MỤC LỤC

LỜI MỞ ĐẦU

Bài tập vật lý có vai trò quan trọng trong nhận thức và phát triển tư duy của người học. Nó giúp cho người học đào sâu và mở rộng kiến thức đã học, vận dụng kỹ năng, kỹ xảo để giải từng loại bài tập. Vì vậy, đưa ra các dạng và phương pháp chung để giải các dạng đó là cần thiết.

Điện động lực học là một bộ môn thuộc vật lý lý thuyết nên có nội dung vật lý và phương pháp toán học. Điện động lực vĩ mô nghiên cứu và biểu diễn những quy luật tổng quát nhất của trường điện từ và tương quan của nó với nguồn gây ra trường.

Và sau khi đã học môn điện động lực học, tôi nhận thấy rằng đây là môn khó, phải biết được quy luật, bản chất vật lý và các phương pháp toán học (phương trình, hàm số, các toán tử,…) trong khi kiến thức về toán học còn hạn chế. Do đó, việc giải bài tập điện động lực học sẽ gặp khó khăn. Chính vì lí do đó nên tôi chọn tên đề tài:

“ P**hương pháp giải bài tập điện động lực học”.**

Bài luận tập trung vào hai chương chính đó là: Điện trường tĩnh và Từ trường dừng của Điện động lực học vĩ mô thuộc học phần Điện động lực học.

Trong bài luận này gồm hai phần:

Phần một: **“Lý thuyết” –** tóm tắt những nội dung lý thuyết cơ bản của hai chương trong phạm vi nghiên cứu và chương giải tích vectơ là công cụ khảo sát Trường điện từ và hỗ trợ cho việc giải tập**.** Bao gồm**:**

Chương 1: Giải tích vectơ.

Chương 2: Những định luật cơ bản của trường điện từ.

Chương 3: Điện trường tĩnh.

Chương 4: Từ trường dừng.

Phần hai: **“Bài tập và phương pháp giải”** – trình bày các phương pháp sử dụng để giải các bài tập điện động lực và các bài tập mẫu trong hai chương nghiên cứu**.** Bao gồm:

Chương 1: Điện trường tĩnh.

Chương 2: Từ trường dừng.

Với bài luận này sẽ cung cấp cho các bạn sinh viên các phương pháp giải bài tập điện động lực cũng như là tài liệu tham khảo phục vụ trong việc học tập.

PHẦN I: LÝ THUYẾT

CHƯƠNG 1: GIẢI TÍCH VECTƠ

1.1 Hệ tọa độ:

Các đại lượng điện từ trong trường hợp tổng quát là các hàm của vị trí và thời gian. Nếu là đại lượng vectơ, hướng của chúng có thể thay đổi trong không gian. Để xác định vị trí, hướng trong không gian ta dùng hệ tọa độ. Tùy từng bài toán mà chúng ta có thể sử dụng các hệ tọa độ khác nhau cho phù hợp để giải bài toán cho đơn giản và nhanh nhất.

1.1.1 Hệ tọa độ cong:

Trong không gian 3 chiều, xét 3 họ mặt cong độc lập:

$f_1(x,y,z) = u_1$; $f_2(x,y,z)= u_2$; $f_3(x,y,z)= u_3$

Ba mặt u_1= const, u_2= const, u_3= const cắt nhau tại điểm P. Do đó 3 thông số u_1, u_2,u_3 xác định một điểm: $P(u_1, u_2,u_3)$. Và u_1, u_2, u_3 được gọi là tọa độ cong.

Gọi dl_1, dl_2, dl_3 là những yếu tố dài trên các đường tọa độ u_1, u_2, u_3. Trong trường hợp tổng quát:

$dl_1=h_1du_1$ $\quad$ $dl_2 =h_2du_2$ $\quad$ $dl_3=h_3du_3$

Hệ số h_1, h_2, h_3 gọi là hệ số Larmor - là hàm của các tọa độ cong. Đối với hệ tọa độ trực giao, yếu tố dài:

$dl^2=dl_1^2 + dl_2^2 + dl_3^2$ hay $dl^2 = h_1^2du_1^2 + h_2^2du_2^2 + h_3^2du_3^2$

$$h_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}\right)^2$$

$$h_2^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_2}\right)^2$$

……………………………………………

hay $h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_i}\right)^2}$ với i= 1,2,3…

1.1.2 Hệ tọa độ Descartes:

Ba mặt tọa độ trực giao tương hỗ là 3 mặt phẳng: $\begin{matrix} u_1 = x = \text{const} \\ u_2 = y = \text{const} \\ u_3 = z = \text{const} \end{matrix}$ cắt nhau tại P(x,y,z)

Vectơ đơn vị $\vec{i}_1 = \vec{i}_x$, $\vec{i}_2 = \vec{i}_y$, $\vec{i}_3 = \vec{i}_z$ không thay đổi trong không gian;

$\vec{i}_x = \vec{i}_y \times \vec{i}_z; \vec{i}_y = \vec{i}_z \times \vec{i}_x; \vec{i}_z = \vec{i}_x \times \vec{i}_y$

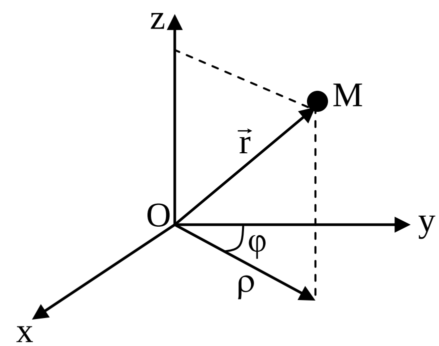
Hệ số Larmor: $h_1 = 1$, $h_2 = 1$, $h_3 = 1$

Yếu tố thể tích: dV = dxdydz

Vectơ vị trí $\vec{r}$ vẽ từ gốc tọa độ đến điểm P(x,y,z): $\vec{r} = x\vec{i}_x + y\vec{i}_y + z\vec{i}_z$

1.1.3 Hệ tọa độ trụ:

Ba mặt tọa độ trực giao tương hỗ ρ, φ, z cắt nhau tại P có tọa độ $\vec{r}(\rho, \varphi, z)$



Các vectơ đơn vị : $\vec{i}_\rho = \vec{i}_\varphi \times \vec{i}_z; \vec{i}_\varphi = \vec{i}_z \times \vec{i}_\rho; \vec{i}_z = \vec{i}_\rho \times \vec{i}_\varphi$

$x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, z = z. Suy ra:

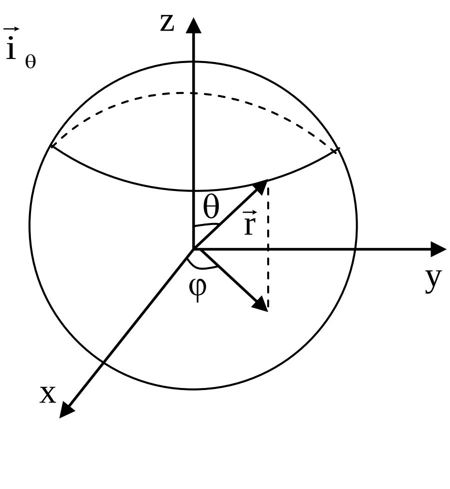
Hệ số Larmor: $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = 1$

Yếu tố thể tích: $dV = \rho d\rho d\varphi dz$

Vectơ vị trí xác định điểm P (ρ, φ, z): $\vec{r} = \rho\vec{i}_\rho + z\vec{i}_z$

1.1.4 Hệ tọa độ cầu

Ba mặt tọa độ trực giao tương hỗ r, θ, φ cắt nhau tại P có tọa độ $\vec{r}(r, \theta, \varphi)$



Các vectơ đơn vị: $\vec{i}_r = \vec{i}_\theta \times \vec{i}_\varphi$, $\vec{i}_\theta = \vec{i}_\varphi \times \vec{i}_r$, $\vec{i}_\varphi = \vec{i}_r \times \vec{i}_\theta$

Vì: $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$

Hệ số Larmor : $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = r\sin\theta$

Yếu tố thể tích: $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$

Vectơ vị trí xác định điểm P(r, θ, φ): $\vec{r} = r.\ \vec{i}_r$

1.2 Gradient:

Gradient là một toán tử tác dụng lên một hàm vô hướng, kết quả được một hàm vectơ – vectơ gradient.

Ký hiệu: $\mathrm{grad}\varphi = \nabla\varphi$

Xét trường vô hướng của hàm: $\varphi(r) = \varphi(x, y, z)$

Grad của φ là vectơ có hướng mà φ tăng nhanh nhất và có độ lớn bằng đạo hàm theo hướng đó.

Trong hệ tọa độ Descartes:

$$\mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}$$

Độ lớn của grad φ: $|\mathrm{grad}\varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}$

Kí hiệu: ∇ toán tử vi phân (napla) : $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

Trong hệ tọa độ cong :

$$\mathrm{grad}\varphi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\vec{i}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\vec{i}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial u_3}\vec{i}_3$$

Áp dụng:

+ Trong hệ tọa độ trụ: $\begin{cases} h_1 = h_\rho = 1; h_2 = h_\phi = \rho; h_3 = h_z = 1 \\ u_1 = \rho; u_2 = \phi; u_3 = z. \end{cases}$

Khi đó: $\mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\vec{i}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\vec{i}_\phi + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{i}_z$

+ Trong hệ tọa độ cầu: $\begin{cases} h_1 = h_r = 1; h_2 = h_\theta = r; h_3 = h_\phi = r\mathrm{Sin}\theta. \\ u_1 = r; u_2 = \theta; u_3 = \phi. \end{cases}$

Khi đó: $\mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{i}_\theta + \frac{1}{r\mathrm{Sin}\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\vec{i}_\phi$

1.3 Divergence và Định lí Gauss – Ôxtrogratxki:

1.3.1 Định nghĩa:

Cường độ của nguồn đặc trưng bởi toán tử divergence. Divergence của vectơ $\vec{A}$ tại một điểm của trường là một Vô hướng, định nghĩa bởi biểu thức:

$$\mathrm{div}\vec{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_{\Delta S} \vec{A}\overrightarrow{dS}}{\Delta V}$$

Ký hiệu: $\mathrm{div}\vec{A} = \nabla.\vec{A}$

Trong hệ tọa độ Descartes: $\mathrm{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

Trong hệ tọa độ cong: $\mathrm{div}\vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial\left(A_1 h_2 h_3\right)}{\partial u_1} + \frac{\partial\left(A_2 h_3 h_1\right)}{\partial u_2} + \frac{\partial\left(A_3 h_1 h_2\right)}{\partial u_3}\right]$

Áp dụng:

+ Trong hệ tọa độ trụ: $\begin{cases} h_1 = h_\rho = 1; h_2 = h_\varphi = \rho; h_3 = h_z = 1 \\ u_1 = \rho; u_2 = \varphi; u_3 = z. \end{cases}$

Khi đó: $\mathrm{div}\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

+ Trong hệ tọa độ cầu: $\begin{cases} h_1 = h_r = 1; h_2 = h_\theta = r; h_3 = h_\varphi = r\mathrm{Sin}\theta. \\ u_1 = r; u_2 = \theta; u_3 = \varphi. \end{cases}$

Khi đó: $\mathrm{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}.\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta.A_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}.\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$

1.3.2 Định lí divergence(định lý Gauss- Ôxtrogratxki):

Thông lượng của vectơ qua mặt kín bằng tích phân khối của đive của vectơ đó.

$$\int_V \mathrm{div}\vec{A}.dV = \oint_S \vec{A}.\overrightarrow{dS}$$

Định lí divergence trên cho phép thay thế tích phân thể tích bằng tích phân mặt và ngược lại.

1.4 Rota và định lý Stokes:

1.4.1 Định nghĩa:

Ngoài toán tử divergence, toán tử rota cũng đặc trưng cho trường vectơ. Rota của vectơ $\vec{A}$ tại một điểm là một vectơ, theo định nghĩa:

$$\mathrm{rot}\vec{A}.\vec{i}_n = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint\limits_{\Delta l} \vec{A}.\vec{dl}}{\Delta S}$$

Ký hiệu: $\mathrm{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A}$

Trong hệ tọa độ Decates, rota được định nghĩa: $\mathrm{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$

Trong hệ tọa độ cong được định nghĩa: $\mathrm{rot}\vec{A} = \dfrac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1\vec{i}_1 & h_2\vec{i}_2 & h_3\vec{i}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix}$

Áp dụng:

+ Trong hệ tọa độ trụ: $\begin{cases} h_1 = h_\rho = 1; h_2 = h_\varphi = \rho; h_3 = h_z = 1 \\ u_1 = \rho; u_2 = \varphi; u_3 = z. \end{cases}$

Khi đó: $\mathrm{rot}\vec{A} = \dfrac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{i}_\rho & \rho\vec{i}_\varphi & \vec{i}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$

+ Trong hệ tọa độ cầu: $\begin{cases} h_1 = h_r = 1; h_2 = h_\theta = r; h_3 = h_\varphi = r\mathrm{Sin}\theta. \\ u_1 = r; u_2 = \theta; u_3 = \varphi. \end{cases}$

Khi đó: $\text{rot}\vec{A} = \dfrac{1}{r^2 \text{Sin}\theta} \begin{vmatrix} \vec{i}_r & r\vec{i}_\theta & r\text{Sin}\theta\vec{i}_\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & rA_\theta & r\text{Sin}\theta A_\varphi \end{vmatrix}$

1.4.2 Định lý Stokes:

Lưu số của một vectơ dọc theo chu tuyến kín bằng thông lượng của rôta vectơ đó qua mặt giới hạn bởi chu tuyến đã cho.

$$\int_S \text{rot}\vec{A}.\overrightarrow{dS} = \oint_C \vec{A}.\vec{dl}$$

1.5 Toán tử Laplace:

Toán tử Laplace tác dụng lên hàm vô hướng được xác định như divergence tác dụng lên hàm gradient của φ.

Kí hiệu: Δ toán tử Laplace

Trong hệ tọa độ Decartes: $\Delta\psi = \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$

Trong hệ tọa độ cong Laplace được định nghĩa:

$$\Delta\psi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial u_3}\right)\right]$$

Áp dụng:

+ Trong hệ tọa độ trụ: $\begin{cases} h_1 = h_\rho = 1; h_2 = h_\varphi = \rho; h_3 = h_z = 1 \\ u_1 = \rho; u_2 = \varphi; u_3 = z. \end{cases}$

Khi đó: $\Delta\psi = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$

+ Trong hệ tọa độ cầu: $\begin{cases} h_1 = h_r = 1; h_2 = h_\theta = r; h_3 = h_\varphi = r\text{Sin}\theta. \\ u_1 = r; u_2 = \theta; u_3 = \varphi. \end{cases}$

Khi đó: $\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \mathrm{Sin}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{Sin}\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\mathrm{Sin}^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$

1.6 Một số hệ thức vectơ thường gặp:

$\vec{A}.\vec{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) + \vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A}) + \vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = 0$

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}.\vec{C}) - \vec{C}(\vec{B}.\vec{A})$

$(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\times\vec{B}.\vec{D})\vec{C} - (\vec{A}\times\vec{B}.\vec{C})\vec{D}$

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}.\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$

$(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{C}\times.\vec{D}) = (\vec{A}.\vec{C})(\vec{B}.\vec{D}) - (\vec{B}.\vec{C})(\vec{A}.\vec{D})$

$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}.(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}.(\vec{A}\times\vec{B})$

1.7 Một số hệ quả:

a) $\mathrm{grad}(f+g) = \mathrm{grad}f + \mathrm{grad}g$

b) $\mathrm{div}(\vec{A}+\vec{B}) = \mathrm{div}\vec{A} + \mathrm{div}\vec{B}$

c) $\mathrm{rot}(\vec{A}+\vec{B}) = \mathrm{rot}\vec{A} + \mathrm{rot}\vec{B}$

d) $\mathrm{grad}(f.g) = f(\mathrm{grad}g) + g(\mathrm{grad}f)$

e) $\mathrm{div}(f\vec{A}) = f\mathrm{div}\vec{A} + \vec{A}\mathrm{grad}f$

f) $\mathrm{rot}(f\vec{A}) = \mathrm{grad}f\times\vec{A} + f\mathrm{rot}\vec{A} = f\mathrm{rot}\vec{A} - \vec{A}\times\mathrm{grad}f$

g) $\mathrm{grad}(\vec{A}.\vec{B}) = \vec{A}\times(\mathrm{rot}\vec{B}) + \vec{B}\times(\mathrm{rot}\vec{A}) + (\vec{A}.\mathrm{grad})\vec{B} + (\vec{B}.\mathrm{grad})\vec{A}$

h) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{A}) = 0$

i) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}f) = 0$

j) $\mathrm{div}(\mathrm{grad}f) = \nabla^2 f = \Delta f$

CHƯƠNG 2 :NHỮNG ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ.

Trường điện từ tại mỗi điểm được đặc trưng bởi bốn đại lượng: vectơ cường độ điện trường $\vec{E}$, vectơ cảm ứng điện $\vec{D}$, vectơ cường độ từ trường $\vec{H}$, vectơ cảm ứng từ $\vec{B}$. Các đại lượng này là các hàm tọa độ và thời gian và chúng có liên hệ với nhau với các điện tích cũng như dòng điện theo những quy luật xác định. Những quy luật này được phát biểu dưới dạng các phương trình Maxwell và các phương trình liên hệ.

2.1 Vectơ cường độ điện trường $\vec{E}$:

Là đại lượng đặc trưng cho điện trường về phương diện tác dụng lực.

Điện tích q đặt trong trường điện chịu tác dụng của lực điện. tại mỗi điểm của trường điện, tỷ số $\frac{\vec{F}_e}{q}$ là một đại lượng không đổi được gọi là cường độ điện trường tại điểm đó. $\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{R^2}\vec{R}_o$ (V/m)

R: khoảng cách từ điện tích điểm Q đến điểm ta xét.

Thực nghiệm chứng tỏ, điện trường của một hệ điện tích điểm tuân theo nguyên lý chồng chất điện trường của hệ điện tích bằng tổng (vectơ) các điện trường của tổng điện tích. $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{R^2}\vec{R}_{oi}$

Muốn tính cường độ điện trường gắn với hệ điện tích có phân bố liên tục ta phải chia không gian có điện tích thành những ΔV đủ nhỏ, mỗi phần xem như một điện tích điểm. Sau đó dùng nguyên lý chồng chất xác định điện trường cho cả hệ.

Đối với phân bố khối: $\vec{E} = \int_V \overrightarrow{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_V \frac{\rho\vec{R}_o}{R^2}dV$; với $\rho = \frac{dQ}{dV}$: mật độ điện tích khối

Đối với phân bố mặt: $\vec{E} = \int_S \overrightarrow{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_S \frac{\sigma\vec{R}_o}{R^2}dS$; với $\sigma = \frac{dQ}{dS}$: mật độ điện tích mặt

Đối với phân bố đường: $\vec{E}=\int_L \overrightarrow{dE}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_L \frac{\lambda\vec{R}_o}{R^2}dl$; với $\lambda=\frac{dQ}{dl}$: mật độ điện tích đường

2.2 Vectơ cảm ứng từ $\vec{B}$:

Là đại lượng đặc trưng cho trường từ về phương diện tác dụng lực.

Xuất phát từ định luật tương tác giữa hai phần tử dòng điện:

$$\overrightarrow{dF}=\frac{\mu_o}{4\pi}I_2\overrightarrow{dl_2}\times\frac{\left(I_1\overrightarrow{dl_1}\times\vec{R}_o\right)}{R^2}$$

Ta nhận thấy rằng: $\overrightarrow{dB}=\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I_1\overrightarrow{dl_1}\times\vec{R}_o}{R^2}$

Chỉ phụ thuộc vào phần tử dòng điện $I_1\overrightarrow{dl_1}$ sinh ra từ trường và vị trí của điểm M tại đó đặt phần tử dòng điện $I_2\overrightarrow{dl_2}$ mà không phụ thuộc vào phần tử dòng điện $I_2\overrightarrow{dl_2}$. Và vectơ $\vec{B}$ được gọi là vectơ cảm ứng từ do phần tử dòng điện $I_1\overrightarrow{dl_1}$ gây ra tại điểm M.

Theo thực nghiệm đã chứng tỏ, vectơ cảm ứng từ cũng tuân theo nguyên lý chồng chất: vectơ cảm ứng từ $\vec{B}$ của nhiều dòng điện bằng tổng các vectơ cảm ứng từ do từng dòng điện sinh ra: $\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2+...+\vec{B}_n=\sum_{i=1}^{n}\vec{B}_i$

do đó từ trường của một mạch kín L có dòng điện I chạy qua được tính bằng công thức:

$$\vec{B}=\frac{\mu_o I}{4\pi}\oint_L\frac{\overrightarrow{dl}\times\vec{R}}{R^3}$$

Từ đó, ta có từ lực tác dụng lên yếu tố dòng $I_2\overrightarrow{dl_2}$: $\overrightarrow{dF}=I_2\overrightarrow{dl_2}\times\overrightarrow{dB}$

Trong trường hợp dòng điện có phân bố khối (hoặc phân bố đường) mỗi điện tích chuyển động vạch nên đường dòng.

Vectơ mật độ dòng điện: là lượng điện tích chạy qua một đơn vị diện tích đặt vuông góc với các đường dòng sau một đơn vị thời gian.

Vectơ mật độ dòng điện khối: $\vec{j}=\rho\vec{v}\rightarrow$ yếu tố dòng trong phân bố khối: $\vec{j}dV$.

Vectơ mật độ dòng điện mặt: $\vec{i} = \sigma\vec{v} \rightarrow$ yếu tố dòng trong phân bố mặt: $\vec{i}dS$.

Công thứ tính $\vec{B}$ cho các phân bố như sau:

Phân bố khối: $\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}\times\vec{R}}{R^3}dV$

Phân bố mặt: $\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_S \frac{\vec{i}\times\vec{R}}{R^3}dS$

Đó chính là công thức Biot - Savart.

2.3 Định luật bảo toàn điện tích và phương trình liên tục:

Một trong những định luật quan trọng nhất của điện động lực học là định luât bảo toàn điện tích với nội dung sau: Tổng đại số các điện tích trong một hệ cô lập là không đổi.

Để xây dựng định luật bảo toàn điện tích dưới dạng vi phân ta đưa vào khái niệm mật độ dòng: $\vec{j} = \rho\vec{v}$

Trong đó : $\vec{v}$ là vận tốc của điện tích điểm mà mật độ điện tích ρ được xác định.

Lượng điện tích chảy qua mặt kín S bao quanh thể tích V trong một đơn vị thời gian bằng thông lượng của vectơ mật độ dòng $\vec{j}$ qua S. Mặt khác, vì điện tích là bảo toàn nên lượng điện tích này chính bằng biến thiên của Q sau một đơn vị thời gian. Nghĩa là: $\oint_S \vec{j}\overrightarrow{dS} = -\frac{dQ}{dt}$

Mà $Q = \int_V \rho dV$ nên $\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV$

Do đó: $\oint_S \vec{j}\overrightarrow{dS} = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV$

Áp dụng định luật Gauss toán học : $\oint_S \vec{A}.\overrightarrow{dS} = \int_V \mathrm{div}\vec{A}.dV$

Suy ra: $\oint_S \vec{j}.\overrightarrow{dS} = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}.dV \Rightarrow \int_V \mathrm{div}\vec{j}.dV = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}.dV \Rightarrow \int_V \left(\mathrm{div}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right).dV = 0$

Công thức trên đúng với mọi thể tích V cho trước, nên: $\mathrm{div}\vec{j} + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ (*)

Phương trình (*) là phương trình liên tục, biểu thị định luật bảo toàn điện tích.

2.4 Định luật Gauss cho điện trường:

Thông lượng của vectơ cường độ điện trường $\vec{E}$ qua một mặt kín S tỷ lệ với tổng đại số các điện tích chứa trong mặt kín ấy.

$$\oint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{1}{\varepsilon_o}\sum_i Q_i$$

Nếu phân bố là liên tục thì $\sum_i Q_i = \int_V \rho.dV$. Và áp dụng định luật Gauss toán học cho vế trái $\oint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \int_V \mathrm{div}\vec{E}.dV$. Ta suy ra rằng:

$$\int_V \mathrm{div}\vec{E}.dV = \frac{1}{\varepsilon_o}\int_V \rho.dV \Rightarrow \int_V \left(\mathrm{div}\vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_o}\right)dV = 0$$

Vì đúng với mọi V nên : $\mathrm{div}\vec{E} - \dfrac{\rho}{\varepsilon_o} = 0 \Rightarrow \mathrm{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_o}$

Ý nghĩa: Các đường sức điện xuất phát (hay tận cùng) tại các điện tích (hay nguyên nhân sinh ra điện trường $\vec{E}$ là điện tích).

2.5 Định luật Gauss cho từ trường:

Thông lượng của vectơ cảm ứng từ $\vec{B}$ qua một mặt kín bất kỳ bằng không.

$$\oint_S \vec{B}.\overrightarrow{dS} = 0$$

Áp dụng định luật Gauss toán học, ta có:

$$\oint_S \vec{B}.\overrightarrow{dS} = \int_V \mathrm{div}\vec{B}.dV = 0$$

Vì đúng với mọi V nên $\mathrm{div}\vec{B} = 0$

Ý nghĩa: các đường sức từ là những đường cong khép kín hay trong thiên nhiên không tồn tại từ tích.

2.6 Định luật Faraday về cảm ứng điện từ:

Xuất phát từ định luật Faraday về cảm ứng điện từ : Nếu qua mặt S được giới hạn một khung dây có sự biến thiên của từ thông ϕ theo thời gian thì trong khung dây đó sẽ xuất hiện một suất điện động cảm ứng.

$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Suất điện động cảm ứng được xem như lưu thông của vectơ điện trường theo vòng dây dẫn. Tức là: $\varepsilon = \oint \vec{E}.\overrightarrow{dl}$

Và từ thông: $\phi = \oint \vec{B}.\overrightarrow{dS}$

Khi đó, ta có: $\oint_L \vec{E}.\overrightarrow{dl} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S B.\overrightarrow{dS}$

Áp dụng định lý Stoke cho vế trái, ta có: $\oint_L \vec{E}.\overrightarrow{dl} = \int_S \text{rot}\vec{E}.\overrightarrow{dS}$

Nếu mặt lấy tích phân không phụ thuộc vào thời gian thì: $\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}.\overrightarrow{dS} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.\overrightarrow{dS}$

Vậy suy ra rằng: $\int_S \text{rot}\vec{E}.\overrightarrow{dS} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\overrightarrow{dS} \Rightarrow \int_S \left(\text{rot}\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right).\overrightarrow{dS} = 0$

Vì mặt S được chọn bất kỳ nên: $\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

<u>Ý nghĩa</u>: Từ trường biến đổi theo thời gian sinh ra điện trường xoáy phân bố trong không gian.

2.7 Định luật Ampere về lưu thông của vectơ cảm ứng từ:

- Trong trường hợp dòng điện không đổi, định luật dòng toàn phần được phát biểu như sau:

Lưu thông của vectơ cảm ứng từ $\vec{B}$ dọc theo chu tuyến L tỷ lệ với tổng dòng điện chảy qua mặt S được giới hạn bởi L.

$$\oint_L \vec{B}.\vec{dl} = \mu_o \sum_i I_i$$

$I_i > 0$ nếu chiều của dòng điện hợp với chiều của đường lấy tích phân theo quy tắc đinh ốc thuận.

-Trong trường hợp dòng điện chảy qua diện tích S là liên tục với mật độ dòng $\vec{j}$, thì định luật lưu số Ampere: $\oint_L \vec{B}.\vec{dl} = \mu_o \int_S \vec{j}.\vec{dS}$

Áp dụng định lý Stoke cho vế trái, khi đó ta có:

$$\int_S \text{rot}\vec{B}.\vec{dS} = \mu_o \int_S \vec{j}.\vec{dS} \Rightarrow \int_S (\text{rot}\vec{B} - \mu_o \vec{j}).\vec{dS} = 0$$

Vì mặt S được chọn tùy ý, nên $\text{rot}\vec{B} = \mu_o \vec{j}$

Công thức trên chỉ đúng đối với dòng điện không đổi, mật độ dòng điện dẫn là $\vec{j}$. Đối với dòng không đổi thì $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, từ phương trình liên tục suy ra: $\text{div}\vec{j} = 0$. Điều này chứng tỏ rằng các đường dòng dẫn không đổi khép kín, hoặc đi ra xa vô cùng, chúng không có điểm bắt đầu hay điểm kết thúc.

Đối với dòng điện biến đổi: $\text{div}\vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$ (2.3). Chứng tỏ các đường dòng dẫn không kín.

Mà $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_o \text{div}\vec{E} = \text{div}\left(\varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$

Thay vào (2.3), ta có: $\text{div}\left(\vec{j} + \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = 0$

Vectơ $\vec{j}_{tp}$ gọi là vectơ mật độ dòng toàn phần : $\vec{j}_{tp} = \vec{j} + \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Chứng tỏ đường dòng của vectơ $\vec{j}_{tp}$ khép kín. Vectơ mật độ dòng toàn phần gồm vectơ mật độ dòng dẫn:

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

Và vectơ mật độ dòng dịch: $\vec{j}_d = \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Định luật Ampere thành định luật dòng điện toàn phần: $\oint_L \vec{B}.\vec{dl} = \mu_o \int_S \left[\vec{j} + \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \overrightarrow{dS}$

Suy ra: $\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_o \left(\vec{j} + \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

Ý nghĩa: Sự biến thiên của điện trường làm xuất hiện từ trường xoáy. Từ trường xoáy được tạo nên không chỉ bởi dòng điện dẫn mà còn bởi dòng điện dịch.

2.8 Hệ phương trình Maxwell trong chân không:

Các vectơ đặc trưng cho trường điện từ $\vec{E}$, $\vec{B}$ tại mỗi điểm trong không gian và ở mỗi thời điểm liên hệ với nhau và liên hệ với nguồn của Trường theo những quy luật xác định được phát biểu dưới dạng toán học bởi hệ các phương trình gọi là hệ phương trình Maxwell – Lorentz:

Hệ phương trình dưới dạng vi phân: $\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$ (2.8.1)

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \quad (2.8.2)$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.8.3)$$

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_o \left(\vec{j} + \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (2.8.4)$$

Hệ phương trình dưới dạng tích phân:

$$\oint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{1}{\varepsilon_o}\int_V \rho.dV$$

$$\oint_S \vec{B}.\overrightarrow{dS} = 0$$

$$\oint_L \vec{E}.\overrightarrow{dl} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.\overrightarrow{dS}$$

$$\oint_L \vec{B}.\overrightarrow{dl} = \mu_o \int_S \left(\vec{j} + \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)\overrightarrow{dS}$$

Phương trình (2.8.3) và (2.8.4) là hai định luật cơ bản của Trường điện từ. Phương trình (2.8.1) và (2.8.2) không phải là những phương trình độc lập, chúng có thể dẫn ra từ hai phương trình (2.8.3) và (2.8.4).

Nghĩa là:

-Lấy div hai vế phương trình (2.8.3), ta có:

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{E}) = -\mathrm{div}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\vec{B} = 0$$

Công thức trên chứng tỏ $\mathrm{div}\vec{B}$ không phụ thuộc thời gian, chẳng hạn tại thời điểm ban đầu chưa thành lập trường $\vec{B} = 0$ nên $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ thì thời điểm bất kỳ khi $\vec{B} = 0$ có giá trị khác không vẫn luôn có: $\mathrm{div}\vec{B} = 0$

-Lấy div hai vế phương trình (2.8.4), ta có:

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{B}) = \mathrm{div}\left[\mu_o\left(\vec{j} + \varepsilon_o\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \mathrm{div}\left[\mu_o\left(\vec{j} + \varepsilon_o\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{div}\vec{j} + \mathrm{div}\left(\varepsilon_o\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{div}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_o\mathrm{div}\vec{E}\right) = 0$$

Mặt khác, từ phương trình liên tục ta có: $\mathrm{div}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{div}\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$

Từ đó ta có: $\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_o\mathrm{div}\vec{E} - \rho\right) = 0 \Rightarrow \varepsilon_o\mathrm{div}\vec{E} - \rho = \mathrm{const}$

Ở thời điểm ban đầu khi chưa có điện tích $(\rho = 0)$, chưa có trường điện $(\vec{E} = 0$ nên $\mathrm{div}\vec{E} = 0)$, hằng số trên bằng không vậy sẽ bằng không ở bất cứ thời điểm nào:

$$\varepsilon_o\mathrm{div}\vec{E} - \rho = 0 \Rightarrow \mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

2.9 Vectơ cảm ứng điện $\vec{D}$:

Cường độ điện trường $\vec{E}$ phụ thuộc vào tính chất của môi trường. $\left(\vec{E} \sim \varepsilon\right)$

Khi đi qua mặt phân cách của hai môi trường thì $\vec{E}$ biến đổi đột ngột. Sự gián đoạn này không thuận tiện đối với nhiều phép tính về điện trường. Vì vậy để mô tả điện trường, ngoài vectơ cường độ điện trường $\vec{E}$ người ta còn dùng đại lượng vật lý khác không phụ thuộc vào tính chất môi trường gọi là vectơ cảm ứng điện $\vec{D}$.

Khi đặt điện môi vào điện trường, điện môi bị phân cực. mức độ phân cực điện môi được đặc trưng bởi vectơ phân cực điện $\vec{P}$

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0}\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta V} \quad (\mathrm{C/m^2})$$

Vectơ cảm ứng điện $\vec{D}$ được định nghĩa: $\vec{D} = \varepsilon_o \vec{E} + \vec{P}$

Đối với môi trường tuyến tính, đẳng hướng hoặc cường độ điện trường không quá lớn, vectơ phân cực $\vec{P}$ tỷ lệ với cường độ điện trường $\vec{E}$: $\vec{P} = \alpha \varepsilon_o \vec{E}$

α : hệ số cảm điện của môi trường.

Khi đó, vectơ cảm ứng điện $\vec{D}$: $\vec{D} = \varepsilon_o (1+\alpha)\vec{E} = \varepsilon \vec{E}$; ε hệ số điện môi của môi trường.

2.10 Vectơ cường độ từ trường $\vec{H}$:

Nếu ta đi từ môi trường này sang môi trường khác thì cùng với độ từ thẩm μ vectơ cảm ứng từ $\vec{B}$ sẽ thay đổi đột ngột. Vì lẽ đó ngoài vectơ cảm ứng từ người ta còn đưa ra vectơ cường độ từ trường $\vec{H}$.

Khi đặt từ môi vào từ trường, từ môi bị phân cực. Mức độ phân cực từ môi được đặc trưng bởi vectơ phân cực từ $\vec{M}$. Vectơ phân cực từ xác định trạng thái phân cực từ tại mỗi điểm của từ môi, chính là moment từ của một đơn vị thể tích môi bao quanh điểm đó.

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{m}}{\Delta V} \qquad \text{(A/m)}$$

$\Delta \vec{m}$ là moment từ của từ môi thể tích ΔV.

Vectơ cường độ từ trường được định nghĩa như sau: $\vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M}$ (A/m)

$\mu_o = 4\pi.10^{7}$ (H/m): hằng số từ.

Đối với môi trướng tuyến tính, đẳng hướng hoặc cường độ trường từ không quá lớn, vectơ phân cực từ: $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$; χ_m là độ cảm từ của môi trường.

Khi đó, cảm ứng từ: $\vec{B} = \mu_o (1+\chi_m)\vec{H} = \mu \vec{H}$; μ độ từ thẩm của môi trường .

2.11 Hệ phương trình Maxwell trong môi trường vật chất:

Lấy trung bình các phương trình Maxwell – Lorentz để thành lập hệ phương trình Maxwell trong môi trường vật chất; trong đó thay vì chỉ cần hai vectơ $\vec{E}$ và $\vec{B}$ thì ta đưa thêm vào hai vectơ $\vec{D}$ và $\vec{H}$.

Hệ phương trình dưới dạng vi phân:

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0$$

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho$$

Hệ phương trình dưới dạng tích phân:

$$\oint_L \vec{H}.\overrightarrow{dl} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \overrightarrow{dS}$$

$$\oint_L \vec{E}.\overrightarrow{dl} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \overrightarrow{dS}$$

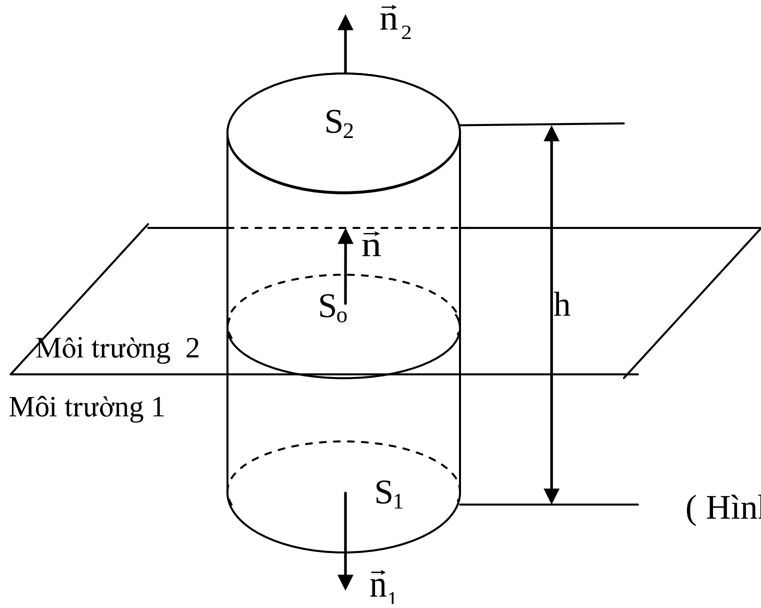
$$\oint_S \vec{B}.\overrightarrow{dS} = 0$$

$$\oint_S \vec{D}.\overrightarrow{dS} = \int_V \rho dV$$

2.12 Điều kiện biên:

Các thông số đặc trưng cho tính chất môi trường ε, μ, γ là những hàm số của tọa độ. Trong cùng một môi trường, chúng là những hàm liên tục, không có những điểm nhảy vọt .Tại mặt biên phân chia hai môi trường chất khác nhau, các đại lượng thay đổi đột ngột kéo theo các vectơ đặc trưng cho trường điện từ $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$ cũng thay đổi nhảy vọt tại mặt biên. Các điều kiện xác định trạng thái các vectơ của Trường điện từ tại mặt biên phân chia hai môi trường khác nhau gọi là điều kiện biên. Trạng thái một vectơ tại biên hoàn toàn xác định nếu xác định được quy luật biến đổi thành phần pháp tuyến và thành phần tiếp tuyến của vectơ này tại biên.

2.12.1 Điều kiện biên của $\vec{B}$



(Hình 2.1)

Xuất phát từ phương trình $\operatorname{div}\vec{B} = 0$.Điểm khảo sát là điểm M nằm trên mặt phân cách hai môi trường. Chọn mặt Gauss là mặt trụ chứa điểm M gồm mặt bên S_b và hai đáy S_1 và S_2 đủ nhỏ để có thể coi vectơ trường không đổi trên mỗi đáy. Từ định luật Gauss cho từ trường ta có:

$$\oint_S \vec{B}.\overrightarrow{dS} = 0 \Rightarrow \int_{S_1} \vec{B}.\overrightarrow{dS} + \int_{S_2} \vec{B}.\overrightarrow{dS} + \int_{S_3} \vec{B}.\overrightarrow{dS} = 0 \quad (**)$$

Khi cho h $\rightarrow$0 thì $S_b \rightarrow 0$ thì $S_1 \rightarrow S_o$ và $S_2 \rightarrow S_o$ thì

$$\int_{S_b \rightarrow 0} \vec{B}.\overrightarrow{dS} = 0$$

$$\int_{S_2} \vec{B}.\overrightarrow{dS} = \vec{B}_2\vec{n}_2 S_2 = B_{2n}S_2 = B_{2n}S_o$$

$$\int_{S_1} \vec{B}.\overrightarrow{dS} = -\vec{B}_1\vec{n}_1 S_1 = -B_{1n}S_1 = -B_{1n}S_o$$

Trong đó, B_{1n} và B_{2n} là thành phần pháp tuyến của $\vec{B}$ ở trong môi trường 1 và ở trong môi trường 2.

Do đó, từ (**) ta có: $\left(B_{1n} - B_{2n}\right)S_o = 0$

Nên: $B_{1n} = B_{2n}$

Vậy khi qua mặt phân cách hai môi trường thành phần pháp tuyến của vectơ $\vec{B}$ biến thiên liên tục.

Ta có: $\vec{B}_2 = \mu_2.\vec{H}_2$ và $\vec{B}_1 = \mu_1.\vec{H}_1$.

Suy ra: $B_{2n} = \mu_2.H_{2n}$ và $B_{1n} = \mu_1.H_{1n}$

Vì $B_{2n} = B_{1n}$ nên $\mu_1.H_{1n} = \mu_2.H_{2n}$. Điều này chứng tỏ thành phần pháp tuyến của vectơ cường độ từ trường $\vec{H}$ biến thiên không liên tục tại mặt phân cách hai môi trường.

2.12.2 Điều kiện biên của $\vec{D}$:

Xuất phát từ phương trình định luật Gauss cho điện trường: $\mathrm{div}\vec{D} = \rho$. Điểm khảo sát M nằm trên mặt phân cách hai môi trường. Chọn mặt Gauss là hình trụ chứa điểm M gồm mặt xung quanh và hai mặt đáy. Lấy tích phân hai vế theo thể tích

$$\int_V \mathrm{div}\vec{D}.dV = \int_V \rho.dV \Leftrightarrow \oint_S \vec{D}.\overrightarrow{dS} = Q_{td} \Leftrightarrow \int_{S_b} \vec{D}.\overrightarrow{dS} = \int_{S_1} \vec{D}.\overrightarrow{dS} = \int_{S_2} \vec{D}.\overrightarrow{dS} = Q_{td}$$

Khi $h \to 0$ thì $S_b \to 0$, $S_1 \to S_o$ và $S_2 \to S_o$ thì:

$$\int_{S_b} \vec{D}.\overrightarrow{dS} = 0$$

$$\int_{S_1} \vec{D}.\overrightarrow{dS} = -\vec{D}_1.\vec{n}_1 S_1 = -D_{1n}S_1 = -D_{1n}S_o$$

$$\int_{S_2} \vec{D}.\overrightarrow{dS} = \vec{D}_2.\vec{n}_2 S_2 = D_{2n}S_2 = D_{2n}S_o$$

Trong đó, D_{1n} và D_{2n} là thành phần pháp tuyến của vectơ cảm ứng điện $\vec{D}$ ở trong môi trường 1 và ở trong môi trường 2.

Suy ra: $\left(D_{2n} - D_{1n}\right)S_o = Q_{td}$

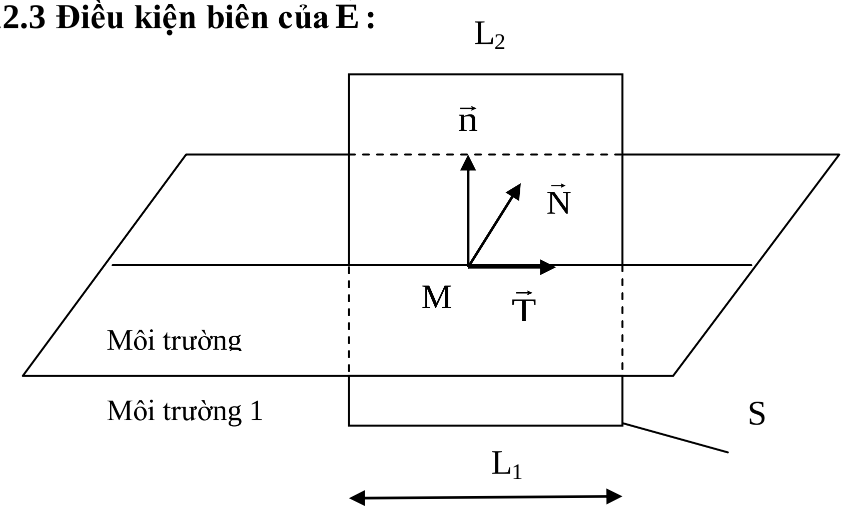
Nếu trong hai môi trường có điện tích phân bố khối$_S$ mà giữa chúng không có phân bố điện tích mặt $Q_{td} \to 0$ thì $\left(D_{2n} - D_{1n}\right)S_o = 0 \Leftrightarrow D_{2n} = D_{1n}$

Nếu trên mặt phân cách hai môi trường có phân bố điện tích mặt trên diện tích S, tức là $Q_{td} = \sigma_{td}.S_o$. Khi đó: $\left(D_{2n} - D_{1n}\right)S_o = \sigma_{td}.S_o$ nên:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_{td}$$

Vậy vectơ cảm ứng điện biến thiên liên tục khi không có điện tích phân bố mặt trên mặt phân cách hai môi trường còn vectơ cảm ứng điện biến thiên không liên tục khi có điện tích phân bố mặt trên mặt phân cách hai môi trường.

2.12.3 Điều kiện biên của $\vec{E}$:



(Hình 2.2)

Xuất phát từ phương trình $\text{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Điểm khảo sát M nằm trên mặt phân cách hai môi trường. Chọn mặt S giới hạn bởi chu tuyến (L) là một hình chữ nhật đặt vuông góc với mặt phân cách hai môi trường: gồm hai cạnh đáy là $L_1 = L_2 = L$ và hai cạnh bên L_b.

Lấy tích phân hai vế theo diện tích S: $\int_S \text{rot}\vec{E}.\overrightarrow{dS} = -\int_S \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}.\overrightarrow{dS}$

Theo định lý Stokes cho vế trái: $\int_S \text{rot}\vec{E}.\overrightarrow{dS} = \oint_L \vec{E}.\vec{dl} = \int_{L_1} \vec{E}.\vec{dl} + \int_{L_2} \vec{E}.\vec{dl} + \int_{L_b} \vec{E}.\vec{dl}$

Gọi $\vec{N}$ là vectơ pháp tuyến của mặt S, $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phân cách hai môi trường, chọn vectơ tiếp tuyến $\vec{T}$ sao cho $\left(\vec{N},\vec{n},\vec{T}\right)$ tạo thành một tam diện thuận.

Khi $L\to 0$ thì $L_1\to L$ và $L_2\to L$:

$$\int\limits_{L_b\to 0}\vec{E}.\vec{dl}=0$$

$$\int\limits_{L_1\to L}\vec{E}.\vec{dl}=-\vec{E}\vec{T}_1L_1=-E_{1T}.L$$

$$\int\limits_{L_2\to L}\vec{E}.\vec{dl}=-\vec{E}\vec{T}_2L_1=E_{2T}.L$$

Vì $\vec{B}$ liên tục và giới nội trên mặt S và khi $L\to 0$ thì $\left(-\int\limits_{S\to 0}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\vec{dS}\right)\to 0$

Và ta có: $\left(E_{2T}-E_{1T}\right)L=0$ nên $E_{2T}=E_{1T}$

Điều này chứng tỏ thành phần tiếp tuyến của vectơ cường độ điện trường biến thiên liên tục khi đi qua mặt phân cách hai môi trường.

2.12.4 Điều kiện biên của $\vec{H}$:

Xuất phát từ phương trình: $\text{rot}\vec{H}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$. Điểm khảo sát M nằm trên mặt phân cách hai môi trường. Chọn mặt S giới hạn bởi chu tuyến (L) là một hình chữ nhật đặt vuông góc với mặt phân cách hai môi trường: gồm hai cạnh đáy là $L_1=L_2=L$ và hai cạnh bên L_b.

Lấy tích phân hai vế theo diện tích S: $\int\limits_S\text{rot}\vec{H}.\vec{dS}=\int\limits_S\vec{j}.\vec{dS}+\int\limits_S\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}.\vec{dS}$

Theo định lý Stokes cho vế trái: $\int\limits_S\text{rot}\vec{H}.\vec{dS}=\oint\limits_L\vec{H}.\vec{dl}=\int\limits_{L_1}\vec{H}.\vec{dl}+\int\limits_{L_2}\vec{H}.\vec{dl}+\int\limits_{L_b}\vec{H}.\vec{dl}$

Khi $L\to 0$ thì $L_1\to L$ và $L_2\to L$:

$$\int_{L_b \to 0} \vec{H}.\vec{dl} = 0$$

$$\int_{L_1 \to L} \vec{H}_1.\vec{dl} = -\vec{H}.\vec{T}_1 L_1 = -H_{1T}.L$$

$$\int_{L_2 \to L} \vec{H}.\vec{dl} = -\vec{H}.\vec{T}_2 L_2 = H_{2T}.L$$

Vì $\vec{D}$ biến thiên liên tục trên mặt S và $L_b \to 0$, nên: $\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.\overrightarrow{dS} \to 0$

Nếu chỉ có phân bố dòng khối trong hai môi trường thì sẽ không có phân bố dòng điện mặt phân cách: $\int_S \vec{j}.\overrightarrow{dS} \to 0$.

Còn trường hợp có phân bố dòng điện mặt trên mặt phân cách với mật độ dòng điện là $\vec{i}$.

Khi $S \to 0$ thì các đại lượng trên: $H_{2T} - H_{1T} = i_N$

Điều này chứng tỏ thành phần tiếp tuyến của vectơ cường độ từ trường biến thiên không liên tục qua mặt phân cách hai môi trường khi có phân bố dòng điện mặt trên mặt phân cách hai môi trường.

CHƯƠNG 3: ĐIỆN TRƯỜNG TĨNH

3.1 Hệ phương trinh Maxwell mô tả điện trường tĩnh:

Trường điện tĩnh là trường mà các yếu tố trường $\left(\vec{E},\vec{D},\vec{B},\vec{H}\right)$ không thay đổi theo thời gian và không có sự chuyển động các điện tích, nghĩa là không có dòng điện - mật độ dòng bằng không.

Tức là khi đó: $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=0$; $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0$; $\vec{j}=0$. Hệ phương trình được chia thành hai nhóm độc lập, mỗi nhóm chỉ chứa các đại lượng liên quan đến trường từ hoặc trường điện.

Mô tả điện trường tĩnh:
$$\mathrm{div}\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}$$
$$\mathrm{rot}\vec{E}=0$$

Và với các điều kiện biên:
$$D_{2n}-D_{1n}=\sigma_{td}$$
$$E_{2t}=E_{1t}$$

3.2 Thế vô hướng của điện trường tĩnh:

Điện trường tĩnh là trường thế vì công của lực điện trường thực hiện khi di chuyển một điện tích theo đường cong kín thì bằng không. Thật vậy:

Công của lực tĩnh điện khi dịch chuyển một đơn vị điện tích dương theo đường cong kín L:

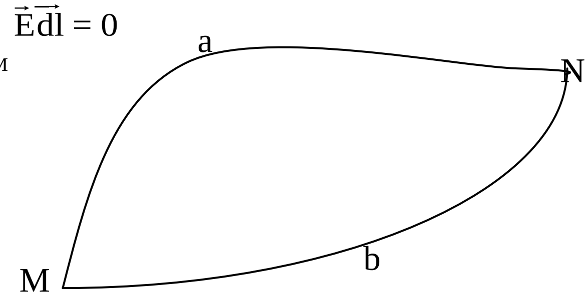
$$A=\oint_L \vec{E}d\vec{l}\,(***)$$

Do trường ta xét là điện trường tĩnh điện nên: $\mathrm{rot}\vec{E}=0$

Áp dụng định lý Stokes cho (***) ta có: $A=\oint_L \vec{E}.\vec{dl}=\int_S \mathrm{rot}\vec{E}.\vec{dS}=0$.

$$\oint_L \vec{E}\vec{dl}=0\Rightarrow\int_{MaN}\vec{E}\vec{dl}+\int_{NbM}\vec{E}\vec{dl}=0$$

Suy ra:
$$\Rightarrow\int_{MaN}\vec{E}\vec{dl}=-\int_{NbM}\vec{E}\vec{dl}$$
$$\Rightarrow\int_{MaN}\vec{E}\vec{dl}=\int_{MbN}\vec{E}\vec{dl}$$



Chứng tỏ rằng công của lực điện trường không phụ thuộc vào dạng đường đi mà chỉ phụ thuộc vào vị trí điểm đầu và điểm cuối.

Do đó, ta có thể dùng hàm vô hướng để mô tả điện trường tĩnh.

Vì $\mathrm{rot}\vec{E} = 0$ nên đặt $\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi$. Và φ gọi là thế vô hướng của điện trường tĩnh, gọi tắt là điện thế.

Ta có: $\vec{E}.\vec{dl} = -\mathrm{grad}\varphi.\vec{dl}$

Mà :

$$\mathrm{grad}\varphi\vec{dl} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)\left(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{grad}\varphi\vec{dl} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = d\varphi(x,y,z)$$

Suy ra:

$$d\varphi = -\vec{E}\vec{dl} \Rightarrow \varphi = -\int \vec{E}\vec{dl} + C$$

Ta thấy điện thế φ không đơn trị, xác định thêm một hằng số cộng tùy ý C. Nếu ta chọn trước giá trị điện thế xác định tại một điểm nào đó trong miền có điện trường thì khi đó điện thế ở tất cả nơi khác sẽ được xác định đơn giá. Việc chọn trước giá trị của điện thế dẫn đến tính đơn trị của hàm điện thế gọi là sự chuẩn hóa thế.

Trong điện kỹ thuật, người ta chọn điện thế chuẩn bằng không là ở đất. Trong lý thuyết, chọn điện thế chuẩn bằng không ở vô cùng nếu điện tích tạo nên trường điện phân bố trong miền không gian hữu hạn.

Khi $\varphi_\infty = 0$ thì $\varphi_A = \int_A^\infty \vec{E}\vec{dl}$. Công thức tính điện thế tại điểm A và φ_A bằng công của lực điện trường thực hiện khi di chuyển một đơn vị điện tích dương từ A ra xa vô cực.

Công của lực điện trường thực hiện khi di chuyển một đơn vị điện tích dương từ A đến B là: $\int_A^B \vec{E}d\vec{l} = -\int_A^B d\varphi \Rightarrow \varphi_A - \varphi_B = \int_A^B \vec{E}d\vec{l}$

$\varphi_A - \varphi_B$: hiệu điện thế giữa hai điểm A và B có giá trị bằng công của lực điện trường khi di chuyển một đơn vị điện tích dương từ A đến B.

Điện trường tĩnh gắn với điện tích q. Trường của điện tích điểm q đối xứng cầu nên:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\Rightarrow \vec{E}d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{r}d\vec{r}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{dr}{r^2}$$

Và $$\varphi(\vec{r}) = \int_r^\infty \vec{E}d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r}$$

Nếu hệ gồm n điện tích điểm q_1, q_2, q_3,…, q_n phân bố trong miền giới nội thì theo nguyên lý chồng chất điện trường tại điểm M có tọa độ $\vec{r}$ là:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + ... + \vec{E}_n$$

Với $\vec{E}_1;\vec{E}_2;\vec{E}_3;...;\vec{E}_n$ là cường độ điện trường do q_1, q_2, q_3,…, q_n gây ra .

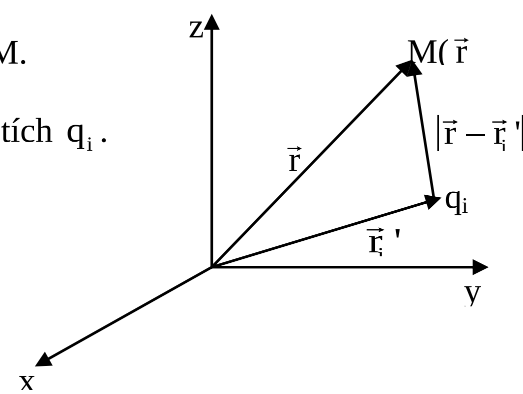
Khi đó: $\varphi(\vec{r}) = \int_r^\infty \vec{E}d\vec{r} = \int_r^\infty \vec{E}_1d\vec{r} + \int_r^\infty \vec{E}_2d\vec{r} + \int_r^\infty \vec{E}_3d\vec{r} + ... + \int_r^\infty \vec{E}_nd\vec{r}$

Điện thế của hệ n điện tích điểm: $\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}$

Tổng quát: $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i'|}$

với $\vec{r} = x\vec{i}_x + y\vec{i}_y + z\vec{i}_z$: vectơ vị trí xác định điểm M.

$\vec{r}' = x'\vec{i}_x + y'\vec{i}_y + z'\vec{i}_z$: vectơ vị trí xác định điện tích q_i .



3.3 Phương trình Poisson và phương trình Laplace:

Xét trong môi trường đồng chất thì độ thẩm điện $\varepsilon = \text{const}$. Khi đó từ phương trình Maxwell: $\text{div}\vec{D} = \rho$ (3.3.1)

Thay $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ và $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$ vào (3.3.1), ta có: $\text{div}(\varepsilon\text{grad}\varphi) = -\rho \Rightarrow \text{div}(\text{grad}\varphi) = -\dfrac{\rho}{\varepsilon}$

Hay $\Delta\varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon}$ (3.3.2) : phương trình Poisson.

Với Δ là toán tử Laplace

-Nếu điện tích phân bố trong thể tích V với mật độ $\rho(\vec{r}\,')$ thì khi đó điện thế tại vị trí M có tọa độ $\vec{r}$ là: $\varphi(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\displaystyle\int_V \dfrac{\rho(\vec{r}\,')d\vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$; trong đó $d\vec{r}\,' = dV' = dx'dy'dz'$

Thật vậy:

Ta tìm nghiệm của phương trình Poisson. Giả sử rằng nghiệm của phương trình Poisson trên có dạng như sau: $\varphi(\vec{r}) = \displaystyle\int_V G(\vec{r},\vec{r}\,')\rho(\vec{r}\,')dV'$ (3.3.3)

Trong đó, $\vec{r}$ là bán kính vectơ điểm khảo sát và $\vec{r}\,'$ là bán kính vectơ nguyên tố điện tích $\rho(\vec{r}\,')dV'$

Thay (3.3.3) vào (3.3.2) ta được: $\displaystyle\int_V \Delta G(\vec{r},\vec{r}\,')\rho(\vec{r}\,')dV' = -\dfrac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon}$ (3.3.4)

Từ phương trình trên ta sử dụng hàm delta Dirac, rút ra được phương trình vi phân đối với hàm $G(\vec{r},\vec{r}\,')$: $\Delta G(\vec{r},\vec{r}') = -\dfrac{\delta(\vec{r} - \vec{r}')}{\varepsilon}$ (3.3.5)

Hàm $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ được gọi là hàm Green của phương trình Poisson đối với không gian đồng tính và đẳng hướng. So sánh (3.3.2) và (3.3.5), ta thấy hàm Green $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ có ý nghĩa là điện thế tại điểm $\vec{r}$ của một điện tích điểm có độ lớn bằng một đơn vị điện tích đặt tại $\vec{r}\,'$.

Giả sử $\vec{r}\,'$ là vectơ cố định, đồng thời đặt $R = |\vec{r} - \vec{r}\,'|$ thì hàm $\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$ có tính đối xứng cầu đối với biến số R. Do đó, hàm Green $G(\vec{r}, \vec{r}\,')$ cũng có tính đối xứng cầu. Vì vậy khi R≠0 thì (3.3.5) viết lại như sau: $\Delta G = \frac{1}{R}\frac{d^2}{dR^2}(RG) = 0 \quad (3.3.6)$

Nghiệm của (3.3.6) có dạng: $G(R) = C_1 + \frac{C_2}{R} \quad (3.3.7)$

Điều kiện $G(R = \infty) = 0$, suy ra $C_1 = 0$. Khi đó, nghiệm của phương trình sẽ là:

$$G(R) = \frac{C_2}{R} \quad (3.3.8)$$

Hàm $G(\vec{r}, \vec{r}\,')$ có ý nghĩa là điện thế tại điểm $\vec{r}$ của một điện tích điểm đơn vị đặt tại điểm $\vec{r}\,'$. Điện trường của điện tích đó tại mọi điểm cách nó một khoảng R có giá trị bằng: $E = |\text{grad}\varphi| = \frac{C_2}{R^2} \quad (3.3.9)$

Điện thông ϕ_E gởi qua mặt cầu bán kính R và tâm là điểm đặt điện tích đơn vị. Từ (3.3.1) ta có : $\phi_E = \frac{1}{\varepsilon} \quad (3.3.10)$

Mặt khác, điện thông ϕ_E còn được tính theo (9): $\phi_E = 4\pi C_2 \quad (3.3.11)$

Từ (3.3.10) và (3.3.11), suy ra: $C_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$

Từ (3.3.8) suy ra: $G(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon R} \quad (3.3.12)$

Thay (3.3.12) vào (3.3.3): $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')dV'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$

-Nếu hệ điện tích phân bố liên tục theo mặt S thì:

$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_S \frac{\sigma(\vec{r}\,')dS'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$; trong đó: dS’ là vi phân mặt theo tọa độ $\vec{r}\,'$.

CHƯƠNG 4: TỪ TRƯỜNG DỪNG

4.1 Hệ phương trình Maxwell mô tả từ trường dừng:

Từ trường dừng là trường từ gây bởi dòng điện không đổi theo thời gian, với các đại lượng đặc trưng cho trường như $\vec{j}, \vec{B}, \vec{H}$ không thay đổi theo thời gian.

Hệ phương trình mô tả trường từ dừng: $\text{rot}\vec{H} = \vec{j}$ (4.1)

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad (4.2)$$

Với môi trường đồng nhất, đẳng hướng tuyến tính thì : $\vec{B} = \mu\vec{H}$

Điều kiện biên trên bề mặt phân cách hai môi trường: $\begin{cases} B_{1n} = B_{2n} \\ H_{2t} - H_{1t} = i_N \end{cases}$

với i_N là mật độ dòng điện mặt chảy trên mặt phân cách hai môi trường.

4.2 Khảo sát từ trường dừng dùng thế vectơ $\vec{A}$:

4.2.1 Thế vectơ $\vec{A}$

Ở miền không có dòng điện thì ta có : $\text{rot}\vec{H} = 0$ nên ta có thể biểu diễn trường từ qua thế vô hướng. Nhưng khi khảo sát miền có dòng điện thì: $\text{rot}\vec{H} = \vec{j} \neq 0$ nên ta không thể biểu diễn trường từ qua thế vô hướng. Do đó, người ta thường khảo sát trường từ dừng qua một đại lượng trung gian khác gọi là thế vectơ $\vec{A}$ mà ta có thể khảo sát được ở miền có dòng điện cũng như không có dòng điện.

Đối với trường từ dừng , từ phương trình (4.2): $\text{div}\vec{B} = 0$ nên ta đặt : $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ (4.3) với $\vec{A}$ gọi là thế vectơ của trường từ. Từ $\vec{A}$ ta tìm được $\vec{B}$ qua đạo hàm nên $\vec{A}$ không xác định đơn giá.

Nếu đặt: $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad}\psi$ (4.4) với ψ là hàm vô hướng bất kỳ phụ thuộc vào tọa độ không gian. Lấy "rot" hai vế phương trình (4.4), ta có:

$$\text{rot}\vec{A}' = \text{rot}\vec{A} + \text{rot}(\text{grad}\psi) \Rightarrow \text{rot}\vec{A}' = \text{rot}\vec{A}$$

Vì theo giải tích vectơ thì $rot(grad\psi) = 0$. Ta thấy rằng, $\vec{A}'$ cũng mô tả trường từ giống như là $\vec{A}$ và vì hàm ψ là hàm bất kỳ nên theo (4.4) có vô số vectơ $\vec{A}'$ sai khác với $\vec{A}$ một hàm. Vậy vectơ $\vec{A}$ xác định theo (4.3) là không đơn trị. Do tính không đơn trị, người ta chọn thế vectơ $\vec{A}$ thỏa mãn thêm điều kiện phụ nào đó. Đối với trường từ dừng thì người ta chọn điều kiện là: $div\vec{A} = 0$. Với điều kiện như vậy thì thế vectơ $\vec{A}$ sẽ được xác định là duy nhất.

4.2.2 Phương trình Poisson- Phương trình Laplace:

Giả sử đối với môi trường đồng nhất, đẳng hướng tuyến tính thì độ từ thẩm $\mu = const$ và $\vec{B} = \mu\vec{H}$

Ta có: $rot\vec{B} = rot\left(\mu\vec{H}\right) \Rightarrow rot\vec{B} = \mu rot\vec{H}$

Mặt khác từ (4.1): $rot\vec{H} = \vec{j}$ nên $rot\vec{B} = \mu.rot\vec{H} = \mu.\vec{j}$ (4.5)

Thay $\vec{B} = rot\vec{A}$ vào (4.5), ta có: $rot(rot\vec{A}) = \mu\vec{j}$

Theo giải tích vectơ thì: $rot(rot\vec{A}) = grad(div\vec{A}) - \Delta\vec{A} \Rightarrow \Delta\vec{A} = -rot(rot\vec{A}) = -\mu\vec{j}$

(vì $div\vec{A} = 0$)

Vậy : $\Delta\vec{A} = -\mu\vec{j}$ (4.6) : phương trình Poisson của thế vectơ.

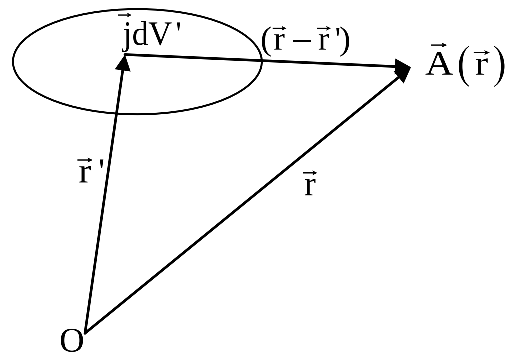
Trong hệ tọa độ Decartes thì : $\begin{cases} \Delta\vec{A} = \Delta A_x\vec{i}_x + \Delta A_y\vec{i}_y + \Delta A_z\vec{i}_z \\ \vec{j} = j_x\vec{i}_x + j_y\vec{i}_y + j_z\vec{i}_z \end{cases}$ nên từ (4.6) ta có thể viết lại thành 3 phương trình thành phần như sau: $\begin{cases} \Delta A_x = -\mu j_x \\ \Delta A_y = -\mu j_y \\ \Delta A_z = -\mu j_z \end{cases}$

Ở nơi không có dòng điện $(\vec{j} = 0)$ thì $\Delta\vec{A} = 0$: phương trình Laplace của thế vectơ.

4.2.3 Nghiệm $\vec{A}$ của phương trình Poisson – phương trình Laplace:

Xét trong môi trường đồng nhất vô hạn thì $\mu = \text{const}$ mọi nơi. Để tìm nghiệm $\vec{A}$ của phương trình Poisson $\Delta\vec{A} = -\mu\vec{j}$ trong trường hợp dòng dẫn phân bố với mật độ khối $\vec{j}$ trong thể tích hữu hạn V', ta vận dụng sự tương tự như với điện trường tĩnh ta có nghiệm $\varphi(\vec{r})$ của phương trinh Poisson của thế vô hướng: $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$. Từ đó ta cũng dễ dàng suy ra rằng:

$$\begin{cases} A_x = \dfrac{\mu}{4\pi}\displaystyle\int_{V'}\dfrac{j_x.dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \\ A_y = \dfrac{\mu}{4\pi}\displaystyle\int_{V'}\dfrac{j_y.dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \\ A_z = \dfrac{\mu}{4\pi}\displaystyle\int_{V'}\dfrac{j_z.dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \end{cases}$$



(Hình 4.1)

Từ đó suy ra:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad (4.7)$$

Với $\vec{r}$: vectơ vị trí xác định điểm tại đó cần tính trường.

$\vec{r}\,'$: vectơ vị trí xác định vị trí của dV'(điểm nguồn).

$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$: vectơ vị trí xác định khoảng cách giữa điểm nguồn và điểm cần tính trường.

Và $\vec{A}(\vec{r} = \infty) = 0$.

Ta có thể tính $\vec{B}$ nếu ta lấy "rot$\vec{A}$":

$$\text{rot}\vec{A}(\vec{r}) = \text{rot}\left(\frac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) = \frac{\mu}{4\pi}\text{rot}\left(\int_{V'}\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{V'}dV'\,\text{rot}\left(\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}\right)$$

Ta có:

$$\mathrm{rot}\left(\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}\right) = \mathrm{grad}\left(\frac{1}{R}\right)\times\vec{j} + \frac{1}{R}.\mathrm{rot}\vec{j}(\vec{r}\,')$$

Vì "rot" lấy theo tọa độ điểm tính trường x, y, z còn $\vec{j}$ chỉ phụ thuộc tọa độ điểm nguồn x', y', z' nên $\mathrm{rot}\vec{j}(\vec{r}\,') = 0$.

$$\mathrm{grad}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\partial\left(1/R\right)}{\partial x}\vec{i}_x + \frac{\partial\left(1/R\right)}{\partial y}\vec{i}_y + \frac{\partial\left(1/R\right)}{\partial z}\vec{i}_z$$

Thay $R = |\vec{r} - \vec{r}\,'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ vào $\mathrm{grad}\left(\frac{1}{R}\right)$, ta thu được:

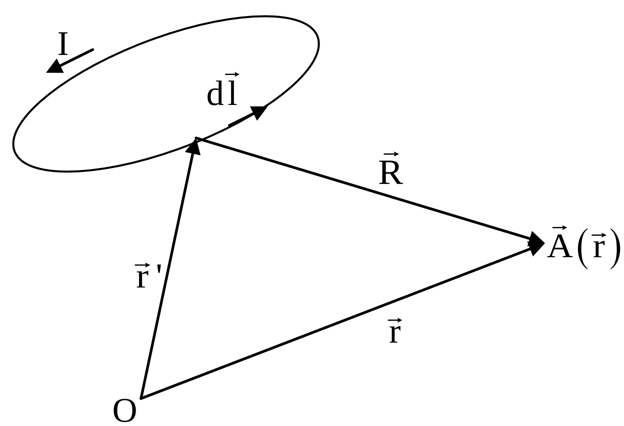
$$\mathrm{grad}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\vec{R}}{R^3}$$

Suy ra : $\mathrm{rot}\left(\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}\right) = -\frac{\vec{R}\times\vec{j}(\vec{r}\,')}{R^3} = \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')\times\vec{R}}{R^3}$

Vậy:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mathrm{rot}\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')\times\vec{R}}{R^3}dV' \qquad (4.8)$$

- Đối với dòng kín L có dòng điện I chạy trong mạch với dây dẫn rất mảnh có kích thước tiết diện ngang rất nhỏ so với khoảng tới điểm tính trường. Ta gọi đó là dòng điện dây. Môi trường xung quanh có $\mu = \mathrm{const}$ mọi nơi.



(Hình 4.2)

Đối với yếu tố dòng vô cùng bé, ta có: $\vec{j}.dV' = \vec{j}.S.dl'$ (4.9)

(trong đó S là diện tích tiết diện ngang).

Khi dây dẫn rất mảnh thì $\vec{j}\,//\,\overrightarrow{dl'}$, (4.9) được viết lại:

$\vec{j}.dV' = j.S.\overrightarrow{dl'} \Rightarrow \vec{j}.dV' = I.\overrightarrow{dl'}$

Vậy (4.7), (4.8) được viết lại:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi}\oint_L \frac{\overrightarrow{dl'}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi}\oint_L \frac{\overrightarrow{dl'} \times \vec{R}}{R^3}$$

PHẦN HAI: BÀI TẬP VÀ CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

CHƯƠNG 1: ĐIỆN TRƯỜNG TĨNH.

Dạng 1: Áp dụng nguyên lý chồng chất điện trường $\rightarrow$Xác định vectơ cường độ điện trường.

Bài 1: Một dây dẫn mảnh thẳng dài vô hạn, tích điện đều với mật độ dài λ.

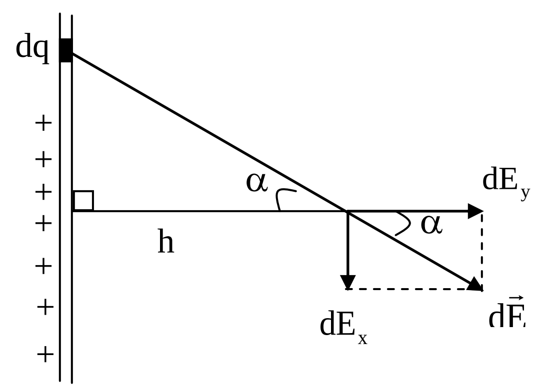
Tính điện trường cách dây dẫn một đoạn h.

Giải:

Trên sợi dây dẫn ta lấy một đoạn vi phân dl đủ nhỏ xem như điện tích điểm, gây ra tại điểm M cách dây dẫn một đoạn h điện trường là $d\vec{E}$. Ta chiếu $d\vec{E}$ lên hai phương vuông góc Ox và Oy.

Ta có: $d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y$

Do tính đối xứng nên các thành phần theo phương Ox triệt tiêu lẫn nhau, chỉ còn lại các thành phần theo phương Oy.



Hình 1.1

Khi đó, giá trị cường độ điện trường do phần tử dl của sợi dây gây ra tại M là:

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\lambda dl}{r^2}$$

Cường độ điện trường do sợi dây dẫn dài vô hạn gây ra tại M là:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dE_y = \int_{-\infty}^{+\infty} dE.\cos\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha.dl}{r^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha}{\left(h^2+l^2\right)}dl \quad (1.1)$$

Ta có: $tg\alpha = \frac{l}{h} \Rightarrow l = h.tg\alpha \Rightarrow dl = h.\frac{1}{\cos^2\alpha}d\alpha \quad (1.2)$

Thay (1.2) vào (1.1), ta được:

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{h}{\left(h^2+h^2tg^2\alpha\right)}.\frac{1}{\sqrt{h^2+h^2tg^2\alpha}}.\frac{h}{\cos^2\alpha}d\alpha$$

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{h^2}{\left[h^2\left(1+tg^2\alpha\right)\right]^{3/2}}\frac{1}{\cos^2\alpha}d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon h}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\alpha.d\alpha$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon h}$$

Bài 2: Tính cường độ điện trường tại M, trên trục của một đĩa tròn bán kính a, tích điện đều với điện tích q. M cách tâm một khoảng h, hệ đặt trong chân không.

Giải:

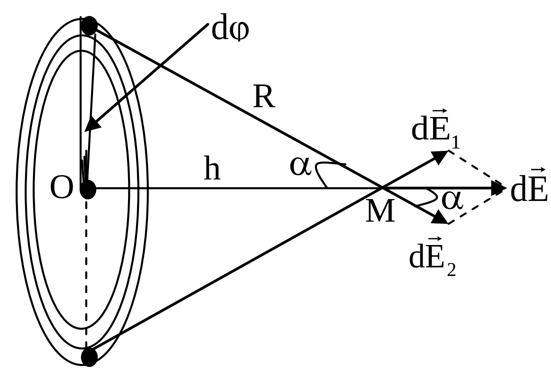
Xét trường hợp đĩa mang điện dương. Giả sử trên đĩa, điện tích được phân bố liên tục với mật độ điện mặt không đổi là $\sigma = \frac{q}{\pi a^2}$.

Ta chia đĩa tròn thành những diện tích vô cùng nhỏ, giới hạn bởi các vòng tròn tâm O bán kính r và r + dr và bởi hai bán kính hợp với trục cực OX các góc φ và $\varphi + d\varphi$.

Diện tích dS và điện tích dq lần lượt có giá trị:

$dS = r.d\varphi.dr$ và $dq = \sigma.dS = \sigma.r.dr.d\varphi$

Do dq được xem như là điện tích điểm nên vectơ cường độ điện trường do nó gây ra tại M có phương chiều như hình (1.2).



Hình 1.2

$$dE_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\sigma r.dr.d\varphi}{R^2}$$

Trong đó: $R^2 = h^2 + r^2$

Vì lí do đối xứng nên vectơ cường độ điện trường tại M chỉ có các thành phần theo phương dọc theo trục của đĩa. Và $dE_1 = dE_2$.

Vectơ cường độ điện trường tổng hợp $d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2$

Chiếu $d\vec{E}$ lên trục OM, ta có: $dE = 2.dE_1.\cos\alpha$

Mà $\cos\alpha = \dfrac{h}{R}$

Thay dE_1 và $\cos\alpha$ vào dE, ta có: $dE = \dfrac{2}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{\sigma.h.r.dr.d\varphi}{R^3} = \dfrac{\sigma.h}{2\pi\varepsilon_o}\dfrac{r.dr.d\varphi}{\left(h^2+r^2\right)^{3/2}}$

Theo nguyên lý chồng chất điện trường, vectơ cường độ điện trường do toàn bộ đĩa tròn gây ra tại M hướng theo trục OM (vì mọi $d\vec{E}$ đều hướng theo trục OM) là:

$$E = \frac{\sigma.h}{2\pi\varepsilon_o}\int_o^a \frac{r.dr}{\left(r^2+h^2\right)^{3/2}}\int_0^\pi d\varphi = \frac{\sigma h\pi}{2\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}\right)\Bigg|_0^a$$

$$E = \frac{\sigma h}{2\varepsilon_o}\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{h^2+a^2}}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+a^2/h^2}}\right)$$

Bài 3: Bên trong quả cầu tích điện đều với mật độ điện tích khối có một lỗ trống tròn, tâm của lỗ trống cách tâm của quả cầu một khoảng a. Tìm vectơ điện trường bên trong lỗ, trong quả cầu, ngoài quả cầu. Các bán kính của quả cầu và lỗ là R và r.

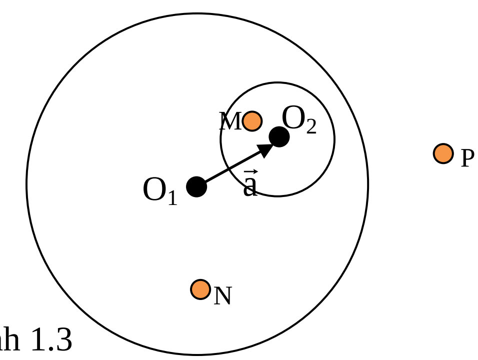
Giải:

a/ Chọn mặt Gauss là mặt cầu($O_{1,}\vec{r}_1$) . Điện trường do quả cầu tâm O_1 gây ra tại M có

$\vec{r}_1 = \overrightarrow{O_1M}$

$$E_1.4\pi r_1^2 = \frac{\rho.4/3.\pi.r_1^3}{\varepsilon_o} \Rightarrow E_1 = \frac{\rho r_1}{3\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\vec{r}_1$$



Hình 1.3

Chọn mặt Gauss là mặt cầu ($O_{2,}\vec{r}_2$) .Điện trường do quả cầu tâm O_2 (xem như hốc được lấp đầy điện tích) gây ra tại M có $\vec{r}_2 = \overrightarrow{O_2M}$

$$E_2.4\pi r_2^2 = \frac{\rho.\frac{4}{3}.\pi r_2^3}{\varepsilon_o} \Rightarrow E_2 = \frac{\rho r_2}{3\varepsilon_o} \Rightarrow \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\vec{r}_2$$

Theo nguyên lý chồng chất điện trường, ta có cường độ điện trường bên trong hốc :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 - \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\left(\overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_2M}\right) = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\overrightarrow{O_1O_2} = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\vec{a}$$

Với $\vec{a}$ là vectơ bán kính từ tâm quả cầu đến tâm của hốc.

b/ Tương tự như cách làm câu trên, ta có

Điện trường do quả cầu tâm O_1 gây ra tại N có $\vec{r}_1' = \overrightarrow{O_1N}$

$$E'_1.4\pi r'^2_1 = \frac{\rho.\frac{4}{3}.\pi.r'^3_1}{\varepsilon_o} \Rightarrow E'_1 = \frac{\rho r'_1}{3\varepsilon_o} \Rightarrow \vec{E}'_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\vec{r}'_1$$

Điện trường do quả cầu tâm O_2 (xem như lỗ trống được lấp đầy điện tích) gây ra tại N có $\vec{r}'_2 = \overrightarrow{O_2N}$

$$E'_2.4\pi r'^2_2 = \frac{\rho.\frac{4}{3}.\pi r^3}{\varepsilon_o} \Rightarrow E'_2 = \frac{\rho r^3}{3\varepsilon_o}\frac{1}{r'^2_2} \Rightarrow \vec{E}'_2 = \frac{\rho r^3}{3\varepsilon_o}\frac{\left(\vec{r}'_1 - \vec{a}\right)}{\left|\vec{r}'_1 - \vec{a}\right|^3}$$

Vậy cường độ điện trường bên trong quả cầu nhưng ngoài hốc:

$$\vec{E}' = \vec{E}'_1 - \vec{E}'_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\vec{r}'_1 - \frac{\rho r^3}{3\varepsilon_o}\frac{\left(\vec{r}'_1 - \vec{a}\right)}{\left|\vec{r}'_1 - \vec{a}\right|^3}$$

c/ Điện trường do quả cầu tâm O_1 gây ra tại P (P nằm ngoài quả cầu) có $\vec{r}_1* = \overrightarrow{O_1P}$

$$E_1^*.4\pi r^{*2}_1 = \frac{\rho.\frac{4}{3}.\pi R^3}{\varepsilon_o} \Rightarrow E_1^* = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_o r^{*2}_1} \Rightarrow \vec{E}_1^* = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_o}\frac{\vec{r}_1^*}{\left(\vec{r}_1^*\right)^3}$$

Điện trường do quả cầu tâm O_2 (xem như lỗ trống được lấp đầy điện tích) gây ra tại P có $\vec{r}_2^* = \overrightarrow{O_2P}$.

$$E_2^*.4\pi r_2^{*2} = \frac{\rho\, {}^4\!/_3 .\pi r^3}{\varepsilon_o} \Rightarrow E_2^* = \frac{\rho r^3}{3\varepsilon_o}\frac{1}{r_2^{*2}} \Rightarrow \vec{E}_2^* = \frac{\rho r^3}{3\varepsilon_o}\frac{\left(\vec{r}_1^* - \vec{a}\right)}{\left|\vec{r}_1^* - \vec{a}\right|^3}$$

Vậy cường độ điện trường bên ngoài quả cầu: $\vec{E}^* = \vec{E}_1^* - \vec{E}_2^* = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_o}\frac{\vec{r}_1^*}{\left(\vec{r}_1^*\right)^3} - \frac{\rho r^3}{3\varepsilon_o}\frac{\left(\vec{r}_1^* - \vec{a}\right)}{\left|\vec{r}_1^* - \vec{a}\right|^3}$

Dạng 2: Áp dụng định luât Gauss cho bài toán đối xứng trụ, đối xứng cầu, đối xứng phẳng,… $\rightarrow$ xác định vectơ cường độ điện trường,điện thế,…

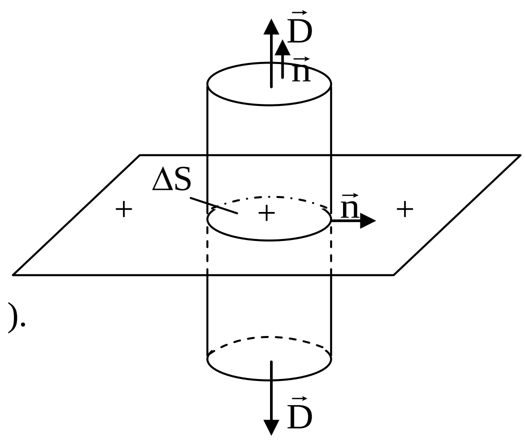
Bài 1:   Xác định vectơ điện trường của :

- Mặt phẳng vô hạn, tích điện đều với mật độ điện mặt σ.
- Mặt trụ tròn dài vô hạn, bán kính a, mật độ điện dài là χ.
- Mặt cầu tích điện đều, bán kính a, điện tích q.
- Quả cầu tích điện đều, bán kính a, mật độ điện tích khối là ρ.

Giải:

a/ Giả sử mặt phẳng vô hạn tích điện dương, có mật độ điện mặt là σ.

Chọn mặt Gauss là mặt trụ kín có hai đáy song song bằng nhau cách đều mặt phẳng, có các đường sinh vuông góc với mặt phẳng.



Hình 1.4

Theo định nghĩa thông lượng cảm ứng điện qua mặt trụ kín bằng:

$$\phi_e = \int_{tru} \vec{D}\overrightarrow{dS} = \int_{2\,day} D_n dS + \int_{mat\ bên} D_n dS$$

(với D_n : hình chiếu của $\vec{D}$ trên pháp tuyến $\vec{n}$).

Tại mỗi điểm của mặt bên $D_n = 0$, tại mọi điểm trên hai đáy $D_n = D = const$. Vì vậy:

$$\int_{2\,day} D_n dS = D\int_{2\,day} dS = 2.D.\Delta S$$

Theo định lý Ôxtrogratxki – Gauss:

$$\phi_e = 2.D.\Delta S = \sigma.\Delta S \Rightarrow D = \frac{\sigma}{2} \qquad \text{Và} \quad E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$$

b/ Giả sử mặt trụ tròn dài vô hạn tích điện dương, bán kính a, mật độ điện dài là χ.

Chọn mặt Gauss là mặt trụ tròn kín đồng trục với với mặt trụ tròn tích điện có bán kính r > a. có hai đáy song song và vuông góc với trục cách nhau một khoảng l, có các đường sinh song song với trục.

Thông lượng cảm ứng điện gửi qua mặt trụ kín:

$$\phi_e = \oint\limits_{\text{mat tru}} \vec{D}.\overrightarrow{dS} = \int\limits_{2\,day} D_n.dS + \int\limits_{\text{mat bên}} D_n.dS$$

Tại mỗi điểm của mặt bên thì D_n = D = const, tại mọi điểm của hai đáy thì D_n = 0 ($\vec{D}$ vuông góc với $\vec{n}$). Do đó: $\phi_e = \int\limits_{\text{mat bên}} D_n.dS = D.2\pi rl$

Theo định lý Ôxtrogratxki – Gauss: $\phi_e = D.2\pi rl = \chi.l \Rightarrow D = \dfrac{\chi}{2\pi r}$

Và: $E = \dfrac{D}{\varepsilon} = \dfrac{\chi}{2\pi\varepsilon r} \Rightarrow \vec{E} = \dfrac{\chi}{2\pi\varepsilon r^2}\vec{r}$

c/ Giả sử mặt cầu tích điện đều mang điện dương, điện tích q, bán kính a.

Chọn mặt Gauss là mặt cầu kín đồng tâm với mặt cầu mang điện dương tích điện đều.

Với cách làm tương tự bằng cách dùng định lý Ôxtrogratxki – Gauss, ta xét cường độ điện trường do mặt cầu gây ra tại điểm M bất kỳ có khoảng cách r tính từ tâm mặt cầu đến điểm cần xét:

+ 0 <r < a: $E_1.4\pi r^2 = 0 \Rightarrow E_1 = 0$

+a < r : $E_2.4\pi r^2 = \dfrac{q}{\varepsilon} \Rightarrow E_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon r^2} \Rightarrow \vec{E}_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon r^3}\vec{r}$

d/ Giả sử quả cầu tích điện dương, mật độ điện tích khối là ρ, bán kính a.

Chọn mặt Gauss là mặt cầu kín đồng tâm với quả cầu mang điện dương. Cường độ điện trường do quả cầu gây ra tại điểm M bất kỳ.

+ Với 0 < r < a: $E_1.4\pi r^2 = \dfrac{\rho.{}^4\!/_3.\pi r^3}{\varepsilon} \Rightarrow E_1 = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon} \Rightarrow \vec{E}_1 = \dfrac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon}$.

+ Với a < r: $E_2.4\pi r^2 = \dfrac{\rho.{}^4\!/_3.\pi a^3}{\varepsilon} \Rightarrow E_2 = \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon r^2} \Rightarrow \vec{E}_2 = \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon r^3}\vec{r}$.

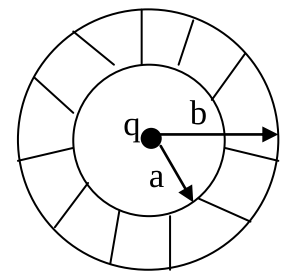
Bài 2: Trong trạng thái cân bằng, một lớp vỏ dẫn điện hình cầu, bán kính trong là a, bán kính ngoài là b, có một điện tích được giữ cố định ở tâm và một mật độ điện tích σ

phân bố đều ở mặt ngoài. Hãy tìm điện trường cho tất cả các giá trị của r và điện tích của mặt trong lớp dẫn đó.

Giải

Theo đề, lớp vỏ dẫn điện hình cầu đang ở trạng thái cân bằng tĩnh điện nên toàn bộ điện tích trên bề mặt bên trong của lớp dẫn điện phải bằng –q.

Để tìm điện trường cho tất cả các giá trị của r thì ta áp dụng định lý Ôxtrogratxki – Gauss. Chọn mặt Gauss là mặt cầu kín đồng tâm lớp vỏ dẫn điện.



Hình 1.5

+ Với 0 < r < a: $E_1.4\pi r^2 = q \Rightarrow E_1 = \dfrac{q}{4\pi r^2} \Rightarrow \vec{E}_1 = \dfrac{q}{4\pi r^3}\vec{r}$.

+ Với a < r < b: $E_2.4\pi r^2 = 0 \Rightarrow E_2 = 0$.

+ Với b < r : $E_3.4\pi r^2 = \dfrac{\sigma.4\pi b^2}{\varepsilon} \Rightarrow E_3 = \dfrac{\sigma b^2}{\varepsilon r^2} \Rightarrow \vec{E}_3 = \dfrac{\sigma b^2}{\varepsilon r^3}\vec{r}$

Bài 3: Khoảng không gian giữa hai hình cầu đồng tâm có bán kính R_1 và R_2 ($R_1 < R_2$) được tích điện với mật độ điện khối là $\rho = \dfrac{\alpha}{r^2}$. Tìm điện tích toàn phần q, thế điện và cường độ điện trường trong các miền của r. Xét trường hợp giới hạn , ở đây coi

q = const.

Giải:

+ Mật độ điện tích chỉ phụ thuộc vào bán kính r nên điện tích toàn phần:

$$q = \int_V \rho dV = \int_{R_1}^{R_2} \rho.4\pi r^2 dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\alpha}{r^2}.4\pi r^2 dr \Rightarrow q = \int_{R_1}^{R_2} \alpha.4\pi dr = 4\pi\alpha\, r\Big|_{R_1}^{R_2} = 4\pi\alpha\left(R_2 - R_1\right)$$

Vậy $q = 4\pi\alpha\left(R_2 - R_1\right)$ (C).

Chọn mặt Gauss là các mặt cầu đồng tâm với hình cầu. Áp dụng định lý Ôxtrogratxki – Gauss.

+ $0 < r < R_1$: $E_1 = 0$.

+ $R_1 < r < R_2$: $E_2.4\pi r^2 = \dfrac{\int\limits_{R_1}^{r} \rho.4\pi r^2 dr}{\varepsilon_o} \Rightarrow E_2 = \dfrac{\alpha(r - R_1)}{\varepsilon_o r^2} = \dfrac{q(r - R_1)}{4\pi(R_2 - R_1)\varepsilon_o r^2}$.

+ $R_2 < r$: $E_3.4\pi r^2 = q \Rightarrow E_3 = \dfrac{q}{4\pi r^2}$.

Điện thế trong các miền tương ứng: (chọn thế $\varphi(\infty) = 0$)

+ $0 < r < R_1$:

$$\varphi_1 = \int\limits_{r}^{R_1} E_1 dr + \int\limits_{R_1}^{R_2} E_2 dr + \int\limits_{R_2}^{\infty} E_3 dr = \int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_o(R_2 - R_1)}\left(\frac{1}{r} - \frac{R_1}{r^2}\right) dr + \int\limits_{R_2}^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dr}{r^2}$$

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o(R_2 - R_1)}\left(\ln r\Big|_{R_1}^{R_2} + \frac{R_1}{r}\Big|_{R_1}^{R_2}\right) - \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r}\Big|_{R_2}^{\infty}$$

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o(R_2 - R_1)}\left(\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{R_1(R_1 - R_2)}{R_1 R_2}\right) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_o R_2}$$

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o(R_2 - R_1)}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

+ $R_1 < r < R_2$:

$$\varphi_2 = \int\limits_{r}^{R_2} E_2 dr + \int\limits_{R_2}^{\infty} E_3 dr = \int\limits_{r}^{R_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_o(R_2 - R_1)}\left(\frac{1}{r} - \frac{R_1}{r^2}\right) dr + \int\limits_{R_2}^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dr}{r^2}$$

$$\varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o(R_2 - R_1)}\left(\ln r\Big|_{r}^{R_2} + \frac{R_1}{r}\Big|_{r}^{R_2}\right) - \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r}\Big|_{R_2}^{\infty}$$

$$\varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o(R_2 - R_1)}\left(\ln\frac{R_2}{r} + R_1\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{r}\right)\right) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_o R_2}$$

$$\varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o(R_2 - R_1)}\left(1 - \frac{R_1}{r} + \ln\frac{R_2}{r}\right)$$

+ $R_2 < r$:

$$\varphi_3 = \int\limits_{r}^{\infty} E_3 dr = \int\limits_{r}^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r}\Big|_{r}^{\infty} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r}$$

Dạng 3: Áp dụng phương pháp ảnh điện để xác định các yếu tố trong điện trường.

Khi các điện tích đặt gần biên giới hai hay nhiều môi trường khác nhau, trên biên giới sẽ xuất hiện các điện tích cảm ứng nếu đó là biên giới của hai môi trường điện môi – vật dẫn hoặc các điện tích phân cực nếu đó là môi trường các điện môi khác nhau.

Bằng cách thay hai hay nhiều môi trường khác nhau bằng một môi trường đồng nhất; đồng thời đưa thêm vào môi trường đồng nhất những điện tích mới sao cho cùng với điện tích ban đầu bảo đảm các điều kiện biên như trước. Đó là nội dung của phương pháp ảnh điện.Việc đưa thêm các điện tích vào liên quan tới điện tích ban đầu theo một quy luật nào đó nên được gọi là điện tích ảnh.

Do tính chất duy nhất của nghiệm phương trình của trường nghiệm của bài toán thay thế cũng là nghiệm của bài toán ban đầu cần tìm vì điều kiện biên vẫn như cũ.

❖ **Nội dung định lý về tính duy nhất nghiệm các phương trình Maxwell.**

Các nghiệm $\vec{E},\vec{H}$ nhận được khi giải các phương trình Maxwell đối với điều kiện ban đầu và điều kiện biên xác định là duy nhất.

+ Điều kiện ban đầu: Tại thời điểm ban đầu t = 0 các vectơ đặc trưng cho trường $\vec{E}\left(x,y,z,t=0\right),\vec{H}\left(x,y,z,t=0\right)$ được xác định duy nhất tại mọi điểm P (x, y, z) trong miền có thể tích V có trường điện từ.

+ Điều kiện biên: Trên biên S – mặt kín bao thể tích V – thành phần tiếp tuyến của vectơ $\vec{E}\left(S,t\right)$ và thành phần tiếp tuyến của vectơ $\vec{H}\left(S,t\right)$ được xác định duy nhất trong khoảng thời gian khảo sát trường.

Giải sử có hai nghiệm khác nhau của phương trình Maxwell $\vec{E}_1,\vec{H}_1$ và $\vec{E}_2,\vec{H}_2$ thỏa mãn điều kiện ban đầu và điều kiện biên trên.

Áp dụng nguyên lý chồng trường: $\begin{matrix}\vec{E}_3=\vec{E}_1-\vec{E}_2\\ \vec{H}_3=\vec{H}_1-\vec{H}_2\end{matrix}$ (1.3) cũng là nghiệm của phương trình Maxwell nhưng với điều kiện ban đầu và điều kiện biên khác trước.

Điều kiện ban đầu: $\begin{array}{l}\vec{E}_1(t=0)=\vec{E}_2(t=0)=\vec{E}(t=0)\\ \vec{H}_1(t=0)=\vec{H}_2(t=0)=\vec{H}(t=0)\end{array}$

Thay vào (1.3): $\vec{E}_3(t=0)=0$ và $\vec{H}_3(t=0)=0$

Điều kiện biên, trên biên S bao thể tích V: $\begin{array}{l}E_{1t}(S,t)=E_{2t}(S,t)=E_t(S,t)\\ H_{1t}(S,t)=H_{2t}(S,t)=H_t(S,t)\end{array}$

Thay vào (1.3): $E_{3t}(S,t)=0$ và $H_{3t}(S,t)=0$

Vậy chi có thành phần pháp tuyến của $\vec{E}_3,\vec{H}_3$ trên biên S. Do đó:

$\oint\limits_S(\vec{E}_3\times\vec{H}_3)d\vec{S}=\oint\limits_S\vec{P}d\vec{S}=0$ (1.4) với $\vec{P}=(\vec{E}\times\vec{H})$: vectơ Pointing (vectơ mật độ dòng công suất).

Mà $-\oint\limits_S\vec{P}\overline{dS}=\int\limits_V\vec{j}\vec{E}_3dV+\dfrac{\partial W}{\partial t}=0$ (1.5)

Công suất tiêu tán: $P_j=\int\limits_V\vec{j}\vec{E}_3dV=\int\limits_V\gamma E_3^2dV$: là đại lượng dương hay bằng không. Do đó, từ (1.5) suy ra $\dfrac{\partial W}{\partial t}$ phải âm hay bằng không. Nhưng thời điểm ban đầu, năng lượng điện trường bằng không mà năng lượng không thể âm nên nó vẫn giữ nguyên bằng không ban đầu. Vì vậy, $\vec{E}_3,\vec{H}_3$ bằng không tại mọi thời điểm và bất cứ điểm nào trong miền V. Từ (1.3), suy ra $\vec{E}_1=\vec{E}_2$ và $\vec{H}_1=\vec{H}_2$ các nghiệm trùng nhau. Vậy phương trình Maxwell có nghiệm duy nhất ứng với điều kiện ban đầu và điều kiện biên xác định.

Bài 1: Một điện tích điểm q đặt tại điểm A cách mặt phẳng phân chia hai môi trường điện môi vô hạn một khoảng a, hằng số điện môi của các môi trường là ε_1 và ε_2. Tìm điện thế φ và lực tác dụng lên điện tích q.

Giải:

Muốn xác định điện trường trong môi trường thứ nhất, ta đưa vào điện tích ảnh q_1 đối xứng với điện tích q qua mặt phân chia hai môi trường, cả hai điện tích q và q_1 đều cùng nằm trong môi trường có độ thẩm điện là ε_1. Khi đó, tại điểm M bất kỳ trên mặt phân cách hai môi trường thì thành phần tiếp tuyến của vectơ cường độ điện trường và thành phần pháp tuyến vectơ cảm ứng điện lần lượt là:

$$E_{1t} = E\cos\alpha + E_1\cos\alpha = \left(\frac{q+q_1}{4\pi\varepsilon_1 r^2}\right)\cos\alpha$$

$$D_{1n} = D\sin\alpha - D_1\sin\alpha = \left(\frac{q-q_1}{4\pi r^2}\right)\sin\alpha$$

Muốn xác định cường độ điện trường trong môi trường thứ hai, ta thay điện tích q và q_1 bằng điện tích q_2 đặt tại q, môi trường có độ thẩm điện là ε_2. Khi đó, tại diểm M bất kỳ trên mặt phân cách hai môi trường thì thành phần tiếp tuyến của vectơ cường độ điện trường và thành phần pháp tuyến vectơ cảm ứng điện lần lượt là:

$$E_{2t} = E_2\cos\alpha = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_1 r^2}\cos\alpha$$

$$D_{1n} = D_2\sin\alpha = \frac{q_2}{4\pi r^2}\sin\alpha$$

Khi có sự xuất hiện các điện tích ảnh thì vẫn phải đảm bảo các điều kiện biên:

$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow \frac{q+q_1}{\varepsilon_1} = \frac{q_2}{\varepsilon_2} \quad (1.6)$$

$$D_{1n} = D_{2n} \Rightarrow q - q_1 = q_2 \quad (1.7)$$

Giải hệ phương trình (1.6) và (1.7), ta được:

$$q_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q \qquad q_2 = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q$$

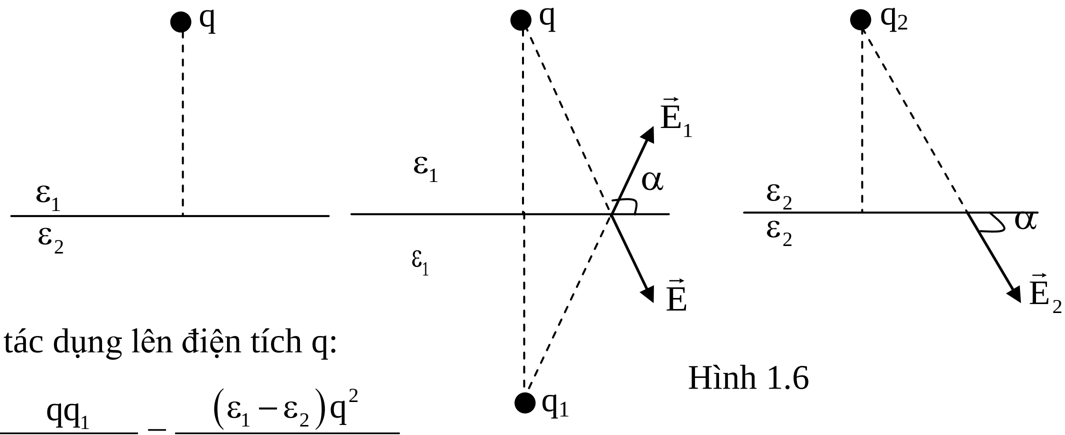
Khi đó, điện thế trong môi trường có độ thẩm điện ε_1:

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1 r} + \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_1 r_1} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1 r} + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)q}{4\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r_1} = \left(\frac{1}{r} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{r_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\right)\frac{q}{4\pi\varepsilon_1}$$

(với $\vec{r}_1$ là vectơ từ điện tích ảnh q_1 đến điểm cần tính thế).

Điện thế trong môi trường có độ thẩm điện ε_2:

$$\varphi_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_2 r} = \frac{2\varepsilon_2 q}{4\pi\varepsilon_2\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)r} = \frac{q}{2\pi\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)r}$$

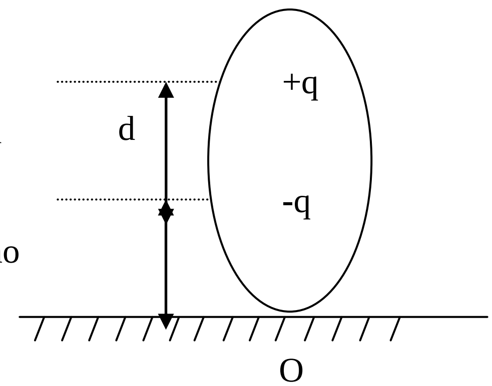


Hình 1.6

Lực tác dụng lên điện tích q:

$$F = \frac{qq_1}{4\pi\varepsilon_1(2a)^2} = \frac{\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)q^2}{\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)16\pi a^2\varepsilon_1}$$

Bài 2: Khi một đám mây bay qua một điểm nào đó trên mặt đất, một điện trường hướng thẳng đứng E = 1000V/m được ghi lại ở chỗ này. Đáy của đám mây có chiều cao d=300m tính từ mặt đất và đỉnh của đám mây có chiều cao d = 300m tính từ đáy của nó. Giả sử đám mây trung hòa về điện nhưng có sự phân bố điện tích: một điện tích +q ở đỉnh của nó và một điện tích –q ở đáy của nó. Hãy ước lượng độ lớn của điện tích và lực điện tử bên ngoài (hướng và độ lớn) tác dụng lên đám mây. Có thể giả thiết rằng không có các điện tích khác ở trong khí quyển ngoài các điện tích trên đám mây.

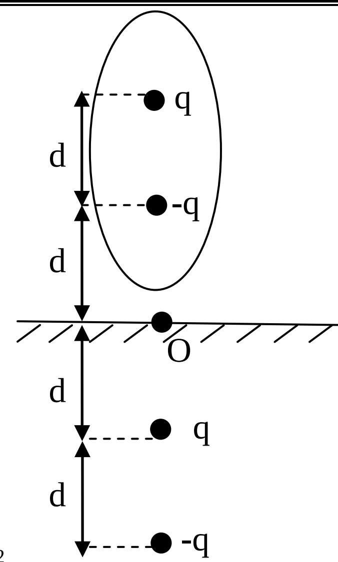


Giải:

Chúng ta sử dụng phương pháp ảnh điện với mặt đất chính là mặt phẳng dẫn. Khi đó, các điện tích ảnh được đặt đối xứng qua mặt phẳng dẫn.Khi đó, cường độ điện trường tại O:

$$E = 2\frac{q}{4\pi\varepsilon_o d^2} - 2\frac{q}{4\pi\varepsilon_o (2d)^2} = \frac{3q}{8\pi\varepsilon_o d^2}$$

$$\Rightarrow q = \frac{8\pi\varepsilon_o d^2 E}{3} = \frac{8\pi.8,86.10^{-12}.9.10^4.10^2}{3} = 6,67.10^{-4}(C)$$



Hình 1.7

Lực điện từ bên ngoài tác dụng vào đám mây (lực do các điện tích ảnh tác dụng lên đám mây).

$$F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o (3d)^2} - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o (2d)^2} + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o (3d)^2} - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o (4d)^2}$$

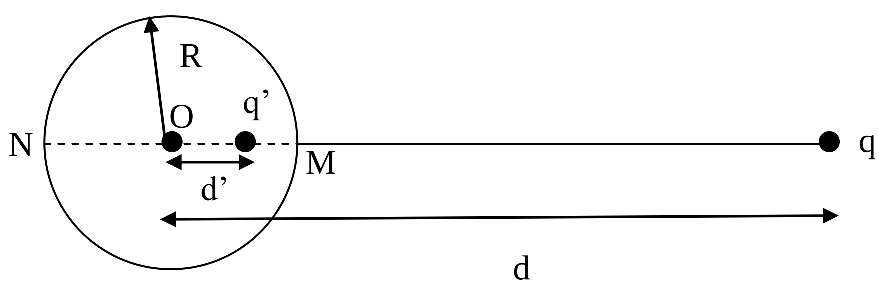
$$F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o d^2}\left(\frac{2}{9} - \frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right) = -\frac{13}{144}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o d^2} - \frac{13}{144}\frac{\left(6,67.10^{-4}\right)^2}{4\pi.8,86.10^{-12}.9.10^4}$$

$$F = -4,008.10^{-3}(N)$$

Lực này đóng vai trò là lực hút.

Bài 3: Một điện tích điểm q nằm cách tâm quả cầu dẫn điện nối đất bán kính R một khoảng d. Xác định điện thế của hệ bằng phương pháp ảnh. Biết rằng điện tích và quả cầu cùng nằm trong môi trường đồng nhất có độ thẩm điện là ε = const.

Giải:



Hình 1.8

Do quả cầu dẫn điện nối đất nên thế trên quả cầu và bên trong quả cầu bằng không. Muốn xác định cường độ điện trường hay thế điện bên ngoài quả cầu thì ta cần xác định độ lớn và vị trí của điện tích ảnh q’. Do tính đối xứng của bài toán nên điện tích ảnh nằm trên đường thẳng nối tâm của quả cầu dẫn với điện tích q.

Gọi d’ là khoảng cách từ tâm của quả cầu dẫn tới q’.

Ta có:

$$\begin{cases} \varphi_N = \dfrac{q'}{4\pi\varepsilon(R+d')} + \dfrac{q}{4\pi\varepsilon(R+d)} = 0 \\ \varphi_M = \dfrac{q'}{4\pi\varepsilon(R-d')} + \dfrac{q}{4\pi\varepsilon(d-R)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{q'}{(R+d')} + \dfrac{q}{(R+d)} = 0 \\ \dfrac{q'}{(R-d')} + \dfrac{q}{(d-R)} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow q' = -\frac{R}{d}q$$

Vị trí điện tích ảnh q’ cách tâm quả cầu dẫn: $d' = \dfrac{R^2}{d}$

Vậy điện thế bên ngoài quả cầu dẫn điện nối đất: $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon r} + \dfrac{q'}{4\pi\varepsilon r'} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{R}{dr'}\right)$

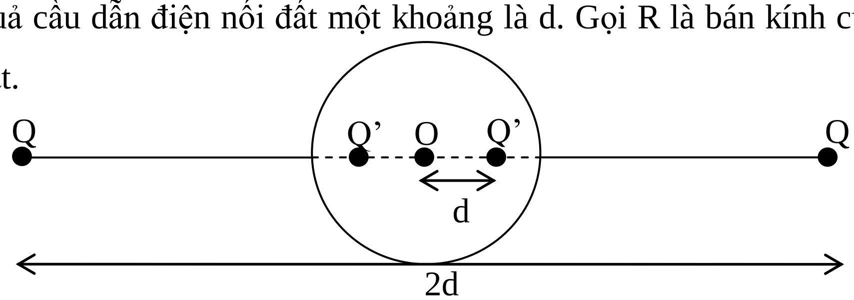
Với r và r’ lần lượt là khoảng cách từ điện tích q và q’ đến điểm ta cần xét.

Bài 4: Hai điện tích bằng nhau +Q được đặt cách nhau một khoảng cách là 2d. Một quả cầu dẫn điện nối đất được đặt giữa chúng. Bán kính của quả cầu phải là bao nhiêu để hai điện tích này sinh ra lực tổng hợp bằng không? Lực tác dụng lên từng điện tích là bao nhiêu nếu quả cầu đó được tích điện đến điện thế V?

Giải:

Sử dụng phương pháp ảnh điện để tìm các điện tích ảnh.

Do quả cầu dẫn điện được nối đất nên điện thế trên quả cầu và bên trong quả cầu bằng không. Ta xét từng điện tích khi đó tương tự như trường hợp một điện tích Q nằm cách tâm một quả cầu dẫn điện nối đất một khoảng là d. Gọi R là bán kính của quả cầu dẫn điện nối đất.



Hình 1.9

Khi đó, độ lớn và vị trí của điện tích ảnh lần lượt là:

$$Q' = -\frac{R}{d}Q \qquad\qquad d' = \frac{R^2}{d}$$

Các điện tích ảnh có cùng độ lớn và cùng được đặt ở hai phía của tâm quả cầu, cách tâm quả cầu cùng một khoảng là $d' = \frac{R^2}{d}$.

Đối với mỗi điện tích +Q , ngoài lực đẩy tĩnh điện của điện tích +Q đã cho còn có lực hút do các điện tích ảnh. Theo đề, để hai điện tích này sinh ra lực tổng hợp bằng không thì:

$$\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon(2d)^2} = \frac{QQ'}{4\pi\varepsilon(d-d')^2} + \frac{QQ'}{4\pi\varepsilon(d+d')^2} \Rightarrow \frac{1}{4d^2} = \frac{R/d}{\left(d - \frac{R^2}{d}\right)^2} + \frac{R/d}{\left(d + \frac{R^2}{d}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4d^2} = \frac{2R}{d^3}\left[1 + 3\left(\frac{R}{d}\right)^4 + 5\left(\frac{R}{d}\right)^8 + \dots\right] \approx \frac{2R}{d^3} \Rightarrow R \approx \frac{d}{8}$$

Khi quả cầu được tích điện đến điện thế V thì điện thế ngoài quả cầu lúc này là:

$\varphi' = \frac{V.R}{r} \simeq \frac{Vd}{8r}$ với r là khoảng cách giữa điểm cần xét với tâm quả cầu.

Suy ra: $E = -\text{grad}\varphi' = -\frac{\partial\varphi'}{\partial r} \Rightarrow E = \frac{Vd}{8r^2}$

Lực tác dụng lên từng điện tích có độ lớn: $F = Q.E = \frac{QVd}{8r^2}$

Dạng 4: Áp dụng giải phương trình Poisson – Laplace cho các bài toán có tính đối xứng trụ, đối xứng cầu với phân bố điện tích khối để khảo sát điện trường tĩnh.

Bài 1: Điện tích phân bố đều với mật độ khối ρ trong một hình cầu bán kính a, tâm tại gốc tọa độ. Tìm thế điện, cường độ điện trường bên trong và bên ngoài hình cầu. Giải bằng phương trình Poisson – Laplace.

Giải:

Laplace trong hệ tọa độ cầu có dạng:

$$\Delta = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

Vì do tính đối xứng cầu của bài toán nên điện thế chỉ phụ thuộc vào r. Do đó:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

Ta có:

$$\Delta\varphi_{tr} = -\frac{\rho}{\varepsilon}\text{; khi } r < a \quad (1.8)$$

$$\Delta\varphi_{ng} = 0 \quad \text{; khi } r > a \quad (1.9)$$

+ Giải (1.8) bằng cách lấy hai lần tích phân 2 vế của (1.8), ta có:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi_{tr}}{\partial r}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon} \Rightarrow \varphi_{tr} = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon} - \frac{C_1}{r} + C_2$$

+ Giải (1.9) cũng tương tự, lấy hai lần tích phân hai vế của (1.9):

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi_{ng}}{\partial r}\right) = 0 \Rightarrow \varphi_{ng} = -\frac{C_3}{r} + C_4$$

Để tìm các hệ số trong các phương trình ta dựa vào các điều kiện biên.

Khi $r \to 0$ thì φ_{tr} hữu hạn nên $C_1 = 0$ nên $\varphi_{tr} = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon} + C_2$

Chọn thế $\varphi(r \to \infty) = 0$, do đó $\varphi_{ng}(r \to \infty) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$ nên $\varphi_{ng} = -\frac{C_3}{r}$.

Mặt khác, điện thế tại mặt biên giới r = a phải liên tục, tức là:

$$\varphi_{tr}\big|_{r=a} = \varphi_{ng}\big|_{r=a} \Rightarrow -\frac{\rho a^2}{6\varepsilon} + C_2 = -\frac{C_3}{a} \quad (1.10)$$

Và thành phần pháp tuyến của vectơ cảm ứng điện cũng liên tục:

$$D_{1n} = D_{2n}$$

$$\Rightarrow \varepsilon\left(-\left[\frac{\partial\varphi_{tr}}{\partial r}\right]\right)\Bigg|_{r=a} = \varepsilon\left(-\left[\frac{\partial\varphi_{ng}}{\partial r}\right]\right)\Bigg|_{r=a} \Rightarrow -\frac{\rho a}{3\varepsilon} = \frac{C_3}{a^2} \Rightarrow C_3 = -\frac{\rho a^3}{3\varepsilon}$$

Thay C_3 vào (1.10), ta thu được C_2: $C_2 = \frac{\rho a^2}{6\varepsilon}$

Thay các hệ số C_2 và C_3 vào các biểu thức điện thế, ta thu được:

$$\begin{cases} \varphi_{tr} = -\dfrac{\rho r^2}{6\varepsilon} + \dfrac{\rho a^2}{6\varepsilon} = \dfrac{\rho}{6\varepsilon}\left(a^2 - r^2\right) \\ \varphi_{ng} = \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon r} \end{cases}$$

Cường độ điện trường bên trong và bên ngoài quả cầu lần lượt là:

$$E_{tr} = -\frac{\partial\varphi_{tr}}{\partial r} \Rightarrow E_{tr} = \frac{\rho r}{3\varepsilon} \qquad E_{ng} = -\frac{\partial\varphi_{ng}}{\partial r} \Rightarrow E_{ng} = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon r^2}$$

Bài toán này giải theo định lý Ôxtrogratxki – Gauss cũng cho cùng kết quả .

Bài 2: Xác định thế và cường độ trường điện bên trong và bên ngoài hình trụ dài bán kính tiết diện a, điện tích phân bố đều trong hình trụ với mật độ khối ρ. Giải bằng phương trình Poisson – Laplace.

Giải:

Laplace trong hệ tọa độ trụ có dạng như sau: $\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Do tính đối xứng trụ, điện thế chỉ phụ thuộc khoảng cách đến trục hình trụ nên:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)$$

Ta có:

$\Delta\varphi_{tr} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon}$; khi r < a (1.11) và $\Delta\varphi_{ng} = 0$; khi r >a (1.12)

+ Giải (1.11) bằng cách lấy hai lần tích phân hai vế của phương trình (1.11):

$$r\frac{\partial\varphi_{tr}}{\partial r} = -\int\frac{\rho r}{\varepsilon}dr + C_1 \Rightarrow \varphi_{tr} = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon} + C_1\ln r + C_2 \quad (1.13)$$

+ Giải (1.12) bằng cách lấy hai lần tích phân hai vế của phương trình (1.12):

$$r\frac{\partial\varphi_{ng}}{\partial r} = C_3 \Rightarrow \varphi_{ng} = C_3\ln r + C_4 \quad (1.14)$$

Muốn xác định các hệ số trong các biểu thức của điện thế ta dựa vào điều kiện của bài toán:

Chọn $\varphi(r \to 0) = 0$ mà lnr không xác định khi $r \to 0$ nên $C_1 = 0$ và $C_2 = 0$. Do đó:

$$\varphi_{tr} = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon}$$

Mặt khác, điện thế tại r = a phải liên tục, tức là:

$$\varphi_{tr}\Big|_{r=a} = \varphi_{ng}\Big|_{r=a} \Rightarrow -\frac{\rho a^2}{4\varepsilon} = C_3\ln a + C_4 \quad (1.15)$$

Và thành phần pháp tuyến của vectơ cảm ứng điện cũng liên tục:

$$\varepsilon\left(-\left[\frac{\partial\varphi_{tr}}{\partial r}\right]\right)\Bigg|_{r=a} = \varepsilon\left(-\left[\frac{\partial\varphi_{ng}}{\partial r}\right]\right)\Bigg|_{r=a} \Rightarrow \frac{\rho a}{2\varepsilon} = -\frac{C_3}{a} \Rightarrow C_3 = -\frac{\rho a^2}{2\varepsilon}$$

Thay C_3 vào (1.15): $C_4 = -\dfrac{\rho a^2}{4\varepsilon} + \dfrac{\rho a^2}{2\varepsilon}\ln a = \dfrac{\rho a^2}{2\varepsilon}\left(\ln a - \dfrac{1}{2}\right)$

Thay C_3 và C_4 vào (1.14): $\varphi_{ng} = -\dfrac{\rho a^2}{2\varepsilon}\ln r + \dfrac{\rho a^2}{2\varepsilon}\left(\ln a - \dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow \varphi_{ng} = \dfrac{\rho a^2}{2\varepsilon}\left(\ln\dfrac{a}{r} - \dfrac{1}{2}\right)$

Vậy : $\begin{cases} \varphi_{tr} = -\dfrac{\rho r^2}{4\varepsilon} \\ \varphi_{ng} = \dfrac{\rho a^2}{2\varepsilon}\left(\ln\dfrac{a}{r} - \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$

Cường độ điện trường bên trong và bên ngoài hình trụ lần lượt là:

$$\begin{cases} E_{tr} = -\dfrac{\partial\varphi_{tr}}{\partial r} \\ E_{ng} = -\dfrac{\partial\varphi_{ng}}{\partial r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_{tr} = \dfrac{\rho r}{2\varepsilon} \\ E_{ng} = \dfrac{\rho a^2}{2\varepsilon r} \end{cases}$$

Giải bài toán này với định lý Ôxtrogratxki – Gauss cũng cho cùng kết quả.

Bài 3: Điện tích phân bố khối với mật độ ρ trong hệ tọa độ cầu như sau:

$$\rho = \begin{cases} 0; 0 < r < a \\ \rho_o = const; a < r < b \\ 0; b < r \end{cases}$$

Tìm thế điện trong mỗi miền. Chọn $\varphi(\infty) = 0$.

Giải:

Laplace trong hệ tọa độ cầu có dạng:

$$\Delta = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

Vì do tính đối xứng cầu của bài toán nên điện thế chỉ phụ thuộc vào r. Do đó:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

Ta xét :

+ Với 0 < r < a:

$$\Delta\varphi_1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right) = 0 \quad (1.16)$$

Lấy tích phân hai lần hai vế phương trình (1.16), ta thu được: $\varphi_1 = -\dfrac{C_1}{r} + C_2$

+ Với a < r < b:

$$\Delta\varphi_2 = -\frac{\rho_o}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right) = -\frac{\rho_o}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right) = -\frac{\rho r^2}{\varepsilon} \quad (1.17)$$

Lấy tích phân hai lần hai vế của (1.17), ta thu được: $\varphi_2 = -\frac{\rho_o r^2}{6\varepsilon} - \frac{C_3}{r} + C_4$

+ Với b < r: $\Delta\varphi_3 = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi_3}{\partial r}\right) = 0$ (1.18).

Lấy tích phân hai lần hai vế của (1.18), ta thu được: $\varphi_3 = -\frac{C_5}{r} + C_6$

Muốn xác định hệ số trong các biểu thức tính điện thế ta dựa vào điều kiện của bài toán:

Theo đề: $\varphi(r \to \infty) = 0 \Rightarrow \varphi_3(r \to \infty) = 0 \Rightarrow C_6 = 0$. Khi đó: $\varphi_3 = -\frac{C_5}{r}$

φ_1 hữu hạn khi $r \to 0 \Rightarrow C_1 = 0$. Do đó, $\varphi_1 = C_2$

Mặt khác, thành phần pháp tuyến của vectơ điện cảm tại r =a và r= b phải liên tục, tức là:

$$\varepsilon\left(-\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right|_{r=a}\right) = \varepsilon\left(-\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right|_{r=a}\right) \Rightarrow 0 = -\frac{\rho_o a}{3\varepsilon} + \frac{C_3}{a^2} \Rightarrow C_3 = \frac{\rho_o a^3}{3\varepsilon}$$

$$\varepsilon\left(-\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right|_{r=a}\right) = \varepsilon\left(-\left.\frac{\partial\varphi_3}{\partial r}\right|_{r=a}\right) \Rightarrow -\frac{\rho_o b}{3\varepsilon} + \frac{C_3}{b^2} = \frac{C_5}{b^2} \Rightarrow C_5 = \left(\frac{\rho_o a^3}{3\varepsilon b^2} - \frac{\rho_o b}{3\varepsilon}\right)b^2 = \frac{\rho_o}{3\varepsilon}\left(a^3 - b^3\right)$$

Và điện thế cũng liên tục tại r = a và r= b, tức là:

$$\left.\varphi_2\right|_{r=b} = \left.\varphi_3\right|_{r=b}$$

$$\Rightarrow -\frac{\rho_o b^2}{6\varepsilon} - \frac{\rho_o a^3}{3\varepsilon b} + C_4 = -\frac{1}{b}\left(\frac{\rho_o a^3}{3\varepsilon b} - \frac{\rho_o b^3}{3\varepsilon}\right) \Rightarrow C_4 = \frac{\rho_o b^2}{2\varepsilon}$$

$$\varphi_1\big|_{r=a} = \varphi_2\big|_{r=a}$$

$$\Rightarrow -\frac{\rho_o b^2}{6\varepsilon} - \frac{\rho_o a^3}{3\varepsilon b} + C_2 = -\frac{\rho_o a^2}{6\varepsilon} - \frac{\rho_o a^3}{3\varepsilon a} + \frac{\rho_o b^2}{2\varepsilon} \Rightarrow C_2 = \frac{\rho_o\left(b^2 - a^2\right)}{2\varepsilon}$$

Thay các hệ số vào các biểu thức điện thế, ta có:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{\rho_o\left(b^2 - a^2\right)}{2\varepsilon} \\ \varphi_2 = -\dfrac{\rho_o\left(r^2 + 2a^3/r - 3b^2\right)}{6\varepsilon} \\ \varphi_3 = \dfrac{\rho_o\left(b^3 - a^3\right)}{3\varepsilon r} \end{cases}$$

Bài 4: Khối trụ điện môi rất dài bán kính tiết diện bằng a, độ thẩm điện môi bằng ε_1 đặt vuông góc với trường điện đều cường độ $\vec{E}_o$ trong môi trường điện môi ε_2. Hãy xác định cường độ điện trường bên trong và bên ngoài hình trụ.

Giải:

Bài toán có tính đối xứng trụ nên ta sử dụng hệ tọa độ trụ để giải.

Laplace trong tọa độ trụ có dạng:

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Khi đó, ở bên ngoài hình trụ: $\Delta\varphi = 0$

Vì hình trụ đủ dài nên điện trường không phụ thuộc vào z, chỉ phụ thuộc vào r và ϕ, do đó: $\Delta\varphi = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (1.19)$

Nghiệm của (1.19) được viết dưới dạng: $\varphi(r,\phi) = R(r).P(\phi) \quad (1.20)$

Thay (1.20) vào (1.19), ta có:

$$\frac{P}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{R}{r^2}\frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2} = 0 \text{ hay } \frac{P}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{R}{r^2}\frac{d^2 P}{d\phi^2} = 0 \quad (1.21)$$

Nhân hai vế của (1.21) cho $\frac{r^2}{PR}$, ta thu được: $\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{P}\frac{d^2P}{d\phi^2}=0$ (1.22)

Mỗi số hạng trong (1.22) hoặc chỉ phụ thuộc r hoặc chỉ phụ thuộc vào ϕ nên để (1.22) đúng với mọi giá trị của r và ϕ thì:

$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)=K^2$ (1.23) và $\frac{1}{P}\frac{d^2P}{d\phi^2}=-K^2$ (1.24)

Từ (1.24), ta viết lại: $\frac{d^2P}{d\phi^2}+K^2P=0$ (1.25)

Nghiệm của (1.25) có dạng: $P(\phi)=A\cos n\phi+B\sin n\phi$ (1.26)

Do tính đối xứng của trường điện: $\varphi(r,\phi)=\varphi(r,-\phi)$

Suy ra: B = 0.

Khi đó, (1.26) được viết lại: $P(\phi)=A\cos n\phi$ (1.27)

Lấy trục y làm gốc điện thế, tức là: $\varphi\left(r,\pi/2\right)=\varphi\left(r,-\pi/2\right)=0$

Hay $P\left(\phi=\pi/2\right)=P\left(\phi=-\pi/2\right)=0$. Suy ra: n =1.

Do đó, (1.27) được viết lại: $P(\phi)=A\cos\phi$ (1.28)

Thay (1.28) vào (1.25), suy ra: $K^2 = 1$

Từ (1.23), ta có: $\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{r}{R}\frac{dR}{dr}-1=0\Rightarrow\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}-\frac{R}{r^2}=0$ (1.29)

Nghiệm của (1.29) có dạng: $R(r)=\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}C_m.r^m$ (1.30)

Thay (1.30) vào (1.29), ta được: $\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\left(m^2-1\right)C_m r^{m-2}=0\Rightarrow m=\pm1$

Vậy: $R(r)=Cr+\frac{D}{r}$ (1.31)

Khi đó, $\varphi(r,\phi) = R(r).P(\phi) = A\left(Cr + \frac{D}{r}\right)\cos\phi$ Hay $\varphi(r,\phi) = \left(Mr + \frac{N}{r}\right)\cos\phi$

+ Điện thế bên trong hình trụ với 0 < r < a: $\varphi_1(r,\phi) = \left(M_1 r + \frac{N_1}{r}\right)\cos\phi$

+ Điện thế bên ngoài hình trụ với a < r < ∞: $\varphi_2(r,\phi) = \left(M_2 r + \frac{N_2}{r}\right)\cos\phi$

Muốn xác định các hệ số trong các biểu thức tính điện thế ta dựa vào các điều kiện liên tục và điều kiện biên:

Điện thế hữu hạn khi $r \to 0$ nên $N_1 = 0$. Khi đó: $\varphi_1(r,\phi) = M_1 r.\cos\phi$ (1.32)

Điện trường khi $r \to \infty$ được xem là đều nên:

$$\varphi_2 = M_2 r.\cos\phi = -E_o.r\cos\phi \Rightarrow M_2 = -E_o$$

Khi đó: $\varphi_2(r,\phi) = \left(-E_o r + \frac{N_2}{r}\right)\cos\phi$ (1.33)

Điện thế liên tục tại mặt biên, tại r = a:

$$\varphi_1\big|_{r=a} = \varphi_2\big|_{r=a} \Rightarrow M_1 a\cos\phi = \left(-E_o a + \frac{N_2}{a}\right)\cos\phi \Rightarrow M_1 a = -E_o a + \frac{N_2}{a} \quad (1.34)$$

Mặt khác, thành phần pháp tuyến vectơ cảm ứng điện cũng liên tục tại r = a:

$$\varepsilon_1.\left(-\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right]\right)\Bigg|_{r=a} = \varepsilon_2.\left(-\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right]\right)\Bigg|_{r=a} \Rightarrow \varepsilon_1.M_1\cos\phi = \varepsilon_2\left(-E_o - \frac{N_2}{a^2}\right)\cos\phi$$

$$\Rightarrow \varepsilon_1 M_1 = \varepsilon_2\left(-E_o - \frac{N_2}{a^2}\right) \quad (1.35)$$

Giải hệ phương trình (1.34) và (1.35), ta thu được:

$$M_1 = \frac{-2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}E_o \quad \text{và} \quad N_2 = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)a^2 E_o}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

Thay các hệ số vào các biểu thức điện thế, ta có:

$$\begin{cases} 0 < r < a : \varphi_1 = \dfrac{-2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_o r \cos\phi = \dfrac{-2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_o x \\ a < r : \varphi_2 = \left(\dfrac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) a^2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) r} - r \right) E_o \cos\phi \end{cases}$$

Cường độ điện trường bên trong hình trụ:

$$E_{1r} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_o \cos\phi \qquad \qquad E_{1x} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_o$$

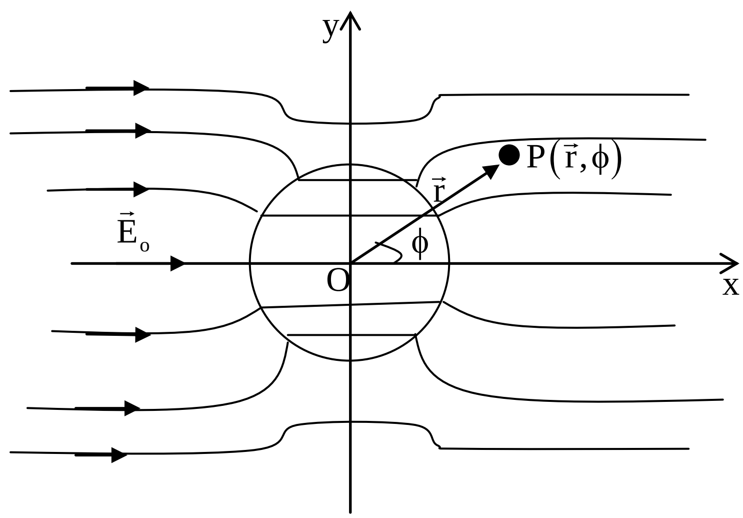
hay

$$E_{1\phi} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \phi} = -\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_o \sin\phi \qquad \qquad E_{1y} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0$$

Cường độ điện trường bên ngoài hình trụ:

$$E_{2r} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = \left(1 - \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) a^2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) r^2} \right) E_o \cos\phi \qquad E_{2\phi} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \phi} = \left(\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) a^2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) r^2} - 1 \right) E_o \sin\phi$$

Chứng tỏ ở vùng lân cận hình trụ thì điện trường bị méo, điện trường bị méo nhiều nhất khi r = a.



Hình 1.10

Bài 5: Quả cầu kim loại không mang điện bán kính a được đặt trong điện trường đều $\vec{E}_o$, điện môi bao quanh quả cầu có độ thẩm điện $\varepsilon =$ const. Xác định điện thế và cường độ điện trường bao quanh quả cầu.

Giải:

Bài toán có tính đối xứng cầu nên ta sử dụng hệ tọa độ cầu để giải.

Laplace trong tọa độ cầu có dạng:

$$\Delta = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin\theta \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Do tính đối xứng của bài toán nên điện thế chỉ phụ thuộc vào r và θ. Nên phương trình Laplace :

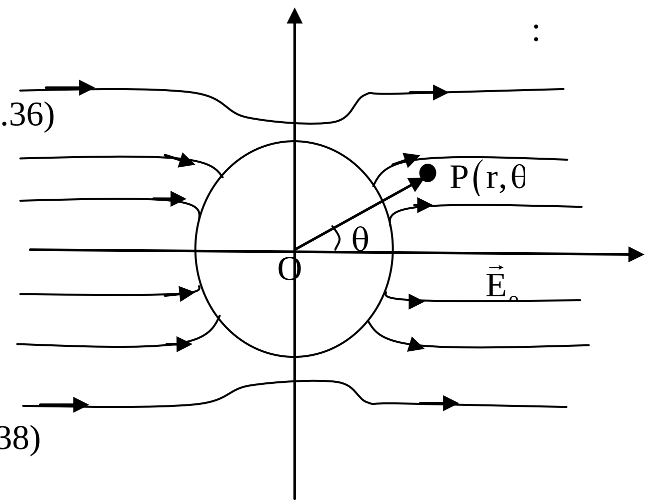
$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial \theta}\right) = 0 \quad (1.36)$$

Nghiệm của phương trình (1.36) có dạng:

$$\varphi(r,\theta) = R(r)P(\theta) \quad (1.37)$$

Thay (1.37) vào (1.36), ta có:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 P \frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(R \sin\theta \frac{\partial P}{\partial \theta}\right) = 0 \quad (1.38)$$



Hình 1.11

Nhân hai vế (1.38) với $\frac{r^2}{PR}$, ta thu được:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{1}{P\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial P}{\partial \theta}\right) = 0$$

Hay

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{P\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{dP}{d\theta}\right) = 0 \quad (1.39)$$

Suy ra:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) = K^2 \ (1.40) \qquad \text{và} \qquad \frac{1}{P\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{dP}{d\theta}\right) = -K^2 \quad (1.41)$$

Từ (1.40) , ta có:

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2r}{R}\frac{dR}{dr} - K^2 = 0 \Rightarrow r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} - K^2 R = 0 (1.42)$$

Nghiệm của (1.42) có dạng:

$$R(r) = Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}} \quad (1.43)$$

Thay (1.43) vào (1.42), ta được:

$$r^2\left[An(n-1)r^{n-2} + \frac{B(n+1)(n+2)}{r^{n+3}}\right] + 2r\left[Anr^{n-1} - \frac{B(n+1)}{r^{n+2}}\right] - K^2\left(Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow (n^2+n)\left(Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}}\right) - K^2\left(Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}}\right) = 0 \Rightarrow (n^2+n)R(r) = K^2R(r)$$

$$\Rightarrow n(n+1) = K^2 \quad (1.44)$$

Thay (1.44) vào (1.41), ta được:

$$\frac{1}{P\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + n(n+1) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + n(n+1)P = 0 \quad (1.45)$$

Đặt $\mu = \cos\theta$:

$$\frac{dP}{d\theta} = \frac{dP}{d\mu}\frac{d\mu}{d\theta} = -\sin\theta\frac{dP}{d\mu} = -\sqrt{1-\mu^2}\,\frac{dP}{d\mu}$$

Thay $\frac{dP}{d\theta}$ vào (1.45), ta được:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(-(1-\mu^2)\frac{dP}{d\mu}\right) + n(n+1)P = 0 \Rightarrow \frac{-\sin\theta}{\sin\theta}\frac{d}{d\mu}\left(-(1-\mu^2)\frac{dP}{d\mu}\right) + n(n+1)P = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\mu}\left((1-\mu^2)\frac{dP}{d\mu}\right) + n(n+1)P = 0 \quad (1.46)$$

Phương trình (1.46) là phương trình Legendre và có nghiệm là đa thức Legendre.

$$P_n(\mu) = P_n(\cos\theta) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{(d\cos\theta)^n}(\cos^2\theta - 1)^n \quad (1.47)$$

với n là bậc của đa thức, n = 1,2,3…

Thay (1.43) và (1.47) vào (1.37) ta có nghiệm tổng quát như sau:

$$\varphi(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(Ar^n+\frac{B}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta) \quad (1.48)$$

Khi $r\to\infty$ thì điện trường được xem như là đều, tức là:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(Ar^n+\frac{B}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)=-E_o.r\cos\theta \quad (1.49)$$

Để (1.49) đúng với mọi góc θ thì $n = 1 \Rightarrow A_1=-E_o$, còn những giá trị $n\neq 1$ thì $A_n = 0$.

Mặt khác, ta chọn điện thế tại mặt cầu bằng không , tức là:

$$\varphi(r=a,\theta)=0\Rightarrow B_o r^{-1}+\left(-E_o r+B_1 r^{-2}\right)\cos\theta+\sum_{n=2}^{\infty}B_n.r^{-(n+1)}P_n(\cos\theta)\Big|_{r=a}=0$$

$$\Rightarrow B_o a^{-1}+\left(-E_o a+B_1 a^{-2}\right)\cos\theta+\sum_{n=2}^{\infty}B_n.a^{-(n+1)}P_n(\cos\theta)=0 \quad (1.50)$$

Cân bằng các hệ số của P_n , ta có: $B_o = 0$; $B_1 = E_o a^3$; $B_n = 0$ với $n\neq 1$.

Thay các hệ số vừa tìm được vào (1.48), ta thu được điện thế bên ngoài quả cầu:

$$\varphi(r,\theta)=\left(-E_o r+\frac{E_o a^3}{r^2}\right)\cos\theta=\left(-r+\frac{a^3}{r^2}\right)E_o\cos\theta$$

Cường độ điện trường bao quanh quả cầu: E= -gradφ

Suy ra:

$$E_r=-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\left(1+\frac{2a^3}{r^3}\right)E_o\cos\theta \qquad E_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\left(\frac{a^3}{r^3}-1\right)E_o\sin\theta$$

Khi quả cầu đặt trong điện trường đều thì mặt ngoài quả cầu sẽ có các điện tích cảm ứng tạo ra một điện trường phụ làm thay đổi điện trường ban đầu.

Dạng 5: Cho một số yếu tố trường điện để xác định sự phân bố điện tích.

Bài 1: Xác định sự phân bố điện tích tạo ra thế Iukawa trong chân không:

$$\varphi = \frac{qe^{-r/a}}{\varepsilon_o r}$$

Giải:

Thế Iukawa trong chân không là thế đối xứng cầu, để tìm sự phân bố điện tích ta dùng phương trình Poisson.

Laplace trong hệ tọa độ cầu có dạng :

$$\Delta = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin\theta \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Vì điện thế phụ thuộc vào r nên: $\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right)$ (1.51)

Áp dụng phương trình Poisson: $\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$

Thay $\varphi = \frac{qe^{-r/a}}{\varepsilon_o r}$ vào phương trình (1.51):

$$-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2 q}{\varepsilon_o}\left[\frac{1}{r^2}\left(-\frac{r}{a}e^{-r/a} - e^{-r/a}\right)\right]\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_o} \Rightarrow -\frac{q}{r^2\varepsilon_o}\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{r}{a}e^{-r/a} - e^{-r/a}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{q}{r^2}\left(-\frac{e^{-r/a}}{a} + \frac{re^{-r/a}}{a^2} + \frac{e^{-r/a}}{a}\right) \Rightarrow \rho = \frac{q}{r^2}\frac{re^{-r/a}}{a^2} = \frac{qe^{-r/a}}{a^2 r}$$

Bài 2:

- Tìm phân bố điện tích tự do khối, mặt gây ra trường điện có vectơ cảm ứng điện $\vec{D}$ trong hệ tọa độ cầu: $\vec{D} = \begin{cases} kr^2.\vec{i}_r; r < R \\ \frac{kR^4}{r^2}.\vec{i}_{r;} r > R \end{cases}$

❖ Giải tương tự cho tọa độ trụ với vectơ cảm ứng điện như sau: $\vec{D}=\begin{cases}\dfrac{kR^3}{r}.\vec{i}_r; r>R\\ kr^2.\vec{i}_r; r<R\end{cases}$

Giải:

❖ Giải bài toán trong hệ tọa độ cầu.

Ta áp dụng phương trình của Maxwell để tìm phân bố điện tích tự do khối, đó là:

$\mathrm{div}\vec{D}=\rho$ (1.52)

Trong hệ tọa độ cầu thì: $\mathrm{div}\vec{D}=\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2D_r\right)+\dfrac{1}{r\sin\theta}.\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta.D_\theta\right)+\dfrac{1}{r\sin\theta}.\dfrac{\partial D_\varphi}{\partial\varphi}$

Vì $\vec{D}$ chỉ phụ thuộc vào r nên: $\mathrm{div}\vec{D}=\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2D_r\right)$

Khi đó, (1.52) trở thành:

$$\begin{cases}r<R:\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2.kr^2\right)=\rho\\ r>R:\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2.\dfrac{kR^4}{r^2}\right)=\rho\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}r<R:\rho=\dfrac{1}{r^2}.4kr^3=4kr\\ r>R:\rho=0\end{cases}$$

Áp dụng điều kiện biên cho vectơ cảm ứng điện để xác định phân bố của điện tích mặt, ta có: $D_{1n}-D_{2n}=\sigma\Rightarrow\sigma(r=R)=k.R^2-\dfrac{kR^4}{R^2}=0$

❖ Giải bài toán trong hệ tọa độ trụ:

Ta áp dụng phương trình của Maxwell để tìm phân bố điện tích tự do khối, đó là:

$\mathrm{div}\vec{D}=\rho$ (1.53)

Trong hệ tọa độ trụ thì: $\mathrm{div}\vec{D}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(rD_r\right)+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial D\varphi}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial D_z}{\partial z}$

Vì vectơ cảm ứng điện $\vec{D}$ chỉ phụ thuộc r nên $\mathrm{div}\vec{D}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(rD_r\right)$

Khi đó, (1.53) được viết lại:

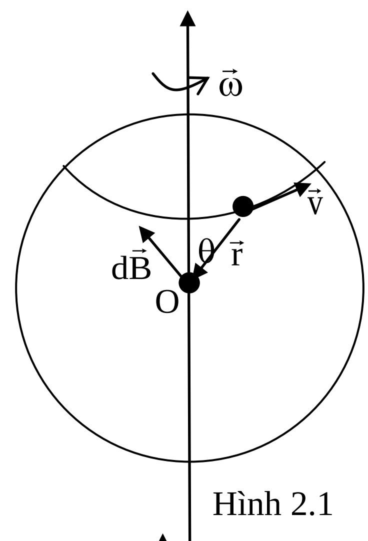
$$\begin{cases} r > R : \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{kR^3}{r} \right) = \rho \\ r < R : \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r.kr^2 \right) = \rho \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r > R : \rho = 0 \\ r < R : \rho = \dfrac{3kr^2}{r} = 3kr \end{cases}$$

Áp dụng điều kiện biên cho vectơ cảm ứng điện để xác định phân bố của điện tích mặt, ta có: $D_{1n} - D_{2n} = \sigma \Rightarrow \sigma(r = R) = k.R^2 - \dfrac{kR^3}{R} = 0$

CHƯƠNG 2: TỪ TRƯỜNG DỪNG.

Dạng 1: Áp dụng định luật Bio-Savart, nguyên lý chồng chất cho phân bố liên tục để xác định các yếu tố của từ trường.

Bài 1: Một quả cầu bán kính a, tích điện đều với mật độ điện tích là ρ. Quả cầu quay xung quanh trục của nó với vận tốc góc $\vec{\omega}$. Xác định vectơ từ trường, moment từ tại tâm quả cầu.



Hình 2.1

Giải:

Áp dụng định luật Bio – Savart : $\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}\times\vec{r}}{r^3}dV$

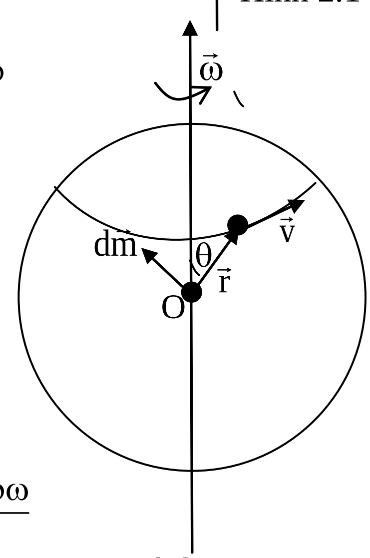
Trong đó: $\vec{j} = \rho.\vec{v}$; $\vec{v} = [\vec{\omega}\times\vec{r}] \Rightarrow v = \omega r\sin\theta$;

$dV = r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$

Suy ra:

$$B = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_V\left(\frac{\rho\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}\right)dV.\sin\theta \Rightarrow B = \frac{\mu_o\rho\omega}{4\pi}\int_0^a rdr\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_o\rho\omega}{4\pi}\left(\frac{a^2}{2}\right)\left(2+\frac{2}{3}\right)(2\pi) = \frac{2\mu_o\rho\omega a^2}{3}$$



Hình 2.2

Moment từ :

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int_V\left(\vec{r}\times\vec{j}\right)dV \Rightarrow m = \frac{1}{2}\int_V\left(r.\rho\omega r\sin\theta\right)dV.\sin\theta$$

$$\Rightarrow m = \frac{\rho\omega}{2}\int_0^a r^4dr\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{a^5}{5}\right)\left(\frac{8}{3}\right)(2\pi) = \frac{8\pi a^5\rho\omega}{15}$$

Bài 2: Tìm cường độ từ trường bên trong một hốc trụ của một dây dẫn hình trụ có dòng điện chạy qua với mật độ $\vec{j}$ phân bố đều theo tiết diện của nó. Trục của hốc hình trụ và của dây dẫn song song và cách nhau một khoảng a.

Giải:

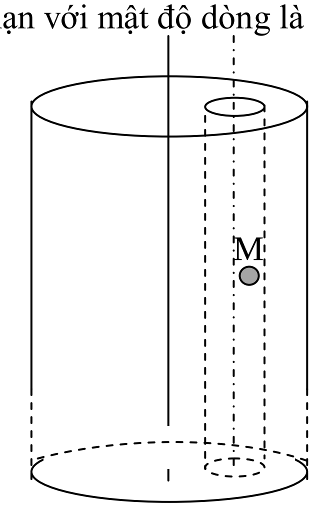
Áp dụng nguyên lý chồng chất từ trường, cường độ từ trường bên trong lỗ là sự chồng chất của hai trường, một trường do vật dẫn hình trụ dài vô hạn với mật độ dòng là $\vec{j}$ một trường do hình trụ rỗng được lấp đầy với mật độ dòng là $-\vec{j}$ chảy qua.

Khi đó, cường độ từ trường bên trong lỗ hổng:

$$H = \frac{1}{2}\left(\vec{j} \times \overrightarrow{OM}\right) + \frac{1}{2}\left(\left[-\vec{j}\right] \times \overrightarrow{O'M}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{j} \times \left[\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{O'M}\right]\right)$$

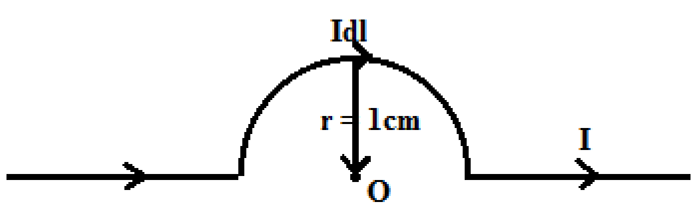
$$H = \frac{1}{2}\left(\vec{j} \times \overrightarrow{OO'}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{j} \times \vec{a}\right)$$

Từ trường bên trong lỗ hổng không đổi.



Hình 2.3

Bài 3: Một dây dẫn dài vô hạn mang dòng điện I=1A, nó được uốn sao cho có dạng là một có một nửa đường tròn bán kính 1cm bao quanh gốc tọa độ. Hãy tính từ trường tại gốc tọa độ.



Hình 2.4

Giải:

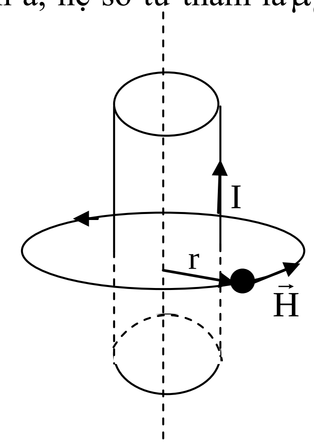
+ Phần dây dẫn thẳng không gây ra từ trường tại tâm O vì $I\vec{dl} \nearrow\nearrow \vec{r}$ nên $I\vec{dl} \times \vec{r} = 0$.

+ Vậy từ trường tại tâm O là do phần nửa vòng tròn dây dẫn gây ra. Từ trường tại O do phần tử dòng điện $I d\vec{l}$ sinh ra: $d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\vec{dl}\times\vec{r}}{r^3}$. Vì $I\vec{dl}\perp\vec{r}$ nên $I\vec{dl}\times\vec{r} = I.dl.r$ và $\vec{B}$ có hướng đi vào trong mặt giấy. Khi đó, độ lớn của vectơ từ trường do nửa vòng tròn sinh ra : $B = \int_L dB = \frac{\mu_o I}{4\pi}\int_0^{\pi}\frac{rd\theta.r}{r^3} = \frac{\mu_o I}{4r} = \frac{1,26.10^{-6}.1}{4.10^{-2}} = 3,15.10^{-5}(T)$

Dạng 2: Áp dụng định luật Ampere về lưu thông của vectơ cảm ứng từ . Từ đó có thể xác định các yếu tố trong từ trường.

Bài 1: Xác định cường độ từ trường $\vec{H}$, vectơ từ trường $\vec{B}$ tạo bởi dòng điện một chiều I chạy theo một dây dẫn dài vô hạn, hình trụ tròn bán kính a, hệ số từ thẩm là μ_o, của môi trường xung quanh là μ.

Giải:



Hình 2.5

Áp dụng định luật Ampere về lưu số: $\oint_L \vec{H}\vec{dl} = \sum_i I_i$

Chọn chiều lấy tích phân như hình 2.4, mật độ dòng điện:

$$j = \frac{I}{\pi a^2}$$

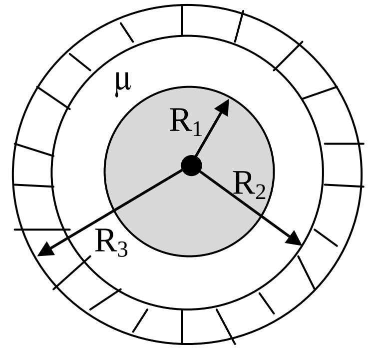
+ Với 0 < r < a thì $H_1.2\pi r = j.\pi r^2 \Rightarrow H_1 = \frac{jr}{2}$ và $\vec{H}_1$ có phương vuông góc với mặt phẳng hợp bởi $\vec{j}$ và $\vec{r}$. Có thể viết: $H_1 = \frac{\left(\vec{j} \times \vec{r}\right)}{2}$ Suy ra: $\vec{B}_1 = \mu_o \vec{H}_1$

+ Với a < r thì $H_2.2\pi r = I \Rightarrow H_2 = \frac{I}{2\pi r}$. Suy ra: $\vec{B}_2 = \mu \vec{H}_2$

Bài 2: Một dây cáp đồng trục dùng để truyền dòng điện một chiều gồm có một lõi hình trụ, bán kính R_1 và một vỏ hình trụ rỗng có bán kính R_2 và R_3. Dòng điện có cường độ I chạy đi trong lõi và chạy về trong vỏ. Giữa lõi và vỏ có chất điện môi. Tìm từ trường tạo bởi dây cáp.

Giải:

Theo định luật Ampere về lưu số: $\oint_L \vec{H}\vec{dl} = \sum_i I_i$



Hình 2.6

Khi đó, cường độ từ trường: $H = \frac{I_r}{2\pi r}$

+ Với $0 < r < R_1$:

Mật độ dòng điện: $j_1 = \frac{I}{\pi R_1^2}$. Suy ra: $B_1 = \mu_o H_1 = \frac{\mu_o I r}{2\pi R_1^2}$

+ Với $R_1 < r < R_2$:

Khi đó, $I_r = I$ nên $B_2 = \mu H_2 = \frac{\mu I}{2\pi r}$

+ Với $R_2 < r < R_3$:

Mật độ dòng điện ở lớp vỏ: $j_2 = \frac{I}{\pi\left(R_3^2 - R_2^2\right)}$.

Suy ra: $I_r = I - j_2.\pi\left(r^2 - R_2^2\right) = I\left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right)$

Khi đó, $B_3 = \mu_o H_3 = \mu_o \frac{I}{2\pi r}\left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right)$

+ Với $R_3 < r$: $I_r = I - I = 0$ nên $B_4 = 0$.

Bài 3: Tìm thế vectơ $\vec{A}$ gây bởi dòng điện thẳng dài vô hạn.

Giải:

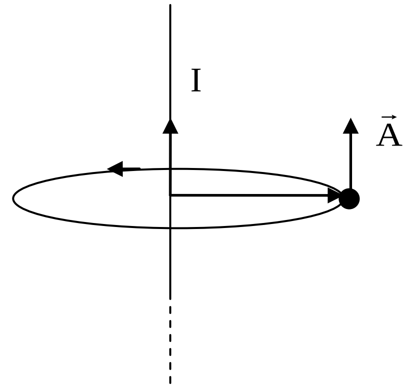
Chọn chiều lấy tích phân như hình 2.6.

Áp dụng định luật Ampere về lưu số:

$$\oint_L \vec{B}\vec{dl} = \mu_o \sum_i I_i \Rightarrow B.2\pi r = \mu_o I \Rightarrow B = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_o I}{2\pi r}\vec{i}_\varphi$$

Xét trong hệ tọa độ trụ (r, φ, z).

Thế vectơ chỉ phụ thuộc vào khoảng cách r, do đó:



Hình 2.7

A= A_z ; $A_r = A_\varphi = 0$

Mà:

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \vec{i}_r & r\vec{i}_\varphi & \vec{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\varphi & A_z \end{vmatrix} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \vec{i}_r & r\vec{i}_\varphi & \vec{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A \end{vmatrix} \Rightarrow \frac{\mu_o I}{2\pi r}\vec{i}_\varphi = -\frac{\partial A}{\partial r}\vec{i}_\varphi \,(2.1)$$

Lấy tích phân hai vế của (2.1) theo r, ta được: $A = -\int \frac{\mu_o I}{2\pi r}dr + C = -\frac{\mu_o I}{2\pi}\ln r + C$

Chọn A (r = r_o) = 0 nên $C = \frac{\mu_o I}{2\pi}\ln r_o$. Khi đó: $A = \frac{\mu_o I}{2\pi}\ln\frac{r_o}{r}$

$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_o I}{2\pi}\ln\frac{r_o}{r}\vec{i}_z$$

Dạng 3: Áp dụng giải phương trình Poisson – Laplace đối với thế vectơ $\vec{A}$ cho các bài toán có tính đối xứng cầu, đối xứng trụ để khảo sát từ trường dừng.

Bài 1: Cáp đồng trục bán kính lõi là R_1, bán kính trong của vỏ là R_2, bán kính ngoài của vỏ là R_3. Dòng điện chảy trong lõi và vỏ theo phương song song trục cáp có cùng cường độ I nhưng ngược chiều nhau. Lõi và vỏ có độ từ thẩm μ_o, điện môi giữa lõi và vỏ có độ từ thẩm là μ. Xác định sự phân bố của thế vectơ, cảm ứng từ trong lỏi, vỏ, giữa lỏi và vỏ. Chọn $\vec{A} = 0$ tại $r = R_1$.

Giải:

Chọn hệ tọa độ trụ, trục z trùng với trục cáp và có chiều trùng với chiều dòng điện trong lõi.

Laplace trong hệ tọa độ trụ có dạng: $\Delta\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$

Khi đó, mật độ dòng điện là $\vec{j}$ và $\begin{cases} \vec{j} = \vec{j}_z \\ \vec{j}_r = \vec{j}_\varphi = 0 \end{cases}$ nên $A = A_z$, $A_r = A_\varphi = 0$. Và $\vec{B} = B.\vec{i}_\varphi$

Mà mật độ dòng điện $\vec{j}$ phụ thuộc vào r nên thế vectơ cũng phụ thuộc vào r. Khi đó, phương trình Poisson đối với thế vectơ là: $\Delta A_z = -\mu j_z \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_z}{\partial r}\right) = -\mu j_z \; (2.2)$

+ Xét $0 < r < R_1$:

Mật độ dòng điện trong lõi là $j_1 = \frac{I}{\pi R_1^2}$

Từ (2.2), ta có: $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_{1z}}{\partial r}\right) = -\mu j_1 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_{1z}}{\partial r}\right) = -\mu j_1 r \; (2.3)$

Lấy tích phân hai lần hai vế của (2.3) theo r:

$$r\frac{\partial A_{1z}}{\partial r} = -\int \mu_o j_1 r dr + C_1 \Rightarrow \frac{\partial A_{1z}}{\partial r} = -\frac{\mu_o j_1 r}{2} + \frac{C_1}{r}$$

$$\Rightarrow A_{1z} = -\int \frac{\mu_o j_1 r}{2} dr + \int \frac{C_1}{r} dr + C_2 = -\frac{\mu_o j_1 r^2}{4} + C_1 \ln r + C_2$$

+ Xét $R_1 < r < R_2$:

$$\Delta A_{2z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_{2z}}{\partial r}\right) = 0 \left(2.4\right)$$

Lấy tích phân hai lần hai vế của (2.4) theo r, ta được: $A_{2z} = C_3 \ln r + C_4$

+ Xét $R_2 < r < R_3$:

Mật độ dòng điện trong vỏ: $j_3 = \dfrac{I}{\pi\left(R_3^2 - R_2^2\right)}$

Từ (2.2), ta có: $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial A_{3z}}{\partial r}\right) = \mu_o j_3 \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial A_{3z}}{\partial r}\right) = \mu_o j_3 r \left(2.5\right)$

Lấy tích phân hai lần hai vế của (2.5) theo r, ta được: $A_{3z} = \dfrac{\mu_o j_3 r^2}{4} + C_5 \ln r + C_6$

+ Xét $R_3 < r$: $\Delta A_{4z} = 0$. Suy ra: $A_{4z} = C_7 \ln r + C_8$

Muốn tìm các hệ số trong các biểu thức tính thế vectơ ta sử dụng các điều kiện biên và điều kiện liên tục như sau:

+ Khi $r \to 0$ theo điều kiện hữu hạn thì $C_1 = 0$ nên $A_{1z} = -\dfrac{\mu_o j_1 r^2}{4} + C_2$

+ Mặt khác theo điều kiện liên tục và $\vec{A}\Big|_{r=R_1} = 0$ nên ta có: $A_{1z}\big|_{r=R_1} = A_{2z}\big|_{r=R_1} = 0$.

Suy ra: $C_2 = \dfrac{\mu_o j_1 R_1^2}{4}$ và $C_4 = -C_3 \ln R_1 \,(2.6)$

+ Tại mặt biên thì $H_{1\varphi}\big|_{r=R_1} = H_{2\varphi}\big|_{r=R_1} \Rightarrow -\dfrac{1}{\mu_o}\dfrac{\partial A_{1z}}{\partial r}\bigg|_{r=R_1} = -\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial A_{2z}}{\partial r}\bigg|_{r=R_1} \Rightarrow C_3 = -\dfrac{\mu j_1 R_1^2}{2}$

Thay C_3 vào (2.6), ta được: $C_4 = \dfrac{\mu j_1 R_1^2}{2} \ln R_1$

Thay C_2 vào A_{1z}, ta thu được: $A_{1z} = \frac{\mu_o j_1}{4}\left(R_1^2 - r^2\right)$

Thay C_3 và C_4 vào A_{2z}, ta thu được: $A_{2z} = -\frac{\mu j_1 R_1^2}{2}\ln\frac{r}{R_1}$

+ Tương tự, ta có: $\begin{cases} A_{2z}\big|_{r=R_2} = A_{3z}\big|_{r=R_2} \\ H_{2\varphi}\big|_{r=R_2} = H_{3\varphi}\big|_{r=R_2} \Rightarrow -\frac{1}{\mu_o}\frac{\partial A_{2z}}{\partial r}\bigg|_{r=R_2} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_{3z}}{\partial r}\bigg|_{r=R_2} \end{cases}$.

Suy ra:

$$\begin{cases} C_5 = -\mu_o\left(\frac{j_1R_1^2}{2} + \frac{j_3R_2^2}{2}\right) \\ C_6 = -\frac{\mu j_1 R_1^2}{2}\ln\frac{R_2}{R_1} + \mu_o\left(\frac{j_1R_1^2}{2} + \frac{j_3R_2^2}{2}\right)\ln R_2 - \frac{\mu_o j_3 R_2^2}{4} \end{cases}$$

Thay vào A_{3z}: $A_{3z} = \frac{\mu_o j_3\left(r^2 - R_2^2\right)}{4} + \frac{\mu_o}{2}\left(j_1R_1^2 + j_3R_2^2\right)\ln\frac{R_2}{r} - \frac{\mu j_1 R_1^2}{2}\ln\frac{R_2}{R_1}$

+ Tương tự, $\begin{cases} A_{3z}\big|_{r=R_3} = A_{4z}\big|_{r=R_3} \\ H_{3\varphi}\big|_{r=R_3} = H_{4\varphi}\big|_{r=R_3} \Rightarrow -\frac{1}{\mu_o}\frac{\partial A_{3z}}{\partial r}\bigg|_{r=R_3} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_{4z}}{\partial r}\bigg|_{r=R_2} \end{cases}$, ta tìm được các hệ số C_7 và C_8, thay vào A_{4z} ta thu được:

$$A_{4z} = \frac{\mu_o j_3}{4}\left(R_3^2 - R_2^2\right) + \frac{\mu_o}{2}\left(j_1R_1^2 + j_3R_2^2\right)\ln\frac{R_2}{R_3} - \frac{\mu j_1 R_1^2}{2}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

Để xác định độ lớn của từ trường $\vec{B}$ trong các miền r khác nhau, ta có: $\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$ và khi đó $B = -\frac{\partial A_z}{\partial r}$ ta sẽ thu được các giá trị của B trong các miền r khác nhau.

Bài 2: Dòng điện chảy dọc theo trục z của hệ tọa độ trụ với mật độ dòng điện phân bố theo quy luật:

a/ $\vec{j} = \begin{cases} 0; 0 < r < a \\ j_o \vec{i}_z; a < r < b \\ 0; b < r \end{cases}$ b/ $\vec{j} = j_o \left(\frac{r}{a}\right)^n \vec{i}_z$, $n \geq 1$ với 0 <r < a.

Xác định vectơ từ trường trong các trường hợp trên.

Giải:

a/ Với hệ tọa độ trụ, $\vec{j}$ theo trục z nên A = A_z và A_r = A_φ = 0

+ Với 0 < r < a, phương trình Poisson đối với thế vectơ A trong hệ tọa độ trụ là:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_{1z}}{\partial r}\right) = 0 \ (2.7)$$

Lấy tích phân hai lần hai vế của (2.7), ta thu được: $A_{1z} = C_1 \ln r + C_2$

Khi $r \to 0$ theo điều kiện hữu hạn thì C_1 = 0. Vậy $A_{1z} = C_2$

+ Với a < r < b : $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_{2z}}{\partial r}\right) = -\mu_o j_o$ (2.8). Suy ra: $A_{2z} = -\frac{\mu_o j_o r^2}{2} + \frac{C_3}{r}$

+ Với b < r: $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_{3z}}{\partial r}\right) = 0$. Suy ra: $A_{3z} = C_4 \ln r + C_5$

Với các điều kiện liên tục và điều kiện biên xác định được các hệ số trong các biểu thức trên.

$$\begin{cases} A_{1z}\big|_{r=a} = A_{2z}\big|_{r=a} = 0 \\ -\frac{1}{\mu_o}\frac{\partial A_{1z}}{\partial r}\Big|_{r=a} = -\frac{1}{\mu_o}\frac{\partial A_{2z}}{\partial r}\Big|_{r=a} \\ A_{2z}\big|_{r=b} = A_{3z}\big|_{r=b} \\ -\frac{1}{\mu_o}\frac{\partial A_{2z}}{\partial r}\Big|_{r=b} = -\frac{1}{\mu_o}\frac{\partial A_{3z}}{\partial r}\Big|_{r=b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = -\frac{\mu_o j_o a^2}{4} + \frac{\mu_o j_o a^2}{2}\ln a \\ C_3 = \frac{\mu_o j_o a^2}{2} \\ C_4 = \frac{\mu_o j_o a^2}{2} - \frac{\mu_o j_o b^2}{2} \\ C_5 = -\frac{\mu_o j_o b^2}{4} + \frac{\mu_o j_o b^2}{2}\ln b \end{cases}$$

Thay các hệ số vào các biểu thức của thế vectơ và khi đó từ trường trong các miền được xác định như sau: $\vec{B} = B\vec{i}_\varphi$ và $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$. Khi đó:

$$\begin{cases} B_1 = -\dfrac{\partial A_{1z}}{\partial r} = 0 \\ B_2 = -\dfrac{\partial A_{2z}}{\partial r} = \dfrac{\mu_o j_o}{2r}\left(r^2 - a^2\right) \\ B_3 = -\dfrac{\partial A_{3z}}{\partial r} = \dfrac{\mu_o j_o}{2r}\left(b^2 - a^2\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{B}_1 = 0, 0 < r < a \\ \vec{B}_2 = \dfrac{\mu_o j_o}{2r}\left(r^2 - a^2\right)\vec{i}_\varphi; a < r < b \\ \vec{B}_3 = \dfrac{\mu_o j_o}{2r}\left(b^2 - a^2\right)\vec{i}_\varphi; b < r \end{cases}$$

b/ Với cách làm tương tự như câu a, ta thu được: $\begin{cases} \vec{B}_1 = \dfrac{\mu_o j_o a^2}{(n+2)r}\left(\dfrac{r}{a}\right)^{n+2}\vec{i}_\varphi; r < a \\ \vec{B}_2 = \dfrac{\mu_o j_o a^2}{(n+2)r}\vec{i}_\varphi; r > a \end{cases}$

Dạng 4: Áp dụng phương pháp ảnh điện để khảo sát từ trường dừng.

Với cách làm tương tự như trong chương bài tập điện trường tĩnh.

Bài 1: Dòng điện mật độ khối $\vec{j}(x,y,z)$ phân bố trong thể tích V trong môi trường có hệ số từ thẩm là μ_1 chiếm nửa không gian, nửa không gian còn lại có độ thẩm từ μ_2. Tìm dòng điện ảnh để tính trường trong môi trường 1 và 2.

Giải:

+ Muốn tính trường trong môi trường 1, ta đưa vào dòng điện ảnh với mật độ dòng $\vec{j}'$ phân bố trong thể tích V' đối xứng với V qua mặt phân cách hai môi trường và:

$$\vec{j}(x,y,z) = j_x\vec{i}_x + j_y\vec{i}_y + j_z\vec{i}_z$$

$$\vec{j}_1(x,y,z) = K_1\left(j_x\vec{i}_x + j_y\vec{i}_y - j_z\vec{i}_z\right)$$

Đồng thời lấp đầy môi trường 2 bởi môi trường 1 có hệ số từ thẩm là μ_1. Tại điểm M trên mặt phân cách: $\vec{B}_1(M) = \frac{\mu_1}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}\times\vec{r}}{\vec{r}}dV + \frac{\mu_1}{4\pi}\int_V \frac{K_1\vec{j}\times\vec{r}\,'}{\vec{r}\,'}dV' = \mu_1\vec{H}_1 + \mu_1\vec{H}'_1$

Vì hai dòng điện đối xứng với nhau, $\vec{r}$ đối xứng với $\vec{r}\,'$qua mặt phân cách nên các hình chiếu: $B_{1n} = (1+K_1)\mu_1 H_{1n}$ và $H_{1t} = (1-K_1)H_{1t}$

+ Muốn tính từ trường trong môi trường 2, lấp đầy môi trường 1 bởi môi trường 2 ; đồng thời đưa vào miền V dòng điện ảnh $\vec{j}_2 = K_2\left(j_x\vec{i}_x + j_y\vec{i}_y + j_z\vec{i}_z\right)$. Tại điểm M thì:

$$\vec{B}_2(M) = \frac{\mu_2}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}_2\times\vec{r}}{r^3}dV = \frac{\mu_2}{4\pi}\int_V \frac{K_2\vec{j}\times\vec{r}}{r^3}dV$$

Suy ra: $B_{2n} = K_2\mu_2 H_{1n}$ và $H_{2t} = K_2 H_{1t}$

Áp dụng các điều kiện biên: $\begin{cases} B_{1n} = B_{2n} \Rightarrow (1+K_1)\mu_1 = K_2\mu_2 \\ H_{1t} = H_{2t} \Rightarrow (1-K_1)H_{1t} = K_2 H_{1t} \end{cases}$

Giải hệ ta thu được: $K_1 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}$; $K_2 = \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1}$

Bài 2: Trục thẳng dài vô hạn mang dòng điện cường độ I nằm trong môi trường thứ 1 có hệ số từ thẩm μ_1 cách mặt phẳng phân cách với môi trường thứ 2 có hệ số từ thẩm μ_2 một khoảng là h. Xác định từ trường trong môi trường 1và trong môi trường 2. Nếu môi trường 1 là không khí $\mu_1 = \mu_o$, môi trường 2 có $\mu_2 \gg \mu_o$.

Giải:

Áp dụng phương pháp ảnh điện.

Tương tự như bài 1 ở trên để tính từ trường trong môi trường thứ 1 bằng cách lấp đầy môi trường 2 bởi môi trường 1. Đặt trục thẳng dài vô hạn mang dòng điện I_1 đối xứng với I qua mặt phân cách hai môi trường. Xét tại điểm M nằm trên mặt phân cách hai môi trường. Khi đó, từ trường tại M: $\vec{B}_1(M) = \mu_1\vec{H} + \mu_1\vec{H}_1$

với $\vec{H}, \vec{H}_1$ lần lượt là cường độ từ trường do trục dây dẫn mang dòng điện I và I_1 gây ra tại M. Suy ra, các thành phần hình chiếu: $\begin{cases} H_{1x} = H_{1t} = -\left(\dfrac{I}{2\pi r} + \dfrac{I_1}{2\pi r}\right)\cos\alpha \\ B_{1y} = B_{1n} = \mu_1\left(\dfrac{I}{2\pi r} - \dfrac{I_1}{2\pi r}\right)\sin\alpha \end{cases}$

Muốn xác định từ trường trong môi trường thứ 2 bằng cách lấp đầy môi trường thứ 1 bởi môi trường 2; đồng thời đặt trục thẳng dòng I_2 tại I. Khi đó, từ trường do dòng I_2 gây ra tại M: $\vec{B}_2(M) = \mu_2\vec{H}_2$; với $\vec{H}_2$ cường độ từ trường do dòng I_2 gây ra tại M.

Suy ra, các thành phần hình chiếu: $\begin{cases} H_{2x} = H_{2t} = -\left(\dfrac{I_2}{2\pi r}\right)\cos\alpha \\ B_{2y} = B_{2n} = \mu_2\left(\dfrac{I_2}{2\pi r}\right)\sin\alpha \end{cases}$

Áp dụng các điều kiện biên: $\begin{cases} B_{1n} = B_{2n} \\ H_{1t} = H_{2t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1(I - I_1) = \mu_2 I_2 \\ I + I_1 = I_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = \dfrac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I \\ I_2 = \dfrac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I \end{cases}$

Theo đề, $\mu_2 \gg \mu_1 = \mu_o$ nên $I_1 \approx I$, I_1 cùng chiều với I.

Ta có, thế vectơ tại một điểm bất kỳ do dòng dây thẳng dài vô hạn gây ra: $A = \frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{r_o}{r}$

+ Thế vectơ tại M (x,y) trong môi trường 1 do dòng I và I_1 gây ra: $\vec{A}_1 = A_1.\vec{i}_z$ và chọn $\vec{A}(r_o = h) = 0$. Do $\vec{A}_1 \nearrow\swarrow \vec{i}_z$, chiếu lên trục $\vec{i}_z$:

$$A_1 = -\left(\frac{\mu_o I}{2\pi}\ln\frac{h}{r_1} + \frac{\mu_o I_1}{2\pi}\ln\frac{h}{r_1}\right) = \frac{\mu_o I}{2\pi}\ln(r_1 r_2) - \frac{\mu_o I}{\pi}\ln h$$

Với r_1, r_2 là khoảng cách từ trục dòng điện I và trục dòng điện ảnh I_1 tới điểm M(x, y).

$$r_1 = \sqrt{x^2 + (y-h)^2} \quad \text{và} \quad r_2 = \sqrt{x^2 + (y+h)^2}$$

Từ trường trong môi trường 1: $\vec{B}_1 = \text{rot}\vec{A}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_1 \end{vmatrix} = \frac{\partial A_1}{\partial y}\vec{i}_x - \frac{\partial A_1}{\partial x}\vec{i}_y$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_o I}{\pi}\frac{1}{\left[x^2 + (y-h)^2\right]\left[x^2 + (y+h)^2\right]}\left[y\left(x^2 + y^2 - h^2\right)\vec{i}_x - x\left(x^2 + y^2 + h^2\right)\vec{i}_y\right]$$

+ Từ trường trong môi trường 2 là từ trường do trục mang dòng I_2 (đặt tại vị trí của trục mang dòng điện I) gây ra trong môi trường đồng nhất vô hạn có hệ số từ thẩm μ_2.

$\vec{B}_2 = \frac{\mu_2 I_2 \vec{r}_3}{2\pi r_3^2}$ với r_3 là khoảng cách từ trục dòng điện I_2 đến điểm cần tính trường.

PHẦN BA: KẾT LUẬN

Điện động lực học là một môn học khó vì kiến thức rộng, đòi hỏi sử dụng các ngôn ngữ toán học cao cấp với các bài tập phong phú và đa dạng nên việc giải bài tập sẽ gặp phải khó khăn.

Với đề tài **"Phương pháp giải bài tập điện động lực học"** dựa vào mức độ nhận thức để phân loại bài tập với ý muốn giúp người học trong việc lựa chọn bài tập để giải có phương pháp chung.

Trong bài luận này, tôi đã đưa ra 27 bài tập giải mẫu sử dụng các phương pháp khác nhau để giải; trong đó có 17 bài tập thuộc chương điện trường tĩnh và 10 bài tập thuộc chương từ trường dừng. Do thời gian còn ít nên bài luận chỉ trình bày những bài tập cơ bản nhất trong hai chương Điện trường tĩnh và Từ trường dừng với những phân bố nguồn được cho là đều, trong những vật dẫn có tính đối xứng làm cho việc giải bài tập đơn giản một phần.

Bài luận đã giúp bản thân hiểu biết sâu sắc hơn về môn Điện động lực và tôi hy vọng bài luận này đóng góp một phần vào tài liệu học tập của các bạn sinh viên.

Dù đã cố gắng nhiều nhưng không thể tránh những thiếu sót trong quá trình làm luận, Rất mong được sự đóng góp ý kiến của thầy cô.

Xin chân thành cảm ơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO:

[1] Ngô Nhật Ảnh, Trương Trọng Tuấn Mỹ (2000), Trường điện từ, Nhà xuất bản đại học quốc gia TP Hồ Chí Minh.

[2] Ngô Nhật Ảnh, Trương Trọng Tuấn Mỹ (2000), Bài tập trường điện từ, Nhà xuất bản ĐHQG TP.HCM.

[3] Phạm Văn Đổng, Hoàng Lan (1995), Giáo trình Điện động lực học và Lý thuyết tương đối, Trường ĐHSP TP.HCM

[4] Nguyễn Hữu Mình, Tạ Duy Lợi, Đỗ Đình Thanh, Lê Trọng Tường, Bài tập vật lý lý thuyết tập một, Nhà xuất bản Giáo dục (2009).

[5] Kiều Khắc Lâu, Lý thuyết trường điện từ, Nhà xuất bản Giáo dục (1999).

[6] Nguyễn Phúc Thuần, Điện động lực, Nhà xuất bản Đại học quốc gia (1998).

[7] L. G. Gretskô , V. I. Xugakôv, O. F. Tômaxevits, A. M. Feđortsenkô, Tuyển tập các bài tập vật lý lý thuyết, Nhà xuất bản đại học và trung học chuyên nghiệp Hà Nội (1978).

[8] V. V. Batưgin – In. Tôptưgin, Tuyển tập các bài tập Điện động lực học, Nhà xuất bản Giáo dục (1980).