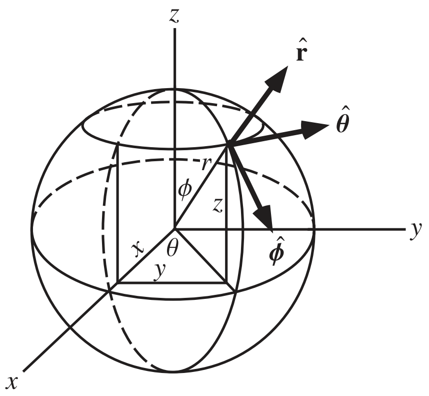
Công thức trong hệ tọa độ cong

1 Hệ tọa độ cầu



Hệ tọa độ cầu (spherical coordinate) là một hệ tọa độ cong (curvelinear coordinate) thường được sử dụng để biểu diễn vị trí trên một mặt cầu. Đặt ϕ là góc phương vị trên mặt phẳng xy so với trục x với $0 \leq \phi < 2\pi$ (đặt là λ khi sử dụng như kinh độ), θ là góc tà (với $\theta = \frac{pi}{2} - \delta$ với δ là vĩ độ) so với trục dương z với $0 \leq \theta \leq \pi$, và r là khoảng cách (bán kính) từ một điểm đến gốc tọa độ. Đây là quy chuẩn được sử dụng rộng rãi trong Vật lý. Tiêu chuẩn được sử dụng trong Toán học có θ và ϕ có vai trò bị đảo ngược.

Tọa độ cầu (r, θ, ϕ) liên hệ với tọa độ Descartes (x, y, z) như sau

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{1}$$

$$\phi = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2}$$

$$\theta = cos^{-1}\left(\frac{z}{r}\right) \tag{3}$$

Với $r \in [0, \infty), \phi \in [0, 2\pi)$, và $\theta \in [0, \pi]$ và hàm tan ngược phải được định nghĩa phù hợp để đưa ra đúng dấu của (x, y).

Theo hệ tọa độ Descartes

$$x = r\cos\phi\sin\theta \tag{4}$$

$$y = r\sin\phi\sin\theta \tag{5}$$

$$z = r\cos\theta \tag{6}$$

Vi phân đoạn

$$\mathrm{d}\mathbf{s} = \mathrm{d}r\hat{\boldsymbol{r}} + r\mathrm{d}\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r|\sin\theta|\mathrm{d}\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{7}$$

Vi phân diện tích mặt (hướng theo $\hat{\boldsymbol{r}}$)

$$\mathrm{d}a = r^2|\sin\theta|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \tag{8}$$

Vi phân thể tích

$$\mathrm{d}V = r^2|\sin\theta|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r \tag{9}$$

Định thức Jacobian

$$\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \phi, \theta)}\right| = r^2|\sin\theta| \tag{10}$$

Vector tọa độ

$$\mathbf{r} \equiv \begin{bmatrix} r\cos\phi\sin\theta \\ r\sin\phi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{bmatrix} \tag{11}$$

do đó vector đơn vị

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}r}}{\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}r}\right|} = \begin{bmatrix} \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = \frac{\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\phi}}{\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\phi}\right|} = \begin{bmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\theta}}{\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\theta}\right|} = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta \\ -\sin\phi \end{bmatrix} \tag{14}$$

Các đạo hàm của vector đơn vị theo tọa độ

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{r}}}{\partial r} = \mathbf{0} \tag{15}$$

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial r} = \mathbf{0} \tag{16}$$

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial r} = \mathbf{0} \tag{17}$$

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{r}}}{\partial\phi} = \sin\theta\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{18}$$

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial\phi} = -\cos\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin\theta\hat{\boldsymbol{r}} \tag{19}$$

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial\phi} = \cos\theta\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{20}$$

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{r}}}{\partial\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{21}$$

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial\theta} = \mathbf{0} \tag{22}$$

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial\theta} = -\hat{\boldsymbol{r}} \tag{23}$$

Gradient là

$$\boldsymbol{\nabla} A = \frac{\partial A}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{\partial A}{r\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial A}{r|\sin\theta|\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{24}$$

Divergence là

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial(r^2F_r)}{r^2\partial r} + \frac{\partial(\sin\theta F_\theta)}{r|\sin\theta|\partial\theta} + \frac{\partial F_\phi}{r|\sin\theta|\partial\phi} \tag{25}$$

Curl là

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F} = \frac{1}{|r\sin\theta|}\left[\frac{\partial(\sin\theta F_\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial F_r}{|\sin\theta|\partial\phi} - \frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r}\right] \\ + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\theta\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}\end{aligned} \tag{26}$$

Laplacian vô hướng là

$$\nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{2\partial A}{r\partial r} + \frac{\partial^2 A}{r^2\sin\theta^2\partial\phi^2} + \frac{\cos\theta\partial A}{r^2\sin\theta\partial\theta} + \frac{\partial^2 A}{r^2\partial\theta^2} \tag{27}$$

Đạo hàm thời gian của vector tọa độ

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \begin{bmatrix} \cos\phi\sin\theta\dot{r} - r\sin\phi\sin\theta\dot{\phi} + r\cos\phi\cos\theta\dot{\theta} \\ \sin\phi\sin\theta\dot{r} + r\cos\phi\sin\theta\dot{\phi} + r\sin\phi\cos\theta\dot{\theta} \\ \cos\theta\dot{r} - r\sin\theta\dot{\theta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}\dot{r} + r|\sin\theta|\begin{bmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{bmatrix}\dot{\phi} + r\begin{bmatrix} \cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix}\dot{\theta} \\ &= \dot{r}\hat{\boldsymbol{r}} + |r\sin\theta|\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}\end{aligned} \tag{28}$$

Từ đó tốc độ bằng

$$v \equiv |\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{\dot r^2 + r^2\sin^2\theta\dot\phi^2 + r^2\dot\theta^2} \tag{29}$$

Gia tốc

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= (\ddot r - r\dot\theta^2 - r\sin^2\theta\dot\phi^2)\hat{\boldsymbol{r}} + (2\sin\theta\dot\phi\dot r + 2r\cos\theta\dot\phi\dot\theta + r\sin\theta\ddot\phi)\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ &+ (2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta - r\sin\theta\cos\theta\dot\phi^2)\hat{\boldsymbol{\theta}}\end{aligned} \tag{30}$$

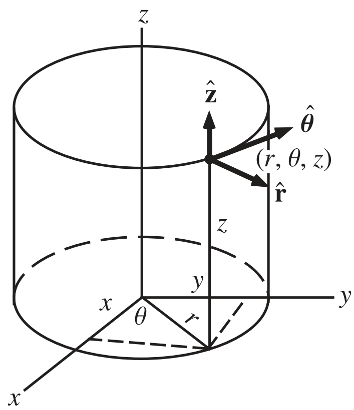
Đạo hàm thời gian của vector đơn vị

$$\dot{\hat{\boldsymbol{r}}} = |\sin\theta|\dot\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + \dot\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{31}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\phi}}} = -\dot\phi(\sin\theta\hat{\boldsymbol{r}} + \cos\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}) \tag{32}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -\dot\theta\hat{\boldsymbol{r}} + \cos\theta\dot\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{33}$$

2 Hệ tọa độ trụ



Hệ tọa độ trụ là sự tổng quát hóa hệ tọa độ trụ 2 chiều sang 3 chiều bằng cách chồng thêm một trục chiều cao (z). Đáng tiếc, có đa dạng ký hiệu sử dụng cho hai hệ tọa độ này. r hoặc ρ được sử dụng cho tọa độ bán kính và ϕ hoặc θ cho tọa độ góc phương vị. Trong tài liệu này ta sử dụng (r, θ, z).

Theo tọa độ Descartes (x, y, z)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{34}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{35}$$

$$z = z \tag{36}$$

với $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $z \in (-\infty, \infty)$ và hàm sin ngược phải được chọn phù hợp để tính đến dấu của (x, y).

Theo x, y và z

$$x = r\cos\theta \tag{37}$$

$$y = r\sin\theta \tag{38}$$

$$z = z \tag{39}$$

Vi phân đoạn

$$\mathrm{d}\mathbf{s} = \mathrm{d}r\hat{\boldsymbol{r}} + r\mathrm{d}\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + \mathrm{d}z\hat{\boldsymbol{z}} \tag{40}$$

Vi phân thể tích

$$\mathrm{d}V = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \tag{41}$$

Định thức Jacobian

$$\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)}\right| \tag{42}$$

Vector tọa độ Descartes trong hệ tọa độ trụ

$$\mathbf{r} \equiv \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{bmatrix} \tag{43}$$

Các vector đơn vị

$$\hat{\boldsymbol{r}} \equiv \frac{\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}r}}{\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}r}\right|} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} \tag{44}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \equiv \frac{\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\theta}}{\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\theta}\right|} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \tag{45}$$

$$\hat{\boldsymbol{z}} \equiv \frac{\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}z}}{\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}z}\right|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{46}$$

Đạo hàm của các vector đơn vị theo tọa độ

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{r}}}{\partial r} = \mathbf{0} \tag{47}$$

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{r}}}{\partial\theta} = \theta \tag{48}$$

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{r}}}{\partial z} = \mathbf{0} \tag{49}$$

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial r} = \mathbf{0} \tag{50}$$

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial\theta} = -\hat{\boldsymbol{r}} \tag{51}$$

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial z} = \mathbf{0} \tag{52}$$

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{z}}}{\partial r} = \mathbf{0} \tag{53}$$

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{z}}}{\partial\theta} = \mathbf{0} \tag{54}$$

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{z}}}{\partial z} = \mathbf{0} \tag{55}$$

Có thể thấy toàn bộ đạo hàm tọa độ của $\hat{\boldsymbol{z}}$ và đạo hàm các vector đơn vị theo tọa độ z đều bằng $\mathbf{0}$.

Gradient trong hệ tọa độ trụ

$$\boldsymbol{\nabla}A = \frac{\partial A}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{\partial A}{r\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial A}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}} \tag{56}$$

Tích có hướng của các trục tọa độ

$$\hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{z}} \tag{57}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \times \hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{r}} \tag{58}$$

$$\hat{\boldsymbol{z}} \times \hat{\boldsymbol{r}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{59}$$

Vận tốc trong hệ tọa độ trụ

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \cos\theta\dot r - r\sin\theta\dot\theta \\ \sin\theta\dot r + r\cos\theta\dot\theta \\ \dot z \end{bmatrix} = \dot r\hat{\boldsymbol{r}} + r\dot\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + \dot z\hat{\boldsymbol{z}} \tag{60}$$

Do đó tốc độ là

$$v \equiv |\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + \dot z^2} \tag{61}$$

Gia tốc trong hệ tọa độ trụ

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\boldsymbol{r}} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}} + \ddot{z}\hat{\boldsymbol{z}} \tag{62}$$

Đạo hàm theo thời gian của các vector đơn vị

$$\dot{\hat{\boldsymbol{r}}} = \begin{bmatrix} -\sin\theta\dot{\theta} \\ \cos\theta\dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} = \dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{63}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \begin{bmatrix} -\cos\theta\dot{\theta} \\ -\sin\theta\dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{64}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{z}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{65}$$

Divergence trong hệ tọa độ trụ

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial(rF_r)}{r\partial r} + \frac{\partial F_\theta}{r\partial\theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{66}$$

Curl là

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{r\partial\theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{r}} + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right]\hat{\boldsymbol{z}} \tag{67}$$

Laplacian trong hệ tọa độ trụ

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\partial f}{r\partial r} + \frac{\partial^2 f}{r^2\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{68}$$