Chủ đề 1: Nguyên lí Fermat

I. Kiến thức cơ bản

1. Quang trình

-Ánh sáng truyền từ A đến B qua nhiều môi trường 1,2,3,...Chiết suất của các môi trường ấy lần lượt là $n_1, n_2, n_3, ...$ và độ dài quang học của các quãng đường đi tương ứng là $s_1, s_2, s_3, ...$ thì quang trình của ánh sáng là:

$$L = n_1 s_1 + n_2 s_2 + n_3 s_3 + ... = \sum n_i s_i$$

-Nếu ánh sáng truyền từ A đến B trong môi trường có chiết suất thay đổi liên tục từ điểm này đến điểm khác thì ta chia quãng đường truyền thành các đoạn vô cùng nhỏ ds sao cho chiết suất của môi trường trong mỗi đoạn được coi là không đổi và quang trình lúc đó là: $L = \int_A^B n ds$

2. Nguyên lí Fermat

Quang trình của đường truyền một tia sáng từ một điểm A đến một điểm B, sau một số lần phản xạ và khúc xạ liên tiếp bất kì, có giá trị cực tiểu, cực đại hoặc dừng, so với quang trình của các tia sáng vô cùng gần tia AB

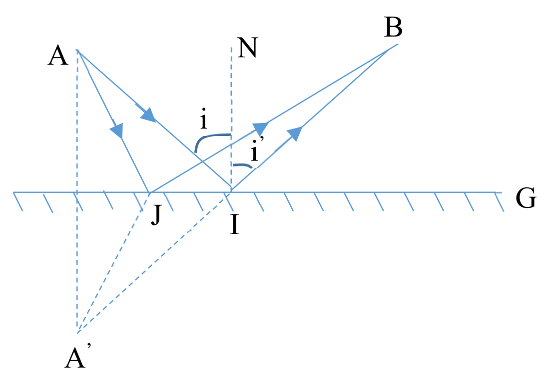
II. Bài tập áp dụng.

Bài 1: Sử dụng nguyên lí Fermat nghiệm lại

a. định luật phản xạ ánh sáng

b. định luật khúc xạ ánh sáng

Giải:



a. Xét một tia sáng xuất phát từ điểm A đến phản xạ trên một gương phẳng G, đặt trong không khí rồi truyền qua điểm B.

Trước hết theo nguyên lí Fermat thì tia sáng này phải nằm trong mặt phẳng (P) chứa A,B và vuông góc với mặt phẳng gương. Mặt phẳng (P) gọi là mặt phẳng tới

Xét tia sáng AJB như hình vẽ.

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua gương suy ra: AJ = A'J

Do đó quang trình của tia sáng AJB là: (AJB) = AJ + JB = A'J + JB

Trong $\Delta A'JB$ có: A'J + JB ≥ A'B

Suy ra: (AJB) ≥A'B

Theo nguyên lí Fermat, tia sáng truyền từ A phản xạ trên gương rồi qua B có quang trình ngắn nhất, nên quan trình của tia sáng từ A đến phản xạ trên gương rồi qua B có quang trình bằng A'B

Gọi I là giao điểm của A'B với gương G. Dễ thấy (AIB) = AI + IB = A'B

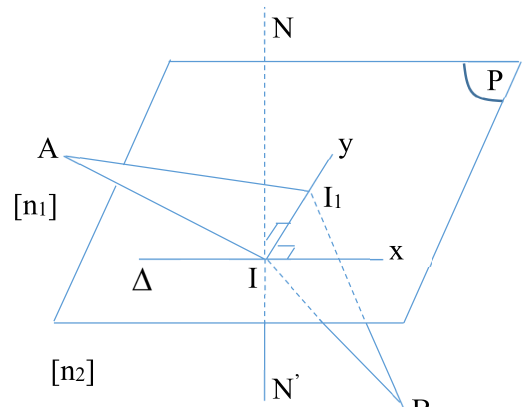
Vậy tia sáng thực sự xuât phát từ A, phản xạ trên gương rồi qua B là tia sáng AIB

Kẻ tia IN $\in$ (P) và vuông góc với mặt gương. Tia IN gọi là tia pháp tuyến

Góc $\hat{AIN} = i$ gọi là góc tới, góc $\hat{BIN} = i'$ gọi là góc phản xạ

Dễ thấy: $i = i'$

b.



Hình 1

+ A nằm trong môi trường 1, B nằm trong môi trường 2, AIB là đường truyền thực sự của tia sáng. Mặt phẳng tới, chứa hai tia AI, IB và pháp tuyến N'IN cắt mặt phẳng P theo một đường Δ (hình 1)

Xét một điểm I_1 trong P, ở ngoài đường Δ , tứ là không nằm trong mặt phẳng tới. Gọi I là hình chiếu của I_1 trên Δ . Ta thấy rằng hai đoạn thẳng AI và IB luôn nhỏ hơn hai đoạn thẳng AI_1 và I_1B, không nằm trong mặt phẳng tới. Do đó, để quang trình của tia sáng AB cực tiểu, thì tia tới và tia khúc xạ đều phải nằm trong mặt phẳng tới.

+ A', B' lần lượt là hình chiếu của A và B trên Δ (hình 2). Gọi a = A'B' là khoảng cách giữa A'và B' , đặt h_1 = AA', h_2 = BB'

Giả sử I là điểm tới của tia sáng, I được xác định bởi khoảng cách x = AI

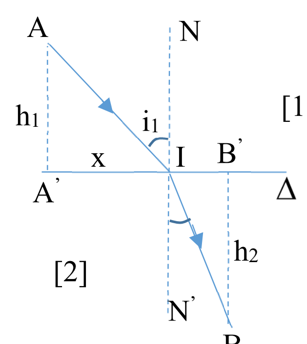
Hai quang trình (AI) và (IB) lần lượt là:

$$(AI) = n_1.AI = n_1\sqrt{h_1^2 + x^2}$$

$$(IB) = n_2.IB = n_2.\sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}$$

Và quang trình của tia sáng AB là:

$$\delta = (AB) = n_1AI + n_2IB = n_1\sqrt{h_1^2 + x^2} + n_2\sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}$$



Hình 2

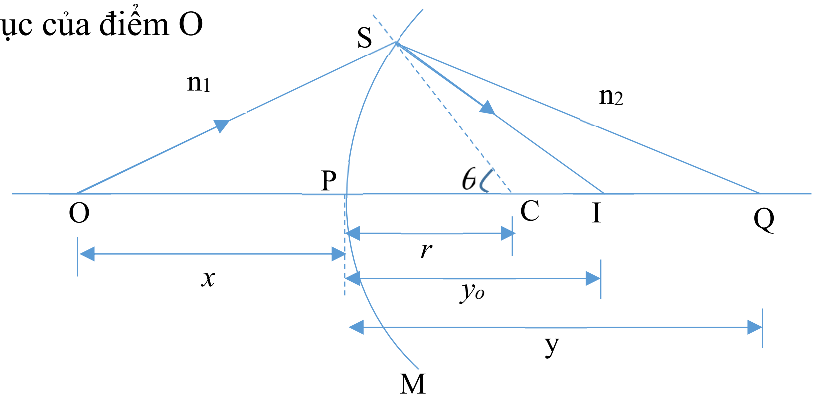
Đạo hàm của δ theo x:

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{2n_1 x}{2\sqrt{h_2^2 + x^2}} + \frac{-2n_2(a-x)}{2\sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}} = n_1 \sin i_1 - n_2 \sin i_2$$

Theo nguyên lí Fermat thì $\frac{d\delta}{dx} = 0$ hay $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$

Bài 2: Xét mặt cầu khúc xạ SPM ngăn cách hai môi trường có chiết suất n_1, n_2. Điểm C là tâm mặt cầu SPM.

Xét hai điểm O và Q sao cho các điểm O,C và Q thẳng hàng. Tính quang trình OSQ theo các khoảng cách x, y, r và góc θ (xem hình vẽ). Sử dụng nguyên lí Fermat để tìm tia sáng nối hai điểm O và Q. Ngoài ra, giả thiết θ rất nhỏ, xác định ảnh gần trục của điểm O



Giải:

Quang trình tia sáng OSQ là:

$$\delta = n_1\text{OS} + n_2.SQ = n_1\sqrt{(r\sin\theta)^2 + [x + r(1-\cos\theta)]^2} + n_2\sqrt{(r\sin\theta)^2 + [y - r(1-\cos\theta)]^2}$$

Theo nguyên lí Fermat ta có: $\frac{d\delta}{d\theta} = 0$

Hay:

$$\frac{d\delta}{d\theta} = \frac{n_1(x+r)r\sin\theta}{\sqrt{(r\sin\theta)^2 + [x + r(1-\cos\theta)]^2}} + \frac{n_2(r-y)r\sin\theta}{\sqrt{(r\sin\theta)^2 + [y - r(1-\cos\theta)]^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{n_1(x+r)}{\sqrt{(r\sin\theta)^2 + [x + r(1-\cos\theta)]^2}} + \frac{n_2(r-y)}{\sqrt{(r\sin\theta)^2 + [y - r(1-\cos\theta)]^2}} = 0 \qquad (1)$$

Với θ nhỏ thì $\sin\theta \approx \theta; 1-\cos\theta \approx \frac{\theta^2}{2}$. Khi đó (1) trở thành

$$\frac{n_1(x+r)}{\sqrt{(x+r)r\theta^2+x^2}}+\frac{n_2(r-y)}{\sqrt{(r-y)r\theta^2+y^2}} \qquad (2)$$

Vì θ nhỏ nên trong biểu thức (1) số hạng nào có chứa θ ta bỏ đi, lúc đó (2) được viết lại là:

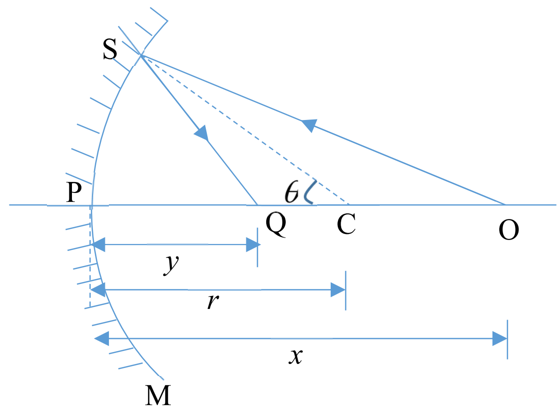
$$\frac{n_1(x+r)}{x}+\frac{n_2(r-y)}{y}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{n_1}{x}+\frac{n_2}{y}=\frac{n_2-n_1}{r} \qquad (*)$$

Phương trình (*) là phương trình xác định sự tạo ảnh bởi lưỡng chất cầu thỏa mãn điều kiện tương điểm.

Bài 3:

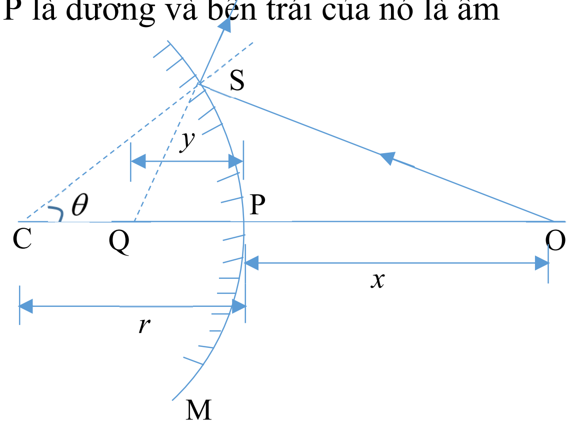
1. Xét nguồn điểm O ở trước một gương lõm có tâm tại C. Xét một điểm Q bất kì nằm trên trục của hệ, và sử dụng phương pháp tương tự như đã sử dụng ở bài 3. Tìm quang trình L_{op}=OS+SQ theo x, y, r, θ được định nghĩa như trên hình vẽ; θ được giả thiết là nhỏ. Xác định ảnh của điểm gần trục, và chứng tỏ rằng kết quả này phù hợp với phương trình gương cầu:



$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{r} \qquad (*)$$

Trong đó u, v là các khoảng cách vật và ảnh, còn R là bán kính cong với quy ước dấu tất cả các khoảng cách ở bên phải của P là dương và bên trái của nó là âm

2. Nguyên lí Fermat cũng có thể được sử dụng để xác định ảnh của điểm sát trục khi vật tạo ảnh ảo. Xét nguồn điểm O ở trước một gương lồi SPM. Ta cần chứng minh quang trình L_{op} bây giờ là $OS-SQ$; dấu trừ ở đây là bởi vì tia sáng tại S đi ra xa Q(hình vẽ). Tìm L_{op} theo x, y, r, và góc θ được định nghĩa trên hình vẽ. Chứng tỏ rằng ảnh của điểm sát trục được tạo ra tại $y = y_o$ được cho bởi:



$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y_o}=-\frac{2}{r}$$

Hoàn toàn phù hợp với (*) bởi vì khoảng cách vật *u* dương, khoảng cách ảnh *v* âm và bán kính cong R âm do ảnh và tâm mặt cong nằm bên trái P

Giải:

1. Xét trong ΔOSC ta có:

$$\text{OS}=\sqrt{r^2+(x-r)^2+2r(x-r)\cos\theta}=\sqrt{x^2+2r(r-x)(1-\cos\theta)}$$

Xét trong tam giác CSQ ta có:

$$\text{SQ}=\sqrt{r^2+(r-y)^2-2r(r-y)\cos\theta}=\sqrt{y^2+2r(r-y)(1-\cos\theta)}$$

Quang trình:

$$L_{op}=OS+SQ=\sqrt{x^2+2r(r-x)(1-\cos\theta)}+\sqrt{y^2+2r(r-y)(1-\cos\theta)}$$

Theo nguyên lí Fermat ta có: $\frac{dL_{op}}{d\theta}=0$

$$\frac{dL_{op}}{d\theta}=\frac{r(r-x)\sin\theta}{\sqrt{x^2+2r(r-x)(1-\cos\theta)}}+\frac{r(r-y)\sin\theta}{\sqrt{y^2+2r(r-y)(1-\cos\theta)}}=0 \qquad (1)$$

Vì θ rất nhỏ nên $1-\cos\theta\approx 0$ khi đó (1) trở thành:

$$\frac{r-x}{x}+\frac{r-y}{y}=0$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{r}$$

2. Áp dụng hàm số cosin trong tam giác OCS ta có:

$$\text{OS}=\sqrt{r^2+(x+r)^2-2r(x+r)\cos\theta}=\sqrt{x^2+2r(r+x)(1-\cos\theta)}$$

Áp dụng hàm số cosin trong tam giác CQS ta có:

$$\text{QS}=\sqrt{r^2+(r-y)^2-2r(r-y)\cos\theta}=\sqrt{y^2+2r(r-y)(1-\cos\theta)}$$

Quang trình:

$$L_{op}=\text{OS}-\text{QS}=\sqrt{x^2+2r(r+x)(1-\cos\theta)}-\sqrt{y^2+2r(r-y)(1-\cos\theta)}$$

Theo nguyên lí Fermat ta có: $\frac{dL_{op}}{d\theta}=0$

$$\frac{dL_{op}}{d\theta}=\frac{r(r+x)\sin\theta}{\sqrt{x^2+2r(r+x)(1-\cos\theta)}}-\frac{r(r-y)\sin\theta}{\sqrt{y^2+2r(r-y)(1-\cos\theta)}}=0 \qquad (2)$$

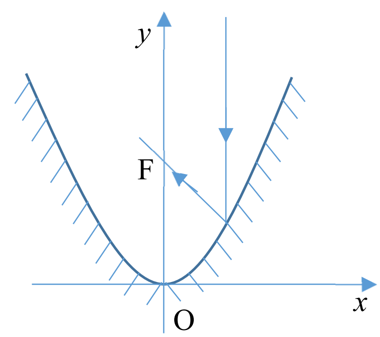
Vì θ rất nhỏ nên $1-\cos\theta\approx 0$ khi đó (2) trở thành:

$$\frac{r+x}{x}-\frac{r-y}{y}=0$$

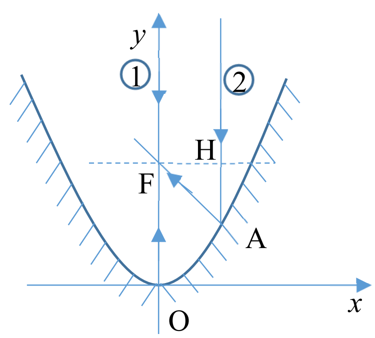
Thay $y = y_o$, phương trình trên trở thành:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y_o}=-\frac{2}{r}$$

Bài 4: Một gương parobol(xem hình vẽ) được tạo ra bằng cách cho parabol $y=\beta x^2$ quay xung quanh trục Oy của nó (β là hằng số cho trước). Dùng nguyên lí Fermat chứng minh rằng mọi tia sáng chiếu tới gương theo phương song song với trục Oy đều hội tụ tại điểm tại một điểm F trên trục Oy. Điểm này gọi là tiêu điểm của gương. Tìm vị trí điểm F?



Giải:



Xét hai tia sáng:

+ Tia 1 trùng với tia Oy chiếu tới gương và bị phản xạ lại theo phương cũ

+ Tia 2 song song với trục Oy tới gặp gương, phản xạ tại điểm A($x,\beta x^2$) rồi cắt trục Oy tại điểm F($0,f$)

Hai tia sáng này có thể coi cùng xuất phát tại một điểm ở xa vô cùng và gặp nhau tại F

Theo nguyên lí Fermat quang trình của hai tia sáng này bằng nhau,tức là:

$$HA+FA=FO+FO=2.FO \qquad (1)$$

Ta có: $HA=f-\beta x^2$; $FA=\sqrt{x^2+(f-\beta x^2)^2}$; $FO=f$

Thay vào phương trình (1) ta được :

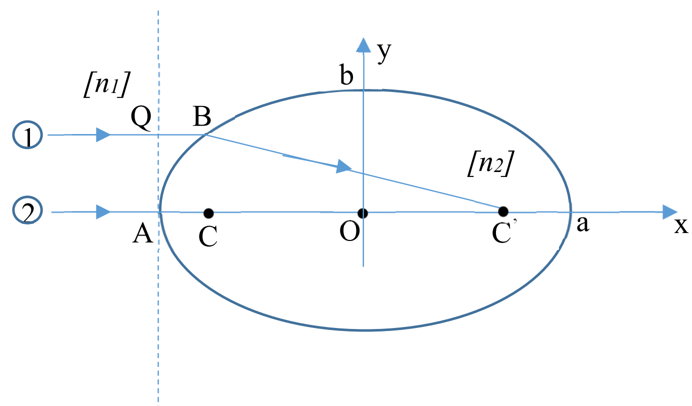
$$f-\beta x^2+\sqrt{x^2+(f-\beta x^2)^2}=2f$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(f-\beta x^2)^2}=(f+\beta x^2)^2 \quad (2)$$

Bình phương 2 vế phương trình (2) rồi rút gọn x^2 ta được:

$$f=\frac{1}{4\beta}$$

Bài 5: Nếu ta xoay một hình ellipse có bán trục lớn a, bán trục nhỏ b, quanh trục chính của nó, ta thu được hình ellipsoid tròn xoay. Sử dụng nguyên lí Fermat chứng tỏ rằng mọi tia sáng song song với trục chính của ellipse sẽ hội tụ tại một trong hai tiêu điểm(C và C') của ellipse, nếu biết tâm sai của ellipse bằng $\frac{n_1}{n_2}$



Giải:

Xét hai tia sáng 1 và 2 song song với nhau coi như xuất phát tại một điểm ở vô cùng, hai tia này gặp nhau tại điểm C'

Gọi B(x,y);Q($-a,y$);A($-a,0$);C'($c,0$)

Ta cần chứng minh: $\frac{c}{a}=\frac{n_1}{n_2}$ .Thật vậy:

$$\Rightarrow \begin{cases} QB=x+a \\ BC'=\sqrt{(c-x)^2+y^2} \\ AC'=a+c \end{cases} \quad (1)$$

Theo nguyên lí Fermat, quang trình của hai tia sáng này bằng nhau, tức là:

$$n_1QB+n_2BC'=n_2AC' \quad (2)$$

Thay (1) vào phương trình (2) ta được:

$$n_1(x+a)+n_2\sqrt{(x-c)^2+y^2}=n_2(a+c)$$

$$\Rightarrow n_2^2\left[(x-c)^2+y^2\right]=n_2^2(a+c)^2+n_1^2(x+a)^2-2n_1n_2(x+a)(a+c) \qquad (3)$$

Mà:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ e=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{n_1}{n_2} \end{cases} \Rightarrow y^2=(a^2-x^2)\left(1-\frac{n_1^2}{n_2^2}\right) \qquad (4)$$

Thay (4) vào (3) rồi rút gọn ta được:

$$n_2^2c(a+x)+n_1^2a(a+x)-n_1n_2(a+x)(a+c)=0$$

$$\Leftrightarrow n_2^2c+n_1^2a-n_1n_2(a+c)=0$$

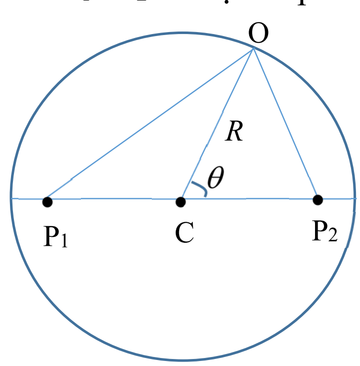
$$\Leftrightarrow cn_2(n_2-n_1)=an_1(n_2-n_1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{a}=\frac{n_1}{n_2}$$

Bài 6: Điểm C là tâm của mặt cầu phản xạ bán kính R. Các điểm P_1 và P_2 là hai điểm nằm trên đường kính và cách đều tâm.

a. Tìm quang trình P_1O+OP_2 như một hàm của θ

b. Tìm giá trị của θ sao cho P_1OP_2 là một tia phản xạ trên mặt cầu



Giải:

a. Đặt $P_1C=CP_2=x$.

Áp dụng hàm số cosin trong tam giác P_1OC và tam giác OP_2C ta được:

$$P_1O = \sqrt{x^2 + R^2 + 2Rx\cos\theta}\ \ ; OP_2 = \sqrt{x^2 + R^2 - 2Rx\cos\theta}$$

Quang trình:

$$\delta = P_1O + OP_2 = \sqrt{x^2 + R^2 + 2Rx\cos\theta} + \sqrt{x^2 + R^2 - 2Rx\cos\theta}$$

b. Để P_1OP_2 là tia phản xạ trên mặt cầu thì theo nguyên lí Fermat quang trình δ là cực tiểu tức là:

$$\frac{d\delta}{d\theta} = -\frac{Rx\sin\theta}{P_1O} + \frac{Rx\sin\theta}{OP_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow P_1O = OP_2$$

Bài 7: Bằng việc sử dụng vật liệu thủy tinh có chiết suất thay đổi, người ta có thể chế tạo được các bản thủy tinh có bề dày không đổi nhưng tính năng tương tự thấu kính. Trong bài toán này, xét một đĩa mỏng có bán kính a, bề dày d không đổi(d<<a). Đĩa làm bằng vật liệu thủy tinh có chiết suất chỉ thay đổi dọc theo phương bán kính và có tính năng tương đương như một thấu kính hội tụ có tiêu cự f. Biết chiết suất tại tâm đĩa là n_o.

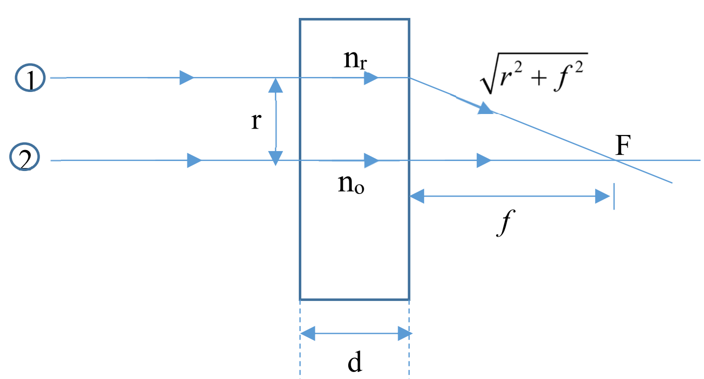
1. Áp dụng nguyên lí Fermat, hãy chứng minh rằng chiết suất của chất làm đĩa dọc theo phương bán kính có biểu thức $n(r) = n_o - \dfrac{\sqrt{r^2 + f^2} - f}{d}$

2. Xác định bán kính lớn nhất theo f,d và n_o

3. Cho đĩa chuyển động với vận tốc $\vec{V}$ không đổi. Chiếu vuông góc vào bề mặt đĩa một chùm photon theo chiều chuyển động của đĩa. Xác định tốc độ truyền photon trong đĩa tại thời điểm cách tâm đĩa một khoảng r. Biết tốc độ ánh sáng trong chân không là c.

(trích đề thi HSG QG năm 2017)

Giải:



1 2

1. Xét hai tia sáng và song song với nhau như hình vẽ. Hai tia sáng này coi như xuất phát từ một điểm ở xa vô cùng và gặp nhau tại điểm F.

Theo nguyên lí Fermat, quang trình của hai tia sáng này bằng nhau nên ta có:

$$n_r.d + \sqrt{r^2 + f^2} = n_o.d + f$$

$$\Leftrightarrow n_r = n_o - \frac{\sqrt{r^2 + f^2} - f}{d}$$

2. Từ điều kiện: $n_r \geq 1$ ta có:

$$n_o - \frac{\sqrt{r^2 + f^2} - f}{d} \geq 1$$

$$r \leq \sqrt{(n_o - 1)^2 d^2 + 2(n_o - 1) fd}$$

$$\Rightarrow r_{\max} = \sqrt{(n_o - 1)^2 d^2 + 2(n_o - 1) fd}$$

3. Vận tốc của photon trong đĩa so với hệ quy chiếu gắn với đĩa là:

$$u' = \frac{c}{n_r}$$

Theo công thức cộng vận tốc trong cơ học tương đối tính, ta có vận tốc của photon trong đĩa so với hệ quy chiếu PTN là:

$$u = \frac{u' + V}{1 + \frac{u'V}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n_r} + V}{1 + \frac{V}{n_r.c}}$$

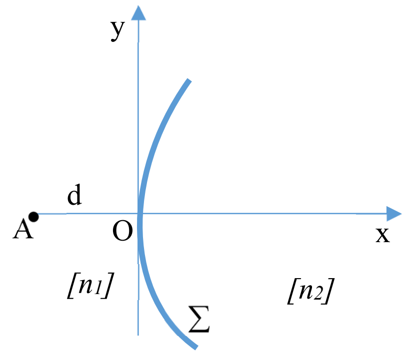
III. Bài tập luyện tập

Bài 8: Giải lại **bài 4** bằng cách sử dụng định luật phản xạ ánh sáng

Bài 9: Một thấu kính làm từ vật liệu có chiết suất $n > 1$, một mặt là mặt phẳng, mặt kia được tạo bằng cách quay đường parabol $y = kx^2$ quanh trục của nó. Kí hiệu R là bán kính của đường viền mặt thấu kính phẳng. Giả sử độ dày của thấu kính rất nhỏ so với bán kính R tức là $kR^2 << R$. Hãy tính tiêu cự của thâu kính

Đáp số: $f = \frac{1}{2k(n-1)}$

Bài 10: Một mặt đối xứng tròn xoay Σ ngăn cách hai môi trường trong suốt chiết suất n_1 và n_2 như hình vẽ Xác định Σ sao cho một chùm sáng hình nón, có đỉnh A ở trên trục đối xứng của Σ, cách Σ một đoạn d, trong môi trường 1, sau khi truyền qua mặt Σ sang môi trường 2, thì trở thành một chùm song song.

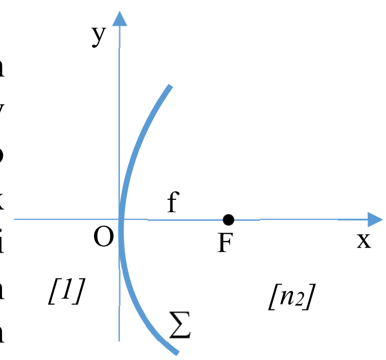


Xét hai trường hợp: $n_1 > n_2$ và $n_1 < n_2$

Đáp số: trường hợp $n_1 > n_2$: $\dfrac{\left(x+\dfrac{n_1 d}{n_1+n_2}\right)^2}{\left(\dfrac{n_1 d}{n_1+n_2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\dfrac{d^2(n_1-n_2)}{n_1+n_2}}=1$

trường hợp $n_1 < n_2$: $\dfrac{\left(x+\dfrac{n_1 d}{n_1+n_2}\right)^2}{\left(\dfrac{n_1 d}{n_1+n_2}\right)^2}-\dfrac{y^2}{\dfrac{d^2(n_2-n_1)}{n_1+n_2}}=1$

Bài 11: Một môi trường trong suốt, chiết suất n, ngăn cách với chân không bằng một mặt đối xứng tròn xoay Σ như hình vẽ. Xác định phương trình của mặt Σ sao cho một chùm tia sáng song song với trục đối xứng Ox của Σ, khi truyền từ chân không qua mặt Σ, vào môi trường thì hội tụ tại điểm F cách O một khoảng *f*. Bán kính cực đại của chùm tia có thể hội tụ bằng thấu kính Σ là bao nhiêu?



Nếu môi trường chứa chùm tia tới song song không phải chân không, mà có chiết suất N > n, thì mặt Σ phải thay đổi như thế nào?

Đáp số: $\dfrac{\left(x-\dfrac{nf}{n+1}\right)^2}{\left(\dfrac{nf}{n+1}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(f\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}\right)^2}=1$

Tài liệu tham khảo

1. Vũ Quang (2013). *Tài liệu chuyên vật lí 11*, *tập 2*, nhà xuất bản Giáo Dục Việt Nam, Hà Nội.

2. Ngô Quốc Quýnh (2010). *Bồi dưỡng học sinh giỏi Vật lí Trung học phổ thông* - *Quang học 1*, nhà xuất bản giáo dục Việt Nam, Hà Nội.

3. Vũ Thanh Khiết (2003). *Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi trung học phổ thông – tập 5: Quang học*, nhà xuất bản Giáo Dục.

4. Bùi Quang Hân - Trần Văn Bồi – Nguyễn Văn Minh – Phạm Ngọc Tiến (2003). *Giải toán Vật lí 11 – tập 2*, nhà xuất bản Giáo Dục.

5. Dương Trọng Bái – Cao Ngọc Viễn (2002). *Các bài thi quốc gia chọn học sinh giỏi THPT*, nhà xuất bản đại học quốc gia Hà Nội.

6. Vũ Thanh Khiết – Vũ Đình Túy (2011). *Các đề thi học sinh giỏi Vật Lí (2001-2010)*, nhà xuất bản giáo dục Việt Nam, Hà Nội.

7. Vũ Thanh Khiết – Phạm Khánh Hội (2015). Đề thi học sinh giỏi Vật Lí trung học phổ thông, nhà xuất bản giáo dục Việt Nam, Hà Nội.

8. P.F.I.E.V (2009). *Quang học 1*, nhà xuất bản giáo dục Việt Nam.

9. Nguyễn Ngọc Tuấn. *https://sites.google.com/site/tuanphysics/*

10. Nguyễn Văn Duy. *http://xpho.org/*