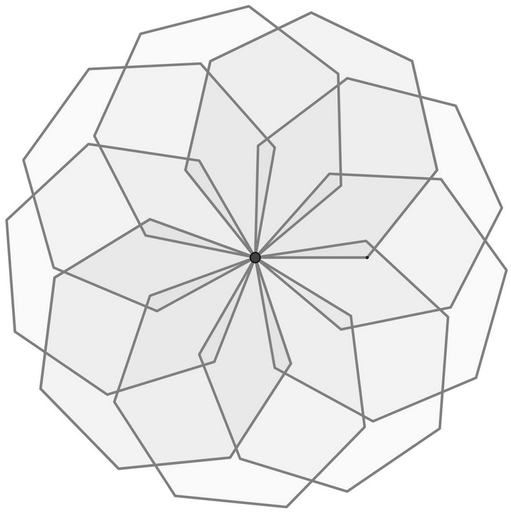
Xác định vị trí khối tâm và momen quán tính của vật rắn bằng phương pháp tích phân

Tạp chí và tư liệu vật lý

Ngày 8 tháng 7 năm 2021

Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về fanpage TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU VẬT LÝ.

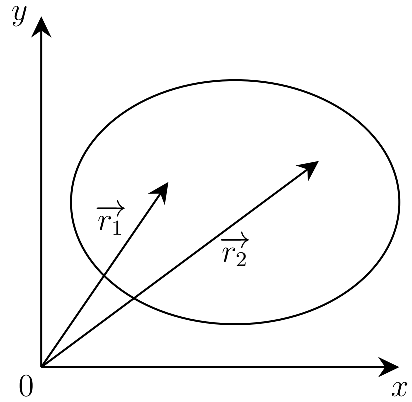
CẢM ƠN CÁC BẠN ĐÃ ỦNG HỘ VÀ THEO DÕI!



1 Khối tâm

1.1 Định nghĩa khối tâm

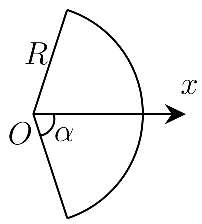
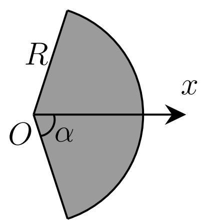
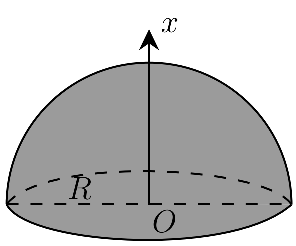
Xét một hệ chất điểm có tổng khối lượng M, chất điểm thứ i có khối lượng m_i được xác định bởi vector vị trí $\overrightarrow{r_i}$. Khối tâm G của hệ chất điểm là một điểm được xác định bởi vector:

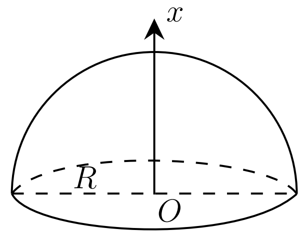


$$\overrightarrow{r_G} = \frac{\sum m_i \overrightarrow{r_i}}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \overrightarrow{r_i}}{M}$$

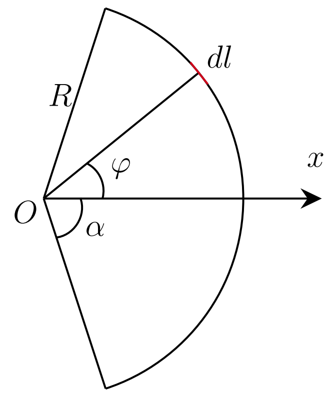
1.2 Tìm vị trí khối tâm của một số vật

Bảng vị trí khối tâm của một số vật rắn thông dụng có khối lượng phân bố đều.

Cung tròn bán kính R góc ở tâm 2α		$x_G = \dfrac{R}{\alpha}\sin\alpha$
Bản hình quạt bán kính R, góc ở tâm 2α		$x_G = \dfrac{2R}{3\alpha}\sin\alpha$
Bán cầu đặc đồng chất		$x_G = \dfrac{3R}{8}$

Bán cầu rỗng		$x_G = \dfrac{R}{2}$

○ Xác định vị trí của khối tâm của một cung tròn với góc ở tâm là 2α.



Do tính chất đối xứng, khối tâm của cung nằm trên trục đối xứng x của nó.
Xét một cung vô cùng bé có góc chắn ở tâm là $d\varphi$.
Khối lượng của cung này được tính bởi:

$$dm = \lambda dl = \frac{M}{2\alpha R}R.d\varphi = \frac{M}{2\alpha}d\varphi$$

Hoành độ khối tâm của phần tử này: $x = R\cos\varphi$.

$$x_G = \frac{1}{M}\int xdm = \frac{1}{M}\int_{-\alpha}^{\alpha} R\cos\varphi\frac{M}{2\alpha}d\varphi = \frac{R}{\alpha}\sin\alpha$$

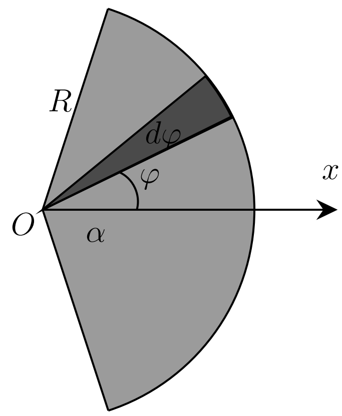
Nhận xét. Nếu cung đang xét là nửa đường tròn ta có: $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow x_G = \frac{2R}{\pi}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{2R}{\pi}.$$

○ Xác định vị trí của khối tâm của một bản hình quạt với góc ở tâm là 2α.

Do tính chất đối xứng, khối tâm của hình quạt nằm trên trục đối xứng x của nó.

Cách 1.



Xét hình quạt vi cấp có góc chắn ở tâm là $d\varphi$ vô cùng bé.
Hình này có khối lượng: $\dfrac{dm}{M} = \dfrac{d\varphi}{2\alpha} \Rightarrow dm = \dfrac{M}{2\alpha}d\varphi$.
Ta có thể xem hình này là tam giác cân nên tọa độ khối tâm của phần tử này: $x = \dfrac{2R\cos\varphi}{3}$.

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{M}\int xdm = \frac{1}{M}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{2R\cos\varphi}{3}\frac{M}{2\alpha}d\varphi \\ &= \frac{R}{3\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi d\varphi = \frac{2R}{3\alpha}\sin\alpha \end{aligned}$$

Cách 2. Xem hình quạt gồm vô số cung tròn có cùng góc mở 2α có bề dày dr vô cùng bé.
Khối lượng của cung này: $dm = \sigma 2\alpha r dr = \dfrac{M}{\alpha R^2}2\alpha r dr = \dfrac{2M}{R^2}rdr$.

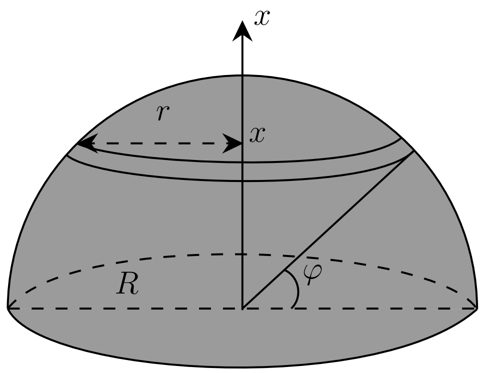
Tọa độ khối tâm của cung: $x = \dfrac{r}{\alpha}\sin\alpha$.

$$x_G = \frac{1}{M}\int x dm = \frac{1}{M}\int \frac{r}{\alpha}\sin\alpha \frac{M}{R^2}2rdr = \frac{2\sin\alpha}{\alpha R^2}\int_0^R r^2 dr = \frac{2R}{3\alpha}\sin\alpha$$

Nhận xét. Nếu hình quạt đang xét là nửa hình tròn ta có: $\alpha = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x_G = \dfrac{4R}{3\pi}$.

○ Xác định vị trí của khối tâm của một bán cầu đặc, đồng chất.

Chia khối bán cầu thành các khối nón cụt mỏng có các đáy song song với mặt phẳng của bán cầu và có độ dày dx.
Thể tích của hình nón cụt với đáy có hoành độ x là:



$$dV = \frac{1}{3}\pi\left[r^2 + (r+dr)^2 + r(r+dr)\right]dx \approx \pi r^2 dx$$

Mà $\begin{cases} r = R\cos\alpha \\ x = R\sin\alpha \end{cases}$. Suy ra

$$dV = \pi R^3 \cos^3\varphi d\varphi$$

Khối lượng dm của khối trụ này được tính bởi:

$$dm = \rho.dV = \frac{M}{\frac{2}{3}\pi R^3}dV = \frac{3M}{2}\cos^3\varphi d\varphi$$

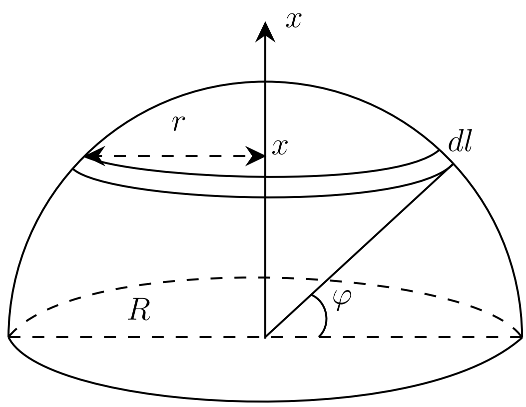
Tọa độ khối tâm của bán cầu đang xét:

$$x_G = \frac{1}{M}\int x dm = \frac{3}{2}R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^3\varphi d\varphi = \frac{3R}{8}$$

○ Xác định vị trí của khối tâm của một bán cầu rỗng.

Chia khối bán cầu rỗng thành các hình nón cụt mỏng có hai đáy song song với mặt phẳng của bán cầu và có chiều dài của đường sinh là dl.

Xét hình nón cụt với đáy có tọa độ là $x = R\sin\varphi$. Diện tích xung quanh của hình này là:



$$dS = \pi(r + r + dr)dl \approx 2\pi r dl = 2\pi R\cos\varphi R d\varphi = 2\pi R^2\cos\varphi d\varphi$$

Khối lượng dm của hình này được tính bởi:

$$dm = \sigma.dS = \frac{M}{2\pi R^2}dS = M\cos\varphi d\varphi$$

Tọa độ khối tâm của bán cầu đang xét:

$$x_G = \frac{1}{M}\int xdm = R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi = \frac{R}{2}$$

2 Momen quán tính, các phương trình động lực học

2.1 Khái niệm momen quán tính

Momen quán tính của một vật rắn là đại lượng đặc trưng cho mức quán tính của chuyển động quay và được xác định bằng công thức:

$$I = \sum m_i r_i^2$$

Định lý trục song song (định lý Steiner - Huygens)

$$I_K = I_G + Md^2$$

trong đó d là khoảng cách giữa hai trục quay song song đi qua G và K vuông góc với mặt phẳng O.

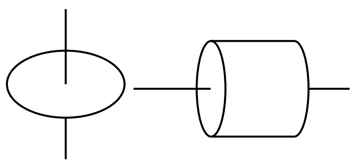
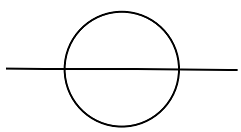
Định lý trục vuông góc (cho vật phẳng)

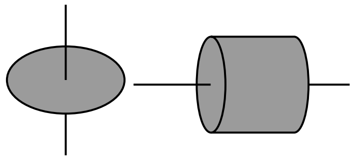
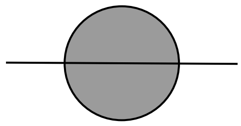
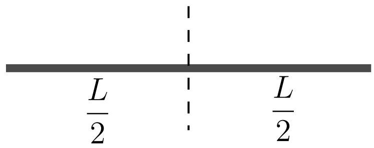
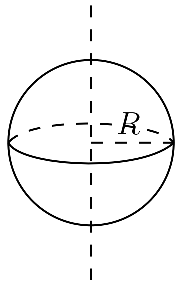
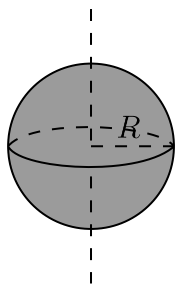
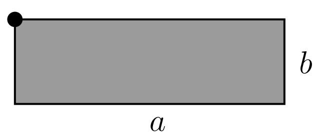
Xét một vật phẳng, mỏng nằm trong mặt phẳng xy.

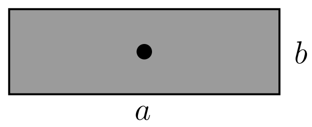
$$\begin{cases} I_x = \displaystyle\int y^2 dm \\ I_y = \displaystyle\int x^2 dm \\ I_z = \displaystyle\int (x^2+y^2) dm \end{cases} \Rightarrow I_z = I_x + I_y$$

2.2 Tính một số momen quán tính

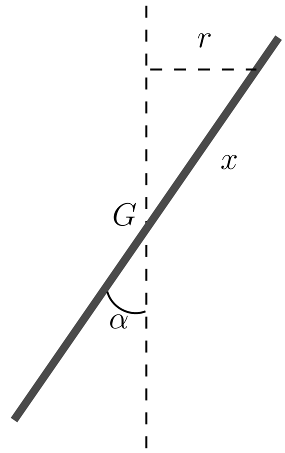
Bảng momen quán tính của một số vật rắn thông dụng có khối lượng M phân bố đều.

Vòng tròn hay hình trụ rỗng		$I_G = MR^2$
Vòng tròn hoặc hình trụ rỗng quay quanh một đường kính		$I_G = \frac{MR^2}{2}$

Đĩa tròn đồng chất hay hình trụ đặc		$I_G = \dfrac{MR^2}{2}$
Hình trụ đặc hay đĩa tròn đồng chất quay quanh một đường kính		$I_G = \dfrac{MR^2}{4} + \dfrac{ML^2}{12}$
Thanh dài L đối với trục quay đi qua trung điểm và vuông góc với thanh		$I_G = \dfrac{ML^2}{12}$
Quả cầu rỗng		$I_G = \dfrac{2MR^2}{3}$
Quả cầu đặc		$I_G = \dfrac{2MR^2}{5}$
Bản mỏng hình chữ nhật, chiều dài các cạnh là a và b. Đối với một trục quay đi qua 1 đỉnh và vuông góc với mặt phẳng khung		$I = \dfrac{M(a^2 + b^2)}{3}$

Bản mỏng hình chữ nhật, chiều dài các cạnh là a và b. Đối với trục quay đi qua G và vuông góc với mặt phẳng khung		$I = \dfrac{M(a^2+b^2)}{12}$

- **Tính momen quán tính của thanh mảnh đối với trục quay đi qua trung điểm G của thanh và hợp với thanh một góc α.**



Xét phần tử có chiều dài dx rất bé trên thanh và cách G một đoạn x.
Momen quán tính của phần tử này:

$$dI = r^2dm = x^2\sin^2\alpha\frac{M}{L}dx$$

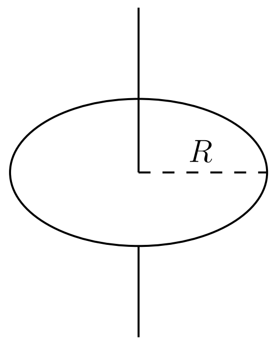
$$\Rightarrow I = \frac{M\sin^2\alpha}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}x^2dx = \frac{ML^2}{12}\sin^2\alpha$$

Nhận xét. Nếu thanh quay quanh trục qua trung điểm và vuông góc với thanh.

$$I = \int r^2dm = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} r^2\sigma dr = \frac{1}{12}\sigma L^3 = \frac{1}{12}\frac{M}{L}L^3 = \frac{1}{12}ML^2$$

- **Tính momen quán tính của vòng tròn đối với trục quay đi qua tâm, vuông góc với mặt phẳng vòng.**

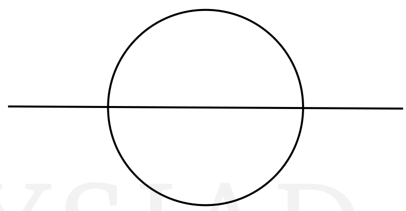
$$I = \int_0^M R^2dm = MR^2$$



- **Tính momen quán tính của một vòng tròn đối với trục quay đi qua tâm và nằm trong mặt phẳng của vành.**

Cách 1.

Xét phần tử có chiều dài dl trên vòng.
Khối lượng của phần tử này là



$$dm = \lambda dl = \frac{M}{2\pi R}Rd\alpha = \frac{M}{2\pi}d\alpha$$

Momen quán tính của phần tử dl đối với trục quay đang xét

$$dI = r^2 dm = R^2 \sin^2 \alpha \frac{M}{2\pi} d\alpha$$

$$\Rightarrow I = \frac{MR^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha d\alpha = \frac{MR^2}{2}$$

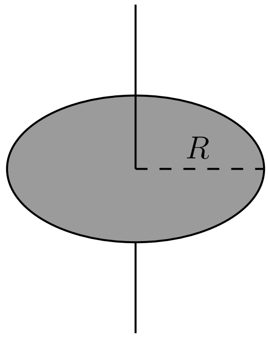
Cách 2. Áp dụng định lý trục vuông góc.
Do tính chất đối xứng nên $I_x = I_y$.

$$I_G = \sum m_i r_i^2 = \sum m_i x_i^2 + \sum m_i y_i^2 = I_y + I_x = 2I_x$$

$$\Rightarrow I_x = \frac{1}{2} I_G = \frac{MR^2}{2}$$

○ Tính momen quán tính của đĩa tròn đối với trục quay đi qua tâm, vuông góc với mặt phẳng đĩa.

Chia đĩa thành các vòng tròn. Xét một vòng tròn có bán kính r và bề dày dr vô cùng bé.
Khối lượng dm của phần tử này:



$$dm = \sigma 2\pi r dr = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{2M}{R^2} r dr$$

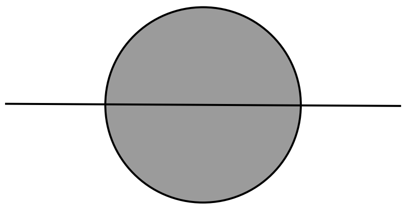
Momen quán tính của phần tử này đối với trục quay đang xét:

$$dI = r^2 dm = \frac{2M}{R^2} r^3 dr \Rightarrow I = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{MR^2}{2}$$

○ Tính momen quán tính của đĩa tròn đối với trục quay đi qua tâm, nằm trong mặt phẳng đĩa.

Cách 1.

Chia đĩa thành các vòng tròn. Xét một vòng tròn có bán kính r và bề dày dr vô cùng bé.
Khối lượng dm của phần tử này:



$$dm = \sigma 2\pi r dr = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{2M}{R^2} r dr$$

Momen quán tính của phần tử này đối với trục quay đang xét:

$$dI = \frac{1}{2} r^2 dm = \frac{M}{R^2} r^3 dr$$

$$\Rightarrow I = \frac{M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{MR^2}{4}$$

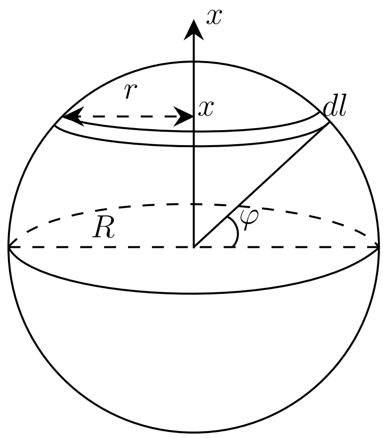
Cách 2. Áp dụng định lý trục vuông góc.
Do tính chất đối xứng nên $I_x = I_y$.

$$I_G = \sum m_i r_i^2 = \sum m_i x_i^2 + \sum m_i y_i^2 = I_y + I_x = 2I_x$$

$$\Rightarrow I_x = \frac{1}{2} I_G = \frac{MR^2}{4}$$

○ Tính momen quán tính của quả cầu rỗng đối với bất cứ trục nào đi qua tâm.

① Xét một vành tròn có bán kính r và bề dày dl vô cùng bé.



Khối lượng dm của phần tử này:

$$dm = \sigma 2\pi r dl = \frac{M}{4\pi R^2} 2\pi r dl = \frac{M}{2R^2} r dl$$

Momen quán tính của phần tử này đối với trục quay đang xét:

$$dI = r^2 dm = \frac{M}{2R^2} r^3 dl$$

Thay $\begin{cases} r = R\cos\varphi \\ dl = Rd\varphi \end{cases}$ vào, ta được

$$dI = \frac{M}{2} R^2 \cos^3\varphi d\varphi \Rightarrow I = \frac{M}{2} R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi d\varphi = \frac{2MR^2}{3}$$

② Theo định nghĩa

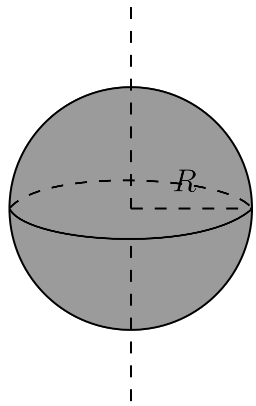
$$\begin{cases} I_x = \displaystyle\int (y^2 + z^2) dm \\ I_y = \displaystyle\int (x^2 + z^2) dm \\ I_z = \displaystyle\int (x^2 + y^2) dm \end{cases}$$

Vì 3 trục x, y, z tương đương nhau (tính chất đối xứng cầu) nên ta có

$$I_x + I_y + I_z = 2\int (x^2 + y^2 + z^2) dm = 2\int r^2 dm = 2MR^2$$

$$\Rightarrow I_x = I_y = I_z = \frac{2MR^2}{3}$$

○ Tính momen quán tính của quả cầu đặc.



Xét quả cầu rỗng có bán kính r và bề dày dr vô cùng bé.
Khối lượng dm của phần tử này:

$$dm = \rho 4\pi r^2 dr = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} 4\pi r^2 dr = \frac{3M}{R^3} r^2 dr$$

Momen quán tính của phần tử này đối với trục quay qua tâm:

$$dI = \frac{2}{3} r^2 dm = \frac{2M}{R^3} r^4 dr$$

$$\Rightarrow I = \frac{2M}{R^3} \int_0^R r^4 dr = \frac{2MR^2}{5}$$

Câu 1 Tính momen quán tính của một tấm mỏng hình bán trụ có bán kính R, khối lượng m đối với trục quay đi qua tâm O và vuông góc với mặt phẳng của tấm.

Lời giải. Ta ghép hai tấm giống hệt nhau thành một đĩa tròn, bán kính R, khối lượng $2m$. Gọi I_O là momen quán tính của taams hình bán trụ đối với tâm O, I là momen quán tính của đĩa tròn đối với tâm O. Ta có:

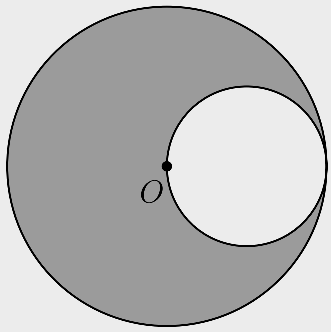
$$I = 2I_O = \frac{1}{2}2mR^2$$

Suy ra

$$I_O = \frac{1}{2}mR^2$$

▽

Câu 2
Một đĩa đồng chất bán kính R có thủng 1 lỗ tròn với bán kính $\frac{R}{2}$. Tâm của lỗ cách tâm đĩa khoảng $\frac{R}{2}$. Biết khối lượng của phần còn lại của đĩa là m. Tìm momen bán kính của đĩa đó với trục đi qua khối tâm của đĩa và vuông góc với mặt phẳng của đĩa.



Lời giải. Gọi m_1; m_2 và m lần lượt là khối lượng của đĩa bán kính R; đĩa bán kính $\frac{R}{2}$.

$$\sigma = \frac{m_1}{\pi R^2} = \frac{m_1}{\pi \frac{R^2}{4}} = \frac{m}{\pi \frac{3R^2}{4}} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = \frac{4}{3}m \\ m_2 = \frac{1}{3}m \end{cases}$$

Momen quán tính của các đĩa này đối với trục quay qua O

$$\begin{cases} I_{1O} = \frac{m_1R^2}{2} & = \frac{2}{3}mR^2 \\ I_{2O} = \frac{1}{2}m_2\left(\frac{R}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{R}{2}\right)^2 & = \frac{1}{8}mR^2 \end{cases}$$ (Định lý Huygens - Steiner)

$$\Rightarrow I_O = I_{1O} - I_{2O} = \frac{13}{24}mR^2$$

Khối tâm G của đĩa sẽ nằm trên đường thẳng OO' và lệch sang phía không có lỗ trống.

$$OG = \frac{m_2\frac{R}{2}}{m} = \frac{R}{6}$$

Áp dụng định lý Huygens - Steiner

$$I_G = I_O - mOG^2 = \frac{37}{72}mR^2$$

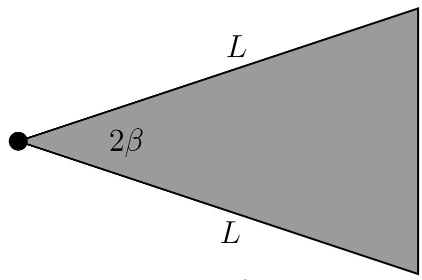
▽

Câu 3 Tính momen quán tính của tam giác cân có khối lượng M, góc ở đỉnh là 2α, và độ dài hai cạnh bằng nhau là L đối với trục đi qua đỉnh tam giác, vuông góc với mặt phẳng hình vẽ.

Lời giải.

Gọi h là chiều cao của tam giác $\Rightarrow h = L\cos\alpha$.
Cắt hình tam giác ra thành các dải mỏng song song với cạnh đáy. Gọi x là khoảng cách từ một dải tới đỉnh.
Khi đó chiều dài của một dải là $l = 2x\tan\alpha$ và khối lượng của dải này

$$dm = \sigma l dx = \sigma 2x \tan\alpha dx$$



Áp dụng định lý trục song song, momen quán tính của dải đối trục quay qua đỉnh tam giác.

$$\begin{aligned}
dI &= \int \left(\frac{l^2}{12} + x^2\right) dm \\
&= \int_0^h \left(\frac{(2x\tan\alpha)^2}{12} + x^2\right) \sigma 2x \tan\alpha dx \\
&= 2\sigma \tan\alpha \left(1 + \frac{\tan^2\alpha}{3}\right) \int_0^h x^3 dx \\
&= \frac{1}{2}\sigma\tan\alpha \left(1 + \frac{\tan^2\alpha}{3}\right) h^4
\end{aligned}$$

Mà diện tích của tam giác $S = h^2\tan\alpha = \dfrac{M}{\sigma}$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}Ml^2\left(1 - \frac{2}{3}\sin^2\alpha\right)$$

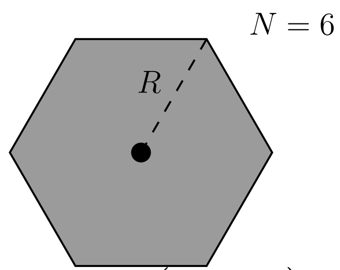
▽

Câu 4 Tính momen quán tính của hình đa giác đều N cạnh có khối lượng M và "bán kính" R đối với trục đi qua tâm, vuông góc với mặt phẳng hình vẽ

Lời giải.

Đa giác đều N cạnh được tạo bởi N tam giác cân, vì vậy chúng ta có thể sử dụng công thức trên với $\alpha = \dfrac{\pi}{N}$.

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}MR^2\left(1 - \frac{2}{3}\sin^2\frac{\pi}{N}\right)$$

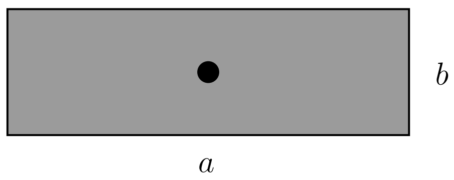


Ta có thể liệt kê giá trị của I cho một vài giá trị của N. Với ký hiệu ngắn gọn $\left(N, \dfrac{I}{MR^2}\right)$, ta có $\left(3, \dfrac{1}{4}\right)$, $\left(4, \dfrac{1}{3}\right)$, $\left(6, \dfrac{5}{12}\right)$, $\left(\infty, \dfrac{1}{2}\right)$.

▽

Câu 5 Tính momen quán tính của hình chữ nhật có khối lượng M và chiều dài các cạnh là a và b đối với trục đi qua tâm, vuông góc với mặt phẳng hình vẽ.

Lời giải.



Gọi z là trục vuông góc với mặt phẳng hình vẽ. Ta biết rằng $I_x = \dfrac{Mb^2}{12}$ và $I_y = \dfrac{Ma^2}{12}$ (bởi vì sự kéo dài một vật thể dọc theo một trục không làm ảnh hưởng tới moment xung quanh trục đó, khi được viết theo tổng khối lượng M). Vì vậy định lý trục vuông góc cho ta

$$I_z = I_x + I_y = \frac{M(a^2+b^2)}{12}$$

▽