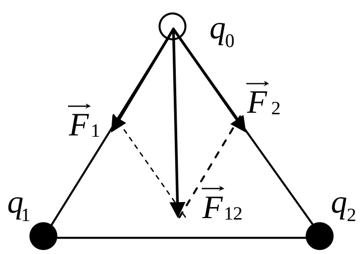
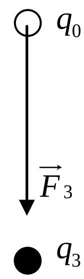
PHƯƠNG PHÁP ẢNH ĐIỆN

CHƯƠNG I. CƠ SỞ LÝ THUYẾT CỦA PHƯƠNG PHÁP ẢNH ĐIỆN

1.1. Ý tưởng phương pháp ảnh điện

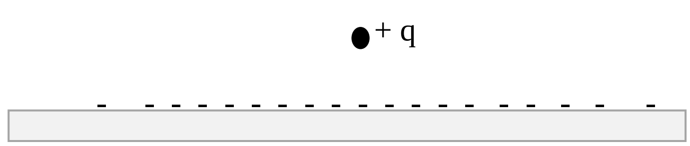
Trước khi tìm hiểu nội dung cơ bản của phương pháp ảnh điện, ta xét ví dụ đơn giản sau: Xét lực tương tác của hai điện tích q_1, q_2 lên điện tích q_0 như hình vẽ:





Lực tương tác của hai điện tích q_1, q_2 lên điện tích q_0 hợp lực $\vec{F}_{12}$ của hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$. Xét về phương diện tác dụng lực, nếu ta thay hai điện tích q_1, q_2 bằng q_3 sao cho $\vec{F}_{12} = \vec{F}_3$ thì tính chất bài toán không thay đổi. Việc thay thế hai điện tích bằng một điện tích sao cho yêu cầu bài toán không bị thay đổi, giúp cho việc giải quyết bài toán đơn giãn hơn chính là ý tưởng cơ bản ban đầu của phương pháp ảnh điện.

Bây giờ, nếu xét tương tác điện tích điểm + q và mặt phẳng dẫn rộng vô hạn nối đất: Do hiện tượng nhiễm điện hưởng ứng, trên bề mặt vật dẫn xuất hiện các điện tích âm. Vậy, tương tác + q và vật dẫn chính là tương tác + q và các điện tích xuất hiện trên vật dẫn. Việc xác định tương tác + q và các điện tích đơn lẽ trên vật dẫn thì quá phức tạp. Do đó, ta có thể thay hệ các điện tích trên mặt phẳng dẫn bởi điện tích ảnh - q sao cho các tính chất điện không thay đổi.



1.2. Nội dung của phương pháp ảnh điện.

1. Vấn đề tính toán trực tiếp trường sinh ra bởi hệ thống các điện tích và các vật dẫn (hoặc các điện môi) là rất khó khăn vì khi có mặt thêm các điện tích hưởng ứng (hoặc các điện tích liên kết) làm cho sự phân bố điện tích mặt trở nên phức tạp.

2. Để khắc phục khó khăn này ta cần chú ý đặc điểm của trường tĩnh điện hoàn toàn được xác định bởi các giá trị điện thế mô tả tính chất của trường tại biên giữa các vật dẫn và điện môi khác nhau, lẫn điện trường trên bề mặt. Như vậy nếu ở về một phía của mặt biên, ta làm biến đổi các thông số của môi trường (chẳng hạn thay vật dẫn này bằng vật dẫn khác hoặc điện môi, thay điện môi này bằng điện môi khác hoặc vật dẫn). Rồi ta thiết lập sự phân bố các điện tích mới đơn giản hơn, sao cho các điều kiện biên hoàn toàn được giữ nguyên như trước.

+ Điện trường của hệ điện tích cho trước sẽ không bị thay đổi nếu ta lấp đầy thể tích được giới hạn bởi một mặt đẳng thế nào đó, chứa trong nó một điện tích tổng cộng Q bằng một vẫn dẫn điện cũng chứa điện tích Q.

+ Một mặt đẳng thế bất kỳ có thể được thay thế bằng một bản dẫn mỏng vô hạn có điện thế tương ứng, trường ở cả hai phía của bản khi đó không thay đổi.

3. Khi đó ta dễ dàng tiến hành mọi tính toán và giải các bài tập tĩnh điện đối với hệ điện tích điểm này. Điện tích vừa được đưa vào như vậy được gọi là điện tích ảnh của các điện tích đã cho.

4. Nội dung chủ yếu của phương pháp ảnh điện là xác định được các điện tích ảnh, sau đó ta bước vào giải bài toán tĩnh điện trên hệ điện tích ảnh đã tìm và hệ điện tích điểm ban đầu đã biết. Nghiệm của bài toán cũng là nghiệm duy nhất phải tìm. Như vậy ta đã chuyển bài toán phức tạp có những điện tích phân bố liên tục về bài toán đơn giản chỉ gồm các điện tích điểm.

CHƯƠNG II. ÁP DỤNG PHƯƠNG PHÁP ẢNH ĐIỆN GIẢI CÁC BÀI TOÁN TĨNH ĐIỆN

2.1. TRƯỜNG GÂY BỞI CÁC ĐIỆN TÍCH PHÂN BỐ TRÊN MẶT GIỚI HẠN LÀ MẶT PHẲNG

Bài toán mở đầu: Một điện tích điểm q = 20,0 nC đặt trong chân không cách một thành phẳng bằng kim loại đã nối đất một khoảng a = 50 mm.

a. Tìm lực F trong tương tác giữa điện tích q và thành phẳng.

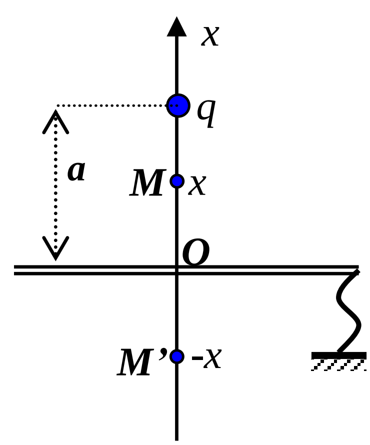
b. Mật độ điện tích hưởng ứng trên mặt kim loại.

Bài giải:

a. Bài toán này ta cũng có thể giải bằng phương pháp thông thường như sau:

Trước hết chúng ta tính điện trường $\vec{E}_{1(x)}$ tạo bởi các điện tích cảm ứng trên thành tại điểm M_x (x > 0). Do tính đối xứng (thành rộng vô hạn nên $\vec{E}_{1(x)}$ có hướng dọc theo trục Ox.

Ta hãy tính điện thế $V_{1(x)}$ tại M(x) gây bởi các điện tích cảm ứng của thành.



Xét điểm $M'_{(x)}$ nằm trong kim loại. Vì thành rộng vô hạn, có thể xem các điện tích cảm ứng chỉ phân bố trên mặt phẳng trung trực của MM', do đó:

$$V_{t(x)} = V_{t(-x)} \qquad (1)$$

Điện thế tại M' là $V_{(-x)} = 0$ vì thành nối đất . Hơn nữa $V_{t(-x)}$ là kết quả của sự chồng chất $V_{t(-x)}$ và $V_{q(-x)}$ nên:

$$V_{(-x)} = V_{t(-x)} + V_{q(-x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow V_{t(-x)} + \frac{kq}{a+x} = 0 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta được:

$$V_{t(x)} = -\frac{kq}{(a+x)^2} \qquad (3)$$

Do đó:

$$E(x) = \frac{d_t V_{(x)}}{dx} = -\frac{kq}{(a+x)^2}$$

$$\Rightarrow \quad E(a) = -\frac{kq}{4a^2}$$

Độ lớn của lực tương tác giữa điện tích q và thành phẳng xác định bởi:

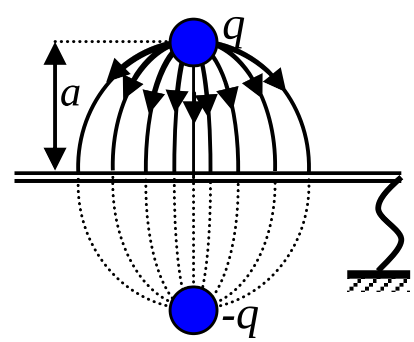
$$F = E_{(a)}q = -\frac{kq^2}{4a^2} = -\frac{kq^2}{(2a)^2}$$

Dấu (-) chứng tỏ $\vec{F}$ hướng theo chiều âm của Ox, tức là thành hút điện tích.

Ta nhận thấy $\vec{E}_{(x)}$ giống như một điện trường gây bởi một điện tích điểm - q đặt đối xứng với q qua mặt phẳng. Điều đó cho phép ta áp dụng phương pháp ảnh điện, nghĩa là thay toàn bộ điện tích cảm ứng trên thành bằng một điện tích điểm ảnh - q đặt đối xứng với q.

Sử dụng phương pháp ảnh điện:

Vì thành phẳng kim loại nối đất nên điện thế của thành phẳng bằng 0. Ta xét phổ đường sức và mặt đẳng thế của một hệ hai điện tích điểm bằng nhau, trái dấu *(hình vẽ).* Ta thấy mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng nối hai điện tích + q và - q là một mặt đẳng thế, mọi điểm trên mặt phẳng có điện thế bằng 0.



Như vậy nếu ta thay mặt đẳng thế này bằng một mặt kim loại phẳng vô hạn (nối đất, lúc đầu không mang điện) thì theo kết quả trên: điện trường giữa + q và mặt phẳng sẽ không bị thay đổi, nghĩa là điện trường đã được gây ra bởi mật độ điện tích mặt σ trong kim loại trùng với điện trường gây bởi điện tích - q đặt đối xứng với q qua bản kim loại. Điện tích ảo - q gọi là ảnh của điện tích q qua bản kim loại.

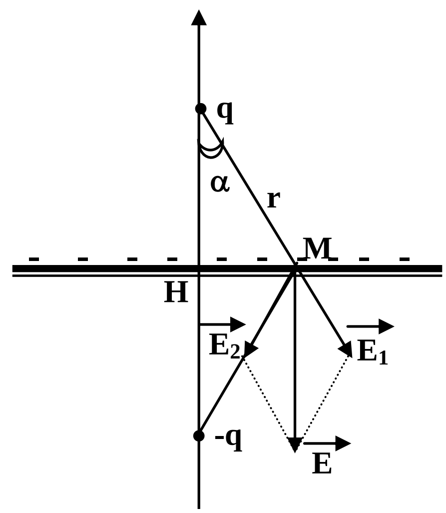
Vậy độ lớn của lực tương tác giữa q và bản kim loại là:

$$F = \frac{kq^2}{(2a)^2} = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon a^2} = 3,6.10^{-4}\ N$$

Như vậy: ta có thể thay thế tấm phẳng nối đất đặt cách một điện tích q một khoảng a bằng một điện tích $q' = -q$ đặt ở khoảng cách 2a so với điện tích q.

b. Xét trường gây ra tại điểm M nằm trên mặt vật dẫn, cách q một khoảng r. Cường độ điện trường do các điện tích q và - q gây ra tại M có phương, chiều như hình vẽ và có độ lớn:

$$E_1 = E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



Cường độ điện trường tổng hợp do hệ hai điện tích q và - q gây ra tại M có phương, chiều như hình vẽ có độ lớn:

$$E = 2E_1\cos\alpha = \frac{qa}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

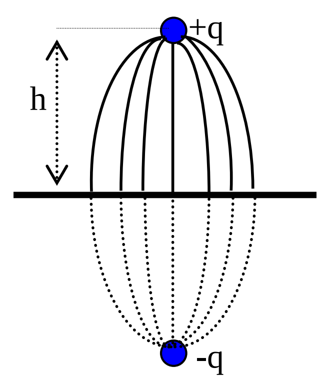
Mật độ điện tích hưởng ứng trên mặt vật dẫn:

$$\sigma = \varepsilon_0 E = \frac{qa}{2\pi r^3}.$$

Bài toán vận dụng 1.1: Tính điện dung của một dây dẫn hình trụ bán kính R dài vô hạn, mang điện dương, đặt song song với mặt đất và cách mặt đất một khoảng h (h >> R).

Bài giải:

Điện phổ của điện trường giữa dây dẫn và mặt đất được biểu diễn như hình vẽ.



Áp dụng phương pháp ảnh điện, ta có thể coi điện trường này là do dây dẫn và ảnh của nó qua mặt đất gây nên. Đó là điện trường tổng hợp của hai mặt trụ dẫn điện dài vô hạn tích điện trái dấu gây ra.

Có thể sử dụng định lý Ostrograski – Gaox để tính cường độ điện trường do một dây dẫn hình trụ gây ra tại điểm cách trục của dây khoảng r là:

$$E_0 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0\varepsilon r}$$

trong đó: λ, σ là mật độ điện dài và mật độ điện mặt, R là bán kính hình trụ.

Cường độ điện trường tổng hợp tại một điểm cách dây mang điện dương một khoảng x là:

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 lx} + \frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l(2h-x)}$$

trong đó: q là độ lớn điện tích trên đoạn dây *l*.

Hiệu điện thế giữa hai dây dẫn:

$$V_1 - V_2 = \int_R^{2h-R} E dx = \int_R^{2h-R} \left[\frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 lx} + \frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l(2h-x)} \right] dx$$

$$\Rightarrow \; V_1 - V_2 = \frac{q}{\pi\varepsilon\varepsilon_0 l} \ln \frac{2h}{R}$$

Vì hiệu điện thế giữa dây dẫn và ảnh của nó lớn gấp đôi hiệu điện thế giữa hai dây dẫn và mặt đất. Nên hiệu điện thế giữa dây dẫn và mặt đất sẽ là:

$$U = \frac{V_1 - V_2}{2} = \frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l} \ln \frac{2h}{R}$$

Coi hệ thống dây dẫn và mặt đất như một tụ điện đơn giản, ta sẽ tính được điện dung của một đơn vị dài của dây dẫn:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln \frac{2h}{R}}.$$

Bài toán vận dụng 1.2: Một quả cầu nhỏ khối lượng m, điện tích q ban đầu được giữ ở vị trí thẳng đứng, cách một mặt phẳng kim loại rộng vô hạn, có mật độ điện mặt σ một khoảng h. Thả quả cầu cho nó chuyển động, hãy nghiên cứu chuyển động của quả cầu.

Bài giải:

Vì bản rộng vô hạn nên có thể xem điện trường do bản gây ra là điện trường đều, có phương vuông góc với bản, có cường độ:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Lực điện do bản kim loại tác dụng lên điện tích q là tổng hợp của lực do điện trường E tác dụng lên q và do điện tích hưởng ứng tác dụng lên.

+ Lực do điện trường E tác dụng lên q là lực đẩy, hướng ra xa bản và có độ lớn:

$$F_1 = qE = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}$$

+ Lực do điện tích hưởng ứng tác dụng lên q bằng lực tác dụng giữa điện tích q và điện tích - q là ảnh của q qua mặt phẳng vô hạn. Lực này là lực hút, nó có hướng ra xa bản và có độ lớn:

$$F_2 = \frac{kq^2}{4d^2}$$

trong đó: d là khoảng cách từ q đến bản kim loại.

Cuối cùng lực điện tổng hợp tác dụng lên bản kim loại

$$F = F_1 - F_2 = \frac{\sigma.q}{2\varepsilon_0} - \frac{kq^2}{4d^2}$$

Tại vị trí cân bằng:

$$P = F$$

$$\Leftrightarrow \text{ mg} = \frac{\sigma.q}{2\varepsilon_0} - \frac{kq^2}{4d_0^2}$$

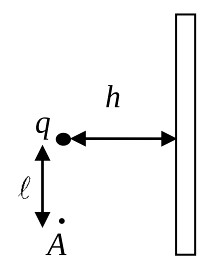
$$\Leftrightarrow d_0 = \sqrt{\frac{k\varepsilon_0 q^2}{2\sigma q - 4\varepsilon_0 mg}}$$

+ Nếu h < d_0 quả cầu chuyển động xuống và bị hút vào bản kim loại.

+ Nếu h = d_0 quả cầu ở vị trí cân bằng.

+ Nếu h > d_0 quả cầu chuyển động ra xa bản kim loại.

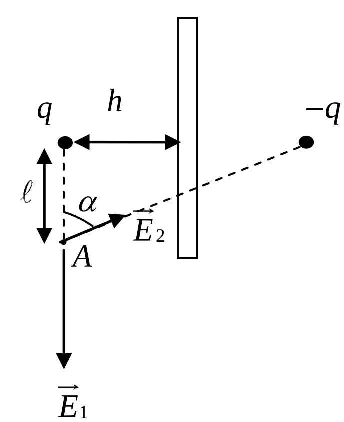
<u>Bài toán vận dụng 1.3</u>



a. Xác định lực tương tác giữa điện tích điểm $q = 2.10^{-9}C$ và tấm dẫn phẳng, biết q cách tấm phẳng đoạn $h = 5cm$.

b. Xác định vectơ cường độ điện trường tại A biết $l = h$ (hình vẽ).

Bài giải:



a. Theo phương pháp ảnh điện, có thể xem tương tác giữa q và tấm phẳng tương đương với tương tác q và - q đặt đối diện qua tấm phẳng. Vậy, theo định luật Culông dễ dàng ta có:

$$F = k\frac{q^2}{(2h)^2} = 3,6.10^{-6}N$$

b. Điện trường tại A là tổng hợp điện trường do q và - q tại A

Ta có:

$$\tan\alpha = \frac{2h}{l} = \frac{2h}{h} = 2$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{\tan^2\alpha + 1}} = \sqrt{\frac{1}{5}}$$

Vậy:

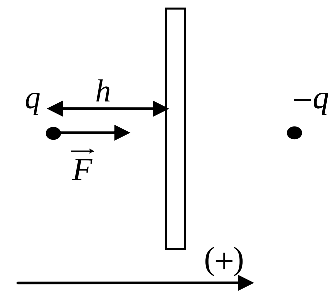
$$E=\sqrt{E_1^2+E_1^2-2E_1E_2\cos\alpha}\approx 6.54.10^3 V/m.$$

<u>Bài toán vận dụng 1.4:</u> Cho điện tích $q=10^{-8}C, m=0,01\,g$ cách tấm dẫn phẳng vô hạn đoạn $\mathrm{h}=4\,cm$. Xác định:

a. Gia tốc của điện tích khi nó bắt đầu chuyển động.

b. Thế năng của hệ điện tích và tấm dẫn phẳng vô hạn.

c. Thời gian để điện tích bay đến tấm phẳng.



Bài giải:

a. Gia tốc của điện tích được xác định:

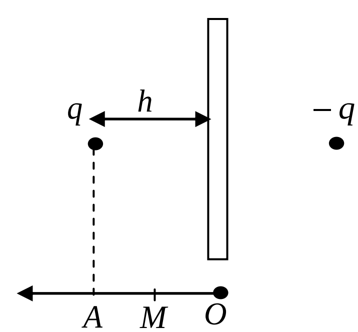
$$a=\frac{F}{m}=k\frac{q^2}{m(2h)^2}=14,0625 \quad (m/s^2)$$

b. Xét điện tích q đi từ vô cùng đến mặt phẳng dẫn và cách tấm phẳng đoạn h. Chọn gốc thế năng ở vô cùng, khi đó công của điện trường được xác định:

$$A=\int_{-\infty}^{h}\vec{F}d\vec{x}=\int_{-\infty}^{h}Fdx=\int_{-\infty}^{h}k\frac{q^2}{(2x)^2}dx$$
$$=\frac{kq^2}{4}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-\infty}^{h}=\frac{kq^2}{4h}$$

Lực điện là lực thế nên công của lực điện bằng độ giảm thế năng:

$$A=\mathrm{W}_{to}-\mathrm{W}_t=\frac{kq^2}{4h}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{W}_t=-\frac{kq^2}{4h}$$



Như vậy, thế năng tương tác giữa điện tích q và tấm phẳng chỉ bằng ½ so với thế năng tương tác giữa q và - q (học sinh thường cho rằng thế năng tương tác này là $-\frac{kq^2}{2h}$ theo công thức của thế năng tương tác giữa hai điện tích).

c. Nhận thấy rằng chuyển động của điện tích là chuyển động nhanh dần biến đổi không đều (lực tác dụng thay đổi). Chọn chiều dương như hình vẽ. Áp dung định luật bảo toàn cơ năng tại A và M (vị trí có tọa độ x):

$$-\frac{kq^2}{4h} = -\frac{kq^2}{4x} + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\rightarrow v = -q\sqrt{\frac{k}{2m}(-\frac{1}{h} + \frac{1}{x})}$$

Ta có: $v = \frac{dx}{dt} \rightarrow dt = \frac{dx}{v}$, tích phân hai vế:

$$\int_0^{t_o} dt = \int_h^0 \frac{1}{-q\sqrt{\frac{k}{2m}(-\frac{1}{h} + \frac{1}{x})}} dx = \sqrt{\frac{2m}{kq^2}} \int_0^h \frac{1}{\sqrt{(-\frac{1}{h} + \frac{1}{x})}} dx$$

Đặt $x = h\cos^2\alpha \Rightarrow dx = -2h\cos\alpha \sin\alpha \, d\alpha,$ khi đó:

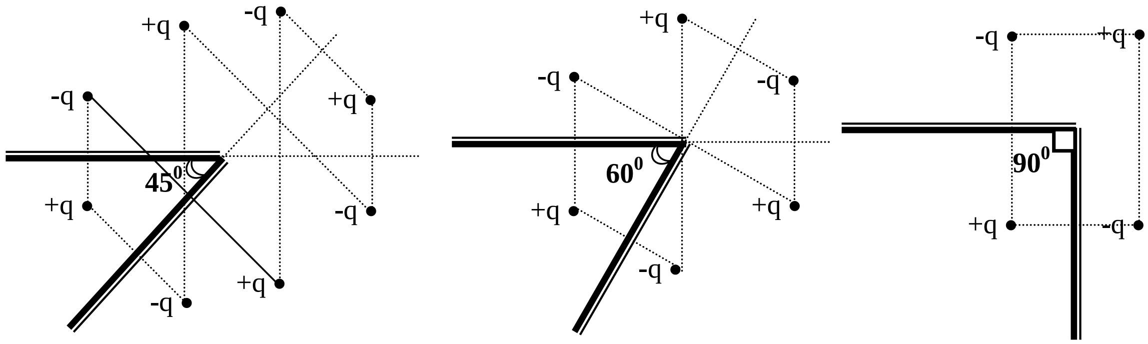
$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \\ x = h \rightarrow \alpha = 0 \end{cases}$$

Vậy:

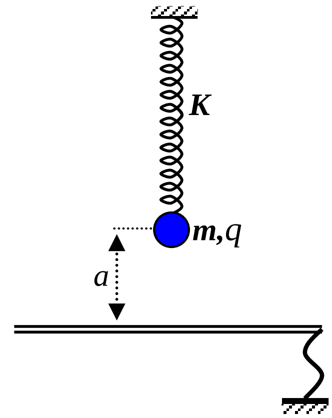
$$\int_0^{t_o} dt = \sqrt{\frac{2m}{kq^2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{-2h\cos\alpha \sin\alpha}{\frac{1}{\sqrt{h}}\tan\alpha} d\alpha = \sqrt{\frac{8mh^3}{kq^2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -\cos^2\alpha d\alpha$$

$$\Leftrightarrow t_0 = \sqrt{\frac{8mh^3}{kq^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\alpha d\alpha = \sqrt{\frac{m\pi^2 h^3}{2kq^2}}.$$

Nhận xét: Nếu có hai mặt phẳng dẫn, góc nhị diện giữa hai mặt phẳng dẫn điện nối đất bằng α. Bên trong góc có một điện tích điểm q. Khi đó trường bên trong góc nhị diện trong các trường hợp $\alpha = 90^0$; $\alpha = 60^0$; $\alpha = 45^0$ có thể được xem tạo bởi hệ điện tích như hình vẽ:



Bài toán vận dụng 1.5: Một lò xo nhẹ, cách điện, một đầu gắn chặt vào giá cố định, đầu còn lại treo quả cầu kim loại nhỏ khối lượng m, tích điện q. Hệ được đặt trong không khí và khi cân bằng quả cách một thành phẳng bằng kim loại đã nối đất một khoảng *a (hình vẽ)*.



a. Từ vị trí cân bằng người ta kéo quả cầu xuống dưới, cách VTCB một đoạn x_0 ($x_0 << 2a$) rồi thả nhẹ. Chứng minh quả cầu dao động điều hòa. Lập biểu thức tính chu kì và viết phương trình dao động của quả cầu.

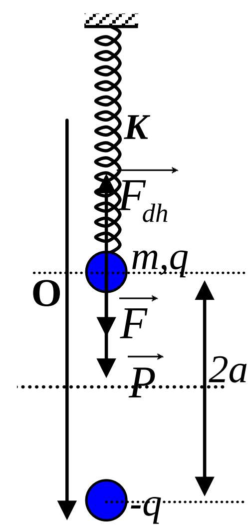
b. Nghiên cứu sự biến đổi mật độ điện tích hưởng ứng trên mặt vật dẫn tại điển M cách vị trí cân bằng của quả cầu khoảng *2a*.

Bài giải:

a. Khi quả cầu cách mặt phẳng khoảng *r*, lực tương tác giữa điện tích q và bản kim loại là:

$$F = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Chọn trục Ox thẳng đứng hướng xuống, gốc O tại vị trí cân bằng của quả cầu.



+ Tại vị trí cân bằng:

$$P + F - F_{dh} = 0$$

$$\Leftrightarrow mg + \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2} - k\Delta l = 0 \qquad (1)$$

trong đó: Δl là độ biến dạng của lò xo.

+ Tại vị trí có li độ x, phương trình động lực học:

$$mg + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2a-x)^2} - k(\Delta l + x) = mx''$$

$$\Leftrightarrow mg + \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2\left(1-\frac{x}{2a}\right)^2} - k(\Delta l + x) = mx'' \qquad (2)$$

Ta chỉ xét dao động nhỏ *(x << 2a)*. Khi đó:

$$\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{-2} \approx 1+\frac{x}{a}$$

thay vào (2) được:

$$mg + \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2}\left(1+\frac{x}{a}\right) - k(\Delta l + x) = mx''$$

$$\Leftrightarrow \left(mg + \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2} - k\Delta l\right) + \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^3}x - kx = mx''(3)$$

Từ (1) và (3), ta có:

$$\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^3}x - kx = mx'' \Leftrightarrow x'' + \left(\frac{k}{m} - \frac{q^2}{16\pi m\varepsilon_0 a^3}\right)x = 0$$

Đặt $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{q^2}{16\pi m\varepsilon_0 a^3}}$, ta được phương trình dao động:

$$x'' + \omega^2 x = 0$$

Quả cầu dao động điều hòa với chu kì:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}\times\frac{1}{\sqrt{1-\frac{q^2}{16k\pi\varepsilon_0 a^3}}}=\frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{q^2}{16k\pi\varepsilon_0 a^3}}}$$

trong đó T_0 là chu kì dao động khi quả cầu không tích điện.

Nghiệm của phương trình dao động điều hòa có dạng:

$$x=A\cos(\omega t+\varphi).$$

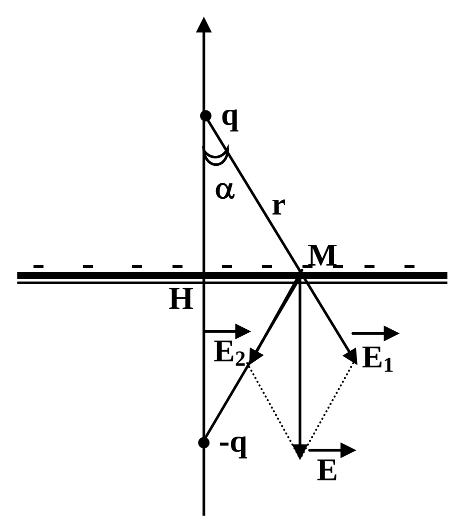
Từ điều kiện ban đầu, ta được:

$$\begin{cases}x(0)=x_0\\ v(0)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=x_0\\ \varphi=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=x_0\cos\omega t.$$

b. Xét trường gây ra tại điểm M nằm trên mặt vật dẫn cách quả cầu khoảng r. Cường độ điện trường do các điện tích q và - q gây ra tại M có phương, chiều như hình vẽ và có độ lớn:

$$E_1=E_2=k\frac{q}{r^2}$$



Theo kết quả câu a, mật độ điện tích hưởng ứng trên mặt vật dẫn:

$$\sigma=\varepsilon_0 E=\frac{1}{4\pi k}\times\frac{2kqa}{r^3}=\frac{qa}{2\pi r^3}$$

+ Khi quả cầu ở vị trí cân bằng thì:

$$r=a\rightarrow\sigma_0=\frac{q}{16\pi a^2}$$

và $$HM=\sqrt{(2a)^2-a^2}=a\sqrt{3}$$

+ Khi quả cầu có li độ x thì:

$$r=\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2+\left(a-x\right)^2}=\sqrt{4a^2-2ax+x^2}\approx 2a\sqrt{1-\frac{x}{2a}}$$

Khi đó:

$$\sigma=\frac{q}{16\pi a^2}\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{-3/2}\approx\sigma_0\left(1+\frac{3x}{4a}\right).$$

Từ kết quả trên ta thấy mật độ điện tích tại M cũng biến đổi tuần hoàn.

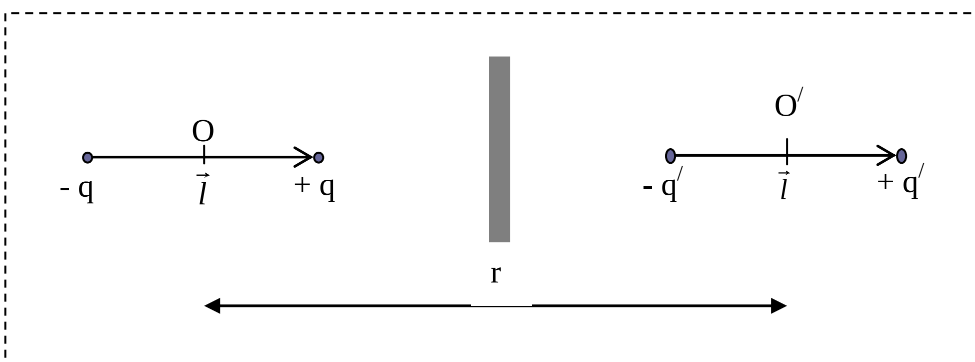
+ $x=x_0\Leftrightarrow\sigma_{max}=\sigma_0\left(1+\frac{3x_0}{4a}\right)$ khi này, quả cầu ở vị trí thấp nhất.

+ $x=-x_0\Leftrightarrow\sigma_{\min}=\sigma_0\left(1-\frac{3x_0}{4a}\right)$ khi này, quả cầu ở vị trí cao nhất.

Bài toán vận dụng 1.6: Một lưỡng cực điện có mô-men lưỡng cực P_e nằm cách mặt phẳng dẫn điện một khoảng h và vuông góc với mặt phẳng đó. Hãy tính độ lớn của lực tác dụng lên lưỡng cực, biết rằng mặt phẳng được nối đất.

Bài giải:

Áp dụng phương pháp ảnh điện: coi tương tác giữa lưỡng cực điện với mặt phẳng như tương tác giữa 2 lưỡng cực điện với nhau và cách nhau một khoảng 2ℓ.



Ta có, thế năng do lưỡng cực điện P_e sinh ra tại $O^/$ là

$$V=\frac{P_e}{4\pi\,\varepsilon_0 r^2}$$

Điện trường do lưỡng cực điện P_e sinh ra tại $O^{/}$

$$E_r = \frac{dV}{dr} = \frac{P_e}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Lực tương tác giữa hai mô-men lưỡng cực

$$F = p_e \frac{\Delta E}{\Delta r} = \frac{3P_e^2}{32\pi\varepsilon_0 \ell^4}.$$

2.2. TRƯỜNG GÂY BỞI CÁC ĐIỆN TÍCH PHÂN BỐ TRÊN MẶT GIỚI HẠN LÀ MẶT CẦU

<u>Bài toán mở đầu:</u> Một điện tích điểm q cách tâm quả cầu kim loại bán kính R nối đất một khoảng *a*. Hãy xác định:

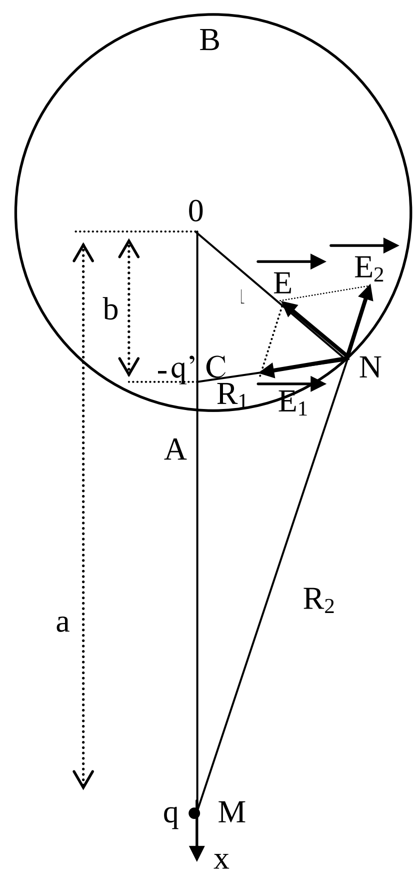
a. Xác định lực tương tác giữa điện tích q và quả cầu.

b. Cường độ điện trường do hệ gồm điện tích q và điện tích hưởng ứng trên bề mặt quả cầu gây ra trong không gian xung quanh và trên mặt cầu.

Bài giải:

a. Vì quả cầu nối đất nên điện thế trên mặt quả cầu bằng 0. Trên quả cầu chỉ có các điện tích hưởng ứng âm.

Ta có thể thay điện tích hưởng ứng trên mặt quả cầu bằng điện tích - q' sao cho điện thế do q và - q' gây ra trên mặt cầu phải bằng 0, tức là mặt đẳng thế có điện thế bằng 0 sẽ trùng với mặt cầu nối đất.



Vì trường có tính chất đối xứng qua trục Ox nên cần phải đặt điện tích - q' ở trên trục này.

Đặt OC = b. Điện thế tại một điểm N bất kỳ trên mặt cầu là:

$$\frac{kq}{R_2} - \frac{kq'}{R_1} = 0 \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{q'}{q}$$

+ Khi N trùng B thì $R_1 = R + b$; $R_2 = R + a$

$$\frac{R+b}{R+a} = \frac{q'}{q} \qquad (1)$$

+ Khi N trùng A thì $R_1 = R - b$; $R_2 = a – R$

$$\frac{R-b}{a-R} = \frac{q'}{q} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$b = \frac{R^2}{a};\ q' = \frac{qR}{a} \qquad (3)$$

Vậy lực tương tác giữa quả cầu và điện tích điểm có độ lớn là:

$$F = \frac{Rq^2}{4\pi\varepsilon_0 a(a-b)^2} = \frac{Raq^2}{4\pi\varepsilon_0 (a^2-R^2)^2} \qquad (4)$$

b. Cường độ điện trường do điện tích q và điện tích hưởng ứng trên bề mặt quả cầu gây ra trong không gian xung quanh là:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{R} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R'^3}\vec{R'}$$

trong đó: R, R’ khoảng cách từ điện tích q và q’ đến điểm quan sát.

Cường độ điện trường do q và - q’ gây ra tại N trên mặt cầu có phương, chiều như hình vẽ. Độ lớn:

$$E_1 = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2};\ E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} \qquad (5)$$

Cường độ điện trường tổng hợp do các điện tích gây ra tại N trên mặt cầu có phương vuông góc với mặt cầu, chiều hướng vào tâm, độ lớn:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2 cos\alpha} \qquad (6)$$

trong đó $\alpha = \mathrm{EE}_1 N = CNM$.

Từ phương trình (3) và (5) ta có:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{q' R_2^2}{qR_1^2} = \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow E_1 = \frac{R_2}{R_1}E_2 \qquad (7)$$

Trong tam giác CNM có:

$$\left(a-b\right)=\sqrt{R_1^2+R_2^2-2R_1R_2cos\alpha} \qquad (8)$$

Từ (6), (7), (8) và để ý $\frac{R_1}{R_2}=\frac{|q'|}{q}=\frac{R}{a}$ ta được:

$$E=\frac{a-b}{R_1}E_2=\frac{kq}{R_2^2}\times\frac{(a-\frac{R^2}{a})}{\frac{R}{a}R_2}$$

$$\Leftrightarrow\ E=\frac{kq(a^2-R^2)}{RR_2^3}.$$

Nhận xét:

+ Nếu quả cầu không nối đất và không mang điện thì điện tích trên nó phải đảm bảo luôn luôn bằng 0 và mặt cầu phải có điện thế không đổi. Như vậy điều kiện biên của bài toán sẽ là

φ (mặt cầu) = hằng số

và Q (mặt cầu) = 0. (9)

+ Dựa vào kết quả bài toán trên, để thoả mãn điều kiện biên ta có thể thay thế quả cầu bằng điện tích q' = $-\frac{qR}{a}$ đặt ở C và thêm điện tích q'' = - q' = $\frac{qR}{a}$ đặt ở tâm quả cầu. Như vậy điện tích q'' đảm bảo cho điện thế trên mặt quả cầu φ (mặt cầu) = hằng số và khác 0. Còn điện tích trong mặt cầu bằng nhau và trái dấu.

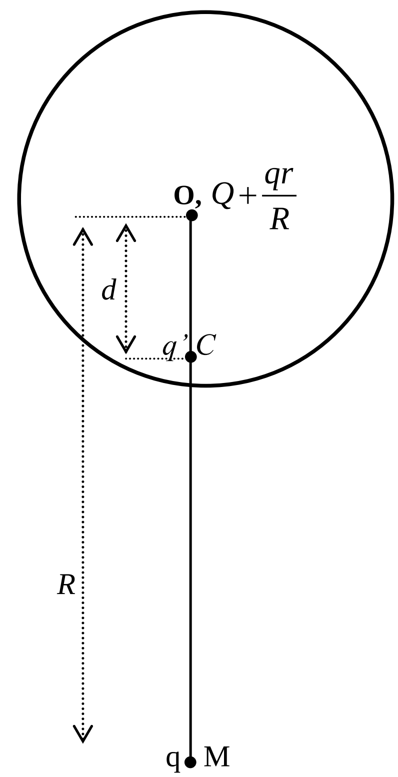
Bài toán vận dụng 2.1: Một hạt khối lượng m, tích điện q quay quanh quả cầu dẫn điện bán kính *r*, tích điện Q. Quỹ đạo của hạt là đường tròn bán kính *R* và tâm trùng với tâm quả cầu. Tính tốc độ góc quay của hạt.

Bài giải

Ta có thể coi trường tạo bởi điện tích q, điện tích Q và các điện tích hưởng ứng như là trường tạo bởi hệ của 3 điện tích: q, điện tích $q' = -\frac{qr}{R}$ đặt ở C và điện tích $\left(Q + \frac{qr}{R}\right)$ đặt ở tâm hình cầu.

Theo kết quả bài toán trên, điện tích q' đặt tại C, cách tâm O một đoạn $d = r^2 / R$.

Lực tác dụng lên điện tích q có độ lớn:



$$F = \frac{q|q'|}{4\pi\varepsilon_0 (R-d)^2} - \frac{q(Q+|q'|)}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

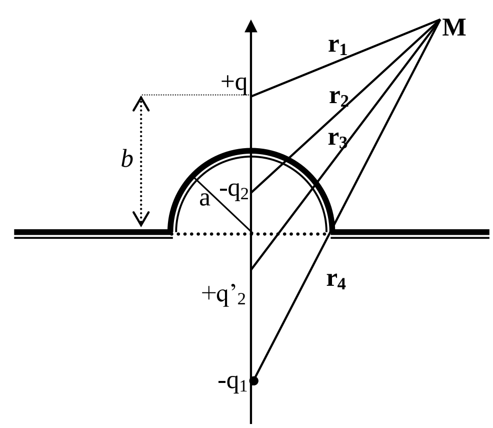
$$\Leftrightarrow F = \frac{q^2 rR}{4\pi\varepsilon_0 \left(R^2 - r^2\right)^2} - \frac{q(QR+qr)}{4\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

Lực $\vec{F}$ đóng vai trò của lực hướng tâm nên:

$$\Rightarrow \frac{q^2 rR}{4\pi\varepsilon_0 \left(R^2 - r^2\right)^2} - \frac{q(QR+qr)}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = m\omega^2 R$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 m}\left[\frac{qr}{\left(R^2 - r^2\right)^2} - \frac{(QR+qr)}{4\pi\varepsilon_0 R^4}\right]}.$$

<u>Bài toán vận dụng 2.2</u>: Một mặt phẳng dẫn điện nối đất có một chỗ lồi lên hình bán cầu bán kính *a*. Tâm bán cầu nằm trên mặt phẳng. điện tích điểm q nằm trên trục đối xứng của hệ và cách mặt phẳng một khoảng *b* (*b* > *a*). Xác định điện thế φ và điện tích hưởng ứng ở chỗ lồi lên.



Bài giải:

a. Ta có thể coi trường tạo bởi điện tích q và các điện tích hưởng ứng trên bề mặt kim loại như là trường tạo bởi hệ của 4 điện tích.

+ Điện tích q

+ Điện tích - q_1 là ảnh của điện tích q qua mặt phẳng dẫn điện, cách mặt phẳng dẫn điện một khoảng b.

+ Điện tích - q_2 là ảnh của điện tích q qua mặt cầu bán kính a, cách tâm mặt cầu một khoảng b' = $\frac{a^2}{b}$, độ lớn điện tích $q_2 = \frac{qa}{b}$.

+ Điện tích + q'_2 là ảnh của điện tích - q_2 qua mặt phẳng dẫn điện. Với $q'_2 = q_2 = \frac{qa}{b}$, cách mặt phẳng dẫn điện một khoảng b' = $\frac{a^2}{b}$.

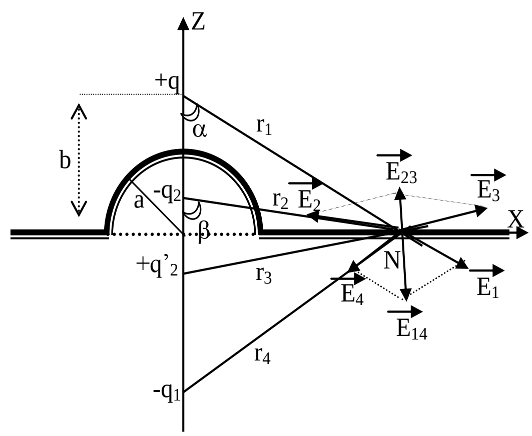
Điện thế φ của trường:

$$\varphi(M) = k\frac{q}{r_1} - k\frac{q_2}{r_2} + k\frac{q_2'}{r_3} - \frac{q}{r_4}.$$

Vậy:

$$\varphi(M) = kq\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_4} - \frac{a}{b}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right)\right].$$

b. Các véc tơ cường độ điện trường do các điện tích q, - q_2, q'_2, - q_1 gây ra tại điểm N (x,0,0) trên mặt phẳng của vật dẫn có phương, chiều như hình vẽ và có độ lớn:



$$E_1 = E_2 = \frac{kq}{r_1^2};\quad E_3 = E_4 = \frac{kq}{r_2^2}$$

Cường độ điện trường tổng hợp có phương vuông góc với mặt vật dẫn, có chiều như hình vẽ, có độ lớn:

$$E = 2\left(E_1\cos\alpha - E_2\cos\beta\right),$$

trong đó:

$$cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{x^2+b^2}} \ ; \ cos\beta = \frac{b'}{\sqrt{x^2+b'^2}}$$

Vậy:

$$E = \frac{2kqb}{\left(b^2+x^2\right)^{3/2}} - \frac{2kq'b'}{\left(b'^2+x^2\right)^{3/2}}$$

trong đó $q' = \frac{qa}{b}; b' = \frac{a^2}{b}$.

+ Điện tích hưởng ứng trên mặt vật dẫn:

$$Q = \int_a^\infty \sigma ds = \int_a^\infty \varepsilon_0 E ds$$

Ta có ds = 2πxdx ; $4k\pi\varepsilon_0 = 1$ nên:

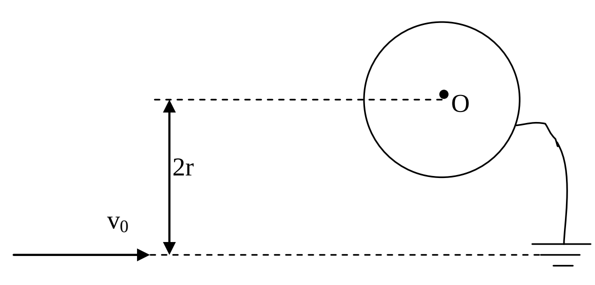
$$Q = \int_a^\infty \frac{qbx}{\left(b^2+x^2\right)^{3/2}}dx - \int_a^\infty \frac{q'b'x}{\left(b'^2+x^2\right)^{3/2}}dx$$

Lấy tích phân trên, ta được:

$$Q = q\frac{b^2-a^2}{b\sqrt{a^2+b^2}}$$

Điện tích hưởng ứng ở những chỗ lồi lên:

$$Q' = (q-Q) = q(1-\frac{b^2-a^2}{b\sqrt{a^2+b^2}}).$$

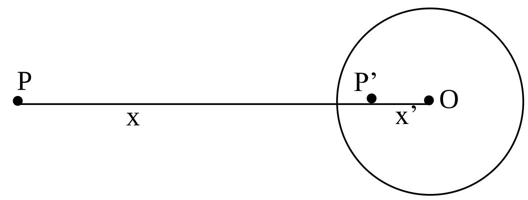


<u>Bài toán vận dụng 2.3</u>: Một quả cầu dẫn điện bán kính *r = 2cm* được nối đất. Có 1 điện tử ban đầu từ xa chuyển động với vận tốc v_0 theo hướng thẳng cách tâm quả cầu một khoảng bằng 2r. Hãy xác định giá trị vận tốc của điện tử khi bay tới gần quả cầu nhất, nếu biết rằng tại vị trí gần nhất điện tử cách tâm quả cầu một khoảng 3r/2.

Bài giải:

Theo phương pháp ảnh điện thì ảnh của điện tích p là ở p’.

Với $OP' = x' = \frac{r^2}{x}; e' = -e\frac{r}{x}$, ta có:



$$F_{(x)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{e.e'}{(x-x')^2} = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{rx}{\left(x^2-r^2\right)^2}$$

Thế năng ở P là:

$$A_P = \int F_{(x)}dx = \frac{e^2r}{8\pi\varepsilon_0\left(x^2-r^2\right)} + C$$

Chọn gốc thế năng ở ∞ ta có $W_{t\infty} = 0$. Áp dụng tính chất công của lực thế:

$$W_{t\infty} - W_{tP} = A$$

$$\Leftrightarrow W_{tP} = -\frac{e^2r}{8\pi\varepsilon_0\left(x^2-r^2\right)}$$

Theo định luật bảo toàn cơ năng, ta có:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2r}{8\pi\ \varepsilon_0\left(x^2-r^2\right)}.$$

Thay $x = \frac{3r}{2}$, ta được:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{10\pi\ \varepsilon_0 r} \qquad (1)$$

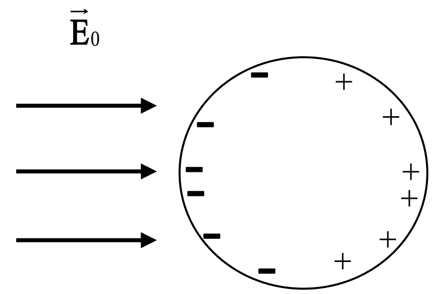
Áp dụng định luật bảo toàn mô men động lượng:

$$\frac{3}{2}r.mv = 2r.mv_0 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có:

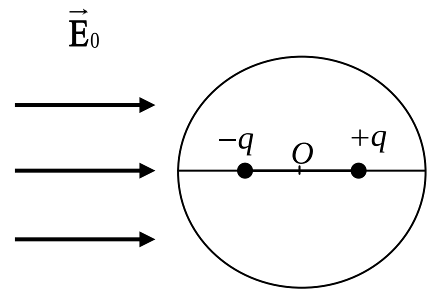
$$v = e\sqrt{\frac{32}{70}\frac{1}{\pi\,\varepsilon_0 r\,m}}\,.$$

<u>**Bài toán vận dụng 2.4**</u>: *Quả cầu dẫn trong điện trường đều*



Khi đặt một quả cầu dẫn trong điện trường đều, điện tích trên quả cầu được sắp xếp lại. Xác định mật độ điện tích trên bề mặt quả cầu dẫn.

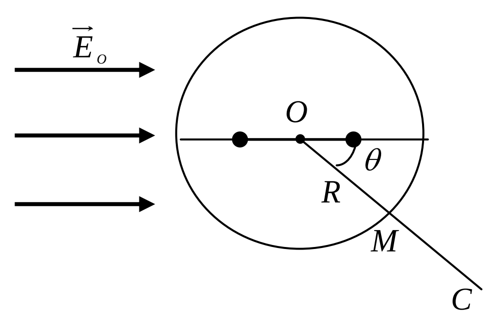
Bài giải:



Mật độ điện tích trên bề mặt quả cầu là không đều.

Do tính chất đối xứng, có thể xem điện tích trên vỏ tương đương với hệ điện tích q, - q. Hai điện tích này tạo thành một lưỡng cực điện.

Điện thế tại điểm C (khoảng cách từ C đến O là r) bằng tổng điện thế của trường ngoài ($V_{\vec{E}_o}$) và điện thế của lưỡng cực ($V_{\vec{P}}$).



Thế năng lưỡng cực được xác định:

$$V_{\vec{P}} = \frac{p_e \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Thế năng trường ngoài được xác định:

$$V_{\vec{E}_o} = \int -E_0 dx = -E_0 x = -E_0 r\cos\theta.$$

Theo tính chất của vật dẫn trong điện trường, quả cầu dẫn là vật đẳng thế. Chọn gốc điện thế tại O, điện thế tại mọi điểm trên quả cầu bằng 0. Mọi điểm M ở bề mặt quả cầu đều có $V_M = 0$. Vậy:

$$V_M = V_{\vec{E}_o}(M) + V_{\vec{P}}(M) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{p_e \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = E_0 R\cos\theta$$
$$\Leftrightarrow p_e = 4\pi\varepsilon_0 E_0 R^3$$

Véctơ cường độ điện trường theo phương pháp tuyến tại M được xác định:

$$\begin{aligned} E_M &= E_{\vec{E}_o}(r) + E_{\vec{P}}(r) \\ &= \left(-\frac{\partial V_{\vec{E}_o}}{\partial r} - \frac{\partial V_{\vec{P}}}{\partial r}\right)\Big|_R \\ &= E_0\cos\theta + 2E_0\cos\theta \\ &= 3E_0\cos\theta \end{aligned}$$

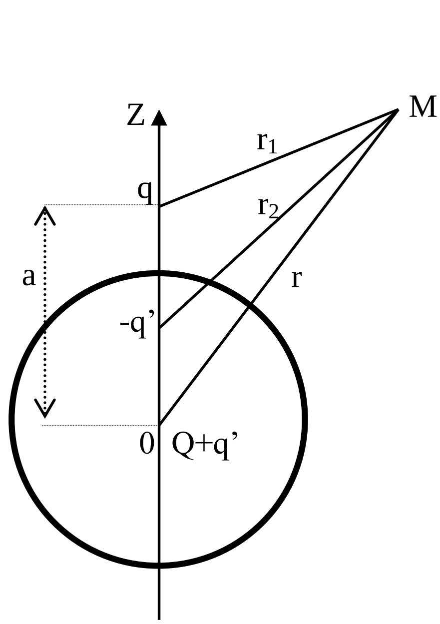
Ta được mật độ điện mặt:

$$\sigma = \frac{E_n(M)}{\varepsilon_0} = \frac{3E_0\cos\theta}{\varepsilon_0}.$$

Bài toán vận dụng 2.5: Một quả cầu dẫn điện bán kính R ở trong trường của một điện tích điểm q cách tâm quả cầu một khoảng a > R. Hệ trên được nhúng vào một điện môi đồng chất hằng số điện môi ε. Tìm thế của trường φ nếu cho trước:

a. Điện tích của quả cầu Q.

b. Điện thế của quả cầu φ_0 (ở vô cực φ = 0).



Bài giải:

a. Điện thế của điện tích điểm và của quả cầu tích điện trong miền r > a có thể xem là điện thế của 4 điện tích điểm đặt trên các trục đối xứng: điện tích q ở cách gốc toạ độ một khoảng a. Ba ảnh của nó là các điện tích Q và $q' = qR/a$ ở gốc toạ độ và điện tích - q' ở điểm $a' = R^2/a$.

Điện tích - q' mô tả tác dụng của điện tích hưởng ứng ở phía mặt quả cầu gần q nhất (dấu điện tích này ngược dấu với q) điện tích + q' mô tả tác dụng của điện tích hưởng ứng ở phần quả cầu xa q hơn và nó cùng dấu với q.

Điện thế do hệ gây ra tại điểm M là:

$$\varphi = \frac{q}{\varepsilon r_1} + \frac{Q + q'}{\varepsilon r} - \frac{q'}{\varepsilon r_2}$$

ở đây: q' = $\frac{qR}{a}$, $r_2 = \sqrt{r^2 + a'^2 - 2a'r\cos\theta}$, a' = $\frac{R^2}{a}$, θ là góc tạo bởi giữa 0M và trục 0Z.

b. Trong trường hợp này, ta chỉ việc Q = $\varepsilon\varphi_0$R - $\frac{qR}{a}$.

Nhận xét:

+ Nếu quả cầu chung hoà thì không có số hạng chứa Q

+ Nếu quả cầu nối đất ($\varphi_0 = 0$) thì điện thế có dạng:

$$\varphi = \frac{q}{\varepsilon r_1} - \frac{q'}{\varepsilon r_2}.$$

2.3. TRƯỜNG GÂY BỞI CÁC ĐIỆN TÍCH PHÂN BỐ TRÊN MẶT GIỚI HẠN LÀ MẶT TRỤ

Bài toán vận dụng 3.1: Một dây dẫn thẳng, dài vô hạn được tích điện với mật độ điện dài λ, đặt song song với trục của một hình trụ có bán kính r mang điện - λ trên một đơn vị độ dài. Khoảng cách giữa dây dẫn và trục hình trụ bằng a.

a. Xác định lực tác dụng lên một đơn vị độ dài của dây dẫn.

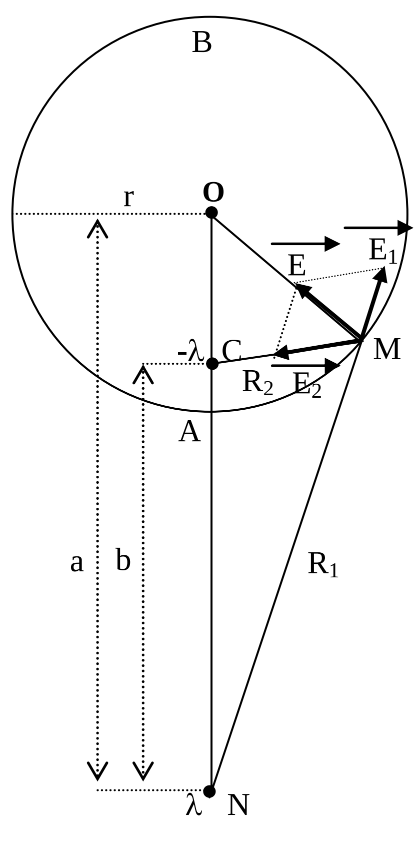
b. Tìm điện thế, cường độ điện trường do hệ sinh ra trên mặt trụ.

c. Tìm phân bố điện tích mặt trên mặt trụ.

Bài giải:

Mặt trụ ở trạng thái cân bằng điện là một mặt đẳng thế. Mọi điểm trên mặt có cùng điện thế.

Mặt đẳng thế của hai dây dẫn thẳng, dài vô hạn mang điện λ và - λ trên một đơn vị độ dài là những mặt trụ bao quanh các dây.



Như vậy, ta có thể thay mặt trụ tích điện bằng một dây dẫn thẳng, dài vô hạn mang điện - λ đặt ở vị trí nào đó bên trong hình trụ và song song với trục hình trụ sao cho mặt đẳng thế do hệ hai dây gây ra trùng mặt trụ. Khi đó, trường do hệ gây ra trong không gian không thay đổi.

Gọi b là khoảng cách giữa hai dây λ và - λ.

Cường độ điện trường do một dây dẫn dài vô hạn gây ra tại một điểm M là:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \qquad (1)$$

trong đó R là khoảng cách từ dây dẫn đến điểm quan sát M.

Ta chọn φ ở khoảng cách $R_0 >> b$ bằng 0 thì:

+ Điện thế do dây dẫn gây ra tại một điểm:

$$\varphi = \int_R^{R_0} E dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{R}{R_0} \qquad (2)$$

+ Điện thế do hai dây gây ra tại M trên mặt trụ:

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[-\ln\frac{R_1}{R_0} + \ln\frac{R_2}{R_0}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{R_2}{R_1} \qquad (3)$$

+ Khi M ≡ A thì:

$R_1 = a – r$, $R_2 = r – (a – b)$.

Vậy:

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln\frac{r-(a-b)}{a-r}\right] \qquad (4)$$

+ Khi M ≡ B thì:

$R_1 = a + r$, $R_2 = r + (a – b)$

Vậy:

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln\frac{r+(a-b)}{a+r}\right] \qquad (5)$$

Điều kiện mặt đẳng thế cho ta:

$$\frac{r+(a-b)}{a+r} = \frac{r-(a-b)}{a-r}$$

$$\Leftrightarrow\ r^2 = a(a - b) \qquad (6)$$

Như vậy: ta có thể thay thế mặt trụ bán kính r tích điện đều - λ đặt cách một dây dẫn thẳng dài vô hạn (mang điện λ trên một đơn vị dài) một khoảng a bằng một dây dẫn mang điện - λ trên một đơn vị dài đặt ở khoảng cách b = $(a^2 - r^2)/a$ so với dây dẫn thẳng dài vô hạn (mang điện λ trên một đơn vị dài).

a. Lực tác dụng lên một đơn vị dài của dây:

$$F = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 b}\lambda = \frac{\lambda^2 a}{2\pi\varepsilon_0 (a^2 - r^2)} \qquad (7)$$

b. Điện thế do hệ gây ra tại một điểm trên mặt trụ:

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln\frac{r + (a-b)}{a+r}\right] \qquad (8)$$

Thay b = $(a^2 - r^2)/a$ ta được:

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{a} \qquad (9)$$

c. Cường độ điện trường do hệ điện tích gây ra tại điểm M trên mặt trụ:

$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2}, \qquad (10)$$

trong đó: E_1, E_2 là cường độ điện trường do các điện tích gây ra tại M, ta có:

$$E_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R_1} \ ; \ E_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R_2} \qquad (11)$$

Cường độ điện trường tổng hợp có phương vuông góc với mặt trụ, chiều hướng vào trong và có độ lớn:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2 cos\alpha}, \qquad (12)$$

trong đó $\alpha = CMN$.

Thay $E_1 = \frac{R_2}{R_1} E_2$ và $b = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2 cos\alpha}$ ta tìm được:

$$E = \frac{\lambda b}{2\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}$$

Mật độ điện tích liên kết mặt được xác định:

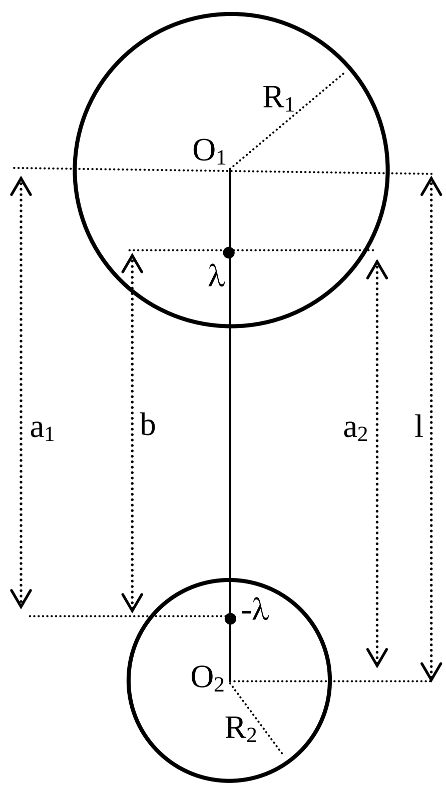
$$\sigma = \varepsilon_0 E = \frac{\lambda b}{2\pi R_1 R_2} \quad .$$

<u>Bài toán vận dụng 3.2</u>: Trường tĩnh điện tạo bởi hai hình trụ dẫn điện có các trục song song, bán kính R_1, R_2 và có mật độ điện dài là $\pm \lambda$. Khoảng cách giữa hai trụ là *l*. Tìm điện dung tương hỗ của các hình trụ trên một đơn vị độ dài.

Bài giải:

Vì các mặt trụ là các mặt đẳng thế. Ta có thể thay thế các mặt trụ tích điện này bằng các dây dẫn thẳng dài vô hạn mang điện $\pm \lambda$ sao cho các mặt đẳng thế trùng với mặt trụ. Khi đó trường bên ngoài các hình trụ không thay đổi.

Gọi b là khoảng cách giữa hai dây λ và $-\lambda$, a_1 là khoảng cách giữa dây $-\lambda$ và O_1, a_2 là khoảng cách giữa dây $-\lambda$ và O_2.



Theo kết quả bài toán trên ta có:

$$R_1^2 = a_1^2 - a_1 b \;\; ; \;\; R_2^2 = a_2^2 - a_2 b$$

Từ hình vẽ:

$$a_1 + a_2 - b = l$$

Giải các phương trình trên ta được:

$$\begin{cases} b = 2\sqrt{c^2 - R_1^2} \\ a_1 a_2 = \dfrac{l(l+b) - R_1^2 - R_2^2}{2} \end{cases}$$

trong đó: $c = \dfrac{l^2 - R_1^2 - R_2^2}{2l}$.

Điện thế do hệ điện tích gây ra tại mặt trụ R_2 xác định theo công thức:

$$\varphi_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{a_2}$$

Điện thế do hệ điện tích gây ra tại mặt trụ R_1 là:

$$\varphi_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{a_1}{R_1}$$

Hiệu điện thế hai mặt trụ:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{a_1 a_2}{R_1 R_2}$$

Điện dung tương hỗ giữa hai mặt trụ trên một đơn vị độ dài:

$$C = \frac{\lambda}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln \dfrac{a_1 a_2}{R_1 R_2}}$$

$$= 2\pi\varepsilon_0 \left[\ln \frac{l(l+b) - R_1^2 - R_2^2}{2R_1 R_2} \right].$$