Chuyển động trong trường hấp dẫn

Tạp chí và tư liệu vật lý

Ngày 27 tháng 7 năm 2021

Trong bài này ta xét chuyển động của hai vật dưới lực tương tác của chính hai vật đó. Bài toán này có vai trò quan trọng về lý thuyết. Ta sẽ nghiên cứu các quy luật chuyển động của hai vật, tìm phương trình chuyển động của hai vật, nghiên cứu tác dụng của trường xuyên tâm mà cụ thể là lực hấp dẫn.

Xét bài toán gồm hai vật khối lượng M và m, M đứng yên, vật m chuyển động xung quanh M. Xét trong hệ tọa độ cực và chọn M làm cực O.

1 Lực hấp dẫn

M tác dụng lên m một lực hút $\overrightarrow{F_{hd}}$

$$\overrightarrow{F_{hd}} = -\frac{GMm}{r^2}\overrightarrow{e_r}.$$

2 Momen động lượng $\vec{L}$

$$\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r} \times m\overrightarrow{v} = mr\overrightarrow{e_r} \times (r'\overrightarrow{e_r} + r\varphi'\overrightarrow{e_\varphi}) = mr^2\varphi'\overrightarrow{e_z}.$$

Momen lực tác dụng lên m:

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F_{hd}} = -\frac{GMm}{r^2}(\overrightarrow{e_r} \times \overrightarrow{r}) = \overrightarrow{0}.$$

Do đó, áp dụng định lý momen động lượng $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{M} = \overrightarrow{0}$ suy ra momen động lượng được bảo toàn

$$\overrightarrow{L} = mr^2\varphi'\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{\mathrm{const}}.$$

3 Thế năng hấp dẫn

Thế năng lực hấp dẫn được tính bởi:

$$dU = -\overrightarrow{F_{hd}}\mathrm{d}\overrightarrow{r} = \frac{GMm}{r^2}\overrightarrow{e_r}\mathrm{d}\overrightarrow{r} = \frac{GMm}{r^2}\left|\overrightarrow{e_r}\right|\left|\mathrm{d}\overrightarrow{r}\right|\cos\alpha = \frac{GMm}{r^2}\mathrm{d}r.$$

$$\Rightarrow U_r = \int_{U_\infty}^{U_r} dU = \int_\infty^r \frac{GMm}{r^2}\mathrm{d}r = -\frac{GMm}{r}.$$

4 Động năng K

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(r'^2 + \left(r\varphi'^2\right)\right) = \frac{mr'^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2}.$$

5 Cơ năng

$$E = K + U = \frac{mr'^2}{2} + \left(\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}\right).$$

Đặt $U_{hd} = \dfrac{L^2}{2mr^2} - \dfrac{GMm}{r}$ là thế năng hiệu dụng. Trong hệ quy chiếu quay cùng với vật, ta không thấy được động năng quay $\dfrac{L^2}{2mr^2}$ mà thay vào đó là thế năng quán tính. Do đó, ta có thể viết:

$$E = K + U_{hd}.$$

6 Vector bất biến Runge - Lenz

Phương trình định luật II Newton cho hạt là:

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F_{hd}} \Rightarrow m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{GMm}{r^2}\overrightarrow{e_r}.$$

Nhân hữu hướng hai vế với vector bất biến $\overrightarrow{L} = L\overrightarrow{e_z} = mr^2\varphi'\overrightarrow{e_z}$, ta được:

$$m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} \times \overrightarrow{L} = -\frac{GMm}{r^2}mr^2\varphi'\left(\overrightarrow{e_r} \times \overrightarrow{e_z}\right).$$

Do $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}}{\mathrm{d}t} = 0$ nên

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} \times \overrightarrow{L} + \overrightarrow{v} \times \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}}{\mathrm{d}t} = GMm\varphi'\overrightarrow{e_\varphi} = GMm\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t}.$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{L}\right)}{\mathrm{d}t} = GMm\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{GMm}\frac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{L}\right)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{0}.$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\dfrac{1}{GMm}\left(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{L}\right) - \overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{A}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{0},$$

với $\overrightarrow{A} = \dfrac{1}{GMm}\left(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{L}\right) - \overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{\mathrm{const}}$ gọi là vector bất biến Runge - Lenz, luôn không đổi trong quá trình vật chuyển động, được xác định từ các điều kiện ban đầu.
Vậy khi hạt chuyển động trong trường xuyên tâm luôn có 2 vector bất biến: vector momen động lượng $\overrightarrow{L}$ và vector Runge - Lenz $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{A} \perp \overrightarrow{L}$.

Đặt $k = GMm$, ta phân tích các thành phần của $\overrightarrow{A}$ như sau:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A} &= \frac{1}{k}\left(r'\overrightarrow{e_r} + r\varphi'\overrightarrow{e_\varphi}\right) \times L\overrightarrow{e_z} - \overrightarrow{e_r} \\ &= -\frac{r'L}{k}\overrightarrow{e_\varphi} + \left(\frac{r\varphi' L}{k} - 1\right)\overrightarrow{e_r}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow A^2 &= \left(\frac{r'L}{k}\right)^2 + \left(\frac{r\varphi' L}{k} - 1\right)^2 \\ &= \frac{L^2}{k^2}\left(r'^2 + r^2\varphi'^2\right) - \frac{2L^2}{kmr} + 1 \\ &= \frac{L^2}{k^2}v^2 - \frac{2L^2}{kmr} + 1 \\ &= \frac{2L^2}{mk^2}\left(\frac{mv^2}{2} - \frac{k}{r}\right) + 1 \\ &= \frac{2L^2}{mk^2}E + 1\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{2L^2}{mk^2}E + 1}$$

7 Phương trình quỹ đạo của vật trong trường hấp dẫn

Nhân vô hướng $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{r}$, ta thu được

$$Ar\cos\varphi = \left(\frac{L^2}{mrk} - 1\right) r$$

$$\Rightarrow r = \frac{\frac{L^2}{mk}}{A\cos\varphi + 1}$$

Vậy quỹ đạo của hạt là một đường Conic:

$$r = \frac{\rho}{e\cos\varphi + 1} \qquad \text{(Công thức Binet)}$$

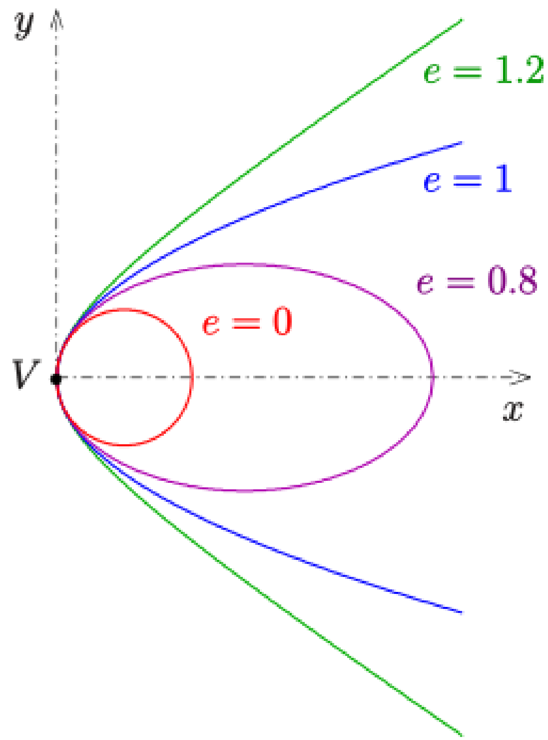
Với

$$\begin{cases} \rho = \dfrac{L^2}{mk} & \text{: Thông số quỹ đạo} \\ e = A = \sqrt{\dfrac{2L^2}{mk^2}E + 1} & \text{: Tâm sai quỹ đạo} \end{cases}.$$

8 Tâm sai và quỹ đạo chuyển động

Cơ năng của hệ chuyển động trong trường xuyên tâm: $E = K + U$ bao gồm thành phần động năng $K = \dfrac{mv^2}{2}$ đặt trưng cho quán tính văng (đẩy) ra xa tâm, và thành phần thế năng $U = -\dfrac{GMm}{r}$

đặt trưng cho sức hút vào tâm.



- $e > 1 \Leftrightarrow E > 0$: sức hút nhỏ hơn sức đẩy, nên hành tinh không bị bắt giữ, nên chuyển động hẳn ra xa theo quỹ đạo hyperbol.

- $e = 1 \Leftrightarrow E = 0$: sức hút bằng sức đẩy, nên hành tinh không bị bắt giữ, có thể chuyển động ra xa theo quỹ đạo parabol.

- $0 < e < 1 \Leftrightarrow \dfrac{-mk^2}{2L^2} < E < 0$: sức hút lớn hơn sức đẩy, nên hành tinh bị bắt giữ chuyển động không ra xa được, do vậy quỹ đạo elipse.

- $e = 0 \Leftrightarrow E = \dfrac{-mk^2}{2L^2}$: sức hút lớn hơn sức đẩy, nên hành tinh bị bắt giữ, không thể chuyển động ra xa, do vậy quỹ đạo tròn.

Chiều của $\overrightarrow{A}$ được xác định như sau:

Vì khi m đi qua cận điểm C, $r = r_{\min}$, $\begin{cases} \varphi = 0 \\ r' = 0 \end{cases}$ nên

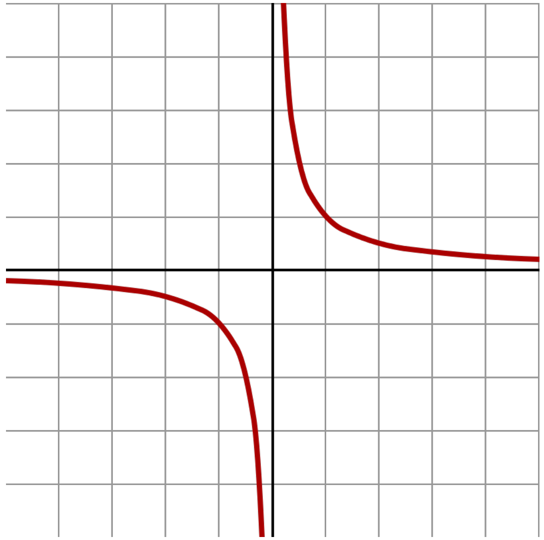
$$\overrightarrow{A} = \left(\frac{r\varphi' L}{k} - 1\right)\overrightarrow{e_z} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{A} = \left(\dfrac{L^2}{mkr_{\min}} - 1\right)\dfrac{\overrightarrow{GP}}{GP} = A\dfrac{\overrightarrow{GP}}{GP} \\ r_{\min} = \dfrac{\dfrac{L^2}{mk}}{A+1} \end{cases}$$

9 Các quỹ đạo chuyển động

9.1 Quỹ đạo Hyperbol

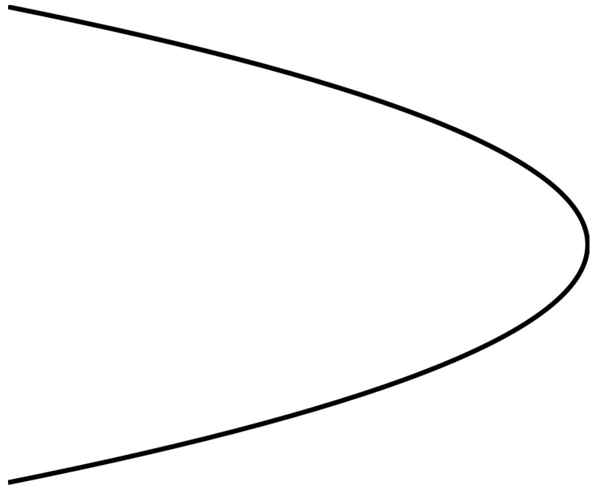
Khi $e > 1$ tức năng lượng $E > 0$ thì quỹ đạo của hạt là một nhánh hyperbol bao lấy tâm lực G. Hyperbol (bắt nguồn từ tiếng Hy Lạp, nghĩa đen là "vượt quá" hay "thái quá") là đường không khép kín, có hai tiêu điểm và hai đường tiệm cận. Phương trình của hyperbol trong hệ tọa độ Descartes:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$



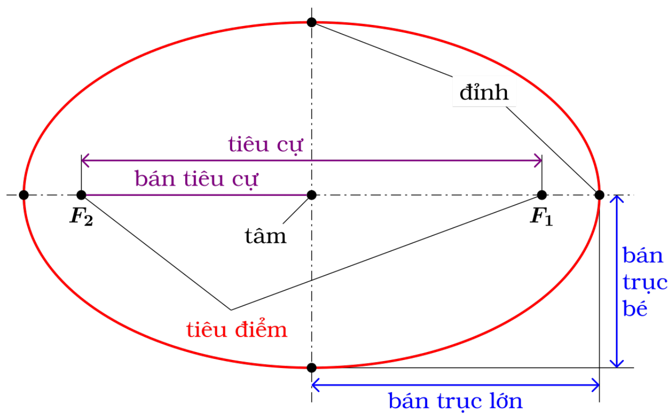
9.2 Quỹ đạo parabol

Khi $e = 1$, năng lượng $E = 0$, quỹ đạo chuyển động là một nhánh parabol, là một đường cong không khép kín. Quỹ đạo của vật mang hình dạng parabol là một trường hợp đặc biệt và rất hiếm gặp trong tự nhiên. Quỹ đạo mang hình dạng hyperbol hay elipse thì phổ biến hơn. Trong thực tế, quỹ đạo hình parabol là dạng chuyển tiếp giữa hai dạng quỹ đạo này. Vật thể di chuyển theo quỹ đạo parabol sẽ chuyển động tại đúng tốc độ tới hạn để thoát khỏi vật thể mà nó đang quay quanh, tốc độ tới hạn của parabol thì nhanh hơn so với hình elipse và chậm hơn so với hyperbol.



9.3 Quỹ đạo elipse

Khi $0 < e < 1$, năng lượng $E < 0$ thì quỹ đạo của hạt là một elipse. Elipse là một đường cong khép kín. Quỹ đạo của mỗi hành tinh trong hệ Mặt Trời gần giống một hình elipse với Mặt Trời là một tiêu điểm (chính xác, tiêu điểm là tâm tỉ cự của cặp Mặt Trời – hành tinh). Quỹ đạo của mặt trăng xoay quanh hành tinh và tất cả cả hệ hai thiên thể khác đều như thế. Hình dạng của các hành tinh và sao thường được mô tả bằng hình ellipsoid.



9.4 Quỹ đạo tròn

Khi $e = 0$, năng lượng $E = -\dfrac{mk^2}{2L^2} = -\dfrac{k}{r}$ thì quỹ đạo chuyển động là một đường tròn khép kín bán kính r.

! Trong trường hợp cả hai vật cùng chuyển động dưới tác dụng của cặp lực hấp dẫn trực đối. Từ kết quả của bài toán hai hạt, ta có thể đơn giản hóa chuyển động tương đối của hai vật khối lượng m và M như là chuyển độ của một hạt ảo khối lượng μ quanh khối tâm cố định G của hai vật với:

$$\mu = \frac{mM}{m+M}$$

Lúc này, ta có thể thay thế khối lượng m trong các phương trình trên bằng μ để suy ra đường trường hợp tổng quát khi cả hai vật cùng chuyển động.

Nhận xét. Ta có thể mở rộng bài toán cho trường hấp dẫn này thành một bài toán Kepler. Một chuyển động gọi là chuyển động Kepler khi nó được thực hiện dưới tác dụng lực xuyên tâm có cường độ lực biến thiên tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách $\left|\overrightarrow{F}\right| \sim \frac{1}{r^2}$, với tâm lực cố định.
Bài toán Kepler có một ý nghĩa rất lớn về mặt lý thuyết, bởi nó liên quan đến một loạt các bài toán vật lý từ vi mô đến vĩ mô, tương tác hạt tới - hạt bia, tương tác hành tinh - vệ tinh, chuyển động của các sao đôi... Ngoài ra, ta còn hay sử dụng sự tương tự điện - cơ, quang - cơ để giải các bài toán phức tạp mà lực có dạng của bài toán Kepler.