Minh họa cách giải chặt chẽ của một số PTVP tuyến tính bậc 2

a. Phương trình đặc trưng có 2 nghiệm thực phân biệt:

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

$$(y'' + 2y') + 3(y' + 2y) = 0$$

$$e^{2x}(y'' + 2y') + 3e^{2x}(y' + 2y) = 0$$

$$d(e^{2x}y') + d(3e^{2x}y) = 0$$

$$y' + 3y = Ae^{-2x}$$

Giải phương trình vi phân tuyến tính bậc 1:

$$y = Ae^{-2x} + Be^{-3x}$$

b. Phương trình đặc trưng có 2 nghiệm thực đồng nhất

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

$$(y'' + 3y') + 3(y' + 3y) = 0$$

$$e^{3x}(y'' + 3y') + 3e^{3x}(y' + 3y) = 0$$

$$d(e^{3x}y') + d(3e^{3x}y) = 0$$

$$y' + 3y = Ae^{-3x}$$

$$e^{3x}(y' + 3y) = A$$

$$d(e^{3x}y) = Adx$$

$$e^{3x}y = Ax + B$$

$$y = (Ax + B)e^{-3x}$$

c. Phương trình đặc trưng có 2 nghiệm ảo phân biệt và có nguồn cộng hưởng

$$y'' + 4y = \sin(2x)$$

$$(y'' + 2i.y') - 2i(y' + 2i.y) = \frac{e^{i.2x} - e^{-i.2x}}{2i}$$

$$e^{i.2x}(y'' + 2i.y') - 2ie^{i.2x}(y' + 2i.y) = \frac{e^{i.4x} - 1}{2i}$$

$$d\left(e^{i.2x}y'\right) - d\left(2i.e^{i.2x}y\right) = \frac{e^{i.4x} - 1}{2i}dx$$

$$e^{i.2x}y' - 2i.e^{i.2x}y = -\frac{e^{i.4x}}{8} - \frac{x}{2i} + A$$

$$e^{-i.2x}y' - 2i.e^{-i.2x}y = -\frac{1}{8} - \frac{x}{2i}e^{-i.4x} + Ae^{-i.4x}$$

$$d\left(e^{-i.2x}y\right) = \left(-\frac{1}{8} - \frac{x}{2i}e^{-i.4x} + Ae^{-i.4x}\right)dx$$

$$e^{-i.2x}y = -\frac{x}{8} + \frac{e^{-i.4x}}{8}\left(\frac{i}{4} - x\right) - \frac{Ae^{-i.4x}}{8i} + B$$

$$y = \left(-\frac{x}{4} + C\right)\cos(2x) + D\sin(2x)$$