CHỨNG MINH CÔNG THỨC DAO ĐỘNG TẮT DẦN

NGÔ MINH NGỌC

TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU VẬT LÝ

Có lẽ các bạn học sinh lớp 12 đều đã quá quen thuộc với phương trình dao động điều hòa

$$x = A\cos(\omega.t + \varphi)$$

của con lắc đơn trong môi trường chân không (bỏ qua lực cản môi trường). Tuy nhiên, trong thực tế, con lắc nào cũng dao động trong các môi trường như không khí, nước, dầu,... Vì thế người ta coi môi trường cũng thuộc về hệ dao động. Khi kéo con lắc ra khỏi vị trí cân bằng rồi thả tự do, ta thấy biên độ dao động của nó giảm dần đến không.

Dao động có biên độ giảm dần theo thời gian gọi là dao động tắt dần. Trong thực tế, mọi dao động tự do đều là dao động tắt dần với tần số riêng không chỉ phụ thuộc vào độ cứng k và khối lượng m của con lắc mà còn phụ thuộc vào độ nhớt của môi trường.

Trong bài này ta chỉ xét đến dao động tắt dần do chịu sự tác động của lực ma sát nhớt.

$$\overrightarrow{F_c} = -b\overrightarrow{v}$$

Theo định luật II Newton ta có:

$$m\ddot{x} = -kx + F_c$$

hay

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

Suy ra:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{1}$$

Giả sử (1) có một nghiệm riêng là $x = e^{\lambda.t}$ (do đa phần các phương trình vi phân thuần nhất đều có nghiệm riêng dạng $x = e^{\lambda.t}$). Thay vào (1) ta được:

$$\left(\lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{k}{m}\right)e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow \left(\lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{k}{m}\right) = 0 \tag{2}$$

Đặt $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$; $\gamma = \frac{b}{2m}$ thì (2) có dạng:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{3}$$

Đây là một phương trình bậc 2 với $\Delta' = \gamma^2 - \omega_0^2$. Giờ công việc ta cần làm đó chính là xét dấu của Δ' rồi nghiệm thu kết quả. Ta có một lưu ý trước khi tính toán đó là: nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là tổ hợp tuyến tính của các nghiệm riêng.

Trường hợp 1. $\Delta' > 0$ hay $\gamma^2 > \omega_0^2$, suy ra

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \in \mathbb{R}$$

Như vậy nghiệm chung của (1) có dạng:

$$x = Ax_1 + Bx_2 = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \tag{4}$$

Với A, B là những hằng số xác định từ điều kiện biên.
Phương trình (4) cho kết quả là vật không dao động

Trường hợp 2. $\Delta' = 0$ hay $\gamma^2 = \omega_0^2$, suy ra

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma$$

Suy ra (1) có nghiệm riêng $x_1 = e^{-\gamma t}$.
Nghiệm riêng thứ hai có dạng $x_2 = x_1.u(t) + C$.
Thay x_2 vào (1) và chọn điều kiện thích hợp ta được: $u(t) = t$ và $x_2 = tx_1$.
Vậy nghiệm tổng quát của (1) là

$$x = (D + Et).e^{-\gamma t}$$

Với D, E là hệ số xác định từ điều kiện biên.

Trường hợp 3. $\Delta' < 0$ hay $\gamma^2 < \omega_0^2$, ta có

$$\Delta' = -1(\omega_0^2 - \gamma^2) = i^2(\omega_0^2 - \gamma^2)$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2 i} = \alpha + \beta i$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2 i} = \alpha - \beta i$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm tổng quát là:

$$\begin{aligned} x &= Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \\ &= Ae^{(\alpha+\beta i)t} + Be^{(\alpha-\beta i)t} \\ &= Ae^{\alpha t}e^{i\beta t} + Be^{\alpha t}e^{-i\beta t} \\ &= e^{\alpha t}.((A+B)\cos\beta t + (iA - iB)\sin\beta t) \\ &= e^{\alpha t}.(A_1\cos\beta t + A_2\sin\beta t) \end{aligned} \tag{*}$$

Đặt

$$\tan\varphi = -\frac{A_1}{A_2} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} \Rightarrow \sin\varphi = -\frac{A_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}$$

Từ $(*)$ suy ra

$$x = e^{\alpha t}\sqrt{A_1^2 + A_2^2}\cos(\beta t + \varphi)$$
$$\Rightarrow x = e^{-\gamma t} A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Với $\varphi_0 = \arctan -\dfrac{A_1}{A_2}$ và $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$.
Ta thấy phần $a(t) = Ae^{-\gamma t}$ là biên độ của dao động, biên độ này giảm dần theo thời gian theo hàm e mũ.

Vậy phương trình vật dao động tắt dần do ma sát nhớt có dạng

$$x = e^{-\gamma t} A\cos(\omega t + \varphi_0) \tag{5}$$

đã được chứng minh!
Từ phương trình (5) ta có thể có thêm một vài điều lưu ý sau:

- Chu kì của dao động là
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

- Đại lượng đặc trưng cho mức độ giảm nhanh hay chậm của dao động tắt dần là "Lượng giảm loga":
$$\delta = \ln\frac{a(t)}{a(t+T)} = \ln\frac{Ae^{-\gamma t}}{Ae^{-\gamma(t+T)}} = \ln e^{\gamma T} = \gamma T = const$$

- Khi độ nhớt của môi trường bằng 0 (tức là $b = 0$) thì ta thấy $\gamma = 0$ và do đó phương trình (5) lại trở về dạng:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

  là dạng của phương trình dao động điều hòa quen thuộc!