LỜI GIẢI ĐỀ NGHỊ
ĐỀ THI THỬ GẶP GỠ TOÁN HỌC VẬT LÝ

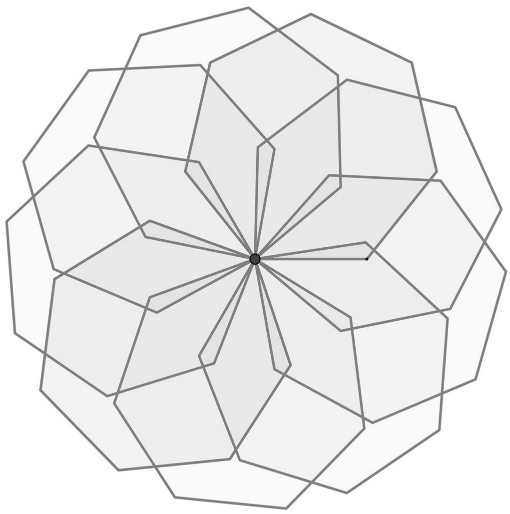
Tạp chí và tư liệu vật lý

Ngày 24 tháng 7 năm 2021

Lời giải đề thi được thực hiện bởi Tạp chí và tư liệu vật lý.

Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về fanpage Tạp chí và tư liệu vật lý.

Cảm ơn các bạn đã ủng hộ và theo dõi!



Câu 1 Hai vật nhỏ 1 và 2 có khối lượng lần lượt là m_1 và m_2 được nối với nhau bằng một lò xo và nằm yên trên mặt phẳng ngang nhẵn, lúc đầu lò xo không biến dạng. Sau đó người ta truyền đồng thời cho hai vật các vận tốc ban đầu, cụ thể: vật 1 đạt vận tốc $\vec{v_1}$, vật 2 đạt vận tốc $\vec{v_2}$. Biết lò xo có độ cứng k và khối lượng không đáng kể. Gọi G là khối tâm hệ hai vật trên. Hãy tìm các kết quả theo yêu cầu của bài toán trong hệ quy chiếu khối tâm G trong các trường hợp dưới đây:

a) Trường hợp 1. Các véc tơ vận tốc $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ đều có phương nằm ngang và $\vec{v_1}$ vuông góc với $\vec{v_2}$. Hãy tìm cơ năng hệ hai vật.

b) Trường hợp 2. Các véc tơ $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ ngược chiều nhau và trùng với trục lò xo. Tìm chu kì và biên độ dao động mỗi vật.

Lời giải.

a) Vì $\vec{v_1}$ và $\vec{v_2}$ vuông góc với nhau nên $\vec{v_1}\vec{v_2} = 0$.
Trong hệ quy chiếu gắn đất:

$$(m_1 + m_2)\,\vec{r_G} = m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}$$

Đạo hàm 2 vế theo thời gian, ta được:

$$(m_1 + m_2)\,\vec{v_G} = m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}$$

$$\Rightarrow \vec{v_G} = \frac{m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}}{m_1 + m_2}$$

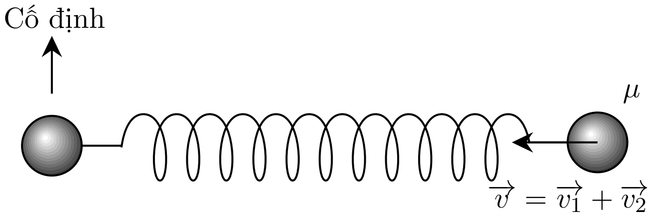
Vận tốc ban đầu của 2 vật trong hệ quy chiếu khối tâm G là:

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{1G}} = \vec{v_1} - \vec{v_G} = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\left(\vec{v_2} - \vec{v_1}\right) \\ \overrightarrow{v_{2G}} = \vec{v_2} - \vec{v_G} = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\left(\vec{v_1} - \vec{v_2}\right) \end{cases}$$

Cơ năng của hệ hai vật trong hệ quy chiếu khối tâm G là:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}m_1(\overrightarrow{v_{1G}})^2 + \frac{1}{2}m_2(\overrightarrow{v_{2G}})^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\left(v_1^2 + v_2^2 - 2\vec{v_1}\vec{v_2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\left(v_1^2 + v_2^2\right) \end{aligned}$$

b) Đưa vào hệ quy chiếu vận tốc và gia tốc gắn với vật 1 (phương pháp hạt ảo) ta thu được hệ gồm một vật có khối lượng bằng khối lượng rút gọn $\mu = \dfrac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$ gắn với lò xo độ cứng k vào một vật cố định (xem hình vẽ).



Dễ dàng thấy vì hệ chỉ có một lò xo và μ không phụ thuộc vào vật được chọn làm mốc, hệ chỉ có 1 mode dao động duy nhất và chu kì dao động của cả hai vật là

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$$

Cũng từ hệ quy chiếu này ta thu được tổng biên độ của hai vật (tổng biên độ này không phụ thuộc vào hệ quy chiếu)

$$\sum A = \frac{v_1 + v_2}{w} = (v_1 + v_2)\sqrt{\frac{\mu}{k}} = (v_1 + v_2)\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$$

Đổi lại vào hệ quy chiếu khối tâm, để bảo toàn động lượng ta có tỉ lệ các biên độ

$$A_1 m_1 = A_2 m_2$$

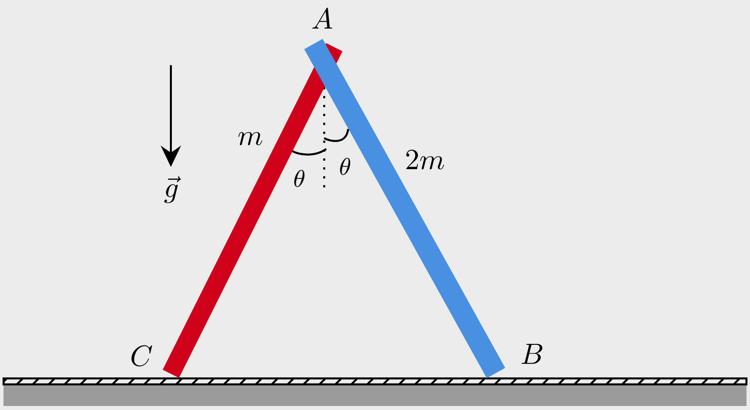
do đó ta tính được biên độ mỗi vật trong hệ quy chiếu khối tâm

$$A_1 = \frac{m_2(v_1 + v_2)}{m_1 + m_2}\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2}}$$

$$A_2 = \frac{m_1(v_1 + v_2)}{m_1 + m_2}\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$$

▽

Câu 2 Hai thanh nhỏ AB và AC đồng chất, tiết diện đều, có cùng chiều dài ℓ, khối lượng phân bố đều dọc thanh. Hai thanh liên kết với nhau bởi chốt liên kết tự do A ở một đầu mỗi thanh. Chốt liên kết A có dạng là một cái trục rất nhỏ luộn vuông góc với mặt phẳng ABC. Thanh thứ nhất (AB) có khối lượng $2m$; thanh thứ hai (AC) có khối lượng m và chốt liên kết có khối lượng không đáng kể. Coi hai thanh dễ dàng quay quanh chốt liên kết và bỏ qua mọi ma sát.



Hình 1

Khi hai thanh đặt trên cùng mặt phẳng thẳng đứng, đầu A ở trên, B và C tựa trên mặt phẳng ngang. Ban đầu AB và AC có phương gần như thẳng đứng. Sau đó buông hệ tự do, đầu B bắt đầu trượt sang phải và C trượt sang trái trên sàn và ba điểm A, B, C luôn nằm trên một mặt phẳng thẳng đứng. Gọi θ là góc tạo bởi phương mỗi thanh cứng và phương thẳng đứng (Hình 1).

Đặt $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$.

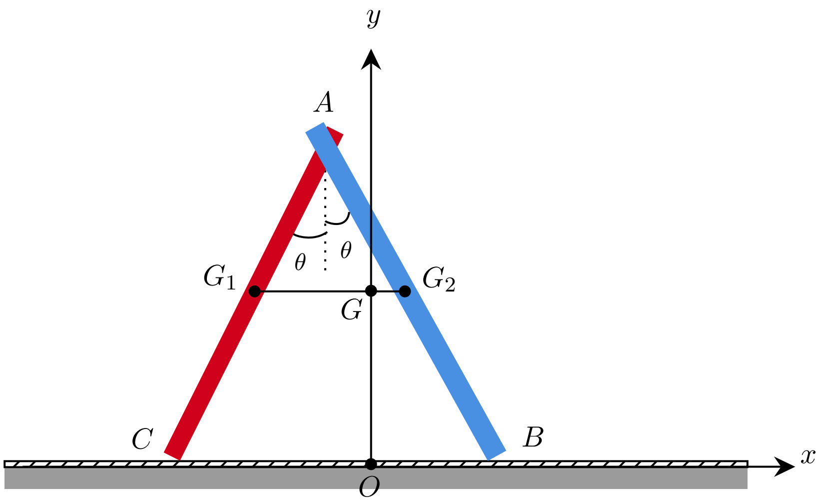
a) Hãy xác định ω theo θ, gia tốc rơi tự do g và ℓ.

b) Hãy tìm ω khi chốt liên kết tự do A sắp chạm đất .

Lời giải.

a) Do không có ma sát nên trọng tâm G của 2 thanh chỉ chuyển động dọc theo phương thẳng đứng
Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ, toạ độ khối tâm G_1,G_2 của 2 thanh :

$$\begin{cases} x_{G_1} = -\dfrac{2}{3} l \sin\theta \\ x_{G_2} = \dfrac{1}{3} l \sin\theta \\ y_{G_1} = y_{G_2} = \dfrac{1}{2} l \cos\theta \end{cases}$$



Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng cho thời điểm ban đầu khi 2 thanh ở vị trí thẳng đứng và khi góc hợp bởi chúng là 2θ:

$$3mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta)=\left[\frac{1}{2}m\frac{l^2}{12}\theta'^2+\frac{1}{2}m\left({x'_{G_1}}^2+{y'_{G_1}}^2\right)\right]+\left[m\frac{l^2}{12}\theta'^2+m\left({x'_{G_2}}^2+{y'_{G_2}}^2\right)\right]$$

Thay $x_{G_1}, x_{G_2}, y_{G_1}, y_{G_2}$ vào phương trình bảo toàn cơ năng ta thu được:

$$\omega=\theta'=\sqrt{\frac{36g(1-\cos\theta)}{l\left(11+\sin^2\theta\right)}}$$

b) Khi chốt A sắp chạm đất $\theta=\frac{\pi}{2}$, khi đó:

$$\omega=\sqrt{\frac{3g}{l}}$$

▽

Câu 3 Người ta đưa một quả cầu bằng nước đá ở nhiệt độ $t_0 = 0^oC$ vào sâu và giữ đứng yên trong lòng một hồ nước rộng có nhiệt độ đồng đều $t_1 = 20^oC$. Do trao đổi nhiệt, quả cầu bị tan dần. Giả thiết rằng sự trao đổi nhiệt giữa nước hồ và quả cầu nước đá chỉ do sự dẫn nhiệt. Biết hệ số dẫn nhiệt của nước là $\chi = 0.6\ \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{smK}}$; nhiệt nóng chảy của nước đá $\lambda = 334 \times 10^3\ \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$; khối lượng riêng của nước đá $\rho = \dfrac{kg}{n^3}$; nhiệt lượng truyền qua diện tích S vuông góc với phương truyền nhiệt trong thời gian $\mathrm{d}t$ là $\mathrm{d}Q = -\chi S d\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}t$ với $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$ là độ biên thiên nhiệt độ trên một đơn vị chiều dài theo phương truyền nhiệt. Từ thời điểm quả cầu nước đá có bán kính $R_0 = 1.5$ cm, hãy tìm:

a) Thời gian để quả cầu tan hết.

b) Thời gian để bán kính quả cầu còn lại một nửa.

Lời giải. Ở thời điểm bán kính quả cầu nước đá là R thì nhiệt độ tại điểm cách tâm quả cầu một khoảng $r\ (r > R)$ là T. Gọi q là nhiệt lượng quả cầu nước đá truyền đi trong một đơn vị thời gian.

$$q = \frac{dQ}{dt} = -\chi\frac{dT}{dr}S = -\chi\frac{dT}{dr}4\pi r^2 \Rightarrow dT = -q\frac{dr}{4\pi\chi r^2} \Rightarrow \int_{T_0}^{T} dT = \int_R^r -q\frac{dr}{4\pi\chi r^2}$$

Khi $r = R_0$ thì $T = T_0$; $r = \infty$ thì $T = T_1$ do đó $q = \chi 4\pi R(T_0 - T_1)$.
Nhiệt lượng mà quả cầu truyền đi khi quả cầu có bán kính thay đổi dR là

$$dQ = \lambda dm = \lambda\rho d(\frac{4}{3}\pi R^3) = \lambda\rho 4\pi R^2 dR$$

Mặt khác

$$dQ = qdt = \chi 4\pi R(T_0 - T_1)dt.$$

do đó $\chi 4\pi R(T_0 - T_1)dt = \lambda\rho 4\pi R^2 dR$ hay $dt = \dfrac{\lambda\rho R dR}{\chi(T_0 - T_1)}$,

a) Thời gian để quả cầu tan hết là t_m

$$t_m = \int_0^{t_m} dt = \int_{R_0}^{0} \frac{\lambda R dR}{\chi(T_0 - T_1)}$$

$$\Rightarrow t_m = \frac{\lambda\rho {R_0}^2}{2\chi(T_0 - T_1)} \approx 2881(s) \approx 48(min)$$

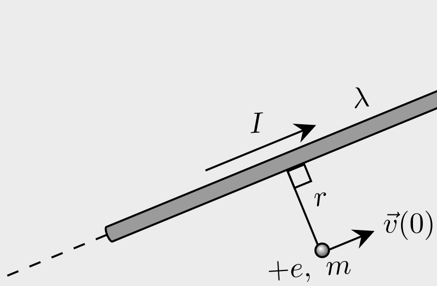
b) Thời gian để bán kính quả cầu giảm đi một nửa

$$t_m = \int_0^{t_m} dt = \int_{R_0}^{R_0/2} \frac{\lambda R dR}{\chi(T_0 - T_1)}$$

$$\Rightarrow t = \frac{\lambda\rho}{\chi(T_0 - T_1)}\left(\frac{{R_0}^2}{2} - \frac{{R_0}^2}{8}\right) = 2881 \cdot \frac{3}{4} \approx 2160(s) = 36(min)$$

▽

Câu 4 Trong hệ tọa độ trụ, vị trí một chất điểm được xác định bằng ba tọa độ r, θ và z; vận tốc và gia tốc được biểu diễn qua các véc tơ đơn vị chỉ phương $\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z}$, các tọa độ và đạo hàm các tọa độ theo thời gian. Hãy dùng tọa độ trụ để tìm các đại lượng và các yêu cầu của bài toán dưới đây.
Trong hình 2, một proton mang điện tích $+e$, khối lượng m, ban đầu được cung cấp vận tốc $\overrightarrow{v}(0) = v_0\overrightarrow{e_z}$ song song với một sợi dây rất dài, mảnh, ở khoảng cách r tính từ trục sợi dây. Dây mang dòng điện I chạy theo chiều e_z và điện tích trên mỗi mét dây dài là λ (giả sử $\lambda > 0$ và đồng chất). Cả proton và sợi dây được đặt trong chân không. Biết v_0 rất nhỏ so với c (tốc độ ánh sáng trong chân không). Viết các câu trả lời từ (a) đến (e) theo r, I, λ, v_0, m, e, hằng số điện môi trong chân không ε_0, độ từ thẩm chân không μ_0, các tọa độ r, θ, z (kể cả các đạo hàm tọa độ theo thời gian) và các véc tơ đơn vị $\overrightarrow{e_r}$, $\overrightarrow{e_\theta}$, $\overrightarrow{e_z}$ trong hệ tọa độ trụ.



Hình 2

a) Tìm véc tơ cường độ điện trường $\overrightarrow{E}$ tại điểm đặt proton.

b) Tìm véc tơ cảm ứng từ $\overrightarrow{B}$ tại điểm đặt proton.
Trong các ý tiếp theo ta bỏ mọi lực hấp dẫn tác dụng lên proton.

c) Viết hệ phương trình chuyển động (dạng phương trình vi phân) của proton trong hệ tọa độ trụ.

d) Giả sử rằng $v_r = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0$ và lúc $t = 0$ thì $r(0) = r_0, \theta(0) = 0, z(0) = 0, v_\theta(0) = 0, v_z(0) = v_0$. Hãy viết các tọa độ chuyển động $r(t), \theta(t), z(t)$ (tọa độ theo thời gian). Vẽ phác họa quỹ đạo chuyển động trong trường hợp này.

e) Tìm v_0 (tốc độ ban đầu proton) sao cho nó chuyển động theo một đường thẳng song song với dây dẫn.

Lời giải.

a) Theo định luật Gauss

$$\oint \overrightarrow{E}\mathrm{d}\overrightarrow{A} = \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \Rightarrow \overrightarrow{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\overrightarrow{e_r}. \tag{1}$$

b) Theo định luật Ampere

$$\oint \overrightarrow{B}\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \mu_0 I \Rightarrow \overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\overrightarrow{e_\theta}. \tag{2}$$

c) Áp dụng định luật II Newton cho proton

$$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$$

$$\Rightarrow e\overrightarrow{E} + e\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B} = m\overrightarrow{a}$$

$$\Rightarrow eE\overrightarrow{e_r} + e\left(r'\overrightarrow{e_r} + r\theta'\overrightarrow{e_\theta} + z'\overrightarrow{e_z}\right) \times B\overrightarrow{e_\theta} = m\left[\left(r'' - r\theta'^2\right)\overrightarrow{e_r} + \left(2r'\theta' + r\theta''\right)\overrightarrow{e_\theta} + z''\overrightarrow{e_z}\right]. \tag{3}$$

Thay (1), (2) vào (3) ta được

$$\frac{e\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\overrightarrow{e_r} + \frac{\mu_0 I e}{2\pi r}\left(r'\overrightarrow{e_z} + z'\left(-\overrightarrow{e_r}\right)\right) = m\left[\left(r'' - r\theta'^2\right)\overrightarrow{e_r} + \left(2r'\theta' + r\theta''\right)\overrightarrow{e_\theta} + z''\overrightarrow{e_z}\right]. \tag{4}$$

d) Theo giả thiết $v_r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = \text{const} = r_0 \\ r'' = 0 \end{cases}.$

Thay vào phương trình (4) và chiếu lên các phương, ta được

$$\begin{cases} \dfrac{e}{m2\pi r_0}\left(\dfrac{\lambda}{\varepsilon_0} - \mu_0 I z'\right) = r'' - r_0\theta'^2 \\ 0 = r\theta'' \\ 0 = z'' \end{cases}$$

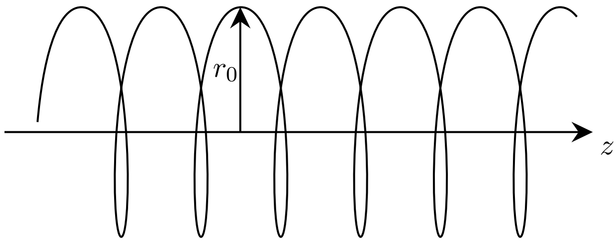
$$\Rightarrow \begin{cases} r'' = r_0\theta'^2 + \dfrac{e}{m2\pi r_0}\left(\dfrac{\lambda}{\varepsilon_0} - \mu_0 I z'\right) = 0 \\ \theta' = \text{const} = \theta_0' \\ \Rightarrow z' = \text{const} = v_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \theta_0' = \sqrt{\frac{e}{m2\pi r_0^2}\left(\mu_0 I v_0 - \frac{\lambda}{\varepsilon_0}\right)}$$

Các tọa độ chuyển động của proton là

$$\begin{cases} r = r_0 \\ \theta = \theta_0' t = \sqrt{\dfrac{e}{m2\pi r_0^2}\left(\mu_0 I v_0 - \dfrac{\lambda}{\varepsilon_0}\right)}\, t\,. \\ z = v_0 t \end{cases}$$

Vậy proton chuyển động xoắn ốc dọc theo trục z.



e) Để proton chuyển động thẳng dọc theo dây dẫn thì $\begin{cases} r' = 0 \\ \theta' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r'' = 0 \\ \theta'' = 0 \end{cases}$.

Thay vào phương trình (4), ta suy ra

$$\frac{e\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{e\mu_0 I}{2\pi r} v_0.$$

$$\Rightarrow v_0 = \frac{\lambda}{\varepsilon_0\mu_0 I} = \frac{c^2\lambda}{I}.$$

Chú ý. Một số bạn tính đến các hiệu ứng tương đối tính trong khi tính toán điện trường và từ trường tác dụng lên các proton. Trong trường hợp này, câu trả lời chính xác có thể thu được bằng cách sử dụng phương trình

$$\begin{cases} \vec{E'} = \gamma\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \\ \vec{B'} = \gamma\left(\vec{B} - \dfrac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2}\right) \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} \lambda' = \gamma\left(\lambda - \dfrac{vI}{c^2}\right) \\ \vec{I'} = \gamma(\vec{I} - \vec{v}\lambda) \end{cases}.$$

Khi đó $(\rho c, \vec{J})$ là vector 4 chiều. Các câu trả lời trở thành

$$\begin{cases} E' = \dfrac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0 r}\left(\lambda - \dfrac{vI}{c^2}\right) \\ B' = \dfrac{\mu_0\gamma}{2\pi r}(I - v\lambda) \end{cases}.$$

▽

Câu 5 Một hành tinh có bán kính tính từ tâm đến bề mặt là R. Hành tinh được bao bọc bởi một lớp khí quyển có chiết suất n thay đổi theo độ cao h được tính từ bề mặt hành tinh $n = n_0 - bh$, trong đó b là một hệ số tỉ lệ và $b \ll \frac{n_0}{h}$. Một nhà thám hiểm chiếu một chùm laser song song hẹp có cường độ lớn theo phương ngang từ một đỉnh núi cao nhất hành tinh này. Ông ta vô cùng ngạc nhiên khi thấy tia laser đi một vòng quanh hành tinh và trở về đúng nơi phát. Hãy tìm độ cao tối đa của ngọn núi đó.

Lời giải.
Quang trình của tia sáng khi đi một vòng hành tinh ở độ cao h là

$$L = 2\pi(R+h)\cdot n = 2\pi(R+h)(n_0 - bh) = 2\pi(Rn_0 - Rbh + hn_0 - bh^2.$$

Để đường truyền tia sáng là một đường tròn quanh hành tinh, theo nguyên lí Fermat, thì quang trình tia sáng phải đạt cực trị. Do đó

$$\frac{d}{dh}(Rn_0 - Rbh + hn_0 - bh^2) = 0$$

$$\Rightarrow (n_0 - Rb) - 2bh = 0$$

$$\Rightarrow h = \frac{n_0 - Rb}{2b}.$$

Đây là chiều cao của ngọn núi cần tìm.
Trong trường hợp b không đủ nhỏ và h tìm được là âm, tia sáng sẽ đi dọc theo bề mặt hành tinh tại $h = 0$. ▽