Bài tập Cơ học tương đối tính

Lê Đại Nam

Bài 1. Sử dụng phép biến đổi Lorentz, chứng minh rằng: đại lượng $\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2}$ là một bất biến.

Bài 2. Thành lập công thức biến đổi Lorentz theo một phương bất kỳ (vị trí của chất điểm cho bởi vector $\vec{r}$ và vận tốc giữa hai hệ quy chiếu là $\vec{v}$ tùy ý).

Bài 3. Có hai quan sát viên K và K'. K' đứng yên ở ngay giữa một con tàu dài l đang chuyển động với vận tốc v so với mặt đất còn K đứng yên ở bên đường. Có hai sét đánh ở đầu tàu A và cuối tàu B. Chọn t = 0 lúc K' đi ngang qua K.

a) Nếu hai sét đều đánh vào thời điểm t' = 0 (đối với K') thì K thấy 2 sét ấy như thế nào?

b) Nếu hai sét đều đánh vào thời điểm t = 0 (đối với K) thì K' thấy 2 sét ấy như thế nào?

Bài 4. Một con tàu có máy phát tín hiệu và một máy thu tín hiệu. Con tàu, rời khỏi trái đất với vận tốc không đổi, gửi trở lại trái đất một xung tín hiệu và nó bị phản xạ từ trái đất. Bốn mươi giây sau trên đồng hồ con tàu, con tàu nhận được tín hiệu và tần số tín hiệu nhận được bằng một nửa tần số phát ra.

a) Tại thời điểm khi xung ra đa bị phản xạ khỏi trái đất, trái đất ở vị trí nào trong hệ quy chiếu con tàu.

b) Vận tốc của con tàu bằng bao nhiêu so với trái đất.

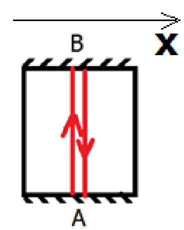
c) Tại thời điểm khi con tàu nhận lại xung ra đa thì con tàu ở đâu trong hệ quy chiếu trái đất.

Bài 5. Một chất điểm chuyển động trong hệ quy chiếu K với vận tốc $\vec{u}$, trong hệ quy chiếu K' với vận tốc $\vec{u}'$. Hệ quy chiếu K' chuyển động thẳng đều với vận tốc $\vec{v}$ so với hệ quy chiếu K. Tìm:

a) Độ lớn của vận tốc u theo các vector $\vec{u}'$ và $\vec{v}$

b) Giả sử trục Ox và O'x' của hai hệ quy chiếu trùng nhau, $\vec{v}$ song song với trục Ox. Gọi θ là góc hợp bởi $\vec{u}$ và trục Ox, θ' là góc hợp bởi $\vec{u}'$ và trục O'x'. Xác định góc θ theo $\theta'; \vec{u}'; v$.

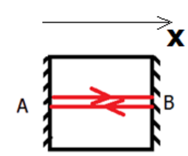
c) Áp dụng kết quả của hai câu a, b cho trường hợp của ánh sáng. Với $v \ll c$, hãy chứng minh công thức quang sai $\Delta\theta = \theta' - \theta = \frac{v}{c}\sin\theta'$



Bài 6. <u>Các thí nghiệm tưởng tượng của Einstein:</u>

Trong các thí nghiệm tưởng tượng của mình, Einstein thiết kế một chiếc đồng hồ lí tưởng như sau: một sóng ánh sáng (hoặc một hạt mang khối lượng) phản xạ qua lại giữa 2 gương A và B cách nhau một khoảng L_0. Đồng hồ sẽ kêu một tiếng "tích" khi sóng ánh sáng đi được một vòng từ gương A đến gương B rồi quay trở lại gương A.

a) <u>Sự giản nở thời gian:</u>



Giả sử ta có một cái đồng hồ lí tưởng như vậy đặt tại gốc O' của hệ quy chiếu K' sao cho hai gương A và B nằm song song với trục $O'x'$ như hình vẽ.

Hãy xác định thời gian giữa hai tiếng "tích" trong các hệ quy chiếu K' và K. (HQC K đứng yên, HQC K' chuyển động với vận tốc v theo trục Ox).

b) <u>Sự co ngắn chiều dài:</u>

Cũng với chiếc đồng hồ trên, nhưng giả sử ta đặt 2 gương A và B đặt vuông góc với trục $O'x'$ như hình vẽ.

Hãy xác định khoảng cách giữa hai gương trong các hệ quy chiếu K' và K.

c) <u>Công thức cộng vận tốc:</u>

Ta dùng đồng hồ như thí nghiệm a). Vận tôc của hạt trong đồng hồ là $\vec{u}'=\left(0,u'_y,0\right)$ trong hệ quy chiếu K'. Trong hệ quy chiếu K, vận tốc của hạt đó là $\vec{u}=\left(v,u_y,0\right)$.

c1) Tìm mối quan hệ giữa u'_y và u_y. Từ đó tìm ra mối quan hệ giữa hai vận tốc toàn phần u' và u.

c2) Từ kết quả của câu C1, hãy so sánh với kết quả có được từ công thức cộng vận tốc tổng quát đã được học. (hạt trong hệ K' có vận tốc là $\vec{u}'=\left(u'_x,u'_y,0\right)$.

Bài 7. Vào năm 1851, Fizeau thực hiện thí nghiệm nổi tiếng để đo vận tốc ánh sáng trong một chất lỏng chuyển động. Giả sử chất lỏng chiết suất n đựng trong một bình chuyển động với vận tốc v so với phòng thí nghiệm (PTN). Ông chiếu tia sáng vào bình, chiều truyền ánh sáng cùng với chiều chuyển động của bình thì kết quả là vận tốc ánh sáng trong chất lỏng: $u=\frac{c}{n}+kv$, trong đó k là hệ số kéo theo. Fizeau xác định được hệ số kéo theo đối với nước $n=4/3$ là $k=0.44$.

a) Hãy sử dụng phép biến đổi Lorentz để tìm lại các kết quả thực nghiệm của Fizeau.

b) Nếu chiết suất ánh sáng phụ thuộc vào bước sóng theo công thức Cauchy: $n=a+\frac{b}{\lambda^2}$ thì hệ số k bằng bao nhiêu? *(Đề thi năm 2010)*

Bài 8. Xuất phát từ Trái Đất, một tên lửa vũ trụ chuyển động với gia tốc $a'=10g$; gia tốc này là như nhau trong *mọi hệ quy chiếu quán tính **tức thời** gắn với tên lửa*. Quá trình tăng tốc được kéo dài trong thời gian $\tau=1{,}0$ năm theo thời gian trên Trái Đất.

a) Hãy tìm phép biến đổi Lorentz giữa 2 HQC quán tính K và K' (K' chuyển động với vận tốc v dọc trục Ox) của các thành phần gia tốc của một chất điểm nào đó.

b) Hãy xác định vận tốc của tên lửa ở cuối quá trình tăng tốc, vận tốc này sai khác vận tốc ánh sáng bao nhiêu phần trăm.

c) Sử dụng biến đổi Lorentz, xác định mối quan hệ giữa khoảng thời gian $dt'\ll$ trên tên lửa so với khoảng thời gian $dt\ll$ trên Trái Đất. Từ đó, tìm ra thời gian tăng tốc τ' trong hệ quy chiếu gắn với tên lửa.

Bài 9. Chúng ta xét một thí nghiệm đơn giản như sau: Giả sử một quan sát viên A đứng yên ở O trong hệ quy chiếu K. Quan sát viên này bắn một viên đạn vào một chiếc bao thử đạn treo ở một điểm trên trục Oy. Một quan sát viên B đứng ở gốc O' quan sát quá trình. Ta biết rằng biến đổi Lorentz không ảnh hưởng đến các đại lượng động học (trừ vận tốc) trên trục Oy. Do đó, quan sát viên A và B đều thấy tác dụng của viên đạn là như nhau (vết ghim của đạn) .Ta biết tác dụng của viên đạn đặc trưng bởi động lượng của viên đạn đó.Gọi vận tốc của viên đạn trên phương y là u_y trong hệ quy chiếu K và u'_y trong hệ quy chiếu K'. Khối lượng viên đạn là m_0.

a) Áp dụng định nghĩa cổ điển của động lượng, hãy so sánh $p_y = m_0 u_y$ và $p'_y = m_0 u'_y$, hãy chứng tỏ rằng áp dụng các định nghĩa này thì tiên đề của Einstein bị vi phạm.

b) Giải quyết vấn đề động lượng của một chất điểm, cơ học tương đối tính đưa ra lại khái niệm động lượng như sau:động lượng của một chất điểm khối lượng m_0, vận tốc $\vec{u}$ là vector $\vec{p} = m_0\vec{u} \Big/ \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$. Làm tương tự câu a, hãy chứng tỏ rằng với định nghĩa mới về động lượng, tiên đề của Einstein không bị vi phạm.

Bài 10. Một quả cầu chuyển động với vận tốc tương đối v trong một chất khí, có chứa n hạt chuyển động chậm trong một đơn vị thể tích, mỗi hạt có khối lượng m. Tìm áp suất p của chất khí đặt lên một phần tử bề mặt quả cầu, vuông góc với vận tốc của nó, nếu các hạt va chạm hoàn toàn đàn hồi với nhau. Chứng minh rằng áp suất này như nhau trong hệ quy chiếu gắn với quả cầu và gắn với chất khí.

Bài 11. Một chất điểm có khối lượng m_0, chuyển động dọc theo trục x của hệ quy chiếu K.

a) Nếu tại t = 0, x = 0 ta bắt đầu tác dụng lực $\vec{F}$ không đổi dọc theo trục x, tìm sự phụ thuộc của tọa độ theo thời gian của chất điểm trên.

b) Nếu chất điểm chuyển động theo phương trình $x = \sqrt{a^2 + c^2t^2}$, tìm lực tác dụng lên hạt trong hệ quy chiếu này.

Bài 12. Xuất phát từ phương trình động lực học tương đối tính, hãy tìm:

a) Các trường hợp như thế nào thì lực tác dụng $\vec{F}$ cùng phương với gia tốc $\vec{a}$

b) Trong các trường hợp đó, tìm mối quan hệ giữa $\vec{F}$ và $\vec{a}$

Bài 13. Một proton tương đối tính, tại thời điểm t = 0 bay vào với vận tốc $\vec{v_0}$ trong miền có điện trường đều $\vec{E}$. Khảo sát chuyển động của proton trong hai trường hợp sau:

a) $\vec{v}_0 // \vec{E}$, tìm biểu thức xác định vận tốc $\vec{v}$ của proton theo thời gian.

b) $\vec{v}_0 \perp \vec{E}$, xác định: góc $\theta = (\vec{v};\vec{v_0})$ giữa hai vector $\vec{v}$ và $\vec{v_0}$ theo thời gian; hình chiếu v_x của $\vec{v}$ lên phương $\vec{v_0}$.

c) Cũng proton này, nhưng tại thời điểm t = 0 bay vào một miền từ trường $\vec{B}$ nào đó. Biết proton này chuyển động tròn, xác định bán kính quỹ đạo của proton này và gia tốc của proton này.

Bài 14. Một hạt tương đối tính có động lượng $\vec{p}$ và năng lượng toàn phần E, chuyển động dọc theo trục x của hệ quy chiếu K. Trong hệ quy chiếu K’, chuyển động với vận tốc không đổi V đối với hệ quy chiếu K theo chiều dương của trục x, hạt này có động lượng và năng lượng toàn phần tương ứng là $\vec{p'}$ và E'

a) Chứng minh rằng, ta sẽ có biểu thức biến đổi Lorentz cho động lượng và năng lượng như sau: $p'_x = \gamma\left(p_x - EV/c^2\right); p'_y = p_y; p'_z = p_z; E' = \gamma\left(E - p_xV\right)$ với $\gamma = 1\Big/\sqrt{1-V^2/c^2}$.

b) Từ biểu thức này, chứng tỏ rằng đối với một hạt, đại lượng $E^2 - p^2c^2$ là bất biến, nó bằng bao nhiêu?

c) Áp dụng kết quả câu a cho một hệ các hạt, hãy chứng tỏ rằng, đối với một hệ hạt thì đại lượng $\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{p_i}\right)^2 c^2$ cũng là một bất biến tương đối tính.

d) Ta thừa nhận rằng: trong hệ quy chiếu quán tính gắn với khối tâm của một hệ (gồm các chất điểm chuyển động thẳng đều), tổng động lượng bằng 0. Hãy tìm vận tốc của khối tâm hệ so với hệ quy chiếu K. Từ đó, tìm mối quan hệ giữa năng lượng toàn phần trong hệ quy chiếu K và hệ quy chiếu khối tâm.

e) Đặt $\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{p_i}\right)^2 c^2 = \left(m_G c^2\right)^2$, chứng tỏ rằng $m_G \geq \sum_{i=1}^{n} m_{0i}$ với $\sum_{i=1}^{n} m_{0i}$

Bài 15. Xét va chạm của n vật thể trong hệ quy chiếu quán tính K. Các vật thể này có thể xem là chất điểm có khối lượng nghỉ và vận tốc lần lượt là m_α và $\overrightarrow{u_\alpha}$. Sau va chạm, khối lượng nghỉ và vận tốc tương ứng là m'_α và $\overrightarrow{u'_\alpha}$.

Đối với m_α và $\overrightarrow{u_\alpha}$ nào đó, gọi một va chạm là **không đàn hồi cực đại** trong hệ K nếu sau va chạm, tổng động năng của cả hệ có giá trị nhỏ nhất, phù hợp với định luật bảo toàn năng lượng và động lượng.

a) Tìm m'_α và $\overrightarrow{u'_\alpha}$ trong phạm vi mà chúng xác định – đối với một va chạm không đàn hồi tối đa.

b) Khái niệm va chạm không đàn hồi tối đa có bất biến với phép biến đổi Lorentz hay không? Giải thích?

Bài 16. Một hạt tương đối tính có khối lượng nghỉ m do va chạm với một hạt đứng nghỉ có khối lượng M gây ra phản ứng sinh các hạt mới: $m + M \to m_1 + m_2 + ... + m_n$, trong đó vế bên phải để chỉ khối lượng nghỉ của các hạt sinh ra. Dùng tính bất biến của đại lượng $E^2 - p^2c^2$ của hệ hạt, chứng minh rằng động năng ngưỡng của hạt m để sinh ra phản ứng này là:

$$K = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)^2 - (m+M)^2}{2M} c^2$$

Bài 17. Xét sự va chạm của hạt pion π^- (π-meson)với proton p đứng yên trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm sinh ra hai hạt K^o (K-meson) và Λ^o (lambda). Phản ứng được viết dưới dạng: $\pi^- + p \to K^o + \Lambda^o$

Cho biết $m_{\pi^-} = 140$ MeV/c^2 , m_p=938 MeV/c^2 , $m_{K^o} = 498$ MeV/c^2 , $m_{\Lambda^o} = 1116$ MeV/c^2 .

a) Tính động năng ngưỡng của pion để phản ứng trên xảy ra.

b) Trong một thí nghiệm, các pion có động lượng 2,50.10^3 MeV/c. Người ta quan sát thấy các hạt Λ^o có động lượng 0,60.10^3 MeV/c và hướng chuyển động của chúng lập góc 45^o so với hướng chuyển động của các pion.

b1) Hãy tính tốc độ của hệ quy chiếu khối tâm đối với hệ quy chiếu phòng thí nghiệm.

b2) Hãy tính động lượng của các hạt K^o trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm và hệ quy chiếu khối tâm.

Bài 18. <u>Sự sinh hủy cặp:</u>

a) Chứng tỏ rằng một photon không thể tự do sinh ra một cặp electron - positron$\left(e^{-}+e^{+}\right)$.

b) Năm 1928, Dirac đã dự kiến sự phát sinh cặp electron - positron$\left(e^{-}+e^{+}\right)$từ một photon năng lượng cao. Hãy chứng tỏ rằng, sự sinh cặp này là khả dĩ (dưới điều kiện của một trường ngoài nào đó).

c) Một cặp electron – positron được sinh ra dưới điện trường của một electron đứng yên. Xác định năng lượng cực tiểu của photon để sinh cặp này.

d) Một cặp electron – positron được sinh ra bởi tương tác giữa photon và electron tương đối tính chuyển động ngược chiều nhau, tính năng lượng của electron này nếu ban đầu photon có năng lượng $E_{\gamma}=10eV$.

e) Một positron có động năng T = 750 keV bay tới một electron đứng yên. Do sự hủy cặp, hai photon cùng năng lượng xuất hiện. Hãy xác định góc giữa phương bay của hai photon trên.

f) Xét sự hủy cặp của positron và electron trong câu e, hãy xác định bước sóng lớn nhất và bé nhất (có thể)của các photon sinh ra từ sự hủy cặp này.

Bài 19. <u>Hiệu ứng Doppler tương đối tính:</u>

Năm 1842, nhà vật lý người Áo Christian Doppler phát hiện ra một hiện tượng mang tên ông – hiệu ứng Doppler. Hiệu ứng Doppler tương đối tính là hiệu ứng Doppler trong cơ học tương đối tính.

Để khảo sát hiệu ứng Doppler tương đối tính, ta xem photon là một hạt có động lượng $\vec{p}$ và năng lượng ε. Hệ quy chiếu K gắn với nguồn, hệ quy chiếu K’ gắn với máy thu.

a) Sử dụng phép biến đổi Lorentz giữa động lượng và năng lượng, giả sử nguồn đứng yên, máy thu chuyển động để chứng tỏ hệ thức sau:

$$f_M=\frac{1-\frac{v}{c}\cos\theta_M}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}f_S$$

b) Tương tự câu a, giả sử nguồn chuyển động còn máy thu đứng yên, hãy chứng tỏ hệ thức sau:

$$f_S=\frac{1-\frac{v}{c}\cos\theta_S}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}f_M$$

c) Sử dụng biến đổi Lorentz về phương truyền ánh sáng, chứng tỏ các hệ thức ở a và b là tương đương nhau.

d) Từ các kết quả ở a và b, hãy chứng tỏ: $\dfrac{f_M\sqrt{1-\frac{v_M^2}{c^2}}}{1-\frac{\overrightarrow{v_M}\,\overrightarrow{c_M}}{c^2}}=\dfrac{f_S\sqrt{1-\frac{v_S^2}{c^2}}}{1-\frac{\overrightarrow{v_S}\,\overrightarrow{c_S}}{c^2}}$.

Bài 20. Một nguồn điểm S của ánh sáng đơn sắc phát bức xạ có tần số f. Một người quan sát A chuyển động với tốc độ không đổi v dọc theo một đường thẳng cách nguồn S một khoảng d.

a) Hãy xác định biểu thức cho tần số quan sát được như một hàm của khoảng cách x từ gốc O gần S nhất.

b) Hãy vẽ đồ thị gần đúng cho trường hợp v = 0,80 c.

Bài 21. Trong vật lý hiện đại, một trạng thái có thể biểu diễn theo nhiều dạng biến số, mỗi dạng ứng với một không gian biểu diễn riêng. Chúng ta đề cập đến một dạng gọi là không gian pha: trạng thái biểu diễn như hàm của $\left(x; y; z; p_x; p_y; p_z\right)$. Hãy chứng minh rằng: phần tử thể tích $d^3xd^3p = dxdydzdp_xdp_ydp_z$ là một bất biến với phép biến đổi Lorentz.

Bài 22. Hiệu ứng Compton:

Mô hình sóng ánh sáng tiên đoán rằng khi một bức xạ điện từ bị tán xạ trên một hạt điện tích thì bức xạ tán xạ về khắp mọi phương phải có tần số như bức xạ tới.Năm 1922, Arthur H.Compton đã chứng minh rằng bức xạ tán xạ có tần số phụ thuộc vào góc nhiễu xạ. Cụ thể bước sóng biến dổi một lượng $\Delta\lambda = 2\dfrac{h}{m_e c}\sin^2\theta$ khi bị tán xạ bởi electron. Hiệu ứng trên được gọi là hiệu ứng Compton.

a) Xem tương tác giữa electron và photon lúc này như va chạm giữa hai hạt tương đối tính, chứng tỏ hệ thức Compton.

b) Xây dựng biểu thức liên hệ giữa góc tán xạ φ của electron bay sau khi "va chạm" với photon và góc tán xạ θ của photon.

c) Xây dựng biểu thức liên hệ giữa động năng của electron và góc tán xạ φ của nó.

Bài 23.

a)Vẽ đồ thị động năng của electron tán xạ và photon tán xạ theo góc tán xạ θ của photon tán xạ trong trường hợp photon tới có năng lượng bằng 2 lần năng lượng nghỉ của electron.

b) Từ đồ thị đã vẽ, xác định động năng của electron tán xạ và photon tán xạ khi chúng vuông góc.

c) Từ đồ thị, xác định góc tán xạ cực đại của photon tán xạ để nó sinh cặp electron – positron.

d) Chứng tỏ rằng: góc tán xạ cực đại của photon tán xạ để nó sinh cặp electron – positron luôn bé hơn 60^o.

Đáp án

Sửa Bài 1 $\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2}$.

Áp dụng biến đổi Lorentz giữa hệ quy chiếu K và K' đối với hai biến cố 1 và 2:

$$\begin{cases} x_1' = \gamma\left(x_1 - vt_1\right) \\ y_1' = y_1 \\ z_1' = z_1 \\ t_1' = \gamma\left(t_1 - \dfrac{v}{c^2}x_1\right) \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x_2' = \gamma\left(x_2 - vt_2\right) \\ y_2' = y_2 \\ z_2' = z_2 \\ t_2' = \gamma\left(t_2 - \dfrac{v}{c^2}x_2\right) \end{cases}. \text{ Từ đó suy ra: } \begin{cases} \Delta x' = \gamma\left(\Delta x - v\Delta t\right) \\ \Delta y' = \Delta y \\ \Delta z' = \Delta z \\ \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \dfrac{v}{c^2}\Delta x\right) \end{cases} \quad (1).$$

Ta có: $\begin{cases} \Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2\Delta t^2 \\ \Delta s'^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - c^2\Delta t'^2 \end{cases}$ (2).

Thay (2) vào (1), ta tính:

$$\Delta s'^2 - \Delta s^2 = \gamma^2\left[\left(\Delta x - v\Delta t\right)^2 - \left(c\Delta t - \frac{v}{c}\Delta x\right)^2\right] - \left[\Delta x^2 - c^2\Delta t^2\right]$$

$$= \left(\gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - 1\right)\left(\Delta x^2 - c^2\Delta t^2\right) = 0$$

Do đó, $\Delta s'^2 = \Delta s^2$ *hay* $\Delta s' = \Delta s$. Đại lượng $\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2\Delta t^2}$ bất biến với phép biến đổi Lorentz.

Sửa Bài 2 Ta chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho: Ox song song với $\vec{v}$, mặt phẳng Oxy chứa $\vec{r}$ và $\vec{v}$.

Khi đó, ta có: $\begin{cases} x = \vec{r}.\vec{v}/v \\ y = \left|\left[\vec{v} \times \vec{r}\right]\right|/v \\ z = 0 \end{cases}$. Và các vector đơn vị: $\begin{cases} \vec{i} = \dfrac{\vec{v}}{v} \\ \vec{j} = \left[\vec{k} \times \vec{i}\right] \\ \vec{k} = \dfrac{\left[\vec{v} \times \vec{r}\right]}{\left|\left[\vec{v} \times \vec{r}\right]\right|} \end{cases}$. Do đó: $\begin{cases} \vec{r}_x = x.\vec{i} = \left(\vec{v}.\vec{r}\right).\vec{v}/v^2 \\ \vec{r}_y = y.\vec{j} = \left[\left[\vec{v} \times \vec{r}\right] \times \vec{v}\right]/v^2 \\ \vec{r}_z = z.\vec{k} = \vec{0} \end{cases}$ (1)

Ta sử dụng biến đổi Lorentz cho hai hệ quy chiếu K và K': $\begin{cases} \vec{r}_x' = \gamma\left(\vec{r}_x - \vec{v}t\right) \\ \vec{r}_y' = \vec{r}_y \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{\vec{v}.\vec{r}}{c^2}\right) \end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases} \vec{r}' = \gamma\left(\vec{r}_x - \vec{v}t\right) + \vec{r}_y \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{\vec{v}.\vec{r}}{c^2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}' = \dfrac{\gamma\left\{\left(\left(\vec{v}.\vec{r}\right) - v^2 t\right).\vec{v} + \left[\left[\vec{v}\times\vec{r}\right]\times\vec{v}\right]\right\}}{v^2} \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{\vec{v}.\vec{r}}{c^2}\right) \end{cases}$

Sửa Bài 3 a) Trong hệ quy chiếu K', biến cố hai tiếng sét đánh là $A'(l/2;0;0;0)$ và $B(-l/2;0;0;0)$. Trong hệ quy chiếu K, biến số hai tiếng sét đánh là $A(x_A,0,0,t_A)$ và $B(x_B,0,0,t_B)$. Dùng phép biến đổi Lorentz từ hệ quy chiếu K' sang hệ quy chiếu K cho thời gian: $\begin{cases} t_A = \gamma\left(t'_A + \dfrac{v}{c^2}x'_A\right) = \gamma\left(0 + \dfrac{v}{c^2}\dfrac{l}{2}\right) = \gamma\dfrac{v}{c^2}\dfrac{l}{2} \\ t_B = \gamma\left(t'_B + \dfrac{v}{c^2}x'_B\right) = \gamma\left(0 - \dfrac{v}{c^2}\dfrac{l}{2}\right) = -\gamma\dfrac{v}{c^2}\dfrac{l}{2} \end{cases}$.

Vậy trong hệ K, người quan sát thấy tiếng sét tại B sớm hơn tại A khoảng $\Delta t = \gamma\dfrac{vl}{c^2}$.

b) Trong hệ quy chiếu K', biến cố hai tiếng sét đánh là $A'(l/2;0;0;t'_A)$ và $B(-l/2;0;0;t'_B)$. Trong hệ quy chiếu K, biến số hai tiếng sét đánh là $A(x_A,0,0,0)$ và $B(x_B,0,0,0)$. Dùng phép biến đổi Lorentz từ hệ quy chiếu K' sang hệ quy chiếu K cho thời gian: $\begin{cases} t_A = \gamma\left(t'_A + \dfrac{v}{c^2}x'_A\right) = \gamma\left(t'_A + \dfrac{v}{c^2}\dfrac{l}{2}\right) = 0 \\ t_B = \gamma\left(t'_B + \dfrac{v}{c^2}x'_B\right) = \gamma\left(t'_B - \dfrac{v}{c^2}\dfrac{l}{2}\right) = 0 \end{cases}$.

Từ đó, suy ra: $\begin{cases} t'_A = -\dfrac{v}{c^2}\dfrac{l}{2} \\ t'_B = \dfrac{v}{c^2}\dfrac{l}{2} \end{cases}$

Vậy trong hệ K', người quan sát thấy tiếng sét tại A sớm hơn tại B khoảng $\Delta t = \dfrac{vl}{c^2}$.

Sửa Bài 4 a)Trong hệ quy chiếu gắn với con tàu K: khi tín hiệu bị phản xạ ngay tại mặt đất thì trái đất cách con tàu một khoảng cách x_1. Tín hiệu đi và về mất quãng đường $2x_1$, ứng với khoảng thời gian Δt_0 = 40 giây. Do đó ta có: $2x_1 = c\Delta t_0 \Rightarrow x_1 = 0,5c\Delta t_0 = 6.10^9 m$.

b) Tín hiệu phát ra tại tàu là f_0, tới phản xạ tại trái đất với tần số f_1 và thu lại ở tàu là f_2. Do hiệu ứng Doppler, gọi vận tốc của tàu đối với trái đất là v, ta có:

$f_1 = f_0\sqrt{\dfrac{c-v}{c+v}}$ và $f_2 = f_1\sqrt{\dfrac{c-v}{c+v}}$ suy ra: $f_2 = f_0\dfrac{c-v}{c+v} = 0,5f_0 \Rightarrow v = \dfrac{c}{3} = 10^8 m/s$. Đây cũng là vận tốc của trái đất so với con tàu.

c) Xét trong hệ quy chiếu con tàu K, thời điểm trái đất phản xạ tín hiệu là $t_1 = \dfrac{x_1}{v} = \dfrac{c\Delta t_0}{2v}$.

Thời điểm con tàu nhận được tín hiệu trong hệ quy chiếu K là $t_2 = t_1 + \frac{\Delta t_0}{2} = \left(\frac{c}{v} + 1\right)\frac{\Delta t_0}{2}$, con tàu lúc này ở vị trí $x_2 = 0$.

Trong hệ quy chiếu K', lúc nhận tín hiệu, con tàu ở:

$x_2' = \gamma\left(x_2 - vt_2\right) = \gamma\frac{v}{c}\left(\frac{c}{v} + 1\right).\frac{c\Delta t_0}{2} = \frac{40}{\sqrt{2}}.3.10^8 = 8{,}5.10^9\,m$.

Sửa Bài 5 a) Áp dụng phép cộng vận tốc, ta có: $\begin{cases} u_x = \dfrac{u_x' + v}{1 + u_x'v/c^2} \\ u_y = \dfrac{u_y'\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + u_x'v/c^2} \end{cases} \Rightarrow u = \dfrac{\sqrt{\left(u'^2 + 2u_x'v + v^2\right) - u_y'^2v^2/c^2}}{1 + u_x'v/c^2}$.

Ta đưa dạng vector vào như sau: $u'^2 + 2u_x'v + v^2 = u'^2 + 2\vec{u'}.\vec{v} + v^2 = \left(\vec{u'} + \vec{v}\right)^2$; $u_y'^2v^2/c^2 = \left[\left[\vec{v} \times \vec{u'}\right]\right]^2 / c^2$ và $1 + u_x'v/c^2 = 1 + \vec{u'}.\vec{v}/c^2$.

Suy ra: $u = \dfrac{\sqrt{\left(\vec{u'} + \vec{v}\right)^2 - \left[\left[\vec{v} \times \vec{u'}\right]\right]^2 / c^2}}{1 + \vec{u'}.\vec{v}/c^2}$.

b) Ta có: $\begin{cases} u_x = \dfrac{u_x' + v}{1 + u_x'v/c^2} \\ u_y = \dfrac{u_y'\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + u_x'v/c^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u\cos\theta = \dfrac{u'\cos\theta' + v}{1 + u'v\cos\theta'/c^2} \\ u\sin\theta = \dfrac{u'\sin\theta'\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + u'v\cos\theta'/c^2} \end{cases} \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{u'\sin\theta'\sqrt{1 - v^2/c^2}}{u'\cos\theta' + v}$.

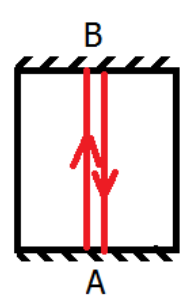
c) Từ kết quả câu a, ta thay $u' = c$ ta được $u = c$. Từ kết quả câu b ta có:

$\sin\theta = \dfrac{\sin\theta'\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v\cos\theta'/c} \Rightarrow \sin\theta' - \sin\theta = \dfrac{\sin\theta'\left(1 + v\cos\theta'/c - \sqrt{1 - v^2/c^2}\right)}{1 + v\cos\theta'/c} \approx \dfrac{v}{c}\sin\theta'\dfrac{v/2c + \cos\theta'}{1 + v\cos\theta'/c} \approx \dfrac{v}{c}\sin\theta'\cos\theta'$.

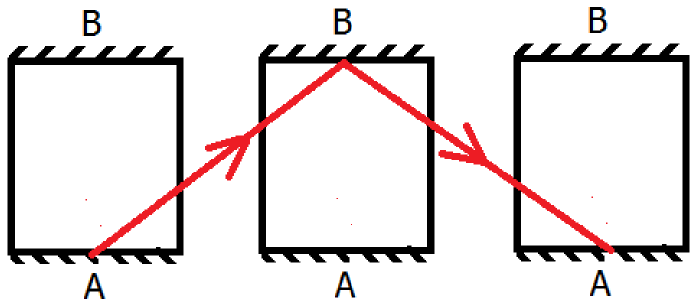
Lại có: $\sin\theta' - \sin\theta = 2\sin\dfrac{\Delta\theta}{2}\cos\left(\theta' - \dfrac{\Delta\theta}{2}\right) \approx \Delta\theta\cos\theta'$.

Từ đó ta được: $\Delta\theta = \dfrac{v}{c}\sin\theta'$

Sửa Bài 6 a) Trong hệ quy chiếu K', khoảng thời gian giữa hai tiếng "tích" là $\Delta t_0 = \dfrac{2L_0}{c}$..



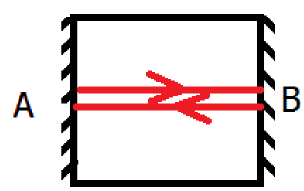
Trong hệ quy chiếu K, từ hình vẽ, ta thấy khoảng thời gian giữa hai tiếng "tích" là: Δt.



Ta lại có: $\left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 + L_0^2 = \left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 \Rightarrow \Delta t = \frac{2L_0}{\sqrt{c^2 - v^2}}$.

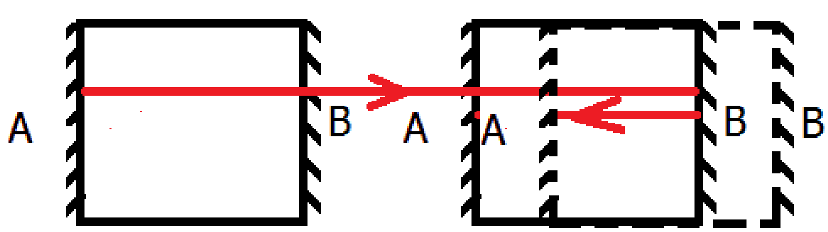
Từ đó, suy ra: $\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Nói cách khác, một tiếng "tích" trong hệ quy chiếu mà đồng hồ chuyển động giãn nở so với một tiếng "tích" trong hệ quy chiếu mà đồng hò đứng yên.

b) Trong hệ quy chiếu gắn K', khoảng thời gian giữa 2 tiếng "tích" là: $\Delta t_0 = \frac{2L_0}{c}$.



Trong hệ quy chiếu gắn với K, khoảng thời gian giữa 2 tiếng "tích" là Δt. Từ tiên đề 1, các hiện tượng trong hệ quy chiếu K diễn ra như nhau trong hệ quy chiếu K'. Do đó, sự giãn nở thời gian cũng là như nhau.

Do đó: $\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Mà $2L = (c - v)\Delta t$, trong đó L là khoảng cách giữa hai gương trong hệ quy chiếu K



Ta có $\Delta t = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2cL}{c^2 - v^2}$ suy ra $\frac{2cL}{c^2 - v^2} = \frac{L_0}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow L = L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Ta thu được kết quả của sự co ngắn chiều dài theo phương chuyển động của đồng hồ.

c) Trong hệ quy chiếu K', thời gian giữa 2 tiếng "tích" là Δt_0. Ta có: $\Delta t_0 = \frac{2L_0}{u'_y}$.

Trong hệ quy chiếu K, thời gian giữa 2 tiếng "tích" là Δt. Ta có: $\Delta t = \frac{L_0}{u_y}$.

Hiệu ứng giãn nở thời gian xảy ra như nhau đối với các đồng hồ. Do đó, $\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

Vận tốc của hạt trong hệ quy chiếu K là $u = \sqrt{v^2 + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)u'^2_y}$. Kết quả này tương tự như kết quả rút ra từ phép cộng vận tốc tương đối tính trong trường hợp $u'_x = 0$.

Sửa Bài 7 a) Áp dụng phép cộng vận tốc tương đối tính, ta có:

$$u = \frac{u'+v}{1+u'v/c^2} = \frac{c}{n}\frac{1+nv/c}{1+v/nc} = \frac{c}{n}\left[1+\frac{n.v}{c}\frac{1-1/n^2}{1+v/nc}\right] \approx \frac{c}{n} + \left(1-\frac{1}{n^2}\right)v \Rightarrow k = \left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

b) Do hiệu ứng Doppler nên bước sóng của ánh sáng trong nước là λ thì bước sóng ánh sáng người quan sát đo được là $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda = \lambda + \frac{vn}{c}\lambda$. Và vận tốc ánh sáng trong nước là $\frac{c}{n} = \frac{c}{n(\lambda)}$.

Người quan sát coi: $u' = \frac{c}{n(\lambda')} = \frac{c}{n(\lambda)} + c\Delta\left(\frac{1}{n(\lambda)}\right) = \frac{c}{n} - \frac{c}{n^2}\frac{dn(\lambda)}{d\lambda}\Delta\lambda$.

Ta có: $\frac{dn(\lambda)}{d\lambda} = \frac{-2b}{\lambda^3}$ và $\Delta\lambda = \frac{vn}{c}\lambda$, thay vào ta được: $u' = \frac{c}{n} + \frac{2bv}{n\lambda^2}$.

Áp dụng phép cộng vận tốc tương đối tính, ta có:

$$u = \frac{u'+v}{1+u'v/c^2} = \frac{c}{n}\frac{1+\left(\frac{2b}{\lambda^2}+n\right)\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{nc}+\frac{2bv^2}{n\lambda^2c^2}} \approx \frac{c}{n}\left[1-\frac{v}{nc}+\left(\frac{2b}{\lambda^2}+n\right)\frac{v}{c}\right] = \frac{c}{n} + \left(1-\frac{1}{n^2}+\frac{2b}{n\lambda^2}\right)v \Rightarrow k = 1-\frac{1}{n^2}+\frac{2b}{n\lambda^2}.$$

Sửa Bài 8 a) Ta có: trong hệ quy chiếu K' thì $a'_x = \frac{du'_x}{dt'}$ và $a'_y = \frac{du'_y}{dt'}$. (1)

Trong hệ quy chiếu K thì $a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{du_x}{dt'}\frac{dt'}{dt}$ và $a_y = \frac{du_y}{dt} = \frac{du_y}{dt'}\frac{dt'}{dt}$. (2)

Lại có: $\frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dt'}} = \frac{1}{\gamma\left(1+u'_xv/c^2\right)}$ (3)

Từ phép cộng vận tốc, ta có: $\begin{cases} u_x = \dfrac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2} \\ u_y = \dfrac{u'_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + u'_x v/c^2} \end{cases}$ (4).

Từ (1), (2), (3), (4) , thay vào ta có kết quả sau: $\begin{cases} a_x = \dfrac{1}{\gamma^3\left(1 + u'_x v/c^2\right)^3}.a'_x \\ a_y = \dfrac{1}{\gamma^2\left(1 + u'_x v/c^2\right)^2}.a'_y - \dfrac{u'_y v/c^2}{\gamma^2\left(1 + u'_x v/c^2\right)^3}.a'_x \end{cases}$

b) Trong HQC K' quán tính gắn tức thời vào tên lửa ở thời điểm t thì vận tốc tên lửa là $u' = 0$. Do đó, trong HQC trái đất K, vận tốc của tên lửa là u và vận tốc của HQC K' là $v = u$.

Gia tốc của tàu trong hệ quy chiếu Trái đất là: $a = \dfrac{a'}{\gamma^3\left(1 + u'v/c^2\right)^3} = a'.\left(1 - v^2/c^2\right)^{3/2}$.

Ta có: $a = \dfrac{dv}{dt} \Rightarrow \dfrac{dv}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{3/2}} = a'dt \Rightarrow \dfrac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = a't \Rightarrow v = c.\dfrac{a't/c}{\sqrt{1 + a'^2t^2/c^2}}$

Sau khoảng thời gian tăng tốc, vận tốc của con tàu là: $V = c.\dfrac{a'\tau/c}{\sqrt{1 + a'^2\tau^2/c^2}}$.

c) Trong hệ quy chiếu K, trong khoảng thời gian dt ở thời điểm t, tàu có vận tốc $v = c.\dfrac{a't/c}{\sqrt{1 + a'^2t^2/c^2}}$ xem như không đổi. Khi đó, trong hệ quy chiếu K', khoảng thời gian tương ứng là dt'.

Do tàu đứng yên trong K' trong khoảng thời gian trên nên dt' chính là khoảng thời gian riêng.

Do hiệu ứng giãn nở thời gian nên:

$$\gamma dt' = dt \Rightarrow dt' = dt.\sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{dt}{\sqrt{1 + a'^2t^2/c^2}}$$

$$\Rightarrow \tau' = \int_0^\tau \frac{dt}{\sqrt{1 + a'^2t^2/c^2}} = \frac{c}{a'}\ln\left(\sqrt{1 + a'^2\tau^2/c^2} + a'\tau/c\right)$$

Sửa Bài 9 a) Đối với quan sát viên ở B, quan sát viên này thấy vận tốc của viên đạn trên phương y là:

$u'_y = \dfrac{u_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - u_x v/c^2} = u_y\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Do đó: $p'_y = m_0u'_y = m_0u_y\sqrt{1 - v^2/c^2} = p_y\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Hai quan sát viên thấy tác dụng của viên đạn này khác nhau, do động lượng trên phương y do hai quan sát viên này quan sát là khác nhau. Điều này mâu thuẫn với tiên đề 1 của Einstein.

b) Quan sát viên A thấy viên đạn bay với vận tốc $\left(0; u_y\right)$ còn quan sát viên B thấy viên đạn bay với vận tốc $\left(-v; u_y\sqrt{1 - v^2/c^2}\right)$.

Do đó, $u_A = u_y$ và $u'_B = \sqrt{v^2 + u_y'^2 - u_y'^2 v^2/c^2}$.

Động lượng theo phương y mà quan sát viên A quan sát được là: $p_y = \dfrac{m_0 u_y}{\sqrt{1-u_y^2/c^2}}$.

Động lượng theo phương y mà quan sát viên B quan sát được là:

$$p'_y = \frac{m_0 u'_y}{\sqrt{1-u_B'^2/c^2}} = \frac{m_0 u_y \sqrt{1-v^2/c^2}}{\sqrt{\left(1-v^2/c^2\right)\left(1-u_y'^2/c^2\right)}} = p_y .$$

Vậy với định nghĩa mới về động lượng, hai quan sát viên quan sát được tác dụng của viên đạn là như nhau. Do đó, tiên đề 1 của Einstein không bị vi phạm.

Sửa Bài 10 Xét trong hệ quy chiếu gắn với quả cầu, chất khí chuyển động với vận tốc $\vec{v}$ va chạm vào quả cầu. Xét phân tử khí thứ i nào đó va chạm vào quả cầu tại điểm (φ, θ). Do định luật bảo toàn cơ năng nên độ lớn vận tốc của phân tử khí này sau va chạm là v. Độ biến thiên động lượng của phân tử khí này là:

$$\Delta p_{\varphi\theta} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} 2v\cos\varphi .$$

Trong khoảng thời gian δt, lực mà phân tử khí này gây ra là: $f_{\varphi\theta} = \dfrac{\Delta p_{\varphi\theta}}{\delta t} = \dfrac{1}{\delta t}\dfrac{2mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\cos\varphi$.

Cả khối khí gây ra một lực là:

$$dF_{\varphi\theta} = n.v.\frac{2mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\cos^2\varphi\cos\theta.dS$$

Áp suất tác dụng lên mặt cầu tại điểm (φ, θ) là $p_{\varphi\theta} = \dfrac{dF_{\varphi\theta}}{dS} = \dfrac{2nmv^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\cos^2\varphi\cos\theta$.

Áp suất tại mặt vuông góc với vận tốc của quả cầu là $p_{0,0} = \dfrac{2nmv^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$.

Trong hệ quy chiếu gắn với chất khí, quả cầu chuyển động với vận tốc v va chạm vào các phân tử khí đứng yên. Để đơn giản, ta xét phân tử khí va chạm trực diện với quả cầu. Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng và động lượng, với M là khối lượng quả cầu, ta có: $\begin{cases} \dfrac{Mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \dfrac{mu}{\sqrt{1-u^2/c^2}} + \dfrac{Mv'}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} \\ \dfrac{M}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + m = \dfrac{m}{\sqrt{1-u^2/c^2}} + \dfrac{M}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} \end{cases}$

Giả hệ phương trình, với lưu ý $M \gg m$ và $v \simeq c$, ta được: $v' \simeq v$ và $u \simeq \dfrac{2v}{1+v^2/c^2}$.

Độ biến thiên động lượng của phân tử khí là: $\Delta p'_{0,0} = \dfrac{mu}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \dfrac{2mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$.

Tương tự, ta suy ra được áp suất là (lưu ý hiệu ứng co ngắn Lorentz – Fitzgerald nên mật độ n biến đổi tương đối tính) $p'_{0,0} = \dfrac{2nmv^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. Tức là áp suất này bất biến trong hai hệ quy chiếu.

Sửa Bài 11 a) Do ban đầu hạt không có vận tốc nên khi tác dụng lực theo phương x, hạt sẽ chuyển động theo phương x. Thật vậy, bởi vì ta có: $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \vec{p} - \vec{0} = \int_0^t \vec{F}dt \Rightarrow \vec{p} = \vec{F}t \Rightarrow \dfrac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \vec{F}t$.

Từ đây, ta tìm được vận tốc của hạt là $u = \dfrac{Ft/m_0}{\sqrt{1+F^2t^2/m_0^2c^2}} \Rightarrow x = x_0 + \int_0^t \dfrac{Ft/m_0}{\sqrt{1+F^2t^2/m_0^2c^2}}dt = \sqrt{m_0^2c^4/F^2 + c^2t^2}$

b) $x = \sqrt{a^2+c^2t^2} \Rightarrow u = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{c^2t}{\sqrt{a^2+c^2t^2}} \Rightarrow p = \dfrac{m_0u}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \dfrac{m_0c^2t}{a} \Rightarrow F = \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{m_0c^2}{a}$

Sửa Bài 12 a) Ta có: $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-\vec{u}^2/c^2}}\right) = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\vec{u}^2/c^2}}\vec{a} + \dfrac{m_0(\vec{u}.\vec{a})/c^2}{\left(\sqrt{1-\vec{u}^2/c^2}\right)^3}\vec{u}$

Để $\vec{F}//\vec{a}$ thì $\left[\dfrac{m_0(\vec{u}.\vec{a})/c^2}{\left(\sqrt{1-\vec{u}^2/c^2}\right)^3}\vec{u}\right]//\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{m_0(\vec{u}.\vec{a})/c^2}{\left(\sqrt{1-\vec{u}^2/c^2}\right)^3} = 0 \\ \vec{u}//\vec{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u} \perp \vec{F} \\ \vec{u}//\vec{F} \end{cases} \left(do\ \vec{F}//\vec{a}\right)$. Vậy để lực tác dụng cùng phương với gia tốc của lực tác dụng phải cùng phương với vận tốc hoặc vuông góc với vận tốc.

b) Khi $\vec{u}//\vec{F}$ thì $\vec{F} = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\vec{u}^2/c^2}}\vec{a} + \dfrac{m_0(\vec{u}.\vec{a})/c^2}{\left(\sqrt{1-\vec{u}^2/c^2}\right)^3}\vec{u} = \dfrac{m_0}{\left(\sqrt{1-\vec{u}^2/c^2}\right)^3}\vec{a}$.

Khi $\vec{u} \perp \vec{F}$ thì $\vec{F} = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\vec{u}^2/c^2}}\vec{a} + \dfrac{m_0(\vec{u}.\vec{a})/c^2}{\left(\sqrt{1-\vec{u}^2/c^2}\right)^3}\vec{u} = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\vec{u}^2/c^2}}\vec{a}$.

Sửa Bài 13 a) Ta có: $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} \Rightarrow \dfrac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \dfrac{m_0\vec{v_0}}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}} + q\vec{E}t$. Do $\vec{v}_0//\vec{E} \Rightarrow \vec{v}//\vec{E}$

Từ đó, ta suy ra được: $\dfrac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \dfrac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}} + \dfrac{qEt}{m_0} \Rightarrow v = ...$

b) Tương tự câu a, ta có : $\dfrac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \dfrac{m_0\vec{v_0}}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}} + q\vec{E}t$. Lần lượt nhân hữu hướng và vô hướng vào biểu thức trên cho $\vec{v_0}$ ta được:

$$\begin{cases} \dfrac{m_0\vec{v}\vec{v_0}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \dfrac{m_0v_0^2}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}} + q\vec{E}.\vec{v_0}t = \dfrac{m_0v_0^2}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}} \\ \dfrac{m_0\left[\vec{v}\times\vec{v_0}\right]}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \dfrac{m_0\left[\vec{v_0}\times\vec{v_0}\right]}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}} + q\left[\vec{E}\times\vec{v_0}\right]t = q\left[\vec{E}\times\vec{v_0}\right]t \end{cases} \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{\left|\left[\vec{v}\times\vec{v_0}\right]\right|}{\vec{v}.\vec{v_0}} = \dfrac{qEt}{m_0v_0}\sqrt{1-v_0^2/c^2}\ \ (\text{do } \vec{v}_0 \perp \vec{E}).$$

c) $\vec{F}=\dfrac{d\vec{p}}{dt}=q\left[\vec{v}\times\vec{B}\right]$, ta thấy rằng $\vec{F}\perp\vec{v}$ nên từ kết quả câu 12, ta có: $\vec{F}=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\vec{a}$. Từ đó suy ra phương trình sau: $F=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}a$. Do lực $\vec{F}\perp\vec{v}$, tức lực Lorentz không sinh công, nên vận tốc của proton có độ lớn không đổi. Gia tốc a lúc này là gia tốc hướng tâm: $a=\dfrac{v^2}{R}$.

Từ đây ta suy ra: $qvB=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\dfrac{v^2}{R}\Rightarrow R=\dfrac{m_0v/qB}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ và $a=\dfrac{qvB}{m_0}\sqrt{1-v^2/c^2}$.

Sửa Bài 14 a)Ta có: $\begin{cases} p'_x=\dfrac{m_0u'_x}{\sqrt{1-u'^2/c^2}}=m'u'_x \\ p'_y=\dfrac{m_0u'_y}{\sqrt{1-u'^2/c^2}}=m'u'_y \\ p'_z=\dfrac{m_0u'_z}{\sqrt{1-u'^2/c^2}}=m'u'_z \\ E'=\dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-u'^2/c^2}}=m'c^2 \end{cases}$ (1) và $\begin{cases} p_x=\dfrac{m_0u_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=mu_x \\ p_y=\dfrac{m_0u_y}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=mu_y \\ p_z=\dfrac{m_0u_z}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=mu_z \\ E=\dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=mc^2 \end{cases}$ (2).

Lại có, phép cộng vận tốc: $\begin{cases} u'_x=\dfrac{u_x-V}{1-u_xV/c^2} \\ u'_y=\dfrac{u_y\sqrt{1-V^2/c^2}}{1-u_xV/c^2} \\ u'_z=\dfrac{u_z\sqrt{1-V^2/c^2}}{1-u_xV/c^2} \end{cases}$ (3).

Từ đây ta tìm mối quan hệ giữa m' và m:

$$m'=\frac{m_0}{\sqrt{1-u'^2/c^2}}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{u_x'^2+u_y'^2+u_z'^2}{c^2}}}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{(u_x-v)^2+\left(u_y^2+u_z^2\right)\left(1-V^2/c^2\right)}{c^2\left(1-u_xv/c^2\right)^2}}}$$

$$=\frac{m_0\left(1-u_xV/c^2\right)}{\sqrt{1-u^2/c^2}\sqrt{1-V^2/c^2}}=\frac{1-u_xV/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}m=\gamma\left(1-u_xV/c^2\right)m \qquad (4)$$

Từ (4) và (3) thay vào (1), ta được:

$\begin{cases} p'_x=m'u'_x=\gamma m\left(u_x-V\right) \\ p'_y=m'u'_y=mu_y \\ p'_z=m'u'_z=mu_z \\ E'=m'c^2=\gamma\left(1-u_xV/c^2\right)mc^2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} p'_x=\gamma\left(p_x-EV/c^2\right) \\ p'_y=p_y \\ p'_z=p_z \\ E'=\gamma\left(E-p_xV\right) \end{cases}$. Từ hệ thức này, ta thấy $\left(p_x,p_y,p_z,\dfrac{E}{c^2}\right)\leftrightarrow\left(x,y,z,t\right)$.

b) Làm tương tự bài 1, với quan hệ tương ứng $\left(p_x, p_y, p_z, \frac{E}{c^2}\right) \leftrightarrow (x, y, z, t)$, ta có được kết quả:

$E^2 - p^2c^2$ bất biến và đối với 1 hạt, $E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4 = E_0^2$.

c) Đối với một hệ hạt, do các đại lượng $\left(p_x, p_y, p_z, E\right)$ đều có tính cộng được nên ta cũng có phép biến đổi Lorentz cho hệ: $\begin{cases} \sum p'_x = \gamma\left(\sum p_x - \left(\sum E\right)V/c^2\right) \\ \sum p'_y = \sum p_y \\ \sum p'_z = \sum p_z \\ \sum E' = \gamma\left(\sum E - \left(\sum p_x\right)V\right) \end{cases}$.

Tương tự câu b, ta cũng chứng minh được $\left(\sum E\right)^2 - \left(\sum \vec{p}\right)^2 c^2$ bất biến đối với phép biến đổi Lorentz.

d) Giả sử ta chọn hệ K là hệ quy chiếu ta đang khảo sát, K' là hệ quy chiếu gắn với khối tâm của hệ. Khi đó vận tốc tương đối giữa hai hệ quy chiếu V cũng chính là vận tốc khối tâm của hệ. Ta có: phép biến đổi Lorentz từ hệ K' sang hệ K là:

$$\begin{cases} \sum p_x = \gamma\left(\sum p'_x + \left(\sum E'\right)V/c^2\right) = \left(\sum E'\right)\gamma V/c^2 \\ \sum p_y = \sum p'_y = 0 \\ \sum p_z = \sum p'_z = 0 \\ \sum E = \gamma\left(\sum E' + \left(\sum p'_x\right)V\right) = \gamma \sum E' \end{cases} \Rightarrow \sum \vec{p} = \left(\sum E'\right)\gamma \vec{V}/c^2 = \left(\sum E\right)\vec{V}/c^2 .$$

Từ đây, ta tìm được vận tốc của khối tâm là: $\overrightarrow{V_G} = \dfrac{\overrightarrow{p_{he}}}{E_{he}/c^2}$.

e) Do đại lượng $E_{he}^2 - \vec{p}_{he}^2c^2$ bất biến, nên ta xét giữa hệ K và hệ quy chiếu khối tâm thì có:

$\left(m_Gc^2\right)^2 = E_{he}^2 - \vec{p}_{he}^2c^2 = E_{he/G}^2 - \vec{p}_{he/G}^2c^2$. Mà như ta đã đề cập, tổng động lượng trong hệ quy chiếu khối tâm bằng 0, do đó:

$\left(m_Gc^2\right)^2 = E_{he/G}^2 \Rightarrow m_Gc^2 = E_{he/G} = \sum\left(m_{0i}c^2 + K_i\right)$, K_i là động năng của hạt thứ i. Do động năng của mỗi hạt luôn lớn hơn hoặc bằng 0 nên: $m_Gc^2 = \sum\left(m_{0i}c^2 + K_i\right) \geq \sum m_{0i}c^2 \Rightarrow m_G \geq \sum m_{0i}$.

Dấu = xảy ra khi các hạt trong hệ đứng yên trong hệ quy chiếu khối tâm, tức là các chuyển động với cũng một vận tốc $\overrightarrow{V_G}$ trong hệ quy chiếu K.

Sửa Bài 15 a) Động năng của hệ hạt sau va chạm là: $K' = \sum\left(\gamma'_\alpha - 1\right)m'_\alpha c^2$ (1)

Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng cho hệ trước và sau va chạm:

$\sum \gamma_\alpha m_\alpha c^2 = \sum \gamma'_\alpha m'_\alpha c^2$ (2)

Áp dụng định luật bảo toàn động lượng cho hệ trước và sau va chạm:

$\sum \gamma_\alpha m_\alpha \overrightarrow{u_\alpha} = \sum \gamma'_\alpha m'_\alpha \overrightarrow{u'_\alpha}$ (3)

Từ (1) và (2), ta suy ra: $E_{he}^2 - \vec{p}_{he}^2c^2 = E_{he}'^2 - \vec{p}_{he}'^2c^2$.

Từ kết quả bài 14, ta có:

$$E_{he}^2 - \vec{p}_{he}^2 c^2 = E_{he}'^2 - \vec{p}_{he}'^2 c^2 \ge \left(\sum m_\alpha' c^2\right)^2$$

$$\Rightarrow \sum m_\alpha' c^2 \le \sqrt{\left(\sum \gamma_\alpha m_\alpha c^2\right)^2 - \left(\sum \gamma_\alpha m_\alpha \overrightarrow{u_\alpha}\right)^2 c^2} \quad (4)$$

Từ (1) và (4) ta suy ra được: $K' = \sum(\gamma_\alpha' - 1) m_\alpha' c^2 \ge \sum \gamma_\alpha m_\alpha c^2 - \sqrt{\left(\sum \gamma_\alpha m_\alpha c^2\right)^2 - \left(\sum \gamma_\alpha m_\alpha \overrightarrow{u_\alpha}\right)^2}$.

Dấu = xảy ra, tức là động năng hệ đạt cực tiểu khi và chỉ khí: $\overrightarrow{u_\alpha'} = \vec{u} = \dfrac{\sum \gamma_\alpha m_\alpha \overrightarrow{u_\alpha}}{\sum \gamma_\alpha m_\alpha}$.

Và $\sum m_\alpha' = \sqrt{\left(\sum \gamma_\alpha m_\alpha\right)^2 - \left(\sum \gamma_\alpha m_\alpha\right)^2 u^2/c^2} = \sqrt{1 - u^2/c^2} \sum \gamma_\alpha m_\alpha$.

b) Khái niệm va chạm không đàn hồi là một bất biến Lorentz bởi vì: va chạm không đàn hồi tức là sau va chạm các hạt sinh ra có cùng vận tốc, điều này tương đương với các hạt sinh ra đứng yên trong hệ quy chiếu khối tâm (HQC khối tâm lúc này là cố định trước và sau va chạm).

Sửa Bài 16 Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng, ta có: sau va chạm, năng lượng và động lượng của hệ là E và $\vec{p}$ xác định như sau:

$E = Mc^2 + mc^2 + K$ và $p^2c^2 = p_m^2 c^2 = \left(mc^2 + K\right)^2 - m^2c^4$

Từ đó thay vô, ta được: $E^2 - p^2c^2 = \left(Mc^2 + mc^2 + K\right)^2 - \left(mc^2 + K\right)^2 + m^2c^4 = 2KMc^2 + \left(m + M\right)^2 c^4$ (1)

Do đại lượng $E^2 - p^2c^2$ bất biến, nên ta có: $E^2 - p^2c^2 = E_G^2 \ge \left(m_1 + m_2 + ... + m_n\right)^2 c^4$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra:

$$2KMc^2 + \left(m + M\right)^2 c^4 \ge \left(m_1 + m_2 + ... + m_n\right)^2 c^2$$

$$\Rightarrow K \ge \frac{\left(m_1 + m_2 + ... + m_n\right)^2 - \left(m + M\right)^2}{2M} c^2$$

Sửa Bài 17 $\pi^- + p \to K^o + \Lambda^o$

a) Tương tự câu 16, ta có: $\Rightarrow K \ge \dfrac{\left(m_{K^o} + m_{\Lambda^o}\right)^2 - \left(m_\pi + m_p\right)^2}{2m_p} c^2 = 769 MeV$

b) b1)Tốc độ của hệ quy chiếu khối tâm là: $V = \dfrac{p_\pi c}{m_p c + \sqrt{m_\pi^2 c^2 + p_\pi^2}} = 0,73c$

b2)Trong hệ quy chiếu PTN:

$$\overrightarrow{p_\pi} = \overrightarrow{p_{K^0}} + \overrightarrow{p_{\Lambda^0}} \Rightarrow \overrightarrow{p_{K^0}} = \overrightarrow{p_\pi} - \overrightarrow{p_{\Lambda^0}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_{K^0 x} = p_\pi - p_{\Lambda^0} \cos\theta = 2,076.10^3 \, MeV/c \\ p_{K^0 y} = -p_{\Lambda^0} \sin\theta = -0,424.10^3 \, MeV/c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_{K^0} = \sqrt{p_{K^0 x}^2 + p_{K^0 y}^2} \\ \tan\varphi = \dfrac{p_{K^0 y}}{p_{K^0 x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{K^0} = 2,12.10^3 \, MeV/c \\ \varphi = -11^o 33' \end{cases}$$

Trong hệ quy chiếu khối tâm:

Dùng phép biến đổi Lorentz giữa hệ quy chiếu PTN và hệ quy chiếu khối tâm:

$$p'_x = \gamma\left(p_x - EV/c^2\right); p'_y = p_y; p'_z = p_z; E' = \gamma\left(E - p_x V\right)$$

Thay số, ta được $\begin{cases} p'_{K^0x} = 0,0715.10^3\ MeV/c \\ p'_{K^0y} = -0,424.10^3\ MeV/c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p'_{K^0} = 0,83.10^3\ MeV/c \\ \varphi' = -30^o 13' \end{cases}$

Sửa Bài 18 a) Cách 1: Giả sử photon tự do có thể tự sinh ra cặp $\left(e^+ + e^-\right)$ thì sau khi sinh ra, cặp $\left(e^+ + e^-\right)$ hút nhau bởi lực hút tĩnh điện, dẫn đến sự hủy cặp, tạo thành photon trở lại. Muốn sinh cặp, sau khi cặp $\left(e^+ + e^-\right)$ sinh ra, phải được tách bởi điện trường ngoài của một hạt nào đó.

Cách 2: giả sử photon tự do có thể sinh cặp với điều kiện $\lambda \le \lambda_0$ nào đó (bởi vì photon phải có năng lượng tối thiểu bằng năng lượng nghỉ của các hạt sinh ra). Khi đó, một quan sát viên K trong phòng thí nghiệm thấy được hiện tượng sinh cặp. Trong khi đó, tồn tại một quan sát viên K' nhìn thấy bước sóng của photon tự do dài hơn bởi hiệu ứng Doppler và dài đến mức $\lambda' \ge \lambda_0$, tức là quan sát viên K' này không thấy hiện tượng sinh cặp gây ra. Mà theo tiên đề 1 của Einstein, hai quan sát viên này phải cùng thấy hoặc cùng không thấy hiện tượng sinh cặp diễn ra. Do đó, giả thiết quan sát viên K thấy hiện tượng sinh cặp là vô lý. Vậy hiện tượng sinh cặp của photon tự do không xảy ra. (Chú ý: nếu có thêm một hạt tương tác với photon thì năng lượng cần thiết do sự sinh cặp này sẽ thay đổi, và tùy thuộc vào hạt bên ngoài này).

Cách 3: Giả sử photon tự do có thể sinh cặp, khi đó ta có: $\begin{cases} \varepsilon = E_1 + E_2 \\ \vec{p} = \vec{p_1} + \vec{p_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \\ p^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2\vec{p_1}.\vec{p_2} \end{cases}$.

$$\Rightarrow \varepsilon^2 - p^2c^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 - p_1^2c^2 - p_2^2c^2 - 2\vec{p_1}\vec{p_2}c^2$$

$$\Rightarrow 0 = 2E_0^2 + 2E_1E_2 - 2\vec{p_1}\vec{p_2}c^2 \qquad (1)$$

Mà ta lại có: $\begin{cases} E_1^2 - p_1^2c^2 = E_0^2 > 0 \Rightarrow \left|\vec{p_1}c\right| < E_1 \\ E_2^2 - p_2^2c^2 = E_0^2 > 0 \Rightarrow \left|\vec{p_2}c\right| < E_2 \end{cases}$ và $-2\left|\vec{p_1}c\right|\left|\vec{p_2}c\right| \le -2\vec{p_1}\vec{p_2}c^2 \le 2\left|\vec{p_1}c\right|\left|\vec{p_2}c\right|$ nên $-2\vec{p_1}\vec{p_2}c^2 \le 2E_1E_2$.

Do đó, vế phải của phương trình (1) luôn lớn hơn không. Hiệu ứng sinh cặp của photon tự do không thể xảy ra.

Cách 4: Giả sử photon tự do có thể sinh cặp, khi đó: $\begin{cases} \varepsilon = E_{he} \\ \vec{p} = \vec{p_{he}} \end{cases} \Rightarrow \varepsilon^2 - p^2c^2 = E_{he}^2 - p_{he}^2c^2$.

Áp dụng kết quả câu 14: $E_{he}^2 - p_{he}^2c^2 \ge \left(\sum E_{0i}\right)^2 \Rightarrow \left(\sum E_{0i}\right)^2 \le 0 \Rightarrow E_{0i} = 0$. Các hạt sinh ra phải có khối lượng nghỉ bằng 0. Do vậy, không thể có sự sinh cặp của photon tự do.

b) Nếu có tác dụng của một trường ngoài do một hạt nào đó đứng yên, áp dụng kết quả bài 16, sự sinh cặp xảy ra khi và chỉ khí: hạt photon thỏa $\varepsilon \ge \dfrac{4m_e^2 - M^2}{2M}c^2$, tức là các photon năng lượng cao có khả năng sinh cặp.

c) Nếu photon bay gần một hạt electron đứng yên, thì sau khi sinh cặp ta được 2 hạt electron và 1 hạt positron chuyển động. Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng và động lượng do hệ, ta có:

$$\begin{cases}\varepsilon + E_0 = E_1 + E_2 + E_3 \\ \vec{p} = \vec{p_1} + \vec{p_2} + \vec{p_3}\end{cases} \Rightarrow \left(E_1 + E_2 + E_3\right)^2 - \left(\vec{p_1} + \vec{p_2} + \vec{p_3}\right)^2 c^2 \geq 9E_0^2$$

$$\Rightarrow \left(\varepsilon + E_0\right)^2 - p^2c^2 \geq 9E_0^2 \Rightarrow 2\varepsilon E_0 \geq 8E_0^2 \Rightarrow \varepsilon \geq 4E_0 = 2MeV$$

Dấu = xảy ra, tức năng lượng của photon đạt cực tiểu, khi đó, các hạt sinh ra có cùng một vận tốc.

d) Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng và động lượng, ta có:

$$\begin{cases}\varepsilon + E = E_1 + E_2 + E_3 \\ \vec{p} + \vec{p_0} = \vec{p_1} + \vec{p_2} + \vec{p_3}\end{cases} \Rightarrow \left(E_1 + E_2 + E_3\right)^2 - \left(\vec{p_1} + \vec{p_2} + \vec{p_3}\right)^2 c^2 \geq 9E_0^2$$

$$\Rightarrow \left(\varepsilon + E\right)^2 - \left(p - p_0\right)^2 c^2 \geq 9E_0^2 \Rightarrow 2\varepsilon E + 2pp_0c^2 \geq 8E_0^2$$

$$\Rightarrow \varepsilon\left(E + p_0c\right) \geq 4E_0^2 \Rightarrow E + p_0c = 4E_0^2/\varepsilon$$

Lại có: $E - p_0c = \dfrac{E_0^2}{E + p_0c} = \varepsilon/4$, từ đó suy ra: $E = 2E_0^2/\varepsilon + \varepsilon/8 \approx 50000MeV \gg E_0 = 0,5MeV$

e) Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng và động lượng, ta có: $\begin{cases}2E_0 + T = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \vec{p} = \vec{p_1} + \vec{p_2}\end{cases}$.

Do hai photon sinh ra giống nhau nên năng lượng của chúng là: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = E_0 + T/2 \Rightarrow p_1 = p_2 = E_0/c + T/2c$.

Gọi θ là góc hợp bởi hai photon, ta có: $\vec{p} = \vec{p_1} + \vec{p_2} \Rightarrow p^2 = 2p_1^2\left(1 + \cos\theta\right) \Rightarrow p^2c^2 = 2p_1^2c^2\left(1 + \cos\theta\right)$.

Mà $p^2c^2 = \left(2E_0 + T\right)T$ nên suy ra: $\left(1 + \cos\theta\right) = \dfrac{2\left(2E_0 + T\right)T}{\left(2E_0 + T\right)^2} \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{T - 2E_0}{2E_0 + T}$

f) Từ định luật bảo toàn năng lượng, ta thấy, nếu photon 1 có bước sóng nhỏ nhất (năng lượng lớn nhất) thì photon 2 có bước sóng dài nhất (năng lượng bé nhất).

$$\begin{cases}2E_0 + T = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \vec{p} = \vec{p_1} + \vec{p_2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2E_0 + T = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ p_1 + p_2 \geq p \geq p_1 - p_2 \geq 0 \left(\text{bdt tam giác}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}2E_0 + T = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ pc \geq p_1c - p_2c\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2E_0 + T \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \leq pc\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\varepsilon_1 \leq \dfrac{2E_0 + T + \sqrt{\left(2E_0 + T\right)T}}{2} \\ \varepsilon_2 \geq \dfrac{2E_0 + T - \sqrt{\left(2E_0 + T\right)T}}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2hc}{2E_0 + T + \sqrt{\left(2E_0 + T\right)T}} \leq \lambda \leq \frac{2hc}{2E_0 + T - \sqrt{\left(2E_0 + T\right)T}}$$

Sửa Bài 19 Áp dụng biến đổi Lorentz $p'_x = \gamma\left(p_x - EV/c^2\right); p'_y = p_y; p'_z = p_z; E' = \gamma\left(E - p_xV\right)$ cho trường hợp của photon.

a) Nguồn đứng yên, máy thu chuyển động với vận tốc v:

$$hf_M = \varepsilon_M = \frac{\varepsilon_S - vp_{Sx}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1-\frac{v}{c}\cos\theta_M}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} hf_S \Rightarrow f_M = \frac{1-\frac{v}{c}\cos\theta_M}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} f_S$$

b) Nguồn chuyển động với vận tốc v, máy thu đứng yên:

$$hf_S = \varepsilon_S = \frac{\varepsilon_M - vp_{Mx}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1-\frac{v}{c}\cos\theta_S}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} hf_M \Rightarrow f_S = \frac{1-\frac{v}{c}\cos\theta_S}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} f_M$$

c) Giả sử nguồn đứng yên, máy thu chuyển động với vận tốc v. Điều này cũng giống như nguồn chuyển động với vận tốc (-v) và máy thu đứng yên. Áp dụng kết quả câu 5b cho ánh sáng, ta có:

$c\cos\theta_M = \frac{c\cos\theta_S + v}{1+v\cos\theta_S/c}$. Kết hợp với kết quả câu a, ta có:

$$f_M = \frac{1-\frac{v}{c}\cos\theta_M}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} f_S = \frac{1-\frac{v\cos\theta_S/c + v^2/c^2}{1+v\cos\theta_S/c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} f_S = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+v\cos\theta_S/c} f_S$$

$$\Rightarrow f_S = \frac{1+v\cos\theta_S/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} f_M$$

Vậy kết quả câu a và câu b là phù hợp với nhau.

d) Giả sử ta có một máy "thu – phát" đứng yên trong hệ quy chiếu K. Khi đó, nguồn phát ra f_S và máy thu nhận f_M. Máy "thu – phát" đứng yên này nhận tín hiệu từ nguồn với tần số f' và phát ra tần số đó cho máy thu.

Từ kết quả câu a và câu b, ta có:

$$f_S = \frac{1-\frac{v}{c}\cos\theta_S}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} f' \Rightarrow f' = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c}\cos\theta_S} f_S \text{ và } f_M = \frac{1-\frac{v}{c}\cos\theta_M}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} f' \Rightarrow f' = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c}\cos\theta_M} f_M .$$

Từ đó suy ra biểu thức của hiệu ứng Doppler tổng quát là: $\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c}\cos\theta_M} f_M = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c}\cos\theta_S} f_S$

Sửa Bài 20 Trong hệ quy chiếu K $d^3xd^3p = dxdydzdp_xdp_ydp_z$.

Trong hệ quy chiếu K': $d^3x'd^3p' = dx'dy'dz'dp'_xdp'_ydp'_z$.

Áp dụng phép biến đổi Lorentz cho xung lượng và tọa độ ở thời điểm t và năng lượng E xác định, ta có:

$$\begin{cases} dx' = \gamma\left(dx - \beta c dt\right) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = \gamma\left(dt - \beta \dfrac{dx}{c}\right) \end{cases} \text{ và } \begin{cases} dp'_x = \gamma\left(dp_x - \dfrac{\beta}{c} d\varepsilon\right) \\ dp'_y = dp_y \\ dp'_z = dp_z \\ d\varepsilon' = \gamma\left(d\varepsilon - c\beta dp_x\right) \end{cases}$$

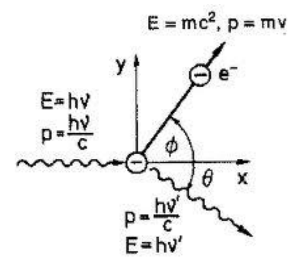
Ta chọn hệ quy chiếu K' gắn với chuyển động của phần tử thể tích nào đó. Tức là: $\gamma = \gamma(p)$. Khi đó, phần tử thể tích này đứng yên trong hệ K', và ta có: $dt = 0 \Rightarrow dx' = \gamma(p)dx$

và $d\varepsilon' = \gamma(p)\left(d\varepsilon - c\beta dp_x\right) = 0 \Rightarrow d\varepsilon = c\beta dp_x \Rightarrow dp'_x = \gamma(p)\left(dp_x - \dfrac{\beta}{c} d\varepsilon\right) = \dfrac{dp_x}{\gamma(p)}$

Từ đây suy ra: $dxdydzdp_xdp_ydp_z = dx'dy'dz'dp'_xdp'_ydp'_z \Rightarrow d^3xd^3p = d^3x'd^3p'$

Sửa Bài 21

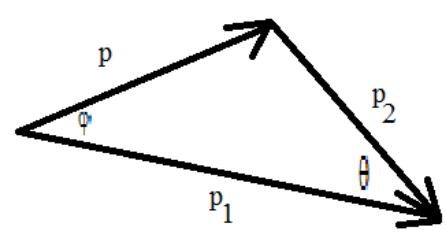
a) Hiệu ứng Comptonchủ yếu chỉ xảy ra với các bước sóng cực ngắn, cỡ tia X. Do khi đó, electron trong mạng tinh thể có công thoát không đáng kể so với năng lượng của photon. Từ định luật bảo toàn động lượng và năng lượng, ta có:



$$\begin{cases} \varepsilon_1 + E_e = \varepsilon_2 + E \\ \overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{p_2} + \vec{p} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + E_e = E \\ \vec{p} = \overrightarrow{p_1} - \overrightarrow{p_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E^2 - E_e^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 - 2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2E_e\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right) \\ p^2c^2 = p_1^2c^2 + p_2^2c^2 - 2\overrightarrow{p_1c}\,\overrightarrow{p_2c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_1\varepsilon_2\left(1 - \cos\theta\right) = E_e\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right) \Rightarrow \frac{hc}{\varepsilon_2} - \frac{hc}{\varepsilon_1} = \frac{hc}{E_e}\left(1 - \cos\theta\right) \Rightarrow \Delta\lambda = 2\frac{h}{m_ec}\sin^2\theta$$

b)Áp dụng định lý hàm sin, ta có: $\sin\varphi = \dfrac{p_2}{p}\sin\theta (1)$



Áp dụng định lý hàm cos, ta có: $\cos\varphi = \dfrac{p^2 + p_1^2 - p_2^2}{2pp_1} = \dfrac{p_1 - p_2\cos\theta}{p}(2)$

Từ (1) và (2), ta có: $\cot\varphi = \dfrac{\left(1 + \dfrac{\lambda_c}{\lambda}\right)\left(1 - \cos\theta\right)}{\sin\theta} = \left(1 + \dfrac{\varepsilon_1}{E_e}\right)\tan\dfrac{\theta}{2}$

c) Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng, ta có: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 + K_e \Rightarrow \varepsilon_1^2 - 2\varepsilon_1K_e + K_e^2 = \varepsilon_2^2 \,(3)$

Áp dụng định luật bảo toàn động lượng, ta có: $\overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{p_2} + \vec{p} \Rightarrow p_1^2c^2 - 2p_1pc^2\cos\varphi + p^2c^2 = p_2^2c^2 \,(4)$

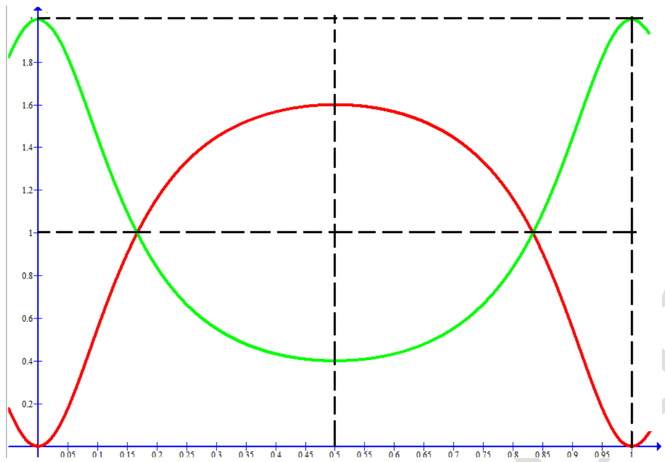
Ta có hệ thức liên hệ: $p^2c^2 = K_e^2 + 2K_eE_e \,(5)$

Từ (3), (4), (5) suy ra:

$$\cos\varphi\sqrt{1 + 2\frac{E_e}{K_e}} = 1 + \frac{E_e}{\varepsilon_1} \Leftrightarrow 1 + 2\frac{E_e}{K_e} = \frac{\left(1 + \dfrac{E_e}{\varepsilon_1}\right)^2}{\cos^2\varphi} \Leftrightarrow K_e = \frac{2E_e}{\left(1 + \dfrac{E_e}{\varepsilon_1}\right)^2\left(1 + \tan^2\varphi\right) - 1}$$

a) Ta có: áp dụng kết quả của bài 22:

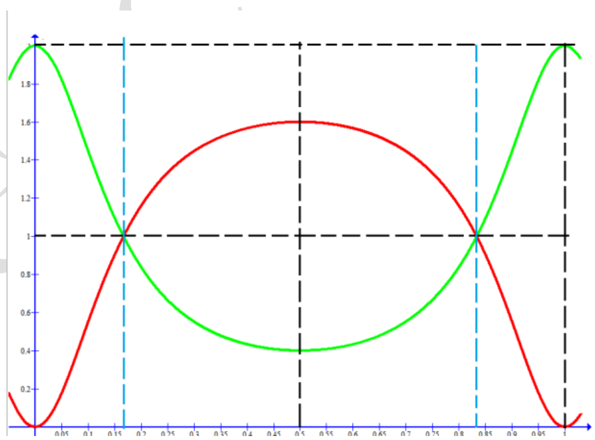
$$K_e = \frac{2\varepsilon_1 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2\sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{E_e}{\varepsilon_1}} = \frac{8E_e \sin^2 \frac{\theta}{2}}{4\sin^2 \frac{\theta}{2} + 1}$$ còn $$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{2\frac{\varepsilon_1}{E_e}\sin^2 \frac{\theta}{2} + 1} = \frac{2E_e}{4\sin^2 \frac{\theta}{2} + 1}$$



Đây là dạng đồ thị của động năng electron tán xạ và năng lượng của photon tán xạ.

b) Khi vuông góc thì $\cot\varphi = \tan\theta = 3\tan\frac{\theta}{2} \Leftrightarrow \theta = 60^o$

Ta thấy tỉ số động năng electron tán xạ và năng lượng photon tán xạ là $4\sin^2\frac{\theta}{2}$ do đó, thay vào ta được động năng electron tán xạ bằng năng lượng của photon tán xạ. Ta có đồ thị sau:



Thực ra trong trường hợp này nhận cả 2 góc là 60^o và 300^o.

c) Photon tán xạ sinh cặp được khi và chỉ khi $\varepsilon_2 \geq 2E_e$ do đó photon tán xạ không thể sinh cặp trong trường hợp này. Điều này là hợp lí bởi photon tới thỏa điều kiện sinh cặp nên photon tán xạ không thể sinh cặp (do photon tán xạ có năng lượng bé hơn photon tới).

d) Ta có, để sinh cặp electron – positron thì

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{2\frac{\varepsilon_1}{E_e}\sin^2\frac{\theta}{2} + 1} \geq 2E_e \Leftrightarrow \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\varepsilon_1}{2E_e}\right) \geq \sin^2\frac{\theta}{2} \Rightarrow \theta \leq 60^o$$