm}{r}, \quad \mathbf{L} = \mu\mathbf{r} \times \mathbf{v}. \tag{4.1}$$

Tài liệu

[1] Wikipedia contributors. Kepler's laws of planetary motion.

[2] David Morin. *Introduction to Classical Mechanics With Problems and Solutions.* Cambridge, 2008.

[3] Beer Johnston Mazurek Cornwell Self. *Vector Mechanics for Engineers.* Mc Graw Hill Education, 12th edition, 2019.

[4] James Stewart. *Calculus.* Cambridge, 6th edition, 2008.